T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Fatma Nihan KARAGÖZ

Danışman
Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2019

TEZ ONAYI

Fatma Nihan KARAGÖZ tarafından hazırlanan **"Fark Denklemleri Üzerine Bir Çalışma"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU** Süleyman Demirel Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Duygu ARUĞASLAN ÇİNÇİN** Süleyman Demirel Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Hüseyin TUNA** Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	
Enstitü Müdürü	**Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR**	

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Fatma Nihan KARAGÖZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Fatma Nihan KARAGÖZ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Tezin ilk bölümü olan giriş kısmında geçmişten bugüne fark denklemleri ve bu konuda yapılan çalışmalar ele alınmıştır. İkinci bölümde kaynak özetlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde fark denklemlerine temel teşkil edecek tanım, teorem ve bilgilerden bahsedilmiş, dördüncü bölümde fark denklemleri konusu genel bir biçimde anlatılmıştır. Beşinci bölümde birinci mertebeden lineer fark denklemleri ve çözüm yöntemleri anlatılmış, yeterli sayıda örnek verilmiştir. Ayrıca bu bölümde birinci mertebeden fark denklemlerinin kararlılıkları konusuna da değinilmiştir. Altıncı bölüm ikinci mertebeden fark denklemlerini konu alırken, yedinci bölümde k. mertebeden fark denklemleri ve örnekleri üzerinde durulmuştur. Sekizinci bölümde çözümlerin limit alma davranışı anlatılmış, dokuzuncu bölümde fark denklem uygulamaları günlük hayattan örneklerle verilmiştir. Tezin onuncu ve son bölümü ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemleri, Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, İkinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, k. mertebeden Lineer Fark Denklemleri, Denge Noktası, Kararlılık, Limit Alma Davranışı, Asimtotik Kararlılık, Global Asimtotik Kararlılık, Salınımlılık.

2019, 93 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

A STUDY ON DIFFERENCE EQUATIONS

Fatma Nihan KARAGÖZ

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

In the introduction which is the first section of our study; the history of difference equations, prior search on difference equations and usage areas of these equations were mentioned. In the second section, information about some of the studies regarding difference equations and their solution methods studied before were given. In the third section, general definitions and theorems related to difference equations were given and in the fourth section difference equations, their classifications and solutions were emphasized. In the fifth section, information is given about first order linear difference equations and solution ways with different examples. Also in this section stability of first order linear difference equations was studied. In the sixth section, second order linear difference equations with their solution ways were examined and in the seventh section k^{th} order difference equations were mentioned with different examples. In the eighth section limit behaviours of solutions were investigated, as for the ninth section, applications of linear difference equations were given with daily life problems from the field of several sciences. Finally, in the last section of this thesis, some conclusions and suggestions were given.

Keywords: Difference Equations, First Order Linear Difference Equations, Second Order Linear Difference Equations, k^{th} Order Linear Difference Equations, Equilibrium Point, Stability, Limit Behaviours of Solutions, Asymptotic Stability, Global Asymptotic Stability, Oscillation.

2019, 93 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım. Üzerimde emeği çok olan, her zaman beni cesaretlendiren, başarıya ve başarmaya sevk eden, tez sürecimde bir dediğimi iki etmeyen hem babam hem annem olan canım annem Sevgi ÇOBANKAYA'ya teşekkür ederim. Sürecimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan destekleyen eşim Taylan KARAGÖZ'e, bilgi ve tecrübesinden yararlandığım ablam Elif Ülkü YILDIRIM'a da teşekkür ederim. Son olarak, bu tezimi aramızda olmasa da, her zaman bizi izlediğini, hissettiğini düşündüğüm emekli edebiyat öğretmeni babam Halil ÇOBANKAYA'ya ve hayatımın anlamı olan en minik arkadaşım canım kızım İdil KARAGÖZ'e ithaf ediyorum.

Fatma Nihan KARAGÖZ
ISPARTA, 2019

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E	Kaydırma (öteleme) operatörü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$L(E)$	$= E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k$ operatörü
$x^{(n)}$	Faktöriyel polinom
$W(n)$	Casoratyan
$y_h(n)$	Denklemin homojen kısmının genel çözümü
$y_p(n)$	Homojen olmayan kısım için bir özel çözüm
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar
$\prod$	Çarpım sembolü
$\sum$	Toplam sembolü
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
I	Birim (özdeşlik) operatör
Γ	Gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Gelişen ve değişen teknoloji ile birlikte mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, genetik, kuantum, ekonomi gibi bilim alanlarında yaşanan gelişmeler beraberinde matematiksel problemleri de getirmektedir. Bu problemlerin çözümü fark denklemleri ile yapılmaktadır. Çünkü bu alanlarda karşılaşılan problemlerde bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlarla karşılaşılabilir.

Fark denklemi; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlere fonksiyonel denklemler de denir (Elaydi, 2000).

Bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi $y'(x), y''(x), \ldots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in *(discrete)* değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Burada devreye içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri girer.

Diferansiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada yaygın olarak kullanılmaktadır (Tollu, 2009).

Klasik fark denkleminde herhangi bir x_0 noktasından başlayarak bir $x_0, f(x_0), f\big(f(x_0)\big), f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big) \ldots$ dizisi oluşturulabilir. Ayrıca burada $f^2(x_0) = f\big(f(x_0)\big)$, $f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \ldots$ olur. Yine burada $f(x_0)$, x_0 noktasında f nin birinci iterasyonunu; $f^2(x_0)$, x_0 noktasında f nin ikinci iterasyonunu ve böyle devam edilerek $f^n(x_0)$, x_0 noktasında f nin n. iterasyonunu gösterir. $f^0(x_0) = x_0$ olmak üzere tüm pozitif $\{f^n(x_0): n \geq 0\}$ iterasyonlarının kümesi, x_0 noktasında pozitif yörünge olarak adlandırılır ve $O(x_0)$ ile gösterilir. İşte bu iterasyon süreci, ayrık dinamik sistemlere bir örnek teşkil etmektedir.

Örneğin, $f(x) = x^2, x_0 = 0{,}6$ için $\{f^n(x_0)\}$ iterasyon dizisi bulunurken x yerine 0,6 konularak tekrarlı (iterasyonel) biçimde 0,6, 0,36, 0,1296, 0,01679616… sayı dizisi elde edilebilir. Böylece $f^n(0{,}6)$ nın iterasyonunun sıfıra yakınsadığı görülebilir. Bir başka ifadeyle, örneğin her $x_0 \in (0{,}1)$ için $n \to \infty$ iken $f^n(x_0)$ sıfıra gider ve $x_0 \notin [-1{,}1]$ ise $f^n(x_0)$ sonsuza gider. Ayrıca burada $f^n(0) = 0, f^n(1) = 1$ ve bütün pozitif tamsayılar için $f^n(-1) = 1$ dir (Elaydi, 2000).

Eğitimde öncelik, diferansiyel denklemlere verilmektedir. Eğitimde öncelik fark denklemlerine verilmelidir. Çünkü öğrencilere fark denklemleri teorisini kavratmak için daha az ön bilgi gerekir ve bu teori eğitimin devamı için lineer cebir ile birlikte kuvvetli bir alt yapı oluşturur. Fark denklemleri teorisinden sonra, diferansiyel denklemler teorisi daha kolay öğretilebilir (Akın ve Bulgak, 1998).

Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamıştır. 1825 yılından önce lineer fark denklemleri incelenmemiştir. 1885 yılında Poincaré ile lineer fark denklem teorisine girilmiştir (Çatal, 2004).

Ardışık tekrar işlemi bir önceki adımda bulunan değerin bir sonraki adımda kullanılarak yeni bir değer elde edilmesidir. Fark denklemlerinde ise ardışık tekrar işlemleri kullanılarak istenilen bir terimin değeri bulunabilir. Ayrıca sadece kesikli (süreksiz) değerler kümesinde değişen bazı değişkenlere sahip problemler ardışık tekrar işlemlerinin de yardımı ile fark denklemlerini içeren matematik modellerle ifade edilebilir. Örneğin ekonomide böyle bir değişken zamandır. Ekonomistler bu kesikli zaman aralıkları üzerinde periyot analizi denen ulusal gelir davranışı ve diğer ekonomik değişkenleri inceler (Goldberg, 1960).

Ardışık tekrarla sayma fikri çok eskidir. Fark denklemleri tam olarak bilinmemekle birlikte M.Ö. 2000'lere Babiller'in kök bulma çabalarına dayanır (Lakshmikhantham and Trigiante, 2002).

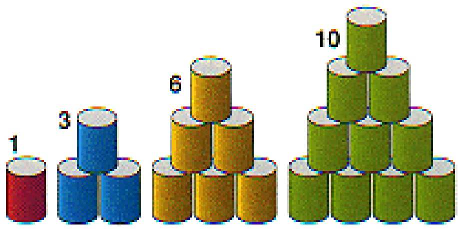
M.Ö. 450'lerde daha açık formda Pisagor'un üçgensel sayılar çalışması;

$$t_n = t_{n-1} + n$$

denklemi ve tam kare sayı denklemi;

$$S_n = S_{n-1} + n^2$$

fark denklemlerine katkılar sağlamıştır.



Şekil 1.1. Üçgensel sayılar (Kulenovic vd., 2000)

Pisagor ayrıca Pell denkleminin $\sqrt{2}$ civarında çözümü için;

$x^2 - 2y^2 = 1$ (Pell denklemi)

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$$

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

fark denklem sistemini kullanmıştır.

M.Ö. 250'lerde Arşimet çemberin çevre hesabı ve π sayısının yaklaşık değeri üzerinde çalışırken,

$$P_{2n} = {2p_nP_n}/{P_n + p_n}$$

$$p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$

denklemlerini kullanmıştır.

Bu eşitliklerde P_n = n kenarlı bir çokgenin dışına çizilen çemberin çevresi iken, p_n= n kenarlı bir çokgenin içine çizilen çemberin çevre uzunluğudur.

M.S. 400-1200 yılları arası matematik adına sönük bir dönemdir. Avrupa'da bu dönemde etkileyici bir çalışma olmamıştır. Ortadoğu'da yapılan çalışmalarda öne çıkan isim Omer Hayyam olmuştur. Kesin olarak bilinmemekle birlikte 1000-1100 yılları civarında, Chia Hsien ve Omer Hayyam en eski fark denklemi örneklerinden olan;

$$b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n,r-1}$$

eşitliği üzerinde çalışmışlardır (Lakshmikhantham and Trigiante, 2002).

1202'de Fibonacci dizisinin temeli olan "tavşan problemini" Fibonacci olarak da bilinen Leonardo di Pisa isimli ünlü İtalyan matematikçi ortaya atmıştır. Aslında bu bazı kaynaklarda fark denklemlerinin başlangıcı olarak düşünülür. Problemi ele alırsak:

Bir tavşan ailesi ele alınsın. Tavşanlar hızlı üreyen hayvanlardır. Bir çift tavşanın, doğduktan iki ay sonra ancak yeni yavru yapabilecek olgunluğa eriştiği ve her olgun tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru yapabildiği kabul edilsin. Olgun bir çift tavşan ile başlandığında, bir yıl sonra kaç çift tavşan elde edilir?

Çizelge 1.1. (Elaydi, 2000) Tavşan sayıları

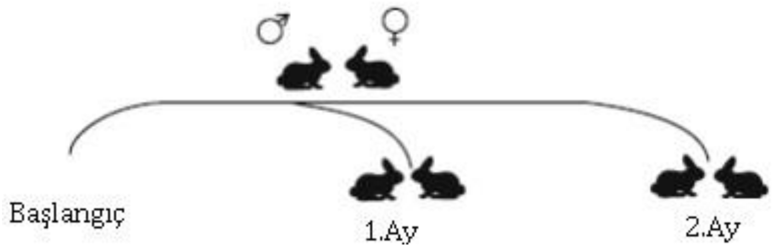
Ay	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Çift sayısı	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

n ayın sonundaki tavşan çifti sayısını veren matematiksel eşitlik, ikinci mertebeden fark denklemi yoluyla modellenmiştir.

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n),\ F(0) = 1, F(1) = 2, 0 \leq n \leq 10. \tag{1.1}$$

Bu eşitlik ikinci mertebeden fark denklemidir ve aşağıda verilen Fibonacci serisinin başlangıç değerleri farklı olan özel bir halidir.

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n),\ F(0) = 0, F(1) = 1, n \geq 0. \tag{1.2}$$



Şekil 1.2. (Elaydi, 2000) Aylara göre tavşan çiftleri

(1.1) denklemi sabit katsayılı lineer homojen fark denklemidir, karakteristik denklem;

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ şeklindedir ve

karakteristik kökleri $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup, genel çözüm

$F(n) = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dir (a_1 ve a_2 sabitler, n$\geq$ 1 olmak üzere).

F(1)=1 ve F(2)=1 başlangıç koşulları ile, a_1, a_2 keyfi sabitler olmak üzere;

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur.

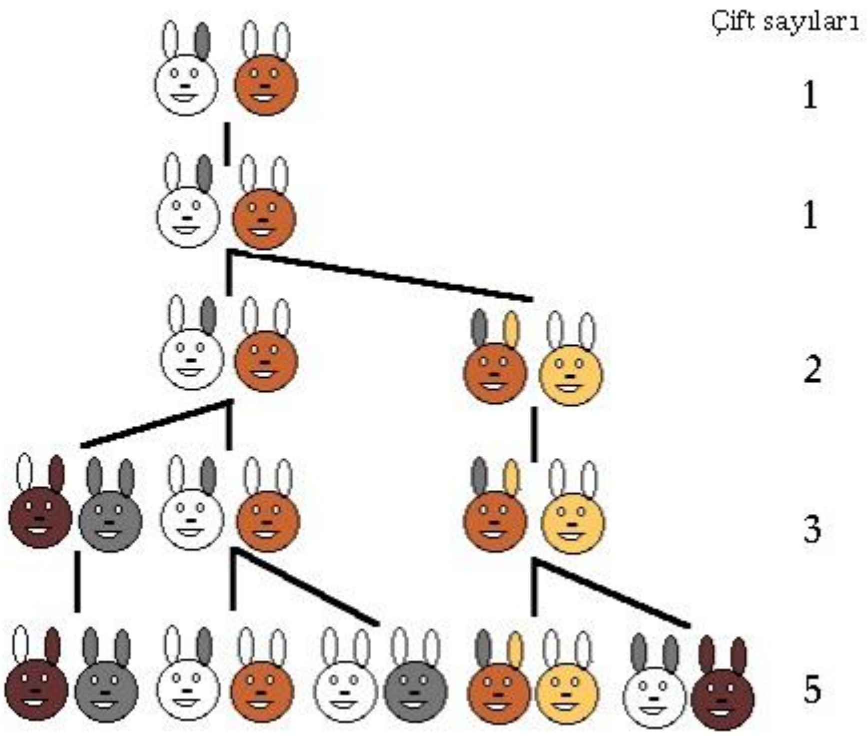
Sonuç olarak,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$

eşitliği elde edilir. İlginçtir ki; dizinin limiti

$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} \approx 1.618$ dir.

Bulunan bu yaklaşık değer *altın oran (golden mean)* olarak bilinmektedir (Elaydi, 2000). Fibonacci' nin ünlü tavşan problemi Fibonacci dizisinin oluşmasına zemin hazırlamıştır. Tavşan problemi ile ilgili, literatürde rastlanılan bir diğer şekil, aylara göre tavşan çifti sayıları Şekil (1.3)' te gösterilmiştir.



Şekil 1.3. (Kulenovic vd., 2000) Fibonacci dizisi

1600-1700 yılları arasında fark denklemleri ve yinelemeli sayma üzerine çalışmalar yapan matematikçiler; Francesco Maurolica, Fermat, Pascal, Sir Thomas Harriet, Henry Briggs, Leibniz, Newton ve Euler'dir. Bu kişiler arasında en önemli çalışmayı Newton, günümüzde "Newton Metodu" olarak bilinen kök bulma formülünü (nümerik analizde yer alan)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki fark denklemi ile ifade etmiştir (Kulenovic vd., 2000).

18. yy'da temel lineer fark denklemleri teorisini geliştiren matematikçiler Moivre, Euler, Lagrange, Laplace, Simson, Cotes olmuştur. Yine bu dönemde Riccati'nin çalışmaları olmuştur. "*Riccati fark denklemi*" olarak bilinen denklem aşağıda belirtilmiştir.

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

1755’ te Euler’in “Institutiones calculi differentials” eseri görülmektedir. Bu kitap sonlu fark hesaplaması ile başlamaktadır. Kitapta Euler’in sonlu fark için “Δ" sembolünü kullandığı görülmektedir. Bu da kısaca $\Delta y = y(n+1) - y(n)$ eşitliğini yazma kolaylığını getirmiştir.

1800’ lerde adı geçen matematikçiler; Babbage, Bessel, Farey, Gauss, Legendre dir. Ayrıca lineer fark denkleminin çözümlerinin asimptotik özellikleri 1880 lerde Poincaré tarafından ortaya konmuştur. Fark denklemleri 1820 ve 1850 yılları arasında da araştırmacıların kullandığı denklemlerden olmuştur. Özellikle öne çıkan isimler Cauchy, Liouville ve Sturm’dur. Bu dönemde salınım teorisi üzerine yoğun çalışmalar sürdürülürken, ikinci mertebeden Sturm-Liouville fark denklemi; aşağıdaki gibidir.

$$\Delta(r_k \Delta x_k) = p_k x_{k+1} = 0, \qquad \Delta x_k \coloneqq x_{k+1} - x_k$$

1826-1850 arasında popülasyon çalışmaları matematiksel modellemelerle zenginleştirilmiştir. Bu model bir popülasyonun kendinden önceki popülasyon büyüklüğü ile orantılı olması fikrine dayanmaktadır. Matematiksel model şu şekildedir:

$$p_{t+1} = r p_t$$

Burada t; zaman, p_t; t zamandaki popülasyon büyüklüğü, p_{t+1}; bir sonraki zaman dilimindeki popülasyon büyüklüğü ve r büyüme oranı anlamına gelmektedir. Verhulst, 1846 yılında popülasyon büyümesinin sadece nüfusun hacmine bağlı olmadığını, aynı zamanda bu hacmin popülasyonun üst limitinden ne kadar uzak olduğunun da önemli olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca Verhulst önceki nüfus ve sonraki nüfusun büyüklüğünü orantılı yapmak için

$$p_{t+1} = r p_t {}^{(k - p_t)}/_{K}$$

lojistik fark denklemini öne sürmüştür (Kulenovic vd., 2000).

1850 li yıllardan sonra herhangi bir canlı türünün gelecekteki durumuyla ilgili tahminler yapılırken, bu türün çoğalmasını etkileyebilecek tüm iç, dış ve çevresel faktörler göz önüne alınacak olduğundan fark denklemlerinden yararlanılmaya başlanmıştır.

1900'lerde ardışık denklemler bazı matematiksel mucizeler oluşturmaya başlamıştır. Bunlar düzlem doldurma eğrileri ya da fraktallarla başlar. Bu eğriler hiçbir boşluk bırakmadan düzlem dolduran eğrilerdir. Bunun gibi eğriler ilk 1890 yılında Peano tarafından keşfedilmiştir. Fark denklemlerini düzlem doldurma eğrileri ile kullanan diğer matematikçiler Hilbert ve Van Koch olmuştur. Düzlem doldurma eğrilerinin ve fraktalların birçok uygulaması vardır. Bunlardan biri de adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için kapalı ve açık yinelemeli yöntemler ailesinin önemli bir türü olan Runge-Kutta yöntemleridir. Böylece artık fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemlerine geçilmiştir.

1926-1950 yılları arasında Julia ve Fatou tarafından fark denklemleri ve ardışık yöntemleri kompleks fonksiyonlar üzerinde başlanmış ve bu iki matematikçi temel yinelemeli süreç üzerinde çalışmalar yapmıştır. Ayrıca bu dönemde Aleksandr Gelfond Fark denklemleri ve devamlı kesirleri içeren Sonlu Fark Denklemleri isimli önemli ders kitaplarını yazmıştır (Kulenovic vd., 2000).

Yine bu yıllarda lineer fark denklemleri Bessel fonksiyonunun hesaplanmasında Miller'in algoritması aracılığıyla kullanılmıştır. 1950'li yıllarda ekolojistler; lojistik denklem içeren basit lineer olmayan fark denklemini; yıldan yıla, mevsimden mevsime popülasyon değişimi hesaplamak için kullanmışlardır. Logistik denklem ve ilişkili diğer denklemlerle ilgili araştırmalar York, Sarkovskii, Feigenbaum v.d. tarafından yapılmıştır. Bu araştırmalar matematikçileri dinamik sistemler üzerinde yeni keşifler yapmaya yöneltmiştir. Sonrasında ise elde edilken sonuçlar ekonomiden tıpa birçok alanda uygulama alanı bulmaya başlamıştır (Lakshmikhantham and Trigiante, 2002). Bu dönemden sonra bilgisayar çalışmalarının başlaması ile birlikte bugünkü fraktal geometrinin temelini Mandelbrot atmıştır (Kulenovic vd., 2000).

1950’den bu zamana kadar yapılan araştırmalardaki bilgiler 1950’li yıllardan sonraki matematikçilerin lineer olmayan sabit katsayılı fark denklemleri için bir zemin oluşturmuştur. Bu çalışmalardan bazıları 1995-2000 yılları arasında Ladas tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1999-2004 yılları arasında Amleh vd. (1999), Komsala vd. (2000), DeVault vd. (2001), Kulenovic vd. (2001), Aboutaleb vd. (2001), Yan vd. (2002-2003), Al-Saris ve DeVault (2003), El-Owaidy vd. (2003), Fan vd. (2004), El-Owaidy vd. (2004), He vd. (2004) fark denklemleri üzerinde çalıştığı görülmektedir (Bayar, 2012).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Agarwal'ın (2000), "Difference Equations and Inequalities" kitabı konuya kaynaklık etmiş ve edecek olan temel eserler arasındadır. Bu yönü ile tezimiz için önemli bir unsur olmuştur. Sabit, değişken katsayılı, homojen olan ve homojen olmayan farklı mertebelerden fark denklemleri ayrıntılı olarak incelenip, örnekler ile desteklenmiştir.

Akın ve Bulgak (1998), "Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi" adlı kitapta sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri, yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemleri, Lyapunov'a göre kararlılık ve öz değerler gibi konu başlıklarına değinerek, bolca soru ve alıştırma ile konuların daha açık ve anlaşılır olmasını sağlamışlardır.

Bayar (2012), "Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri için Çözüm Yöntemleri" adlı yüksek lisans tezinde değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin analitik çözüm yöntemleri üzerinde durmuştur. Fark denklemleri konusunda geçmişten günümüze yapılan araştırmalar ve kullanım alanlarından, fark denklemlerinin çözüm ve sınıflandırmasından, sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin analitik çözümlerinden, değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin analitik çözümlerinden bahsetmiştir.

Bereketoğlu ve Kutay'ın (2012), yeni dönem literatür çalışmalarından sayılabilecek olan "Fark Denklemleri" kitabı skaler fark denklemleri, lineer olmayan skaler fark denklemleri, lineer fark denklem sistemleri, çözümlerin davranışı, kararlılık teorisi, salınımlı denklemler, kısmi fark denklemleri başlıklarıyla karşımıza çıkmaktadır. Her bölümünde çözülmüş yeterli alıştırma ve örnek bulunmaktadır.

Elaydi'nin (2000), "An Introduction to Difference Equations" çalışması bu konuya temel teşkil edebilecek çok önemli bir başyapıttır. Yapılan Türkçe çalışmalara, tezlere ve kitaplara kaynaklık etmiştir. Birinci mertebeden, ikinci mertebeden, n. mertebeden fark denklemleri, lineer fark denklem sistemleri, çözümleri, kararlılık teorisi, salınımlılık teorisi, Z-dönüşüm metodu, Volterra fark denklemleri, denge noktası, fark denklemlerinin asimtotik davranışları konu başlıklarına değinilmiştir.

Kelly ve Peterson (2001), "Difference Equations An Introduction with Appplications" adlı kitapta sırasıyla fark cebiri, lineer fark denklemleri, kararlılık teorisi, asimptotik metodlar, ikinci mertebeden lineer denklem, Sturm-Liouville problemi gibi başlıklara değinmişlerdir.

Kutay (2010), "Fark Denklemleri" başlıklı yüksek lisans tezinde fark operatörleri, tanımları, özellikleri ile başlayıp çalışmasına şu başlıklar ile devam etmiştir. Lineer fark denklemleri ve çözümleri, lineer fark denklem sistemlerinin temel teorisi ve A^n matrisinin hesabı, periyodik katsayılı lineer sistemlerin periyodik çözümlere sahip olma koşulları, lineer olmayan skaler fark denklemleri, kararlılık teorisi, Lyapunov Doğrudan Yöntemi ve lineerleştirme metodu.

Lakshmikhantham and Trigiante (2002), "Theory of difference equations-numerical methods and applications" makalelerinde fark denklemlerinin geçmişten günümüze hangi aşamalardan geçerek geldiğini, kimlerin fark denklemlerini çalışmalarında kullandığını, kısacası fark denklemlerinin tarihçesinden bahsetmişlerdir.

Önay (2009), "Fark Denklemleri" başlıklı yüksek lisans tezinde birinci mertebeden, ikinci mertebeden ve n. mertebeden lineer fark denklemleri üzerine çalışmış, araştırmasını çıkardığı sonuç ve önerileri ile tamamlamıştır.

Soykan (2017), lineer fark denklemleri çözümlü alıştırmalar kitabı aynı yazarın konu anlatımlı kitabının devamı niteliğindedir. Bu kitap çok sayıda alıştırma içerdiği için lisans ve yüksek lisans dersi olarak okutulan "Fark denklemleri" dersi için yararlı olacağı düşünülmektedir.

Soykan vd. (2017), lineer fark denklemleri konusunda yapılan en güncel kitap çalışmasıdır. İçerik bakımından incelenecek olursa; ön bilgiler ile başlayıp, fark analizi ve cebiri, fark denklemleri, lineer fark denklemleri, çözüm yöntemleri, lineerleştirilebilen fark denklemleri ve fark denklem sistemleri etraflıca incelenmiştir. Bolca alıştırma ve soru çözümü ile konunun daha anlaşılır olması amaçlanmıştır. Aynı kitabın devamı niteliğinde çözümlü sorulardan oluşan yazarın bir kitabı daha bulunmaktadır.

Yıldız (2018), "İkinci Mertebeden Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Yöntemleri" isimli yüksek lisans tezinde fark denklemleri ile alakalı temel tanım ve teoremler, geçmişten günümüze yapılan çalışmalar, birinci, ikinci ve k. mertebeden lineer fark denklemlerinin çözümleri lineer olmayan skaler fark denklemleri ve kararlılık konu başlıkları üzerine çalışmıştır.

3. FARK DENKLEMLERİ İÇİN TEMEL TANIM VE TEOREMLER

3.1. Tanım (Δ *fark operatörü*)

Bir $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ *fark operatörü* veya x in *birinci basamaktan farkı*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır; burada $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesidir. Buna göre x in *ikinci basamaktan farkı* ($\Delta^2 x$)

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n))$$
$$= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n),$$

ve böyle devam ederek x in *k yıncı basamaktan farkı* ($\Delta^k x$)

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \tag{3.1}$$

şeklinde hesaplanır; burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}.$$ dir.

Bazen fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara uygulanabilir. Böyle bir durumda Δ operatörünün sağ alt köşesine konulan bir indis yardımıyla hangi değişkenin bir birim ötelendiği gösterilmiş olur. Örneğin;

$$\Delta_n ne^t = (n+1)e^t - ne^t = e^t,$$
$$\Delta_t ne^t = ne^{t+1} - ne^t = ne^t(e-1)$$

(Bereketoğlu, 2012).

3.2. Teorem

(Δ operatörünün özellikleri)

y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

1) $\Delta^0 = I$

2) Dağılma özelliği:

$\Delta[y_1(x) + y_2(x)] = \Delta y_1(x) + \Delta y_2(x)$

3) Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının farkı:

$\Delta[cy(x)] = c\Delta y(x)$

4) Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımlarının toplamlarının farkı:

$$\Delta[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 \Delta y_1(x) + c_2 \Delta y_2(x)$$

5) $y_1, y_2, y_{3,\dots,} y_n$; n tane fonksiyon ve $c_1, c_2, c_{3,\dots} c_n$; n tane keyfi sabit olsun.

Buna göre

$$\Delta[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots c_n y_n(x)] = c_1 \Delta y_1(x) + c_2 \Delta y_2(x) + \cdots + c_n \Delta y_n(x)$$

eşitliği yazılabilir.

6) $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ bir fonksiyon, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ keyfi sabitler ve $a_n \neq 0$ olsun. O zaman y nin n. ileri farkı bir sabit fonksiyondur ve $\Delta^n = n!\, h^n a_n$ eşitliği yazılır. Eğer $p > n$ ise $\Delta^p y(x) = 0$ olur.

7) İki fonksiyonun çarpımının farkı:

$$\Delta[y_1(x) y_2(x)] = y_2(x) \Delta y_1(x) + y_1(x+1) \Delta y_2(x)$$

8) İki fonksiyonun bölümünün farkı:

$$\Delta\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] = \frac{y_2(x)\Delta y_1(x) - y_1(x)\Delta y_2(x)}{y_2(x) y_2(x+1)}$$

9) Fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara uygulanırsa, Δ operatörünün sağ alt köşesine belirtilen indis yardımıyla hangi değişkenin farkının alındığını gösterir.

$\Delta_n(nx^m) = (n+1)x^m - nx^m = x^m$

$\Delta_m(nx^m) = nx^{m+1} - nx^m = (x-1)nx^m$

10) m ve n negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$\Delta^m((\Delta^n y(x)) = \Delta^n(\Delta^m y(x)) = \Delta^{m+n} y(x)$ dir

(Yıldız, 2018).

3.3. Örnek: $\Delta(7n^2 - 5n + 1) = 7\Delta n^2 - 5\Delta n + \Delta 1$

$= 14n + 2.$

3.4. Tanım (*E operatörü*)

E öteleme operatörü

$Ex(n) = x(n+1)$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre $E^k x(n) = x(n+k)$ dır. Ayrıca, a ve b sabitleri için

$E(ax(n) + b(y(n)) = aEx(n) + bEy(n)$ dir; yani E operatörü lineerlik özelliğine sahiptir.

$\Delta\ ve\ E$

operatörleri arasında

$\Delta = E - I$ ilişkisi vardır; burada *I özdeşlik operatörüdür*; yani $Ix(n) = x(n)$. Benzer şekilde $E = \Delta + I$ olduğu görülür.

Buradan

$\Delta E = E\Delta$

değişme özelliği ortaya çıkar. Binom formülünden k. basamaktan fark ve öteleme operatörleri, sırasıyla,

$\Delta^k = (E - I)^k$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j}$$

ve $E^k = (\Delta + I)^k$

$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^{k-j}$ dir.

Buradan $\Delta^k x(n)$ farkı Binom formülü yardımıyla yeniden yazılabilir.

$\Delta^k x(n) = (E - I)^k x(n)$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} -I^j E^{k-j} x(n)$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j x(n + k - j).$$

Benzer olarak

$E^k x(n) = \Delta + I^k x(n)$

$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^{k-j} x(n)$ dır

(Kutay, 2010).

E operatörünün özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

3.5. Teorem

a sabit olmak üzere

1) $E[f(x) + g(x)] = Ef(x) + Eg(x)$

2) $E[af(x)] = aE(f(x))$
3) $E^r\left(E^s f(x)\right) = E^{r+s} f(x)$
4) $E^0 f(x) = f(x)$

olarak ifade edilir.

3.6. Teorem

k. dereceden
$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$

polinomu için
$\Delta^k p(n) = a_0(k!)$

ve

$\Delta^{k+i} p(n) = 0, i \geq 1,$

dir, burada $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_k$ katsayıları reel sabitlerdir.

Sık karşılaşılan bazı özel fonksiyonların farkları aşağıdaki çizelgede verilmektedir.

Çizelge 3.1. (Bereketoğlu, 2012) İleri fark tablosu

$x(n)$	$\Delta x(n)$
a^n	$(a-1)a^n, n \in \mathbb{N}$
$\sin an$	$2sin\frac{a}{2}\cos a\left(n+\frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{N}$
$\cos an$	$-2sin\frac{a}{2}\sin a\left(n+\frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{N}$
$\log an$	$\log\left(1+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{Z}^+$
$log\Gamma(n), \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt,$	$\log n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

3.7. Örnek: $\Delta\sec \pi n$ değerini hesaplayalım.

Teorem 3.2. (8), Çizelge 3.1 ve $\Delta 1 = 0$ dan,

$$\Delta \sec \pi n = \Delta \frac{1}{\cos \pi n}$$

$$= \frac{(cos\pi n)(\Delta 1) - (1)(\Delta \cos \pi n)}{\cos \pi n \cos \pi(n+1)}$$

$$= \frac{2sin\frac{\pi}{2}\sin \pi(n+\frac{1}{2})}{\cos \pi n \cos \pi(n+1)}$$

$= -2\sec \pi n$ bulunur.

3.8. Teorem (∇) Geri Fark Operatörü

Geri fark operatörü ∇,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h), \qquad \nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\nabla f(x) = \Delta E^{-1}\big(f(x)\big) = (1 - E^{-1})f(x)$$

şeklinde gösterilebilir.

3.9. Tanım (Δ^{-1}) Ters fark operatörü

$\Delta F(n) = f(n)$ olsun. Bu durumda

$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c,$ c bir keyfi sabit,

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne *ters fark operatörü (antidifference operator)* ve $F(n)$ fonksiyonuna $f(n)$ nin *ters farkı* denir.

Özel olarak, $\Delta^{-1}(0) = c$ dir

(Bereketoğlu, 2012).

3.10. Lemma: Δ fark operatörü için

(i) $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0),$

(ii) $\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n)$

dir. Bu lemmanın bir sonucu olarak

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c \tag{3.2}$$

elde edilir. Buradan da Δ^{-1} in lineerlik özelliği ispatlanabilir (Kutay, 2016).

3.11.Teorem

Δ^{-1} operatörü lineerdir.

Bir başka deyişle,

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$\Delta^{-1}\big(ax(n) + by(n)\big) = a\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n)$ dir. (3.2) formülünden,

$$\Delta^{-1}\big(ax(n) + by(n)\big) = \sum_{i=0}^{n-1}\big(ax(i) + by(i)\big) + c$$

$$= a\sum_{i=0}^{n-1} x(i) + b\sum_{i=0}^{n-1} y(i) + c$$

$= a\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n)$ dir.

0 ve 1 fonksiyonlarının k. ters farkları sırasıyla;

$\Delta^{-k}0 = c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots c_k$,

ve

$\Delta^{-k}1 = \frac{n^k}{k!} + c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots + c_k$,

şeklindedir.

3.12. Uyarı

$\Delta\Delta^{-1} f(n) = I,\ \Delta^{-1}\Delta \neq I$ dır. Gerçekten, $\Delta F(n) = f(n)$ ve $\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$ olsun. Bu durumda,

$\Delta\Delta^{-1}f(n) = \Delta(F(n) + c) = \Delta F(n) = f(n),$

$\Delta\Delta^{-1}f(n) = \Delta^{-1}\big(f(n+1) - f(n)\big) = \Delta^{-1}f(n+1) - \Delta^{-1}f(n)$

$= \ F(n+1) + c_1 - F(n) - c_2 = F(n+1) - F(n) + c_3$

$= \Delta F(n) + c_3$

$= f(n) + c_3$ tür.

3.13. Sonuç

$n \geq 0$ değerlerinde tanımlı bir $f(n)$ fonksiyonu için

$\Delta^{-1}f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c$ dir, burada c bir keyfi sabittir.

Buna göre Δ^{-1} ters fark operatörü

$$\Delta^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1}$$

şeklinde bir *belirsiz toplam* olarak da ifade edilebilir.

Ters fark operatörü ile ilgili bazı sonuçlar şunlardır:

a) $\Delta^{-1}\big(ax(n) + by(n)\big) = a\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n),$

burada a ve b;

b)$\Delta\,\Delta^{-1}= I \ ve \ \Delta^{-1}\Delta\neq I$;

c) $\Delta^{-2} f(n) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 n + c_2$ ve

$\Delta^{-3} f(n) = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 n^2 + c_2 n + c_3$; burada $c_{1,} c_2$ ve c_3 keyfi sabitler;

d) $\Delta F(n) = f(n)$ ve a, b $(b \geq a)$ tamsayılar olarak verilsin. Bu durumda

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = F(b+1) - F(a);$$

e)$\Delta^{-1}\big(f(n)g(n)\big) = f(n-1)\Delta^{-1}g(n) - \Delta^{-1}(\Delta f(n-1)f(n-1)g(n))$

f) $\Delta^{-1}[af(n) + bg(n)] = a\Delta^{-1}f(n) + b\Delta^{-1}g(n)$

g)$\Delta^{-m}0 = c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \cdots + c_m$

h) $\Delta^{-m}1 = \frac{n^m}{m!} + c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \cdots + c_m$

ı) $\Delta^{-1}f^{(m)} = \frac{f^{m+1}}{m+1} + c,\ k \neq 1$

dır.

3.14. Örnek: $\Delta^{-1}0 = c\ ve\ \Delta^{-1}1 = n + c.$

3.15. Örnek: $f(n) = \frac{n}{6}$ fonksiyonunun ters farkı ya da belirsiz toplamı

$$\Delta^{-1}\left(\frac{n}{6}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{6} = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{12}n(n-1) + c$$

dir.

Sık karşılaşılan bazı fonksiyonların ters farkları aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Çizelge 3.2. (Bereketoğlu, 2012) Ters fark tablosu

$x(n)$	$\Delta^{-1}x(n)$
a^n	$\frac{a^n}{a-1} + c, a \neq 1,$
$\sin an$	$\frac{-\cos a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}}$+c, $a \neq 2k\pi$
$\cos an$	$\frac{sina(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}}$+c, $n > 0$
$\log n$	$\log\Gamma(n) + c,\ n > 0$
$n^{(a)}$	$\frac{n^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$

3.16. Örnek: $\Delta^{-1}(\sin 4n + 2\cos 6n)$ değerini hesaplayalım.

Teorem 3.11. ve Çizelge 3.2. den,

$\Delta^{-1}(\sin 4n + 2\cos 6n) = \Delta^{-1}\sin 4n + 2\Delta^{-1}\cos 6n$

$$= \frac{-\cos 4(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{4}{2}} + 2\frac{\sin 6(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{6}{2}} + c$$
$$= \frac{-\cos 4(n-\frac{1}{2})}{2\sin 2} + \frac{\sin 6(n-\frac{1}{2})}{\sin 3} + c$$

dir.

3.17. Örnek: $4.5^n + e^{3n}$ fonksiyonunun ters farkını tanım yardımıyla hesaplayalım.

$$\Delta^{-1}(4.5^n + e^{3n}) = \sum_{i=0}^{n-1}(4.5^i + e^{3i})$$
$$= 4\sum_{i=0}^{n-1} 5^i + \sum_{i=0}^{n-1}(e^3)^i$$
$$= 4\left(\frac{1-5^n}{1-5}\right) + \frac{1-(e^3)^n}{1-e^3} + c_1$$
$$= 5^n - 1 + \frac{e^{3n}}{e^3-1} - \frac{1}{e^3-1} + c_1$$
$= 5^n + \frac{e^{3n}}{e^3-1} + c$ dir.

3.18. Tanım

Fark analizinde karşılaşılan en ilginç fonksiyonlardan biri $x^{(k)}$ ile gösterilen *faktöriyel polinom* veya *faktöriyel kuvvetidir.*

$n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere n. dereceden bir faktöriyel fonksiyonu

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(n-1)h]$$

ile verilen bir fonksiyondur (Akın, 1988).

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

(a) $k \in \mathbb{Z}^+$ için $x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$;

(b) $k = 0$ için $x^{(0)} = 1$;

(c) $k \in \mathbb{Z}^-$ için $x^{(k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x-k)}$;

(d) $k \notin \mathbb{Z}$ için $x^{(k)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$ (Γ: $gamma\ fonksiyonu$) (Bereketoğlu, 2012).

3.19. Lemma

$k \in \mathbb{Z}^{+}$ *sabit sayı* ve $x \in \mathbb{R}$ için, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$;

(ii)$\Delta^{n} x^{(k)} = k(k-1), \dots, (k-n+1)x^{(k-n)}$;

(iii) $\Delta^{n} x^{(k)} = k!$

(Elaydi, 2000).

3.20. Uyarı

Bazı ifadelerin toplanmasında kullanılan, belli başlı belirli toplam formülleri bulunmaktadır. Aşağıdaki çizelgede bu formüller ayrıntılı olarak belirtilmiştir.

Çizelge 3.3. (Elaydi, 2000) Belirli toplamlar

1	$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4	$\sum_{k=1}^{n} k^4$	$\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$
5	$\sum_{k=0}^{n-1} a^k$	$\begin{cases} eğer\ a \neq 1\ ise, & a^n - 1/a - 1 \\ eğer\ a = 1\ ise, & n \end{cases}$
6	$\sum_{k=1}^{n-1} a^k$	$\begin{cases} eğer\ a \neq 1\ ise, & a^n - a/a - 1 \\ eğer\ a = 1\ ise, & n-1 \end{cases}$
7	$\sum_{k=1}^{n} ka^k, a \neq 1$	$\frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2}$

Diferansiyel denklemler teorisi ile bu denklemlerin ayrık benzeri olarak isimlendirilen fark denklemleri teorisi arasında birtakım benzerlikler bulunmaktadır. Söz konusu benzerlikler aşağıdaki çizelgede özetlenmektedir.

Çizelge 3.4. (Bereketoğlu, 2012) Fark ve diferansiyel operatör ilişkisi

Fark Analizi	Diferansiyel Analiz
$\Delta x(n) = x(n+\varepsilon) - x(n)$	$Dx(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(\frac{\Delta x(t)}{\varepsilon})$
$\Delta cx = c\Delta x$	$Dcx = cDx$
$\Delta x^{(k)} = k\,\varepsilon x^{(k-1)}$	$\mathrm{D}x^{k} = kx^{k-1}$
$\Delta^{k} x = \Delta(\Delta^{k-1} x)$	$D^{k} x = D(D^{k-1} x)$
$\Delta(x_1 c_1 + c_2 x_2) = c_1 \Delta x_1 + c_2 \Delta x_2$	$D(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 D x_1 + c_2 D x_2$
$x(n), k$ yıncı dereceden bir polinom ise, $\Delta^{k} x = sabit$ ve $l \geq k+1$ için $\Delta^{l} x = 0$ dır.	$x(t), k$ yıncı dereceden bir polinom ise, $D^{k} x = sabit$ ve $l \geq k+1$ için $D^{l} x = 0$ dır.
$\Delta(xy) = y\Delta x + (Ex)\Delta y$	$D(xy) = yDx + xDy$
$\Delta \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yEy}$	$D \frac{x}{y} = \frac{yDx - xDy}{y^2}$
$\Delta F = f$ ise, $\Delta^{-1} f = F + c$	$DF = f$ ise, $\int f = F + c$

4. FARK DENKLEMLERİ

4.1. Tanım(Fark denklemi): x sürekli bir değişken olmak üzere genel olarak fark denklemi

$$G(x, f(x), f(x+h), \dots, f(x+mh)) = 0 \quad (4.1)$$

olarak tanımlanmakla birlikte h=1 için

$$G(x, f(x), f(x+1), \dots, f(x+m)) = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır ve buna *fonksiyonel fark denklemi* denir. $h = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n ayrık noktaları üzerinde tanımlı fark denklemi ise

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}) = 0 \quad (4.3)$$

olarak tanımlanır ve bu denkleme *skaler fark denklemi* denir (Elaydi, 2000).

4.2. Tanım: Bir S kümesi üzerinde tanımlı y fonksiyonunun değeri ve bu y fonksiyonunun her x değeri için bir veya daha yüksek mertebeden farkları $\Delta y, \Delta^2 y, \dots$ olan terimleri içeren bir bağıntıya, S kümesi üzerinde fark denklemi denir (Akın, 1988).

4.3. Tanım: Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi denir.
Örneğin; $x(n+3) - 4x(n+2) + 5x(n+1) = 0$ fark denkleminin mertebesi 2;
$x(n+4) + x(n)x(n+2) = 1$ fark denkleminin mertebesi 4;
$x(n+7) = n(n-2)$ denkleminin mertebesi 0 dır.

4.4. Tanım: n. mertebeden bir fark denklemi genel olarak; $k, n \in \mathbb{N}$,

$y(k)(= y_k) \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ve $y(k) \neq 0$ olmak üzere,

$$f\big(n, y(k), y(k+1), \dots, y(k+n)\big) = 0$$

biçiminde tanımlanır (Akın ve Bulgak, 1998).

Birinci, ikinci ve n. mertebeden fark denklemleri sırasıyla aşağıdaki formlarda verilir.

$y(m) + a_1 y(m+1) = f(m)$
$y(m-1) + a_1 y(m) + a_2 y(m+1) = g(m)$
$y(m+n) + a_1 y(m+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(m+1) + a_n y(m) = h(m)$
(Uçar, 2013).

4.5. Tanım: Bağımlı değişkenin birinci dereceden olduğu fark denklemine lineer, aksi halde lineer olmayan fark denklemi denir (Agarwal, 2000; Elaydi, 2000).

Bir operatörün lineerliği ile fark denkleminin lineerliği farklı kavramlardır. Örneğin bir operatör (fonksiyon) olarak $y(n) = 2^n$ lineer değildir fakat bunu bir çözüm olarak kabul eden $y(n+1) - 2y(n) = 0$ fark denklemi lineerdir.

4.6. Tanım: (Lineer Fark Denklemi): k. mertebeden lineer fark denklemi; genel olarak

$a_0(n), a_1(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $a_i(n)$ ve $g(n)$, $n_0 \leq n$ için tanımlı reel değerli fonksiyon olsun. $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0(n)y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \cdots + a_k(n)y(n) = g(n) \tag{4.4}$$

veya

$$a_0(n)y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_k(n)y_n = g(n) \tag{4.5}$$

biçiminde gösterilir (Elaydi, 2000).

Bu denklem $g(n) = 0$ olduğu zaman *homojen denklem*, aksi durumda *homojen olmayan denklem* olarak adlandırılır. Buna göre k. mertebeden bir *lineer homojen fark denklemi*

$$a_0(n)y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \cdots + a_k(n)y(n) = 0 \tag{4.6}$$

şeklindedir.

Ayrıca $g(n) = 0$ ve $a_0(n), a_1(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları $a_k(n) = a_k$ şeklinde sabit ise denkleme *sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi* denir.

$a_0(n), a_1(n), \ldots, a_k(n)$ katsayılarından en az biri değişken içeren fonksiyon ise denkleme *değişken katsayılı lineer homojen fark denklemi* denir.

4.7. Örnek: Aşağıda verilen fark denklemlerinin mertebelerini ve lineerliğini inceleyelim.

(a) $y(n+2) + 2y(n+1) - 5y(n) + y(n-1) = n + \cos n$
(b) $y(n+1) = 2y^4(n) - 3n$
(c) $y(n+2) - y(n+1)\big(6 + y(n+1)\big) = 0$

Çözüm:

(a) Verilen fark denkleminin mertebesi 3 tür ve denklem lineerdir.
(b) Mertebe 1 dir ve denklem lineer değildir çünkü denklemde $y^4(n)$ terimi vardır.
(c) Mertebe 1 dir ve denklem lineer değildir çünkü $y(n+1)y(n+1)$ terimi vardır.

4.8. Teorem: a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ katsayıları reel sabitler ve $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $a_k \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \cdots + a_k(n)y(n) = g(n) \qquad (4.7)$$

$$y(n_0) = \alpha_0, y(n_0+1) = \alpha_{1,} \ldots, , y(n_0+k-1) = \alpha_{k-1,} \qquad (4.8)$$

başlangıç değer problemi $n \geq n_0$ için tanımlı olan bir tek $y(n)$ çözümüne sahiptir.

İspat: (4.8) koşulları yardımıyla (4.7) den önce $n = n_0$ için $y(n_0+k)$, akabinde $n = n_0 + 1$ için $y(n_0+k+1)$ ve bu işleme benzer şekilde devam edilerek $y(n_0+k+2)$, $y(n_0+k+3)$, değerleri hesaplanır. Buradan (4.7)-(4.8) probleminin bir çözümü

$$y(n_0), y(n_0+1), \ldots, y(n_0+k-1), y(n_0+k), y(n_0+k+1), y(n_0+k+2), \ldots$$

şeklinde bulunur. Böylece çözümün varlığı kanıtlanmış olur.

Çözümün tekliği için $y(n)$ den farklı bir $x(n)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Bu $x(n)$ çözümü benzer şekilde (4.7) ve (4.8) yardımıyla hesaplandığı zaman her $n \geq n_0$ için $y(n)$ e özdeş olduğu görülür. O halde çözüm tektir (Bereketoğlu, 2012).

4.9. Tanım: Her $n \geq n_0$ için

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0 \tag{4.9}$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_r$ sabitleri var ise, bu durumda $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına $n \geq n_0$ için *lineer bağımlıdır* denir. Eğer (4.9) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına $n \geq n_0$ için *lineer bağımsızdır* denir
(Kutay, 2010).

4.10. Örnek: $3^n, n3^n, n^2\, 3^n$ fonksiyonları $n \geq 1$ üzerinde lineer bağımsızdır. Bunu görmek için

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \qquad \forall n \geq 1,$$

eşitliği 3^n ile bölünür.

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \qquad \forall n \geq 1.$$

Bu ise en fazla iki $n \geq 1$ için doğrudur. Her $n \geq 1$ için eşitliğin sağlanması ancak ve ancak $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ halinde mümkündür.

4.11. Örnek: $n \geq 1$ için $3^n, n3^n, 5n3^n$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu gösterelim.

$c_1 3^n + c_2 n 3^n + c_3 5n3^n = 0, \qquad \forall n \geq 1,$

eşitliğinin her iki tarafı da 3^n ile bölünürse;

$c_1 + c_2 n + c_3 5n = 0, \qquad \forall n \geq 1,$

eşitliği karşımıza çıkar.

Gerçekten,
$c_1 = 0, c_2 = 5$ ve $c_3 = -1$ alınırsa, bu eşitlik sağlanmış olur. Yani fonksiyonlar lineer bağımlıdır.

4.12. Tanım: (4.6) in k tane lineer bağımsız çözümünün cümlesine, bir *temel cümle* denir.

4.13. Teorem (Temel Teorem): Her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ ise, bu durumda (4.6) lineer homojen fark denklemi $n \geq n_0$ üzerinde tanımlı olan bir temel cümleye sahiptir (Bereketoğlu, 2012).

4.14. Tanım: (Üst Üste Ekleme İlkesi, Superposition Prensibi) c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve $y^1(k) ve\ y^2(k)$

$$y_{k+n} + a_1(k) y_{k+n-1} + \cdots + a_n(k) y_k = 0 \tag{4.10}$$

denkleminin çözümleri olmak üzere,

$y(k) = c_1 y^1(k) + c_2 y^2(k)$ de (4.10) denkleminin bir çözümüdür (Mickens, 1990).

4.15. Teorem: (4.6) homojen denkleminin k tane lineer bağımsız çözümü $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ olsun. Bu durumda (4.6) denkleminin genel çözümü

$y(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + \cdots + c_k y_k(n)$
dir, burada $c_1, c_2, \dots, c_k$ keyfi sabitlerdir.

4.16. Uyarı: V, k. mertebeden (4.6) homojen denkleminin bütün çözümlerinin cümlesi olmak üzere + ve . işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

(i) $(x + y)(n) = x(n) + y(n), \qquad x, y \in V, n \in \mathbb{N},$
$(ii)(ax)(n) = ax(n), \; x \in V, a$ bir sabit.

Bu durumda $(V, +, \;.), \; k$ boyutlu bir lineer vektör uzayıdır.

4.17. Teorem: (4.6) homojen denkleminin genel çözümü $y_h(n)$ ve homojen olmayan (4.5) denkleminin bir özel çözümü $y_ö(n)$ ise, bu durumda (4.5) denkleminin genel çözümü

$y(n) = \; y_h(n) + y_ö(n)$ dir.

4.18. Tanım: Bir f operatörü $f(E) = E^n + a_1E^{n-1} + \cdots + a_{n-1}E + a_n$ şeklinde tanımlanarak n. mertebeden bir homojen fark denklemi kısaca

$f(E)y(k) = 0$

olarak yazılabilir (Mickens, 1990).

4.19. Tanım: Bir fark denkleminin çözümleri $y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)$ olsun. Bu çözümlerin *Casoratyanı*

$$W(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_m(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_m(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(n+r-1) & y_2(n+r-1) & \cdots & y_m(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

4.20. Lemma (Abel Lemması): $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ (4.6) homojen fark denkleminin çözümleri ve $W(n)$ onların *Casoratyanı* olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$W(n) = -1^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i)\right)W(n_0)$

dır.

4.21. Sonuç: $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$, (4.6) homojen fark denkleminin çözümleri ve her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ sayısına karşılık $W(n) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $W(n_0) \neq 0$ dır.

4.22. Teorem: (4.6) homojen fark denkleminin $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ çözümlerinin bir temel cümle oluşturması için gerek ve yeter şart herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır.

4.23. Örnek: $x(n+2) - 2x(n+1) - 3x(n) = 0$ denkleminin çözümleri olan -1^n ve 3^n in bir temel cümle oluşturup oluşturmadığına bakalım.

İlerleyen konularda işlenecek olan fark denklemlerinin çözümlerinden; verilen fark denkleminin genel çözümü; c_1 ve c_2 keyfi sabit olmak üzere;

$x(n) = c_1(-1)^n + c_2 3^n$ dir. Verilen $(-1)^n$ ve 3^n fonksiyonlarının Casoratyanı

$W(n) = det \begin{pmatrix} (-1)^n & 3^n \\ (-1)^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}$ dir ve $n = 0$ noktasında

$W(0) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$ olduğundan verilen fonksiyonların kümesi lineer bağımsızdır.

4.24. Örnek: Üçüncü basamaktan homojen

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0$$

fark denkleminin $2^n, (-2)^n, (-3)^n$ çözümleri bir temel cümle oluştururlar. Çünkü onların *Casoratyanı*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $n = 0$ noktasında

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0$$

dır.

4.25. Tanım: n. mertebeden sabit katsayılı bir homojen denklemin karakteristik denklemi,

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

biçiminde tanımlanır. Karakteristik denklem n. mertebeden bir polinom olduğu için n tane kökü vardır. $(r_i; i = 1,2, \dots, n)$.

O halde karakteristik denklem fonksiyonel formda

$$f(r) = \prod_{i=1}^{n} (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n) = 0$$

biçiminde yazılır (Mickens, 1990).

4.26. Teorem: (De Moivre Teoremi): r pozitif bir sayı olmak üzere;

$$[r(cos\theta + isin\theta)]^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta)$$

bağıntısı vardır (Goldberg, 1958).

4.27. Uyarı: Fark denklemler teorisi ve diferansiyel denklemler teorisi birçok benzer özelliğe sahiptir. Birincisine ayrıca ayrık teori de denir. Diferansiyel ve fark denklemler arasındaki ilişkiyi gösteren bir tablo aşağıda çıkartılmıştır.

Çizelge 4.1. (Soykan vd., 2017) Diferansiyel ve fark denklemler teorisi kıyası

Diferansiyel denklemler teorisi	Fark denklemler teorisi
$y = f(x)$	$x(n)$
$\frac{dy}{dx}$	$x(n+1)$
$\frac{d^2(y)}{dx^2}$	$x(n+2)$
$\frac{d^3(y)}{dx^3}$	$x(n+3)$
$\frac{d^k(y)}{dx^k}, k \in \mathbb{N}_0$	$x(n+k), k \in \mathbb{N}_0$
x	n
5^x	5^n
$\frac{d^2(y)}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = x + 6^x - \sin 4x$	$x(n+2) - 3nx(n+1) - (n+1)x(n) = n + 6^n - \sin 4n$

5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

5.1. Genel Denklem Çözümleri:

Birinci basamaktan(mertebeden) lineer homojen fark denklemi

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{5.1.1}$$

ve birinci basamaktan(mertebeden) lineer homojen olmayan fark denklemi,

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{5.1.2}$$

$$y(n_0) = y_0 \tag{5.1.3}$$

başlangıç koşulundan meydana gelen başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $a(n) \neq 0$ ve $a(n), g(n), n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca, bilinmelidir ki,

$\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$ ve $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$ kabulleri mevcuttur.

5.1.1. Teorem: (5.1.1) homojen fark denklemi ve (5.1.3) başlangıç koşulundan oluşan problemin tek çözümü

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 \tag{5.1.4}$$

olup (5.1.2) - (5.1.3) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r) \tag{5.1.5}$$

dir.

İspat: (5.1.1) homojen denkleminden, $n = n_0, n_0+1, n_0+2$ sayıları için sırasıyla

$$y(n_0+1) = a(n_0)y(n_0) = a(n_0)y_0,$$

$$y(n_0+2) = a(n_0+1)y(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)y_0,$$

ve

$$y(n_0+3) = a(n_0+2)y(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)y_0,$$

elde edilir. Buradan (5.1.1) ve (5.1.3) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} y(n) &= y(n_0 + n - n_0) \\ &= a(n-1)a(n-2)\dots a(n_0)y_0 \\ &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 \end{aligned}$$

Diğer taraftan (5.1.2) ve (5.1.3) probleminin tek çözümü aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

Önce (5.1.2) ve (5.1.3) den,

$y(n_0+1) = a(n_0)y(n_0) + g(n_0)$,

$$
\begin{aligned}
y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\
&= a(n_0+1)\, a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(n_0+3) &= a(n_0+2)y(n_0+2) + g(n_0+2) \\
&= a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+2)\, a(n_0+1)\, g(n_0) \\
&\quad + a(n_0+2)g(n_0+1) + g(n_0+2)
\end{aligned}
$$

değerleri hesaplanır. Buradan yola çıkarak, $y(n)$ çözümü her $n \geq n_0$ için (5.1.5) şeklinde ifade edilir. Sonra bunun doğruluğu tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir.

Bunun için (5.1.5) ifadesi $n = k$ için doğru olsun, yani,

$$y(k) = \left(\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right)g(r). \tag{5.1.6}$$

Göstereceğiz ki (5.1.5) formülü $n = k+1$ için de doğrudur.

(5.1.2) den

$y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$

ve (5.1.6) dan,

$$
\begin{aligned}
y(k+1) &= a(k)\left[\left(\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right)g(r)\right] + g(k) \\
&= a(k)\left(\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(a(k)\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right)g(r) + g(k) \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right)g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right)g(k) \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right)g(r)
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde, (5.1.5) formülü her $n \geq n_0$için doğrudur

(Elaydi, 2000; Soykan vd., 2017).

5.1.2. Uyarı: Birinci mertebeden sabit katsayılı

$$y(n+1) = ay(n) + g(n) \tag{5.1.7}$$

denklemi ve

$$y(0) = y_0 \tag{5.1.8}$$

koşulu için (5.1.5) formülü

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r) \tag{5.1.9}$$

şeklini alır. Ayrıca g bir sabit olmak üzere $g(n) = g$ olduğu zaman (5.1.9) dan,

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) g, & a \neq 1 \\ y_0 + gn, & a = 1 \end{cases}$$

bulunur
(Bereketoğlu, 2012).

Yukarıda ispatları ile birlikte verilen genel formüller, tüm özel durumlar için ayrıca incelenecek ve çözümler aşağıda yeniden yazılacaktır. Levy ve Lessman (1961)'e göre bu özel durumlar şunlardır (Yıldız, 2018).

5.2. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi:

$$y(n+1) = a(n)y(n)$$

denkleminde $a(n)$ fonksiyonu sabit sayıdır. Dolayısıyla $a(n) = a$ alınır ve $a = 1$ ve $a \neq 1$ olacak şekilde iki durumdan söz edilir.

$$y(n+1) = ay(n) \tag{5.2.1}$$

(i) $a = 1$
ise;
$y(n+1) = 1.y(n)$
$y(n+1) = y(n)$
$y(n+1) - y(n) = 0$
$\Delta y(n) = 0$ dır.

denklemde ardışık herhangi iki terimin farkı 0 olup, çözüm $y(n) = y(0)$ olacak biçimde sabittir.

(ii) $a \neq 1$ durumundan bahsedeceğiz. (5.2.1) denkleminin her iki tarafı da a^{n+1} katsayısına bölündüğünde,

$$\frac{y(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{y(n)}{a^n}, \quad n \in N_0 \tag{5.2.2}$$

eşitliği elde edilir. Böylelikle,

$$\Delta\left(\frac{y(n)}{a^n}\right) = 0 \tag{5.2.3}$$

eşitliği bulunur. $\frac{y(n)}{a^n}$ oranının sabit olduğu sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (5.2.1) denkleminin genel çözümü

$y(n) = y(0)a^n$, $n \in N_0$ olarak bulunur.

5.3. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemi:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n)$$

denklemi birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denkleminin genel formudur. Burada sabit katsayılı durum incelendiği için yine $a(n) = a$ alınır. Dolayısıyla denklem; $g(n)$ fonksiyonunun sabit sayı ya da n ye bağlı bir fonksiyon olma seçeneğine göre iki ayrı durumda incelenecektir. $g(n)$'in sabit sayı olarak düşünüldüğü durumda $g(n) = g$ olarak alınacaktır.

(i)

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), \qquad y(0) = y_0 \tag{5.3.1}$$

(5.1.5) denkleminden faydalanılarak (5.3.1) denkleminin çözümü için aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right]y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right]g(r)$$

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) = a(0)a(1)a(2)\ldots a(n-1) = a^n, (a\ sabit) \tag{5.3.2}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right]g(r)$$
$$= \prod_{i=0+1}^{n-1} a(i)\, g(0) + \prod_{i=1+1}^{n-1} a(i)\, g(1) + \cdots + \prod_{i=n-1+1}^{n-1} a(i)\, g(n-1)$$

$= a^{n-1}g(0) + a^{n-2}g(1) + \cdots + a^0 g(n-1)$

$= \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r)$ (a sabit) (5.3.3)

çözümü

$y(n) = a^n y(0) + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r)$ (5.3.4)

şeklinde ifade edilir.

(ii) (5.3.1) denklemindeki $g(n)$ fonksiyonunun $g(n) = g$ olarak alınacağı durumdur.

$y(n+1) = ay(n) + g$ (5.3.5)

fark denklemi (5.3.4) denklemi aracılığıyla;

$$y(n) = \begin{cases} a \neq 1 \; ise, \; a^n y_0 + g\left(\frac{a^n - 1}{a-1}\right) \\ a = 1 \; ise, \; y_0 + gn \end{cases} \qquad (5.3.6)$$

şeklinde bir genel çözüme sahiptir.

5.4. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi:

$y(n+1) = a(n)y(n)$

denkleminin genel çözümü (5.1.4) denklemi düzenlenerek,

$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(0)$ (5.4.1)

elde edilir.

5.5. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemi:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n)$$

denkleminin genel çözümü (5.1.5) denklemi ile yukarıda verilmiştir. Bu genel çözüm aşağıda da hatırlatılmıştır.

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r)$$

5.6. Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri Örnekler:

5.6.1. Örnek: $n > 0$ için

$$y(n+1) = ny(n) + n!\,3^n, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

değişken katsayılı homojen olmayan fark denklemini çözmek için; (5.1.5) den,

$$y(n) = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1} i + \sum_{r=1}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right) r!\,3^r$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)! + \sum_{r=1}^{n-1}(n-1)!\,3^r$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} 3^r\right)$$

$$= (n-1)!\left(-1 + \frac{3^n}{2}\right)$$

dir.

5.6.2. Örnek: $y(n+1) = 4y(n) + 5^n, \qquad y(1) = 1$

sabit katsayılı homojen olmayan problemin çözümü (5.3.4) den,

$$y(n) = 4^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} 4^{n-r-1} 5^r$$

$$= 4^{n-1} + 4^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{5}{4}\right)^r$$

$$= 5^n - 4^n$$

dir.

5.6.3. Örnek: Bir hastaya bir ilaç 4 saatte bir uygulanıyor. $D(n), n.$ zaman aralığındaki kandaki ilaç miktarı olsun. Vücut her saatte ilacın p oran kadarını kandan yok etmekte ise, D_0 miktarı ölçüsünde uygulamaya başlanan ilaç için;

$D(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} D(n)$ i bulunuz.

Çözüm için önce bir denklem oluşturmak gerekmektedir. Verilen bilgilere göre;

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0 \qquad (5.6.1)$$

olan denklem sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemidir.
(5.3.6) denklemi kullanılarak, yukarıdaki denklemin çözümü;

$D(n) = \left[D_0 - \frac{D_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{D_0}{p}$ şeklindedir.
Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}.$$

$D_0 = 2\ cm^3,\ \ p = 0.25$ değerleri yerine yazılırsa, (5.6.1) denklemi şu hale gelir.

$$D(n+1) = 0{,}75D(n) + 2, \qquad D(0) = 2.$$

Çizelge (5.6.1) ile $0 \le n \le 10$ için $D(n)$ in durumu görülebilir.
$\lim_{n\to\infty} D(n) = 8$ ve $D^* = 8cm^3$ ilacın vücuttaki *denge* miktarıdır.

Çizelge 5.6.1. Kandaki ilaç miktarı $D(n)$ değerleri

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

Sıradaki örnek finans konusundan olacaktır.

5.6.4. Örnek (Aşınma, azalma): Aşınma bir borç ödenirken; bir kısmı ana paraya yönelik borcu azaltmaya yönelik, diğer kısmı da faiz ödemesi olmak üzere yapılan bir dizi dönemsel (periyodik) ödemeler süreci demektir. $p(n), n.$ ödeme olan $g(n)$ den sonra kalan borç miktarı olsun. Her ödeme periyodu boyunca faizin de r hızında (oranında) para miktarı ile birleştiğini düşünelim. Modeli yazarsak;

$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n)$,

veya

$$p(n+1) = (1+r)p(n) - g(n), \qquad p(0) = p_{0,} \qquad p_0 = ilk\ borç \tag{5.6.2}$$

(5.3.4) ile şu denklemi elde ederiz.

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k). \tag{5.6.3}$$

Uygulamada $g(n)$ ödemesi sabit ve T ye eşit deriz. Bu durumda,

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - ((1+r)^n - 1)\left(\frac{T}{r}\right). \tag{5.6.4}$$

Borcu n sayıda ödemede bitirmek istiyorsak, aylık ödeme T ne olabilir? Görüyoruz ki; $p(n) = 0$. (5.6.4)'ten şunu elde ederiz.

$$\mathrm{T} = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]$$

5.7. Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Kararlılıkları:

5.7.1. Tanım (Denge Noktası): Denge noktası kavramı herhangi bir fiziksel sistemin dinamikleri üzerine çalışmaların merkezindedir. Mühendislik, fizik, biyoloji ve ekonomideki birçok örnekte tüm çözümlerin denge noktasına yaklaşma eğiliminde olduğu görülür. Bu durum kararlılık teorisinin çalışma konusudur. Denge noktasının formal tanımı şöyledir. Fark denklemi;

$$y(n+1) = f(y(n)) \tag{5.7.1}$$

olmak üzere f fonksiyonunun tanım aralığındaki bir x^* noktası, eğer fonksiyonun sabit noktası ise, başka bir deyişle, $f(x^*) = x^*$ ise, x^* noktasına (5.7.1) denkleminin *denge noktası* (*equilibrium point*) denir.

x^* sabit noktasının fonksiyonda

$$y(0) = x^*$$
$$y(1) = f\big(y(1)\big) = x^*$$
$$y(2) = f\big(y(2)\big) = f(x^*) = x^*$$

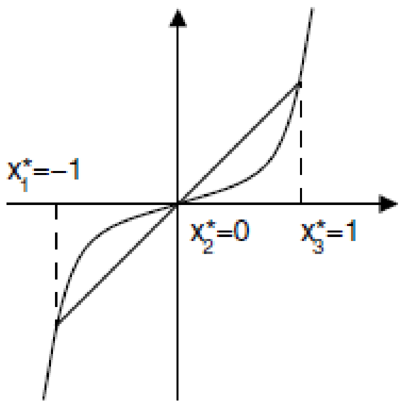
eşitliklerini sağladığı görülür.

Grafik üzerinde düşünüldüğünde denge noktası; f fonksiyonunun grafiği ile $y = x$ birinci açıortay doğrusunun kesiştiği x noktasının koordinatıdır (Elaydi, 2000).

Örneğin, $y(n+1) = y^3(n)$ denklemi üç adet denge noktasına sahiptir. Bu noktaları bulmak için,

$f(x) = x^3$
$f(x^*) = x^*$

$x = x^3$ eşitlikleri çözülür. Eşitlikleri sağlayan x değerleri $\{-1, 0, 1\}$ noktaları denklemin denge noktalarıdır. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

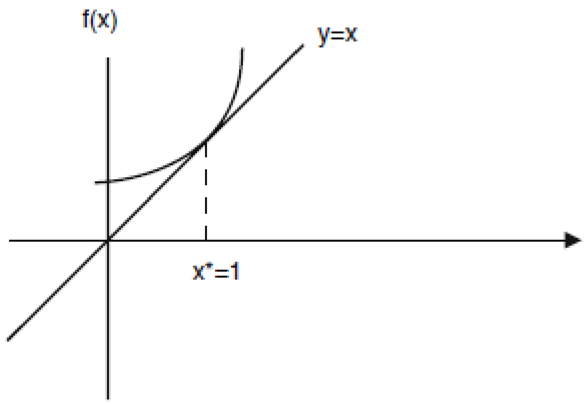


Şekil 5.7.1. $f(x) = x^3$ ün denge noktaları

Şekil 5.2 de ise bir diğer örneği görmekteyiz. Fark denklemi,

$y(n+1) = y^2(n) - y(n) + 1$ ve $f(x) = x^2 - x + 1$ olsun.

$x^2 - x + 1 = x$ eşitliği yazılıp çözülürse, sadece 1 noktasının denklemin denge noktası olduğu görülür.

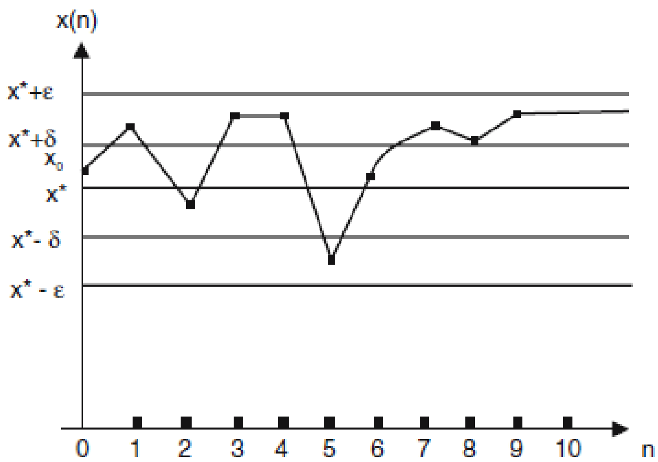


Şekil 5.7.2. $f(x) = x^2 - x + 1$ in denge noktaları

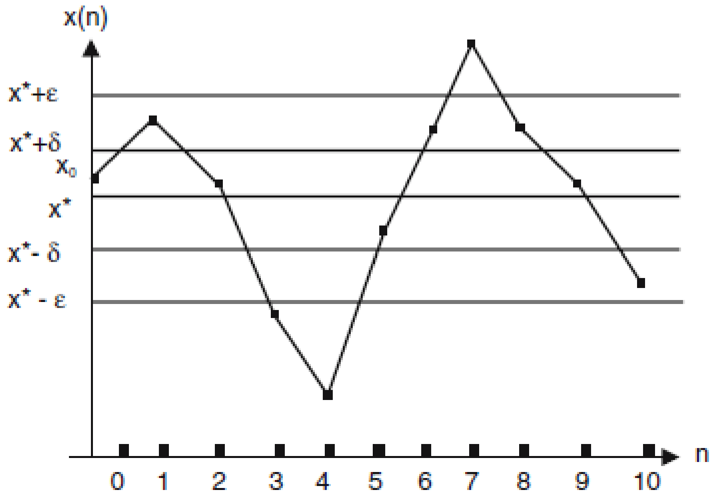
Fark denklemlerinde bir çözüm denge noktası olmayabilir ancak birkaç iterasyonla denge noktasına ulaşabilir. Diğer bir ifade ile dengede olmayan bir durum belirli bir süre sonunda denge durumuna gidebilir. Bu durum şöyle tanımlanır.

5.7.2. Tanım: x, f nin tanım bölgesinde bir nokta, $f^r(x) = x^*$ ve $f^{r-1}(x) \neq x^*$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Z}^+$ var ve (5.7.1) denkleminin x^* denge noktası varsa, x'e *nihai (son) denge noktası (eventually equilibrium (fixed) point)* denir (Elaydi, 2000).

5.7.3. Tanım: (a) Verilen $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n > 0$ için $|x_0 - x^*| < \delta$ iken $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $\exists \delta > 0$ varsa, (5.7.1) denkleminin denge noktası olan x^*ın kararlı (stable) olduğu söylenir. (Şekil 5.7.3) Kararlı olmayan x^* denge noktasına kararsızdır (unstable) denir. (Şekil 5.7.4)



Şekil 5.7.3. (Elaydi, 2000) x^* kararlı denge noktası

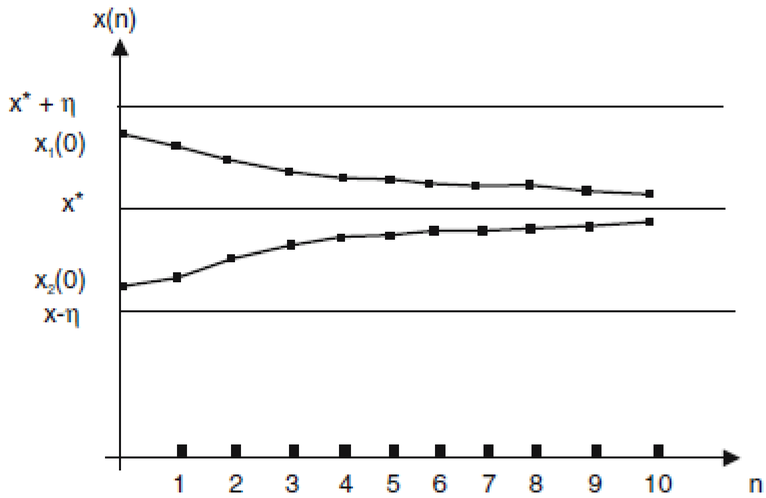


Şekil 5.7.4. (Elaydi, 2000) x^* kararsız denge noktası

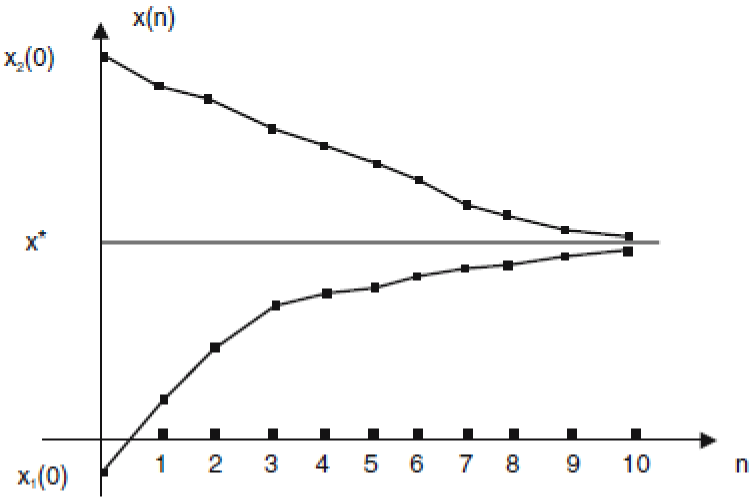
(b) $|x_0 - x^*| < \eta$ iken $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$ sağlayan bir $\eta > 0$ sayısı varsa, x^* noktasına çekici (attracting) denir.

Eğer $n = \infty$ ise x^* noktasına global çekici (global attractor veya globally attracting) denir.

(c) Eğer x^* noktası hem kararlı hem de çekici ise, o zaman noktaya asimtotik kararlı denge noktası (asymptotically stable equilibrium point) denir. (Şekil 5.7.5). Eğer $n = \infty$ ise, x^* noktasına global asimtotik kararlıdır (globally asymptotically stable) denir (Şekil 5.7.6) (Elaydi, 2000).



Şekil 5.7.5. (Elaydi, 2000) x^* denge noktası asimtotik kararlı



Şekil 5.7.6. (Elaydi, 2000) x^* denge noktası global asimtotik kararlı

5.7.4. Teorem: x^*, $y(n+1) = f(y(n))$ fark denkleminin denge noktası ve f, x^* noktasında sürekli türevlenebilir olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $|f'(x^*)| < 1$ ise, x^* asimtotik kararlıdır(asymptotically stable)

(ii) $|f'(x^*)| > 1$ ise, x^* kararsızdır(unstable) (Elaydi, 2000).

İspat: (i) $|f'(x^*)| < M < 1$ olduğu kabul edilsin. O zaman $\forall x \in J$ için $|f'(x^*)| < M < 1$ olacak şekilde x^* noktasını barındıran bir $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ aralığı vardır. Aksi durumda, oldukça büyük n ler için, her bir $I_n = \left(x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n}\right)$ açık aralığında, $|f'(x_n)| > M$ olacak şekilde bir $x_n \in I_n$ noktası vardır. $n \to \infty$ iken, $x_n \to x^*$ dır. f' sürekli bir fonksiyon olduğu için, $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(x^*)$ dır. Sonuç olarak,

$M \leq \left|\lim_{n\to\infty} f'(x_n)\right| = |f'(x^*)| < M$ olup, bu durum bir çelişkidir. Böylece durumumuz ispatlanmış olur. $x(0) \in J$ için,

$|x(1) - x^*| = \left|f\big(x(0)\big) - f(x^*)\right|$ dır. Ortalama Değer Teoreminden,

$$\left|f\big(x(0)\big) - f(x^*)\right| = |f'(\xi)||x(0) - x^*|$$

olacak biçimde $x(0)$ ve x^* arasında ξ vardır. Böylelikle,

$$\left|f\big(x(0)\big) - x^*\right| \leq M|x(0) - x^*|$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$|x(1) - x^*| \leq M|x(0) - x^*| \tag{5.7.2}$$

dır. $M < 1$ olduğu için, (5.7.2) denkleminden de görülür ki, $x(1)$ noktası $x(0)$ ile karşılaştırıldığında x^* denge noktasına daha yakındır. $x(1) \in J$ dir. Tümevarım yöntemiyle

$$|x(n) - x^*| \leq M^n|x(0) - x^*|$$

dır.

Bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ olsun. Böylece her $n > 0$ değeri için, $|x(0) - x^*| < \delta$ iken, $|x(n) - x^*| < \varepsilon$ eşitsizliğini gerektirir. Bu çıkarım kararlığı ifade eder. Ayrıca ilaveten, $\lim_{n\to\infty}|x(n) - x^*| = 0$, bu da $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$ demektir. Bu durumda x^* yani denge noktası asimtotik kararlıdır.

(ii) Bir önceki ispat adımlarına bakarak $|f'(x^*)| > S > 1$ olacak şekilde bir eşitsizliği ele alalım. O zaman $\forall x \in D$ için $|f'(x^*)| > S > 1$ olacak şekilde $D = (x^* - a, x^* + a)$ açık aralığı vardır. $x(0) \in D$ için, $|x(1) - x^*| = \left|f\big(x(0)\big) - f(x^*)\right|$ dır. Yine Ortalama Değer Teoreminden,

$$\left|f\big(x(0)\big) - x^*\right| \geq S|x(0) - x^*|$$

$$|x(1) - x^*| \geq S|x(0) - x^*|$$

ve aynı şekilde tümevarım yöntemi ile;

$|x(n) - x^*| \geq S^n|x(0) - x^*|$ dır.

Bu durum $S > 1$ olduğunda $|x(0) - x^*| < \delta$ iken, $|x(n) - x^*| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $\exists\delta > 0$ sayısı bulunamaz ve sonuç itibariyle x^* denge noktası kararsızdır denir. İspat tamamlanmış olur.

Bu arada, eğer $|f'(x^*)| \neq 1$ ise bu duruma dinamik sistemler literatüründe x^* denge noktası *hiperboliktir (hyperbolic)* denir (Elaydi, 2000).

5.7.5. Teorem: (5.7.1) fark denklemi için bir denge noktası x^*, $f'(x^*) = 1$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer $f''(x^*) \neq 0$ ise, x^* kararsız denge noktasıdır.
(ii) Eğer $f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) > 0$ ise x^* kararsız denge noktasıdır.
(iii) Eğer $f''(x^*) = 0$ ve $f'''(x^*) < 0$ ise x^* asimtotik kararlı denge noktasıdır (Elaydi, 2000).

5.7.6. Teorem: (5.7.1) fark denklemi için bir denge noktası x^*, $f'(x^*) = -1$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $Sf(x^*) < 0$ ise, x^* asimtotik kararlı denge noktasıdır.
(ii) $Sf(x^*) > 0$ ise, x^* kararsızdır (Elaydi, 2000).

Burada, $Sf(x)$ ifadesi bir f fonksiyonunun *Schwarzian türevidir.* Bu ifade;

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$$

biçiminde tanımlanır.

$f'(x^*) = -1$ olduğunda,
$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2$ eşitliği vardır (Elaydi, 2000).

5.7.7. Örnek: $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$ fark denklemini ele alıp, denge noktalarını bulunuz ve bu noktaların kararlılık durumlarını inceleyiniz.

Denge noktaları 0 ve -2 dir. $f'(x) = 2x + 3$ ve $f'(0) = 3 > 0$ olduğundan; Teorem 5.7.4 (ii) gereği 0 noktası kararsızdır.

$f'(2) = -1$ olduğu için Teorem 5.7.6' ya bakılır. Bu teorem gereği;

$Sf(2) = -f'''(-2) - \frac{3}{2}[f''(-2)]^2 = -12 < 0$ sonucu çıktığı için -2 denge noktası asimtotik kararlıdır.

6. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

6.1. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi:

a_1, a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0 \qquad (6.1.1)$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklem için $y(n) = \lambda^n$ dönüşümü yapılırsa,

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (6.1.2)$$

bulunur. Bu denkleme (6.1.1) fark denkleminin karakteristik denklemi denir. (6.1.2) denkleminin λ_1, λ_2 köklerine *karakteristik kökler* adı verilir. (6.1.1) homojen fark denkleminin genel çözümü λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır.

Durum 1. λ_1 *ve* λ_2 kökler reel ve farklı ise, bu durumda $\{{\lambda_1}^n, {\lambda_2}^n\}$ cümlesi (6.1.1) denkleminin bir temel çözümler cümlesidir. Buradan (6.1.1) in genel çözümü,

$$y(n) = c_1{\lambda_1}^n + c_2{\lambda_2}^n \qquad (6.1.3)$$

şeklindedir; burada c_1 *ve* c_2 keyfi sabitlerdir.

6.1.1. Örnek: $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$ sabit katsayılı homojen denklemin çözümünü bulalım.

Fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ kökler $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ şeklinde bulunur.

Buradan,

$y(n) = c_1 + c_2 2^n$ dir.

6.1.2. Örnek: $y(n+2) - 4y(n+1) + 3y(n) = 0$ denklemini $y(0) = 0$, $y(4) = 10$ başlangıç şartları altında çözelim.

Fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ kökler $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ şeklinde bulunur.

Buradan genel çözüm

$y(n) = c_1 1^n + c_2 3^n$ biçiminde olur. Sınır şartları yardımıyla $c_1 = \frac{-1}{8}$, $c_2 = \frac{1}{8}$ bulunur ve

$y_{ö}(n) = \frac{1}{8}(3^n - 1)$ özel çözümüne ulaşılır.

Durum 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun. Bu durumda (6.1.1) denkleminin bir temel çözümler cümlesi $\{\lambda^n, n\lambda^n\}$ olup genel çözüm,

$$y(n) = (c_1 + c_2 n)\,\lambda^n \tag{6.1.4}$$

dir.

6.1.3. Örnek: $y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0$ denkleminin karakteristik denklemi

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ kökler $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ şeklinde bulunur.

$y(n) = c_1 + c_2 n$ dir.

Durum 3. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun; burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ dır. Bu durumda (6.1.1)' in bir temel çözümler cümlesi $\{r^n \cos n\theta\,,\ r^n \sin n\theta\}$ dır; burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

şeklindedir. Buradan (6.1.1)'in genel çözümü,

$$y(n) = r^n(c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta) \tag{6.1.5}$$

veya

$$y(n) = Ar^n \cos(n\,\theta - B)$$

olup, burada $c_1, c_2, A\ ve\ B$ keyfi sabitlerdir.

6.1.4. Örnek: $y(n+1)-2y(n)+2y(n-1)=0$

fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$\lambda^2-2\lambda+2=0,$ kökler $\lambda_1=1+i,\quad \lambda_2=1-i$ şeklinde bulunur.

Buradan,

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)\Rightarrow\theta=45^o$

$y(n)=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(c_1\cos n\frac{\pi}{4}+c_2\sin n\frac{\pi}{4}\right)$ şeklindedir.

6.1.5. Örnek: $y(n+2)+4y(n)=0$ fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$\lambda^2+4=0$, kökler, $\lambda_1=2i$, $\lambda_1=-2i$ şeklinde bulunur.

Buradan,

$r=\sqrt{2^2}=2\qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

$y(n)=2^n\left(c_1\cos n\frac{\pi}{2}+c_2\sin n\frac{\pi}{2}\right)$ dir.

6.1.6. Tanım: $y(n+2)-y(n+1)-y(n)=0,\qquad y(0)=1,\quad y(1)=1$ *başlangıç değer probleminin* (ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen)

$$F(n)=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

çözümüne (dizisine) Fibonacci dizisi ve bu dizinin $1, 1,\ 2, 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, 89, 144, 233, \ldots$ elemanlarına Fibonacci sayıları denir.

6.1.7. Tanım: $y(n+2)-y(n+1)-y(n)=0,\qquad y(0)=2,\quad y(1)=1$ *başlangıç değer probleminin* (ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen)

$$L(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

çözümüne (dizisine) Lucas dizisi ve bu dizinin $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \dots$ elemanlarına Lucas sayıları denir (Soykan vd., 2017).

6.2. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemi:

a_1, a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen

$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0$ fark denkleminden daha önce bahsetmiştik.

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = g(n) \qquad (6.2.1)$$

şeklindeki denklem ikinci mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemidir. $g(n)$; n nin bir fonksiyonudur. İkinci mertebeden homojen olmayan fark denkleminin genel çözümü;

$$y(n) = (\textit{homojen kısmın genel } \text{çözümü}) + (\textit{tüm denklemin bir } \text{özel çözümü})$$

şeklindedir (Mickens, 1990).

Denklemin özel çözümü, $g(n)$ fonksiyonunun durumuna göre denklem modeli koyarak bir eşitlik oluşturulur. Bu eşitlikten özel çözüme ulaşılır. $g(n)$ nın durumuna göre seçilebilecek bazı fonksiyonlar (denklemler) Çizelge (6.2.1) de verilmiştir.

Çizelge 6.2.1.* Özel çözüm modelleri

$g(n)$	Özel çözüm modeli
Sabit fonksiyon ise	a
n	$a + bn$
n^2	$a + bn + cn^2$
k^n	ak^n (veya bazı özel durumlarda ank^n alınır)

* Difference Equations 2, (http://www.cimt.plymouth.ac.uk/ Chapter 15)

6.2.1. Örnek: $2y(n) - 7y(n-1) + 6y(n-2) = 3$ denklemini çözmek için, önce verilen denklemin,

$2y(n) - 7y(n-1) + 6y(n-2) = 0$ homojen denklemi çözülür. Karakteristik denklem ve kökler,

$$2\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = \frac{7 + \sqrt{49-48}}{4} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{7 - \sqrt{49-48}}{4} = \frac{3}{2}$$

dır. Bulunan kökler yardımıyla homojen kısmın çözümü;

$$y(n) = A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

şeklindedir. Denklemin sağ tarafında $g(n) = 3$ sabit fonksiyonu olduğundan çizelgedeki birinci durum söz konusudur. Yani çözüm olarak, $y(n) = a$ kabul edilerek,

$$y(n) = a, \qquad y(n-1) = a, \qquad y(n-2) = a$$

$$2a - 7a + 6a = 3$$
$$a = 3$$
$$y(n) = 3$$

özel çözümü bulunur. Böylece genel çözüm; homojen denklemin genel çözümüyle, homojen olmayan denklemin özel çözümünün toplamından,

$$y(n) = A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$$

şeklinde bulunur.

6.2.2. Örnek: $2y(n) - 7y(n-1) + 6y(n-2) = n$ denklemi çözülmek istensin. Homojen kısmın çözümü,

$y(n) = A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n$ dır.

Denklemin sağ tarafı $g(n) = n$ olduğundan çizelgedeki ikinci durum söz konusudur. Yani çözüm olarak $y(n) = a + bn$ kabul edilerek,

$$
\begin{aligned}
&y(n) = a + bn \\
&y(n-1) = a + b(n-1) \\
&y(n-2) = a + b(n-2). \\
&2(a+bn) - 7\big(a + b(n-1)\big) + 6\big(a + b(n-2)\big) = n \\
&2a + 2bn - 7a - 7bn + 7b + 6a + 6bn - 12b = n \\
&a - 5b + bn = n \\
&bn = n \Rightarrow b = 1 \\
&a - 5b = 0 \Rightarrow a = 5
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan, özel çözüm;

$$y(n) = 5 + n$$

olur. Böylece genel çözüm;

$y(n) = A(2)^n + \ B\left(\frac{3}{2}\right)^n + (5+n)$ olarak elde edilir.

6.2.3. Örnek: $2y(n) - 7y(n-1) + 6y(n-2) = 3^n$ denklemini çözmek için, önce homojen kısmın çözümü;

$$y(n) = \ A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

bulunur. Denklemin sağ tarafı $g(n) = 3^n$ olduğundan çizelgedeki dördüncü durum söz konusudur. Yani, çözüm olarak $y(n) = a3^n$ kabul edilerek,

$$
\begin{aligned}
&y(n) = a3^n \\
&y(n-1) = a3^{(n-1)} \\
&y(n-2) = a3^{(n-2)} \\
&2a3^n - 7a3^{(n-1)} + 6\,a3^{(n-2)} = 3^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3^{(n-2)}(18a - 21a + 6a) = 3^n \\
&18a - 21a + 6a = 9 \\
&3a = 9 \\
&a = 3
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan özel çözüm;

$$y(n) = 3(3^n) = 3^{n+1}$$

olur.

Böylece genel çözüm;

$y(n) = A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3^{n+1}$ olarak elde edilir.

6.2.4. Örnek: $2y(n) - 7y(n-1) + 6y(n-2) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ denkleminin genel çözümünü bulabilmek için önce;

homojen kısmın çözümü;

$y(n) = A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n$ şeklinde elde edilir. Denklemin sağ tarafı $g(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ dir. Fakat özel çözüm için $y(n) = a\left(\frac{3}{2}\right)^n$ alınırsa, a nın değeri bulunamaz. Çünkü $B\left(\frac{3}{2}\right)^n$ homojen kısmın da bir çözümüdür. Bu durumda çizelgedeki dördüncü durumun özel hali uygulanır. Yani; çözüm olarak $y(n) = an\left(\frac{3}{2}\right)^n$ kabul edilerek,

$$y(n) = an\left(\frac{3}{2}\right)^n$$
$$y(n-1) = a(n-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$
$$y(n-2) = a(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$2an\left(\frac{3}{2}\right)^n - 7a(n-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} + 6\,a(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{(n-2)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{(n-2)}\left(2an\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7a(n-1)\left(\frac{3}{2}\right) + 6\,a(n-2)\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$
$$2an\frac{9}{4} - 7a(n-1)\frac{3}{2} + 6\,a(n-2) = \frac{9}{4}$$
$$\frac{9}{2}\,an - \frac{21}{2}an + \frac{21}{2}a + 6an - 12a = \frac{9}{4}$$
$$-\frac{3}{2}a = \frac{9}{4}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

bulunur. Böylece özel çözüm,

$y(n) = n\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n$ dır. Buradan genel çözüm;

$$y(n) = A(2)^n + B\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3n}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

olarak elde edilir.

6.3. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi:

Bu kesimde $a_0(n), a_1(n), a_2(n)$ katsayıları $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $n \geq n_0$ üzerinde $a_0(n) \neq 0,\ a_2(n) \neq 0$ olmak üzere ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen

$$a_0(n)y(n+2) + a_1(n)y(n+1) + a_2(n)y(n) = 0, \qquad n \geq n_0, \tag{6.3.1}$$

fark denkleminin genel çözümü hesaplanmaktadır. Bunun için iki yöntemden söz edilecektir. Operatörün çarpanlara ayrılması ve bir çözümün bilinmesi durumu (Kelley ve Peterson, 2001).

6.3.1. Operatörün Çarpanlara Ayrılması

(6.3.1) denklemi E öteleme operatörü yardımıyla

$a_0(n)E^2y(n) + a_1(n)Ey(n) + a_2(n)y(n) = 0$

$y(n)[a_0(n)E^2 + a_1(n)E + a_2(n)] = 0$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$a_0(n)E^2 + a_1(n)E + a_2(n)$

operatörü E ye göre çarpanlarına ayrılabilirse, o zaman verilen denklemin genel çözümü iki tane birinci mertebeden denklemin çözümlerine indirgenerek, hemen bulunabilir (Soykan vd., 2017).
Bunu bir örnek ile açıklayalım.

6.3.1.1. Örnek: İkinci basamaktan değişken katsayılı

$$y(n+2) - (n+1)y(n+1) - (n+1)y(n) = 0 \tag{6.3.1.1}$$

fark denklemi verilsin. Bu denklem öteleme operatörü cinsinden

$$\big(E^2 - (n+1)E - (n+1)\big)y(n) = 0 \tag{6.3.1.2}$$

biçiminde olup

$$(E+1)\big(E - (n+1)\big)y(n) = 0 \tag{6.3.1.3}$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Şimdi

$$\big(E-(n+1)\big)y(n)=z(n) \tag{6.3.1.4}$$

olsun. Buradan (6.3.1.3)

$$(E+1)\,z(n)=0$$

denklemine indirgenir. Bu ise

$$z(n)=(-1)^n c_1 \tag{6.3.1.5}$$

genel çözümüne sahiptir, burada c_1 keyfi sabittir. (6.3.1.5), (6.3.1.4) de yerine konursa,

$$\big(E-(n+1)\big)y(n)=(-1)^n c_1$$

veya

$$y(n+1)=(n+1)y(n)+(-1)^n c_1 \tag{6.3.1.6}$$

elde edilir. (6.3.1.6) denklemi birinci mertebeden homojen olmayan bir denklem olup genel çözümü

$$y(n)=\big(\prod_{i=n_0}^{n-1}(i+1)\big)c_2+\sum_{r=n_0}^{n-1}\big(\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\big)\,(-1)^r c_1$$
$$=c_2 n!+\ \sum_{r=n_0}^{n-1} n(n-1)\ldots(r+2)(-1)^r c_1$$
$$=c_2 n!+c_1\sum_{r=n_0}^{n-1}\frac{(-1)^r n!}{(r+1)!} \tag{6.3.1.7}$$

dir. Böylece verilen (6.3.1.1) denkleminin genel çözümü (6.3.1.7) biçiminde hesaplanmış olur.

6.3.2. Mertebeyi İndirgeme (Düşürme) Yöntemi

(6.3.1) homojen denkleminin aşikar olmayan bir çözümü bilindiği takdirde bununla bağımsız olabilecek ikinci bir çözüm bulunabilir. Bu yöntem bazı kaynaklarda bir çözümün bilinmesi yöntemi olarak da geçer.

6.3.2.1. Teorem: $y_1(n)$ *ve* $y_2(n)$, (6.3.1) fark denkleminin iki çözümü ve $W(n)$ onların *Casoratyanı* olsun. Bu durumda

$$W(n+1) = \left(\frac{a_2(n)}{a_0(n)}\right) W(n) \qquad (6.3.2.1)$$

dir.

$y_1(n)$, (6.3.1) in aşikar olmayan bir çözümü ve $y_2(n)$ de aynı denklemin diğer bir çözümü olsun. Açık bir durum olarak

$$\Delta \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{y_1(n)\Delta y_2(n) - y_2(n)\Delta y_1(n)}{y_1(n)y_1(n+1)}$$

$$= \frac{W(n)}{y_1(n)y_1(n+1)}$$

dir. Her iki yana Δ^{-1} uygulanırsa,

$$y_2(n) = y_1(n)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{W(r)}{y_1(r)y_1(r+1)} \qquad (6.3.2.2)$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir (Bereketoğlu, 2012).

6.3.2.2. Teorem: $y_1(n)$, (6.3.1) denkleminin asla sıfır olmayan bir çözümü olsun. $a_0(n)$ ve $a_2(n)$ katsayıları $n \geq n_0$ üzerinde sıfırdan farklı iseler, o zaman (6.3.2.2) ifadesi (6.3.1) denkleminin diğer bağımsız çözümünü gösterir; burada $W(r)$, (6.3.2.1) in aşikar olmayan bir çözümüdür.

Bu teorem ikinci mertebeden (6.3.1) denklemi için basamağın indirgenmesi olarak da bilinir (Kutay, 2010).

6.3.2.3. Örnek:

$$y(n+2) - y(n+1) - \frac{1}{n+1} y(n) = 0$$

denklemi verilsin.

Bu denklemin bir çözümü $y_1(n) = n + 1$ dir. (6.3.2.1) Teorem den,

$$W(n+1) = -\frac{1}{n+1} W(n)$$

Bu ise

$$W(n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. (6.3.2.2) dan,

$$y_2(n) = (n+1)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)r!}$$

$$= (n+1)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{(r+2)!}$$

elde edilir. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$y(n) = c_1(n+1) + c_2(n+1)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{(r+2)!}$$

dir; burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

6.4. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemi:

Bu kısımda parametrelerin değişimi yöntemi adı verilen yöntemi vereceğiz. Bu yöntem değişken katsayılı (özel olarak da sabit katsayılı) k. mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemlerinin bir özel çözümünü bulmak için kullanılan bir yöntemdir. Burada $g(n)$ fonksiyonu keyfi bir fonksiyondur ve bu nedenle, bir özel çözüm bulmak için, bu yönteme en genel yöntemdir denilebilir.

Biz bu bölümde parametrelerin değişimi yöntemini ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı homojen olmayan fark denklemi için vereceğiz.

$a_1(n), a_2(n)$ fonksiyonları $n \in \mathbb{N}_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun ve $\mathbb{N}_0$ üzerinde $a_2(n) \neq 0$ olsun. Katsayıları $a_1(n), a_2(n)$ olan ve

$$y(n+2) + a_1(n)y(n+1) + a_2(n)y(n) = g(n), \qquad n \geq 0 \qquad (6.4.1)$$

ile verilen değişken katsayılı homojen olmayan lineer fark denkleminin bir özel çözümü araştırılacaktır. (6.4.1)'e karşılık gelen lineer homojen fark denklemi

$$y(n+2) + a_1(n)y(n+1) + a_2(n)y(n) = 0, \qquad n \geq 0 \qquad (6.4.2)$$

dır (Soykan vd., 2017).

6.4.1. Teorem (Parametrelerin Değişimi Metodu): (6.4.2) homojen denkleminin genel çözümü

$$y_h(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.4.3}$$

şeklinde bulunur; burada $y_1(n)$ ve $y_2(n)$, (6.4.2)' nin lineer bağımsız çözümleri; c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Bu durumda (6.4.1)'in bir özel çözümü

$$y_{ö}(n) = u_1(n) y_1(n) + u_2(n) y_2(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \text{ ile verilir.} \tag{6.4.4}$$

Burada;

$$u_1(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) y_2(k+1)}{W(k+1)} \tag{6.4.5}$$

$$u_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) y_1(k+1)}{W(k+1)} \tag{6.4.6}$$

dir ve $W(n)$, y_1 ve y_2 nin *Casoratyanıdır* (Soykan vd., 2017).

6.4.2. Örnek: $y(n+2) - y(n+1) - \frac{1}{n+3} y(n) = \frac{1}{n+4}$ denkleminin bir özel çözümünü parametrelerin değişimi yöntemi ile bulunuz ve denklemin genel çözümünü bulunuz.

Teorem (6.4.1)' i kullanacağız. Verilen denkleme karşılık gelen homojen denklem

$$y(n+2) - y(n+1) - \frac{1}{n+3} y(n) = 0 \tag{6.4.7}$$

dir. Örnek (6.3.2.3) den bu homojen lineer fark denkleminin (6.4.7), lineer bağımsız iki çözümünün

$$y_1(n) = n + 3$$

$$y_2(n) = n + 3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(i+4)!}$$

ve genel çözümün; c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(n) = c_1(n+3) + c_2(n+3) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(i+4)!}$$

olduğunu biliyoruz. Teorem (6.4.1) de verilen (6.4.5) ve (6.4.6) formüllerini kullanarak özel çözümü bulabiliriz.

$$W(n+1)=\begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n+4 & (n+4)\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(i+4)!} \\ n+5 & (n+5)\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{(i+4)!} \end{vmatrix}$$

$$=(n+4)\,(n+5)\left(\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{(i+4)!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(i+4)!}\right)$$

$$=(n+4)\,(n+5)\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+5)!}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)!}$$

olduğundan

$$u_1(n)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)y_2(k+1)}{W(k+1)}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+4)}\frac{(k+3)!}{(-1)^{k+1}}\left((k+4)\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(i+4)!}\right)$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)!}{(-1)^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(i+4)!}\right)$$

ve

$$u_2(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)y_1(k+1)}{W(k+1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+4)}\frac{(k+3)!}{(-1)^{k+1}}(k+4)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)!}{(-1)^{k+1}}$$

bulunur ve buradan özel çözüm

$$y_{ö}(n)=u_1(n)y_1(n)+u_2(n)y_2(n)$$

$$=\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)!}{(-1)^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(i+4)!}\right)\right)(n+3)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+3)!}{(-1)^{k+1}}\right)(n+3)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+4)!}$$

elde edilir. Sonuç olarak verilen denklemin genel çözümü

$$y(n)=y_h(n)+y_{ö}(n)$$

dir.

6.4.3. Örnek: $y(n+2) - ny(n+1) - (n+1)y(n) = n$ denkleminin bir özel çözümünü parametrelerin değişimi yöntemi ile bulunuz ve denklemin genel çözümünü bulunuz.

Teorem (6.4.1)' i kullanacağız. Verilen denkleme karşılık gelen homojen denklem

$$y(n+2) - ny(n+1) - (n+1)y(n) = 0 \tag{6.4.8}$$

dir. Teorem (6.3.2.1) den bu homojen lineer fark denkleminin (6.4.8), lineer bağımsız iki çözümünün; (Homojen kısım için $y_1(n) = (-1)^n$ olduğu veriliyor.)

$$y_1(n) = (-1)^n$$

$$y_2(n) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{(-1)^{i+1}}$$

ve genel çözümün; $c_{1,} c_2$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(n) = c_1(-1)^n + c_2(-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{(-1)^{i+1}}$$

olduğunu biliyoruz. Teorem (6.4.1) de verilen (6.4.5) ve (6.4.6) formüllerini kullanarak özel çözümü bulabiliriz.

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(-1)^{i+1}} \\ (-1)^{n+2} & (-1)^{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i!}{(-1)^{i+1}} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n+2} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{i!}{(-1)^{i+1}} - \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(-1)^{i+1}} \right)$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n+2} \left(\frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} \right)$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)!$$

olduğundan

$$u_1(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k) y_2(k+1)}{W(k+1)}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(-1)^{k+1}(k+1)!}\left((-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k} \frac{i!}{(-1)^{i+1}}\right)$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{i!}{(-1)^{i+1}}\right)$$
ve
$$u_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)y_1(k+1)}{W(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(-1)^{k+1}(k+1)!}(-1)^k = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(-1)^1(k+1)!}$$

bulunur ve buradan

$$y_ö(n) = u_1(n)y_1(n) + u_2(n)y_2(n)$$
$$= \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{i!}{(-1)^{i+1}}\right)\right)(-1)^n$$
$$+ \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(-1)^1(k+1)!}\right)(-1)^n \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i!}{(-1)^{i+1}}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak verilen denklemin genel çözümü

$$y(n) = y_h(n) + y_ö(n)$$

dir.

7. k. MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Birinci mertebeden olan durumdakinden farklı olarak k. mertebeden lineer fark denklemlerinin çözümlerini veren genel bir formül yoktur. Genel bir formül elde etmek için başka koşulları da eklemek zorundayız.

k. mertebeden lineer fark denkleminin en genel formu

$$y(n+k)+\ a_1(n)y(n+k-1)+\cdots+a_k(n)y(n)=g(n), n\in\mathbb{N}_0 \qquad (7.1)$$

dir. Burada $a_1(n), a_2(n)$, ... ve $g(n)$ birer dizi belirtir.

Eğer her n için $g(n)=0$ ise denklem homojendir; yani (7.1)' e karşılık gelen homojen denklem

$$y(n+k)+\ a_1(n)y(n+k-1)+\cdots+a_k(n)y(n)=0, n\in\mathbb{N}_0 \qquad (7.2)$$

dir (Soykan vd., 2017).

7.1. k. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi:

Bu durumda $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_k(n)$ fonksiyonları sabittir ve bunları $a_1(n)=a_1$ ve $a_2(n)=a_2$,..., $a_k(n)=a_k$ ile gösterelim. Burada her bir $1\le i\le n$ için a_i nin reel olduğunu ve ayrıca $a_k\neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde (7.2) homojen denklemi

$$y(n+k)+\ a_1y(n+k-1)+\cdots+a_ky(n)=0, n\in\mathbb{N}_0 \qquad (7.1.1)$$

formundadır.

(7.1.1) denklemini çözmek için ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homojen fark denklemlerinde olduğu gibi $\lambda\neq 0$ ve λ reel ya da kompleks olmak üzere, $y(n)=\lambda^n$ formundaki çözümler aranır. (7.1.1) denkleminde $y(n)=\lambda^n$

($\lambda\neq 0$) yazarsak;

$$\lambda^{n+k}+a_1\lambda^{n+k-1}+\cdots+a_k\lambda^n=0 \qquad (7.1.2)$$

ve buradan

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{7.1.3}$$

bulunur. (7.1.3) denklemine (7.1.1) denkleminin karakteristik denklemi denir. (7.1.3) denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ köklerine karakteristik kökler denir (Soykan vd., 2017).

7.1.1. Teorem: Sabit reel katsayılı, k. mertebeden homojen (7.1.1) fark denklemi daima k tane reel lineer bağımsız $y_1, y_2, \ldots, y_k$ çözümüne sahiptir. Bu çözümler (7.1.3) karakteristik denkleminden elde edilir. Açık olarak ifade edilirse;

Durum 1: Eğer (7.1.3) karakteristik denkleminin k tane $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökü reel ve birbirinden farklı iseler $\{\lambda_1{}^n, \lambda_2{}^n, \ldots, \lambda_k{}^n\}$ kümesi (7.1.1) denkleminin bir temel kümesidir. (7.1.1)' in genel çözümü, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ keyfi sabitler olmak üzere,

$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i\lambda_i{}^n = c_1\lambda_1{}^n + c_2\lambda_2{}^n + \cdots + c_k\lambda_k{}^n$ formundadır.

Burada $y_1(n) = \lambda_1{}^n$, $y_2(n) = \lambda_2{}^n$,..., $y_k(n) = \lambda_k{}^n$ şeklinde denklemin kökleridir.

Durum 2: (7.1.3) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ köklerinin hepsi reel ve sırası ile $m_1, m_2, \ldots, m_r$ katlı olsunlar. Burada $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$ dır. Bu durumda (7.1.1) denklemi E operatörü cinsinden

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \ldots (E - \lambda_r)^{m_r} y(n) = 0 \tag{7.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir $i \in [1, r]$ için $(E - \lambda_i)^{m_i} y(n) = 0$ denkleminin bir temel cümlesi

$$\Psi_i = \{\lambda_i{}^n, n\lambda_i{}^n, \ldots, n^{m_i - 1}\lambda_i{}^n\}$$

dir. Dolayısıyla (7.1.4) ün bir temel cümlesi $\Psi = \bigcup_{i=1}^{r} \Psi_i$ olup genel çözüm

$$y(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i{}^n \left(c_{i0} + c_{i1}n + c_{i2}n^2 + \cdots + c_{im_{i-1}} n^{m_i - 1}\right) \tag{7.1.5}$$

dir (Bereketoğlu, 2012).

Durum 3: (7.1.3) karakteristik denkleminin bir $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleks kökü q_1 katlı olsun. $(2q_1 \leq k)$. Bu durumda (7.1.1) in $2q_1$ tane gerçek değerli lineer bağımsız çözümleri

$$r^n \cos n\theta\, , r^n \sin n\theta, nr^n \cos n\theta\, , nr^n \sin n\theta\, ; \ldots ; n^{q_1 - 1} r^n \cos n\theta,\ n^{q_1 - 1} r^n \sin n\theta$$

şeklindedir.

7.1.2.Örnek: $y(n+3) - 9y(n+2) + 26y(n+1) - 24y(n) = 0$ lineer homojen fark denklemini çözelim. (3. mertebeden)

Verilen denklemin karakteristik denklemi

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$ dir ve karakteristik kökler $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \ \lambda_3 = 4$ tür. Buna göre denklemin genel çözümü, c_1, c_2, ve c_3 keyfi sabitler olmak üzere;

$y(n) = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 4^n$ dir.

7.1.3.Örnek: $y(n+4) + 4y(n+3) + 6y(n+2) + 4y(n+1) + y(n) = 0$ fark denklemini çözelim.

Verilen denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)^4 = 0$$

dır ve karakteristik kökü $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ dir ve katlılığı 4 tür. Buna göre denklemin genel çözümü, $c_1, c_2, c_3\ ve\ c_4$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(n) = (c_1 +\ c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3)(-1)^n$$

dir.

7.1.4.Örnek: $(E^4 - 16)y(n) = 0$ denklemini çözelim.

Bu denklem $y(n+4) - 16y(n) = 0$ şeklinde 4. mertebeden bir denklemdir. Karşılık gelen karakteristik denklem

$\lambda^4 - 16 = 0$

şeklinde olup, karakteristik kökler $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$ dir. Böylece genel çözüm

$y(n) = c_1(-2)^n + c_2 2^n + 2^n\left(c_3 \cos\frac{n\pi}{2} + c_4 \sin\frac{n\pi}{2}\right)$ dir; burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 keyfi sabitlerdir.

7.1.5.Örnek: $(E+2)^4(E^2+6E+25)y(n) = 0$ denklemini çözelim.

Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$(\lambda+2)^4(\lambda^2+6\lambda+25) = 0$ olup karakteristik kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -2$ ve $\lambda_{5,6} = -3 \pm 4i$ dir.

Böylece genel çözüm

$y(n) = (-2)^n(c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3) + 5^n(c_5 \cos n\theta + c_6 \sin n\theta)$ dır; burada $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ keyfi sabitler ve $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

7.2. k. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemi:

Tezimizin bu kısmında k. mertebeden sabit katsayılı lineer, homojen olmayan

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \cdots + a_k y(n) = g(n), n \in \mathbb{N}_0 \qquad (7.2.1)$$

denklemini göz önüne alıyoruz. Burada $a_1, a_2, \ldots, a_k$ katsayıları reel sabitler ve $a_k \neq 0$ dır. Bu denklemin bir özel çözümü belirsiz katsayılar yöntemi ve operatör yöntemi ile verilecektir.

7.2.1. Belirsiz Katsayılar Yöntemi:

Belirsiz katsayılar yönteminde 4 adım vardır:

1.) (7.2.1) denklemine karşılık gelen homojen denklemin

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \cdots + a_k y(n) = 0 \qquad (7.2.1.1)$$

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k$ genel çözümü bulunur. Burada; $y_1, y_2, \dots, y_k$ (7.2.1.1)' in lineer bağımsız çözümleridir.

2.) $y_1, y_2, \dots, y_k$ ve g fonksiyonlarının lineer bağımsızlığı araştırılır. (Bu, bunların *Casoratyanı* hesaplanarak yapılabilir ya da bazen direkt olarak gösterilebilir.) Eğer bunlar lineer bağımlı ise bu yöntem uygulanmaz.

3.) (7.2.1) denkleminin sağ tarafının tablo içinde sol sütunda verilen fonksiyonların bir lineer kombinasyonu olup olmadığı araştırılır. Eğer değil ise bu yöntem uygulanamaz. Eğer bir lineer kombinasyonu ise o zaman $g(n)$ fonksiyonu için özel çözüm olabilecek aday $y_ö(n)$ çözümleri tablonun ikinci sütununda verilen formda oluşturulur.

4.) Oluşturulan aday özel çözüm $y_ö(n)$, (7.2.1.1) homojen denkleminde yerine konur ve katsayılar belirlenir.

$y_1, y_2, \dots, y_k$ ve g fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğu ve g nin tablo içinde sol sütunda verilen fonksiyonların bir lineer kombinasyonu olduğu durumda (kısaca belirtirsek benzerlikler varsa) tablonun ikinci sütununda verilen fonksiyonlardan oluşturulan özel çözüm n nin en küçük kuvvetleri ile çarpılır (Soykan vd., 2017).

Çizelge 7.2.1.1. (Bereketoğlu, 2012) Belirsiz katsayılar

Belirsiz Katsayılar Yöntemi	
$g(n)$	$y_ö(n)$
a^n	Aa^n
n^k	$A_0 + A_1n + \cdots + A_kn^k$
n^ka^n	$(A_0 + A_1n + \cdots + A_kn^k)a^n$
$\sin bn$ *veya* $\cos bn$	$A \sin bn + B \cos bn$
$a^n \sin bn$ *veya* $a^n \cos bn$	$(A \sin bn + B \cos bn)a^n$
$n^ka^n \sin bn$ *veya* $n^ka^n \cos bn$	$(A_0 + A_1n + \cdots + A_kn^k)a^n \sin bn + (B_0 + B_1n + \cdots + B_kn^k)a^n \cos bn$

7.2.2. $L(E)$ Operator Yöntemi:

(7.2.1) denklemi E operatörü cinsinden

$$L(E)y(n) = g(n) \tag{7.2.2.1}$$

şeklinde yazılabilir; burada $L(E)$ operatörü

$$L(E) = E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_k \tag{7.2.2.2}$$

dir. Buradan (7.2.2.1) veya (7.2.1)' in bir özel çözümü

$$y_{ö}(n) = L^{-1}(E)g(n) \tag{7.2.2.3}$$

dir.

Belli $g(n)$ durumları için (7.2.2.3)'ün hesabı; yani, $L^{-1}(E)$ nin fonksiyonlara uygulanış biçimi aşağıdaki teoremlerde verilecektir (Bereketoğlu, 2012).

7.2.2.1. Teorem: $L(a) \neq 0$ ise,

$$\frac{1}{L(E)}a^n = \frac{a^n}{L(a)} \tag{7.2.2.4}$$

Dır (Bereketoğlu, 2012).

7.2.2.2. Teorem: $F(n), n$ ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$L(E)a^nF(n) = a^nL(aE)F(n)$$

ve

$$\frac{1}{L(E)}a^nF(n) = a^n\frac{1}{L(aE)}F(n) \tag{7.2.2.5}$$

Dir (Bereketoğlu, 2012).

7.2.2.3. Teorem: $L(a) = 0$ ve

$$L(E) = (E-a)^m h(E), \qquad h(a) \neq 0,$$

olsun. Bu durumda

$$L^{-1}(E)a^n = \frac{a^{n-m}n^m}{h(a)m!} \tag{7.2.2.6}$$

dır.

7.2.2.4 Örnek: $y(n+2)-4y(n+1)+3y(n)= (-4n+8n^2)5^n$ denklemini çözelim.

$y(n+2)-4y(n+1)+3y(n)=0$

denkleminin karakteristik denklemi,

$\lambda^2-4\lambda+3=0$

dır. Bu denklemin karakteristik kökleri,

$\lambda_1=3, \qquad \lambda_2=1$ olarak elde edilir.

$y_h(n)=c_1 3^n+c_2 1^n=c_1 3^n+c_2$ olarak bulunur. Verilen denklemde;

$g(n)=(-4n+8n^2)5^n$

olduğu için; Çizelge 7.2.1.1' den, özel çözüm adayı

$y_ö(n)=(a_0+a_1 n+a_2 n^2)5^n$ şeklinde seçilerek, denklemde yerine yazılır. Buradan,

$y_ö(n+2)=(a_0+a_1(n+2)+a_2(n+2)^2)5^{n+2}$

$y_ö(n+2)=\big(a_0+a_1(n+2)+a_2(n^2+4n+4)\big)5^{n+2}$

$$y_ö(n+2)=(25a_0+50a_1+100a_2+(25a_1+100a_2)n+25a_2n^2)5^n \quad (7.2.2.7)$$

$y_ö(n+1)=(a_0+a_1(n+1)+a_2(n+1)^2)5^{n+1}$

$y_ö(n+1)=(a_0+a_1(n+1)+a_2(n^2+2n+1))5^{n+1}$

$$y_ö(n+1)=(5a_0+5a_1+5a_2+(5a_1+10a_2)n+5a_2n^2)5^n \quad (7.2.2.8)$$

$$y_ö(n)=(a_0+a_1 n+a_2 n^2)5^n \quad (7.2.2.9)$$

elde edilir. (7.2.2.7), (7.2.2.8), (7.2.2.9) denklemleri, verilen denklemde yerine yazılarak,

$$(8a_0+30a_1+80a_2+(8a_1+60a_2)n+8a_2n^2)5^n=(-4n+8n^2)5^n \quad (7.2.2.10)$$

elde edilir. (7.2.2.10) denkleminden,

$8a_0+30a_1+80a_2=0$

$8a_1 + 60a_2 = -4$

$8a_2 = 8$

$a_2 = 1, \qquad a_1 = -8, \qquad a_0 = 20$

bulunur.

$y_ö(n)$ çözümünde yerine yazıldığında,

$y_ö(n) = (20 - 8n + n^2)\, 5^n$ dır. Buradan genel çözüm;

$y(n) = y_h(n) + y_ö(n)$

$y(n) = c_1 3^n + c_2 + (20 - 8n + n^2)5^n$ bulunur.

7.2.2.5 Örnek: $y(n+2) - 7y(n+1) + 12y(n) = 4^n$ fark denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

Bu denklem E operatörü cinsinden

$L(E)y(n) = (E-3)(E-4)y(n) = 4^n$

şeklinde ifade edilebilir. $L(4) = 0$ olduğundan, Teorem 7.2.2.3 uygulanır ve

$L(E) = (E-4)h(E), h(E) = (E-3)$ çıkar.

Buradan, $a = 4, \qquad m = 1, \qquad h(4) = 1$ dir. Böylece (7.2.2.6) dan,

$$y_ö(n) = \frac{1}{L(E)} 4^n$$
$$= 4^{n-1} n$$

özel çözümü bulunur.

7.2.2.6 Örnek: $(E-3)^3 y(n) = 3^n$ denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

$L(E) = (E-3)^3$ için $L(3) = 0, m = 3$ ve $h(E) = 1$ dir.

O halde Teorem 7.2.2.3' ten, bir özel çözüm

$$y_{ö}(n) = \frac{1}{(E-3)^3} 3^n$$
$$= \frac{3^{n-3}.n^3}{1.3!}$$
$$= \frac{3^n.n^3}{162}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca; bilinmelidir ki, k. mertebeden değişken katsayılı (özel olarak da sabit katsayılı) homojen olmayan lineer fark denklemlerinin bir özel çözümünü bulmak için *parametrelerin değişimi* yöntemi kullanılmaktadır. Daha önce ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı homojen olmayan fark denklemleri için bu yöntemi vermiştik. Burada $g(n)$ fonksiyonu keyfi bir fonksiyondur ve bu nedenle, bu yöntemin, bir özel çözüm bulmak için en genel yöntem olduğu bilinmelidir.

7.2.2.7 Uyarı: Bu yöntem benzer şekilde k. mertebeden değişken katsayılı

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \cdots + a_k(n)y(n) = g(n) \qquad (7.2.2.11)$$

denklemine de uygulanabilir. Buna ilişkin homojen denklemin genel çözümü

$y_h(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \cdots + a_ky_k(n)$ olup (7.2.2.11) in bir özel çözümü

$$y_{ö}(n) = a_1(n)y_1(n) + a_2(n)y_2(n) + \cdots + a_k(n)y_k(n)$$

dir; burada $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ bilinmeyenleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{cases} \Delta a_1(n)y_1(n+1) + \Delta a_2(n)y_2(n+1) + \cdots + \Delta a_k(n)y_k(n+1) = 0, \\ \Delta a_1(n)y_1(n+2) + \Delta a_2(n)y_2(n+2) + \cdots + \Delta a_k(n)y_k(n+2) = 0, \\ \vdots \\ \Delta a_1(n)y_1(n+k-1) + \Delta a_2(n)y_2(n+k-1) + \cdots + \Delta a_k(n)y_k(n+k-1) = 0, \\ \Delta a_1(n)y_1(n+k) + \Delta a_2(n)y_2(n+k) + \cdots + \Delta a_k(n)y_k(n+k) = g(n) \end{cases}$$

sisteminden $\Delta a_1(n), \Delta a_2(n), \dots, \Delta a_k(n)$ bulunur ve daha sonra bunların sırasıyla, ters farkları alınarak $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ elde edilir (Bereketoğlu, 2012).

7.2.2.8. Örnek: Parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla

$y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = n$

denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

Bu denkleme ilişkin

$y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = 0$ homojen denklemin genel çözümü

$y_h(n) = a_1 + a_2 6^n$

dir. O halde verilen denklemin bir özel çözümü

$y_ö(n) = a_1(n) + a_2(n)6^n$

dir; burada $a_1(n)$ ve $a_2(n)$

$$\begin{cases} \Delta a_1(n) + \ \Delta a_2(n)6^{n+1} = 0, \\ \Delta a_1(n) + \ \Delta a_2(n)6^{n+2} = n \end{cases}$$

sistemini sağlarlar. Buradan

$\Delta a_1(n) = -\frac{n}{5}$ ve $\Delta a_2(n) = \frac{n}{30}6^{-n}$

dir. Bunların ters farkları alınırsa,

$$a_1(n) = \Delta^{-1}\left(-\frac{n}{5}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{i}{5} = -\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{n-1} i = -\frac{1}{10}n(n-1)$$

ve

$$a_2(n) = \Delta^{-1}\left(\frac{n6^{-n}}{30}\right) = \frac{1}{30}\sum_{i=0}^{n-1} i6^{-i} = -\frac{n}{25}6^{-n} - \frac{1}{125}6^{-n}$$

elde edilir. O halde özel çözüm

$y_ö(n) = -\frac{n^2}{10} + \frac{3n}{50} - \frac{1}{125}$ şeklinde bulunur.

8. ÇÖZÜMLERİN DAVRANIŞLARI

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0 \tag{8.1}$$

şeklinde ikinci mertebeden lineer homojen fark denklemini ele alalım. (8.1) denkleminin karakteristik köklerinin λ_1 ve λ_2 olduğu kabul edilsin. Bu köklerin yapısına göre aşağıda verilecek farklı durumlar söz konusudur. Ama önce sıfır etrafında salınımlılıktan bahsedelim. $y(n)$ dizisi alterne; yani $y(n) > 0$ iken $y(n+1) < 0$ veya $y(n) < 0$ iken $y(n+1) > 0$ ise, o zaman $y(n)$ dizisine *sıfır etrafında salınımlıdır* denir.

Durum a: λ_1 ve λ_2 reel ve farklı olsun. $y_1(n) = {\lambda_1}^n$ ve $y_2(n) = {\lambda_2}^n$; (8.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ise $y_1(n)$ dominant (baskın) çözüm, λ_1 e dominant (baskın) karakteristik kök denir. Aksi halde, $y_2(n)$ e dominant (baskın) çözüm, λ_2 e dominant (baskın) karakteristik kök denir. Şimdi (8.1) denkleminin genel çözümü

$y(n) = c_1 {\lambda_1}^n + c_2 {\lambda_2}^n$ nin limit davranışının, dominant çözümün davranışına bağlı olduğunu görelim.

$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ olsun. Bu durumda,

$$y(n) = c_1 {\lambda_1}^n + c_2 {\lambda_2}^n = {\lambda_1}^n \left(c_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right)$$

yazılır ve $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ olduğundan, $n \to \infty$ iken $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \to 0$ olur.

Dolayısıyla; $\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{n\to\infty} c_1 {\lambda_1}^n$ bulunur.

λ_1 in değerine bağlı olarak aşağıdaki altı farklı durum söz konusudur.

1) $\lambda_1 > 1$ ise $\{c_1 {\lambda_1}^n\}$ dizisi, ∞ a ıraksar. Sistem kararsızdır.

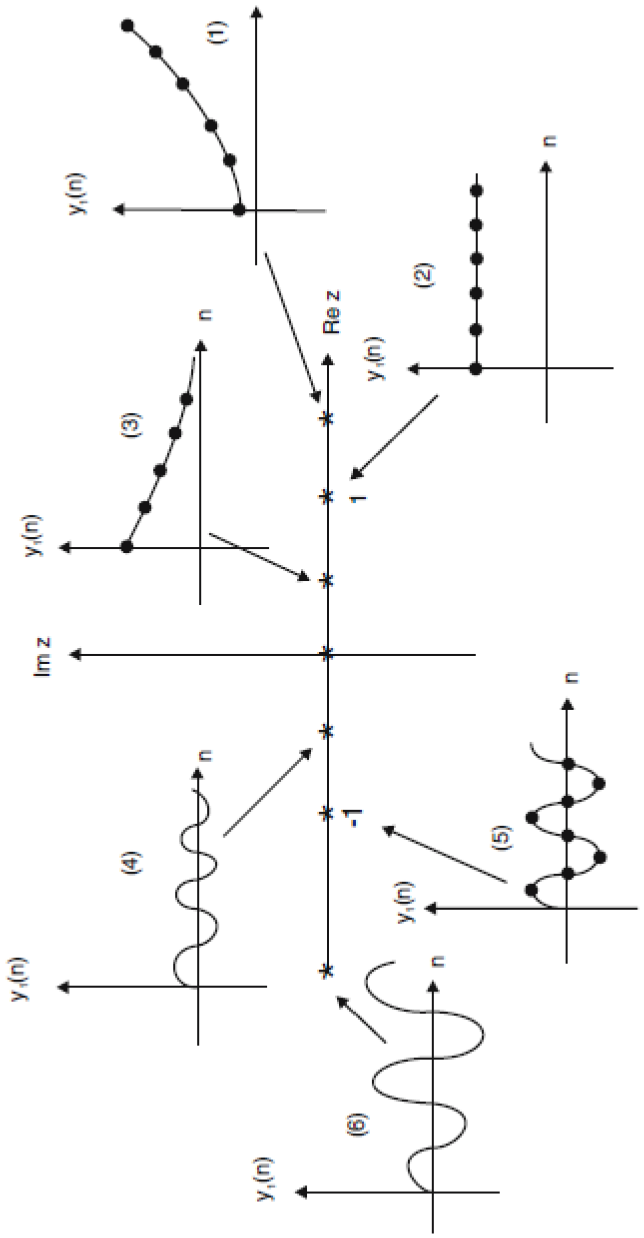
2) $\lambda_1 = 1$ ise $\{c_1 {\lambda_1}^n\}$ dizisi, sabit dizidir. (Kararlı sistem)

3) $0 < \lambda_1 < 1$ ise, $\{c_1 {\lambda_1}^n\}$ dizisi monoton şekilde sıfıra yakınsar. Sistem kararlıdır.

4) $-1 < \lambda_1 < 0$ ise, $\{c_1 {\lambda_1}^n\}$ dizisi sıfır etrafında salınım yapar. Yani işaret değiştirir. Sıfıra yakınsar. Kararlı sistem.

5) $\lambda_1 = -1$ ise $\{c_1 {\lambda_1}^n\}$ dizisi, c_1 ve $-c_1$ değerleri arasında salınım yapar.

6) $\lambda_1 < -1$ ise $\{c_1 {\lambda_1}^n\}$ dizisi salınım yapar ama genlik giderek büyür. Sistem kararsızdır (Elaydi, 2000).



Şekil 8.1. (Elaydi, 2000) Reel kökler için $(n, y(n))$ grafikleri

Durum b: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olduğu durumda, (8.1) denkleminin genel çözümü,

$y(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda^n$ şeklindedir. Eğer, $\lambda \geq 1$ ise monoton olarak, eğer $\lambda \leq -1$ ise salınımlı bir şekilde $y(n)$ çözümü ıraksar. Eğer $|\lambda| < 1$ ise;

$\lim_{n\to\infty} n\,\lambda^n = \infty.0$ belirsizliği

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{\lambda^n}} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine döner. O halde,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{-In\lambda}{\lambda^n}} = 0$ bulunur.

$\lim\limits_{n\to\infty} n\,\lambda^n = 0$

olduğu için $|\lambda| < 1$ olduğunda çözüm sıfıra yakınsar.

Durum c: Karmaşık kökler durumudur. λ_1 ve λ_2 karmaşık sayı, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun. $(\beta \neq 0)$

(8.1) denkleminin genel çözümü;

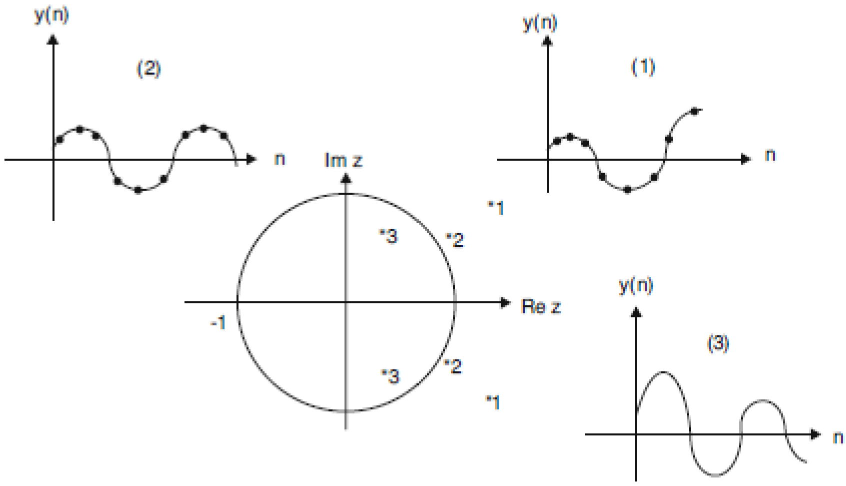
$$y(n) = Ar^n \cos(n\theta - B), \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

genel çözümü salınımlıdır; çünkü cosinüs fonksiyonu salınımlıdır. $y(n)$, karakteristik köklerin durumuna göre üç farklı şekilde salınım yapar.

1) $r > 1$ ise λ_1 ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olup birim çemberin dışındadır. $y(n)$ salınım yapar ve çözümlerin genlikleri giderek büyür. (kararsız sistem)

2) $r = 1$ ise λ_1 ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olup kökler birim çemberin üzerindedir. $y(n)$ salınım yapar ve çözümlerin genlikleri sabit kalır. (kararlı sistem)

3) $r < 1$ ise λ_1 ve $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olup birim çemberin içindedir ve çözümlerin genlikleri giderek küçülür. $y(n)$ çözümü salınım yapar, bütün çözümler $n \to \infty$ için sıfıra yakınsar (kararlı sistem) (Elaydi, 2000).



Şekil 8.2. (Elaydi, 2000) Kompleks kökler için $(n, y(n))$ grafikleri

8.1. Teorem: Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) (8.1) denkleminin tüm çözümlerinin sıfır etrafında salınması için gerek ve yeter koşul karakteristik denklemin pozitif reel kökünün olmamasıdır.

(ii) (8.1) in tüm çözümlerinin sıfıra yakınsaması için, yani sıfır çözümünün asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır (Elaydi, 2000).

İkinci basamaktan homojen olmayan fark denklemi, $M \neq 0$ ve sabit sayı olmak üzere;

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = M \qquad (8.2)$$

şeklindedir. (8.1) homojen denkleminin aksine, artık $y(n) = 0$ dizisi (8.2) denkleminin çözümü değildir. Çözüm olarak (8.2) nin sıfır olmayan denge noktası veya $y(n) = y^*$ çözümü vardır. Bu da,

$y^* + a_1 y^* + a_2 y^* = M$ veya

$$y^* = \frac{M}{1+a_1+a_2} \qquad (8.3)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $y_ö(n) = y^*$, (8.2) denkleminin bir özel çözümüdür; (8.2) denkleminin genel çözümü de

$$y(n) = y_h(n) + y^* \tag{8.4}$$

dır. Burada $y_h(n)$, (8.2) denklemine ilişkin (8.1) homojen denkleminin genel çözümüdür.

8.2.Tanım: $y(n) - y^*$ dizisi alterne olarak işaret değişirse; yani, $y(n) > y^*$ iken $y(n+1) < y^*$ veya $y(n) < y^*$ iken $y(n+1) > y^*$ ise, o zaman $y(n)$ dizisine y^* *etrafında salınımlıdır* denir. Özel olarak, $y^* = 0$ ise $y(n)$ dizisine sıfır etrafında salınımlıdır denir (Elaydi, 2000; Bereketoğlu, 2012).

$n \to \infty$ halinde $y(n) \to y^*$ olması için gerek ve yeter koşul $y_h(n) \to 0$ olmasıdır. $y(n)$ nın, y^* etrafında salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $y_h(n)$ nın, sıfır etrafında salınımlı olmasıdır. Bu anlatılanlar sıradaki teoremde özetlenmiştir (Elaydi, 2000).

8.3. Teorem:

(i) Homojen olmayan (8.2) fark denkleminin tüm çözümlerinin, y^* etrafında salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (8.1) homojen fark denkleminin hiçbir karakteristik kökünün pozitif reel sayı olmamasıdır.

(ii) (8.2) denkleminin tüm çözümlerinin $n \to \infty$ olduğunda y^* a yakınsaması için gerek ve yeter koşul λ_1 ve λ_2, (8.1) homojen denkleminin karakteristik kökleri olmak üzere $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır (Elaydi, 2000).

Teorem (8.1) ve Tanım (8.2)' te ikinci mertebeden fark denklemlerinin asimtotik kararlılığı için, gerek ve yeter koşullar verildi. (8.1) veya (8.2) denklemlerinde kararlılık için a_1 ve a_2 değerlerine bağlı belirli kriterlere ihtiyaç duyulabilir. Aşağıdaki sonuçta bu kriterlerden bahsedilecektir.

8.4. Teorem:

$$1 + a_1 + a_2 > 0,\ 1 - a_1 + a_2 > 0,\ 1 - a_2 > 0 \tag{8.5}$$

koşulları, (8.1) ve (8.2) denklemlerinin denge noktasının(çözümünün) asimtotik kararlı, (çözümlerin y^* a yakınsaması için) gerek ve yeter koşullardır (Elaydi, 2000).

İspat: (8.1) ve (8.2) denklemlerinin, denge noktasının, asimtotik kararlı olduğu kabul edilsin. Teorem (8.1) ve Tanım (8.2) kullanılarak, $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri birim çemberin içindedir. Yani $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ dir. Bu köklerin eşitlerini yazacak olursak;

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2}}{2} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2}}{2} \tag{8.6}$$

dır.

Burada iki durum karşımıza çıkar.

Durum 1. λ_1 , λ_2 reel kökler, $a_1{}^2 - 4a_2 \geq 0$ dır. $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olduğundan, (8.6) dan,

$$-2 < -a_1 + \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2} < 2 \Rightarrow -2 + a_1 < \sqrt{a_1{}^2 - 4a_2} < 2 + a_1 \tag{8.7}$$

bulunur. Benzer olarak diğer eşitlikten de;

$$-2 + a_1 < -\sqrt{a_1{}^2 - 4a_2} < 2 + a_1 \tag{8.8}$$

bulunur. (8.7) eşitsizliğindeki, ikinci eşitsizliğin karesi alındığında,

$$1 + a_1 + a_2 > 0 \tag{8.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (8.8) eşitsizliğindeki birinci eşitsizliğin karesi alınırsa,

$$1 - a_1 + a_2 > 0 \tag{8.10}$$

elde edilir. $a_1{}^2 - 4a_2 \geq 0$ ve $a_2 \leq \frac{a_1{}^2}{4} < 1$ olduğundan, (8.7) eşitsizliğinin ikinci eşitsizliğinden ve (8.8) eşitsizliğinin birinci eşitsizliğinden,

$2 + a_1 > 0$ ve $2 - a_1 > 0$ veya $|a_1| < 2$
dır.

Böylece (8.5) koşullarının ispatı Durum 1 için gösterilmiş oldu.

Durum 2. ${a_1}^2 - 4a_2 < 0$, yani λ_1, λ_2 köklerinin karmaşık sayı olması durumudur. Bu durumda,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4a_2 - {a_1}^2}$$

dır. ${a_1}^2 < 4a_2$ olduğundan, $-2\sqrt{a_2} < a_1 < 2\sqrt{a_2}$ dır. Buradan, $|\lambda_1|^2 = \frac{{a_1}^2}{4} + \frac{4a_2}{4} - \frac{{a_1}^2}{4} = a_2$ bulunur. $|\lambda_1| < 1$ olduğundan, $0 < a_2 < 1$ dir.

(8.5) koşullarından, ilk iki eşitsizliğin gerçeklendiğini göstermek için, $x \in (0,1)$ için $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} > 0$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. $f(0) = 1$ ve $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ dir. Bu durumda $x = 1$ noktası, $x \in (0,1)$ için azalan $f(x)$ in lokal minimumudur. Dolayısıyla, her $x \in (0,1)$ için $f(x) > 0$ dır.

Sonuç olarak gerek ve yeter koşuldaki gerek koşulunun ispatı tamamlanmıştır (Elaydi, 2000).

Yeterliliği göstermek için (8.5) teki eşitsizlikler sağlanmış olsun. Bu durumda yine Durum 1. ve Durum 2. göz önüne alınır.

Durum 1. ${a_1}^2 - 4a_2 \geq 0$ olsun.

Buradan;

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2}\left|-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2}\right|$$

$$< \frac{1}{2}\left|-a_1 \pm \sqrt{(1 + a_2)^2 - 4a_2}\right|$$

$$< \frac{1}{2}\left(|a_1| + \sqrt{(1 - a_2)^2}\right)$$

$$< \frac{1}{2}(1 + a_2 + 1 - a_2) = 1$$

elde edilir.

Durum 2. ${a_1}^2 - 4a_2 < 0$ olsun.

Bu durumda

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2}\left|-a_1 \pm i\sqrt{4a_2 - {a_1}^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2 + 4a_2 - {a_1}^2}$$

$= \sqrt{a_2} < 1$ dir (Bereketoğlu, 2012).

9. FARK DENKLEM UYGULAMALARI

Fark denklemleri günlük hayatta birçok alanda karşımıza çıkan problemlerin modellenip, çözülmesinde kullanılmaktadır. Bu alanlardan birkaçı Matematik, Fizik, Biyoloji, Mühendislik, Ekonomi olarak sıralanabilir. Bu bölümde literatürde karşılaşılan ve fark denklemi kullanılarak formüle edilmiş uygulamalara yer verilecektir. Bahsedilen örneklerde; son iki örnek hariç, (Elaydi, 2000) kaynağından faydalanılmıştır.

9.1. Olasılık uygulaması (Kumarbazın çöküşü)

Bir kumarbaz, $0 \leq q \leq 1$ olmak şartıyla, rakibine karşı bir dizi oyun oynamaktadır. Bu oyunlardan herhangi birinde \$1.00 kazanma olasılığı q; \$1.00 kaybetme olasılığının $1 - q$ olduğu bilinmektedir. Bu kumarbaz şu iki şart sonrası kumar oynamayı bırakacaktır: N dolar para kazanma amacına ulaşırsa yahut parasını tümüyle kaybederse. Eğer tüm parası biterse de bu kumarbazın iflas ettiğini (çöktüğünü) söyleyeceğiz. Kumarbazın n dolar para kazanıp sahiplenmesi durumunda çökme olasılığı $p(n)$ olsun. Kumarbaz iki farklı şekilde iflas ettirilebilir. İlki bir sonraki oyunu kazanarak, ki bu olayın olasılığı q dur, bu durumda serveti $n + 1$ ve iflas etme olasılığı $p(n + 1)$ olacaktır. İkinci durum, bir sonraki oyunu kaybetmesidir. Bu olayın olasılığı $1 - q$ dur, iflas etme olasılığı $p(n - 1)$ olacaktır. Sonuç olarak tüm olasılıkları toplayarak;

$p(n) = qp(n + 1) + (1 - q)p(n - 1)$ bulunur. n yerine $n + 1$ yazılırsa,

$$p(n + 2) - \frac{1}{q}p(n + 1) + \frac{(1-q)}{q}p(n) = 0, \quad n = 0,1, \dots, N, \tag{9.1.1}$$

olarak bulunur. $p(0) = 1$ ve $p(N) = 0$

Karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1 - q}{q} = 0$$

şeklinde yazılır ve kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1}{2q} + \frac{1-2q}{2q} = \frac{1-q}{q}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2q} - \frac{1-2q}{2q} = 1$$

şeklindedir. Bu durumda denklemin genel çözümü $q \neq \frac{1}{2}$ olmak şartıyla

$$p(n) = c_1 + c_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^n$$

olarak yazılabilir. $p(0) = 1$ ve $p(N) = 0$ başlangıç koşulları kullanılarak

$c_1 + c_2 = 1,$ $\quad c_1 + c_2\left(\frac{1-q}{q}\right)^N = 0,$ sonuçları elde edilir.

Böylece;

$$c_1 = \frac{-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$$

$$c_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$$

olarak bulunur. Buradan

$$p(n) = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^n - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N} \tag{9.1.2}$$

elde edilmiş olur. $q = \frac{1}{2}$ olan özel durum ayrı ele alınmalıdır. Çünkü bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tekrarlı kökler vardır. Adil bir oyunda zaten bu durum kesindir. Bu durumda genel çözüm

$p(n) = c_1 + c_2 n$ şeklinde ifade edilir, başlangıç koşullarıyla

$$p(n) = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N} \tag{9.1.3}$$

eşitliği elde edilir.

Örneğin, \$4 ile oyuna başlandığında, 1 dolar kazanma olasılığı problemde 0.3 olarak verilsin. Para tamamen biterse ya da toplamda \$10 para kazanılırsa kumar oynama bırakılacaktır. O zaman $n = 4, q = 0.3$ ve $N = 10$ iken çökme olasılığı şöyle ifade edilebilir.

$$p(4) = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^4 - \left(\frac{7}{3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{7}{3}\right)^{10}} = 0.994 \text{ olarak bulunur.}$$

Diğer taraftan eğer $q = 0.5$, $N = \$100.00$ ve $n = 20$ ise o zaman (9.1.3) denkleminden

$$p(20) = 1 - \frac{20}{100} = 0.8$$

elde edilir. Bilinmelidir ki, $q \leq 0.5$ ve $N \to \infty$ iken; (9.1.2) ve (9.1.3) formüllerindeki $p(n)$ olasılığı 1'e yaklaşmaktadır ve kumarbazın iflas etmesi kesindir.

Kumarbazın kazanma olasılığı parçalı fonksiyon ile aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{p}(n) = 1 - p(n) = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}, & q \neq 0.5 \\ \dfrac{n}{N}, & q = 0.5 \end{cases}$$

9.2. Biyoloji uygulaması (Fibonacci dizisi)

Bu probleme ilk kez daha çok Fibonacci olarak bilinen İtalyan matematikçi Leonardo di Pisa tarafından 1202'de abaküs hakkında yazılan *Liber abaci* adlı kitapta rastlanmıştır. Tavşanların üremesi, çoğalması esasına dayanır. Daha önceki bölümlerde ikinci mertebeden homojen fark denklemi örneği olması itibariyle bu problem incelendiği için tekrar bu bölümde ayrıntılı olarak incelenmemiş, sadece örnek olarak verilmiştir.

9.3. Ekonomi uygulaması (Milli gelir)

Kapitalist bir ülkede belli bir n zaman diliminde milli gelir $Y(n)$

$$Y(n) = C(n) + I(n) + G(n), \tag{9.3.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$C(n)$ =Tüketim mallarının alınması için yapılan tüketici harcamaları

$I(n)$ =Sermaye donanımını satın almak için yapılan özel yatırım teşviği

$G(n)$ =Hükümet (idarenin) harcamaları

n genellikle yıl olarak hesaba dahil edilir.

Şimdi ekonomistler tarafından yapılan yaygın varsayımlara göz atalım:

(a) Tüketici harcaması $C(n)$ bir önceki $n-1$ yılındaki milli gelir $Y(n-1)$ ile orantılıdır. Şöyle ki;

$$C(n) = \alpha\, Y(n-1) \tag{9.3.2}$$

Burada $\alpha > 0$ *marjinal tüketim meyli (eğilimi)* adını alır.

(b) Özel yatırım teşviği $I(n)$, tüketimdeki artışla $C(n) - C(n-1)$ orantılıdır.

$$I(n) = \beta[C(n) - C(n-1)] \tag{9.3.3}$$

Burada $\beta > 0$ bağlantı (ilişki) olarak adlandırılır.

(c) Son olarak hükümet (kamu) harcamaları yıllar boyunca sabittir ve bu sabit birimi

$G(n) = 1$ olarak alırız. (9.3.4)

(9.3.2), (9.3.3) ve (9.3.4) denklemlerini (9.3.1)' de yerine koyarsak ikinci mertebeden fark denklemi ortaya çıkar.

$$Y(n+2) - \alpha(1+\beta)Y(n+1) + \alpha\beta Y(n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{9.3.5}$$

Bu denklemin tek denge noktası (equilibrium point) vardır. Bu nokta

$Y^* = \frac{1}{(1-\alpha)}, \qquad \alpha \neq 1$

olarak bulunur. Bu denge noktasının asimtotik kararlı olması

$$\alpha < 1, \qquad 1 + \alpha + 2\alpha\beta > 0, \qquad \alpha\beta < 1. \tag{9.3.6}$$

şartları altında mümkündür.

Ayrıca milli gelir $Y(n)$ ancak ve ancak

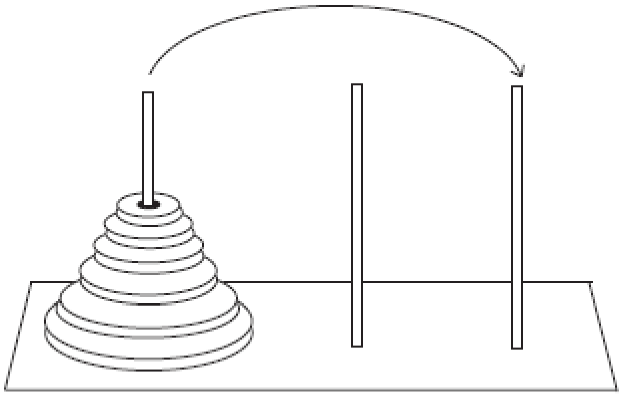
$$\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \tag{9.3.7}$$

şartı sağlandığı zaman denge durumu olan Y^* etrafında salınımlıdır.

Şimdi şu şartı göz önüne alalım. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1.$ O zaman $Y^* = 2$ ($Y^* = G(n)\ in\ 2\ katı$) olacaktır. Bu durumda (9.3.6) ve (9.3.7) koşulları sağlanmaktadır. Dolayısıyla milli gelir $Y(n)$; başlangıç milli gelir değerlerine $Y(0)$ ve $Y(1)$ bakılmaksızın her zaman $Y^* = 2$ noktasına salınımlı bir şekilde yaklaşmaktadır.

9.4. Matematik uygulaması (Hanoi Kuleleri)

Hanoi kuleleri fikri Uzak Doğu' dan gelmektedir. Bazı kaynaklarda Brahma Kulesi veya Dünyanın Sonu Yapbozu olarak da geçmektedir. 1883'te Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından bulunmuş ve oyuncak olarak satılmaya başlanmıştır. İddiaya göre Brahma tapınaklarındaki rahipler zihinsel gelişim için bu yapbozla uğraşmışlardır. Yaygın inanışa göre bulmaca tamamlandığında dünya üzerindeki yaşam da sona erecektir. Oyuncaktaki mantığa göre; üst üste en altta en geniş halka olmak üzere büyükten küçüğe doğru yerleşmiş 64 diskin geçirildiği bir çubuk ve iki tane de boş çubuk vardır. Rahipler bu diskleri her seferinde yalnızca bir disk kullanmak şartı ile boş çubuklardan birine aynı dizilimle mümkün olan en az hamleyi yaparak geçirmeye çalışmaktadırlar. Ancak bu sırada hiçbir disk, kendinden küçük olanın üstüne konulamaz.



Şekil 9.4.1.* Hanoi kuleleri

Rahipler uzun uğraşlar ve sayısız hamlelerle günler geceler sonra yapbozu çözmeyi başarmışlardır.

Problem matematiksel olarak ele alındığında;

$n+1$ tane halka olsun. y_{n+1} de bu $n+1$ halka olan yapbozun çözümü için yapılan en az hamle sayısı olsun. $n+1$ tane halka olduğu için öncelikle diğer boş çubuğa en üstteki n tane halka yerleştirilir (Hamle sayısı y_n). Son halka ise bir hamle ile boş olan diğer çubuğa yerleştirildikten sonra, tüm halkaları tekrar en büyük halkanın üzerine aynı dizilim şekliyle yerleştirmek yine y_n hamlede olacaktır.

Çizelge 9.4.1. Halka ve hamle sayıları

Halka sayısı	1	2	3	4	5	6	…
Hamle sayısı	1	3	7	15	31	63	…

Bu durumda yapılan hamle sayısı $2y_n$+1 olur. Yani

$y_{n+1} = 2y_n$+1 eşitliği karşımıza çıkar. Bu denklem birinci mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemidir. Bu denklemin genel yöntemle çözümü (5.3.6) gereği bilinmektedir.

* Difference Equations 1, (http://www.cimt.plymouth.ac.uk/ Chapter 14)

O halde genel çözüm

$y_n = 2^n - 1$ olarak karşımıza çıkmaktadır. (n tane halka için Hanoi Kulesi probleminin genel çözümü)

Rahipler 64 halka ile bu yapbozu bitirmişlerdir. Bu da demek oluyor ki; toplam

$y_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$

hamle yapmışlardır.

9.5. Fizik uygulaması (Sıcaklık Değişimi)

Bir diğer enteresan örnek fizikten olup, sıcaklık değişiminin gözlenmesidir. Sabit oda sıcaklığında bırakılan bir kupa sıcak çayın oda sıcaklığına kadar soğuması ya da bir bardak soğuk limonatanın oda sıcaklığına kadar ılıması örneğini ele alacağız. T_0 nesnenin başlangıç sıcaklığını, S ortamın sabit sıcaklığını, T_n limonata veya çayın n birim zaman sonraki sıcaklığını göstersin. Bir birim zamandaki sıcaklık değişimi;

$$T(n+1) - T(n) = k(T(n) - S) \qquad (9.5.1)$$

eşitliği ile modellenir. k cisme bağlı olan bir sabit, $n = 0, 1, 2, \ldots$dir.

Bu fark denklemine *Newton'un soğuma kanunu*† denir. Bu denklemden; sıcaklık değişiminin, nesnenin sıcaklığı ile ortam sıcaklığının arasındaki farka bağlı olduğu sonucu çıkar. Büyük sıcaklık farkı küçük fark olana göre, daha hızlı soğuma ya da ısınma anlamına gelir. Eğer S bilinir, k sabitini bulmaya yönelik de yeterli bilgi verilirse (9.5.1) denklemi birinci mertebeden fark denklemi olarak açık bir biçimde çözülebilir.

Örneğin başlangıç sıcaklığı 180^0F olan bir bardak çay sabit sıcaklığı 80^0F olan bir odaya konsun. Bir dakika sonra çayın sıcaklığı 175^0F oluyorsa, 20 dakika sonra çayın sıcaklığı ne olur?

† http://de2de.synechism.org/c1/sec14.pdf

$T_0 = 180^0 F$

$T_1 = 175^0 F$

$S = 80^0 F$

$T_n = n$ dakika sonra çayın sıcaklığı olsun. Newton'un soğuma kanunu' na göre;

$T_{n+1} - T_n = k(T(n) - 80)$

$n = 0$ için; $T_1 - T_0 = k(T(0) - 80)$ bulunur.

Yani; $175 - 180 = k(180 - 80)$ elde edilir.

Buradan $k = -0.05$ tir.

(9.5.1) denklemi yeniden yazılarak çözüldüğünde;

$T_{n+1} - T_n = -0.05(T(n) - 80) = -0.05T_n + 4.$

$$T_{n+1} = T_n - 0.05T_n + 4 = 0.95T_n + 4 \tag{9.5.2}$$

Bu denklem birinci mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemidir. (5.3.6) gereği denklemin genel çözümü;

$$T_n = 0.95^n(180) + 4\left(\frac{1 - (0.95)^n}{1 - 0.95}\right)$$

$$= 0.95^n(180) + 80(1 - (0.95)^n)$$

$$= 80 + 100(0.95)^n$$

olup; 20 dakika sonra çayın sıcaklığı;

$T_{20} = 80 + 100(0.95)^{20} = 115.85$ olur. Bu demektir ki; 20 dakika sonra çayın sıcaklığı $116^0 F$ nin altına kadar düşmektedir. Ayrıca;

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(80 + 100(0.95)^n) = 80.$$

Görülüyor ki; çayın sıcaklığı zaman geçtikçe azalarak oda sıcaklığı olan $80^0 F$ denge sıcaklık değerine ulaşacaktır.

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fark denklemleri ile diferansiyel denklemler arasında büyük benzerlikler bulunmaktadır. Fark denklemleri sayesinde diferansiyel denklemlerdeki süreksizlik durumları ortadan kaldırılabilmektedir. Hatta birçok diferansiyel denklem, fark denklemleri kullanılarak kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu nedenle bu tezde fark denklem uygulamalarını desteklemek için hem günlük hayattan problem örnekleri, hem de sayısal örnekler verilerek konunun daha anlaşılır olması sağlanmıştır.

Son yıllarda konuya gösterilen ilginin artması neticesinde bilimin her dalında karşılaşılabilecek matematik problemlerinin modellenmesinde artık fark denklemleri kullanılmaktadır. Bunun sonucunda konu ile ilgili yapılan çalışmalar da artmıştır. Bu tezde lineer fark denklemleri ve çözüm yöntemleri üzerine çalışılmıştır. Sabit katsayılı lineer yüksek mertebeden homojen olmayan fark denklemlerinin çözümleri için belirsiz katsayılar, operatör yöntemi ve parametrelerin değişimi yöntemi bilinen ve kullanılan yöntemlerdir. Belirsiz katsayılar ve operatör yöntemleri kısıtlı durumlarda kullanılabilirken; parametrelerin değişimi yöntemi neredeyse tüm problemlere uygulanabilecek bir yöntemdir.

Fark denklemleri alanında yapılan bu çalışmanın konu hakkında ilerleyen dönemlerde çalışacak kişilere yardımcı olacağı düşünülmektedir. Yapılacak çalışmalar çeşitli alanlarda ortaya çıkan problemlerin lineer fark denklemleri yardımıyla modellenerek çözülmesi şeklinde olabilir. Buna karşın; sosyal bilimler, davranış bilimleri veya iktisat alanında karşılaşılan birçok problemin lineer olmayan fark denklemleri ile çözülmesi gerektiği bilinmektedir. Bu yüzden araştırmacıların artık yavaş yavaş lineer olmayan fark denklemler üzerinde yoğunlaşmaları gerekmektedir. Bu tip problemler lineer fark denklemlerine göre daha karmaşık çözümler ve uzun uğraşlar gerektirse de bu çalışmanın devamı niteliğinde böyle problemler de ele alınabilir. Ancak ilerleyen dönemlerde bu konuda çalışacak bilim insanlarının Türkçe kaynak sıkıntısı çekeceği düşünülmektedir. Bu nedenle konu ile ilgili yeni çalışmalar yapılarak uzun vadede Türkçe literatürün de zenginleştirilmesi beklenmektedir.

Bu sonuç ve önerilerle, gelecekte bu konuda çalışacak tüm bilim insanlarına şimdiden başarılar ve kolaylıklar dilerim.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., 2000. Difference Equations and Inequalities, Chapter 1, Marcel Dekker, New York, USA.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. and O'Regan, D., 2000. "Oscillation Theory for Difference and Differential Equations", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Akdağ, M., 2018. Eksponansiyel Tipten Fark Denklemleri Üzerine Bir Çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 30s, Konya.

Akın Ö, 1988. Nümerik Analiz, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Akın, Ö. ve Bulgak, H. 1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi.

Akyol, S., 2011. Lineer Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Metodları Üzerine, Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 82s, Yozgat.

Atalay, Ö., 2015. Fark Denklemlerinin İktisadi Uygulamaları, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 97s, Kars.

Bayar, E., 2012. Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri İçin Çözüm Yöntemleri, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 107s, Denizli.

Bereketoğlu H., Kutay V., 2012. Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, 302s, Ankara.

Bolat, Y., 2003. Yüksek Basamaktan Fark Denklemlerinin Salınımlılığı, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 49s, Ankara.

Cull, P., Flahive, M. and Robson, R., 2000. Difference Equations from Rabbits to Chaos, Springer, New York.

Çatal, S., (2004) Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi, 6(1): 129-138.

Elaydi, S., (2000), An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York.

Erdoğan, M., 2011. Bazı Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı ve Salınımı Üzerine Bir Çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 42s, Konya.

Goldberg S., 1958. Introduction to Difference Equations, Chapter 1, Chapter 3, John Wiley and Sons, New York, USA.

Goldberg S., 1960. Introduction to Difference Equations, John Wiley and Sons, New York.

Kelly G. W., Peterson, C. A., 2001. Difference Equations: An Introduction with Applications, Academic Press, San Diego.

Kır, İ., 2007. Yüksek Mertebeden Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 32s, Afyonkarahisar.

Kulenovic, M. R. S., Kalabusic, S., 2000. Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, http://fibonacci.math.uri.edu/~kulenm/diffeqaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm

Kutay, V., 2010. Fark Denklemleri, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 138s, Ankara.

Kutay, V., 2016. Neutral Gecikmeli Fark Denklemleri Üzerine, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 73s, Konya.

Lankshmikantham V., Trigiante D., 2002. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications second edition, Marcel Dekker, New York.

Levy H., Lessman F., 1961. Finite Difference Equations, The Macmillan Company, New York.

Mickens, R.E., 1990. Difference Equations, Chapter 4, Van Nostrand Reinhold, Newyork.

Oturanç G., Kurnaz A., Kiriş M., Keskin Y., 2012. Sayısal Analiz, Dizgi Ofset, 384s, Konya.

Önay, O., 2009. Fark Denklemleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 69s, İstanbul.

Soykan Y, 2017 Lineer Fark Denklemleri Çözümlü Alıştırmaları, Nobel Kitabevi, 437s, Ankara.

Soykan Y., Göcen M., Gümüş M., 2017. Lineer Fark Denklemleri, Nobel Kitabevi, 232s, Ankara.

Tollu, D., 2009. Bazı Fark Denklemlerinin Kararlılığı, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 69s, Konya.

Uçar, Z., 2013. Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri ve Global Davranışları, Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 81s, Niğde.

Yıldız, F., 2018. İkinci Mertebeden Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Yöntemleri, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 69s, Isparta.

Yılmaz, G., 2006. Fark Denklemleri ve Denge Hali, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 65s, Ankara.

İNTERNET KAYNAKLARI

Difference Equations 2, (http://www.cimt.plymouth.ac.uk/ Chapter 15)

Difference Equations 1, (http://www.cimt.plymouth.ac.uk/ Chapter 14)

http://de2de.synechism.org/c1/sec14.pdf

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Fatma Nihan KARAGÖZ
Doğum Yeri ve Yılı	: Uluborlu, 1987
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: bu.adresbenim@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Isparta Mürşide Ermumcu Anadolu Öğretmen Lisesi, 2004
Lisans	: Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi, Matematik Öğretmenliği, 2009

Mesleki Deneyim

Dazkırı METEM	2009-2013
Dazkırı Anadolu İHL	2013-2014
Atabey Anadolu Lisesi	2014-2018
Isparta 15 Temmuz Şehitler Anadolu Lisesi	2018- (halen)