T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMİZ HALKALAR VE TEMİZ MATRİS HALKALARI

MELİKE YAKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2018

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMİZ HALKALAR VE TEMİZ MATRİS HALKALARI

MELİKE YAKUT
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. EMİRA AKKURT

GEBZE
2018

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

CLEAN RINGS AND CLEAN MATRIX RINGS

MELİKE YAKUT

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
YRD. DOÇ. DR. EMİRA AKKURT

GEBZE

2018

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10/01/2018 tarih ve 2018/03 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 18/01/2018 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Melike YAKUT'un tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) :Yrd. Doç. Dr. Emira AKKURT

ÜYE :Doç. Dr. Seher TUTDERE

ÜYE :Yrd. Doç. Dr. Meltem ÖZGÜL

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

....../....../......... tarih ve ..../........ sayılı kararı.

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde 1977'den günümüze kadar uzanan süreçte temiz halkalar hakkında yazılmış makaleler ve yayınlar incelenmiş ve bu çalışmalar özet halinde sunulmuştur. İkinci bölümde halka yapısı hakkında temel bilgiler verilmiş ve bazı özel halka tanımları ön bilgi olarak eklenmiştir. Üçüncü bölümde temiz halkaların genel özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde matris halkalarının temiz olma durumları incelenmiştir. Son bölümde ise F cismi üzerinde kurulmuş bir temiz matris halkasının alt halkası olan yapısal matris halkasının da temiz olduğu ispatlanmış ve R halkasının temiz olmama durumunda $M_n(R, \rho)$ yapısal matris halkası değerlendirilmiştir.

Bu tezin genel kapsamı temiz halkaların ve temiz matris halkalarının temel özelliklerinin incelenmesi ve bu özellikler göz önünde bulundurularak, cisim üzerinde kurulmuş matris halkalarının temiz olma durumlarının değerlendirilmesi ve bu halkaların alt halkası olan yapısal matris halkalarıyla ilişkilendirilmesidir.

Anahtar Kelimeler: Temiz Halka, İdempotent Eleman, Birimsel Eleman, Temiz Matris Halkası, Yapısal Matris Cebiri, Reguler Halka.

SUMMARY

In the first chapter of this thesis, the articles that have been written about clean rings since 1977 are investigated and summarized. In the second chapter, some fundamental information is given and some specific ring definitions are also added. In the third chapter, general properties of the clean rings are mentioned. In the fourth chapter, being clean case of matrix rings is explained in detail. In the last chapter, it is proven that structural matrix algebra that is a subring of a clean matrix ring constructed on a field F is also clean. $M_n(R, \rho)$ structural matrix ring is also examined in the case that the ring R is not clean.

The main goal of this dissertation is to research the basic properties of clean rings and clean matrix rings, and using all these information to explore the cleanness of the certain subring that is defined on a field F, which is called "Structural Matrix Ring". Various basic properties of this ring are given and clean rings and structural matrix rings are associated.

Key Words: Clean Ring, Idempotent Element, Unit Element, Clean Matrix Ring, Structural Matrix Algebra, Regular Ring.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve bu tezi hazırlamamda bilgisini, yardımlarını ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. Emira AKKURT'a ayırdığı zaman, gösterdiği sabır ve anlayış için;

Tez yazım süresi boyunca teknik destek sağlayan ve problemleri çözmede yardımlarını eksik etmeyen değerli hocam Doç. Dr. Mustafa AKKURT'a;

Yaşamımın her anında beni destekleyen ve bu günlere getiren anne ve babama;

Tüm çalışmalarım esnasında sıkıntılarımı paylaşan ve motivasyonumu yenileyen arkadaşlarım Tuğba ARKAN ve Betül YAZAR'a;

Manevi destek ve katkıları için sevgili kardeşlerime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmayı, 7-8 Ekim 2017 tarihleri arasında Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümünde düzenlenen 'Bahar Matematik Buluşması' adlı konferansta sunmamıza fırsat tanıdıkları ve bu organizasyonda yer almamızı sağladıkları için başta Prof. Dr. Ergün YALÇIN olmak üzere organizasyon sahiplerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
$centR$	:	R halkasının merkezi
$\sqrt{0}$	:	Halkanın nil radikali
$R[x]$	:	R den katsayılı polinom halkası
$R[[x]]$	:	R den katsayılı kuvvet serisi halkası
$J(R)$	:	R halkasının Jakobson radikali
$U(R)$	:	R halkasının birimsel elemanlarının kümesi
$Id(R)$	:	R halkasının idempotent elemanlarının kümesi
Z_n	:	Tam sayıların $modn$ kalanlar sınıfı kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$M_n(R)$	:	Elemanları R den olan $n \times n$ matris halkası
$T_n(R)$	:	Elemanları R den olan $n \times n$ üçgensel matris halkası
$M_n(F, \rho)$	:	F cismi üzerinde $n \times n$ yapısal matris cebiri

1. GİRİŞ

Bir halkada herhangi bir eleman, birimsel ve idempotent elamanların toplamı şeklinde yazılabiliyorsa bu elemana temiz eleman denir. Halkadaki her eleman temiz ise halkaya temiz halka denir. Bu tanım ilk defa Nicholson tarafından 1977 yılında 'Lifting Idempotents and Exchange Rings' adlı makalede verildi. Ayrıca Nicholson bu makalesinde her temiz halkanın exchange halka olduğunu ve halkada ki bütün idempotent elemanlar merkezdeyse bu ifadenin tersinin de doğru olduğunu gösterdi.

1994 yılında Camillo ve Yu tarafından temiz olmayan exchange halkaya örnek verildi [6]. Camillo ve Khurana, 2001 yılında reguler halkaların hangilerinin temiz olabileceklerini gösterdiler [5].

Nicholson 1977'de, cebirsel kapalı yapılar üzerinde kurulmuş nxn boyutlu matris halkalarının temiz olduğunu söyledi [23]. Sonrasında Camillo ve Yu 1994'te unit reguler olan $R/J(R)$ halkasının idempotentleri R halkasının idempotentlerine yükseltilebiliyorsa, R halkası üzerinde kurulmuş $M_n(R)$ halkasının temiz olduğunu gösterdiler [6]. Son olarak Han ve Nicholson 2001 yılında daha genel bir ifadeyle, herhangi bir temiz halka üzerinde kurulmuş $n \times n$ boyutlu matris halkasının temiz olacağını ispatladılar [24]. Burdan yola çıkarak bir R halkası üzeride tanımlanmış üst üçgen matris halkalarının temiz olması için gerek ve yeter koşulun R halkasının da temiz olmasıyla sağlandığını söylediler. Ayrıca aynı makalede temiz halkaların ideallerinin ve alt halkalarının temiz olmak zorunda olmadıkları gösterildi [24].

1999 yılında Nicholson temiz eleman ve temiz halka kavramlarına yeni bir koşul ekleyerek kuvvetli temiz eleman ve kuvvetli temiz halka tanımını kazandırdı. İdempotent ve birimsel elemanın birbiriyle değişmeli olması halinde halkanın elemanlarına kuvvetli temiz elaman, halkaya da kuvvetli temiz halka denildi [22]. Bu tanım kuvvetli π-reguler halka tanımıyla ilişkilendirilerek oluşturulmuştur.

Ve sonrasında kuvvetli π-reguler halkaların da temiz olduğu gösterilmiştir.

Campos kuvvetli temiz halkaların korner halkalarının da kuvvetli temiz olacağını söylemiştir ve bu ifade Chen tarafından ispatlanmıştır [11].

Anderson ve Camillo 2002 yılında temiz elemanı oluşturan birimsel ve idempotent elemanlar tek türlüyse bu elemanı tek türlü temiz eleman ve bu elemanların oluşturduğu halkayı tek türlü temiz halka olarak tanımladılar [3]. 2004 yılında ise Nicholson ve Zhou tarafından tek türlü temiz halkaların korner halkalarının ve homomorfik görüntülerinin de tek türlü temiz olduğu gösterildi [25].

2006 yılında Chen, Yang, Zhou tarafından matrislerin kuvvetli temiz halka olma koşulları belirlenmeye çalışıldı [9].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu tez boyunca R halkası birimli halka olarak kabul edilmiştir. Bu bölümde [13], [14], [17] ve [20] kaynaklarından faydalanılarak, tezin daha kolay anlaşılabilmesi için bazı temel tanım, örnek ve önermelere yer verilmiş ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı özel halka tanımları yapılmıştır.

Tanım 2.1: R boş olmayan bir küme ve R üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve $\cdot$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(R,+,\cdot)$ yapısına bir halka denir.

i) R halkası birinci işleme göre değişmeli bir grup.

ii) R halkası ikinci işleme göre bir yarı grup.

iii) R de ikinci işlem, birinci işlem üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğini sağlar.

R halkasında birinci işleme göre etkisiz elemana halkanın sıfırı (0_R) ve ikinci işleme göre etkisiz elemana halkanın birimi (1_R) denir. Eğer bir $a \in R$ elemanı için $ab = 1_R$ şekilinde yazılabilecek bir $b \in R$ var ise a'ya *birimsel eleman (tersinir eleman)* denir. Eğer R halkası ikinci işleme göre değişme özelliği sağlıyorsa, yani $\forall a,\ b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa, halkaya *değişmeli halka* denir. Bir $a \in R$ elemanı alındığında, eğer a elemanı halkadaki bütün elemanlarla değişmeliyse, bu elemana halkanın merkezindedir denir. Ve halkanın merkezi $cent(R) = \{a|ar = ra,\ \forall r \in R\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2: Birimli bir R halkasında sıfır dışındaki tüm elemanlar birimsel ise R halkasına bölenler (division) halkası denir. Değişmeli bölenler halkasına ise cisim (field) denir.

Tanım 2.3: $a \in R$ için $a^k = 0$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}^+$ bulunabilirse, a elemanına nilpotent eleman denir. $a \in R$ nilpotent elemanı $centR$ nin elemanı *ise a ya merkezil (central) nilpotent eleman denir. Eğer $a \in R$ için $a^2 = a$ sağlanıyorsa da a elemanına da idempotent eleman denir. Eğer $a^2 = a \in R$ idempotent elemanı $centR$ nin elemanı ise a ya merkezil (central) idempotent eleman denir.*

Tanım 2.4: R bir halka olsun. $x \in R$ için $x + y = xy = yx$ olacak şekilde $y \in R$ varsa x elemanına yakın düzenli (quasi-regular eleman) denir.

Önerme 2.1: $x \in R$ quasi-reguler eleman olması için gerek ve yeter koşul $1 - x$'in R'de birimsel eleman olmasıdır [13].

Örnek 2.2: R bir halka ve $a \in R$ olsun. a bir nilpotent eleman ise, $1 + a$ birimsel elemandır. Gerçekten, $a^k = 0$ için var olan $k > 0$ tam sayısını bu özellikteki en küçük tam sayı olarak seçersek

$$(1 + a)(1 - a + a^2 - a^3 - ... + (-1)^{k-1}a^{k-1}) = 1 \tag{2.1}$$

sağlanacağından $1 + a$ nın tersi $1 - a + a^2 - a^3 - ... + (-1)^{k-1}a^{k-1}$ olduğu görülür [13].

Tanım 2.5: R bir halka ve $\varnothing \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S, R deki işleme göre bir halka oluyorsa, S'ye R'nin alt halkası denir. R bir halka ve $\varnothing \neq I \subseteq R$ olsun.

i) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

ii) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ar \in I$ oluyorsa, I'ya R'nin bir ideali denir.

Bir R halkasının kendisinden ve $\{0\}$ dan oluşan ideallerine *aşikar ideal* denir. R halkasında, kendisinden ve $\{0\}$ farklı ideallerine halkanın *öz ideali* denir. M, R halkasının kendisinden farklı bir ideali olsun. R'nin, M'yi kapsayan M'den başka öz ideali yoksa M'ye bir *maksimal ideal* denir. Ve eğer her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ oluyorsa, $P \neq R$ idealine *asal* *ideal* denir.

Tanım 2.6: R bir halka olsun.

$$\sqrt{0} = \{r \in R : bir\ n \in \mathbb{N}\ için, r^n = 0\} \tag{2.2}$$

ideali, halkanın tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu kümedir. Bu küme bir idealdir ve bu ideale nil radikal denir [13].

Teorem 2.3: R değişmeli bir halka ve M bir ideal olsun. M maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/M'nin bir cisme izomorf olmasıdır.

Tanım 2.7: Bir halkanın aşikar ideallerinden başka ideali yoksa halkaya basit (simple) halka denir. Eğer bir halka basit halkaların direkt toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, halkaya yarı-basit (semi-simple) halka denir.

Tanım 2.8: R ve S iki halka ve $f : R \to S$ *bir fonksiyon olsun.* $f(1_R) = 1_S$ *ve*

i) $\forall r_1, r_2 \in R$ *icin* $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$

ii) $\forall r_1, r_2 \in R$ *icin* $f(r_1.r_2) = f(r_1).f(r_2)$

koşulları sağlanıyorsa f'ye R'den S'ye bir halka homomorfizması denir. Bir homomorfizma bire bir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma ve hem birebir hem örten ise izomorfizma olarak adlandırılır. R'den R'ye oluşturulan homomorfizmaya endomorfizma ve R'den R'ye oluşturulan izomorfizmaya ise otomorfizma denir.

Tanım 2.9: I, R halkasının bir ideali olsun. Her a, b $\in R$ *için,*

$$a \equiv b\ (mod I) \Leftrightarrow a - b \in I \tag{2.3}$$

denklik bağıntısına göre oluşan, R/I toplamsal bölüm grubu;

i) $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$

ii) $(a+I)\cdot(b+I)=(ab)+I$

işlemleri ile bir halka oluşturur. Bu halkaya, I 'ya göre bölüm halkası denir.

Tanım 2.10: Katsayıları bir R halkasından alınan, $R[x]$ polinomlar kümesi, aşağıdaki işlemler altında bir halka oluşturur. İki polinomun toplamı ve çarpımı,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \tag{2.4}$$

ve $c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j$ *olmak üzere,*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)=\sum_{k=0}^{m+n} c_k c^k \tag{2.5}$$

ile tanımlanır. Bu halkaya polinomlar halkası denir [13].

Tanım 2.11: R bir halka ise polinomların toplam ve çarpımlarına benzer işlemler altında,

$$R[[x]]=\{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k : a_k \in R\} \tag{2.6}$$

kümesi, kuvvet serileri halkasını oluşturur.

Yardımcı Teorem 2.4: R bir halka olmak üzere, $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in R[[x]]$ kuvvet serisinin elemanının birimsel olması için gerek ve yeter koşul, sabit terim a_0 elemanının R de birimsel olmasıdır. Özel olarak F bir cisim olmak üzere, $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in F[[x]]$ in birimsel olması için gerek ve yeter koşul $a_0 \neq 0$ olmasıdır [13].

Tanım 2.12: Bir R halkasının tek bir maksimal ideali varsa, R'ye lokal halka denir.

Tanım 2.13: Bir R halkasında tüm maksimal ideallerinin ara kesitine Jacobson *radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir.*

Önerme 2.5: $a \in R$ elemanının birimsel olması için gerek ve yeter koşul a nın, R'nin hiç bir maksimal idealinde olmamasıdır [13].

Önerme 2.6: $a \in R$ elemanının, Jacobson radikalinde olması için gerek ve yeter koşul, her $r \in R$ için, $1 - ar \in R$ elemanının birimsel olmasıdır [13].

Önerme 2.7: R bir halka ve e bir idempotent eleman olsun. Öyleyse $2e - 1 \in U(R)$ ve $1 - e \in Id(R)$ dir [3].

İspat 2.7: M, R'nin bir maksimal ideali olsun. e ya da $1 - e$'den biri M nin elemanı olacağından $2e - 1 \notin M$ dir. M maksimal olduğundan Önerme 2.5'ten $2e - 1 \in U(R)$ olur. $(2e - 1)^{-1} = 2e - 1$ olduğu gösterilebilir. e idempotent olsun $(1 - e)^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$ olduğundan $1 - e$ de idempotenttir. ■

Tanım 2.14: R bir halka ve her $a \in R$ için, $a^2 = a$ ise halkaya Boole (Boolean) halkası denir.

Tanım 2.15: Bir R halka ve x, $y \in R$ olsun. Her $xy = 1$ iken $yx = 1$ oluyorsa halkaya Dedekind sonlu (finite) halka denir.

Tanım 2.16: R bir halka olsun. Bir $r \in R$ için $rur = r$ olacak şekilde $u \in U(R)$ elemanı varsa r ye unit reguler elemandır denir. Her $r \in R$ için $rur = r$ olacak şekilde $u \in U(R)$ varsa, R halkasına unit reguler halka denir. Ayrıca R bir unit reguler halka ise her r elemanı, bir $e \in Id(R)$ ve bir $u \in U(R)$ elemanları yardımıyla $r = ue$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.17: Bir R halkasında her r elemanı için $r^2x = r$ olacak şekilde $x \in R$ bulunuyorsa, R halkasına kuvvetli reguler halka denir.

Önerme 2.8: R bir kuvvetli reguler halkadır ancak ve ancak her $r \in R$ için

$rzr = r$, $zrz = z$ ve $zr = rz$ olacak şekilde tek bir $z \in R$ vardır [18].

Tanım 2.18: Bir R halkasında pozitif n tamsayısı için, her r elemanının $r^n x r^n = r^n$ şeklinde yazılabileceği bir $x \in R$ elemanı varsa, R halkasına π-reguler halka denir. Ayrıca $r^n x r^n = r^n$ eşitliğinin her iki tarafı soldan x ile çarpılırsa xr^n nin idempotent olduğu görülür. Bir R halkasında pozitif n tamsayısı için, her r elemanının $r^{n+1}x = r^n$ şekilde yazılabileceği bir $x \in R$ varsa, R halkasına kuvvetli π-reguler halka denir.

Önerme 2.9: R bir halka olsun. $a \in R$ kuvvetli π-reguler eleman ise bir $n \geq 1$ tam sayısı için $a^n = fw = wf$ olacak şekilde, $f \in Id(R)$ ve $w \in U(R)$ vardır ve a, f, w birbirleriyle değişmelidir [22].

Tanım 2.19: R bir halka olsun. Eğer R halkasında her $a \in R$ için $e \in aR$ ve $1-e \in (1-a)R$ olacak şekilde $e \in Id(R)$ idempotent elemanı varsa R halkasına exchange halka denir [11].

Tanım 2.20: R bir halka olsun. Eğer R halkasında her $x \in R$ için $e = ax = xa$ ve $1-e = b(1-x) = (1-x)b$ olacak şekilde $e \in Id(R)$ idempotent elemanı varsa, R halkasına kuvvetli exchange halka denir [11].

Tanım 2.21: R bir halka ve I da R'nin bir ideali olsun. $x - x^2 \in I$ olacak şekilde seçilmiş bir $x \in R$ için $e-x \in I$ olacak şekilde bir idempotent $e^2 = e \in R$ elemanı varsa idempotentler I'ya göre yükselir (lifting idempotents modulo I) denir [23].

Tanım 2.22: Eğer bir halkanın her asal ideali maksimal ideal ise halkaya sıfır boyutlu (zero-dimensional) halka denir [18].

Tanım 2.23: M değişmeli bir grup R bir halka olsun. M'deki elemanların, R'deki elemanlarla skaler çarpımı $R \times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları *sağlıyorsa, M'ye R üzerinde bir modül veya kısaca R-modül denir.*

i) $\forall r \in R$ *ve* $\forall m, m' \in M$ *için,* $r(m + m\prime) = rm + rm\prime$,

ii) $\forall r, r' \in R$ *ve* $\forall m \in M$ *için,* $(r + r\prime)m = rm + r\prime m$,

iii) $\forall r, r' \in R$ *ve* $\forall m \in M$ *için,* $(rr\prime)m = r(rm\prime)$,

iv) $\forall m \in M$ *için,* $1_R m = m$.

Tanım 2.24: M değişmeli bir grup R ve S iki halka olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa M bir R-S-bimodüldür.

i) M sol R-modül ve sağ S-modül ve

ii) $\forall r \in R$, $s \in S$ *ve* $m \in M$ *için* $r(ms) = (rm)s$.

Tanım 2.25: R değişmeli bir halka olsun. R-cebiri, bir A halkasıdır öyleki $A \times A \to A$ çarpımsal tasviri R-bilineer olan bir R-modüldür. Yani, $\forall a, b \in A$ ve $\forall r \in R$ için $r * (ab) = (r * a) \cdot b = a \cdot (r * b)$ dir.

Önerme 2.10: R halkasının sıfır boyutlu (zero-dimensional) halka olması için gerek ve yeter koşul $R/\sqrt{0}$ halkasının reguler halka olmasıdır [18].

3. TEMİZ HALKALAR

Tanım 3.1: *R bir halka olsun. e bir idempotent ve u bir birimsel eleman olmak üzere, halkadan alınan bir $a \in R$, $a = e+u$ şeklinde yazılabiliyorsa, a elamanına temiz (clean) eleman denir. Bir R halkasının bütün elemanları temiz ise halkaya temiz (clean) halka denir [23].*

Örnek 3.1: *R bir halka olsun. R deki birimsel, idempotent, nilpotent ve quasi-reguler elemanlar temiz elemanlardır [25].*

Çözüm 3.1: *$u \in U(R)$ olsun. $0 \in Id(R)$ olduğundan ve $u = 0 + u$ şeklinde yazılabileceğinden u temizdir.*

$e \in Id(R)$ olsun. Tanım 2.7 ye göre $2e - 1$ tersi kendisine eşit olan birimsel elemandır ve $1 - e$ idempotenttir. Öyleyse $e = (1 - e) + (2e - 1)$ şeklinde yazılabileceğinden e temizdir.

$a \in R$ nilpotent eleman olsun. Öyleyse $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}^+$ vardır. $a = 1 + (a - 1)$ şeklinde yazabilir öyle ki Örnek 2.2 den $a - 1 \in U(R)$ olduğu görülür.

Ve son olarak x, R halkasının quasi-reguler elemanı olsun. Önerme 2.1 den x quasi-reguler iken $x - 1$ in birimsel olduğu söylenebilir. Böylece $x = 1 + (x - 1)$ şeklinde yazılabilir. Bu da gösterir ki x elemanı temizdir.

Sonuç 3.2: *Bölenler halkası, cisimler ve Boole halkası temiz halkalara örnektirler [18].*

İspat 3.2: *Sıfır elemanı dışındaki bütün elemanları birimsel olduğundan yukarıdaki örneğe göre bölenler halkası ve cisimler temiz halkalardır.*
Bütün elemanları idempotent olduğu için Boole halkaları da temiz halkalardır.

Örnek 3.3: *Bir R halkasında a elemanı temiz ise $1 - a$ da temiz elemandır [24].*

Çözüm 3.3: *Eğer* a *temiz ise* $a = e + u$ *şeklinde yazabilecek* $e^2 = e \in Id(R)$ *ve* $u \in U(R)$ *vardır. Öyleyse* $1 - a = 1 - e + (-u)$ *şeklinde yazılabildiğinden* $1 - a$ *temizdir.*

Önerme 3.4: R *bir halka ve* $a \in R$ *olsun.* a *elemanının temiz olması için gerek ve yeter koşul* $ua = eu + 1$ *olacak şekilde* $e \in Id(R)$ *ve* $u \in U(R)$ *olmasıdır [27].*

İspat 3.4: $a \in R$ *temiz olsun. Öyleyse* $a = e + u$ *olacak şekilde* $e \in Id(R)$ *ve* $u \in U(R)$ *vardır. Soldan* u^{-1} *ile çarpılırsa,* $u^{-1}a = u^{-1}e + 1$ *elde edilir. Ve* $u^{-1}a = (u^{-1}eu)u^{-1} + 1$ *eşitliği sağlanır. Burada* $u^{-1}eu \in Id(R)$ *olduğu açıktır. Böylece gereklilik sağlanmış olur. Diğer taraftan* $ua = eu + 1$ *yazılacak şekilde* $e \in Id(R)$ *ve* $u \in U(R)$ *olsun. Eşitlik soldan* u^{-1} *ile çarpılırsa,* $a = u^{-1}eu + u^{-1}$ *elde edilir.* $u^{-1}eu$ *idempotent olduğundan* a *temiz elemandır.* ■

Örnek 3.5: Temiz olmayan halkaya örnek vermek istenilirse, birimsel elemanları sadece 1 ve -1 olduğundan ve bu yüzden bütün elemanları birimsel ve idempotent elemanlar cinsinden ifade edilemeyeceğinden $\mathbb{Z}$ *tam sayılar halkası söylenebilir.*

Önerme 3.6: Bir temiz halkanın homomorfik görüntüsü de temizdir [24].

İspat 3.6: R *bir temiz halka ve* $f : R \to S$ *epimorfizma olsun.* R *temiz olduğundan, her* $f(a) \in S$ *için* $f(a) = f(e + u)$ *olacak şekilde* $e^2 = e$ *ve* $u \in U(R)$ *vardır.* $f(a) = f(e+u) = f(e)+f(u) = f(e^2)+f(u) = f(e).f(e)+f(u)$ *şeklinde yazılabilecek* $f(e) \in Id(S)$ *ve* $f(u) \in U(S)$ *elemanları mevcut olduğundan* $f(a)$ *temizdir.* ■

Önerme 3.7: R *bir halka ve* I*,* R *nin bir ideali olsun.* R *temiz ise* R/I *da temizdir [18].*

İspat 3.7: $a + I \in R/I$ *alalım.* a *temiz olduğundan* $a + I = (e + u) + I$ *eşitliğini sağlayan* $e \in Id(R)$ *ve* $u \in U(R)$ *vardır.* $(e + u) + I = (e + I) + (u + I)$ *için*

$(e+I) \in Id(R/I)$ *ve* $(u+I) \in U(R/I)$ *olduğundan* R/I *temizdir.* ∎

Sonuç 3.8: Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir.

$\mathbb{Z}$ halkasının bir $p\mathbb{Z}$ maksimal idealini alalım. Teorem 2.3'e göre $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_p$ olur. $\mathbb{Z}_p$ cismi temiz olduğundan $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ bölüm halkası da temiz olur. Ancak $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının temiz olmadığı söylenmişti.

Önerme 3.9: R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. R nin temiz olması için gerek ve yeter koşul R/I nın temiz, $I \subseteq J(R)$ ve idempotentlerin I ya göre yükselmesidir [24].

İspat 3.9: Önerme 3.7'den gereklilik açıktır. Diğer taraftan, $x \in R$ için $x+I = \overline{x} \in R/I$ olsun. R/I temiz olduğundan $\overline{x} = \overline{e}+\overline{u}$ olacak şekilde $\overline{e}^2 = \overline{e} \in Id(R/I)$ ve $\overline{u} \in U(R/I)$ elemanları mevcuttur. İdempotentler I ya göre yükseldiğinden $\overline{e} = e+I$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Öyleyse $\overline{x} = \overline{e}+\overline{u} = e+I+u+I = (e+u)+I = x+I$ elde edileceğinden x temizdir. ∎

Örnek 3.10: Temiz olmayan bir halkanın görüntüsü temiz olabilir.

Çözüm 3.10: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ $(a \longrightarrow \overline{a})$, $\overline{a} = a \pmod{p}$ olarak tanımlanmış bir epimorfizma olsun. $\mathbb{Z}$ temiz değilken $\mathbb{Z}_p$ temizdir.

Önerme 3.11: Her unit reguler halka temiz halkadır [3].

İspat 3.11: R unit reguler halka olsun. $\forall x \in R$ için $x = ue$ ve $ue = eu$ olacak şekilde $u \in U(R)$ ve $e \in Id(R)$ vardır. $v^{-1} = u^{-1}e-(1-e)$ olacak şekilde $v = ue-(1-e) \in U(R)$ ve $f = 1-e$ olacak şekilde $f \in Id(R)$ elemanları alınırsa $x = v+f$ olarak yazılmış olur. Böylece R halkasının temiz olduğu gösterilmiş olur. ∎

Önerme 3.12: Her kuvvetli reguler halka temiz halkadır [18].

İspat 3.12: *Kuvvetli reguler R halkasından bir r elemanı alınsın. $rzr = r$ ve $zrz = z$ olacak şekilde bir $z \in R$ vardır. Bu iki eşitlikten rz nin idempotent olduğu görülür. $e = rz$ olsun. Seçilen $u = r - (1 - e)$ birimselinin tersi $v = ze - (1 - e)$ olmak üzere $r = u + (1 - e)$ şeklinde yazılabileceğinden, seçilen elemanın temiz olduğu gösterilmiş olur.* ■

Önerme 3.13: Her kuvvetli π-reguler halka temiz halkadır [22].

İspat 3.13: *$a \in R$ alalım. a kuvvetli π-reguler eleman olduğundan Önerme 2.9'a göre $a^n = ew = we$ olacak şekilde $n \geq 1$ tam sayısı, $w \in U(R)$, $e \in Id(R)$ ve birbiriyle değişmeli olacak şekilde w, e, a elemanları vardır. $u = a-(1-e)$ nin birimsel olduğu gösterilmeli. $v = a^{n-1}w^{-1}e - (1 + a + ... + a^{n-1})(1 - e)$ olarak tanımlanırsa ve $u = ae - (1 - a)(1 - e)$ olarak alınırsa,*

$$uv = vu = [ae - (1 - a)(1 - e)][a^{n-1}w^{-1}e - (1 + a + ... + a^{n-1})(1 - e)] \quad (3.1)$$

iken $(1 - e)a^{n-1}w^{-1}e = 0$ olduğundan

$$uv = a^n w^{-1}e + (1 - a)(1 + a + ... + a^{n-1})(1 - e) \quad (3.2)$$

elde edilir. $(1-a)(1+a+...+a^{n-1}) = (1-a^n)$ olduğundan $uv = e+(1-a^n)(1-e)$ eşitliği sağlanır. Öyleyse $uv = 1$ sağlanmış olur. ■

Önerme 3.14: R bir halka olsun. $R[[x]]$ kuvvet serisi halkasının temiz olması için gerek ve yeter koşul R halkasının temiz olmasıdır [24].

İspat 3.14: $\Longrightarrow$: *$R[[x]]$ halkası temiz olsun. R halkası $R[[x]]$ halkasının homomorfik görüntüsü olduğundan Önerme 3.6'ya göre R temizdir.*

$\Longleftarrow$: *R halkası temiz olsun. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... \in R[[x]]$ elemanı alınsın. R temiz olduğundan $a_0 = e + u$ olacak şekile $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ vardır. Öyleyse a_0 yerine $e + u$ yazılırsa $f(x) = e + (u + a_1x + a_2x^2 + ...)$*

elde edilir. Önerme 2.4'e göre $a_0 \in U(R(x))$ *ise* $f(x) \in U(R[[x]])$ *dır. Öyleyse* $(u + a_1x + a_2x^2 + ...) \in U(R[[x]])$ *ve* $e^2 = e \in Id(R[[x]])$ *dir. Böylece* $R[[x]]$ *halkasının temiz olduğu gösterilmiş olur.* ■

Önerme 3.15: $R \neq 0$ *ise* $R[x]$ *polinom halkası temiz halka olamaz [24].*

İspat 3.15: $x \in R[x]$ *olsun. Kabul edelim ki* $x = e + u$ *olacak şekilde* $e \in Id(R[x])$ *ve* $u \in U(R[x])$ *olsun. Eğer* $e = e_0 + e_1x + ...$ *ve* $u = u_0 + u_1x + ...$ *ise* $e_0 = -u_0$ *dır ve hem birimsel ve hem idempotent eleman* $e_0 = 1$ *olur. Eğer* $e \neq 1$ *ise* $m \geq 1$ *ve* $g = a + bx + ...$ *olmak üzere* $e = 1 + x^m g$ *şeklindedir.* $(1+x^m g)^2 = 1+2x^m g+x^m g x^m g = 1+x^m g$ *elde edilir. Burada* $x^m g$ *li ifadelerin katsayıları eşleştirildiğinde* $2 = 1$ *olması çelişki oluşturur. Öyleyse* $e = 1$ *olmak zorundadır. Ve* $-u = 1 - x$ *olur. Eğer* $(1 - x)^{-1} = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *olursa* $a_0 = 1,\ a_1 - a_0 = 0,\ \dots\ ,\ a_n - a_{n-1} = 0,\ 0 - a_n = 0$ *ise* $a_n = 0$ *elde edilir. Diğer taraftan* $a_0 = a_1 = ... = a_n = 1$. *Bu da çelişki oluşturduğu için* u *birimsel değildir. Öyleyse* x *temiz değildir ve halka da temiz olamaz.* ■

Sonuç 3.16: $R[[x]]$ *halkası temiz iken alt halkası olan* $R[x]$ *temiz değildir. Öyleyse temiz halkaların alt halkaları temiz olmak zorunda değildir.*

Teorem 3.17: Sıfırdan farklı bir R *halkasının lokal halka olması için gerek ve yeter koşul* R *halkasının temiz ve* 0 *ve* 1*'den başka idempotent elemanının olmamasıdır [25].*

İspat 3.17: $\Longrightarrow$: R *lokal halka ve* $a \in R$ *olsun. Eğer* $a \in J(R)$ *ise ve Önerme 2.6'dan* $a - 1 \in U(R)$ *dir ve* $a = 1 + (a-1)$ *şeklinde yazılabileceğinden* a *temizdir.*

Eğer $a \notin J(R)$ *ise* $a \in U(R)$ *dir ve* $a = 0 + a$ *şeklinde yazılabileceğinden* a *temizdir. Ve böylece* R *temiz halkadır.*

$e \neq 0$ *ve* $e \neq 1$ R*'nin idempotent elemanı olsun.* $e^2 = e \implies e(1-e) = 0$ *olur.* e *ve* $1 - e$ *sıfır bölen olduklarından birimsel olmazlar ve halka lokal* *olduğundan birimsel olmayan elemanlar bir ideal oluşturur. Öyleyse* $e+(1-e)=1$ *elde edilir. Birimsel elemanın idealde olması çelişki oluşturur.*

$\Longleftarrow$: R *temiz halka olsun ve* 0 *ve* 1 *den başka idempotent elemanı olmasın.* $a \notin J(R)$ *ise* $1-ar \notin U(R)$ *dir.* $1-ar=0+u$ *şeklinde yazılamaz. Öyleyse* $1-ar=1+u$ *olmak zorunda.* $ar=u \implies aru^{-1}=1 \implies av=1$ *olacak şekilde* $v \in R$ *vardır. Benzer şekilde* $wa=1$ *olacak şekilde* $w \in R$ *vardır. Öyleyse* a *birimseldir. Bu da gösterir ki* R *lokal halkadır.* ∎

Yardımcı Teorem 3.18: R *değişmeli bir halka olsun.* $e, f \in R$ *idempotent elemanları için* $e-f \in J(R)$ *ise* $e=f$ *olur [3].*

İspat 3.18: $e-f \in J(R)$ *ise* $f(1-e)=(e-f)(e-1) \in J(R)$ *eşitliği yazılabilir.* R *değişmeli olduğundan* $f(1-e)$ *idempotenttir. Öyleyse* $f(1-e)=0$ *dır yani* $f=fe$ *dir. Diğer taraftan* $f-e \in J(R)$ *için* $e(1-f)=(f-e)(f-1) \in J(R)$ *eşitliği yazılırsa* $e(1-f)$ *idempotent olur.* $e(1-f)=0$ *dır. Böylece* $e=ef$ *eşitliği sağlanır. Öyleyse* $e=f$ *elde edilir.* ∎

Teorem 3.19: R *değişmeli bir halka ve* $\sqrt{0}$ *nil radikali olsun.* R*'nin temiz olması için gerek ve yeter koşul* $R/\sqrt{0}$*'ın temiz olmasıdır [3].*

İspat 3.19: $\Longrightarrow$: *Teorem 3.7'den açıktır.*

$\Longleftarrow$: $x \in R$ *olsun. Eğer seçilen bir* $x \in R$ *elemanı birimsel ise* $\overline{x} \in \overline{R} = R/\sqrt{0}$ *birimseldir ve böylece temizdir.* $\overline{R}$*'ın idempotent elemanına karşılık gelen eleman* R *halkasında idempotenttir. Herhangi bir* $x \in R$ *için* $\overline{x}=u+e$ *olacak şekilde* $u \in U(\overline{R})$ *ve* $e \in Id(\overline{R})$ *vardır.* e *elemanın* R *halkasında ki karşılığı* f *olsun. Öyleyse* $\overline{x-f}=\overline{x}-e=u$ *olur. Buradan da* $x-f \in U(R)$ *elde edilir. Son olarak* $x=(x-f)+f$ *olarak şekilnde yazılabildiğinden* R *temiz halkadır.* ∎

Sonuç 3.20: Her zero-dimensional (sıfır boyutlu) değişmeli halka temiz halkadır [3].

İspat 3.20: *R bir zero-dimensional (sıfır boyutlu) değişmeli halka olsun. Öyleyse tanım gereği* $\overline{R} = R/\sqrt{0}$ *unit reguler halka olur ve* $\overline{R}$ *temizdir.* $\sqrt{0} \subseteq J(R)$ *olduğundan Teorem 3.19 gereğince R halkası da temizdir.* ■

Önerme 3.21: *I indeks kümesi olsun. Her* $i \in I$ *için* R_i*'lerin temiz halka olmaları için gerek ve yeter koşul direkt çarpımlarının temiz halka olmasıdır [24].*

İspat 3.21: $\Longrightarrow$: *Her* $i \in I$ *için* R_i*'ler temiz olsun. Bu durumda her* $a_i \in R_i$ *için* $a_i = e_i + u_i$ *olacak şekilde* $e_i \in Id(R_i)$ *ve* $u_i \in U(R_i)$ *vardır.* $\forall (a_1, a_2, ...) \in \prod R_i$ *için* $(a_1, a_2, ...) = (e_1, e_2, ...) + (u_1, u_2, ...)$ *şeklinde yazılabileceğinden direkt çarpımları temizdir.*

$\Longleftarrow$: $\prod\limits_{i \in I} R_i$ *direkt çarpımı temiz olsun. Her* $i \in I$ *için* $\prod R_i$ *halkasının birer homomorfik görüntüleri* R_i *halkalarını oluşturacağından* R_i*'ler temiz olur.* ■

3.1. Kuvvetli Temiz Halkalar

Tanım 3.2: *R bir halka olsun. e bir idempotent ve u bir birimsel eleman olmak üzere, alınan bir* $a \in R$, $a = e + u$ *şeklinde yazılabiliyor ve aynı zamanda* $eu = ue$ *eşitliği sağlanıyorsa, a elemanına kuvvetli temiz (strongly clean) eleman denir. Eğer R halkasının bütün elemanları kuvvetli temiz ise R halkasına kuvvetli temiz halka denir [23].*

Örnek 3.22: *Bir halkada idempotent, birimsel ve quasi-reguler elemanlar kuvvetli temiz elemanlardır [26].*

Çözüm 3.22: *Bir e idempotent elemanının* $e = (1-e)+(2e-1)$ *şeklinde yazılabildiği gösterilmişti. Ayrıca birimsel eleman ve idempotent eleman değişmeli olduklarından yani* $(1-e)(2e-1) = (2e-1)(1-e)$ *eşitliği sağlandığından e kuvvetli temiz elemandır.*

u birimsel elemanı $u = 0 + u$ *şeklinde yazabilir. Ve de* $u0 = 0u$ *olduğun-*

dan u kuvvetli temizdir.

x quasi-reguler eleman olsun. Öyleyse $x = 1+(x-1)$ şeklinde yazılabildiğinden temiz olduğu, $1(x-1) = (x-1)1$ eşitliği sağlandığından da kuvvetli temiz olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 3.23: Boole halkaları değişmeli halkalardır ve her elemanı idempotent olduğundan kuvvetli temiz halkalardır.

Sonuç 3.24: Cisimlerin her elemanı temizdir ve değişmeli halka olduklarından kuvvetli temiz halkaya örnektirler.

Teorem 3.25: Her lokal halka kuvvetli temiz halkadır [28].

İspat 3.25: Teorem 3.17 de lokal halkalarının temiz halkalar olduğu gösterilmiştir. Lokal halkalarda 0 ve 1 den başka idempotent eleman olmadığından aynı zamanda kuvvetli temiz halka olma özelliği sağlanmış olur. ■

Örnek 3.26: Bir R halkasında a elemanı kuvvetli temiz ise $1-a$ da kuvvetli temiz elemandır [26].

Çözüm 3.26: Eğer $a \in R$ kuvvetli temiz ise $a = e+u$ ve $eu = ue$ eşitliklerini sağlayan $e^2 = e$ idempotent ve u birimsel elemanı vardır. Öyleyse $1-a = 1-e+(-u)$ şeklinde yazılırsa temiz olduğu görülür. Ve de $(1-e)(-u) = -u+eu = (-u)1+(-u)(-e) = (-u)(1-e)$ eşitliği sağlandığından $1-a$ kuvvetli temiz elemandır.

Önerme 3.27: Her kuvvetli π-reguler halka kuvvetli temiz halkadır [22].

İspat 3.27: $a \in R$ olsun. a kuvvetli π-reguler eleman olduğundan $a^n = ew = we$ olacak şekilde $n \geq 1$ tam sayısı, $w \in U(R)$, $e \in Id(R)$ vardır ve w, e, a elemanları birbirleriyle değişmelidir. $u = a-(1-e)$ nin birimsel olduğu $v = a^{n-1}w^{-1}e-(1+a+...+a^{n-1})(1-e)$ ve $u = ae-(1-a)(1-e)$ kullanılarak *gösterilmiş,* $uv = vu = [ae-(1-a)(1-e)][a^{n-1}w^{-1}e-(1+a+...+a^{n-1})(1-e)]$ $= a^n w^{-1}e+(1-a)(1+a+...+a^{n-1})(1-e) = e+(1-a^n)(1-e) = 1$ *bulunmuştu. Bu durumda* $u \in U(R)$ *ve* $(1-e)^2 = (1-e)$ *olup* $a = (1-e)+u$ *elde edilir. Ve de* $(1-e)u = u(1-e)$ *sağlandığından* a *elemanı kuvvetli temiz eleman olur.* ■

Önerme 3.28: R halkası kuvvetli temiz ise R halkasının her homomorfik görüntüsüde kuvvetli temizdir [22].

İspat 3.28: Temiz halkaların homomorfik görüntülerinin temiz olduğunu gösterilmişti. İdempotent elemanla birimsel elemanın değişmeli olduğu $f(e)f(u) = f(eu) = f(ue) = f(u)f(e)$ *eşitliğinin sağlanmasıyla gösterilmiş olur.* ■

Önerme 3.29: I indis kümesi olsun. Her $i \in I$ *için* R_i*'nin kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter şart direkt çarpımlarının kuvvetli temiz olmasıdır [22].*

İspat 3.29: $\Longrightarrow$*: Her* $i \in I$ *için* R_i *ler temiz iken* $\prod R_i$ *temiz olduğunu gösterilmişti. Her* $i \in I$ *için* $e_i u_i = u_i e_i$ *olduğundan* $\prod R_i$ *kuvvetli temiz halkadır.*
$\Longleftarrow$*: Her kuvvetli halkanın homomorfik görüntüsü kuvvetli temiz ve* R_i*'ler* $\prod R_i$ *nin homomorfik görüntüsü olduğundan* $\prod R_i$ *kuvvetli temiz ise her* $i \in I$ *için* R_i *halkaları da kuvvetli temizdir.* ■

Teorem 3.30: Bir halkanın kuvvetli exchange halka olması için gerek ve yeter koşul halkanın kuvvetli temiz olmasıdır [11].

İspat 3.30: R kuvvetli exchange halka olsun. Her $x \in R$ *için* $a, b \in R$ *olmak üzere* $e = ax = xa$ *ve* $1-e = b(1-x) = (1-x)b$ *olacak şekilde* $e \in Id(R)$ *idempotent elemanı vardır.* $e = ax = xa$ *olduğundan* $ea = axa = ae$ *ve* $e = eax = xae$ *eşitlikleri sağlanır. Eğer* $ea = a_1$ *alınırsa,* $e = a_1x = xa_1$ *ve* $ea_1 = a_1e = a_1$ *eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde,* $b_1 = (1-e)b = b(1-e)$ *için* $1-e = b_1(1-x) = (1-x)b_1$ *ve* $(1-e)b_1 = b_1(1-e)$ *eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin yardımıyla* $(a_1-b_1)(x-(1-e)) = a_1x - a_1(1-e) - b_1x + b_1(1-$

$e) = e - b_1x + b_1 = e + b_1(1-x) = e + 1 - e = 1$ *çarpımı sağlandığından,* $x - (1-e) \in U(R)$ *olur.* $e = ax = xa$ *olduğundan* $ex = xax = xe$ *elde edilir. Böylece* $(1-e)x = x(1-e)$ *olur.* $x-(1-e) \in U(R)$ *ve* $1-e \in Id(R)$ *kullanılarak* $x = 1-e+(x-(1-e))$ *yazılabildiğinden* x *kuvvetli temiz olur.*

Tersine, R *kuvvetli temiz halka olsun. Her* $x \in R$ *için* $uf = fu$ *ve* $x = f + u$ *olacak şekilde* $u \in U(R)$ *ve* $f \in Id(R)$ *vardır.* $uf = fu$ *olduğundan* $ux = xu$, $fx = xf$ *ve* $u^{-1}x = xu^{-1}$ *eşitlikleri sağlanır.* $e = u(1-f)u^{-1}$ *olsun.* $e \in Id(R)$ *olduğu açıktır. Öyleyse* $(x-e)u = (u+f-u(1-f)u^{-1})u = u^2 + fu = uf - u = x^2 - x$ *yazılabilir. Böylece* $e - x = (x-x^2)u^{-1}$ *ve* $e = x + (x-x^2)u^{-1} = (1+(1-x)u^{-1})x = x(1+(1-x)u^{-1})$ *elde edilir. Buradan* $1-e = 1-x-(x-x^2)u^{-1} = (1-xu^{-1})(1-x) = (1-x)(1-xu^{-1})$ *eşitliği elde edilir.* $1-e = (1-xu^{-1})(1-x) = (1-x)(1-xu^{-1})$ *olduğundan* R *kuvvetli exchange halka olur.* ■

Teorem 3.31: R *kuvvetli temiz halka ise, her* $e \in Id(R)$ *için* eRe *halkası da kuvvetli temizdir [11].*

İspat 3.31: R *kuvvetli temiz halka olsun. Teorem 3.30 dan* R *kuvvetli exchange halkadır.* eRe*'nin kuvvetli temiz olduğunu göstermek için kuvvetli exchange olduğunu göstermek yeterlidir.* $x \in eRe$ *alalım.* R *kuvvetli exchange ve* $x \in R$ *olduğundan* $f = ax = xa$ *ve* $1-f = b(1-x) = (1-x)b$ *olacak şekilde* $f \in Id(R)$ *ve* a, $b \in R$ *vardır.* $x \in eRe$ *olduğundan* $x = exe$ *olur.* $f = ax = xa$ *eşitliğinden* $fe = ef = f$ *elde edilir. Böylece* $(ef)^2 = ef$ *ve* $ef = efe \in Id(eRe)$ *olur.* $x = exe$ *olduğundan* $xeae = xae = exae = eaxe = eaex$ *eşitlikleri sağlanır. Bu da gösterir ki* $ef = eaexe = eaxe = exae = xeae = eaex$ *dir.* $fe = f$ *ve* $x = exe$ *olduğundan* $e-ef = e(1-f)e = eb(1-x)e = eb(e-xe) = eb(ee-ex) = ebe(e-x)$ *olur. Diğer taraftan* $(e-x)ebe = (e-x)be = e(1-x)be = eb(1-x)e = eb(e-ex) = ebe(e-x)$ *eşitliği sağlanır. Böylece* $e-ef = ebe(e-x) = (e-x)ebe$ *elde edilir.*

eRe halkasının kuvvetli exchange halka olduğu görülür. ■

3.2. Tek Türlü Temiz Halkalar

Tanım 3.3: R bir halka olsun. $a \in R$ için $a = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcutsa ve bu yazılım tek türlü ise a ya tek türlü temiz (uniquely clean) eleman denir. Eğer R halkasının bütün elemanları tek türlü temiz ise R halkasına tek türlü temiz halka denir [3].

Örnek 3.32: Bir halkanın merkezindeki bütün idempotent ve nilpotent elemanlar tek türlü temiz elemanlardır [25].

Çözüm 3.32: $e^2 = e$ merkezil idempotent olsun. e temiz olduğundan $e = (1 - e) + (2e - 1)$ şeklinde yazabilir. Kabul edelim ki $e = f + u$ (*) olacak şekilde farklı $f^2 = f$ idempotent ve $u \in U(R)$ birimsel elemanları olsun. $e = f + u = (f + u)^2 = f + 2fu + u^2 \Rightarrow u = (2f + u)u \Rightarrow 1 = 2f + u \Rightarrow u = 1 - 2f$ ve (*) dan $e - f = 1 - 2f \Rightarrow f = 1 - e$ elde edilir.

$a \in R$ nilpotent eleman olsun. Öyleyse $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}^+$ vardır. $a = 1 + (a - 1)$ şeklinde yazabilir ve $a - 1 \in U(R)$ olduğu Örnek 2.2'den açıktır. Kabul edelim ki $a = e + u$ olacak şekilde 1'den farklı $e^2 = e$ ve $(a - 1)$'den farklı $u \in U(R)$ elemanları olsun. Binom teoremi kullanılarak,

$$0 = (e + u)^n = e + \binom{n}{1}eu + \binom{n}{2}eu^2 + ... + \binom{n}{n-1}eu^{n-1} + u^n \tag{3.3}$$

eşitliği yazabilir. Ve

$$e + \binom{n}{1}eu + \binom{n}{2}eu^2 + ... + \binom{n}{n-1}eu^{n-1} = -u^n \tag{3.4}$$

elde edilir. Öyleyse

$$e(1+\binom{n}{1}u+\binom{n}{2}u^2+...+\binom{n}{n-1}u^{n-1})=-u^n \tag{3.5}$$

dir. $u^n \in eR$ *dir ve* $e=1$ *olur. Bu durum* $e \neq 1$ *kabulu ile çelişir.*

Sonuç 3.33: Her Boole halkası tek türlü temiz halkadır [25].

İspat 3.33: Boole halkası değişmeli bir halka olduğundan her elemanı merkezde ve idempotenttir. Örnek 3.32'ye göre her elemanı tek türlü temiz olur ve böylece Boole halkasının tek türlü temiz halka olduğu söylenebilir.

Örnek 3.34: Cisimler tek türlü temiz olmayabilirler. $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar halkası düşünüldüğünde hem* 0 *hem de* 1 *idempotent elemanlardır. Herhangi bir* $a \in R$ *için* $a=0+a$ *ve* $a=1+(a-1)$ *olacak şekilde iki farklı yazılım olacağı için tek türlü temiz olma özelliği sağlanmaz.*

Önerme 3.35: Tek türlü temiz halkaların homomorfik görüntüleri de tek türlü temizdir [25].

İspat 3.35: R *tek türlü temiz halka olsun.* $a \in R$ *alalım. Eğer* $f(a)=f(e_1)+f(u_1)=f(e_2)+f(u_2)$ *olacak şekilde iki farklı yazılım olsaydı* $f(a)=f(e_1+u_1)=f(e_2+u_2)$ *eşitliği elde edilirdi ve* $a \in R$ *elemanının da* $e_1+u_1=e_2+u_2$ *olacak şekilde iki farklı yazılımı olurdu. Bu da* $a \in R$ *nın tek türlü temiz olmasıyla çelişirdi.* ■

Teorem 3.36: R *değişmeli bir halka ve* $\sqrt{0}$ *nil radikali olsun.* R*'nin tek türlü temiz olması için gerek ve yeter koşul* $R/\sqrt{0}$*'ın tek türlü temiz olmasıdır [3].*

İspat 3.36: $\Longrightarrow$: R *tek türlü temiz halka olsun. Teorem 3.19'dan* $\overline{R}=R/\sqrt{0}$ *halkası da temizdir.* $x \in R$ *için,* $\overline{x}=e_1+u_1=e_2+u_2$ *olacak şekilde* u_1, $u_2 \in U(\overline{R})$ *ve* e_1, $e_2 \in Id(\overline{R})$, $e_1 \neq e_2$ *elemanlarını alalım. Seçilen* $f_i \in Id(R)$ *elemanları için* $e_i=\overline{f_i}$ *olsun.* $e_1 \neq e_2$ *olduğundan* $f_1 \neq f_2$ *elde edilir.*

$\overline{x - f_i} = u_i \in U(\overline{R})$ *elde edilir. Böylece* $v_i = x - f_i \in U(R)$ *birimselleriyle* $x = v_1 + f_1 = v_2 + f_2$ *olacak şekilde iki farklı yazılım elde edilir. Bu durum* R*'nin tek türlü olmasıyla çelişir.*

$\Longleftarrow$: $\overline{R} = R/\sqrt{0}$ *tek türlü temiz halka olsun.* R *halkası da temizdir.* $x \in R$ *için* $x = e_1 + u_1 = e_2 + u_2$ *olacak şekilde* u_1, $u_2 \in U(R)$ *ve* e_1, $e_2 \in Id(R)$ *elemanları olsun. O zaman* $\overline{x} = \overline{e_1} + \overline{u_1} = \overline{e_2} + \overline{u_2}$ *eşitliği yazılabilir ancak* $\overline{R} = R/\sqrt{0}$ *tek türlü temiz olduğundan* $\overline{e_1} = \overline{e_2}$ *dir. Buradan da* $e_1 - e_2 \in \sqrt{0} \subseteq J(R)$ *elde edilir. Yardımcı teorem 3.18'den* $e_1 = e_2$ *dir ve* $u_1 = u_2$ *elde edilir. Böylece* R *halkası tek türlü temiz halka olur.* ■

Önerme 3.37: Tek türlü temiz bir halkadaki her idempotent eleman merkezdedir [25].

İspat 3.37: $e^2 = e \in R$ *idempotent eleman olsun.* $\forall r \in R$ *için* $e + (er - ere)$ *idempotent ve* $1 + (er - ere)$ *birimseldir öyleki* $(1 + er - ere)(1 - er + ere) = 1$ *dir. Öyleyse* $[e + (er - ere)] + 1 = e + [1 + (er - ere)]$ *yazabilir ve* R *nin tek türlü temiz olmasından* $e + (er - ere) = e$ *elde edilir ve* $er = ere$ *olur. Benzer şekilde* $e + (re - ere)$ *idempotent ve* $1 - (re - ere)$ *birimsel seçilirse* $re = ere$ *elde edilir. Öyleyse* $\forall r \in R$ *için* $er = re$ *yazabilir ve* $e \in Cent(R)$*'dir.* ■

Sonuç 3.38: $n \geq 2$ *için* $T_n(R)$ *ve* $M_n(R)$ *matris halkalarında bütün idempotent elemanlar merkezde olmadığından bu halkalar tek türlü temiz olamaz [25].*

Sonuç 3.39: Tek türlü temiz halkanın merkezi tek türlü temizdir [25].

İspat 3.39: Yukarıdaki önermeye göre tek türlü halkadaki her idempotent elemanın merkezde olduğundan, her $a \in cent(R)$ *için* $a = e + u$ *şartını sağlayan* $u \in U(R)$ *elemanı halka tek türlü temiz olduğundan tek türlüdür.* $a = e + u$ *yerine* $a - e = u$ *yazılırsa* $u \in cent(R)$ *elde edilir ve* u *elemanının merkezde olduğu gösterilmiş olur.* ■

Sonuç 3.40: Her tek türlü temiz halka Dedekind sonlu halkadır [25].

İspat 3.40: $1 = ab \in R$ *alalım.* $ba = b1a = b(ab)a = baba = (ba)^2$ *olduğundan* ba *idempotenttir ve halka tek türlü temiz olduğundan* $ba \in cent(R)$ *dir.* $ba = ba1 = ba(ab) = a(ba)b = 1$ *sağlanır.* ■

Önerme 3.41: Her $i \in I$ *için* R_i *nin tek türlü temiz halka olması için gerek ve yeter koşul direkt çarpımlarının tek türlü temiz halka olmasıdır [3].*

Teorem 3.42: $0 \neq R$ *halkası için aşağıdakiler denktir [25]:*

i) R *bir lokal ve tek türlü temiz halkadır.*

ii) R *tek türlü temiz halka ve* 0 *ve* 1*'den başka idempotent elemanı yoktur.*

iii) $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$.

İspat 3.42: $i) \implies ii)$*:* 0*'dan ve* 1*'den farklı bir* $e \in R$ *idempotent eleman olsun.* $e^2 - e = 0$ *olduğundan* $e(1-e) = 0$ *olur.* e *ve* $1-e$ *sıfır bölen olduklarından birimsel eleman değillerdir.* R *lokal halka olduğundan, birimsel olmayan elemanlar ideal oluşturur.* $e + (1-e) = 1$ *olur. Bu da* 1*'in idealde olmaması gerektiğiyle çelişir.*

$ii) \implies iii)$*: Eğer* $0 \neq \overline{a} \in \overline{R} \cong R/J(R)$ *ise,* $\overline{a} = \overline{1}$ *olduğunu gösterilmeli.* $\overline{a} \neq \overline{1}$ *olsun.* $a + J(R) \neq 0 + J(R)$ *olduğundan* $a \notin J(R)$ *ve* $a + J(R) \neq 1 + J(R)$ *olduğundan* $a - 1 \notin J(R)$ *elde edilir.* R *local halka olduğundan* a *ve* $a-1$ *birimseldir.* $0 + (1-a) = 1 + (-a)$ *yazıldığında* $0 = 1$ *elde edilmesi,* R *halkasının tek türlü temiz olmasıyla çelişir.*

$iii) \implies i)$*:* $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ *olsun. Teorem 2.3'ten* $J(R)$ *maksimal ideal olur.* $J(R)$ *maksimal ise* R *lokal halkadır. Her lokal halka temiz olduğundan* R *de temizdir. Şimdi* R*'nin tek türlü temiz olduğunu gösterelim. Keyfi bir* $a \in R$ *için kabul edelim ki* $a = e + u = f + v$ *olacak şekilde* e, $f \in Id(R)$ *idempotent ve* u, $v \in U(R)$ *birimsel elemanlar olsun. Lokal halkada* 0 *ve* 1*'den başka idempotent* *elemanı olmadığı için $e = 0$ ve $f = 1$ alalım.* $0+(1-u) = 1+(-u)$ *yazıldığında* u, $1-u \in U(R)$ *olur. Ancak* $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ *olduğundan* $\overline{u} = \overline{1} = \overline{1}+\overline{u} \in R/J(R)$ *elde edilir.* $\overline{u} = \overline{1} + \overline{u}$ *çelişki oluşturur.* ■

Önerme 3.43: $e \in R$ idempotent olsun. R tek türlü temiz ise eRe korner halkası da tek türlü temizdir [25].

İspat 3.43: Tek türlü temiz halkalarda idempotent elemanlar merkezdedir. Ve ayrıca R temiz halka olduğundan R exchange halkadır. R exchange ise eRe de exchange halkadır. Bütün idempotentler merkezde olduğundan eRe tek türlü temiz halkadır. ■

3.3. Tek Türlü Kuvvetli Temiz Halkalar

Tanım 3.4: R bir halka olsun. $a \in R$ için $a = e + u$ ve $eu = ue$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ mevcutsa ve bu yazılım tek türlü ise a ya tek türlü kuvvetli temiz (uniquely strongly clean) eleman denir. Eğer R halkasının bütün elemanları tek türlü kuvvetli temiz ise R halkasına tek türlü kuvvetli temiz halka denir [10].

Örnek 3.44: $\mathbb{Z}_2$ halkası tek türlü kuvvetli temiz halkaya örnektir.

Örnek 3.45: I indis kümesi ve $\forall i \in I$ için R_i'ler halka olsun. $\prod R_i$ halkası nın tek türlü kuvvetli temiz olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için R_i halkalarının tek türlü kuvvetli temiz olmasıdır [10].

Örnek 3.46: R bir halka olsun. R halkasının tek türlü temiz olması için gerek ve yeter koşul R nin değişmeli ve tek türlü kuvvetli temiz olmasıdır [10].

Çözüm 3.46: R halkasının tek türlü temiz olsun. Aynı zamanda R değişmeli ise kuvvetli temiz halka da olcaktır. Öyleyse R tek türlü kuvvetli temizdir. Tersine,

R tek türlü kuvvetli temizse, R'nin tek türlü temiz olduğu açıktır.

Önerme 3.47: R bir halka ve $e \in Id(R)$ olsun. R halkası tek türlü kuvvetli temiz ise eRe halkası da tek türlü kuvvetli temizdir [10].

İspat 3.47: R kuvvetli temiz ise eRe halkası da kuvvetli temizdir 3.31. $eRe = S$ olsun. $f_1, f_2 \in Id(S)$ idempotent ve u_1, $u_2 \in U(S)$ birimsel elemanlar ve $i = 1, 2$ için $f_i u_i = u_i f_i$ olmak üzere $f_1 + u_1 = f_2 + u_2$ olsun. $i = 1, 2$ için $v_i = u_i + 1 - e$ olsun. R tek türlü kuvvetli temiz olduğundan $i = 1, 2$ için $v_i f_i = f_i v_i$ olur. Böylece $f_1 + v_1 = f_2 + v_2$ eşitliği elde edilir ve dahası $f_1 = f_2$ olur. Öyleyse aynı zamanda $u_1 = u_2$ dir. Böylece eRe halkası tek türlü kuvvetli temiz olur. ■

4. TEMİZ MATRİS HALKALARI

R bir halka ve bir $e \in R$ idempotent eleman olsun. e'ye bağlı olarak Peirce decomposition $R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e)$ şeklinde ayrıştırılabilir. Matris halkası üzerinde gösterilmek istenilirse

$$R \cong \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

olarak yazılabilir. Eğer R birimli ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesi de ortogonal idempotent elemanların kümesi ise,

$$R \cong \begin{bmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 & \cdots & e_1Re_n \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 & \cdots & e_2Re_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_nRe_1 & e_nRe_2 & \cdots & e_nRe_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

genelleştirilmiş matris gösterimi elde edilir. Burada $eRe (= \{ere | r \in R\})$, ve $(1-e)R(1-e)$, R nin alt halkalarıdır. $eR(1-e)$ bir eRe-$(1-e)R(1-e)$-bimodülü ve $(1-e)Re$, bir $(1-e)R(1-e)$-eRe-bimodülüdür [29].

Yardımcı Teorem 4.1: R halkasında e bir idempotent eleman olsun. Eğer eRe ve $(1-e)R(1-e)$ halkaları temiz ise R halkası da temizdir [24].

İspat 4.1: Peirce decompositiona göre $R \cong \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}$ yazılabilir. Bir $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in R$ olsun. Kabulden $a = f + u$ yazılabilir. eRe de $f^2 = f$ idempotent ve $u^{-1} = u_1$ birimsel elemanlardır. Ayrıca $b - yu_1x \in (1-e)R(1-e)$ dir ve $(1-e)R(1-e)$ halkası temiz kabul edildiğinden $(1-e)R(1-e)$ de $g^2 = g$ idempotent ve $v^{-1} = v_1$ birimsel elemanları kullanılarak $b - yu_1x = g + v$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitliklerden yola çıkarak,

$A = \begin{bmatrix} f+u & x \\ y & g+v+yu_1x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ o & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & x \\ y & yu_1x \end{bmatrix}$ *elde edilir.* $\begin{bmatrix} f & 0 \\ o & g \end{bmatrix} \in$ $Id(R)$ *olduğu açıktır. Burada yapılması gereken* $\begin{bmatrix} u & x \\ y & yu_1x \end{bmatrix}$ *nin birimsel olduğunun gösterilmesidir.* $\begin{bmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & 1-e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ *olduğundan ve* $\begin{bmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & 1-e \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}$ *elemanları birimsel olduğundan* R *temiz halkadır.* ■

Teorem 4.2: R *bir halka ve* e_i*'ler ortogonal idempotentler olsun. Her* e_i *için* e_iRe_i *temiz ise* R *halkası da temizdir [24].*

Tümevarım uygulanarak teoremin ispatı kolayca gösterilebilir.

Önerme 4.3: R *temiz halka ise* $M_n(R)$ *matris halkası da temizdir [24].*

İspat 4.3: $E_{ii}^2 = E_{ii} \in M_n(R)$ *i. satır ve sütun elemanı* 1 *diğer elemanları* 0 *olan idempotent matris olsun.* $E_{ii}M_n(R)E_{ii} \cong R$*'dir ve* R *temiz halka olduğundan her* i *için* $E_{ii}M_n(R)E_{ii}$ *halkası da temiz halkadır. Peirce decompositiondan* $M_n(R)$ *matris halkası da temizdir.* ■

Teorem 4.4: R *halkasının temiz olması için gerek ve yeter şart her* $n \geq 1$ *için* $T_n(R)$*'nin temiz olmasıdır [24].*

İspat 4.4: $\Longleftarrow$: *Her* $n \geq 1$ *için* $T_n(R)$ *temiz olsun.* $n = 1$ *için* R *halkası temiz olur.*

$\Longrightarrow$: R *halkası temiz olsun. Her* $n \geq 1$ *için* $T_n(R)$ *nin temiz olması tümevarımla gösterilebilir.* $n = 1$ *için açıktır.* n *için doğru olduğunu kabul edilsin. Öyleyse* $A \in T_n(R)$ *için* $A = E + U$ *olacak şekilde* $E \in Id(T_n(R))$ *ve* $U \in U(T_n(R))$ *vardır.* $n+1$ *için gösterilmeli.* $\beta \in M_{n\times 1}(R)$ *ve* $a \in R$ *olmak üzere* $X =$ $\begin{bmatrix} A_{n\times n} & \beta \\ 0 & a \end{bmatrix} \in T_{n+1}(R)$ *olsun.* R *temiz olduğundan* $a = e + u$ *olacak şekilde*

$e \in Id(R)$ ve $u \in U(R)$ vardır. $E_1 = \begin{bmatrix} E_{n\times n} & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \in Id(T_{n+1}(R))$ *ve* $U_1 = \begin{bmatrix} U_{n\times n} & \beta \\ 0 & u \end{bmatrix} \in U(T_{n+1}(R))$ *olacak şekile* $X = E_1 + U_1$ *şeklinde yazılabildiğinden istenilen elde edilmiş olur.* ■

Tanım 4.1: R bir halka olsun. Her $j \in J(R)$ ve $u \in U(R)$ için $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ grup endomorfizmları örten ise R halkasına bleached halka denir. $l_u - r_j$ ve $l_j - r_u$ grup endomorfizmaları izomorfizma ise R halkasına tek türlü bleached halka denir [19].

Yardımcı Teorem 4.5: $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olmak üzere R bir lokal halka ve $u \in U(R)$, $j \in J(R)$ olsun. $l_u - r_j$ izomorfizma ise her $r \in R$ için $\begin{bmatrix} u & r \\ 0 & j \end{bmatrix} \in T_2(R)$ *matrisi tek türlü kuvvetli temiz elemandır [19].*

İspat 4.5: Kabule göre $ue_{12} - e_{12}j = -r$ olacak şekilde tek türlü $e_{12} \in R$ idempotent elemanı vardır. $E^2 = E$ idempotent matrisi $E = \begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olsun.* $A = \begin{bmatrix} u & r \\ 0 & j \end{bmatrix} \in T_2(R)$ *matrisi için* $U = A - E = \begin{bmatrix} u & r - e_{12} \\ 0 & j-1 \end{bmatrix} \in T_2(R)$ *matrisi u ve $j-1$ birimsel olduklarından $U \in U(T_2(R))$ olur. Ayrıca $ue_{12} + r = e_{12}j$ olduğundan $AE = EA$ eşitliği sağlanır. Öyleyse $A = E + U$ kuvvetli temizdir. $e_{12} \in R$ tek türlü olduğundan $E \in T_2(R)$ idempotent matrisi de tek türlüdür. Öyleyse A tek türlü kuvvetli temiz elemandır.* ■

Benzer şekilde aşağıdaki teorem söylenebilir.

Yardımcı Teorem 4.6: $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olmak üzere R bir lokal halka ve $u \in U(R)$, $j \in J(R)$ olsun. $l_j - r_u$ izomorfizma ise her $r \in R$ için $\begin{bmatrix} j & r \\ 0 & u \end{bmatrix} \in T_2(R)$ *matrisi tek türlü kuvvetli temiz elemandır [19].*

Sonuç 4.7: R lokal halka olsun. R tek türlü bleached ve $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ise $T_2(R)$ halkası tek türlü kuvvetli temiz halkadır [19].

İspat 4.7: *R lokal ve* $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ *olduğundan R tek türlü temiz halkadır.* a, b, $c \in R$ *olacak şekilde* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in T_2(R)$ *olsun. Burada* a *ve* $c \in U(R)$ *ise* $E = 0$ *matrisi seçilir. Ve* A *matrisinin tek türlü kuvvetli temiz olduğu gösterilmiş olur. Eğer* a *ve* $c \in J(R)$ *ise* $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisi seçilir ve* A *matrisinin tek türlü kuvvetli temiz olduğu gösterilmiş olur. Eğer* $a \in U(R)$ *ve* $c \in J(R)$ *(ya da* $c \in U(R)$ *ve* $a \in J(R)$*) ise kabulden* $l_a - r_c$ *(*$l_a - r_c$*) izomorfizma olduğundan Yardımcı Teorem 4.5 ve 4.6'ya göre* A *kuvvetli temiz olur.* ■

Yardımcı Teorem 4.8: *R bir halka olsun. Eğer* $T_2(R)$ *halkası tek türlü kuvvetli temiz halka ise R tek türlü bleached halkadır [8].*

İspat 4.8: *Önerme 3.31'de* $T_2(R)$ *tek türlü kuvvetli temiz ise* $ET_2(R)E$*'nin de tek türlü kuvetli temiz olduğu gösterilmişti. Öyleyse* $ET_n(R)E \cong R$ *olduğundan* R *halkası da tek türlü kuvvetli temiz halka olur.* $a \in J(R)$, $b \in U(R)$ *ve* $r \in R$ *elemanlarıyla* $A = \begin{bmatrix} a & -r \\ 0 & b \end{bmatrix} \in T_2(R)$ *matrisi oluşturulsun.*
$T_2(R)$ *halkası tek türlü kuvvetli temiz halka olduğundan* $A - E \in U(T_2(R))$ *ve* $AE = EA$ *olacak şekilde tek türlü* $E = [eij] \in T_2(R)$ *vardır.* R *tek türlü temiz olduğundan* $a - e_{11}$ *ve* $b - e_{22} \in U(R)$ *olacak şekilde tek türlü* e_{11} *ve* e_{22} *vardır ve* $e_{11} = 1$ *ve* $e_{22} = 0$ *dır. Öyleyse keyfi* $x \in R$ *için idempotent matris* $E = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *olarak yazılabilir.* $a - 1 \in U(R)$ *ve* $b - 0 \in U(R)$ *olduğundan* $A - E \in U(T_2(R))$ *dır.* $EA = AE$ *olduğundan* $ax - xb = -r$ *elde edilir.*
Kabul edelim ki $ay - yb = -r$ *olacak şekilde* $y \in R$ *olsun. Öyleyse* $A - F \in U(T_2(R))$ *ve* $AF = FA$ *olacak şekilde* $F = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *idempotent matrisi bulunur. Bu da* $T_2(R)$ *halkasının tek türlü kuvvetli temiz halka olmasıyla çelişeceğinden* $E = F$ *sonucu elde edilir ve* $x = y$ *olduğu görülür. Öyleyse* $l_a - r_b : R \to R$ *bir izomorfizmadır. Diğer taraftan eğer* $a \in U(R)$ *ve* $b \in J(R)$ *alınısa* $l_b - r_a : R \to R$ *bir izomorfizma olacaktır. Öyleyse R tek türlü bleached halkadır.*

■

Teorem 4.9: R bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir [8]:

i) R *tek türlü temiz ve tek türlü bleached halkadır.*

ii) R *değişmelidir ve bütün* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T_n(R)$ *tek türlü kuvvetli temiz halkadır.*

iii) R *değişmeli ve bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için* $T_n(R)$ *tek türlü kuvvetli temiz halkadır.*

İspat 4.9: $i) \Longrightarrow ii)$: R *tek türlü temiz halka ise* $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2$ *dir. Öyleyse* R *değişmeli bir halkadır.* $T_n(R)$ *halkasının tek türlü kuvvetli temiz halka olduğu tümevarım uygulayarak gösterilebilir.*

$n = 1$ *için açıktır.* $n \geq 1$ *için doğru olduğunu kabul edelim.* $a_{11} \in R$, $\alpha \in M_{1\times n}(R)$ *ve* $A_1 \in T_n(R)$ *olacak şekilde bir* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \in T_{n+1}(R)$ *elemanı alalım.* R *tek türlü temiz olduğundan* $u_{11} = a_{11} - e_{11} \in U(R)$ *ve* $u_{11}e_{11} = e_{11}u_{11}$ *olacak şekilde tek bir idempotent* $e_{11} \in R$ *vardır. Ve kabulumuzden* $U_1 = A_1 - E_1 \in U(T_n(R))$ *ve* $E_1U_1 = U_1E_1$ *olacak şekilde tek bir* $E_1 \in T_n(R)$ *vardır.* $x \in M_{1\times n}(R)$ *olmak üzere* $E = \begin{bmatrix} e_{11} & x \\ 0 & E_1 \end{bmatrix}$ *ve* $U = \begin{bmatrix} u_{11} & \alpha - x \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$ *matrislerini alalım.*

i) $E^2 = E \iff e_{11}x + xE_1 = x;$

ii) $UE = EU \iff u_{11}x + (\alpha - x)E_1 = e_{11}(\alpha - x) + xU_1,$

i ve ii nin birleşiminden

$(u_{11} + 2e_{11} - 1)x - xU_1 = e_{11}\alpha - \alpha E_1$ *(*) elde edilir.*

Tek türlü $x \in M_{1\times n}(R)$ *olduğu gösterilmelidir.* R *tek türlü temiz olduğundan* $R/J(R)$ *Boole halkasıdır ve* $2 \in J(R)$ *olur. Ve* $u_{11} \in 1 + J(R)$*'dır. Böylece* $u_{11} + 2e_{11} - 1 \in J(R)$ *olduğu görülür.* $x = [x_1 ... x_n]$, $e_{11}\alpha - \alpha E_1 = [v_1 \ \ldots \ v_n]$ *ve her* $c_{ii} \in U(R)$ *için* $U_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{bmatrix}$ *olarak yazılsın. (*) eşitliğinden* n *tane eşitlik elde edilir:*

$(u_{11} + 2e_{11} - 1)x_1 - x_1c_{11} = v_1;$

$(u_{11}+2e_{11}-1)x_2 - x_2c_{22} = v_2 + x_1c_{12}\,;$

$\vdots$

$(u_{11}+2e_{11}-1)x_n - x_nc_{nn} = v_n + x_1c_{1n} + ... + x_{n-1}c_{(n-1)n}\,.$

R tek türlü temiz olduğundan tek türlü $x_i \in R$ $(i = 1, ..., n)$ vardır. Böylece (*) eşitliğini sağlayan tek türlü x vardır. $E_1U_1 = U_1E_1$ olduğundan

$(u_{11}+2e-1)x(e_{11}I_n+E_1) - x(e_{11}I_n+E_1)U_1 = \alpha(e_{11}I_n-E_1)(e_{11}I_n+E_1) =$ $\alpha(e_{11}I_n-E_1) = (u_{11}+2e_{11}-1)x - xU_1\,.$

$y = x(e_{11}I_n+E_1)$ olsun. Öyleyse $(u_{11}+2e_{11}-1)(y-x)-(y-x)U_1 = 0.$ $y - x = [z_1 \ \dots \ z_n]$ olsun. Öyleyse,

$(u_{11}+2e_{11}-1)z_1 - z_1c_{11} = 0;$

$(u_{11}+2e_{11}-1)z_2 - z_2c_{22} = z_1c_{12}\,;$

$\vdots$

$(u_{11}+2e_{11}-1)z_n - z_nc_{nn} = z_1c_{1n} + ... + z_{n-1}c_{(n-1)n}$. R tek türlü bleached olduğundan $z_i = 0$ olur ve $y = x$ bulunur. Bu da $e_{11}x + xE_1 = x$ eşitliğini verir. Ve de $u_{11}x + (\alpha - x)E_1 = e_{11}(\alpha - x) + xU_1$ elde edilir.

Böylece $A = \begin{bmatrix} e_{11} & x \\ & E_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}-e_{11} & \alpha - x \\ & A_1 - E_1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde tek türlü ayrışım elde edilir. $T_n(R)$ tek türlü kuvvetli temiz halkadır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) : Açık.

iii) $\Longrightarrow$ i) : $T_n(R)$ tek türlü kuvvetli temiz ise $ET_n(R)E$ de tek türlü kuvvetli temizdir. Ayrıca $ET_n(R)E \cong R$ ve $E_x = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $E_xT_n(R)E_x \cong T_2(R)$ olduğundan R ve $T_2(R)$ tek türlü kuvvetli temiz halkalardır. R değişmeli ve tek türlü kuvvetli temiz olduğundan R tek türlü temiz, $T_2(R)$ tek türlü kuvvetli temiz olduğundan R tek türlü bleached halkadır. ■

Örnek 4.10: A ve B lokal halkalar $_AV_B$ bir ikili modül olmak üzere, $R = \begin{bmatrix} A & V \\ 0 & B \end{bmatrix}$ için aşağıdakiler denktir [22]:

i) R kuvvetli temiz halkadır.

ii) Eğer $a-1 \in J(A)$, $b \in J(B)$ *ve* $v \in V$ *ise* $v = xb - ax$ *olacak şekilde* $x \in V$ *vardır.*

Çözüm 4.10: $i) \Longrightarrow ii)$: *R de ki idempotentler* $x \in V$ *olmak üzere* $e_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ve* $f_x = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *şeklindedir.* $r = \begin{bmatrix} a & v \\ 0 & b \end{bmatrix}$ *olsun.* $r - e_0$, $r - e_1$, $r - e_x$ *birimsel değiller.* $r - f_x = \begin{bmatrix} a & v-x \\ 0 & b-1 \end{bmatrix} \in U(R)$ *ve* $fx = xf$ *olduğundan* $v = xb - ax$ *elde edilir.*
$ii) \Longrightarrow i)$: $r = \begin{bmatrix} a & v \\ 0 & b \end{bmatrix} \in R$ *alalım. Eğer* $a-1 \in J(A)$ *ve* $b \in J(B)$ *ise* $r = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & v-x \\ 0 & b-1 \end{bmatrix}$ *yazılabilir. Burada x elemanın seçimi (2) deki gibi yapılırsa* $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ve* $\begin{bmatrix} a & v-x \\ 0 & b-1 \end{bmatrix}$ *değişmeli olduklarından ispat tamamlanmış olur.*

Yardımcı Teorem 4.11: R değişmeli lokal halka ise R tek türlü bleached halkadır [15].

İspat 4.11: $u \in U(R)$ *ve* $j \in J(R)$ *elemanları için* $l_j - r_u : R \longrightarrow R$ *ve* $l_u - r_j : R \longrightarrow R$ *grup endomorfizmalarının birer izomorfizma olduklarını göstermek yeterlidir.* $ux_1 - x_1 j = y_1$ *ve* $ux_2 - x_2 j = y_2$ *olacak şekilde* y_1, $y_2 \in R$ *için* x_1, $x_2 \in R$ *elemanları alalım.* $y_1 = y_2$ *iken* $ux_1 - x_1 j = ux_2 - x_2 j$ *elde edilir. Buradan da* $ux_1 - x_1 j - ux_2 + x_2 j = u(x_1 - x_2) - j(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(u - j) = 0$ *eşitliği yazılabilir.* $u \neq j$ *olacağından* $x_1 = x_2$ *elde edilir. Öyleyse* $l_u - r_j : R \longrightarrow R$ *bir izomorfizmadır. Aynı işlemler* $l_j - r_u : R \longrightarrow R$ *için de kolaylıkla gösterilebileceğinden R tek türlü bleached halkadır.* ■

Yardımcı Teorem 4.11 ve 4.7'den aşağıdaki teorem söylenebilir.

Teorem 4.12: R bir değişmeli lokal halka ve $n \in \mathbb{N}$ *olsun. Öyleyse* $T_n(R)$ *kuvvetli temiz halkadır [9].*

İspat 4.12: *R bir değişmeli lokal halka ise R tek türlü bleached ve R tek türlü temiz halkadır. Öyleyse Teorem 4.9'a göre $T_n(R)$ kuvvetli temiz halka olur.* ■

Sonuç 4.13: *R_i halkalarının her biri değişmeli lokal halka olmak üzere $R = \prod R_i$ ise $n \geqslant 1$ için $T_n(R)$ kuvvetli temiz halkadır [9].*

İspat 4.13: *R_i halkalarının her biri değişmeli lokal halka olduğundan bütün i ler için $T_n(R_i)$ kuvvetli temiz halka olur. Kuvvetli temiz halkaların direkt çarpımı da kuvvetli temiz olduğundan $\prod T_n(R_i)$ kuvvetli temiz olur. $T_n(R) \cong \prod T_n(R_i)$ olduğundan $T_n(R)$ kuvvetli temiz halkadır.*

R halkası tek türlü temiz iken $T_n(R)$ halkasının her zaman tek türlü temiz olamayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.14: *$T_2(\mathbb{Z}_2)$ tek türlü temiz değildir [25].*

Çözüm 4.14: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

R halkası kuvvetli temiz iken $T_n(R)$ halkasının her zaman kuvvetli temiz olamayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.15: *$R = \mathbb{Z}_5$ olsun. $\mathbb{Z}_5$ cisim olduğundan temiz halkadır. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Id(T_2(\mathbb{Z}_5))$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in U(T_2(\mathbb{Z}_5))$ elemanları için $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ yazılımıyla $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in T_2(\mathbb{Z}_5)$ elemanı temizdir. Ancak*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

olduğundan $T_2(\mathbb{Z}_5)$ kuvvetli temiz değildir.

4.1. $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ Halkasında Temiz Elemanlar

Temiz olmayan tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$ üzerinde kurulmuş 2×2 boyutlu matris halkasının temiz olmadığı bilinmektedir. Bu bölümde $M_2(\mathbb{Z})$ halkasındaki idempotent elemanların formları gösterilmiş ve halkanın temiz elemanlarına örnekler verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.16: $E = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *elemanının idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki formlardan biri şeklinde olmasıdır [4]:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{x(1-x)}{y} & 1-x \end{bmatrix} y \neq 0, \begin{bmatrix} x & \frac{x(1-x)}{y} \\ y & 1-x \end{bmatrix}$$

İspat 4.16: $\Leftarrow$*:Verilen elemanlar kontrol edilirse idempotent oldukları kolaylıkla görülür.* $\Longrightarrow$*:Eğer* E *idempotentse,* $E^2 = E$ *olmalı yani* $\begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$ *dir. Öyleyse*

$$x^2 + yw = z \tag{4.4}$$

$$xy + yz = y \tag{4.5}$$

$$wx + zw = w \tag{4.6}$$

$$wy + z^2 = z \tag{4.7}$$

Eğer $y \neq 0$ *ya da* $w \neq 0$ *ise* $x + z = 1$ *elde edilir. Böylece*

$$yw = x - x^2 = x(1-x) = xz \tag{4.8}$$

olur. Eğer $y \neq 0$ *ise* $yw = xz$ *dir. Bu da gösterir ki* $E = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{x(1-x)}{y} & 1-x \end{bmatrix}$ *dir. Diğer taraftan eğer* $w \neq 0$ *ise* $y = \frac{x(1-x)}{w}$ *olur. Bu da* $E = \begin{bmatrix} x & \frac{x(1-x)}{w} \\ w & 1-x \end{bmatrix}$ *matrisini verir. Eğer hem* $y \neq 0$ *hem de* $w \neq 0$ *ise* $\begin{bmatrix} x & \frac{x(1-x)}{w} \\ w & 1-x \end{bmatrix}$ *matrisi* $\begin{bmatrix} x & y \\ \frac{x(1-x)}{y} & 1-x \end{bmatrix}$ *formundadır. Eğer* $y = 0$ *ve* $w = 0$ *kabul edilirse,* $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}$ *elde edilir. Bu da demektir ki* $x^2 = x$ *ve* $z^2 = z$. *Öyleyse* E,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

matrislerinden biridir. ■

Not 4.17: $p \neq 0$ *için idempotent matrisler* $\begin{bmatrix} x & y \\ \frac{x(1-x)}{y} & 1-x \end{bmatrix}$ $y \neq 0$ *formu altında*

$$\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

şeklindedirler [4].

Tanım 4.2: Eğer $E \in M_2(\mathbb{Z})$ *idempotent ise* $\det E = 0$ *ya da* $\det E = 1$ *dir. Eğer* $\det E = 0$ *ise* $E + U$ *toplamı olarak yazılabilen matrise* 0*-temiz,* $\det E = 1$ *ise de* 1*-temiz denir [4].*

Aşağıdaki teorem $M_2(\mathbb{Z})$ halkasındaki elemanların 1-temiz olabilmesi için gerek ve yeter koşulu söylemektedir.

Teorem 4.18: $A \in M_2(\mathbb{Z})$ *ve* $Tr(A)$ *asal köşegen elemanlarının toplamı olsun.* A *nın* 1*-temiz olabilmesi için gerek ve yeter koşul* $\det A - Tr(A) = 0$ *ya da* -2 *olmasıdır [4].*

İspat 4.18: $A = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$ *olsun. Determinantı* 1 *olan tek idempotent matris birim matris olduğundan;*

A 1*-temiz*$\Leftrightarrow A = I + U \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ w & z-1 \end{vmatrix} = \pm 1 \Leftrightarrow (x-1)(z-1) - yw = \pm 1$
$\Leftrightarrow (xz - yw) - (x+z) + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \det A - Tr(A) = 0$ *ya da* -2 ■

Örnek 4.19: $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *olsun.* $\det A - Tr(A) = 0$ *olduğundan* A *matrisi 1-temizdir. Gerçekten* $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ *eşitliği yazıldığında* $5.3 - 2.7 = 1 \in U(\mathbb{Z})$ *olduğundan istenilen sağlanmış olur.* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *olsun.* $\det B - Tr(B) = -2$ *olduğundan* B *matrisi 1-temizdir. Gerçekten de* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *eşitliği yazıldığında* $1.4 - 1.5 = -1 \in U(\mathbb{Z})$ *olduğundan istenilen sağlanmış olur.*

Not 4.17 deki idempotent elemanlar gözönünde tutularak aşağıdaki yardımcı teorem söylenebilir.

Yardımcı Teorem 4.20: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *olsun [4].*

i) Eğer $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ise* $A - E$ *birimseldir* $\Leftrightarrow$ A *birimseldir.*

ii) Eğer $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}$ *ise* $A - E$ *birimseldir* $\Leftrightarrow ad - bc - a + bp = \pm 1.$

iii) Eğer $E = \begin{bmatrix} o & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix}$ *ise* $A - E$ *birimseldir* $\Leftrightarrow ad - bc - a + bp = \pm 1.$

iv) Eğer $E = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ise* $A - E$ *birimseldir* $\Leftrightarrow ad - bc - d + cp = \pm 1.$

v) Eğer $E = \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ise* $A - E$ *birimseldir* $\Leftrightarrow ad - bc - a + cp = \pm 1.$

İspat 4.20: İspat 4.18 deki gibi cebirsel işlemlerle kolayca gösterilebilir. ■

Teorem 4.21: Determinantı 0 *olan bir idempotent* $E = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{x(1-x)}{y} & 1-x \end{bmatrix}$ *for-*

munda olsun. $A-E$ nin birimsel olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilmiş Diophantine denklemlerinin $x \neq 0,1,\ y \neq 0$ ve $y|x(1-x)$ i sağlayacak şekilde çözümünün olmasıdır [4].

$$(-b)x^2 + (a-d)xy + (c)y^2 + (b)x + (ad-bc-a-1)y = 0 \qquad (4.11)$$

$$(-b)x^2 + (a-d)xy + (c)y^2 + (b)x + (ad-bc-a+1)y = 0 \qquad (4.12)$$

İspat 4.21: $A-E$ *birimsel* $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-x & b-y \\ c-\frac{x(1-x)}{y} & d-1+x \end{vmatrix} = \pm 1 \Leftrightarrow (a-x)(d-1+x) - (b-y)(c-\frac{x(1-x)}{y}) = \pm 1 \Leftrightarrow ad-a+ax-dx+x-x^2-b(c-\frac{x(1-x)}{y}) + (cy - x(1-x)) = \pm 1 \Leftrightarrow ad-a+(a-d)x+x-x^2-bc+b\frac{x(1-x)}{y}+cy-x+x^2 = \pm 1 \Leftrightarrow b(x-x^2)+(ad-bc-a\mp 1)y+(a-d)xy+cy^2 = 0 \Leftrightarrow (-b)x^2+(a-d)xy+(c)y^2+(b)x+(ad-bc-a\mp 1)y = 0$ ■

Teorem 4.22: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *olsun. A matrisinin 0-temiz olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır [4].*

i) *A birimseldir.*

ii) $ad-bc-d+bp = \pm 1$

iii) $ad-bc-a+bp = \pm 1$

iv) $(-b)x^2+(a-d)xy+(c)y^2+(b)x+(ad-bc-a-1)y = 0$ *diophantine eşitliğinin aşikar olmayan bir çözümü vardır.*

v) $(-b)x^2+(a-d)xy+(c)y^2+(b)x+(ad-bc-a+1)y = 0$ *diophantine eşitliğinin aşikar olmayan bir çözümü vardır.*

İspat 4.22: Lemma 4.20 ve Teorem 4.21' den açıktır. ■

Örnek 4.23: $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *matrisi hem 0-temiz hem de 1-temizdir.* $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *öyleki* $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = 0$ *ve* $y = -2$

aşikar olmayan diophantine eşitlik çözümü için bir idempotent matristir ve A 0-temizdir. Ayrıca $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *olduğundan A matrisi 1-temizdir [4].*

Örnek 4.24: $\mathbb{Z}$ *tam sayılar halkasında eğer* $a \in \mathbb{Z}$ *temiz ise, her* $b \in \mathbb{Z}$ *için* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *şeklindeki elemanlar temizdir [21].*

Çözüm 4.24: $a \in \mathbb{Z}$ *temiz olduğundan* $a = e + u$ *olacak şekilde* $u \in U(\mathbb{Z})$ *ve* $e \in Id(\mathbb{Z})$ *vardır. Öyleyse* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *olacak şekilde* $\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ve* $\begin{bmatrix} u & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in U(M_2(\mathbb{Z}))$ *bulunur.*

Örnek 4.25: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ *olsun.* $|a-d| = 1$ *iken A'nın temiz olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır [7].*

i) $ad - bc = \pm 1$

ii) $a = 0,2;\ b = c = 0;\ d = \pm 1$

iii) $a = \pm 1; b = c = 0;\ d = 0,2$

iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & -1 \end{bmatrix}$

v) $A = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

Örnek 4.26: $M' = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \text{ ve } a,b \text{ ardışık sayılar} \right\}$ *kümesinin elemanları temizdir.*

Çözüm 4.26: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \in M'$ *olsun.*

$\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-1 & b-1 \\ a & b \end{bmatrix}$ *şeklinde yazıldığında*

$det \begin{bmatrix} a-1 & b-1 \\ a & b \end{bmatrix} = a - b$ *elde edilir.* a *ve* b *ardışık sayılar olduğundan*

$a-b=\pm 1$ olur ve $\begin{bmatrix} a-1 & b-1 \\ a & b \end{bmatrix} \in U(M_2(\mathbb{Z}))$ olduğu görülür.

Örnek 4.27: $M' = \left\{ \begin{bmatrix} x+2 & x \\ -x-1 & -x+1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesinin elemanları temizdir. $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -x-1 & -x \end{bmatrix} \in Id(M_2(\mathbb{Z}))$ idempotent ve $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U(M_2(\mathbb{Z}))$ birimseldir. Öyleyse $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{bmatrix} x+2 & x \\ -x-1 & -x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ -x-1 & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

eşitliği sağlandığından M' temizdir.

5. TEMİZ MATRİS CEBİRLERİ

Tanım 5.1: K *ve* L *kümelerinin kartezyen çarpımı olan* $K \times L$ *nin her alt kümesine* K*'dan* L*'ye bir bağıntı denir. Eğer* $K = L$ *ise,* K *içinde bağıntı veya* K *üzerinde bağıntı deyimleri kullanılır.* β, K*'dan* L*'ye bir bağıntı ve* $(x, y) \in \beta$ *ise,* x *ve* y *elemanları* β *bağıntısıyla bağlıdır denir ve* $x\beta y$ *yazılır.*

Tanım 5.2: K *bir küme ve* β, K *üzerinde bir bağıntı olsun.*

i) *Her* $x \in K$ *için* $x\beta x$ *ise,* β *bağıntısının yansıma özelliği vardır denir.*

ii) $x, y \in K$ *ve* $x\beta y$ *iken, daima* $y\beta x$ *oluyorsa,* β *bağıntısının simetri özelliği vardır denir.*

iii) $x, y, z \in K$, $x\beta y$ *ve* $y\beta z$ *iken daima* $x\beta z$ *oluyorsa,* β *bağıntısının geçişme özelliği vardır denir.*

Tanım 5.3: K *bir küme ve* β, K *üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer* β*'nın yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa,* β*'ya bir denklik bağıntısı denir.*

Tanım 5.4: K *bir küme ve* β, K *üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer* β*'nın yansıma ve geçişme özellikleri varsa,* β*'ya bir quasi-ordered bağıntısı denir.*

Tanım 5.5: A *toplama ve çarpma ikili işlemleriyle,* F *cismi üzerinde tanımlanmış boş olmayan bir küme olsun. Ayrıca* F*'nin elemanları* A*'nın elemanları ile skaler çarpılabilsin. Eğer* A, F *cismi üzerinde bir vektör uzayı, tanımlanmış ikili işleme göre bir halka ise ve ayrıca* a, $b \in A$ *ve* $\gamma \in F$ *olmak üzere*

$$(\gamma a)b = a(\gamma b) = \gamma(ab) \tag{5.1}$$

eşitliği gerçekleniyorsa A, F *cismi üzerinde bir cebirdir denir. Açık olarak her cisim kendi üzerinde bir cebir olarak düşünülebilir.*

5.1. Yapısal Matris Cebirleri ($M_n(F,\rho)$)

Tanım 5.6: ρ, $\{1,\ldots,n\}$ *kümesi üzerinde yansıma ve geçişme (quasi-ordered) özelliklerine sahip bir bağıntı olsun.* F *bir cisim ve* a_{ij}, *matrisin i. satır ve j. sütun elemanı olmak üzere*

$$M_n(F,\rho) = \{A \in M_n(F) : a_{ij} = 0 \quad \text{eğer} \ (i,j) \notin \rho\} \tag{5.2}$$

kümesi $M_n(F)$ *in birimi* I *olan bir alt cebiridir ve yapısal matris cebiri olarak adlandırılır [1].*

Her yapısal matris cebiri $M_n(F,\rho)$, uygun permütasyonlar kullanılarak blok üst üçgen formda yazılabilir. $M_n(F,\rho)$ yapısal matris cebiri için $\overline{\rho}$ denklik bağıntısı tanımlansın öyleki

$$(i,j) \in \overline{\rho} \text{ olması için gerek ve yeter koşul } (i,j),(j,i) \in \rho$$

olmasıdır. $[r_1],[r_2],\ldots,[r_p]$, $\overline{\rho}$ ın ayrık denklik sınıflarını göstersin. Aşağıdaki gibi π permütasyonu oluşturulsun.

$$[r_1] = \{r_1 = r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1m_1}\} \tag{5.3}$$

için

$$\pi(1) = \pi(r_{11}) = 1, \pi(r_{12}) = 2, \ldots, \pi(r_{1m_1}) = m_1 \tag{5.4}$$

olsun ve genel olarak eğer

$$[r_k] = \{r_{k1}, r_{k2}, \ldots, r_{km_k}\} \tag{5.5}$$

ise

$$\pi(r_{kj}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + j. \tag{5.6}$$

olsun. Eğer $M_n(F,\rho)$ için bu permütasyon uygulanırsa ρ' elde edilir öyleki

$$(i,j)\in\rho' \iff \left(\pi^{-1}(i),\pi^{-1}(j)\right)\in\rho \tag{5.7}$$

ve $M_n(F,\rho')$

$$\begin{bmatrix} M_{m_1}(F) & M_{m_1\times m_2}(R) & \cdots & M_{m_1\times m_p}(R) \\ 0 & M_{m_2}(F) & \cdots & M_{m_2\times m_p}(R) \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{m_p}(F) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

formundaki matrislerden meydana gelir. Burada

$$m_1+m_2+\cdots+m_p=n \text{ dir.} \tag{5.9}$$

Ayrıca R, ya F ya da 0'a eşittir [1].

İlerleyen kısımda temiz matris halkaları incelenirken yapısal matris cebirinin yukarıdaki gösterimi kullanılacaktır. Ve burada gösterimin daha sade olması adına sıralamayı bozmaksızın notasyon olarak M_{m_i} ve $M_{m_i\times m_j}$ yerine M_i ve M_{ij} alınacaktır.

$M_n(F,\rho)$'nun iki özel alt kümesi vardır. Bunlar D ve J'dir. D, blok diagonal elemanların alt kümesini temsil eder. Yani
$D=\{diag(A_1,\ldots,A_p):A_j\in M_j\}$ dir. Ve J, köşegen hariç blok üst üçgen matrislerin kümesini temsil eder. Burada her $A\in J$ nilpotent elemandır (bakınız, [16, p. 120]). Ve de tersten ifade etmek gerekirse $M_n(F,\rho)$'nun herhangi bir nilpotent elemanının J'nin elemanı olduğu açıktır. Radikal, nilpotent elemanları içerdiğinden, burada J, $M_n(F,\rho)$'nun radikalidir [1].

Konuyu netleştirmek için, verilmiş bir ρ bağıntısı yardımıyla $M_n(F,\rho)$ nun blok üst üçgen forma çevrilmesini bir örnek üzerinde inceleyelim. Verilen örnekte dikkat edilmesi gereken nokta ρ nun quasi-ordered (yansıma ve geçişme) olmasının yanında simetri özelliğine de sahip olmasıdır. Böylece blokların diagonale yerleştikleri gözlenecektir.

Örnek 5.1: $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ *ve* $\rho = \{(1,1),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,1),\ (5,5),\ (5,6),\ (6,1),\ (6,5),\ (6,6)\}$ *olsun. Burada* $\overline{\rho} = \rho$ *olduğu açıktır. Öyleyse yapısal matris cebiri*

$$M_6(F,\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 & F & F \\ 0 & F & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & F & F \\ F & 0 & 0 & 0 & F & F \end{bmatrix} : F \text{ bir cisim.} \right\} \tag{5.10}$$

şeklindedir. Aşağıdaki gibi denklik sınıfları oluşturulup, π *permütasyonu tanımlanabilir.*

$[r_1] = \{r_{11}, r_{12}, r_{13}\},\ [r_2] = \{r_{21}, r_{22}\}, [r_3] = \{r_{31}\},$

öyleki $r_1 = 1, r_{12} = 5, r_{13} = 6,\ r_{21} = 2, r_{22} = 3, r_{31} = 4$

$[1] = \{r_1 = 1, r_{12} = 5, r_{13} = 6\}, [2] = \{r_{21} = 2, r_{22} = 3\}, [4] = \{r_{31} = 4\}.$

$\pi(1) = 1, \pi(5) = 2, \pi(6) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 5, \pi(4) = 6,$

yani $\pi = (24635) \Rightarrow \pi^{-1} = (25364)$ *dir.*

$(i,j) \in \rho' \iff (\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)) \in \rho$ *olduğu gözönünde tutulursa,*

$\rho' = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2), 2,3,\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (5,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$ *elde edilir. Ve* ρ' *a bağlı yapısal matris cebiri*

$$M_6(F,\rho') = \left\{ \begin{bmatrix} F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} : F \text{ bir cisim.} \right\} \tag{5.11}$$

şeklindedir. Öyleyse $M_6(F,\rho)$ *yapısal matris cebirinin uygun permütasyonlar* *uygulanması sonucu* $M_6(F,\rho')$ *yapısal matris cebirine dönüştüğü gösterilmiş olur.* $M_6(F,\rho')$ *blok diagonal formda ve yarı-basit yapıda olduğundan,* $\overline{M}_1, \overline{M}_2$, *ve* $\overline{M}_3$ *basit yapıda olan idealler olduğu [2] deki Teorem 1 kullanılarak ispatlanabilir. Ve*

$$M_6(F,\rho') = \overline{M}_1 \oplus \overline{M}_2 \oplus \overline{M}_3 \tag{5.12}$$

yazılabilir öyle ki

- $$\overline{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : F \textit{ bir cisim.} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : A_3 \in M_3(F) \right\},$$

- $$\overline{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : F \textit{ bir cisim.} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : A_2 \in M_2(F) \right\},$$

- $$\overline{M}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} : F \textit{ bir cisim.} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} : A_1 \in F \right\} \textit{ dir [1].}$$

$M_n\left(F, \rho'\right)$'daki bütün bloklar bir denklik sınıfına aittir. Ve her bir blok basit yapıda olduğundan $M_n\left(F, \rho'\right)$ yarı-basit yapıdadır. Bu tip halkaların temiz olma durumu ileride yapısal matris cebirinin yarı-basit olduğu durumda tekrar ele alınacaktır. Şimdi öncelikle $M_n\left(F, \rho'\right)$'ın basit (simple) olduğu duruma bakılmalıdır.

5.1.1. $M_n\left(F, \rho\right)$'nun Basit Olduğu Durum

Teorem 5.2: *ρ , $N = \{1, \ldots, n\}$ üzerinde tanımlanmış yansıma ve geçişme (quasi-ordered) özelliklerine sahip bir bağıntı ve $M_n(F, \rho)$, F cismi üzerinde tanımlanmış yapısal matris cebiri olsun. Eğer $M_n(F, \rho)$ yapısal matris cebiri basit (simple) ise $M_n(F, \rho) = M_n(F)$ dir[1].*

İspat 5.2: *$M_n(F, \rho) = M$ yapısal matris cebiri basit olsun. Genelliği bozmaksızın yapısal matris cebirini blok üst üçgen formda kabul edebiliriz. Has nilpotent elemanların oluşturduğu radikal J, asıl köşegen üzerinde kalan üst üçgen bloklardan oluşur ve M nin içindeki tüm matrislerin idealidir. M basit ise M aynı zamanda yarı-basittir ve $J = \{(0)\}$. O halde M blok köşegendir ve tam (full) matris cebirlerinin direkt toplamıdır. Ama M basit olduğundan has ideali yoktur yani tek bir bloktan oluşur. Yani M, F üzerinde mertebesi n olan tam matris cebiridir.* ■

Sonuç 5.3: *ρ , $N = \{1, \ldots, n\}$ üzerinde tanımlanmış yansımalı ve geçişmeli (quasi-ordered) bir bağıntı ve $M_n(F, \rho)$, yapısal matris cebiri olsun. Aşağıda verilen ifadeler birbirine denktir [1]:*

i) $M_n(F, \rho)$ *basit,*

ii) $M_n(F, \rho) = M_n\left(F\right)$,

iii) ρ *aşikar (trivial) bağıntı; yani tüm* i, j *ler için* $(i, j) \in \rho$.

Eğer R halkası temiz ise $M_n(R)$ halkasının da temiz olduğu biliniyor. Her cisim temiz olduğundan $M_n(F)$ halkasının temiz halka olduğu açıktır. Öyleyse bu bilgilere ve Teorem 5.2'ye dayanarak aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 5.4: $M_n(F,\rho)$ yapısal matris cebiri basit ise temizdir.

5.1.2. $M_n(F,\rho)$'nun Yarı-Basit Olduğu Durum

Yardımcı Teorem 5.5: $M_n(F,\rho)$ yapısal matris cebirinin yarı-basit (semi-simple) ise aşağıdakiler birbirine denktir [1]:

i) $M_n(F,\rho)$ *yarı-basit,*

ii) $M_n(F,\rho) = M_{m_1}(F) \oplus M_{m_2}(F) \oplus ... \oplus M_{m_p}(F)$ *tüm* $M_{m_k}(F)$ *lar basit öyleki* $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n.$

iii) ρ *simetrik bağıntı; yani tüm* i, j *ler için* $(i,j) \in \rho$ *ve* $(j,i) \in \rho.$

iv) Her blok $M_{m_k}(F)\,,\ k = 1, 2, ..., p$ *bir denklik sınıfına izomorf.*

O halde yapısal matris cebiri $M_n(F,\rho)$ aşağıdaki formdadır.

$$\begin{bmatrix} M_{m_1}(F) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{m_2}(F) & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{m_p}(F) \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

$M_n(F,\rho)$'nun temiz halka olması için her bir blok matrisin temiz halka olması gerekmektedir. $k = 1,\ 2,\ ...,\ p$ için matris halkalarının her biri basit olduğundan ayrı ayrı full matris cebirlerine izomorfturlar. Öyleyse her bir $M_{m_k}(F)$ temiz olacağından direkt toplamları da temiz halka olacaktır.

Sonuç 5.6: $M_n(F,\rho)$ yapısal matris cebiri yarı-basit ise temizdir.

5.1.3. $M_n(F,\rho)$ İçin Genel Durum

Yardımcı Teorem 5.7: $A = \begin{bmatrix} M_{m_1}(F) & M_{m_1\times m_2}(R) & \cdots & M_{m_1\times m_p}(R) \\ 0 & M_{m_2}(F) & \cdots & M_{m_2\times m_p}(R) \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{m_p}(F) \end{bmatrix}$ *blok üst üçgen formda yazılmış bir matris ve* $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ *olsun. Öyleyse* $\det A = \det M_{m_1}(F) . \det M_{m_2}(F) ... \det M_{m_p}(F)$ *dir.*

Yardımcı Teorem 5.8: $k = 1, 2, ..., p$ *için* $E_{m_i}^2 = E_{m_i}$ *idempotent matris olsun.* $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ *olmak üzere* $E = \begin{bmatrix} E_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{m_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E_{m_p} \end{bmatrix}$ *blok diagonal matrisi de idempotenttir.*

Teorem 5.9: $M_n(F,\rho)$ *yapısal matris cebiri temizdir.*

İspat 5.9: $n = 1$ *ise* $M_n(F,\rho) = [F]$ *olur yani yapısal matris cebiri* F *cismine eşit olacağından* $M_n(F,\rho)$ *temizdir.*

$n = 2$ *ise* $M_2(F,\rho)$ *birinci durumda* $i = 1, 2$ *için* $|A_i| = m_i = 1$ *dir ve*

$$M_2(F,\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} F & * \\ 0 & F \end{bmatrix} | * \in F \text{ ve } F \text{ cisim} \right\} \tag{5.14}$$

formundadır. Verilen forma uygun keyfi $A \in M_2(F,\rho)$ *alalım.*

$A = \begin{bmatrix} e_1 + u_1 & * \\ 0 & e_2 + u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & * \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$ *olarak yazıldığında*

$\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$ *matrisi idempotent matristir. Ayrıca* $\det \begin{bmatrix} u_1 & * \\ 0 & u_2 \end{bmatrix} = u_1.u_2 \in U(M_2(F,\rho))$ *olduğundan* $\begin{bmatrix} u_1 & * \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$ *matrisi birimseldir. Öyleyse seçilen* A *matrisi temizdir.*

İkinci durumda matris cebirinin elemanları 1 *blok halindedir ve* $m_1 = 2$ *dir.*

$$M_2(F,\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} F & F \\ F & F \end{bmatrix} | F \ cisim \right\} \tag{5.15}$$

formundadır. $M_2(F,\rho)$ *basit olduğundan tam matris cebirine izomorftur. Yani* $M_2(F,\rho) = M_2(F)$ *dir.* $M_2(F)$ *halkasının temiz olduğu bilindiğine göre, her* $A \in M_2(F,\rho)$ *temiz olacaktır. Öyleyse* $M_2(F,\rho)$ *temizdir.*

$n = 3$ *ise* $M_3(F,\rho)$ *birinci durumda* $i = 1,2,3$ *için* $m_i = 1$ *dir. Ve ayrıca*

$$M_3(F,\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} F & * & * \\ 0 & F & * \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} | * \in F \ ve \ F \ cisim \right\} \tag{5.16}$$

formundadır. Verilen formda seçilmiş keyfi $A \in M_3(F,\rho)$ *için* A *matrisi*

$$\begin{bmatrix} e_1+u_1 & * & * \\ 0 & e_2+u_2 & * \\ 0 & 0 & e_3+u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & * & * \\ 0 & u_2 & * \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$ *idempotent ve* $\det \begin{bmatrix} u_1 & * & * \\ 0 & u_2 & * \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$ $= u_1.u_2.u_3 \in U(M_3(F,\rho))$ *olduğundan* $\begin{bmatrix} u_1 & * & * \\ 0 & u_2 & * \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$ *birimseldir. Öyleyse* A *matrisi temizdir.*

İkinci durumda $M_3(F,\rho)$ 2 *bloktan oluşur.* $m_1 = 1$ *ve* $m_2 = 2$ *dir.*

$$M_3(F,\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} F & * & * \\ 0 & F & F \\ 0 & F & F \end{bmatrix} | * \in F \ ve \ F \ cisim \right\} \tag{5.18}$$

formunda yazılabilir. Verilen formda seçilmiş keyfi bir $A \in M_3(F,\rho)$ *alalım.* $M_2(F)$ *temiz olduğundan* A_{m_2} *bloğu,* m_2 *boyutlu idempotent matris* E_2 *ve* m_2 *boyutlu birimsel matris* U_2 *yardımıyla*

- $$A = \begin{bmatrix} e_1 + u_1 & * & * \\ 0 & e_2 + u_2 & e_3 + u_3 \\ 0 & e_4 + u_4 & e_5 + u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & * \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$$

$$= E_3 + U_3$$

şeklinde yazılabilir. Burada $detU_3 = u_1 . \det U_{2x2}$ *olduğundan* $detU_3 \neq 0$ *dır. Öyleyse* A *matrisi temizdir.*

Son olarak $M_3(F,\rho)$ *tek bloktan oluşabilir ve burada* $m_1 = 3$ *olur.*

$$M_3(F,\rho) = \left\{ \begin{bmatrix} F & F & F \\ F & F & F \\ F & F & F \end{bmatrix} | F \ cisim \right\} \tag{5.19}$$

formundadır. Bu durum da $M_3(F,\rho)$ *basit olduğundan tam matris cebirine izomorftur yani* $M_3(F,\rho) = M_3(F)$ *tür. Öyleyse bu formda seçilmiş bütün* A *matrisleri temiz olacaktır. Sonuç olarak* $\forall A \in M_3(F,\rho)$ *temiz olduğundan* $M_3(F,\rho)$ *da temizdir. Eğer nxn boyutlu matrisler üzerinde gösterilmek istenilirse yukarıdaki nümerik gösterimlerden yola çıkarak aşağıdaki genel form yazılabilir.* $M_n(F,\rho)$ *yapısal matris cebiri uygun permütasyonlar kullanılarak* $M_n(F,\rho')$ *blok üst üçgen forma çevrilmiş olsun. Öyleyse keyfi bir* $A \in M_n(F,\rho')$ *alındığında* $A = D + J$ *olacak şekilde diagonal ve köşegen hariç blok üst üçgen matrislerin oluşturduğu idealdeki elemanların toplamı şeklinde yazılabilir. Burada* $D = \overline{M}_{m_1}(F) \oplus \overline{M}_{m_2}(F) \oplus ... \oplus \overline{M}_{mp}(F)$ *ve* $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ *dir. Öyleki*

- $$\overline{M}_{m_1}(F) = \left\{ \begin{bmatrix} F & \cdots & F & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & & \\ F & \cdots & F & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{bmatrix} : F \ bir \ cisim \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : A_1 \in \ M_{m_1}(F) \right\},$$

- $$\overline{M}_{m_2}(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & F & \cdots & F & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & F & \cdots & F & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : F \ bir \ cisim \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : A_2 \in \ M_{m_2}(F) \right\},$$

- $$\overline{M}_{m_p}(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & 0 \\ & & & F & \cdots & F \\ & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F & \cdots & F \end{bmatrix} : F \ bir \ cisim \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix} : A_p \in \ M_{m_p}(F) \right\}$$

şeklindedir. Öyleyse $M_n(F, \rho')$, $\begin{bmatrix} M_{m_1} & * & * & * \\ 0 & M_{m_2} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & & M_{m_p} \end{bmatrix}$ *formundaki mat-*

rislerden oluşacaktır. Burada $*$ *ile gösterilen alanlarda* 0 *ya da farklı boyutlarda blok martisler olabilir.* $\forall i \in \{1,2,...,p\}$ *için* $M_{m_i}(F)$ *blokları temiz olduğundan* $\forall A_{m_i} \in M_{m_i}(F)$ *için* $A_{m_i} = E_{m_i} + U_{m_i}$ *yazılacak şekilde* $E_{m_i}^2 = E_{m_i}$ *idempotent matrisleri ve* U_{m_i} *birimsel matrisler vardır. Öyleyse*

$$A \in M_n(F,\rho') \text{ matrisi } \begin{bmatrix} M_{m_1} & * & * & * \\ 0 & M_{m_2} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & & M_{m_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & E_{m_p} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} U_{m_1} & * & * & * \\ 0 & U_{m_2} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & & U_{m_p} \end{bmatrix}$$ *şeklinde yazılabildiğinden* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $M_n(F,\rho)$ *halkasının temiz olduğu gösterilmiş olur.* ■

Öyleyse $M_n(F,\rho)$ yapısal matris cebirinin, $M_n(F)$ matris halkasının temiz alt halkasına örnek olduğu söylenebilir. Ayrıca burada F yerine keyfi bir temiz halka alındığında da $M_n(R,\rho)$ halkasının temiz olduğu açıktır.

5.1.4. Temiz Olmayan Bir R Halkası İçin $M_n(R,\rho)$

Bu bölümde R halkası değişmeli ve birimli bir halka olarak alınmıştır. R halkası üzerine kurulmuş $M_n(R,\rho)$ yapısal matris halkalarında bazı idempotent elemanlar ve bu elemalara bağlı birimsel eleman yapıları hakkında bilgi verilmeye çalışılmıştır. $M_n(R,\rho)$ halkasının temizliği hakkında kesin bir karara varılamamakla birlikte temiz elemanlarının bulunabilme yolu açılmaya çalışılmıştır.

Yardımcı Teorem 5.10: $M_n(R,\rho)$ *yapısal matris cebirinin* 0 *dan farklı merkezil idempotenti* e *ve* $I = \{1,2,...,n\}$ *olsun. Öyleyse* E^j *j. satır ve j. sütunundaki elemanı* 1 *ve diğer bütün elemanları* 0 *olan bir idempotent matris olmak üzere* $e = \sum\limits_{j \in J} E^j$ *olacak şekilde* I *nın bir* J *alt kümesi vardır [12].*

Önerme 5.11: $M_n(R,\rho) = S$ *olsun.* $J(S) = \{A \in S | A_{ij} = 0 \text{ if } (i,j) \in \overline{\rho}\}$ *dir*

[12].

Yardımcı Teorem 5.12: E^i *i. satır ve i. sütunundaki elemanı* 1 *ve diğer bütün elemanları* 0 *olan bir idempotent matris olsun.* $E = E^i$ *ve* $\eta \in J(S)$ *olmak üzere* $\mathcal{E} = E + \eta$*,* $M_n(F, \rho)$ *nun idempotent elemanı olsun. Öyleyse her* $i \geq 3$ *için*

- $\mathcal{E} = E + (\eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{i-1})\, E + E\, (\eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{i-1})$

  $+ \sum\limits_{k=1}^{i-2} \left(\eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{i-1-k}\right) E\eta^k + \eta^i$

dir [12].

Sonuç 5.13: Yardımcı Teorem 5.12'ye göre aşağıdakiler söylenebilir.

i) Eğer η *nın nilpotentlik derecesi* 2 *ise* $\mathcal{E} = E + \eta E + E\eta$ *dır;*

ii) Eğer η *nın nilpotentlik derecesi* $s > 2$

ise

- $\mathcal{E} = E + (\eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{s-1})\, E + E\, (\eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{s-1})$
  $+ \sum\limits_{k=1}^{s-2} \left(\eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{s-1-k}\right) E\eta^k$

dır [12].

Sonuç 5.14: Yardımcı teorem 5.12'deki duruma göre $\mathcal{E}$*,* $M_n(R, \rho)$ *de idempotent olsun.* $\theta = \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{s-1}$ *olmak üzere*

$$\mathcal{E} = E + E\theta + \theta E + \theta E\theta \tag{5.20}$$

olacak şekilde $\theta \in J(S)$ *vardır.*

Tersine, eğer $\theta \in J(S)$ *ve* $E = E^j$ $(j \in \{1, 2, \ldots, n\})$ *ise*

$$\mathcal{E} = E + E\theta + \theta E + \theta E\theta \tag{5.21}$$

$M_n(R,\rho)$'da bir idempotenttir [12].

Yardımcı Teorem 5.15: $\theta \in J(M_n(R,\rho))$, $E = E^j$ $(j \in \{1,2,\ldots,n\})$ ve

$$\mathcal{E} = E + E\theta + \theta E + \theta E\theta \tag{5.22}$$

idempotent olsun. Öyleyse

$$(I_n - \theta E)(I_n + \theta E) = I_n \tag{5.23}$$

ve

$$(I_n + E\theta)(I_n - E\theta) = I_n \tag{5.24}$$

olmak üzere

$$\mathcal{U} = (I_n + E\theta)(I_n - \theta E) \in M_n(R,\rho) \tag{5.25}$$

birimseldir ve

$$\mathcal{U}\mathcal{E}\mathcal{U}^{-1} = E \tag{5.26}$$

dir. Ve $\mathcal{U}^{-1} = (I_n + \theta E)(I_n - E\theta)$'dır [12].

Her bir $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ için, $\theta_j \in J$ seçilirse

$$\mathcal{E}_j = E^j + E^j\theta_j + \theta_j E^j + \theta_j E^j \theta_j \tag{5.27}$$

ve

$$U_j = (I_n + E^j\theta_j)(I_n - \theta_j E^j) \tag{5.28}$$

olduğu görülür.

Sonuç itibariyle temiz olmayan bir R halkası üzerinde kurulan herhangi bir yapısal matris cebirinde tanımlanan $\mathcal{E}$ idempotent ve U birimsel elemanlar kullanılarak $\mathcal{E} + \mathcal{U}$ şeklinde yazılabilecek temiz elemanlar bulunabilir.

6. SONUÇLAR

Tezimizde temiz halka, kuvvetli temiz halka ve tek türlü kuvvetli temiz halka yapıları çalışılmış, temel özellikleri incelenerek bu halka yapılarına ait örnekler verilmiştir. Temiz olmayan halkaların temiz olma koşulları araştırılmış, temiz halkaların alt halkalarının temiz olmak zorunda olmadığı görülmüştür.

Temiz bir R halkası üzerinde kurulmuş $M_n(R)$ ve $T_n(R)$ matris halkalarının da temiz oldukları gösterilmiştir. $M_2(R)$ halkasının idempotent elemanları belirlenip seçilen bir R halkası temiz değilken $M_2(R)$ da temiz elemanlara örnek verilmeye çalışılmıştır. Temiz olmayan $M_2(R)$ halkasından seçilmiş elemanların determinantlarına bakılarak 1-temiz ya da 0-temiz olduklarını söyleyebilecek şartlar verilmiştir. Ve bu durum için örnekler eklenmiştir.

Son bölümde $M_n(F)$ halkasının bir alt halkası olan $M_n(F, \rho)$ yapısal matris halkasının basit olması durumunda tam matris cebirine izomorf olacağı söylenip, temiz olduğu gösterilmiştir. Yarı-basit olduğu durum da ise basit halkaların direkt toplamı şeklinde yazılabileceği gösterilip, böylece temiz olduğu ispatlanmıştır. Bu bilgiler kullanılarak $M_n(F, \rho)$ halkasının genel durumda da temiz olma özelliğini sağladığı gösterilmiştir.

Son olarak temiz olmayan bir R halkası üzerinde oluşturulan $M_n(R, \rho)$ halkasının idempotent ve birimsel elemanların formları belirlenmiş ve bu elemanları kullanarak yapısal matris halkasında temiz elemanlar elde edilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Akkurt M., Akkurt E., Barker G. P., (2013), "Automorphisms of structural matrix algebras", Operators and Matrices, 7(26), 431-439.

[2] Akkurt M., Akkurt E., (2014), "Some examples on automorphisms of structural matrix algebras", arXiv:1411.0438.

[3] Anderson D. D., Camillo V. P., (2002), "Commutative rings whose elements are a sum of a unit an idempotent", Communications in Algebra, 30(7), 3327-3336.

[4] Aziz R., Rajeswari K. N., (2009), "A note on clean matrices in $M_2(\mathbb{Z})$", International Journal of Algebra, 3(5), 241-248.

[5] Camillo V. P., Khurana D., (2001), "A characterization of unit regular rings", Communications in Algebra, 29(5), 2293-2295.

[6] Camillo V. P., Yu H.P., (1994), "Exchange rings unit and idempotent", Communications in Algebra, 22(12), 4737-4749.

[7] Chen H., (2013), "On 2x2 strongly clean matrices", The Korean Mathematical Society, 50(1), 125-134.

[8] Chen H., Gürgün O., Köse H., (2015), "Uniquely strongly clean triangular matrices", Turkish Journal of Mathematics, 39, 645-649.

[9] Chen J., Yang X., Zhou Y., (2006), "On strongly clean matrix and triangular matrix rings", Communications in Algebra, 34(10), 3659-3674.

[10] Chen J., Wang Z., Zhou Y., (2009), "Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute", Journal of Pure and Applied Algebra, 213, 215-223.

[11] Chen W., (2006), "A question on strongly clean rings", Communications in Algebra, 34(7), 2347-2350.

[12] Coelho S. P., (1994), "Automorphism group of certain structural matrix rings", Communications in Algebra, 22(14), 5567-5586.

[13] Çallıalp F., Tekir Ü., (2009), "Değişmeli Halkalar ve Modüller", 1. Baskı, Birsen Yayınevi.

[14] Deskins W. E., (1995), "Abstract Algebra", 2. Baskı, Macmillan.

[15] Diesel A. J., Dorsey T. J., Iberkleid W., Rodriguez R., Mc Govern W., (2015), "Strongly clean triangular matrices over abelian rings", Journal of Pure and Applied Algebra, 219, 4889-4906.

[16] Farenick D. R., (2001), "Algebras of Linear Transformations", 1. Baskı, Unversitext Springer.

[17] Fraleigh J. B., (2000), "A First Course in Abstract Algebra", 6. Baskı, Addison-Wesley.

[18] Immormino N., (2013), "Clean rings and clean group rings", Doktora Tezi, Bowling Green State University.

[19] Jian C., Jianlong C., (2011), "Uniquely strongly clean triangular matrix rings", Journal Of Southeast University (English Edition), 27(4), 463-465.

[20] Karakaş İ., (2008), "Cebir Dersleri", 1. Baskı, Tüba.

[21] Khurana D., Lam T. Y., (2004), "Clean matrices and unit-regular matrices", Journal of Algebra, 280, 683-698.

[22] Nicholson W. K., (1999), "Strongly clean rings and Fitting's lemma", Communications in Algebra, 27(8), 3583-3592.

[23] Nicholson W. K., (1977), "Lifting idempotent and exchange rings", Transactions of the American Mathematical Society, 229, 269-278.

[24] Nicholson W. K., Han J., (2001), "Extensions of clean rings", Communications in Algebra, 29(6), 2589-2595.

[25] Nicholson W. K., Zhou Y., (2004), "Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit", Glasgow Mathematical Journal, 46, 227-236.

[26] Nicholson W. K., Zhou Y., (2005), "Clean rings: A survey", Advances in Ring Theory (World Scientific Publishing), 181-198.

[27] Ster J., (2011), "Corner rings of a clean ring need not be clean", Communications in Algebra, 40(5), 1595-1604.

[28] Yang X., (2008), "A survey of strongly clean rings", Springer Science Business Media, 108, 157-173.

[29] Wyk L.V., Anh P.N., Birkenmeier G.F., (2017), "Peirce decomposition, idempotents and rings", arXiv:1702.05261vl [math.RA]

ÖZGEÇMİŞ

Melike YAKUT 1991 yılında Kocaeli'de doğdu. 2010 yılında başladığı Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünü 2014 yılında mezun oldu ve özel bir eğitim kurumunda matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. Yüksek lisans eğitimine 2015 yılında Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı.