T.C.

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABELYEN KATEGORİLERDE C3-OBJELER

DENİZ DRAHYALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2019

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABELYEN KATEGORİLERDE C3-OBJELER

DENİZ DRAHYALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. MUHAMMET TAMER KOŞAN

GEBZE
2019

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

RELATIVELY C3 OBJECTS IN ABELIAN CATEGORIES

DENİZ DRAHYALI

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATIC

THESIS SUPERVISOR

PROF. DR. MUHAMMET TAMER KOŞAN

GEBZE

2019

GEBZE
TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 06/02/2019 tarih ve 2019/09 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 18/02/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Deniz DRAHYALI'nın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. M. Tamer KOŞAN

ÜYE : Dr. Öğr. Üyesi Fatma ÇALIŞKAN

ÜYE : Dr. Öğr. Üyesi Yücel ENGİNER

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../......... tarih ve ..../........ sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

Prof. Dr. Arif Çağdaş AYDINOĞLU
Gebze Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

N, M nin bir alt modülü ve N nin alt modülleri A ve B; $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ olmak üzere, $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ olduğunda birim halka ile ilişkilendirilen M modülüne N-$C3$ modül denir. Bu tezde, N-$C3$ modüllerinin birçok yararlı temel özellikleri ispat edilmiş ve halkanın bazı önemli sınıflarına ait birkaç örnek N-$C3$ modülleri ile sağlanmıştır. Ayrıca, N nin alt modülleri A ve B; $A \subseteq^{\oplus} N$, $B \subseteq^{\oplus} N$ ve $A \oplus B = N$ olmak üzere, $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ olduğunda M-$D3$ modülü tanımlanır. M-$D3$ modülleri tamamen projektif modülleri iken N-$C3$ modülleri ise injektif modüller için karakterize edilir.

Anahtar Kelimeler: C3 Modüller, D3 Modüller, Basit Direkt İnjektif Modüller ve Basit Direkt Projektif Modüller.

SUMMARY

A module M over an associated with unity ring R is called N-$C3$ module if whenever A and B are submodules of N with $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ and $A \cap B = 0$, then $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$. In this thesis, many of the useful basic properies of N-$C3$ modules are provided and it is shown that several examples of some important classes of rings satisfies the N-$C3$ modules. Furthermore, M-$D3$ module is defined for whenever A and B are submodules of N with $A \subseteq^{\oplus} N$, $B \subseteq^{\oplus} N$ and $A \oplus B = N$, then $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$. In the following of the study, while M-$D3$ modules are completely characterizated for projective modules, N-$C3$ modules are symbolized for injective modules.

Key Words: C3 Modules, D3 Modules, Simple Direct Injective Modules and Simple Direct Projective Modules.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, yüksek lisans eğitimim için beni her zaman destekleyen ve bu araştırma alanındaki kariyerimi geliştiren danışmanım M. Tamer KOŞAN'a teşekkür ederim.

Özellikle, yüksek lisans çalışmalarım sırasında ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan mükemmel rehberliği, değerli önerileri, bilgi birikimi, sabırlı ve motivasyon dolu konuşmaları için değerli hocam Tülay YILDIRIM'a minnettarım. Hayatımda çok iyi bir dost olduğu gibi aynı zamanda da iyi bir öğretmen olarak harika bir yeri vardır. Onunla çalışma şansım olduğu için gerçekten çok huzurlu ve mutluyum.

Yüksek lisans çalışmamdaki maddi desteklerinden dolayı ayrıca Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) (117F070) teşekkür ederim.

Hayatımda en önemli yere sahip olan sevgili annem ve ablama, yıllarca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olduklarından dolayı canı gönülden teşekkür edip, zorlandığım her konuda beni teşvik etmeleri benim için büyük gururdur. Böylesine iyi bir aileye sahip olduğum için kendimi çok şanslı hissediyorum. Onların bu gücü ile ileriki akademik hayatımda çok daha güzel şeyler yapmayı hedefliyorum.

Ve son olarak, sevgili eşim Hüseyin DRAHYALI'ya, hayatımın farklı aşamalarında yüksek motivasyon, cesaretlendirme ve sabır gerektiren her durumda yanımda olduğu için teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
$\cap$	:	Kesişim
$\cup$	:	Birleşim
$\in$	:	Eleman
$\subseteq$	:	Altmodül
$\leq$	:	Altküme
$\setminus$	:	Fark
$\cong$	:	İzomorf
$\approx$	:	Hemen Hemen Eşit
$\oplus$	:	Dik Toplam
$\subseteq^{\oplus}$	:	Dik Toplanan
$\sum$	:	Toplam
$\prod$	:	Çarpım
Q	:	Rasyonel Sayılar
Ƶ	:	Tam Sayılar
R	:	Halka
M	:	Modül
Im	:	Değer Kümesi
Ker	:	Çekirdek
End(M)	:	M nin Endomorfizmi
M_R	:	Sağ R-modül M
$_RM$	:	Sol R-modül M
M^*	:	M nin Duali
R_R	:	Sağ R modül R
$M_n(R)$	:	R üzerindeki n×n Matris
Mod-R	:	Sol R-modülün Kategorisi
Rad(M)	:	M nin Radikali
$Ann_R(M)$	:	R-modül M nin Sıfırlayıcısı
E(M)	:	M nin İnjektif Gövdesi

J(R)	:	R nin Jacobson Radikali
SSP-modül	:	Güçlü Yarıasal Modüller

1. GİRİŞ

Eğer herhangi iki toplananın kesiştiği M toplamı yine bir toplam ise, M modülüne $D3$ modülü denir. Sıfır kesişime sahip herhangi iki toplananın toplamı yine bir toplanan ise, M modülüne $C3$ modülü adı verilir. Bu modüller, modül ve halka teorisinde kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır [1, 11, 13, 17, 23, 26].

[13] de, Yousif ve arkadaşları, $M = A_1 \oplus A_2$ bir $D3$-modülü ise, $D3$-modülü direkt projektif olmasa bile A_1 ve A_2 arasında direkt projektiflik olduğunu kanıtlamıştır. Bu sonuçla, iyi bilinen birçok halka sınıfı, $D3$ modülleri açısından tanımlanmıştır. Ayrıca [13] de, her düz sağ R-modülünün $D3$-modülü olması ancak ve ancak R'nin mükemmel sağ modül olmasıyla mümkün olduğu da gösterilmiştir. [16] da, Puninski ve arkadaşları, her sonlu üretilmiş düz sağ R-modül projektif ise; R nin sağ S-halka olduğunu ispatlamışlardır. Bunun sebebi ise; R nin bir sağ halka olmasıdır ancak ve ancak her sonlu üretilmiş düz sağ R-modül ve R sağ (yarı) kalıtsaldır ancak ve ancak $S = End\ (F_R)$ nin her temel sağ ideali $D3$ modüldür. [13] de detaylı gösterilmiştir.

[1] de, Utumi, eğer bir halka birebir ise o halka üzerinde $C1$, $C2$ ve $C3$ diye adlandırılan üç koşul tanımlamıştır. Daha sonra bu koşullar Jeremey [2], Takeuchi [3] ve Mohamed ve Bouhy [4] tarafından genişletilmiştir. [17] de, Yousif ve arkadaşları, I = 1,2,3 için CI-modülünün yarı-injektif modül olduğunu ve elde edilen sonucun $C3$-modülü açısından iyi bilinen birçok halka sınıfını tanımlamak için kullanıldığını gözlemlemişlerdir. Örneğin, bir R halkası ancak ve ancak iki $C3$ modülünün dik toplamı yine bir $C3$ modülü olması halinde yarı-basittir. Aynı makalede, Teorem 2.13 de, bir R halkasının düzgün olması ancak ve ancak köşegen bir matris tarafından üretilen $M_2(R)$ nin her asal sağ idealinin bir $C3$ modülü olması halinde mümkün olduğu gösterilmiştir.

[11] de, Atani Shahabaddin ve arkadaşları, yarı-basit halkaların, sağ V-halkalarının ve sağ kalıtsal halkalarının bazı tanımlarının $C3$ modülü tarafından sağlandığını kanıtlayıp $C3$-bürüm ve $C3$-örtü kavramlarını tanımlamışlardır. Araştırmalarının odak noktası, $D3$-modüllerinin duali olan $C3$-modüllerinin bir çalışmasıdır ve daha fazla ayrıntı için [13] incelenebilir. Aynı zamanda bu yazarlar,

[11] de, uniform modülleri, parçalanamaz modülleri, yarı-basit modülleri and *SSP*-modülleri gibi birkaç *C*3 modülü örneği ispatlamışlardır.

[23] de, Camillo ve arkadaşları, eğer her basit alt modül bir toplanana izomorf ise kendisinin de bir toplanan olduğunu ispatlamışlardır ve bu *M* modülüne de basit-direkt-injektif modül adı vermişlerdir. Bu modüllerin çeşitli temel özelliklerini sunmuş olup, her basit-direkt-injektif modülün ne zaman *C*3 modül olduğuna dikkat çekmişlerdir. Sadece bu konuyla ilgilenmemişler, aynı zamanda Teorem 3.4 ile de, her basit-direkt-injektif sağ *R* modülünün *C*3 olduğunu ancak ve ancak her basit-direkt-injektif sağ R modülünün yarı-injektif olduğunu ancak ve ancak *R* nin jacobson radikalinin sıfır olan bir artinian serisi olduğunu ispatlamışlardır. Daha fazla ayrıntı için [23] de Teorem 3.4 e bakabilirsiniz.

[26] da, İbrahim ve arkadaşları, basit-direkt-projektif modülleri çalışmış ve bu yeni kavramın bazı ilginç özelliklerini ortaya koymuşlardır. Dahası, bu sonuçların çoğunu basit-direkt-projektif modüller üzerinde yoğunlaştırmışlardır. Basit-direkt-projektif modüllerin dik toplananları yine basit-direkt-projektif iken, aynı örneklerle, basit-direkt-projektif modülün dik toplamının yine basit-direkt-projektif olması gerekmediğini göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında, [13], [17], [23] ve [26] tarafından desteklenen *C*3 ve *D*3 modülleri kavramını inceliyoruz ve bu modüllerin etkisi altında *N*-*C*3 ve *M*-*D*3 modülleri kavramlarını tanıtıyoruz. Motivasyonlarımızdan biri, injektif ve projektif modüllerin yapısı ve bunların başka bir halka ve modül teorisi ile olan ilişkileridir. Bu çalışmanın devamında aşağıdaki soruları soruyoruz:

i) Sağ modülleri *N*-*C*3 modülleri olan halkaların yapısı nedir ?
ii)Sağ modülleri *M*-*D*3 modülleri olan halkaların yapısı nedir ?

Araştırmalarımız sadece yukarıdaki sorulara cevap vermekle kalmaz, aynı zamanda bu teoriyi geliştiren araç ve teknikleri de sağlar ve genel olarak tez aşağıdaki gibi düzenlenmiştir:

İkinci bölümde, halka ve modül teorisinden bazı arka plan materyallerini ve temel tanımları verdik.

Üçüncü bölümde, basit injektif ve basit projektif modülleri tanımlanıp, bölüm boyunca da, $C3$ ve $D3$ modüllerini tanımlayan temel teoremler ve önermeler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, eğer M bir N-$C3$ modül, A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ ve $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ e sahip olan $f : A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyonu bir R-homomorfizması ise, $Im\ f \subseteq^{\oplus} A_2$ sağlanır. Bu sonuç çalışmamızda önemli bir rol oynamaktadır ve yukarıdaki soruları cevaplamak için kullanılmıştır. N-$C3$ modülleri açısından, M ve N modüllerinin sağ R-modülleri, $S = End\ (M_R)$ ve $S_1 = End\ (N_R)$ olduğunu elde ettik ve aynı zamanda eğer S bir sağ S_1-$C3$ halkası ise, M modülünün de bir N-$C3$ modül olduğunu elde ettik. Dahası, M ve N nin R-modül olduğu ancak ve ancak dik toplanan $M' \subseteq^{\oplus} M$ ve N nin her altmodülü için $N' \subseteq^{\oplus} N$ olması durumunda mümkündür. Dolayısıyla M' de bir N'-$C3$ modül olur. Diğer taraftan, M-$D3$ modüllerinin karakterizasyonu için bazı sonuçlar araştırılmıştır. Bu çalışma boyunca, örneğin, eğer N bir M-$D3$ modülü, A_1 ve A_2 alt modülleri için $N = A_1 \oplus A_2$ ve $Im\ f \subseteq^{\oplus} A_2$ sahip olan bir $f : A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyonu R-homomorfizması ise, $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ sağlanır.

2. ÖN HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, projektif ve injektif modüller teorisinin yanı sıra ayrıca okuyucunun rahatlığı için de modül teori ile ilgili gerekli genel tanımları vermekteyiz. $C3$ ve $D3$ modül teorileri hakkında ayrıntılı bigi için verdiğimiz [11,13,17,23,26] deki referansları inceleyebilirsiniz. Sonraki bölümde, yukarıda belirtilen modül sınıflarının N-$C3$ ve M-$D3$ koşulları açısından genel ve birleştirici bir işlem görmesini sağlayıp, iyi bilinen birkaç halka sınıfının yeni özelliklerini de belirledik.

Bölüm boyunca her R halkası birimli ve birleşmeli olup bütün modüller ise birimsel olarak kabul edilecektir. Bir R halkası için, alt modül, temel alt modül ve M nin endomorfizm halkası, sırasıyla $N \subseteq M$, $M \subseteq^{ess} M$ ve $S = End(M_R)$ ile ifade edilir. Genel kullanıma uygun olarak N, M nin küçük bir alt modülü ise $N \xrightarrow{small} M$ kullanılmıştır ve N de M nin bir dik toplananı ve $M_n(R)$, R üzerindeki n×n matrisi ise $N \subseteq^{\oplus} M$ olduğu sağlanır.

2.1. *C*3 ve *D*3 Modüller Üzerindeki Temel Kavramlar

Çalışma boyunca aşağıdaki tanımlar dikkate alınmıştır [6], [28]:

Sol Modül: R bir halka, M bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere; $R \times M \to M$, $(r,m) \to r\,.\,m$ *ile tanımlanan dış işlem, her* $r_1, r_2, r \in R$ *ve* $m, m_1, m_2 \in M$ *için;*

i) $r\,.\,(m_1 + m_2) = r.\,m_1 + r\,.\,m_2$

ii) $(r_1 + r_2)\,.\,m = r_1\,.\,m + r_2\,.\,m$

iii) $(r_1\,.\,r_2)\,.\,m = r_1\,.\,(r_2\,.\,m)$

koşulları sağlanıyor ise M ye bir sol R-modül denir. Bu koşullara ek olarak R halkası birimli ($1_R \in R$) *ve*

iv) $1_R\,.\,m = m$

koşuluda sağlanıyor ise M ye bir sol birimli modül denir.

Sağ Modül: R bir halka, M bir toplamsal değişmeli grup olmak üzere; $M \times R \rightarrow M$, $(m,r) \rightarrow m \,.\, r$ *ile tanımlanan dış işlem, her* m , m_1 , m_2 $\in M$ *ve* r_1 , r_2 , r $\in R$ *için;*

i) $(m_1 + m_2) \,.\, r = m_1 \,.\, r + m_2 \,.\, r$

ii) $m \,.\, (r_1 + r_2) = m \,.\, r_1 + m \,.\, r_2$

iii) $m \,.\, (r_1 \,.\, r_2) = (m \,.\, r_1) \,.\, r_2$

koşulları sağlanıyor ise M ye bir sağ R-modül denir. Bu koşullara ek olarak R halkası birimli ($1_R \in R$) *ve*

iv) $m \,.\, 1_R = m$

koşuluda sağlanıyor ise M ye bir sağ birimli modül denir.

Alt Modül: R bir halka ve M bir R-modül olsun. N, M nin boş kümeden farklı br altkümesi olsun. Her $a,b \in N$ *ve her* $r \in R$ *için;*

i) $0_M \in N$

ii) $a - b \in N$

iii) $r \,.\, a \in N$ ($a \,.\, r \in N$)

oluyorsa N ye M nin bir sol (sağ) R-alt modülü denir.

Direkt Toplam: M, bir R-modül ve $N_1, N_2, \ldots, N_t$ *M nin R-alt modülleri ve* $1 \leq i \leq t$ *için;*

$$N_i \cap (N_1 + \ldots + N_{i-1} + N_{i+1} + \ldots + N_t) = \{0\}$$

oluyorsa $N_1 + \ldots + N_t$, *R-alt modülüne,* N_i , *R-alt modüllerinin direkt toplamı denir ve*

$$N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_t$$

ile gösterilir.

Çekirdek ve Değer Kümesi: M ve N iki alt modül ve $f : M \rightarrow N$, bir R-homomorfizma olsun. O zaman;

a) $\{ x \in M : f(x) = 0_N \}$ kümesine f nin çekirdeği denir ve ker f ile gösterilir.
b) $f(M) = \{ f(x) : x \in M \}$ kümesine f altında M nin homomorfik görüntüsü denir ve Im f ile gösterilir.

Epimorfizma, İzomorfizma ve Monomorfizma: M ve N iki R-modül ve $f : M \rightarrow N$ bir R-homomorfizma olsun. f bire-bir ise f ye R-monomorfizması, f örten ise f ye R-epimorfizması, f bire-bir ve örten ise f ye R-izomorfizması denir. Eğer f bir izomorfizma ise M ile N izomorftur denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Basit Modül: Bir M modülü, sıfır değilse ve sıfır olmayan bir A alt modülünü kabul etmiyorsa basit bir modüldür. M modülünün basitliği, aşağıdaki koşullardan birine eşittir:

i) M de sıfır olmayan her m için $Am = M$.
ii) A nın bazı maksimal sol idealleri için $M \cong A \setminus m$.

Yarı-basit Modül: Bir modül, aşağıdaki eşdeğer koşullardan herhangi birini karşılarsa yarı basit modüldür:

i) Basit alt modüllerin toplamıdır.
ii) Basit alt modüllerin dik toplamıdır.
iii) Her alt modülün bir tamamlayıcısı vardır.

Sürekli ve Yarı-sürekli Modül: Bir M modülü (C1) ve (C2) koşullarına sahipse bu modüle sürekli; M modülü (C1) ve (C3) koşullarına sahipse bu M modülüne de yarı-sürekli denir.

- *(C1): Herhangi (quasi) injektif modülü M, aşağıdaki iki koşulu sağlar:*
- *(C2): M nin her altmodülü, M nin toplananlarında temeldir.*
- *(C3): M nin bir A alt modülü için, M nin bir toplananına izomorf ise, o zaman A, M nin bir toplamıdır.*

Parçalanamaz Modül: Bir M modülü sıfır değilse ve sıfır olmayan iki alt modülün de dik toplamı şeklinde yazılamıyorsa, bu M modülüne parçalanamaz modül denir.

Düzgün Modül: Verilen herhangi $_RM$ modülüne göre, M nin duali $M^* = hom(_RM, R)$ olarak belirtilir. M^*nin aşağıdaki gibi bir sağ R-modülü olduğuna dikkat edilmelidir: eğer $\lambda \in M^*$ve $a \in R$ ise, her $x \in M$ için $\lambda a : M \to R, x(\lambda a) = (x\lambda)a$ şeklinde tanımlanır. 1972 de, Zelmanowitz [5], M den alınan bir x elemanını, bazı $\lambda \in M^*$ için $x = (x\lambda)x$ koşulu sağlanırsa bu $x \in M$ düzgündür şeklinde tanımlamıştır ve Zelmanowitz [5], her elemanı düzgün olan bir modüle düzgün modül adını vermiştir.

Quasi-Baer Modül: End(M) nin ideallerinin sağ sıfırlayıcısı M nin bir dik toplananı ise, M modülüne (quasi-) Baer modül adı verilir.

Unifom Modül: M nin sıfırdan farklı herhangi U_1 ve U_2 altmodülleri için $U_1 \cap U_2 \neq 0$ oluyorsa bu M modülüne uniform modül denir.

SIP-Modül: M nin herhangi iki dik toplanananın arakesiti yine M nin bir dik toplananı ise bu M modülüne SIP modül adı verilir.

Ayrık Modül: Bir M modülü artan ise ayrık modül olarak adlandırılır ve aşağıdaki koşulu sağlar: $M / N \cong K \subseteq^{\oplus} M$ koşuluna sahip olan M nin herhangi bir N alt modülü, M nin yine bir altmodülüdür.

[1] de, Utumi, eğer bir halka birebir ise bunu sağlayan bir halka üzerinde üç koşul tanımlamıştır. Sonraki yıllarda, Jeremey [2], Takeuchi [3], Mohamed and Bouhy [4] bu koşulları modüle genişletmişlerdir.

Tanım 2.1: Bir M modülüne;

i) C1-modülü denir, eğer her alt modül M nin dik toplananında temel ise.
ii) C2-modülü denir, M nin A ve B alt modülleri için, eğer $A \cong B$ ve $B \subseteq^{\oplus} M$ olduğunda, $A \subseteq^{\oplus} M$ koşul sağlanıyorsa.

iii) C3-modülü denir, M nin A ve B alt modülleri için $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ olduğunda, $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$ oluyorsa.

[17] de, I=1,2,3 için *C*I koşullarını sağlayan bir *M* modülü *C*I-*modülü* olarak adlandırılmıştır.

Ayrıca, *M* nin bir *M* alt modülünden her *R*-homomorfizmi *M* den *M* ye bir *R*-homomorfizmi için genişletilebilirse bu *M* modülüne *yarı-injektif* denir. Literatürde, her *yarı-injektif* modülünün I = 1,2,3 için bir *C*I-modülü olduğu bilinmektedir. *C*2-modülleri *C*3-modülleri olsa bile, *C*1-modülleri olmayan *C*2-modüllerinin örnekleri vardır, ve [6, Önerme 2.1] de *C*3-modülleri olmayan bazı *C*1-modüllerinin olduğu görülebilir. Ayrıca [6, Önerme 2.1] de, yazarlar *C*2-modülleri olmayan *C*3-modüllerini ispatlamışlardır. [2] ve [6] da ayrıca *C*1 ve *C*2 modüllerinin sırasıyla *CS-modülleri* ve *direkt-injektif modüller* olarak adlandırıldığı gösterilmiştir.

*C*3 koşulu literatürde sadece diğer süreklilik koşullarının varlığında incelenmiştir. İnjektif ve direkt-injektif modüllere ek olarak, *C*3 modüllerinin sınıfı, yarıbasit, sürekli, parçalanamaz ve düzenli modülleri içerir. Gerçekten, her değişmeli halkanın bir *C*3 halkası olduğu [17] de gösterilmiştir.

Literatürde, *C*2 ve *C*3 modülleri *CS*-koşullarıyla birlikte kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. [7,8,9,10] de, Camillo ve arkadaşları, bu modüllerin basit versiyonlarını göstermiş olup, halka ve modül yapılarını da analiz etmek için kullanmışlardır.

[23, Önerme 2.1] de, Camillo ve arkadaşları, eğer her basit alt modül bir toplanana izomorf ise kendisinin de bir toplanan olduğunu ispatlamış ve bu *M* modülüne de basit-direkt-injektif modül adı vermişlerdir veya eşdeğer olarak; sıfır kesişime sahip herangi iki basit toplananın toplamı yine bir toplanan ise bu modüle basit-direkt-injektif modül adı verilmiştir.

[11] de, yazar *C*3-modül kavramlarını çalışmıştır ve bunu [12], [8] ve [13] de destekleyen yazarlar ise *C*3-örtü ve *C*3-bürüm kavramlarını tanımlamışlardır. Modül teorideki bu kavramlarının çalışmasını sağlayan sorular aşağıdaki gibidir:

- Sağ modülleri *C*3 olan (sonlu üretilmiş) halkaların yapısı nedir ?
- Sağ modülleri *C*3-örtü ve *C*3-bürüm olan (sonlu üretilmiş) halkaların yapısı nedir ?

Yazarların araştırmaları yukarıdaki soruları yanıtlar ve ayrıca bu teoriyi geliştiren araçlar ve teknikler sunar. Öncelikle, yazarlar $M = M_1 \oplus M_2$ bir $C3$-modül ve $Kerf \subseteq^{\oplus} M_1$ ye sahip bir f: $M_1 \rightarrow M_2$ fonksiyonu R-homomorfizması ise, $Imf \subseteq^{\oplus} M_2$ olduğunu kanıtlamışlardır. Bu sonuç, çalışmaların asıl amacıdır ve yukarıdaki soruları cevaplamak için kullanılır. Her sağ modülün $C3$ modül olduğu ancak ve ancak R nin yarıbasit halka olması koşulunda kanıtlanmıştır. Ayrıca, yazarlar R nin sağ kalıtsal olduğunu ancak ve ancak R-modülünün her faktör ve injektif modülünün $C3$ modülü olması durumunda elde etmişlerdir.

Şimdi ise, $D3$ modül kavramı ve $D3$ modülleri açısından tanınmış halka sınıflarının yeni karakterizasyonları üzerinde duracağız.

Tanım 2.2: Bir M modülü aşağıdaki koşulları sağlar:

i) D1-koşulu: M nin her alt modülü için $A \subseteq M$, $M_1 \subseteq A$ *and* $A \cap M_2 \xrightarrow{small} M$ *durumlarına sahip bir* $M = M_1 \oplus M_2$ *parçalanışı vardır.*

ii) D2-koşulu: Eğer A, M nin, M /A M nin dik toplananına izomorf olacak şekildeki bir alt modülü ise, bu durumda A, M nin dik toplananıdır.

iii) D3-koşulu: Eğer M nin dik toplananları M_1 *ve* M_2 *ve* $M = M_1 \oplus M_2$ *ise,* $M_1 \cap M_2$*, M nin dik toplananıdır.*

[13] de, I=1,2,3 için DI-koşullarını sağlayan bir M modülü DI-*modülü* olarak adlandırılmıştır.

Her yarı-projektif sağ R-modülü $D2$-modülüdür, her $D2$-modülü $D3$-modülüdür, ve $D2$-modülleri olmayan $D3$-modüllerinin örneği ile yarı-projektif olmayan $D2$-modüllerinin örneği [13] ve [6] makalelerinde incelenebilir. $D1$-modülleri Oshiro [14] tarafından yükseltilmiş modüller olarak adlandırılmıştır. $D2$-modülleri ise W.K.Nicholson [15] tarafından direkt-projektif modül olarak adlandırılmıştır ve [7, 4.21] de $D3$-modülleri ∩-*direkt-projektif* olarak adlandırılmıştır.

$D3$-modül örnekleri, [13] de verildiği gibi, Ayrık ve Yarı-Ayrık Modülleri, Uniform ve Parçalanamaz Modülleri, Yarı Basit Modülleri, Baer Modüllerini ve SIP-Modüllerini içerir.

$D3$-modüllerinin direkt-projektif modül olmasına gerek yokken, [13, Önerme 4] de, yazarlar eğer $M = A_1 \oplus A_2$ bir $D3$-modülü ise, bu durumda A_1 ve A_2 arasında direkt-projektiflik ilişkisinin olduğunu göstermişlerdir. Daha da özelleştirmek gerekirse eğer $M = A_1 \oplus A_2$ bir $D3$-modülü ve $(Imf) \subseteq^{\oplus} A_2$ olacak şekildeki $f : A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyonu bir R-homomorfizması ise, bu durumda $(kerf) \subseteq^{\oplus} A_1$ olur. Bu sonuçla, iyi bilinen birçok halka sınıfı, D3 modülleri açısından tanımlanır. Örneğin, bir R halkası sağ mükemmeldir ancak ve ancak her düz sağ R-modülü $D3$-modülüdür ve R bir *sağ S-halkasıdır* ancak ve ancak her sonlu üretilmiş düz sağ R-modül $D3$-modülüdür. Bu örnekler için detaylı bilgiye [13] den bakabilirsiniz. Buna istinaden, eğer her sonlu üretilmiş düz sağ R-modülü projektif ise bu R halkasına sağ S-halkası adı verilir [16]. Ayrıca bir R halkasının, herangi bir (sonlu üretilmiş) serbest sağ R-modülü F için $S = End(F_R)$ nin her bir esas sağ idealinin $D3$-modülü olması halinde, sağ kalıtsal olduğu [13] de gösterilmiştir. Dolayısıyla bir R halkası, düz sağ R-modülünün her altmodülünün $D3$-modülü olması durumunda sağ kalıtsal ve sağ mükemmeldir.

2.2. *N-C*3 ve *M-D*3 Modüller Üzerindeki Temel Kavramlar

Modül teori üzerine yapılan bu çalışmanın amacı sağ modülleri $C3$ olan halkaların ve sağ modülleri $D3$ olan halkaların yapısını incelemektir. Bu bölümde N-$C3$ ve M-$D3$ modül kavramlarının tanımı yapılıp, bu kavramlarla ilgili elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.3: A ve B, $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ *ve* $A \cap B = 0$ *olacak şekilde N nin birer alt modülleri ise, bu durumda* $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ *koşulunu sağlayan M modülüne N-C3 modül adı verilir.*

Tanım 2.4: A ve B, $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ *ve* $A \oplus B = N$ *olacak şekilde N nin birer alt modülleri ise, bu durumda* $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ *koşulunu sağlayan N modülüne M-D3 modül adı verilir.*

3. İNJEKTİF ve PROJEKTİF MODÜLLER

3.1. Basit İnjektif Modüller

Bu bölümde yeni karakterizasyonları ile basit-injektif-modüller üzerinde çalışıyoruz. Daha ayrıntılı bilgi almak için [23] ve [27] kaynakları incelenebilir. Bu bölümün temel amacı, temel teorem ve $C3$ modüllerinin örneklerini vermektir. Bunun için ise [17] makalesinden yararlandık.

Önerme 3.1: I=1,2,3 için, CI-modüllerinin toplananı yine bir CI-modüldür [6, 2.7].

Önerme 3.2: M, sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) M, C3-modüldür.

ii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ ise, bu durumda $A_1 \supseteq A$ ve $B_1 \supseteq B$ alt modülleri için $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ sağlanır.

iii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ ise, bu durumda $A + B \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır.

Kanıt: (i)⇒(ii) $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$ olduğundan, M nin bir T alt modülü için $M = A \oplus B \oplus T$ olur. $A_1 = A \oplus T$ ve $B_1 = B \oplus T$ olarak alınırsa, bu durumda $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ olduğu görülebilir.

(ii)⇒(i) $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. Amacımız $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$ olduğunu göstermektir. Hipotez gereği, $A_1 \supseteq A$ ve $B_1 \supseteq B$ alt modülleri için, $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ elde ederiz. O halde $B_1 = B_1 \cap M = B_1 \cap (A_1 \oplus B) = B \oplus (A_1 \cap B_1)$, ve böylece $M = A \oplus B_1 = A \oplus B \oplus (A_1 \cap B_1)$ olur.

(i)⇒(iii) M nin bir K alt modülü için $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$, $M = (A \cap B) \oplus K$ elde ederiz. Böylece, $A = (A \cap B) \oplus (A \cap K)$ ve $B = (A \cap B) \oplus (B \cap K)$ sağlanır. M bir C3-modül, $(A \cap K) \subseteq^{\oplus} M$, $(B \cap K) \subseteq^{\oplus} M$ ve $(A \cap K) \cap (B \cap K) = (A \cap B) \cap K = 0$ olduğundan, $T =: (A \cap K) \oplus (B \cap K) \subseteq^{\oplus} M$ elde edilir. $T \subseteq^{\oplus} M$, $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ ve $(A \cap B) \cap T = 0$ olduğundan, $(A \cap B) \oplus T \subseteq^{\oplus} M$ sonucuna varırız. O halde,

$A+B=[(A\cap B)\oplus(A\cap K)]+[(A\cap B)\oplus(B\cap K)]=(A\cap B)\oplus(A\cap K)\oplus(B\cap K)=(A\cap B)\oplus T\subseteq^{\oplus} M$..

(iii)⇒(i) Açıktır. ■

Önerme 3.3: M bir C3-modül, A_1 ve A_2 altmodülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ ve $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ olacak şekilde $f : A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyonu bir R-homomorfizması ise, bu durumda $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ sağlanır.

Kanıt: Öncelikle $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir R-homomorfizması ise, bu durumda $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ olduğunu göstermek gerekir. $T = \{a + f(a) : a \in A_1\}$, M nin çizgisel alt modülü olsun. Bu durumda, $M = T \oplus A_2$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $x \in M$ ise, $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ için $x = a + b$ sağlanır. O halde, $x = a + f(a) - f(a) + b \in T + A_2$ olur, ve böylece $M = T + A_2$ elde edilir. Eğer $x \in T \cap A_2$ ise, bazı $a \in A_1$ için $x = a + f(a)$ sağlanır, ve dolayısıyla $a = x - f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$ olur. Açıkca, $x = 0$, $M = T \oplus A_2$ ve $T \subseteq^{\oplus} M$. Şimdi ise, $A_1 \cap T = 0$ olduğunu kanıtlamalıyız. Eğer $x \in A_1 \cap T$ ise, bu durumda bazı $a \in A_1$ için $x = a + f(a)$ sağlanır, ve sonunda $x - a = f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$ elde edilir. O halde, f bir monomorfizma olduğundan, $a = 0$ ve dolayısıyla $x = 0$ elde edilir. M bir C3-modül olduğundan, $A_1 \oplus T \subseteq^{\oplus} M$. Son olarak, $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \mathrm{Im} f$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $x \in \mathrm{Im}\, f$ ise, bazı $a \in A_1$ için $x = f(a)$ olur, ve böylece $x = -a + a + f(a) \in A_1 + T$ ve $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \mathrm{Im}\, f$ elde edilir. $A_1 \oplus T \subseteq^{\oplus} M$, $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} M$ olduğundan, bu durumda $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ sağlanır. O halde $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ olacak şekilde $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir R-homomorfizması olsun. Eğer A_1 in bir B altmodülü için $A_1 = \ker f \oplus B$ oluyorsa, bu durumda $M = A_1 \oplus A_2 = \ker f \oplus B \oplus A_2$ olacak şekilde $f|_B : B \rightarrow A_2$ kısıtlanmış görüntüye monomorfizma denir. C3-modülün toplananı yine bir C3-modül ise, bir önceki argümandan $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im} f|_B \subseteq^{\oplus} A_2$ olduğu sonucuna varırız. ■

Sonuç 3.4: Eğer M bir C3-modül, A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ ve $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir R-monomorfizması ise, bu durumda $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ sağlanır.

Örnek 3.5 [17]: $\mathbb{Z}$-monomorfizm $0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ şeklinde bölünemediğinden, $\mathbb{Z}$-modül $M = \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ bir C3-modülü değildir, fakat $\mathbb{Z}$ ve $2\mathbb{Z}$ halkaları birer C3-modüldürler.

Sonuç 3.6: Eğer $M \oplus M$ bir C3-modül ise, bu durumda M bir C2-modüldür.

Sonuç 3.7: Eğer M bir sağ R-modül ise, bu durumda M nin her sonlu (sayılabilir, keyfi) dik toplamı bir C3-modüldür ancak ve ancak M nin her sonlu (sayılabilir, keyfi) dik toplamı bir C2-modüldür.

Önerme 3.8: M bir sağ R-modül, ve $S = End(M_R)$ olsun. Eğer S bir sağ C3-halkası ise, bu durumda M bir sağ C3-modüldür. Ayrıca, $M_n(R)$ bir sağ C3-halkası ise, $R_R^{(n)}$ bir sağ C3-modüldür.

Kanıt: $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$ olduğunu ispatlamalıyız. $A = eM$ ve $B = fM$ olacak şekilde $e^2 = e \in S$, $f^2 = f \in S$ alalım. $A \cap B = 0$ olduğundan, $eS \cap fS = 0$ sonucunu elde ederiz, ve böylece $eS \oplus fS \subseteq^{\oplus} S$ olur. Eğer bazı $g^2 = g \in S$ için $S = eS \oplus fS \oplus gS$ olursa, bu durumda $M = eM \oplus fM \oplus gM$ sağlanır. Böylece, $A \oplus B = eM \oplus fM \subseteq^{\oplus} M$. O halde, $End(R_R^{(n)}) \approx M_n(R)$ ve istenen sonuç elde edilir. ■

Hatırlatma 3.9: Sağ C3-halkası olmak Morita sabiti değildir. Aksi takdirde, R nin C3-halkası olduğu heryerde $M_2(R)$ bir sağ C3-halkasıdır, ve Önerme 3.8 gereğince, $R \oplus R$ bir sağ C3-modüldür. Bu sebeple, Sonuç 3.6 gereğince R nin bir sağ C2-halkası olduğunu söyleyebiliriz. $\mathbb{Z}$, C2-halkası olmayan bir C3-halkasının bir örneği olduğu için bu bir çelişkidir.

Önerme 3.10: Aşağıdaki koşullar denktir:

i) Bütün $n \geq 1$ için, $R_R^{(n)}$ sağ C3-modüldür.
ii) Bütün $n \geq 1$ için, $R_R^{(n)}$ sağ C2-modüldür.
iii) Bütün $n \geq 1$ için, $M_n(R)$ sağ C2-halkasıdır.
iv) Bütün $n \geq 1$ için, $M_n(R)$ sağ C3-halkasıdır.

M bir direkt-injektif modüldür ancak ve ancak $A \subseteq^{\oplus} M$ ve herangi bir $f : A \to M$ şeklinde verilen f fonksiyou monomorfizmadır ve bu kolayca ispatlanabilir. O halde $i : A \to A$ birebir fonksiyon olduğu yerde $g \circ f = i$ olacak şekilde $g : M \to A$ monomorfizması vardır. Direkt injektif modüllerin Morita denkliği altında korunduğu görülebilir. $C3$ modüllerinin Morita denkliği altında korunup korunmadığından emin olmasak da, aşağıdaki iddiaya sahibiz:

Hatırlatma 3.11: M bir sağ R-modül olsun. M nin bazı A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$, $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir R-monomorfizm ve $i : A_1 \rightarrow A_1$ birebir fonksiyon olması durumunda $gof = i$ olacak şekilde bir $g : A_2 \rightarrow A_1$ R-homomorfizması varsa, M üzerinde (C-) koşulu sağlanır. Sonuç 3.4 gereğince, her C3-modülü (C-*) koşulunu sağlar. Morita denkliği, toplanan, monomorfizma ve izomorfizmi koruduğundan, eğer R ve S, kategori denkliği Γ: Mod-R → Mod-S olacak şekilde Morita eşdeğeri ise, bu durumda sağ R-modül M_R (C-*) koşulunu sağlar ancak ve ancak $\Gamma(M)_S$ nin (C-*) koşulunu sağlaması halinde.*

Her basit sağ *R*-modülü injektif ise, bir *R* halkasının sağ *V* halkası olduğunu hatırlayın [17]. Diğer bir deyişle, her sağ *R*-modül *M* için $rad(M) = 0$ olur. Aşağıdaki önermede, *C*3 modülü sınıfının dik toplamlar altında kapatılması gerekmediği elde edilmiştir.

Önerme 3.12: Aşağıdakiler birbirine denktir:

i) R, yarı basit halkadır.
ii) Herhangi iki C3 modülünün dik toplamı bir C3 modülüdür.
iii) Projektif R-modülün her altmodülü bir C3-modüldür.
iv) $R \oplus R$ nin her altmodülü bir C3-modüldür.
v) İnjektif R-modülün her altmodülü bir C3-modüldür.

Kanıt: (i)⇒(ii) , (i)⇒(iii)⇒(iv) ve (i)⇒(v) açıktır.
(ii)⇒(i) İki C3 modülünün dik toplamının bir C3 modülü olduğunu varsayalım ve K yı ya yarı basit yada parçalanamaz sağ R-modülü olarak alalım . Her iki durumda da K nın injektif olduğunu kanıtlamamız gerekir. Açıkca, $K \oplus E(K)$ bir C3-modül, ve eğer $i : K \rightarrow E(K)$ birebir fonksiyon ise , bu durumda, sonuç 3.4 gereği, $K \cong i(K) \subseteq^{\oplus} E(K)$, ve K birebir olur. Her yarı basit sağ R modülü injektif olduğundan, R bir sağ noetherian sağ V halkasıdır. $R = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$ parçalanamaz sağ ideallerin dik toplamı olsun. (i=1,2,...,n) için her bir K_i injektif olduğundan, R nin birebir öz olduğu sonucuna varırız. Ayrıca, R / J(R) bir düzenli halkadır. Fakat R bir sağ V-halka ise, J(R) = 0 ve R bir düzgün sağ noetherian halka, ve böylece yarıbasit olur.

(iv)⇒(i) Eğer I , R nin sağ ideali ise, bu durumda I $\oplus$ R bir C3-modüldür. Sonuç 3.4 gereği, eğer i : I → R içine görüntü ise, bu durumda I $\subseteq^{\oplus}$ R, ve R yarıbasittir.
(v)⇒(i) Eğer M sağ R-modül ise, bu durumda E(M) $\oplus$ E(M) in bir alt modülü olan M $\oplus$ E(M) nin da bir C3-modül olduğu elde edilebilir. Böylece, standart monomorfizma 0→M→E(M) M bölünür. Dolayısıyla M bir injektif ve R de bir yarıbasittir. ■

Teorem 3.13: Aşağıdaki koşullar denktir:

i) R, düzenli bir halkadır.
ii) $M_2(R)$ nin her esas sağ ideali, C3-modüldür.
iii) Bir köşegen matris tarafından üretilen $M_2(R)$ nin her esas sağ ideali, C3-modüldür.
iv) Projektif sağ R-modülün her sonlu üretilmiş bir alt modülü dik toplanandır.
v) Projektif sağ R-modülün her sonlu üretilmiş bir alt modülü C3-modüldür.
vi) Projektif sağ R-modülün her 2 ile üretilmiş bir alt modülü C3-modüldür.

Kanıt: (i)⇒(ii) Düzenli olmak, bir Morita sabiti olduğu için, S = $M_2(R)$ bir düzenli halka, ve S nin her esas sağ ideali S nin bir toplananıdır. Her düzenli halka bir sol C3 modülü ve sağ C3 modülü ve C3-modülünün bir toplananı yine bir C3-modülü olduğundan, S nin her esas sağ ideali bir C3-modüldür.
(ii)⇒(iii) açıktır.
(iii)⇒(i) S = $M_2(R)$, a $\in$ R ve I da $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tarafaından üretilmiş S nin esas sağ ideali olsun. Bir sağ S-modül olarak, I da bir C3-modüldür. Eğer e = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise, bu durumda M nin sağ R-modül olduğu yerde M → Me aracılığıyla, S ve R Morita denkliğidir. O halde Ie $\cong$ aR $\oplus$ R bir sağ R-modül olarak ve I, (C-$*$) koşulunu sağladığından, Hatırlatma 3.11 gereği aR $\oplus$ R da (C-$*$) koşulunu sağlar ve içine görüntü i : aR → R bölünür. Dolayısıyla, aR, R nin bir toplananıdır ve R düzenli bir halkadır.
(i)⇔(iv) Kaplansky [18, Önerme 4] makalesinden açıkça görülür.
(iv)⇒(v)⇒(vi) kolayca görülebilir.

(vi)⇒(i) Eğer a $\in$ R ise, bu durumda sağ R-modül olarak aR $\oplus$ R bir C3-modüldür. Sonuç 3.4 gereği, eğer i : aR → R bir içine görüntü ise, bu durumda aR $\subseteq^{\oplus}$ R, ve R düzenli bir halkadır. ■

Eğer *M* nin kopyalarının her dik çarpımı olan M^I yarı-injektif ise sağ *R*-modül M ye *Π-yarı-injektif* denir [17]. Projektif sağ *R*-modülün her alt modülü projektif ise bu durumda *R* halkasına *sağ kalıtsal* denir. Buna eşdeğer olarak, injektif sağ *R*-modülün her faktör modülü injektifdir.

Teorem 3.14: Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) R, sağ kalıtsaldır.
ii) İnjektif sağ R-modülün her faktör modülü bir C3-modüldür.

Kanıt: (i)⇒(ii) Açıktır.
(ii)⇒(i) M, injektif sağ R-modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. M / K nın injektif olduğunu göstermeliyiz. Fakat, E(M / K) $\oplus$ M nin bir faktör modülü olan E (M / K) $\oplus$ M / K bir C3-modüldür. Sonuç 3.4 gereği, gömülü R-monomorfizması olan M / K→ E (M / K) bölünür; ve M / K injektiftir, istenildiği gibi. ■

Önerme 3.15: Aşağıdaki koşullar denktir:

i) R nin her faktör modülü bir sağ kalıtsaldır.
ii) Π-quasi-injekif sağ R-modülün her faktör modülü yarı-injektiftir.
iii) Π-quasi-injekif sağ R-modülün her faktör modülü C3-modüldür.

Kanıt: (i)⇒(ii) [14, Teorem 6] makalesinden kolayca görülebilir.
(ii)⇒(iii) Kolayca görülebilir.
(iii)⇒(i) I, R nin bir ideali olsun ve E injektif sağ (R / I)-modül olsun. Teorem 3.14 gereği, sağ (R / I)-modül olarak bilinen her faktör modül E / N nin bir C3-modül olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. I $\subseteq$ Ann_R (E) olduğundan, bir sağ (R / Ann_R(E))-modül olan E injektiftir, burada Ann_R (E), R halkasında E nin sıfırlayıcı

idealidir. Dolayısıyla, [19, Teorem 1.2] gereği, bir sağ R modül olarak E bir Π-yarı-injektiftir. Hipotez gereği, bir sağ R modül olarak E / N bir C3-modül olduğu söylenir. Bu durumda (R / I) bir sağ modüldür. ■

Eğer *M* nin kopyalarının her (sayılabilir) dik toplamı (yarı-) injektif oluyorsa *M* (sayılabilir) *Σ-(yarı-)injektif* olarak adlandırılır [17]. Benzer şekilde, *M* nin kopyalarının her (sayılabilir) dik toplamı *C*3-modül oluyorsa *M* (sayılabilir) *Σ-C3-modül* olarak adlandırılır. Faith and Walker [7], her injektif sağ *R*-modülün Σ-injektif olması halinde *R* halkasının sağ noetherian olduğunu göstermiştir ve buna eşdeğer olarak Fuller [20], her yarı-injektif sağ *R*-modülün Σ-quasi-injektif olduğunu göstermiştir.

Teorem 3.16: Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) R, sağ noetherian dır.
ii) Her injektif sağ R-modül, Σ-injektiftir.
iii) Her yarı-injektif sağ R-modül, Σ-yarı-injektiftir.
iv) İnjektif sağ R-modülün her dik toplamı bir C3-modüldür.
v) İnjektif sağ R-modülün her sayılabilir dik toplamı bir C3-modüldür.
vi) Her injektif sağ R-modül sayılabilir bir Σ-C3-modüldür.
vii) Her yarı-injektif sağ R-modül sayılabilir bir Σ-C3-modüldür.

Kanıt: (i)⇔(ii)⇔(iii) [17] de ispatı yapılmıştır. Ayrıca, [7] ve [20] deki kaynaklarda incelenerek ispatlanabilir.
(i)⇒(iv)⇒(v) Her injektif modül C3-modül olduğundan, [21, Teorem 6.5.1] makalesi incelenerek ispatlanabilir.
(v)⇒(i) Eğer $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ *, injektif sağ R-modülün sayılabilir bir dik toplamı ise, bu durumda* $M \oplus E(M)$ *bir C3-modül olduğu elde edilebilir. Sonuç 3.4 gereği, eğer* $i : M \to E(M)$ *bir içine görüntü ise, bu durumda* $M \cong i(M)$*, E(M) nin bir toplananıdır. Bu yüzden,* $M \cong E(M)$ *injektif ve R sağ noetherian olur. Daha ayrıntılı bilgi için [21, Teorem 6.5.1] incelenebilir.*
(vii)⇒(vi) Açıktır.

(vi)⇒(v) $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ *, injektif sağ R-modülün sayılabilir bir dik toplamı ve* $K =: \prod_{i\in I} M_i$ *olsun. K injektif olduğundan, hipotez gereği* K^I *nın bir C3-modül olduğu sonucuna varırız.* M_i *injektif olduğundan, K nın bir* T_i *alt modülü için* $K = M_i \oplus T_i$ *sağlanır (*$i \in K$*). O halde,* $K^I = (\bigoplus_{i\in I} M_i) \oplus (\bigoplus_{i\in I} T_i)$ *bir C3-modül, ve C3-modüllerin toplananları yine bir C3-modül olduğundan* $\bigoplus_{i\in I} M_i$ *nin de C3-modül olduğu sonucu elde edilir.*
(i)⇒(vii) [19] kaynağı incelenebilir. ■

[22] de Enochs, injektif bürüm kavramının bir duali olan injektif örtü kavramını tanıtmıştır ve bir *R* halkasının sağ noetherian olduğunu ancak ve ancak her sağ *R* modülün injektif bir örtüye sahip olması durumunda ispatlamıştır. Enochs'un çalışmaları *C*3-örtü kavramlarını tanıtır ve bu kavramlar üzerine yoğunlaşır. *R* yarıbasittir ancak ve ancak her sağ *R*-modülü *C*3-örtüye sahiptir ve *R* bir sağ noetherian ancak ve ancak injektif sağ *R*-modülün her dik toplamı *C*3-örtüye sahiptir.

Önerme 3.17: Bazı M_1 *ve* M_2 *alt modülleri için* $M = M_1 \oplus M_2$ *olarak alalım. Eğer M bir C3-modül ise, bu durumda* M_1 *modülü* M_2 *ile ilişkili bir C2-modülüdür ve* M_2 *modülü* M_1 *ile ilişkili bir C2-modülüdür.*

Kanıt: $K \subseteq^{\oplus} M_1$ *ve* $L \cong K$ *olacak şekilde L,* M_2 *nin bir alt modülü olsun. Kabul edelimki* $\pi : M_1 \to K$ *doğal yansıma ve* $\phi : K \to L$ *bir izomorfizma olsun. Dolayısıyla,* $i\phi\pi$*,* M_1 *den* M_2 *ye bir homomorfizmadır, burada i, L den* M_2 *ye bir içine görüntüdür. O halde,* $Ker(i\phi\pi) = Ker(\pi) \subseteq^{\oplus} M_1$ *olduğu kolayca görülebilir. Önerme 3.3 gereği,* $Im(i\phi\pi) = L \subseteq^{\oplus} M_2$ *olur. Bu sebeple,* M_1 *modülü* M_2 *ile ilişkili bir C2-modülüdür. Benzer şekilde,* M_2 *modülü* M_1 *ile ilişkili bir C2-modülüdür.* ■

Sonuç 3.18: (i) $M \oplus M$*, C3-modül olacak şekilde M bir R-modül ise, bu durumda M bir C2-modül olur. Ayrıca,* $M \oplus M$ *bir yarı-sürekli ise, M süreklidir.*
(ii) M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı C3-modüldür ancak ve ancak M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı C2-modüldür.
(iii) M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı yarı-sürekli ancak ve ancak M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı süreklidir.

Aşağıdaki örnekte, $C3$-modülünün dik toplamının bu özelliği sağlamadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.19 [11]: α: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ve herbir $m \in \mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{Z}$) için $\alpha(m) = nm$ olacak şekilde tanımlanan bir $\mathbb{Z}$-homomorfizması olsun. α bir monomorfizma olduğundan ve $Im(\alpha)$, $\mathbb{Z}$ nin bir dik toplananı olmadığından, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bir C3-modül değildir. Fakat sonuç 3.4 gereği, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}$, C3 dür.

Aşağıdaki teoremde, yarı-basit halkaların karakterizasyonu C3-modülleri cinsinden verilmiştir.

Teorem 3.20: Aşağıdaki koşullar bir R halkası için eşdeğerdir:

i) R, yarıbasittir.
ii) Her R-modül bir C3-modüldür.

Kanıt: (i)$\Rightarrow$(ii) Açıktır.
(ii)$\Rightarrow$(i) Öncelikle her R-modülün yarıbasit olduğunu göstermeliyiz. M, R-modül ve $N \subseteq M$ olsun. (ii) gereği, $N \oplus M$ bir C3-modüldür. $i : N \rightarrow M$ içine görüntü olsun. Dolayısıyla Sonuç 3.4 gereği, $i(N) = N \subseteq^{\oplus} M$ elde edilir. O halde, her R-modül yarıbasittir. ■

Önerme 3.21: M, sağ R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) M nin herangi basit A ve B altmodülleri için $A \cong B \subseteq^{\oplus} M$.
ii) M nin $A \cap B = 0$ olacak şekilde herhangi basit A ve B altmodülleri için, $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$.
iii) Eğer A_1 basit ve $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir R-homomorfizması olacak şekilde $M = A_1 \oplus A_2$ oluyorsa , bu durumda $Im\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ koşulu sağlanır.

Kanıt: (i)$\Rightarrow$(ii) $A \cap B = 0$ olacak şekilde A ve B, M nin basit toplananları olsun. M nin bir T alt modülü için $M = A \oplus T$ ve $\pi : A \oplus T \rightarrow T$ standart yansıması olsun. Bu durumda, $A \oplus B = A \oplus \pi(B)$ yazılabilir. $\pi(B) \cong B \subseteq^{\oplus} M$ olduğundan, hipotez gereği

$\pi(B) \subseteq^{\oplus} M$ ve $\pi(B) \subseteq^{\oplus} T$ olur. Dolayısıyla M nin bir K alt modülü için $M = A \oplus T = A \oplus \pi(B) \oplus K = A \oplus B \oplus K$ sonucuna varılır. O halde $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$.

(ii)⇒(iii) Genelliği kaybetmeden, $f \neq 0$ olduğu varsayılabilir. Bu, f nin bir R-monomorfizması olduğu anlamına gelir. $T := \{a + f(a) : a \in A_1\}$, M nin çizgisel alt modülü olsun. $M = T \oplus A_2$ olduğunu iddia edelim. Eğer $x \in M$ ise, $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ olduğu yerde $x = a + b$ sağlanır. O halde, $x = a + f(a) - f(a) + b \in T + A_2$ ve $M = T + A_2$ olur. Eğer $x \in T \cap A_2$ ise, bu durumda bazı $a \in A_1$ için $x = a + f(a)$ sağlanır ve böylece $a = x - f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$ olur. Bu, $x = 0$, $M = T \oplus A_2$, ve $T \subseteq^{\oplus} M$ olduğu anlamına gelir. Şimdi, $A_1 \cap T = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $x \in A_1 \cap T$ ise, bu durumda bazı $a \in A_1$ için $x = a + f(a)$ sağlanır ve böylece, $x - a = f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$. f bir monomorfizma olduğundan, $a = 0$ ve böylece $x = 0$ bulunur. Ayrıca $T \cong M / A_2 \cong A_1$ basittir, böylece $A_1 \oplus T \subseteq^{\oplus} M$. Son olarak, $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \mathrm{Im}\, f$ olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. $x \in \mathrm{Im}\, f$ ise, bu durumda bazı $a \in A_1$ için $x = f(a)$ ve böylece $x = -a + a + f(a) \in A_1 + T$ sağlanır. Bu durumda $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \mathrm{Im}\, f$ olur. $A_1 \oplus T \subseteq^{\oplus} M$ olduğundan $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} M$, ve böylece $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ bulunur.

(iii)⇒(i) A ve B, $B \cong^{\sigma} A \subseteq^{\oplus} M$ olacak şekilde M nin alt modülleri olsun. $B \subseteq^{\oplus} M$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $A \cap B \neq 0$ ise ispat biter. Aksi takdirde, $A \cap B = 0$ olduğunu varsayarsak, M nin bir T alt modülü için $M = A \oplus T$ yazılabilir. Eğer $\pi: A \oplus T \to T$ bir doğal yansıma görüntüsü ise, bu durumda $A \oplus B = A \oplus \pi(B)$ ve $B \cong \pi(B)$ basit olduğu kolayca görülebilir. A basit olduğundan, $M = A \oplus T$, ve $\mathrm{Im}(\pi|_B \circ \sigma^{-1}) = \pi(B)$ olacak şekilde $\pi|_B \circ \sigma^{-1}: A \to T$ bir monomorfizmadır. Bu hipotezden $\pi(B) \subseteq^{\oplus} T$ olduğu açıktır. Eğer T nin bir K alt modülü için $T = \pi(B) \oplus K$ ise, bu durumda $M = A \oplus T = A \oplus \pi(B) \oplus K = A \oplus B \oplus K$ ve $B \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır. ■

Tanım 3.22: M, Önerme 3.21 deki denk koşullara uyuyorsa bu M modülüne basit-direkt-injektif adı verilir. R_R modülü basit-direkt-injektif ise bu durumda R halkasına sağ basit-direkt-injektif denir.

Örnek 3.23 [23]: i) Her parçalanamaz modül basit-direkt-injektif dir. Özellikle, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ direkt-injektif olmayan bir basit-direkt-injektif dir.

ii) R değişmeli bir halka ise, bu durumda her devirli R-modül bir C3-modül ve böylece basit-direkt-injektif dir.

iii) $K \cong R$ ve $L \cong 2R$ olduğu yerde $R = \mathbb{Z}_8$ ve $N_R = K \oplus L$ olarak alalım. $2K$, K_R nin bir toplananı olmadığından, $2K$, N nin bir toplananı değildir. Fakat $2K \cong L$ ve $L \subseteq^{\oplus} N$ olduğundan, N_R bir C2-modül değildir. Bu durumda [23, Önerme 3.2] gereği, $M := N \oplus N$ bir C3-modül değildir. O halde M nin basit-direkt-injektif olduğunu göstermeliyiz. Bu, M nin hiçbir basit dik toplananı olmadığını göstermek için uygundur. X_R nin M_R nin basit bir dik toplananı olduğunu kabul edelim. $Y_1 \cong Y_2 \cong K$ ve $Y_3 \cong Y_4 \cong L$ olduğu yerde $M = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_4$ yazılabilir. Çünkü K ve L endomorfizma halkaları yereldir, $M = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_4$ ayrışımı Krull–Schmit Teoremi gereğince tamamlayıcı dik toplamlardır. Dolayısıyla, $M = X \oplus (\oplus_{i \neq k} Y_i)$ olacak şekilde bazı $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ vardır ve $Y_k \cong X$ bir basittir sonucuna varılır. Bu bir çelişkidir.

Önerme 3.24: *M, basit-direkt-injektif modül olsun. O halde:*

i) M nin basit toplananlarının herhangi sonlu $\{X_1,\ldots, X_k\}$ kümeleri için, $\sum_{i=1}^{k} X_i \subseteq^{\oplus} M$.

ii) M nin tüm basit toplananlarının toplamı M de fully sabitidir.

Kanıt: (i) $N_1 \subseteq M$ olacak şekilde $M = X_1 \oplus N_1$ vardır. X_1 boyunca $p_1 : M \to N_1$, N_1 üzerine örten bir yansıma olsun. Bu durumda ya $p_1(X_2) = 0$ ya da $p_1(X_2) \cong X_2$ olur. Dolayısıyla, $p_1(X_2)$, M nin bir toplananıdır. Bu durumda, $p_1(X_2)$, N_1 inde bir toplananı olur. $N_2 \subseteq N_1$ olduğu yerde $M = X_1 \oplus p_1(X_2) \oplus N_2$ yazılır. $X_1 + X_2 = X_1 \oplus p_1(X_2)$ olduğundan $M = (X_1 + X_2) \oplus N_2$. $X_1 + X_2$ boyunca $p_1 : M \to N_2$, N_2 üzerine örten bir yansıma olsun. Bu durumda ya $p_2(X_3) = 0$ ya da $p_2(X_3) \cong X_3$ olur. Bu sebeple, $p_2(X_3)$, M ve N_2 nin bir toplananı olur. $N_3 \subseteq N_2$ olduğu yerde $M = (X_1 + X_2) \oplus p_2(X_3) \oplus N_3$ yazılır. $X_1 + X_2 + X_3 = (X_1 + X_2) \oplus p_2(X_3)$ olduğundan, $M = (X_1 + X_2 + X_3) \oplus N_3$ elde ederiz. Basit bir indiksiyon ile, bazı M nin bir N_k alt modülü için $M = (X_1 + \ldots + X_k) \oplus N_k$ olduğu görülebilir.

(ii) Açıktır. ■

Önerme 3.25: M, sonlu üretilmiş bir modül olsun. Eğer M basit-direkt-injektif ise, bu durumda M nin $A \cong B \subseteq^{\oplus} M$ olacak şekilde bazı alt modülleri için $A \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır.

Kanıt: $A \cong B \subseteq^{\oplus} M$ olacak şekilde A ve B alt modülleri için, A ve B sonlu üretilmiş olsunlar. Her bir i için, A_i ve B_i nin basit ve $A_i \cong B_i \subseteq^{\oplus} M$ olduğu yerde, $A = \sum_{i=1}^{k} A_i$ ve $B = \sum_{i=1}^{k} B_i$ sağlanır. Dolayısıyla herbir A_i, M nin bir toplananıdır. Bu durumda, Önerme 3.24 gereği, A, M nin bir toplananıdır. ■

3.2. Basit Projektif Modüller

Bu bölümde, basit-projektif-modüller ve onun yeni karekterizasyonu üzerine çalışıyoruz. Daha fazla ayrıntılı bilgi edinmek için [9], [26] ve [27] kaynakları incelenebilir. Bu bölümün temel amacı, *D*3 modüllerinin temel teoremlerini ve örneklerini vermektir. Bunun için ise ayrıntılı bir şekilde [13] den yararlandık.

Önerme 3.26: $1 \leq I \leq 3$ için, DI-modülün toplananı yine bir DI-modüldür [13].

Önerme 3.27: Sağ R modülünde M aşağıdaki koşullara eşdeğerdir:

i) M, D3-modüldür.

ii) A ve B, M = A + B olacak şekilde M nin dik toplananları ise, bu durumda $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ olacak şekilde $A_1 \subseteq A$ ve $B_1 \subseteq B$ alt modülleri vardır.

iii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$, ve $A + B \subseteq^{\oplus} M$ ise, $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır.

Kanıt: (i)⇒(ii) $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$, ve M = A + B olsun. Bu durumda, sadece eşitliklerden birini göstermemiz gerekir. Hipotez gereği, M nin bir T alt modülü için $M = (A \cap B) \oplus T$ olduğu görülür. Eğer $B_1 = B \cap T$ ise, $M = A + B = A + ((A \cap B) \oplus B_1) = A \oplus B_1$ sağlanır.

(ii)⇒(i) $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$, ve M = A + B olsun. Hipotez gereği, B nin bir B_1 alt modülü için $M = A \oplus B_1$ bulunur. $B = B_1 \oplus (A \cap B)$ ve $B \subseteq^{\oplus} M$ olduğundan, açıkca, $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ olduğu görülür.

(i)⇒(iii) D3-modülün bir toplananı yine bir D3-modül olduğundan, $K =: A + B$, bir D3-modüldür ve $A \subseteq^{\oplus} K$, $B \subseteq^{\oplus} K$, ve $K = A + B$ olduğundan, $A \cap B \subseteq^{\oplus} K$ sonucuna varırız; ve bu durumda, $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ elde edilir.

(iii)⇒(i) Açıktır. ■

Yukarıda belirtildiği gibi *D*3-modülleri direkt-projektif olmalarına rağmen aşağıdaki önermede $A_1 \oplus A_2$ bir *D*3-modül ise, bu durumda A_1 ve A_2 arasında direkt-projektiflik ilişkisi olduğunu görüyoruz. Kanıtımızda kullanılan argümanın, [24], [25] ve [6, Teorem 2.3] kaynaklarından esinlenerek yapıldığını not etmeliyiz.

Önerme 3.28: Eğer M bir D3-modül, M nin A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ ve $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ olacak şekilde $f : A_1 \to A_2$ fonksiyonu bir R-homomorfizması ise, bu durumda $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ sağlanır.

Kanıt: Öncelikle, $f : A_1 \to A_2$ bir R-epimorfizması ise, $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ olduğunu göstermemiz gerekir. $T = \{a + f(a) : a \in A_1\}$, M nin çizgisel alt modülü olsun. Açıkca, T bir sağ R-modüldür ve $M = T \oplus A_2$ olduğunu kabul edelim. Bunu görmek için, $x \in M$ olsun ve $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ olduğu yerde $x = a + b$ yazalım. O halde, $x = a + f(a) - f(a) + b \in T + A$ bulunur ve dolayısıyla $M = T + A_2$ elde edilir. Eğer $x \in T \cap A_2$ ise, bazı $a \in A_1$ için $x = a + f(a)$ sağlanır. Bu durumda, $a = x - f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$ bulunur. Buda, $f(a) = 0$ olmasını sağlar, sonuç olarak da, $x = 0$ ve $M = T \oplus A_2$ elde edilir. Şimdi ise, $M = T + A_1$ olduğunu ispatlamalıyız. Eğer $x \in M = A_1 \oplus A_2$ ise, $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ için $x = a + b$ sağlanır. f bir epimorfizma olduğundan, $b = f(a')$ olacak şekilde $a' \in A_1$ vardır ve $x = a + f(a') = a - a' + a' + f(a') \in A_1 + T$ bulunur. M, bir D3-modül olduğundan, $T \cap A_1 \subseteq^{\oplus} M$ bulunur. Sonuç olarak, $T \cap A_1 = \ker f$ olduğunu göstermemiz gerekir. Eğer $x \in T \cap A_1$ ise, $a, a' \in A_1$ için $x = a = a' + f(a')$ sağlanır. Bu durumda, $a - a' = f(a') \in A_1 \cap A_2 = 0$, ve $f(x) = f(a') = 0$ ve $T \cap A_1 \subseteq \ker f$ bulunur. Eğer $x \in \ker f$ ise, $x = x + f(x) \in T \cap A_1$ sağlanır ve $\ker f = T \cap A_1 \subseteq^{\oplus} M$ elde edilir. Şimdi, $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ olacak şekilde $f : A_1 \to A_2$ bir R-homomorfizması olarak kabul edelim. Eğer A_2 nin bir B alt modülü için $A_2 = \mathrm{Im}\, f \oplus B$ oluyorsa, $A_1 \oplus \mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır. D3 modülünün toplananı yine bir D3 modülü olduğu için, önceki argümanı $A_1 \oplus \mathrm{Im}\, f$ modülüne uygulayarak, $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ olduğunu söyleyebiliriz. ■

Sonuç 3.29: Eğer M bir D3-modül, A_1 *ve* A_2 *alt modülleri için* $M = A_1 \oplus A_2$ *ve* $f: A_1 \to A_2$ *bir R-epimorfizması ise, bu durumda* $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ *sağlanır.*

Örnek 3.30 [13]: $\mathbb{Z}$*-epimorfizması* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ *ye bölünmediğinden,* $\mathbb{Z}$*-modül* $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ *bir D3-modül değildir. Fakat,* $\mathbb{Z}$ *ve* $\mathbb{Z}_2$ *birer D3-modüldür.*

Hatırlatma 3.31: M bir sağ R-modül olsun. M nin bazı A_1 *ve* A_2 *altmodülleri için* $M = A_1 \oplus A_2$*,* $f : A_1 \to A_2$ *bir R-epimorfizma ve* $id : A_2 \to A_2$ *birebir bir fonksiyon olması durumunda,* $f \circ g = id$ *olacak şekilde* $g : A_2 \to A_1$ *bir R-homomorfizması varsa M üzerinde (D-*) koşulu sağlanır. Sonuç 29 gereği, her D3-modül (D-*) koşulunu sağlar. Morita denkliği toplananları, epimorfizmaları, ve izomorfizmalar koruduğundan, eğer R ve S,* $\mathcal{F}$*: Mod-R→Mod-S kategori denkliği olacak şekilde Morita denkliği halkaları ise, bu durumda sağ R-modül* M_R *(D-*) koşulunu sağlar ancak ve ancak* $\mathcal{F}(M)_S$ *, (D-*) koşulunu da sağlamasını gerektirir.*

M_R modülün bir *D*2-modül (direkt-projektif) olduğu kolayca görülebilir, ancak ve ancak, *M* nin her *X* dik toplananı için, her $M \to X$ epimorfizması ayrışır. Bu, [15] ve [7, 4.21] kaynakları incelenerek kolayca görülebilir. O halde, bir sonraki sonuç, Önerme 3.28'in bir sonucudur. İlk olarak, *M*-*D*3 modülü bir *D*2 modülü ise bu yükseltilmiş modül *M* ye *yarı-ayrık modül* adı verildiğini hatırlayalım.

Sonuç 3.32: Eğer M, $M \oplus M$ *bir D3-modül olacak şekilde sağ R-modül ise, bu durumda, M bir D2-modüldür. Ayrıca, eğer* $M \oplus M$ *bir yarı-ayrık ise, bu durumda M bir ayrık modüldür.*

Sonuç 3.33: M bir sağ R-modül ise, bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı bir D3-modüldür ancak ve ancak M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı bir D2-modüldür.

ii) M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı bir yarın-ayrık ancak ve ancak M nin kopyalarının her (sonlu) dik toplamı bir ayrık.

Önerme 3.34: Aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir:

i) R bir sağ (yarı) mükemmel halkadır.

ii) Her (sonlu üretilmiş) sağ R-modül bir yansıyan örtüye sahiptir.

iii) Her (basit) yarıbasit sağ R-modül bir yansıyan örtüye sahiptir.

Ayrıca, R bir sağ mükemmel halkadır ancak ve ancak her sağ düz R-modül bir projektiftir.

Önerme 3.35: Aşağıdaki ifadeler sağ R-modül M için geçerlidir:

i) Eğer M_1 ve M_2, M_2 basit olacak şekilde M nin alt modülleri ve $M / M_1 \cong M_2 \subseteq^{\oplus} M$ ise, bu durumda M_1, M nin dik toplananıdır.

ii) Eğer M_2 basit olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir R-homomorfizması ise, bu durumda ker f , M_1 in dik toplananıdır.

iii) Eğer M_1 ve M_2, M_1 maksimal olacak şekilde M nin dik toplananları ise, bu durumda $M_1 \cap M_2$, M nin dik toplananıdır.

iv) Eğer M_1 ve M_2, M nin maksimal toplananları ise, bu durumda $M_1 \cap M_2$, M nin dik toplananlarıdır.

Kanıt: (i)$\Rightarrow$(ii) M_2 basit olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ sıfırdan farklı bir R-homomorfizması olsun. Eğer $\pi : M \rightarrow M_1$ bir serbest yansıma ise, bu durumda $M / \ker (f \circ \pi) \cong M_2$ olacak şekilde $f \circ \pi : M \rightarrow M_2$ bir R-epimorfizmadır. Bu hipotez gereği, ker (f o π), M nin bir dik toplananıdır. Ancak, $\ker (f \circ \pi) = M_2 \oplus \ker f$ olduğundan, ker f , M nin bir dik toplananıdır ve dolayısıyla M_1 istenildiği gibidir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) M_1 maksimal olacak şekilde M_1 ve M_2, M nin dik toplananları ve $M = M_1 \oplus M_1' = M_2 \oplus M_2'$ olsun. Eğer $M_2 \subseteq M_1$ ise, bu durumda $M_2 = M_2 \cap M_1 \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır. Diğer bir taraftan, $M = M_1 + M_2$ olduğunu kabul edip, $\pi_{M'_1}: M \rightarrow M_1'$ ve $\pi_{M_2}: M \rightarrow M_2$ doğal yansıma olarak alalım. $f =: (\pi_{M'_1} \circ \pi_{M_2}) |M_1 : M_1 \rightarrow M_1'$ olarak tanımlayalım. $\ker f = (M_1 \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M_2')$ olduğundan, hipotez gereği $(M_1 \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M_2') \subseteq^{\oplus} M_1$ elde ederiz. O halde, $M_1 \cap M_2 \subseteq^{\oplus} M$.

(iii)$\Rightarrow$(i) M_1 ve M_2, M_2 basit olacak şekilde M nin sıfırdan farklı uygun alt modülü ve $M / M_1 \cong^{\phi} M_2 \subseteq^{\oplus} M$ olsun. M_1 in M nin bir dik toplananı olduğunu göstermeliyiz. M nin bir M_2' altmodülü için $M = M_2 \oplus M_2'$ yazalım. Eğer $M_1 \cap M_2 = 0$ ise, bu durumda

M_1 in maksimalite olmasından $M = M_1 \oplus M_2$ sağlanır. Aksi takdirde $M_1 \cap M_2 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $M_2 \leq M_1$ ve $M_1 = M_2 \oplus (M_1 \cap M_2')$ olur. Dolayısıyla, $M / M_1 = (M_2 \oplus M_2') / M_1 \cong^{\psi} M_2' / (M_2' \cap M_1)$. Eğer $\pi : M_2' \rightarrow M_2' / (M_2' \cap M_1)$ bir serbest bölüm görüntüsü ise, bu durumda $ker(\phi o \psi o \pi) = M_1 \cap M_2'$ olacak şekilde $\phi o \psi o \pi : M_2' \rightarrow M_2$ sıfırdan farklı R-homomorfizmadır. Hipotez gereği, $M_1 \cap M_2'$, M_2' nin bir dik toplananı olur. Eğer M_2' nin bir K alt modülü için $M_2' = (M_1 \cap M_2') \oplus K$ ise, bu durumda $M = M_2' \oplus M_2 = [(M_1 \cap M_2') \oplus K] \oplus M_2 = M_1 \oplus K$ ve $M_1 \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır.

(iii)⇒(iv) Açıktır.

(iv)⇒(ii) M_2 basit olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ sıfırdan farklı bir R-homomorfizma olsun. M nin bir $T = \{m_1 + f(m_1) \mid m_1 \in M_1\}$ çizgisel alt modülünü düşünelim. Açık bir şekilde, T, M nin bir maksimal alt modülü, $M = T \oplus M_2$ ve $ker f = T \cap M_1$ olur. Hipotezden, $ker f = T \cap M_1$, M nin bir dik toplananıdır. Bu durumda $ker f = T \cap M_1$, M_1 inde bir dik toplananı olur. ■

Tanım 3.36: [3.35]'teki eşdeğer koşullardan herhangi birini karşılaması durumunda, sağ R-modül M ye basit-direkt-projektif denir.

Önerme 3.37: Sağ R-modül M bir basit-direkt-projektif modüldür ancak ve ancak $\{X_1, \ldots, X_n\}$ M nin maksimal toplanananın sonlu bir kümesidir. Dolayısıyla, $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ kesişimi M nin bir dik toplananıdır.

Önerme 3.38 [26]: Basit-direkt-projektif modülün dik toplananları yine bir basit-direkt-projektif dir.

Örnek 3.39 [26]: i) Her D3-modül bir basit-direkt-projektif dir. Dahası, her parçalanamaz ve her direkt-projektif modül bir basit-direkt-projektif dir.

ii) Her singüler olmayan modül bir basit-direkt-projektif dir.

iii) Eğer M, basit olmayan parçalanamaz bir sağ R-modül ise, bu durumda $X = M \oplus E(M)$ basit-direkt-projektif modüldür. Ayrıca [23, Lemma 3.3] de X in hiçbir basit dik toplananı olmadığı ve X in basit-direkt-projektif olduğu gösterilmiştir.

iv) Eğer M, $M = rad(M)$ olacak şekilde bir sağ R-modül ise, bu durumda M nin hiçbir basit toplananı yoktur ve dolayısıyla M, hem basit-direkt-injektif hemde basit-direkt-projektif olur. Özellikle, $\mathbb{Z}$-modül $Q \oplus Q/\mathbb{Z}$ hem basit-direkt-injektif hemde *basit-direkt-projektif modül olur. Fakat, [13, Önerme 4] gereği, Q $\oplus$ Q/Z bir D3-modül değildir. Ayrıca, Z tamsayılar halkası üzerinde, hiçbir injektif sağ Z-modülün maksimal alt modülü yoktur, ve sonuç olarak, her injektif Z-modül bir basit-direkt-projektif dir.*

Örnek 3.40 [26]: i) Eğer M ve K basit olmayan parçalanamaz birer sağ R-modül ise, bu durumda N =: M $\oplus$ K hem basit-direkt-projektif hemde basit-direkt-injektif modüldür.

ii) Eğer M, basit olmayan sıfırdan farklı bir parçalanamaz sağ R-modül ve P de bir projektif sağ R-modül ise, bu durumda N =: M $\oplus$ P bir basit-direkt-projektif modül olur.

iii) Eğer M, basit olmayan sıfırdan farklı bir parçalanamaz sağ R-modül ve K da bir singüler olmayan sağ R-modül ise, bu durumda N =: K $\oplus$ M bir basit-direkt-projektif modül olur. Daha özel olarak, K nın basit singüler olmayan sağ R-modül olduğu yerde, K $\oplus$ E(K) bir sabit-direkt-projektif olur.

Kanıt: (i) N nin hiçbir basit dik toplananı olmadığını gösterdik. Aksine, N nin basit bir S basit toplananı içerdiğini varsayalım. [27, Lemma 26.4] gereği, N = S $\oplus$ M_1 $\oplus$ K_1 olacak şekilde M nin bir M_1 dik toplananı ve K nın bir K_1 dik toplananı vardır. Hem M hemde K parçalanamaz olduğundan, ya N = S $\oplus$ M ya da N = S $\oplus$ K olur. Fakat bu bir çelişkidir çünkü hem M hemde K basit değildir.
(ii) A, N / A $\cong$ S $\subseteq^{\oplus}$ N olacak şekilde N nin bir maksimal alt modülü olsun. A $\subseteq^{\oplus}$ N olduğunu göstermemiz gerekir. M bir parçalanamaz olduğundan, [27, Önerme 26.4] gereği, $P_1 \subseteq^{\oplus} P$ olan yerde ya N = S $\oplus$ P_1 ya da N = S $\oplus$ M $\oplus$ P_1 olur. P nin bir P_2 alt modülü için P = P_1 $\oplus$ P_2 yazalım. Eğer N = S $\oplus$ P_1 ise, bu durumda S $\oplus$ P_1 $\cong$ (M $\oplus$ P_2) $\oplus$ P_1 sağlanır. Bu durumda, S $\cong$ (M $\oplus$ P_2) olması açık bir çelişkidir. O halde, N = S $\oplus$ M $\oplus$ P_1 olduğunu düşünelim. Bu durumda, N = S $\oplus$ (M $\oplus$ P_1) = M $\oplus$ P $\cong$ P_2 $\oplus$ (M $\oplus$ P_1) sağlanır. Sonuç olarak, N / A $\cong$ S $\cong$ P_2 bir projektif ve A $\subseteq^{\oplus}$ N olmasını gerektirir.
(iii) Bu, (ii) 'de verilene benzer bir argümanla doğrulanabilir. ■

4. RELATİF *C*3 ve *D*3 MODÜLLER

Bu bölümde, *C*3 ve *D*3 modüllerinin eşdeğer versiyonlarının kanıtları üzerinde çalışıp, ayrıca *C*3 ve *D*3 modüllerinin sırasıyla *N-C*3 ve *M-D*3 modülleri açısından genel bir çalışma sunuyoruz. Dahası, *N-C*3 ve *M-D*3 modülleri açısından iyi bilinen birkaç halka sınıfının yeni karakteristiklerini ortaya koyuyoruz.

4.1. Relatif İnjektif Modüller

Bu bölümde, *N-C*3 modüllerinin bazı özelliklerini vermeye başlıyoruz ve bölüm boyunca [9, 11, 13, 15, 23, 26, 27] de tanımlanan metodları kullanıyoruz. Ayrıca, aşağıdaki kanıtların [17] nin bir duali olduğuna dikkat edelim.

Önerme 4.1: Sağ R modülünde M aşağıdaki koşullara denktir:

i) M, N-C3 modüldür.

ii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ *ve* $A \cap B = 0$ *ise, bu durumda* $A \subseteq A_1$ *ve* $B \subseteq B_1$ *alt modülleri için* $N = A \oplus B_1 = A_1 \oplus B$ *koşulu sağlanır.*

iii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$, $A \cap B \subseteq^{\oplus} N$ *ve* $N \subseteq^{\oplus} M$ *ise, bu durumda* $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ *sağlanır.*

Kanıt: (i)⇒(ii) A ve B, N nin alt modülleri ve $A \cap B = 0$ *olacak şekilde* $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ *olsun.* $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ *koşulu sağlandığından, N nin bir alt modülü C için* $N = A \oplus B \oplus C$ *olur. Eğer* $A_1 = A \oplus C$ *ve* $B_1 = B \oplus C$ *olacak şekilde seçilirse, bu durumda açıkca* $N = A \oplus B_1 = A_1 \oplus B$ *sağlanır.*

(ii)⇒(i) A ve B, N nin alt modülleri ve $A \cap B = 0$ *olacak şekilde* $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ *olsun. Bu durumda* $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ *olduğunu göstermeliyiz. Hipotez gereği,* $A \subseteq A_1$ *ve* $B \subseteq B_1$ *alt modülleri için* $N = A \oplus B_1 = A_1 \oplus B$ *sağlandığını biliyoruz. O halde,* $B_1 = B_1 \cap N = B_1 \cap (A_1 \oplus B) = B \oplus (A_1 \cap B_1)$ *ve* $N = A \oplus B_1 = A \oplus B \oplus (A_1 \cap B_1)$ *sağlanır.*

(i)⇒(iii) $A \cap B \subseteq^{\oplus} N$ *olduğundan, N nin bir alt modülü C için* $N = (A \cap B) \oplus C$.

Açıkca, $A = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ ve $B = (A \cap B) \oplus (B \cap C)$ olduğu görülür. M bir N-C3 modül olduğundan, $(A \cap C) \subseteq^{\oplus} M$, $(B \cap C) \subseteq^{\oplus} M$ ve $(A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = 0$ sağlanır. $D =: (A \cap C) \oplus (B \cap C) \subseteq^{\oplus} N$ olduğu sonucuna varılır. Ve yine, $T \subseteq^{\oplus} N$ olduğundan, $A \cap B \subseteq^{\oplus} N$, $(A \cap B) \cap D = 0$ ve $N \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır. Bunu ise $(A \cap B) \oplus D \subseteq^{\oplus} N$ olması takip eder. Dolayısıyla, $A+B = [(A \cap B) \oplus (A \cap C)] + [(A \cap B) \oplus (B \cap C)] = (A \cap B) \oplus (A \cap C) \oplus (B \cap C) = (A \cap B) \oplus D \subseteq^{\oplus} N$.

(iii)⇒(i) açıktır. ■

Önerme 4.2: Eğer M, N-C3 modülü, A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ ve $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ olacak şekilde $f : A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyonu R nin bir homomorfizması ise, bu durumda $\operatorname{Im} f \subseteq^{\oplus} A_2$ sağlanır.

Kanıt: İddia 1: $f : A_1 \rightarrow A_2$, R nin bir homomorfizması ve $T = \{ a + f(a) : a \in A_1 \} \subseteq^{\oplus} M$ olsun. Bu durumda $M = T \oplus A_2$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $x \in M = A_1 \oplus A_2$ ise, $x = a + b$ olacak şekilde $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ vardır. Bu durumda, $x = a + f(a) - f(a) + b \in T \oplus A_2$ koşulu sağlanır. O halde, $x \in T + A_2$ ise $M = T + A_2$ olur. Eğer $x \in T \cap A_2$ olsa $x \in T$ ve $x \in A_2$ olurdu. Fakat T nin tanımından, $x = a + f(a)$ olacak şekilde $a \in A_1$ olup $a = x - f(a)$ yazılır ki $x, f(a) \in A_2$ olduğundan $a \in A_2$ elde edilir. $A_1 \cap A_2 = 0$ olduğundan $a = 0$ elde edilir, $f(a) = f(0) = 0$ (f homomorfizması) olduğundan, $x = 0$ elde edilir. O halde $T \cap A_2 = 0$ dır. Buradan, $M = T \oplus A_2$ elde edilir ve $T \subseteq^{\oplus} M$ sağlanır.

İddia 2: $A_1 \cap T = 0$. $x \in A_1 \cap T$ olsun. Bu durumda, $x \in A_1$ ve $x \in T$ olur. $a \in A_1$ ve $x = a + f(a)$ olduğundan, $(x - a) \in A_1$ ve $(x - a) = f(a) \in A_2$ olur. Dolayısıyla, $(x - a) = f(a) \cap A_1 \cap A_2 = 0 = f(0)$ ve $a = x = 0$ olur. Birinci ve ikinci iddialara göre $T \subseteq^{\oplus} M$, $A_1 \subseteq^{\oplus} M$ ve $A_1 \cap T = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $T \oplus A_1 \subseteq^{\oplus} N$ olur.

İddia 3: $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \operatorname{Im} f$. $a_1 \in A_1$ ve $f(a) = x = f(a) + a - a \in T \oplus A_1$ olacak şekilde $x \in \operatorname{Im} f$ olsun. Bu durumda, $x \in T \oplus A_1$ ve $\operatorname{Im} f \oplus A_1 = T \oplus A_1 \subseteq^{\oplus} N$ sağlanır. Sonuç olarak, $T \oplus A_1 \subseteq^{\oplus} N$ ve $\operatorname{Im} f \subseteq^{\oplus} N$ elde edilir. ■

Sonuç 4.3: Eğer M, N-C3 modülü, A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ ve $f: A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyonu bir R-monomorfizması ise, bu durumda $\operatorname{Im} f \subseteq^{\oplus} A_2$ sağlanır.

Önerme 4.4: M ve N, R nin sağ modülleri, $S = End(M_R)$ ve $S_1 = End(N_R)$ olsun. S, sağ S_1-C3 halkası ise, bu durumda M bir sağ N-C3 modüldür.

Kanıt: S bir sağ S_1-C3 halkası ise, bu durumda M nin de bir sağ N-C3 modül olduğunu biliyoruz. $A \subseteq^{\oplus} S$, $B \subseteq^{\oplus} S$ ve $A \cap B = 0$ olduğundan, $A \oplus B \subseteq^{\oplus} S_1$ ve $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$ olduğundan ise $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ sağlanır. Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A \cap B = 0$, bu durumda $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$. Şimdi $e^2 = e \in S$, $f^2 = f \in S$ için, $A = eM$ ve $B = f M$ olarak alalım. $A \cap B = 0$ olduğundan, $eS \cap f S = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla, $eS \oplus f S \subseteq^{\oplus} S_1$ olur. Eğer $eS \subseteq^{\oplus} S$, $f S \subseteq^{\oplus} S$ ve $fS \cap eS = 0$ ise, bu durumda $eS \oplus fS \subseteq^{\oplus} S_1$. Bazı $g^2 = g \in S$ için $S_1 = eS \oplus fS \oplus gS$ oluyor ise, $N = eM \oplus fM \oplus gM$ koşulu sağlanır. Dolayısıyla, $A \oplus B = eM \oplus fM \subseteq^{\oplus} N$ sonucu elde edilir. ■

Önerme 4.5: M ve N birer R-modül olsunlar. Bu durumda M bir N-C3 modüldür ancak ve ancak dik toplanan $M' \subseteq^{\oplus} M$, herhangi bir altmodül $N' \subseteq N$ ve M' bir N'-C3 modüldür.

Kanıt: A ve B, $A \subseteq^{\oplus} M'$, $B \subseteq^{\oplus} M'$ ve $A \cap B = 0$ olacak şekilde N' nin altmodülleri olsunlar. $A \subseteq^{\oplus} M$ ve $B \subseteq^{\oplus} M$ olduğundan ve M, N-C3 modül olarak bilindiğinden, $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N$ elde ederiz. Dolayısıyla, $A \oplus B \subseteq^{\oplus} N'$ ve M' bir N'-C3 modül bulunur. Tersi kolayca görülebilir. ■

4.2. Relatif Projektif Modüller

Bu bölümde, *M-D*3 modülleriyle ilgilenip bu modüllerin aşağıda verilen yeni karekterizasyonlarını tanımlamaya başlayacağız.

Önerme 4.6: Sağ R modülünde M aşağıdaki koşullara denktir:

i) N, M-D3 modüldür.

ii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} M$, $B \subseteq^{\oplus} M$ ve $A+B = N$ ise, bu durumda $A_1 \subseteq A$ ve $B_1 \subseteq B$ alt modülleri için $N = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ koşulu sağlanır.

iii) Eğer $A \subseteq^{\oplus} N$, $B \subseteq^{\oplus} N$ ve $A+B = N$ ise, bu durumda $A \cap B \subseteq^{\oplus} N$ koşulu sağlanır.

Kanıt: (i)⇒(iii) $A \subseteq^{\oplus} N$, $B \subseteq^{\oplus} N$ ve $A + B = N$ olarak alalım. Bu durumda, M nin bir C alt modülü için $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ ve $M = (A \cap B) \oplus C$ elde ederiz. Şimdi, $A = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ ve $B = (A \cap B) \oplus (B \cap C)$ olur. Dolayısıyla, $N = A+B = [\,(A\cap B) \oplus (A\cap C)\,] + [\,(A\cap B) \oplus (B\cap C)\,] = (A\cap B) \oplus (A\cap C) \oplus (B\cap C)$ elde edilir. Tersi kolayca görülebilir.

(i)⇒(ii) $A \subseteq^{\oplus} N$, $B \subseteq^{\oplus} N$ ve $A+B = N$ olsun. $C \subseteq^{\oplus} M$ olacak şekilde M nin bir C alt modülü için $A \cap B \subseteq^{\oplus} M$ ve $M = (A \cap B) \oplus C$ hipotezin eşitliklerinden birini göstermemiz gerekir. Eğer $B_1 \subseteq B$, $B_1 = B \cap C$ ise bu durumda $N = A+B = A + [\,(A \cap B) \oplus B_1] = A \oplus B_1$ eşitliği sağlanır.

(ii)⇒(i) Hipotez gereği $A \subseteq^{\oplus} N$, $B \subseteq^{\oplus} N$ ve $A+B = N$ olsun. $B = B_1 \oplus (A\cap B)$ ve $B \subseteq^{\oplus} N$ olduğundan, B nin bir B_1 alt modülü için $N = A \oplus B_1$ olur. Bu yüzden, $A\cap B \subseteq^{\oplus} N$ olduğu açıktır. ■

Önerme 4.7: Eğer N bir M-D3 modül, N nin A_1 ve A_2 alt modülleri için $N = A_1 \oplus A_2$ ve $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ olacak şekilde $f : A_1 \to A_2$ bir R-homomorfizması ise, bu durumda $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ sağlanır.

Kanıt: İlk olarak $f : A_1 \to A_2$ bir R-epimorfizması ise, bu durumda $\ker f \subseteq^{\oplus} A_1$ olduğunu göstermeliyiz. $T = \{\, a + f(a) : a \in A_1 \,\}$, N nin çizgisel alt modülü olsun. Açıkca T, R nin sağ modülüdür ve $N = T \oplus A_2$ olduğunu iddia ederiz. Bunu göstermek için, öncelikle $x \in N$ olarak alıp $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ nin olduğu yerde $x = a+b$ yazabiliriz. Şimdi, $x = a + f(a) - f(a) + b \in T + A_2$ ve böylece $N = T + A_2$ olur. Eğer $x \in T \cap A_2$ ise, bazı $a \in A_1$ için $x = a + f(a)$ sağlanır. Dolayısıyla, $a = x - f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$ ve $f(a) = 0$ olur. Sonuç olarak $x = 0$ ve $N = T \oplus A_2$ elde edilir. Şimdi ise $N = T + A_1$ olduğunu ispatlamalıyız. Eğer $x \in N = A_1 \oplus A_2$ ise, bu durumda $a \in A_1$ ve $b \in A_2$ olduğu yerde $x = a + b$ olur. Çünkü, $b = f(a)$ olacak şekilde $a \in A_1$ için f bir epimorfizmdir. Dolayısıyla, $x = a + f(a) = a - a + a + f(a) \in A_1 + T$ olur. N, M-D3 modül olduğundan, $T \cap A_1 \subseteq^{\oplus} M$. Son olarak, $T \cap A_1 = \mathrm{Ker}\, f$ olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. Eğer $x \in T \cap A_1$ ise, bu durumda $a \in A_1$ ve $c \in A_1$ olduğu yerde $x = a = c + f(c)$ olur. Dolayısıyla, $a - c = f(c) \in A_1 \cap A_2 = 0$ ve $f(x) = f(c) = 0$ ve $T \cap A_1 \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ olur. Eğer $x \in \mathrm{Ker}\, f$ ise, bu durumda $x = x + f(x) \in T \cap A_1$ ve böylece $\mathrm{Ker}\, f = T \cap A_1 \subseteq^{\oplus} M$ olur. Şimdi, $\mathrm{Im}\, f \subseteq^{\oplus} A_2$ olacak şekilde $f : A_1 \to A_2$ fonksiyonu bir R *homomorfizması olsun. Eğer* A_2 *nin bir B alt modülü için* $A_2 = Im\, f \oplus B$ *ise, bu durumda* $A_1 \oplus Im\, f \subseteq^{\oplus} M$ *olur. M-D3 modülünün bir toplananı yine bir D3-modül olduğunu biliyoruz. Ardından* $A_1 \oplus Im\, f$ *modülüne bir önceki argümanı uygulayarak* $Ker\, f \subseteq^{\oplus} A_1$ *sonucunu elde ederiz.* ■

5. SONUÇLAR ve YORUMLAR

Bu çalışma bütünüyle *N*-*C*3 (Relatif İnjektif) ve *M*-*D*3 (Relatif Projektif) modüllerini incelemeye odaklanmıştır ve bunu iyi bir şekilde tamamlamak için, çeşitli ilgili makaleler literatürde gözden geçirilmiştir. Elde edilen sonuçların literatür ve mevcut teoremler ile iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür.

N-*C*3 ve *M*-*D*3 modüllerinin geleneksel avantajları ve dezavantajları gözlemlenmiştir. Ayrıca çeşitli modüller ve halka yapıları ile ilişkileri ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

Sonuç olarak, bu çalışma, modül teori ile ilgilenen lisansüstü öğrencileri için iyi bir başlangıç ve rehberlik yapmayı amaçlamıştır.

KAYNAKLAR

[1] Utumi Y., (1961), “On continuous regular rings”, Canadian Math.Bull. 4, 63-69.

[2] Jeremy L., (1971), “Sur les modules et anneaux quasi-continus”, C. R. Acad. Sci., 272, 80-83.

[3] Takeuch T., (1972), “On direct modules”, Hokkaido Math. J. 1, 168-177.

[4] Mohamed S.H., Bouhy T., (1977), “Continuous modules”, Arabian J. Sci. Eng. 2, 107-112.

[5] Zelmanowitz J., (1972), “Regular modules”, Trans. Amer Math. Soc 163, 341-355

[6] Hamdouni A., Özcan A.Ç., Harmancı A., (2005), “Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property”, JP J. Algebra Number Theory Appl. 5, 469-490.

[7] Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R., (2006), “Lifting Modules”, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.

[8] Dung N.V., Huynh D.V., Smith P.F., Wisbauer R., (1994), “Extending Modules”, Longman Scientific and Technical.

[9] Mohamed S.H., Müller B.J, (1990), “Continuous and Discrete Modules”, Cambridge University, Cambridge, UK.

[10] Nicholson W.K., Yousif M.F, (2003), “Quasi-Frobenius Ring”, Cambridge Tracts in Math., vol.158, Cambridge University, Cambridge, UK.

[11] Atani Shahabaddin Ebrahimi., Khoramdel Mehdi., Saboura Dolati Pish Hesari., (2016), “C3 Modules”, Demonstratio Mathematica., 49, 3.

[12] Bass H., (1960), “Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings”, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 466-488.

[13] Yousif M., Amin I., Ibrahim Y., (2014), “D3-modules”, Comm. Algebra 42, 578-592.

[14] Oshiro K., (1983), “Semiperfect modules and quasi-semiperfect modules”, Osaka J. Math. 20, 337-372.

[15] Nicholson W.K., (1976), “Semiregular modules and rings”, Can. J. Math. Vol. XXVIII:1105-1120.

[16] Puninski G., Rothmaler P, (2004), “When every finitely generated flat is projective”, J. Algebra 277, 542-558.

[17] Yousif M., Amin I., Ibrahim Y., (2015), "C3-modules", Comm. Algebra 22 (4), 655-670.

[18] Faith C, (1966), "Rings with ascending chain condition on annihilators", Nagoya Math. J. 27, 179-191

[19] Chen J.L., Li W.X, (2004), "On artiness of right CF rings", Comm. Algebra 32, 4485-4494

[20] Colby R.R., Rutter E.A., Jr, (1971), "Generalizations of QF-3 algebras", Trans. Amer. Math. Soc. 153, 371-386

[21] Faith C, (1976), "Algebra II Ring Theory", Springer-Verlag, Berlin, New york.

[22] Byrd K.A, (1972), "Rings whose quasi-injective modules are injective", Proc. Amer. Math. Soc. 33, 235-240.

[23] Camillo Victor., Ibrahim Yasser., Yousif Mohamed., Zhou Yigiang., (2014), "Simple-direct-injective modules", Journal of Algebra 420, 39-53.

[24] Garcia J.L., (1989), "Proporties of direct summands of modules", Comm. in Algebra 17, 73-92.

[25] Hausen J., (1989), "Modules with the summand intersection property", Comm. in Algebra 17, 135-148.

[26] Ibrahim Yasser., Koşan Muhammed Tamer., Quynh Truong Cong., Yousif Mohamed., (2016), "Simple-direct-projective modules", Comm. in Algebra, 44, 5163-5178.

[27] Anderson F. W., Fuller, K.R, (1974), "Rings and Categories of Modules", New York: Springer-Verlag.

[28] Web 1, (2019), https://nesetaydin.files.wordpress.com/2012/03/moduldersnotu 2012.pdf , (Erişim Tarihi : 25/01/2019).

ÖZGEÇMİŞ

Deniz DRAHYALI 1989 yılında İstanbul, Türkiye de doğmuştur. 2013 ve 2016 yıllarında İstanbul Üniversitesi'nden Matematik alanında lisans derecesi almıştır. 2016 yılından beri Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans yapmaktadır ve ayrıca TÜBİTAK 117F070 nolu projesinden yüksek lisans bursu almıştır. İlgi alanı ise Modül ve Halka Teorisidir.