T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI OPERATÖR EŞİTSİZLİKLERİ VE ONLARIN UYGULAMALARI

Hamdullah BAŞARAN

Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2019

TEZ ONAYI

Hamdullah BAŞARAN tarafından hazırlanan "**Bazı Operatör Eşitsizlikleri Ve Onların Uygulamaları**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Suna SALTAN** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğrt. Üyesi Işıl AÇIK DEMİRCİ** Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	....

Enstitü Müdürü	**Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR**	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hamdullah BAŞARAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI OPERATÖR EŞİTSİZLİKLERİ VE ONLARIN UYGULAMALARI

Hamdullah BAŞARAN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Bu yüksek lisans tezinde üretici çekirdek, Berezin sembolleri ve pozitif operatör yardımıyla bazı operatör eşitsizlikleri ve onların nasıl kullanıldığı incelenmiştir. Üretici çekirdek teorisi Hilbert uzaylarındaki lineer dönüşümlerle temel bağıntısı olan matematiksel bilimlerdeki birçok alanda uzun bir tarihe dayanır. Ayrıca büyük çalışmalara sahiptir. Birçok bilim alanında ortak konu olan üretici çekirdek ve Berezin sembolü kavramları üzerine birçok sonuç verilmiştir. Teori Kantorovich eşitsizliği, Hölder-McCarthy eşitsizliği ve Berezin sembolleri ve sayısı arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca çalışmamızda Serberg eşitsizliği, Heinz-Kato eşitsizliğin bir genelleştirilmesi ve Berezin sayısı eşitsizliği tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Berezin sembolü, Berezin sayısı, Üretici çekirdekli Hilbert uzay, Kantorovich eşitsizliği, Hölder McCarthy eşitsizliği, Pozitif operatör.

2019, 27 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME OPERATOR INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

Hamdullah BAŞARAN

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In this master's thesis, the some operator inequalities and how they are used are examined with the help of reproducing kernel, Berezin symbols and positive operator. The theory of reproducing kernel has fundamental ties to linear transformations in Hilbert spaces, has a long history in many other fields in mathematical sciences. Also there has been major work on this subject. The results of these concepts are given because the subject that is common in many fields of science is reproducing kernel and the Berezin symbol, we have results on these. The theory examined the relationship between Kantorovich inequality, Hölder-McCarthy inequality and Berezin symbols and Berezin number. In addition Serberg inequality, a generalization of Heinz-Kato inequality and Berezin number inequality are discussed.

Keywords: Berezin symbol, Berezin number, Reproducing kernel Hilbert space, Kantorovich inequality, Hölder-McCarthy inequality, Positive operator.

2019, 27 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini ve akademik deneyimlerini benimle paylaşan, her zaman bana kıymetli zamanını ayırıp yol gösteren çok değerli bilim insanı Danışman Hocam Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

FLY-2018-6700 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Hamdullah BAŞARAN

ISPARTA, 2019

SİMGELER DİZİNİ

$\widetilde{A}$	A operatörünün Berezin sembolü
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\mathbb{T}$	Birim çember
T^*	T nin self-adjoint operatörü
$A(\mathbb{D})$	Birim disk üzerindeki analitik fonksiyonlar uzayı
$H^2 = H^2(\mathbb{D})$	Hardy uzayı
$Ber(A)$	A nın Berezin kümesi
$ber(A)$	A nın Berezin sayısı
$W(T)$	T operatörünün nümerik değeri
$w(T)$	T operatörünün nümerik yarıçapı
$k_{H,\lambda}$	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_{H,\lambda}$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinde üretici çekirdek yardımıyla tanımlı bazı operatör eşitsizliklerin sağlandığı gösterilmiştir ve bununla ilgili bazı incelemeler yapılmıştır. Operatör teorisindeki bazı operatör eşitsizleri için üretici çekirdeklerin yeni uygulamaları gösterilmiştir. Bu konunun daha rahat algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonlar üçüncü bölümde sunulmuştur.

Günümüzün sürekli gelişmekte olan çalışma alanlarında, üretici çekirdek ve Berezin sembollerinin uygulamaları, hem istatistik ve kuantum fiziğin bazı alanlarında hem de matematiğin modern analiz ve pratik alanlarında büyük önem taşımaktadır. Üretici çekirdek ve Berezin sembolleri, frame teori, wawelet teori, konform dönüşümler teorisi, interpolasyon teorisi, Dirichlet serileri toplanabilirlik teorisi, tıbbın bağışıklık sistemi gibi bazı dallarında, haberleşme alanlarında, elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesi gibi birçok alanda kullanılmaktadır ve gün geçtikçe değişik kullanım alanları ortaya çıkmaktadır. Bütün bu sonuçlar Saitoh'un iki kitabında toplanmıştır (Saitoh, 1988, 1997). Bu bağlamda yapılan çalışmada, üretici çekirdek ve Berezin sembolleri metodlarını kullanarak operatör teorisinin operatör eşitsizliklerini sağladığı görülmektedir.

Üretici çekirdekler kullanılarak tanımlanabilen Berezin sembolleri kavramı ilk olarak Rus matematikçisi ve fizikçisi Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972, 1974). Berezin, aslında operatörler için kovaryant ve kontravaryant sembol kavramlarını vermiştir. Berger ve Coburn ise ilk olarak Toeplitz operatörünün kontravaryant sembollerini, yani Toeplitz operatörünün Berezin sembolünü kullanmışlardır (Berger ve Coburn, 1987). Berezin sembolü bir çok durumlarda çok etkileyicidir ve mevcut operatör için önemli bilgiler taşımaktadır. Örneğin, çok sayıda fonksiyonel Hilbert uzaylarında (H^2 Hardy uzayı, L_a^2 Bergman uzayı vb.) A operatörü kendisinin Berezin sembolü $\widetilde{A}$ ile tek olarak tanımlanabilir. Berezin sembolü ağırlıklı olarak Toeplitz ve Hankel operatörleri için uygulanabilir.

Matematiksel analiz son üç yüz yıldır matematiğin önde gelen dallarından biri olmuştur. Aslında, eşitsizlikler, matematiksel analizin merkezi olmuştur. Kanıtlarla, matematik fiziği, teorik ve uygulamalı matematikteki birçok alanda, faydalı uygulamalarıyla birlikte birçok yeni eşitsizliğin bulunmasını sağlayan bu konunun yeni gelişmelerine birçok büyük matematikçi önemli katkı sağlamıştır. Aslında ilk defa 1934 yılında bir bilimsel araştırma olarak başlayan Hardy, Littlewood ve Polya tarafından çığır açan eseri "Eşitsizlikler" adlı kitap ile birlikte matematiksel eşitsizlikler yirminci yüzyılda da modern matematiğin önemli bir dalı haline gelmiştir (Hardy vd., 1967). Bu eşsiz yayın sağlam kanıtlar ve matematikteki faydalı uygulamalarıyla seçkin eşitsizliklerle dolu kesin mantıktaki bir paradigmayı temsil eder. Anthony Zygmund'ın eğlenceli sözünü söylemek yerinde olur. "Hardy, Littlewood ve Polyo'nun kitabı son yirmi, otuz yılda analiz alanındaki en önemli kitaplardan biri olmuştur. Kitabın araştırma üzerinde etkisi olmuştur ve hala etkilemeye devam etmektedir. Şu anda bir insan bu kitabı gözden geçirirken varolan metni değiştirmeyi ne kadar az istediğini farkeder" (Yang, 2014).

Hilbert uzayı üzerinde bir operatör her $x \in H$ için $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ise pozitif operatör olarak adlandırılır. Pozitif operatör kısaca $A \geq 0$ ile tanımlanacaktır. Umegaki (1954) tarafından olasılık teorisinde verilen

$$|Cov(A,B)|^2 \leq Var(A)\, Var(B) \tag{1.1}$$

kovaryans-varyans eşitsizliği ispatlanmıştır (Fujii vd., 1996). Burada $x \in H$ sabit birim vektör ve bir H Hilbert uzayında hareket eden A, B sınırlı operatörleri için $Cov(A,B) = (B^*Ax, x) - (B^*x, x(Ax, x))$ ve $Var(A) = Cov(A,A)$ dir. Kovaryans-varyans eşitsizliği operatör eşitsizlikleri için birçok uygulamalara sahiptir (Fujii vd., 1996, 1997; Izumino ve Seo, 1997). Üstte verilen (1.1) eşitsizliği ünlü Kantorovich eşitsizliğini verir: Eğer A operatörü $M \geq A \geq m > 0$ olacak şekilde H Hilbert uzayı üzerinde bir pozitif operatör ise o zaman her bir birim $x \in H$ vektörü için

$$\langle Ax, x\rangle \left\langle A^{-1}x, x\right\rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \tag{1.2}$$

veya denk olarak

$$\left\langle A^2x, x\right\rangle \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}\left\langle A^2x, x\right\rangle \tag{1.3}$$

(Furuta, 2001). Burada $\frac{(m+M)^2}{4mM}$ sabiti aşağıdaki gibi açıklanabilir : Yani, sırasıyla parantez içindeki pay aritmetik ortalama, payda ise geometrik ortalamadır (Mond ve Pecaric, 1994). Bu sabit, Kantorovich sabiti olarak adlandırılır (Furuta, 2001).

Kovaryans-varyans eşitsizliği Cauchy-Schwarz eşitsizliğine denk olduğu için, Kantorovich eşitsizliği Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin çizgisi üzerindedir. Diğer taraftan, Hölder-McCarthy eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir genelleştirilmesidir (Fujii vd., 1994; McCarthy, 1967).

Bu tez çalışmasında Hölder-McCarthy eşitsizliği ve Kantorovich eşitsizliği ile ilişkili operatör eşitsizlikleri çalışılmıştır. Yani, operatörlerin Berezin sembolleri için bu eşitsizliklerin benzerleri verilmiş ve üretici çekirdekli Hilbert uzaylarının üzerinde operatörlerin bazı bilinen sınıflarının Berezin sayıları için bazı direkt ve ters kuvvet eşitsizliklerini ispatlamada onların uygulamaları ile ilgili yeni sonuçlar ortaya konulmuştur. Böylece, Kantorovich ve Hölder-McCarthy tipli eşitsizlikler ile Berezin sembolü metodunun birlikte kullanılması operatörlerin Berezin sayısı eşitsizliklerine yeni bir bakış açısı kazandırılması hedeflenmiştir.

Burada; genel değerlendirmeye girilmeksizin, başlıklar halinde tez çalışması sonucunda ortaya konan sonuçlar verilmiştir. Genel değerlendirme dördüncü bölümde detaylı olarak verilecektir.

- Üretici çekirdekli Hilbert uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeklerini kullanarak Kantorovich eşitsizliğinin bir zayıf varyantı kullanılmış ve operatörlerin Berezin sayısının tahmininde yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

- Berezin sembolü yardımıyla Hölder-McCarthy eşitsizliği ve Kantorovich eşitsizliği teoreminde (Teorem 1) Kantorovich eşitsizliğinin genişletilmesi ile ilişkili bazı operatör eşitsizlikleri verilmiştir.

- Hölder-McCarthy ve Kantorovich eşitsizlikleri ile ilişkili olan bazı sonuçlar verilmiştir.

- Selberg eşitsizliği, Heinz-Kato eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi ve Berezin sayı eşitsizliği ile ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde, tez kapsamında üzerinde çalışılmış olan problemlerin tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak ifade edilmiştir.

Bu tez çalışması, üretici çekirdekler ve Berezin sembollerinin uygulama alanları ile ilgilidir. Bilim ve teknoloji alanındaki hızlı gelişmelere bağlı olarak yeni uygulama arayışları, üretici çekirdekler ve Berezin sembolü ile ilgili çalışmaları etkili bir şekilde ileri götürmüştür. Berezin sembolleri, Bergman uzaylarında ve Poisson çekirdeğinin Hardy uzaylarında önemli bir role sahiptir. Eğer; Berezin sembollerinin tanımlandığı kümeyi yani Berezin kümesinin operatörünün nümerik değer kümesinin altkümesi olduğu dikkate alınırsa, bu kavramın haberleşme alanında geniş bir uygulamaya sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bunlara ek olarak, elektronların Vieck ve anti-vieck sembolleri Berezin sembolleri ile sıkı bir ilişkiye sahip olmasından dolayı söyleyebiliriz ki Berezin sembollerinin elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesinde var olduğu görülmektedir. Üretici çekirdekler de geniş bir uygulama alanına sahiptir. Üretici çekirdekler teorisinin uygulamasının önemli olduğu öğrenme (learning) teorisinde (mühendisler için önemli olan destek vektör makineleri teorisini kapsayan), yani sürekli fonksiyonların ailesinin altuzayları olarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarının diskleriyle örtü (covering) sayı tahminleri, üretici çekirdekler ve üretici çekirdekli Hilbert uzayları arasındaki düzgün bağıntılar ve Sobolev uzaylarıyla fonksiyonların yaklaşımlarında birçok sonuç bulunmaktadır. Üretici çekirdekler teorisi Hilbert uzayları üzerinde lineer dönüşümleri birleştirdiğinde, diferansiyel denklemler, integral denklemler, Pythagorean teoreminin genelleştirilmesi, ters problemler, sampling teori, lineer dönüşümler gibi çeşitli operatörler ve birçok geniş alanlar üzerine yayılmış verimli uygulamalara sahiptir. Özel durumda Bergman çekirdeği ve Szegö çekirdeği gibi belli üretici çekirdeklerin kompleks analizde birçok geniş sonuçları vardır.

Üretici çekirdekler konusu eskilere dayanan bir konudur, daha önce 1907 – 1909 yıllarında J.Mercer ve S.Zaremba tarafından integral denklemler teorisinde kullanılmaya başlanılmıştır (Zaremba, 1907). Bu konular için genel teori N. Aronszajn'ın adıyla tam olarak ortaya konulmuştur (Aronszajn, 1950). Daha sonraları üretici çekirdekler Fransız bilim adamı Fields ödülü ile mükafatlandırılmış, L. Schwartz tarafından geliştirilmiştir. Bu teori bir başka anlamda M.Krein tarafından kullanılmıştır. Bundan başka, olasılık teorisinde üretici çekirdekler tekniği ilk olarak dünyaca ünlü Rus bilim adamı A. N. Kolmogorov tarafından 1941 yılında kullanılmış ve çok önemli sonuçlara imza atılmıştır (Kolmogorov, 1941). Bundan sonra, E. Parzen ve diğerleri de bu konuyu daha da ileriye götürmüşlerdir. Günümüzün matematiğinde ise, yaklaşık 1972 yılından başlayarak ağırlıklı olarak Japon matematikçisi Saburou Saitoh üretici çekirdekler metoduna yeni bir hayat vermiş gibi, bu yöntemi analizde, diferansiyel denklemlerde ve integral denklemler teorisinde, ters problemler konusunda, operatör teorisinde ve harmonik analizde uygulayarak çok önemli ve orijinal sonuçlar almayı başarmışlardır. Bütün bu sonuçlar Saitoh'un iki kitabında toplanmıştır (Saitoh, 1988, 1997).

Berezin sembolleri kavramı üretici çekirdekler ile tanımlı olup ilk olarak Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972, 1974). Bu kavramın yardımıyla Berezin, kuantum fiziğinin ve istatistiksel fiziğin önemli operatörlerinin (Schrödinger operatörü, Hamilton operatörü, Jacobi operatörü vd.) özdeğerlerinin dağılımı için önemli sonuçlar almıştır. Örneğin ilk olarak nükleer operatörün izini Berezin sembolü ile ifade etmiştir. Ayrıca eliptik tipli kısmi diferensiyel operatörün pozitif özdeğerlerinin sayısı için de önemli formüller elde etmiştir. Daha sonra Berezin sembolünün, operatörler teorisinin iç gelişimindeki rolü daha çok ortaya çıkmıştır. Bundan dolayı ilk olarak Nordgren ve Rosenthal, standart fonksiyonel Hilbert uzayındaki kompakt operatörlerin karakterizasyonunu Berezin sembolü kullanarak vermişlerdir (Nordgren ve Rosenthal, 1994). Ayrıca Bergman uzayındaki Toeplitz operatörlerin Berezin sembolü Poisson çekirdeğinin, $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayındaki rolü kadar, Bergman uzayında da önemli olduğu ortaya çıkmıştır. Bilindiği gibi harmonik fonksiyonların Berezin sembolleri yardımıyla tasvir edilmesi Engliš (1994) ve Axler ve Zheng (1998) tarafından ortaya konulmuştur ve günümüzde farklı alanlarda kullanılışı ve önemi ortaya çıkmaktadır. Berezin sembolü, Hardy, Bergman ve Fock uzaylarını içeren Üretici Uzayın Hilbert Uzayı üzerindeki operatörleri çalışmak için en kullanışlı araçtır. Örneğin; bazı operatörlerin sınırlılığı, tersinirliği, kompaktlığı ve pozitifliği Berezin sembolüyle karakterize edilmiştir. (Chalender vd., 2012; Karaev, 2006, 2013). Berezin kümesi ve Berezin sayısı ise Karaev (2006) tarafından tanımlanmıştır.

1997 de Watson vd. tarafından bir araştırma sunumunda rapor olarak Kantorovich eşitsizliğinin aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak elde edilen eşitsizliği verilmiştir (Watson vd., 1997). Kantorovich eşitsizliğinin Schweitzer (1914), George ve Gabor (1970), Krasnoselskii ve Krein (1952) and Greub ve Rheinboldt (1959) çalışmalarında verilen beş diğer eşitsizliğe denk olduğu verilmiştir (Watson vd., 1997). 1948 de Leonid Vital'evich Kantorovich tarafından verilen aritmetik ortalama ve geometrik ortalama eşitsizliği ile değişik formu elde edilen ve beş diğer önemli eşitsizliğe denk olan ilginç ve yararlı Kantorovich eşitsizliği, dik iniş yönteminin yakınsaklık oranını kurmak için istatistik ve nümerik analizde yararlı bir araçtır. Ayrıca fonksiyonel analiz ve operatör teori ve uygulamalarını içeren matematiğin birçok branşında önemli bir yer tutmaktadır (Drury vd., 2000; Furuta, 1998). Kantorovich eşitsizliğinin ilk genelleştirilmesi Greub ve Rheinboldt tarafından yapılmıştır (Greub ve Rheinboldt, 1959). 1993 yılında Mond ve Pecaric tarafından Kantorovich eşitsizliğinin birkaç çeşiti elde edildi (Mond ve Pecaric, 1994). Mond ve Pecaric' in sonucu 1996 yılında Spain tarafından genelleştirildi (Spain, 1996). Kantorovich eşitsizliğinin bazı diğer genelleştirmeleri 1998 yılında Furuta tarafından verilmiştir (Furuta, 1998). 2008 yıllarında Dragomir tarafından bir Hilbert uzayı üzerinde operatörler için norm ve nümerik yarıçap içeren birkaç Kantorovich tipli eşitsizlikler verilmiştir (Dragomir, 2008). Diğer taraftan bu eşitsizliğin birçok genelleştirilmesi Drury vd. ve Furuta vd. kitabında ve referanslarında bulunabilir (Drury vd., 2000; Furuta vd., 2005). Devamında birçok matematikçi bu konuyu geliştirmişlerdir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada üretici çekirdekler yardımıyla Hölder-McCarthy eşitsizliği ve Kantorovich eşitsizliği ile ilişkili operatör eşitsizlikleri ile ilgili incelemeler yapılmıştır. Operatörlerin Berezin sayısı eşitsizliklerinin yeni uygulamaları verilmiştir. Bu kapsamda ortaya konan problemlerin ve bu problemlere yönelik üretilen çözüm yöntemleri ve sonuçlarının rahatlıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu bölümde ifade edeceğiz.

Tanım 3.1. X bir vektör uzayı, $x,y \in X$ keyfi vektörler ve α skaler olmak üzere

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini gerçekleyen $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.2. X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi $m \to \infty$ ve $n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise o zaman $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer X normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise o zaman X uzayına tam uzay denir (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.3. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir (Furuta, 2002).

Tanım 3.4. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq c\,\|x\|$ olacak şekilde c sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.5. V bir vektör uzayı olsun. $x,y \in V$ için $\langle x,y \rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, $(x,y) \to \langle x,y \rangle$ fonksiyonuna V üzerinde bir iç çarpım; V ye de iç çarpım uzayı denir. Bu iç çarpım uzayı $(V, \langle , \rangle)$ ile gösterilir. Her $x, y, z \in V$ için

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ (pozitif tanımlılık)

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (simetri)

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\langle \alpha x, y \rangle = a \langle x, y \rangle$ ve $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{a} \langle x, y \rangle$

(iv) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.6. Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Furuta, 2002).

Tanım 3.7. Bir H Hilbert uzayında, sınırlı lineer bir $T : H \to H$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $T^* = T$ ise T operatörüne self-adjoint ya da Hermityen operatör adı verilir (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.8. $[a, b]$ aralığında herhangi x_1, x_2 noktaları ve $0 < \lambda < 1$ aralığındaki herhangi bir λ değeri için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.9. H Hilbert uzayında $ST = TS$ olacak şekilde bir S operatörü varsa o zaman T operatörüne tersinebilir operatör denir (Furuta, 2002).

Yardımcı Teorem 3.10. *Bir iççarpım ve buna karşılık gelen norm Cauchy-Schwarz eşitsizliğini ve üçgen eşitsizliğini aşağıdaki şekilde gerçekler:*

(a) *Eşitlik hali, ancak ve ancak, $\{x, y\}$ 'nin lineer bağımlı olması halinde geçerli olmak üzere,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \tag{3.1}$$

dir (Bu eşitsizlik Schwarz eşitsizliği olarak bilinir).

(b) *Söz konusu norm, eşitlik hali, ancak ve ancak,* $y = 0$ *ya da* $y = cx$ *(c reel ve* ≥ 0*) halinde olmak üzere,*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Üçgen Eşitsizliği)} \tag{3.2}$$

eşitsizliğini gerçekler (Kreyszing, 1981).

Tanım 3.11. Kompleks sayıların açık bir Ω kümesi üzerinde, her $\lambda \in \Omega$ için $f \to f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli H uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerindeki f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına "fonksiyonel Hilbert uzayı" ya da "üretici çekirdekli Hilbert uzayı" denir (Halmos, 1982).

Klasik Riesz temsil teoreminden, $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu vardır. $\Omega \times \Omega$ kümesi üzerinde $k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k(z, \lambda)$ ile tanımlanan bu k fonksiyonuna "$\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği" denir (Halmos, 1982).

Yardımcı Teorem 3.12. *$\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olsun. O zaman $\mathcal{H}$ uzayının k üretici çekirdeği*

$$k_\lambda(z) = k(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilir (Stroethoff, 1997).

İspat. $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olduğundan $z \in \Omega$ için

$$k_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_n, e_n \rangle e_n$$

yazılabilir. Parseval eşitliğinden $z \in \Omega$ olmak üzere

$$k(z, \lambda) = \langle k_\lambda, k_z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_n, e_n \rangle \langle e_n, k_z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

olup böylece ispat tamamlanır (Stroethoff, 1997). $\square$

Üstteki Yardımcı Teorem'den $k_\lambda(z) = \overline{k_z(\lambda)}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla her $\lambda, z \in \Omega$ için $k(z,\lambda) = \overline{k(\lambda,z)}$ dir. k_λ normu ise

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = k(\lambda,\lambda)$$

dır. $\widehat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{(k(\lambda,\lambda))^{\frac{1}{2}}}$ fonksiyonuna λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının "normalleştirilmiş üretici çekirdeği" denir (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.13. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$, fonksiyonel Hilbert uzayı ve $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ bu uzayın normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Eğer $\lambda \to \partial\Omega$ ($\lambda \to \xi \in \partial\Omega$) iken $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \to 0$ zayıf yakınsak ise $\mathcal{H}$ uzayına "standart fonksiyonel Hilbert uzayı" denir (Aronszajn, 1950; Saitoh, 1988, 1997).

Tanım 3.14. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayı ve A bu uzayda lineer sınırlı operatör olsun. Bu durumda

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{A}$ fonksiyonuna "A operatörünün Berezin sembolü" ya da "Berezin Dönüşümü" denir (Berezin, 1972, 1974; Nordgren ve Rosenthal, 1994; Engliš, 1995; Zhu, 1990).

Tanım 3.15. k_λ üretici çekirdeğine sahip, boş olmayan bir Ω kümesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir A operatörünün "Berezin kümesi" ve "Berezin sayısı", sırasıyla

$$Ber(A) = \left\{ \widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\} \text{ ve } ber(A) = \sup\left\{ \left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega \right\}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Karaev, 2006).

Aşağıdaki Berezin sembolünün bazı temel özellikleri verilmiştir (Kılıç, 1994).

1. A pozitif operatör ise o zaman $\widetilde{A}$ pozitif fonksiyondur.

2.

$$\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| = \left|\left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle\right| \leq \left\|Ak_{\mathcal{H},\lambda}\right\| \left\|k_{\mathcal{H},\lambda}\right\|$$
$$\leq \|A\| \left\|k_{\mathcal{H},\lambda}\right\| \left\|k_{\mathcal{H},\lambda}\right\| = \|A\| \;\; (\lambda \in \Omega)$$

olduğundan $\widetilde{A}$ Berezin sembolü sınırlı bir fonksiyondur.

3. A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü, $\widetilde{A}$ kompleks eşleniğine eşittir.Yani

$$\widetilde{A^*}(\lambda) = \left\langle A^*\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle = \overline{\left\langle \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle} = \overline{\widetilde{A}(\lambda)}$$

dir.

4. Her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{B}(\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $A = B$ olmasıdır.

5. A operatörü kompakt ise $\widetilde{A}(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \partial\Omega)$ dır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani $\widetilde{A}(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \partial\Omega)$ ise A operatörü kompakt olmayabilir.

Tanım 3.16. Herhangi $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ operatörü $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. Aynı zamanda $|A|^2 = A^*A$ dır (Zamani, 2017).

Tanım 3.17. $(H, \langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. T operatörünün nümerik değer kümesi

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \; \|x\| = 1\}$$

ile verilen $\mathbb{C}$ kompleks sayısının bir altkümesidir (Gustafson ve Rao, 1997).

Tanım 3.18. $(H, \langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. H üzerindeki bir T operatörünün nümerik çapı

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\} = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

ile tanımlanır (Gustafson ve Rao, 1997).

Üstteki tanımdan herhangi bir $x \in H$ için $|\langle Tx, x\rangle| \leq w(T)\|x\|^2$ dir (Dragomir, 2013).

$w(.)$ nümerik yarıçapı tüm sınırlı lineer operatörleri $\mathbf{B}(H)$ cebiri üzerinde bir normdur. Yani,

(i) Herhangi $T \in \mathbf{B}(H)$ için $w(T) \geq 0$ ve $w(T) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T = 0$,
(ii) Herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $w(\lambda T) = |\lambda| w(T)$ ve $T \in \mathbf{B}(H)$,
(iii) Herhangi $T, V \in \mathbf{B}(H)$ için $w(V+T) \leq w(V) + w(T)$

koşullarını sağlar (Dragomir, 2013).

Operatörün normu ile nümerik yarıçap arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

Teorem 3.19. *Herhangi T operatörü için*

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$$

dir (Furuta, 2002).

Aynı zamanda operatörün Berezin sayısı ve nümerik yarıçapı ile Berezin kümesi ve nümerik değeri arasında

$$ber(T) \leq w(T) \text{ ve } Ber(T) \leq W(T)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Tanım 3.20. (Hardy Uzayı) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerinde kareleri toplanabilen ve kompleks katsayılara sahip kuvvet serisi şeklinde yazılabilen tüm analitik fonksiyonların oluşturduğu uzaya, yani,

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right|^2 < \infty \right\}$$

koşulunu sağlayan $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$ uzayına klasik Hardy uzayı denir (Stroethoff, 1997).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde operatörlerin Berezin sembolleri ve Berezin sayısı yardımıyla Hilbert uzayındaki pozitif operatörler için Hölder-McCarthy eşitsizliği, Kantorovich eşitsizliği ve Heinz-Kato eşitsizliğini içeren belli operatör eşitsizliklerinin benzerleri verilmiştir.

4.1. Kantorovich Eşitsizliği, Hölder-McCarthy Eşitsizliği ve Berezin Sembolleri

Bu kısımda giriş bölümünde verilen Kantorovich eşitsizliği ile ilişkilendirerek bazı operatör eşitsizlikleri ve Berezin sembolleri yardımıyla Hölder-McCarthy eşitsizliği verilmiştir.

Teorem 4.1. *A, $0 < m \leq \widetilde{A} \leq M$ koşulunu gerçekleyen üretici çekirdekli Hilbert uzayında ($\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ uzayında) bir pozitif operatör olsun. Burada $\widetilde{A}$, A operatörünün Berezin sembolüdür. $f(t)$, $[m,M]$ üzerinde reel-değerli sürekli konveks fonksiyondur. O zaman sırasıyla*

$$f(M) > f(m), \ \frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m} \ ve \ \frac{f(m)}{m} q \leq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \leq \frac{f(M)}{M} q \tag{4.1}$$

$q > 1$ olan herhangi bir reel sayı için sağlanır,

$$f(M) < f(m), \ \frac{f(M)}{M} < \ ve \ \frac{f(m)}{m} q \leq \frac{f(M) - f(m)}{M - m} \leq \frac{f(M)}{M} q \tag{4.2}$$

$q < 0$ olan herhangi bir reel sayı için sağlanır.

koşullarından herhangi biri altında

$$\widetilde{f(A)}(\lambda) \leq \frac{(mf(M) - Mf(m))}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(f(M) - f(m))}{q(mf(M) - Mf(m))} \right)^q \widetilde{A}(\lambda)^q \tag{4.3}$$

dir.

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki yardımcı teorem kullanılacaktır (Furuta, 2001).

Yardımcı Teorem 4.2. *Aşağıdaki formül tarafından $h(t)$ fonksiyonu $[m,M]$, ($M > m > 0$) üzerinde tanımlansın:*

$$h(t) = \frac{1}{t^q}\left(k + \frac{K-k}{M-m}(t-m)\right). \tag{4.4}$$

Burada q sayısı $q \neq 0,1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı ve K ve k herhangi reel sayılardır. O zaman $h(t)$ fonksiyonu $[m,M]$ aralığı üzerinde aşağıdaki üst sınıra sahiptir:

$$\frac{(mK-kM)}{(q-1)}\left(\frac{(q-1)(K-k)}{q(mK-kM)}\right)^q. \tag{4.5}$$

Burada (4.5) ifadesindeki m, M, k, K ve q, sırasıyla aşağıdaki (i) ve (ii) koşullarından herhangi birini sağlar:

(i) $K > k$, $\frac{K}{M} > \frac{k}{m}$ ve $\frac{k}{m}q \leq \frac{K-k}{M-m} \leq \frac{K}{M}q$ eşitsizlikleri herhangi bir $q > 1$ için sağlanır;

(ii) $K < k$, $\frac{K}{M} < \frac{k}{m}$ ve $\frac{k}{m}q \leq \frac{K-k}{M-m} \leq \frac{K}{M}q$ eşitsizlikleri herhangi bir $q < 0$ için sağlanır.

İspat. Tamlık için ispatı basitçe verebiliriz. Gerçekten, kolay bir diferansiyel hesapla $t_1 = \frac{q}{q-1}\frac{(mK-mK)}{(K-k)}$ olduğu zaman $h'(t) = 0$ elde edilir ve $t_1 \in [m,M]$ gerekli koşulu altında t_1 sağlanır. (i) ve (ii) koşullarından herhangi biri altında t_1 sırasıyla $[m,M]$ aralığında $h(t)$ nin (4.5) üst sınırını verir. □

İspat. [Teorem 4.1 in İspatı]$f(t)$ fonksiyonu $[m,M]$ aralığında reel-değerli sürekli konveks fonksiyon olduğundan, herhangi bir $[m,M]$ için

$$f(t) \leq f(m) + \frac{f(M)-f(m)}{M-m}(t-m) \tag{4.6}$$

elde edebiliriz. $M \geq \widetilde{A}(\lambda) \geq m$ olduğu için (4.6) da A pozitif operatörünün standart operasyonel hesaplamayı uygulayarak

$$\widetilde{f(A)} \leq f(m) + \frac{f(M)-f(m)}{M-m}\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle - m\right) \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) nin her iki tarafı $\widetilde{A}(\lambda)^{-q}$ ile çarpılırsa

$$\widetilde{A}(\lambda)^{-q}\ \widetilde{f(A)}\ (\lambda) \leq h(t) \tag{4.8}$$

olur. Burada her $\lambda \in \Omega$ için $h(t) = \widetilde{A}(\lambda)^{-q}\left[f(m) + \frac{f(M)-f(m)}{M-m}\left(\widetilde{A}(\lambda) - m\right)\right]$ dir. O zaman her $\lambda \in \Omega$ için

$$\widetilde{f(A)}\ (\lambda) \leq \left[\max_{m \leq t \leq M} h(t)\right] \widetilde{A}(\lambda)^q \tag{4.9}$$

olduğu görülür. Teorem 4.1 de $K = f(M)$ ve $k = f(m)$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2 de (i) ve (ii) ye karşılık Teorem 2 deki (i) ve (ii) karşılık gelmektedir. Böylece (4.9) ve Yardımcı Teorem 4.2 ile ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.3. *A operatörü $M \geq \widetilde{A} \geq m > 0$ koşulunu sağlayan üretici çekirdekli Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde tersinebilir bir self-adjoint operatör olsun. O zaman*
(i) $m^{p-1}q \leq \frac{M^p - m^p}{M-m} \leq M^{p-1}q$ eşitsizliği $p > 1$ ve $q > 1$ reel sayıları için sağlanır,
(ii) $m^{p-1}q \leq \frac{M^p - m^p}{M-m} \leq M^{p-1}q$ eşitsizliği $p < 0$ ve $q < 0$ reel sayıları için sağlanır,

koşullarının herhangi biri altında

$$ber(A^p) \leq \frac{(mM^p - m^pM)}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(M^p - m^p)}{q(mM^p - m^pM)}\right)^q ber(A)^q \tag{4.10}$$

dir.

İspat. Sonucun ispatı Furuta (2001) daki ispata benzemektedir. Teorem.4.1 de $p \notin [0,1]$ için $f(t) = t^p$ alalım. $f(t)$ fonksiyonu $[m,M]$ aralığı üzerinde reel-değerli sürekli konveks fonksiyon olduğundan, $M^p > m^p$ ve $M^{p-1} > m^{p-1}$ herhangi bir $p > 1$ için sağlanır, yani, herhangi bir $p > 1$ için $f(M) > f(m)$ ve $\frac{f(M)}{M} > \frac{f(m)}{m}$ dir. Aynı zamanda, herhangi bir $p < 0$ için $M^p < m^p$ ve $M^{p-1} < m^{p-1}$ sağlanır, yani, sırasıyla herhangi bir $p < 0$ için $f(M) < f(m)$ ve $\frac{f(M)}{M} < \frac{f(m)}{m}$ olur. Bu nedenle Teorem 4.1 den, herhangi bir $\lambda \in \Omega$ için

$$\left\langle A^p\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle \leq \frac{(mM^p - m^pM)}{(q-1)(M-m)} \left(\frac{(q-1)(M^p - m^p)}{q(mM^p - m^pM)}\right)^q \left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle^q$$

dir. Bu ise arzu edilen (4.10) eşitsizliğini vermektedir. □

4.2. Hölder-McCarthy ve Kantorovich Eşitsizliği ve Berezin Sayı Eşitsizliği

Şimdi, Hölder-McCarthy ve Kantorovich eşitsizlikleri ile ilişkili olan bir sonucu vereceğiz.

Teorem 4.4. *A operatörü $M \geq \widetilde{A} \geq m > 0$ koşulunu sağlayan üretici çekirdekli Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde bir pozitif operatör olsun. O zaman her $p > 1$ için*

$$ber(A)^p \leq ber(A^p) \leq K_+(m, M, p)\, ber(A)^p \tag{4.11}$$

elde edilir. Burada $K_+(m, M, p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \cdot \frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - m^p M)^{p-1}}$ dir.

İspat. $p \notin [0,1]$ için $f(t) = t^p$ bir konveks fonksiyon olduğundan, $p \notin [0,1]$ ve $p = q$ koşulları altında Sonuç.4.3 de (i) koşulu gerçeklenir. Böylece Sonuç 4.3 tarafından (4.11) de ikinci eşitsizlik sağlanır. Hölder-McCarthy eşitsizliği ile (4.11) deki birinci eşitsizlik elde edilir. □

Sonuç 4.5. *A operatörü $M \geq A \geq m > 0$ olacak şekilde üretici çekirdekli Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde bir pozitif operatör olsun. O zaman $\frac{m}{M} \leq p \leq \frac{M}{m}$ olacak şekilde herhangi bir p için*

$$ber(A)^p\, ber\left(A^{-1}\right) \leq \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \frac{(m+M)^{p+1}}{mM} \tag{4.12}$$

ve

$$ber\left(A^2\right) \leq \frac{(m+M)^{p+1}}{mM} ber(A)^{p+1} \tag{4.13}$$

dir.

İspat. Sonuç 4.3 teki (ii) koşulunda sadece $p = -1$ alınırsa ve $p > 0$ için q yerine $-p$ koyulursa, (4.12) elde edilir.
Sonuç 4.3 teki (i) koşulunda sadece $p = 2$ alınırsa ve $p > 0$ için q yerine $p+1$ koyulursa, (4.13) ifadesi elde edilir.

$p = 1$ olduğu zaman, Sonuç 4.5 aşağıdaki Kantorovich tipli eşitsizlik olur:

$$ber(A)^p\, ber\left(A^{-1}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(m+M)^2}{mM}.$$

$\square$

Bu sebeple iyi bilinen Löwner-Heinz teoremden $0 < B \leq A$ durumunun herhangi bir $p \in [0,1]$ için $ber(B^p) \leq ber(A^p)$ eşitsizliğinin gerçeklediğini kolayca görebiliriz. Bununla birlikte $0 < B \leq A$ ifadesi herhangi bir $p > 1$ için $ber(B^p) \leq ber(A^p)$ eşitsizliğini hiçbir zaman sağlamaz.

Bu durumda aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4.6.

$$M_1 \geq A \geq m_1 > 0$$
$$M_2 \geq B \geq m_2 > 0$$
$$A \geq B \geq 0$$

olacak şekilde A ve B operatörleri üretici çekirdekli Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde bir pozitif operatörler olsun. O zaman herhangi $p \geq 1$ için

$$ber(B^p) \geq K_{2,p} ber(A^p) \geq \left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1} ber(A^p) \tag{4.14}$$

ve

$$ber(B^p) \geq K_{1,p} ber(A^p) \geq \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1} ber(A^p) \tag{4.15}$$

sağlanır. Burada $K_{1,p}$ ve $K_{2,p}$ ifadeleri

$$K_{1,p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p (M_1 - m_1)} \cdot \frac{\left(M_1^p - m_1^p\right)^p}{(m_1 M_1^p - m_1^p M_1)^{p-1}}$$

ve

$$K_{2,p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p (M_2 - m_2)} \cdot \frac{\left(M_2^p - m_2^p\right)^p}{(m_2 M_2^p - m_2^p M_2)^{p-1}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teoremi ispat etmek için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır (bkz. Furuta, 2011; Önerme 2, sayfa 194).

Yardımcı Teorem 4.7. *Eğer $x \geq 1$ ise o zaman $1 < p < \infty$ için*

$$\frac{(p-1)^{p-1}(x^p-1)^p}{p^p(x-1)(x^p-x)^{p-1}} \leq x^{p-1}$$

dir ve eşitsizliğin gerçeklenmesi için gerekli ve yeterli koşul $x \downarrow 1$ olmasıdır.

İspat. [Teorem 4.6 nın İspatı] $p = 1$ için sonuç aşikardır. Böylece, sadece $p > 1$ durumunu düşüneceğiz. İlk olarak, her ne zaman $M > m > 0$ ise Yardımcı Teorem 4.7 de $x = \frac{M}{m}\,(\geq 1)$ alınarak aşağıdaki eşitlik akla gelir: $p > 1$ için :

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(M^p-m^p)^p}{(M-m)(mM^p-m^pM)^{p-1}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{p-1} \tag{4.16}$$

olur. $p > 1$ için, Hölder-McCarthy eşitsizliği ve (4.16) eşitsizliği kullanılarak, her $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_p(\lambda) &= \left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq K_{2,p}\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \text{ (Teorem 4 ün (4.11) eşitsizliği ile)} \\
&\leq K_{2,p}\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \text{ } (0 < B \leq A \text{ ile}) \\
&\leq K_{2,p}\left\langle A^p\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \leq \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1}\left\langle A^p\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Üstte verilen bu eşitsizliğin her iki tarafının supremumu alınırsa, arzu edilen (4.14) eşitsizliği elde edilir. Şimdi (4.15) eşitsizliğini ispatlayalım. Gerçekten, $0 < A^{-1} < B^{-1}$ ve $M_1^{-1} \leq A^{-1} \leq m_1^{-1}$ olduğundan, o zaman (4.14) eşitsizliğini uygulayarak her $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{A^{-p}}(\lambda) &= \left\langle A^{-p}\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p\left(M_1^{-1}-m_1^{-1}\right)}\frac{\left(M_1^{-p}-m_1^{-p}\right)^p}{(m_1M_1^{-p}-m-_1^{p}M_1)^{p-1}}\left\langle B^{-p}\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p(M_1-m_1)}.\frac{(M_1^p-m_1^p)^p}{(m_1M_1^p-m_1^pM_1)^{p-1}}\left\langle B^{-p}\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq K_{1,p}\left\langle B^{-p}\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \leq \left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{p-1}\left\langle B^{-p}\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{p-1}\widetilde{B^{-p}},
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum ve eşitsizliğin her iki tarafından tersler alınırsa üstteki eşitsizlik (4.15) eşitsizliğini verir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Sonuç 4.8. *Eğer $0 < B < A$ ve $0 < m < B < M$ ise o zaman $p \geq 1$ için*

$$ber(B^p) \leq \left(\frac{M}{m}\right)^p ber(A^p) \tag{4.17}$$

dir.

$K_{j,p} \leq \left(\frac{M_j}{m_j}\right)^{p-1} \leq \left(\frac{M_j}{m_j}\right)^p$ eşitsizliği $j = 1,2$ ve $p \geq 1$ için sağlandığından, Teorem 4.6 nın (4.14) ve (4.15) eşitsizlikleri (4.17) eşitsizliğinden daha tam tahmine sahiptir.

Önerme 4.9. *A operatörü $M \geq A \geq m > 0$ ve B de pozitif büzüşme operatörü olacak şekilde bir pozitif operatör olsun. O zaman*

$$ber(BAB) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} ber(A) \tag{4.18}$$

dır.

İspat. A^{-1} mevcut olduğundan, Kantorovich eşitsizliği yardımıyla her $x \in H$ için

$$\langle ABx, Bx \rangle \left\langle A^{-1}Bx, Bx \right\rangle \leq K \|Bx\|^4$$

olur. Burada $K := \frac{(M+m)^2}{4Mm}$ dir. Özel durumda, her $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\left\langle AB\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle A^{-1}B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle &\leq K \left\langle B^2\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \\
&\leq K \left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \ (I > B > 0 \text{ ile}) \\
&= \left\langle A^{-\frac{1}{2}}B\widehat{k}_\lambda, A^{\frac{1}{2}}\widehat{k}_\lambda \right\rangle^2 \\
&\leq K \left\langle A^{-1}B\widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

dir. Böylece standart argümanlar ile (4.18) elde edilir. $\square$

4.3. Selberg Eşitsizliği, Heinz-Kato Eşitsizliğinin Genişlemesi ve Berezin Sayı Eşitsizlikleri

Klasik Bessel eşitsizliğinin genişlemesi olan ünlü Selberg eşitsizliği (Furuta, 2001) asal sayı teorisinde oldukça kullanışlıdır. Yani, eğer $x_1, x_2, .., x_n \in H \setminus \{0\}$ ise o zaman

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle x, x_i \rangle|^2}{\sum_{j=1}^{n} \left|\left\langle x_j, x_j \right\rangle\right|^2} \leq \|x\|^2 \tag{4.19}$$

dir. (4.19) eşitsizliğinin gerçeklenmesi için gerekli ve yeterli koşul keyfi $i \neq j$ için $\left\langle x_i, x_j \right\rangle = 0$ ya da $\left\langle a_i x_i, a_j x_j \right\rangle \geq 0$ ile $|a_i| = \left|a_j\right|$ olacak şekilde bazı $a_1, a_2, ..., a_n$ kompleks skalerleri için $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ olmasıdır.

Önerme 4.10. *A operatörü $\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ olacak şekilde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk üzerinde $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonlarının $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$ Hardy-Hilbert uzayında bir sınırlı lineer operatörü olsun. Eğer her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $A\widehat{k}_\lambda \neq 0$ ise o zaman*

$$ber\left(|A|^2\right) \geq \sup_{\lambda, n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, A\widehat{k}_\lambda \right\rangle\right|}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(1-|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-|\lambda_i|^2\right)}{\left|1-\overline{\lambda_i}\lambda_j\right|}}$$

dir. Burada $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ifadesi A nın modülüdür.

İspat. Önermenin ispatı için (4.19) numaralı Selberg eşitliğinde $x = A\widehat{k}_\lambda$ ve $x_i = \widehat{k}_{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ alınması yeterlidir. □

Teorem 4.11. *$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ herhangi bir operatör, A ve B ise her $\lambda \in \Omega$ için*

$$\left\|T\widehat{k}_\lambda\right\| \leq \left\|A\widehat{k}_\lambda\right\| \text{ ve } \left\|T^*\widehat{k}_\mu\right\| \leq \left\|B\widehat{k}_\mu\right\|$$

olacak şekilde iki pozitif operatör olsun. O zaman $\alpha, \beta \in [0,1]$ ve $\alpha + \beta \geq 1$ olacak şekilde herhangi α ve β için

$$\sup_{\lambda, \mu \in \Omega} \left|\left\langle T\,|T|^{\alpha+\beta-1}\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\mu \right\rangle\right| \leq ber\left(|A^\alpha|^2\right) ber\left(\left|B^\beta\right|^2\right) \tag{4.20}$$

dir.

İspat. Bu verilecek hipotez eğer her bir $\alpha \in [0,1]$ için

$$\widetilde{A} \geq \widetilde{B} \geq 0 \Rightarrow \widetilde{A^{\alpha}} \geq \widetilde{B^{\alpha}} \tag{4.21}$$

ise o zaman (4.6) da verilen Löwner-Heinz eşitsizliğinin bir sonucudur. Diğer taraftan, her $\lambda \in \Omega$ için $\left\|T\widehat{k}_{\lambda}\right\| \leq \left\|A\widehat{k}_{\lambda}\right\|$ hipotezi

$$\widetilde{|T|^2} \leq \widetilde{|A|^2} \tag{4.22}$$

ifadesine denktir. Aynı zamanda her $\mu \in \Omega$ için $\left\|T^{*}\widehat{k}_{\mu}\right\| \leq \left\|B\widehat{k}_{\mu}\right\|$ hipotezi

$$\widetilde{|T^{*}|^2} \leq \widetilde{|B|^2} \tag{4.23}$$

ifadesine denktir. Bu sebeple (4.21), (4.22) ve (4.23) uygulanırsa, herhangi bir $\lambda, \mu \in \Omega$ ve herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left\langle |T|^{2\alpha}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda} \right\rangle \leq \left\langle A^{2\alpha}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda} \right\rangle \tag{4.24}$$

ve herhangi bir $\beta \in [0,1]$ için

$$\left\langle |T^{*}|^{2\beta}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda} \right\rangle \leq \left\langle B^{2\beta}\widehat{k}_{\mu}, \widehat{k}_{\mu} \right\rangle \tag{4.25}$$

elde edilir.

$T = U\,(T)$ operatörü bir T operatörünün kutupsal ayrışımı olsun. Burada U bir kısmi izometrik operatör, $|T| = (T^{*}T)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{T^{*}T}$ ve $\ker(U) = \ker(|T|)$ dir. $\beta > 0$ ve $\alpha + \beta \geq 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1]$ durumunda (4.6) da gösterilen aşağıdaki önemli bağıntıyı hatırlayalım:

$$\beta > 0 \text{ için } |T^{*}|^{2\beta} = U\,|T^{*}|^{2\beta}\,U^{*} \tag{4.26}$$

sağlanır. O zaman her $\lambda, \mu \in \Omega$ için

$$\left|\left\langle T\,|T|^{\alpha+\beta-1}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\mu} \right\rangle^{2}\right| = \left|\left\langle U\,|T|^{\alpha+\beta}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\mu} \right\rangle\right|^{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\left\langle |T|^{\alpha}\widehat{k}_{\lambda}, |T|^{\beta}U^{*}\widehat{k}_{\mu}\right\rangle\right|^{2} \\
&\leq \left\||T|^{\alpha}\widehat{k}_{\lambda}\right\|^{2}\left\||T|^{\beta}U^{*}\widehat{k}_{\mu}\right\|^{2} \\
&= \left\langle |T|^{2\alpha}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda}\right\rangle\left\langle U|T|^{\beta}U^{*}\widehat{k}_{\mu}, \widehat{k}_{\mu}\right\rangle \\
&= \left\langle |T|^{2\alpha}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda}\right\rangle\left\langle |T^{*}|^{2\beta}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda}\right\rangle \ ((4.26) \text{ ile}) \\
&\leq \left\langle A^{2\alpha}\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda}\right\rangle\left\langle B^{2\beta}\widehat{k}_{\mu}, \widehat{k}_{\mu}\right\rangle \ ((4.24) \text{ ve } (4.25) \text{ ile})
\end{aligned}
$$

$\alpha, \beta \in [0,1]$ ve $\alpha+\beta \geq 1$ olacak şekilde herhangi α ve β için elde edilir; yani $\beta = 0$ durumunda sonuç özdeş olduğundan (4.20) sağlanır. λ ve n üzerinden supremum alınarak Teorem 4.11 in ispatı tamamlanır. □

Özel durumda Teorem 4.11 de $\alpha+\beta = 1$ olsun. O zaman aşağıdaki Heinz-Kato tipli eşitsizlik elde edilir.

Önerme 4.12. *T operatörü üretici çekirdekli Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde herhangi bir operatör olsun. Eğer A ve B her $\lambda, \mu \in \Omega$ için $\left\|T\widehat{k}_{\lambda}\right\| \leq \left\|A\widehat{k}_{\lambda}\right\|$ ve $\left\|T^{*}\widehat{k}_{\mu}\right\| \leq \left\|B\widehat{k}_{\mu}\right\|$ olacak şekilde pozitif operatörler ise o zaman herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için*

$$\sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left|\left\langle T\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\mu}\right\rangle\right| \leq ber\left(|A^{\alpha}|^{2}\right) ber\left(\left|B^{1-\alpha}\right|^{2}\right) \tag{4.27}$$

elde edilir.

$\sup_{\lambda\in\Omega}\left|\left\langle T\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\mu}\right\rangle\right| \leq \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left|\left\langle T\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\mu}\right\rangle\right|$ olduğundan (4.27) eşitsizliğinden her $\alpha \in [0,1]$ için

$$ber(T) \leq ber\left(|A^{\alpha}|^{2}\right) ber\left(\left|B^{1-\alpha}\right|^{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında, Kantorovich tipli eşitsizlikler ve bazı iyi bilinen Hölder-McCarthy eşitsizlik tipleri kullanılarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda pozitif operatörlerin ve fonksiyonların Berezin sayısı için yeni tipli eşitsizlikler ile ilgili yeni sonuçlar ortaya konmuştur. Ayrıca üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde operatörlerin bazı sınıfının Berezin sayısı için bazı direkt ve ters kuvvet eşitsizliklerini ispatlamada onların uygulamaları verilmiştir. Böylece, Kantorovich tipli eşitsizlikler ile Berezin sembolü metodunun birlikte kullanılması operatörlerin Berezin sayısı eşitsizliklerine yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

1. Literatürde ters nümerik yarıçap ile ilgili eşitsizlikler pek fazla bilinmemektedir. Acaba Kantorovich ve Hölder-McCarthy tipli eşitsizlikler kullanılarak ters nümerik yarıçap eşitsizlikleri elde edilebilir mi?

2. Kantorovich eşitsizlikleri yardımıyla Berezin sayısı için farklı tip eşitsizlikler elde edilebilir mi?

KAYNAKLAR

Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 68(3), 337–404.

Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin transform on the Toeplitz algebra. Studia Mathematica, 1(2), 113–136.

Berezin, F.A., 1972. Covariant and contravariant symbols of operators. Mathematics Of The USSR-Izvestiva, 6(5), 1117–1151.

Berezin, F.A., 1974. Qutaization. Mathematics Of The USSR-Izvestiva, 8(5), 1109–1163.

Berger, C., Coburn, L., 1987. Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space. Transaction of the American Mathematical Society, 301(2), 813–829.

Chalender, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M., 2012. Compactness and Berezin Symbols. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 78(1), 315–329.

Dragomir, S.S., 2008. New inequalities of the Kantrovich type for bounded linear operators in Hilberts spaces. Linear Algebra and Its Application, 428(11/12), 2750–2760.

Dragomir, S.S., 2013. Inequalities for the numerical radius linear operators in Hilbert space. Springer Briefs in Mathematics, Cham.

Drury, S.W., Liu, S., Lu, C.Y., Puntanen, S., Styan, G.P., 2000. Some comments on several matrix inequalities with applications to canonical correlations: historical background and recent developments. Sankhya: The Indian Journal of Statistics, 64(2), 453–507.

Engliš, M., 1994. Functions invariant under the Berezin transform. Journal of Functional Analysis, 121, 223–254.

Engliš, M., 1995. Toeplitz operators and the Berezin transform on H^2. Linear Algebra Application, 223/224, 171–204.

Fujii, M., Furuta, T., Nakamoto, R., Takahashi, S.I., 1996. Operator inequalities and covariance in noncommutative probability. Mathematica Japonica, 46, 317–320.

Fujii, M., Izumino, S., Nakamoto, R., 1994. Classes of operators determined by the Heinz-Kato-Furuta inequdity and the Hölder-McCarthy inequality. Nihonkai Mathematical Journal, 5, 61–67.

Fujii, M., Nakamoto, R., Seo, Y., 1997. Covariance in Bernstein's inequality for operators. Nihonkai Mathematical Journal (NMJ), 8, 1–6.

Furuta, T., 1998. Operator inequalities associated with Holder–McCarthy and Kantorovich inequalities. Journal of Inequalities and Applications, 2(2), 137–148.

Furuta, T., 2001. Invitation to Linear Operators, From Matrices to bounded linear operators on a Hilbert space. Taylor & Francis, London and New York, 255 pp.

Furuta, T., 2002. Invitation to Linear Operators, From Matrices to bounded linear operators on a Hilbert space. Taylor & Francis, London.

Furuta, T., Hot, J.M., Pecaric, J., Seo, Y., 2005. Mond–Pecaric Method in Ooperator Inequalities, in: Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space. vol. 1, Element, Zagreb.

George, P., Gabor, S., 1970. Aufgaben und Lehrsiitze aus der Analysis, Band I: Reihen, Integralrechnung, Funktiontheorie (in German). 4th ed., SpringerVerlag, Berlin.

Greub, W., Rheinboldt, W., 1959. On a generalization of an inequality of L. V. Kantorovich. Proceedings of the American Mathematical Society, 10, 407–415.

Gustafson, K., Rao, D., 1997. Numerical range. Springer Verlag, New York.

Halmos, P.R., 1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., 1967. Inequalities. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Izumino, S., Seo, Y., 1997. Ozeki's inequality and noncommutative covariance. Nihonkai Mathematical Journal, 8, 55–58.

Karaev, M.T., 2006. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. Journal of Functional Analysis, 238(1), 181–192.

Karaev, M.T., 2013. Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory. Complex Analysis and Operator Theory, 7(4), 983–1018.

Kılıç, S., 1994. On the Berezin symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis,44p, New Hampshire.

Kolmogorov, A.N., 1941. Stationary sequences in Hilbert space. Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathematiques de Roumanie, 2(6), 1–40.

Krasnoselskii, M.A., Krein, S., 1952. An iteration process with minimal residuals (in Russian). Matematicheskii Sbornik Nov. Series, 31(73), 315–334.

Kreyszing, E., 1981. Introductory functional analysis with applications. New York, London-Sydney.

McCarthy, C.A., 1967. c_p. Israel Journal of Mathematics, 5, 249–271.

Mond, B., Pecaric, J.E., 1994. Converses of Jensen's inequality for linear maps of operators. Annals of West University of Timisoara, Series

Mathematics-Information, 31(2), 223–228.

Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary values of Berezin symbols. Operator Theory: Advances and Applications, 73, 362–368.

Saitoh, S., 1988. Theory of reproducing kernels and its applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series.

Saitoh, S., 1997. Integral transforms, Reproducing kernels and their applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series.

Schweitzer, P., 1914. An inequality about the arithmetic mean. Mathematical and Physical Journal Lapok (Budapest), 23, 257–261.

Spain, P., 1996. Operator versions of the Kantorovich inequality. Proceedings of the American Mathematical Society, 124(9), 2813–2819.

Stroethoff, K., 1997. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. Linear Operators Banach Center Publications, 38, 361–380.

Umegaki, H., 1954. Conditional expectation in an operator algebra. Tohoku Mathematical Journal, 6, 177–181.

Watson, G.S., Alpargu, G., Styan, G.P., 1997. Some comments on six inequalities associated with the inefficiency of ordinary least squares with one regressor. Linear Algebra Application, 264, 13–54.

Yang, Bicheng ans Debnath, L., 2014. Half-Discrete Hilbert-Type Inequalities. World Scientific.

Zamani, A., 2017. Some lower bounds for the numerical radius of Hilbert space operators. Advances in Operator Theory, 98–107.

Zaremba, S., 1907. L'equation Biharmonique et Une Classe Remarquable de Fonctions Fondamentales Harmoniques. Bulletin International de I'Academie des Sciences de Cracovie, 147–196.

Zhu, K., 1990. Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, 280, New York:.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hamdullah BAŞARAN

Doğum Yeri ve Yılı : Antalya, 1993

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : basaranhamdullah@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Çağlayan Lisesi, 2011

Lisans : Akdeniz Üniversitesi, 2015

Mesleki Deneyim

Yayınlar

Başaran, H., Gürdal, M., Güncan, A.N., 2018. Some operator inequalities and their applications, The Mediterranean International Conference of Pure and Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM-2018), October 26-29, Antalya, p. 39.

Başaran, H., Gürdal, M., Güncan, A.N., 2019. Some operator inequalities associated with Kantorovich and Hölder-McCarthy inequalities and their applications, Turkish Journal of Mathematics, doi:10.3906/mat-1811-10.