

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
BIYOİSTATİSTİK VE TIBBİ BİLİŞİM ANABİLİM DALI

**Basit ve Çoklu Regresyon Modellerinde Parametre Tahminlerinin
Karşılaştırılması**

Ali Vasfi AĞLARCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Hikmet ORHAN

Tez. No: 142

ISPARTA-2017

KABUL ve ONAY SAYFASI

Sağlık Bilimleri Enstitü Müdürlüğüne;

Süleyman Demirel Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü **Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim Anabilim Dalı Yüksek Lisans** Çerçevesinde yürütülmüş olan bu çalışma, aşağıdaki jüri tarafından **Yüksel Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 04/01/2017

Tez Danışmanı

: Prof. Dr. Hikmet ORHAN

Süleyman Demirel Üniversitesi, Tıp Fakültesi Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim Anabilim Dalı

Üye

: Prof. Dr. Soner ÇANKAYA

Ordu Üniversitesi, Tıp Fakültesi Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim Anabilim Dalı

Üye

: Yrd. Doç. Dr. Osman GÜRDAL

Süleyman Demirel Üniversitesi, Tıp Fakültesi Biyoistatistik ve Tıbbi Bilişim Anabilim Dalı

ONAY: Bu yüksek lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulu'nca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mustafa KAYAN

Enstitü Müdürü

BEYAN

“Basit ve Çoklu Regresyon Modellerinde Parametre Tahminlerinin Karşılaştırılması”
adlı Yüksek Lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Ali Vasfı AĞLARCI

İmza

Danışman

Prof. Dr. Hikmet ORHAN

İmza

ÖNSÖZ

Bu çalışmada tecrübesiyle ve anlayışıyla bana yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Hikmet Orhan 'a,

Biyostatistik ve Tıbbi Bilişim öğretim üyesi sayın Yrd. Doç. Dr. Osman Gürdal' a,

Tez çalışmamın uygulama kısmı için veri desteği sağlayan Araştırma görevlisi Cemil Bilkaya' ya, Doç. Dr. Esra Koyuncu' ya, Prof. Dr. Mustafa Nazıroğlu' na ve Yrd. Doç. Dr. Mustafa Saygın' na

Bugüne kadar ilgi, şefkat ve dualarıyla yanımda olan, sabır ve özveriyle bugünlere gelmemi sağlayan başta annem Zübeyde Süheda Ağlarıcı'ya, kardeşlerim Sadık, Osman, Fatih Ağlarıcı'ya,

sonsuz saygı, sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Ali Vasfi AĞLARCI

Isparta, 2017

İÇİNDEKİLER

BEYAN	i
ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR	iv
ÇİZELGELER.....	v
ŞEKİLLER.....	vi
GRAFİKLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Basit Regresyon Analizi.....	2
2.2. Çoklu Regresyon Analizi	7
3. MATERYAL ve METOT	12
3.1. Materyal.....	12
3.2. Metot	12
3.2.1. Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması.....	12
3.3. Basit Doğrusal Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması.....	13
3.3.1. İki Regresyon Modelinin Karşılaştırılması.....	13
3.3.2. İki'den Çok Regresyon Modelinin Karşılaştırılması	17
3.3.2.1. Parametreler İçin Çoklu Karşılaştırma.....	18
3.4. Çoklu Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması	20
4. UYGULAMA	22
4.1. Paket Program İle İşlem Basamakları	42
5. SONUÇLAR	45
ÖZET.....	47
ABSTRACT.....	48
KAYNAKLAR	49
EKLER.....	52
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER ve KISALTMALAR

AHI: Uyku apnesi indeksi

ODI: Oksijen desatürasyon indeksi

nM: Nanomolar

mm: Milimetre

sn: Saniye

SS_c : Ortak hata kareler toplamı

SS_p : Toplanmış hata kareler toplamı

SS_t : Toplam hata kareler toplamı

sd_c : Ortak hata serbestlik derecesi

sd_p : Toplanmış hata serbestlik derecesi

$(S_{y.x}^2)_c$: Ortak hata kareler ortalaması

$(S_{y.x}^2)_p$: Toplanmış hata kareler ortalaması

$$\sum x^2 : \sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$\sum y^2 : \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\sum xy : \sum (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})$$

ÇİZELGELER

Çizelge 2.1. Varyans Analiz Tablosu.....	9
Çizelge 3.1. Karşılaştırmalar için işlem adımları.....	13
Çizelge 3.2. Regresyon doğrularını karşılaştırmak için gerekli hesaplamalar.....	17
Çizelge 4.1. Hafta ve alan değişkenleri için tanımlayıcı istatistikler.....	22
Çizelge 4.2. Fetüsler için regresyon katsayılar tablosu.....	22
Çizelge 4.3. Fetüsler için varyans analiz tablosu.....	23
Çizelge 4.4. Toplanmış regresyon için varyans analiz tablosu.....	25
Çizelge 4.5. Kız ve erkek fetüslerin regresyon parametrelerinin karşılaştırılması	26
Çizelge 4.6. Ortak parametreler.....	26
Çizelge 4.7. Hafta, yatay ve dikey uzunluk için tanımlayıcı istatistikler.....	27
Çizelge 4.8. Hafta-uzunluk regresyonu için katsayılar tablosu.....	27
Çizelge 4.9. Hafta-uzunluk regresyonu için varyans analiz tablosu.....	27
Çizelge 4.10. Toplanmış regresyon için varyans analiz tablosu.....	29
Çizelge 4.11. Yatay ve dikey uzunluk regresyon parametrelerinin karşılaştırılması.	29
Çizelge 4.12. Zaman ve kimyasal değişkenlerine ait tanımlayıcı istatistikler.....	30
Çizelge 4.13. Zaman-Kimyasal regresyonlarına ait katsayılar tablosu.....	30
Çizelge 4.14. Zaman-kimyasal regresyonları için varyans analiz tablosu.....	31
Çizelge 4.15. Birleştirilmiş regresyona ait varyans analiz tablosu.....	33
Çizelge 4.16. Üç farklı regresyon analizine ait parametreler.....	33
Çizelge 4.17. Toplanmış regresyon için varyans analiz tablosu.....	33
Çizelge 4.18. Üç regresyona ait parametrelerin karşılaştırılması.....	34
Çizelge 4.19. Erkek ve kadınlara ait tanımlayıcı istatistikler.....	39
Çizelge 4.20. Hastalara ait regresyon parametreleri.....	39
Çizelge 4.21. Hastaların regresyonuna ait varyans analiz tablosu.....	39

ŞEKİLLER

Şekil 4.1. Paket program veri girişi.....	42
Şekil 4.2. Karşılaştırma işlemi için kullanılan menüler	42
Şekil 4.3. Değişkenlerin kutucuklara atılma işlemi	43
Şekil 4.4. Paket program analiz sonuçları.....	43
Şekil 4.5. Ortak parametreleri hesaplama seçenekleri	44
Şekil 4.6. Ortak regresyon sonucu	44



GRAFİKLER

Grafik 2.1. X ve Y değerleri için oluşturulan regresyon grafiği	6
Grafik 4.1. Erkek ve kız fetüslerin haftalara göre göz boşluğu alanı değişimi.....	25
Grafik 4.2. Ortak regresyon doğrusu.....	26
Grafik 4.3. Haftalık dikey ve yatay uzunluk değişimi	29
Grafik 4.4. Zamana bağlı olarak kimyasallara göre kalsiyum salınım değişimi.....	34
Grafik 4.5. ODI ve uyku süresine göre AHI değişimi	41



1. GİRİŞ

Günümüzde birçok araştırmada değişkenler arası ilişkinin incelenmesi büyük önem arz etmektedir. Bilimsel çalışmalar yapan araştırmacılar iki ya da daha çok değişken arasında bir ilişki olup olmadığını tesbit etmek istemektedir. Çünkü değişkenler arasındaki ilişkilerin olup yada olmaması yapılan araştırmaların sonuçlarının yorumlanmasında çok önemlidir. Değişkenler arasındaki sebep-sonuç ilişkisi için kullanılan yöntem regresyon analizi yöntemidir (1).

Regresyon analizi ilk olarak 19. yüzyılda Sir Francis Galton tarafından geliştirilmiştir. Regresyon kelimesi, değişkenler arasındaki istatistiksel ilişkileri açıklamak için kullanılmaktadır. Regresyon, bağımlı değişken ile bağımsız değişken veya değişkenler arasındaki ilişkinin bir fonksiyon yardımı ile ifade edilmesidir (2, 3).

Regresyon analizi, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi en iyi ifade eden denklemi oluşturmayı amaçlar. Oluşturulan bu denklem sayesinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için bağımlı değişkeni tahmin etme imkanı sağlar (4).

Regresyon analizinde değişkenler bağımlı değişken ve bağımsız değişken olarak iki gruba ayrılır. Bağımlı değişken bir tane iken bağımsız değişken birden fazla olabilmektedir. Bağımlı değişken, bağımsız değişken(ler) tarafından açıklanmaya çalışılan değişkendir. Örnek verecek olursak yaş ile ağırlık değişkenleri birbiri ile ilişkili olan değişkenlerdir. Burada ağırlık yaşa bağlı olarak değişmektedir. Yani yaş bağımsız değişken, ağırlık ise bağımlı değişken olarak belirtilir. Regresyon analizinde bağımlı değişken Y ve bağımsız değişken(ler) de X ile gösterilir (5).

Tıp, biyoloji, ziraat, mühendislik, ekonomi vb. gibi farklı bilim dallarında, elde edilen verilerin analizinde regresyon analizinin yeri büyük öneme sahiptir ve yaygın olarak kullanılmaktadır. Bazı araştırmalarda araştırmacılar farklı iki yada ikiden çok grubu birbiri ile karşılaştırdıkları gibi, elde ettikleri iki yada daha fazla regresyon doğrusunu da karşılaştırmak isteyebilmektedir. Söz konusu durumdan yola çıkılarak, bu tez çalışmasında regresyon doğrularının karşılaştırılması ele alınmıştır. Regresyon doğrularının karşılaştırılmasında regresyon parametreleri dikkate alınmıştır. Karşılaştırmalar için tüm matematiksel işlem basamakları tek tek gösterilmiş ve örnek veri setlerinde uygulaması gerçekleştirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Basit Regresyon Analizi

Regresyon analizi, aralarında sebep-sonuç ilişkisi bulunan iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek ve bu ilişkiyi kullanarak o konu ile ilgili tahminler (estimation) ya da kestirimler (prediction) yapabilmek amacıyla yapılır (6, 7). Örnek vermek gerekirse gelir-harcama, yaş-boy, gübre-verim gibi. Bu analiz tekniğinde iki (basit regresyon) veya daha fazla değişken (çoklu regresyon) arasındaki ilişki açıklamak için matematiksel bir model kullanılır ve bu model regresyon modeli olarak adlandırılır. Bu modelde bir bağımlı değişken, bir yada birden fazla bağımsız değişkenler bulunur (8).

Bir bağımlı ve bir bağımsız değişkenin bulunduğu basit regresyon modeli Eşitlik (2.1)' deki gibi kurulur (9, 10).

$$Y_i = a + \beta X_i + \varepsilon_i \quad i=1, \dots, n \quad (2.1)$$

Y; bağımlı (sonuç) değişken

X; bağımsız (sebep) değişken

a ; kesişim katsayısı veya regresyon sabit olup $X=0$ olduğunda regresyon doğrusunun Y eksenini kestiği değer.

β ise regresyon katsayısı olup, X' in kendi birimi cinsinden 1 birim değişmesine karşılık Y' de kendi birimi cinsinden meydana gelecek değişme miktarını ifade eder. Ayrıca regresyon doğrusunun eğimidir.

ε ; tesadüfi hata terimi olup, bağımlı değişkendeki değişimin model tarafından açıklanamayan kısmını gösterir. Hata terimi ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılım gösterdiği varsayılır. Bu varsayım parametre tahminleri için değil katsayıların önem kontrolleri için gereklidir (8, 11).

Uygulamada genel olarak örnekler üzerinden çalışıldığı için $Y = a + \beta X + \varepsilon$ modelinin yerine $\hat{Y} = a + bX$ tahmin denklemi kullanılır (12).

Parametre tahminleri yapılırken hata kareler toplamının minimum yapılmasına çalışılır. Bu şekilde yapılan tahminlere en küçük kareler tahminleri denir (12). Burada hata terimi olan ε ' nun tahmini olarakta "e" kullanılır. Hata değeri $e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$ olarak hesaplanır. Bu hata değerleri artık olarak ta isimlendirilmektedir. Burada a ve β parametreleri; $\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ eşitliği

minimum olacak şekilde tahmin edilir. Bu tahmin için hata kareler toplamı $\sum e_i^2$, nin a ve b' ye göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenir ve parametre tahminleri Eşitlik (2.2a ve 2.2b)' deki gibi elde edilir (13, 14).

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - a - bX_i)^2 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial a} = -2 \sum (Y_i - a - bX_i) = 0$$

$$\sum (Y_i - a - bX_i) = 0$$

$$\sum Y_i - na - \sum bX_i = 0$$

$$a = \frac{\sum Y_i}{n} - \frac{b \sum X_i}{n} = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial b} = -2 \sum (Y_i - a - bX_i)X_i = 0 \quad (2.2b)$$

$$\sum (Y_i - a - bX_i)X_i = 0$$

$$\sum X_i Y_i - a \sum X_i - b \sum X_i^2 = 0$$

$$b \sum X_i^2 + (\bar{Y} - b\bar{X}) \sum X_i = \sum X_i Y_i$$

$$b \sum X_i^2 + \sum X_i \bar{Y} - \sum X_i b\bar{X} = \sum X_i Y_i$$

$$b(\sum X_i^2 - \sum X_i \bar{X}) + \sum X_i \bar{Y} = \sum X_i Y_i$$

$$b(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2) + n\bar{X}\bar{Y} = \sum X_i Y_i$$

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

b katsayısı ayrıca aşağıdaki gibi de ifade edilebilmektedir.

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.2)$$

Tahminleyiciler modelde yerine yazıldığında $y = a + bx$ modeli elde edilir.

Tahmin edilen bu eşitlik regresyon doğrusu olarak ta ifade edilir. Bu doğru X ve Y değişkenlerine ait noktalardan en yakın şekilde geçer.

Basit doğrusal regresyon modeli varsayımları:

1) Bağımsız değişkenin değerleri sabit kabul edilirken, bağımlı değişkenin değerleri rastgeledir.

2) Her X_i değeri için Y_i değerleri birbirinden bağımsızdır ve Y_i ' lerin dağılımı normaldir.

3) Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki doğrusaldır.

4) Gözlem sayısı değişken sayısından çok olmalıdır.

Hata terimi ε ' un varsayımları:

1) Hataların beklenen değeri sıfırdır.

2) Hataların varyansı sabittir. $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

3) Hatalar normal dağılım gösterir.

4) Hatalar ile bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında ilişki yoktur.

Regresyon katsayısına ilişkin yapılacak yorumların geçerliliği, regresyon katsayısının istatistiksel olarak önemli bulunmasıyla gerçekleşir. Yani bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında önemli bir doğrusal ilişkinin olması gerekir. Bunun için regresyon katsayısına ilişkin hipotez kontrolü yapılır (12, 15).

$$H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

Burada H_0 hipotezi, regresyon katsayısının istatistiksel olarak önemli olmadığını belirtir. Regresyon katsayısının önem testinde t dağılışı kullanılmaktadır (12, 16). Hipotez testi için hesaplanacak t test istatistiği Eşitlik (2.3)' deki gibidir.

$$t = \frac{b - \beta}{S_b} \quad (2.3)$$

S_b regresyon katsayısına ilişkin standart hatayı ifade eder ve Eşitlik (2.4)' deki formülle elde edilir.

$$S_b = \sqrt{S_e^2 / \sum (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.4)$$

S_e^2 hata kareler ortalaması olup Eşitlik (2.5)' deki gibi elde edilir.

$$S_e^2 = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \quad (2.5)$$

Hesaplanan t test istatistiği (n-p-1) serbestlik dereceli t kritik tablo değeri ile karşılaştırılır. t test istatistiği tablo değerinden büyükse H_0 hipotezi red edilir ve regresyon katsayısının modelde bulunmasının önemli olduğuna karar verilir. Burada p bağımsız değişken sayısını belirtir.

Güven aralığı, istatistik biliminde bir anakütle parametresi için bir çeşit aralık kestirimi olup bir çıkarımsal istatistik çözüm aracıdır. Bir anakütle parametre değerinin tek bir sayı ile kestirimi yapılacağına, bu parametre değerini kapsayabilecek iki (alt ve üst sınır) sayıdan oluşan bir aralık bulunur. Böylece güven aralıkları bir kestirimin ne kadar güvenilir olduğunu gösterir. Regresyon katsayısı için güven sınırları Eşitlik (2.6)' da verilmiştir (9).

$$\beta_{üs} = b + t_{(a/2),(n-2)} S_b \quad ve \quad \beta_{as} = b - t_{(a/2),(n-2)} S_b \quad (2.6)$$

Regresyon analizinde bağımsız değişken X' in, bağımlı değişken Y' yi ne kadar açıklayabildiği belirleme katsayısı ile ifade edilir. Belirleme katsayısı R^2 ile gösterilir. R^2 açıklanabilen değişkenliğin toplam değişkenlik içindeki oranı olarak tanımlanır. R^2 değeri verilerdeki değişkenliğin açıklanmasında regresyon denkleminin başarısının bir ölçüsü olarak kullanılır. Belirleme katsayısı bağımsız değişkenin bağımlı değişkenin davranışını açıklamadaki başarı ölçüsünü veren tanımlayıcı istatistiktir. R^2 , 0 ile 1 arasında değerler almaktadır. 1' e ne kadar yakınsa kurulan model o kadar iyidir (6). R^2 Eşitlik (2.7) ile elde edilir.

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (2.7)$$

Örnek: Bir bağımlı ve bir bağımsız değişken olduğunda regresyon parametrelerinin hesaplanması:

X	32	37	30	30	39	39	28	28	27	35
Y	112	136	109	108	98	91	133	127	114	110

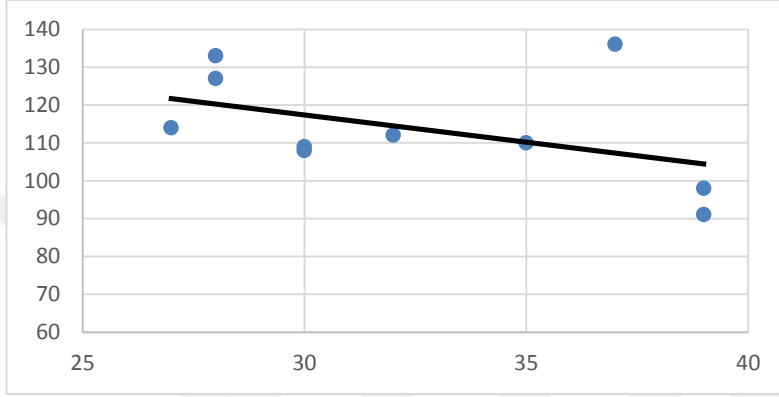
$$\begin{aligned} \sum X_i &= 325, & \sum Y_i &= 1138, & \sum X_i Y_i &= 36705, \\ \sum X_i^2 &= 10757, & \sum Y_i^2 &= 131384 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Eşitlik (2.2) yardımıyla regresyon katsayısının hesaplanması:

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} = \frac{36705 - \frac{325 * 1138}{10}}{10757 - \frac{(325)^2}{10}} = -1,44$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 113,8 + 1,440 * 32,5 = 160,60$$

Tahmin edilen regresyon eşitliği: $\hat{Y} = 160,60 - 1,44X$



Grafik 2.1. X ve Y değerleri için oluşturulan regresyon grafiği

\hat{Y}_i	110,2	114,5	107,3	117,4	117,4	104,4	104,4	120,3	120,3	121,7
-------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Eşitlik (2.4) ve (2.5) yardımıyla regresyon katsayısına ait standart hata:

$$S_e^2 = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{1476,515}{8} = 184,56$$

$$(X_i - \bar{X})^2 : 6,25; 0,25; 20,25; 6,25; 6,25; 42,25; 42,25; 20,25; 20,25; 30,25;$$

Toplam: 194,5

$$S_b = \sqrt{S_e^2 / \sum (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{184,56 / 194,50} = 0,97$$

Eşitlik (2.6) yardımıyla regresyon katsayısının güven sınırları:

$$\beta_{üs} = b + t_{(a/2), (n-2)} S_b = -1,44 + 2,31 * 0,97 = 0,81$$

$$\beta_{as} = b - t_{(a/2), (n-2)} S_b = -1,44 - 2,31 * 0,97 = -3,69$$

Eşitlik (2.7) yardımıyla modelin belirleme katsayısı:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{405,25}{1879,60} = 0,22$$

2.2. Çoklu Regresyon Analizi

Basit doğrusal regresyon analizinde bir bağımlı ve bir bağımsız değişken arasındaki fonksiyonel ilişki incelenirken, çoklu doğrusal regresyon analizinde bir bağımlı ve birden fazla bağımsız değişken arasındaki fonksiyonel ilişki incelenmektedir (4).

Çoklu doğrusal regresyonda araştırmacının iki genel amacı vardır. Bunlardan birisi bağımlı değişkeni etkilediği belirlenen değişkenler vasıtasıyla bağımlı değişkenin değerini tahmin etmek, bir diğeri; bağımlı değişkeni etkilediği düşünülen bağımsız değişkenlerden hangisinin veya hangilerinin bağımlı değişkeni daha çok etkilediğini tespit etmek ve aralarındaki ilişkiyi tanımlamaktır (17, 18).

Çoklu doğrusal regresyon modelinde analizi basitleştirmek için matris yaklaşımı kullanılmaktadır. Çoklu regresyon denklemi matris notasyonu Eşitlik (2.8)' de gösterilmiştir.

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2.8)$$

Y: nx1 boyutlu bağımlı değişken vektörü

X: nx(p+1) boyutlu bağımsız değişken matrisi

β : (p+1)x1 boyutlu katsayılar vektörü

ε : nx1 boyutlu hata vektörüdür.

Burada ε vektöründeki hata terimleri sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılım gösterdiği varsayılır (19). Matrisler açık şekilde yazılacak olursa:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

Buradaki b ler β ' nin, e ler ε ' nun tahminidir (20).

Çoklu doğrusal regresyon denkleminde regresyon katsayılarının tahmini basit doğrusal regresyonda olduğu gibi en küçük kareler metoduna göre yapılır. Katsayılara ait formül Eşitlik (2.9)' de verilmiştir (19, 21).

$$Y = Xb + e \quad (2.9)$$

$$e = Y - Xb \quad \text{ve} \quad e' = Y' - b'X'$$

$$\sum e_i^2 = e'e = (Y' - b'X')(Y - Xb) = Y'Y - Y'Xb - b'X'Y + b'X'Xb$$

Burada $Y'Xb = b'X'Y$ ' dir.

$$e'e = Y'Y - 2b'X'Y + b'X'Xb$$

$$\frac{\partial e'e}{\partial b} = -2X'Y + 2X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'Y \quad \text{ve} \quad b = (X'X)^{-1} X'Y$$

Çoklu doğrusal regresyon modelinin varsayımları:

- 1) Bağımlı değişken rastgele bir deyişkendir ve normal dağılım gösterir.
- 2) Hataları rastgeledir ve birbiri ile ilişki göstermezler. Hatalar, ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılım gösterir.
- 3) Bağımsız deyişkenler rastgele deyişkenler değıildir. Yani bağımsız deyişkenlerin aldıkları değıerler sabit veya önceden belirlenmiş değıerler olduğıu varsayılır.
- 4) Hatalar birbirinden bağımsızdır.
- 5) Bağımsız deyişkenler arasında basit doğrusal ilişkilerin olmaması gerekir. Bağımsız deyişkenler arasındaki korelasyon katsayılarının 0 veya 0'a çok yakın olması gerekir. Bu varsayıma, istatistikte "Çoklu Doğrusal Bağlantı" (Multicollinearity) olmama durumu denir.
- 6) Bağımsız deyişkenler ile hata terimi arasında ilişki yoktur.

Çoklu doğrusal regresyon denkleminde hesaplanan parametrelerin önemliliğini test ederken hem t hemde F test istatistiğı kullanılabilir. t istatistiğı bir regresyon denkleminde parametreleri tek tek test ederken, F istatistiğı deyişkenleri içeren parametrelerin tümünü test eder; yani, bağımlı deyişken ile bağımsız deyişken içeren parametreler arasında sıfırdan farklı bir ilişkinin olup olmadığına bakmaktadır. Regresyon modelinin anlamlılığını test ederken varyans analiz tablosu kullanılmaktadır (20, 22) (Çizelge2.1).

Çizelge 2.1. Varyans Analiz Tablosu

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F
Regresyon	p	$RKT = b'X'Y - n\bar{Y}^2$	RKO=RKT/p	RKO/AKO
Hata	n-p-1	$HKT = Y'Y - b'X'Y$	HKO=HKT/(n-p-1)	
Genel	n-1	$GKT = Y'Y - n\bar{Y}^2$		

Buradan hesaplanan F test istatistiği $F_{(a, (p, n-p-1))}$ serbestlik dereceli tablo değeri ile karşılaştırılır. Test istatistiği tablo değerinden büyük ise paramereler istatistiksel olarak anlamlıdır veya regresyon modeli anlamlıdır şeklinde yorumlanır (20). Parametreler tek tek t testine de tabi tutularak önemliliği kontrol edilebilmektedir. Bunun için basit regresyon analizinde parametre önemliliği için kullanılan t test istatistiği formülünden yararlanılır (12).

$$t = \frac{b_i - \beta}{S_{bi}} \text{ bu istatistiği kullanmak için herbir parametrenin standart hatasına}$$

ihtiyaç vardır. Bunun için parametrelere ait varyanslar hesaplanır.

Parametre varyanslarını hesaplamak için de Eşitlik (2.10) kullanılır. Bu matris varyans kovaryans matrisidir (8).

$$S^2 (X'X)^{-1} \quad (2.10)$$

Güven aralıkları da basit regresyonda olduğu gibi herbir parametreden, kendi standart hatasının tablo değeri ile çarpılmış hali çıkarılıp / eklenerek bulunur (23).

$$b_i \pm S_{bi} t_{(a/2, n-p-1)} \quad (2.11)$$

Çoklu doğrusal regresyon analizinde bağımlı değişkendeki değişimin ne kadarının açıklayıcı değişkenler tarafından açıklandığı belirleme katsayısı R^2 ile belirlenir. Basit doğrusal regresyonda olduğu gibi belirleme katsayısı 1' e ne kadar yakınsa kurulan model o kadar iyidir. R^2 modelin uyum iyiliği ölçütüdür, R^2 ' nin 0 olması değişkenler arasında ilişki olmaması anlamına gelmez. Değişkenler arasında doğrusal ilişkinin olmadığını gösterir. Çoklu regresyon için belirleme katsayısı Eşitlik (2.12) ile hesaplanır.

$$R^2 = \frac{b'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - b'X'Y} \quad (2.12)$$

Örnek: Çoklu regresyon modeli için parametrelerin hesaplanması:

X ₁	3,00	3,40	3,40	3,00	4,40	2,20	2,20	1,90	0,20	1,60
X ₂	3,39	3,61	1,72	1,80	3,21	2,59	3,25	2,86	2,32	2,12
Y	9,30	9,40	9,10	6,90	9,30	7,90	7,40	7,30	8,80	9,90

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & \dots & X_{110} \\ X_{12} & \dots & X_{210} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_{110} & X_{210} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10,00 & 25,3 & 26,87 \\ 25,30 & 76,37 & 69,95 \\ 26,87 & 69,95 & 76,35 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & \dots & X_{110} \\ X_{21} & \dots & X_{210} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85,30 \\ 217,55 \\ 230,18 \end{bmatrix}$$

$(X'X)^{-1}$ matrisi excel yardımıyla hesaplanmıştır:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,98 & -0,11 & -0,59 \\ -0,11 & 0,09 & -0,04 \\ -0,59 & -0,04 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Eşitlik (2.9) yardımıyla:

$$b = \begin{bmatrix} 1,98 & -0,11 & -0,59 \\ -0,11 & 0,09 & -0,04 \\ -0,59 & -0,04 & 0,26 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 85,30 \\ 217,55 \\ 230,18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,76 = a \\ 0,11 = b_1 \\ 0,18 = b_2 \end{bmatrix}$$

$\hat{Y} = 7,76 + 0,11b_1 + 0,18b_2$: tahmin edilen regresyon eşitliği

\hat{Y}_i	8,32	8,70	8,78	8,44	8,41	8,82	8,47	8,59	8,48	8,20
-------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Parametrelere ait standart hataları bulmak için öncelikle hata varyansının hesaplanması gerekmektedir. Hesaplanan hata varyansı $(X'X)^{-1}$ matrisi ile çarpılır. Elde edilen Matris varyans kovaryans matrisidir. Köşegen elemanlarının karekökü parametrelerin standart sapmasını vermektedir.

$$e'e = \sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 9,69 \text{ ve } S^2 = e'e/n - p - 1 = 9,69/7 = 1,38$$

$$S^2 (X'X)^{-1} = 1,384 \begin{bmatrix} 1,98 & -0,11 & -0,59 \\ -0,11 & 0,09 & -0,04 \\ -0,59 & -0,04 & 0,26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,73 & -0,15 & -0,82 \\ -0,15 & 0,12 & -0,06 \\ -0,82 & -0,06 & 0,36 \end{bmatrix}$$

$$S_a = \sqrt{2,73} = 1,65; S_{b_1} = \sqrt{0,12} = 0,35; S_{b_2} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

Çizelge 2.1' deki formüller yardımıyla çoklu regresyon için varyans analiz tablosuna ait değerlerin hesaplanması:

$$b'XY = [7,76 \quad 0,11 \quad 0,18] * \begin{bmatrix} 85,30 \\ 217,55 \\ 230,18 \end{bmatrix} = 727,98$$

$$Y'Y = \sum Y_i^2 = 737,67$$

$$n\bar{Y}^2 = 10 * (8,53)^2 = 727,61$$

$$RKT = 727,98 - 727,61 = 0,37$$

$$RKO = 0,373 / 2 = 0,19$$

$$HKT = 737,67 - 727,98 = 9,69$$

$$HKO = 9,69 / 7 = 1,38$$

$$GKT = 737,67 - 727,61 = 10,06$$

$$R^2 = \frac{b'XY - n\bar{Y}^2}{Y'Y - b'XY} = \frac{727,98 - 727,61}{737,67 - 727,98} = 0,04$$

3. MATERYAL ve METOT

3.1. Materyal

Tez çalışmasında uygulama verisi olarak, Süleyman Demirel Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsüne bağlı Anatomi, Biyofizik ve Kulak burun boğaz anabilim dallarında yapılan araştırmalara ait veriler kullanılmıştır. İlk iki uygulamada anne karnında ölen fetüslerin yaşları (hafta) ve kafatası göz boşluğu alanları, yatay ve dikey uzunlukları arasındaki ilişkiler incelenmiş, üçüncü uygulamada üç farklı kimyasal ile hücrelere zamana bağlı karbon girişi ilişkisi değerlendirilmek için derlenmiştir. Dördüncü uygulamada ise uyku apnesi olan hastalara ait veriler kullanılmıştır. Oksijen desaturasyon indeksinin (ODI) ve uyku süresinin, uyku apnesi indeksini (AHI) etkilediği düşünülerek erkek ve kadınlar için iki ayrı regresyon eşitliği kurulmuştur. Veriler seçilirken, verilerin regresyon analizine uygunluğu dikkate alınmıştır. Verilerin analizinde SPSS ve Statgraphics paket programlarından faydalanılmıştır.

3.2. Metot

3.2.1. Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması

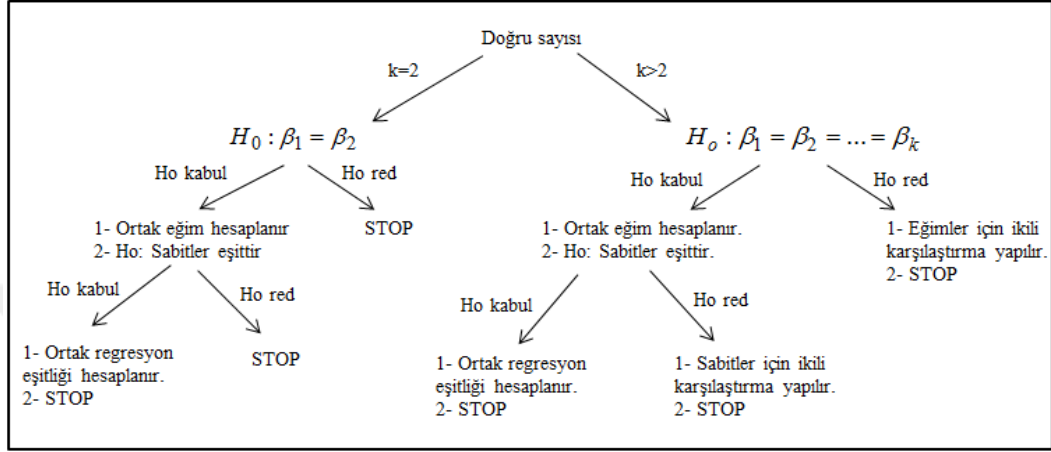
Regresyon doğrularının karşılaştırılma amacı, doğrular arası farklılığın olup olmadığı araştırılarak, eğer bir farklılık yoksa tek bir regresyon eşitliği ile vurgulanabileceğini belirtmektir. Bu karşılaştırma yapılırken regresyon doğrularının eğimleri ve sabitleri ile ilgilenilir. Regresyon doğruları karşılaştırılırken öncelikle β katsayıları (eğimler) karşılaştırılır. Eğer eğimler arası farklılık bulunmaz ise regresyon doğruları paraleldir yorumu yapılır ve daha sonra regresyon sabitleri karşılaştırılır (24). Regresyon sabitleri arasında da farklılık bulunmaz ise bu iki regresyon doğrusu ortak parametreler hesaplanarak tek bir regresyon doğrusu ile ifade edilmektedir. Eğer eğimler farklı bulunursa, regresyon sabitlerini karşılaştırmaya gerek kalmadan iki regresyon doğrusu istatistiksel olarak birbirinden farklıdır denir (16, 25).

Sadece iki regresyon doğrusunun karşılaştırılması durumunda eğimler ve sabitler arasındaki farklılık t testi ile değerlendirilebilmektedir (25, 26). Fakat ikiden fazla regresyon doğrusu karşılaştırılırken t testi kullanılamamaktadır. Bunu yerine kovaryans analizi (ANCOVA) kullanılır. Kovaryans analizi ikiden çok eğimi karşılaştırmaya imkan vermektedir (25, 27).

3.3. Basit Doğrusal Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması

Regresyon doğrularının karşılaştırılmasıyla ilgili işlem basamakları Çizelge 3.1’ de belirtilmiştir.

Çizelge 3.1. Karşılaştırmalar için işlem adımları



3.3.1. İki Regresyon Modelinin Karşılaştırılması

Basit doğrusal iki regresyon modelinin karşılaştırılmasını ele alırsak, yapılacak ilk işlem tahmin edilen eğimlerin karşılaştırılması olacaktır (14, 28).

İki eğim karşılaştırılırken öncelikle iki regresyon doğrusuna ait hipotez kurulur.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$$

Bu hipotezin test edilmesinde kullanılacak t test istatistiği Eşitlik (3.1) de verilmiştir (9, 12, 14).

$$t = \frac{b_1 - b_2}{S_{b_1 - b_2}} \quad (3.1)$$

Burada yapılacak işlemlerde formül gösterimlerini kısaltmak için bazı ifade değişiklikleri yapılacaktır. Bu ifade değişiklikleri Eşitlik (3.2) de gösterilmiştir.

$$\sum x^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$\sum y^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (3.2)$$

$$\sum xy = \sum (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})$$

Regresyon katsayılarının farkına ait standart hata:

$$s_{b_1-b_2} = \sqrt{\frac{(s_{y.x}^2)_p}{(\sum x^2)_1} + \frac{(s_{y.x}^2)_p}{(\sum x^2)_2}} \quad (3.2)$$

Burada toplanmış artıklar kareler ortalaması:

$$(s_{y.x}^2)_p = \frac{(HKT)_1 + (HKT)_2}{(hata\,sd)_1 + (hata\,sd)_2} \quad (3.3)$$

1 ve 2 alt indisleri 1. ve 2. Regresyon modellerinden elde edilen değerleri ifade etmektedir. Hesaplanan t test istatistiği v serbestlik dereceli alfa 0,05 önem düzeyinde t tablo değeri ile karşılaştırılır. Buradaki $v = (n_1 - 2) + (n_2 - 2)$ olarak hesaplanır. t test istatistiği tablo değerinden büyük ise eğimler farklı bulunur ve regresyon doğruları birbirinden farklıdır şeklinde yorumlanır (12, 14). Böyle bir durumda regresyon sabitlerini karşılaştırmaya gerek kalmamaktadır. Eğimleri farklı bulunan iki doğru bir noktada kesişmektedir (16). O nokta Eşitlik (3.4) ile bulunur.

$$X_k = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} \quad (3.4)$$

Hesaplanan kesişim noktasında iki regresyon doğrusu da aynı tahmini vermektedir.

Eğer H_0 hipotezi red değilse kabul edilirse regresyon doğrularına ait eğimler istatistiksel olarak birbirinden farklı değildir denir ve ortak eğim hesaplanır. İki regresyon doğrusu istatistiksel olarak paraleldir (24, 28, 29). Ortak eğim Eşitlik (3.5) de verilmiştir.

$$b_c = \frac{(\sum xy)_1 + (\sum xy)_2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2} \quad \text{yada} \quad b_c = \frac{(\sum x^2)_1 b_1 + (\sum x^2)_2 b_2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2} \quad (3.5)$$

İki regresyon doğrusunun eğimlerinin karşılaştırılması ile ilgili kurulan hipotez eğimlerin farkının sifira eşit olup olmadığı ile değerlendirildi. İki eğim arası farkın sifir değilse özel bir değerden (Δ) farklılığı da test edilebilmektedir (16). Bunun için kurulan hipotez:

$$H_0 : \beta_1 - \beta_2 = \Delta$$

$$H_1 : \beta_1 - \beta_2 \neq \Delta$$

Bu hipotez için hesaplanacak test istatistiği ise Eşitlik

(3.6) daki gibidir.

$$t = \frac{|b_1 - b_2| - \Delta}{S_{b_1 - b_2}} \quad (3.6)$$

İki regresyon eğimi için hesaplanan güven aralığı da:

$$(b_1 - b_2) \pm t_{\alpha/2, v} S_{b_1 - b_2} \quad (3.7)$$

şeklinde verilir.

Regresyon doğrularına ait iki eğim karşılaştırıldıktan sonra farklılık bulmaz ise regresyon sabitlerinin karşılaştırılmasına gidilir. Burada kurulacak H_0 hipotezi ise “iki regresyon doğrusuna ait sabitler farklı değildir” şeklindedir. Bu karşılaştırma için t test istatistiği hesaplanır (16).

Test istatistiğini hesaplamadan önce regresyon eşitlikleri için ortak değerlerin elde edilmesini görelim:

Ortak regresyon için X' in kareler toplamı:

$$A_c = (\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2 \quad (3.8a)$$

Ortak regresyon için çarpımlar toplamı:

$$B_c = (\sum xy)_1 + (\sum xy)_2 \quad (3.8b)$$

Ortak regresyon için Y' nin kareler toplamı:

$$C_c = (\sum y^2)_1 + (\sum y^2)_2 \quad (3.8c)$$

$$\text{Ortak regresyon için hata kareler toplamı: } SS_c = C_c - \frac{B_c^2}{A_c} \quad (3.8d)$$

$$\text{Ortak regresyon için hata serbestlik derecesi: } sd_c = n_1 + n_2 - 3 \quad (3.8e)$$

$$\text{Ortak regresyon için hata kareler ortalaması: } (s_{y.x}^2)_c = \frac{SS_c}{sd_c} \quad (3.8f)$$

İki regresyon doğru sabitinin eşitliği ile ilgili kurulan H_0 hipotezinin değerlendirilmesinde hesaplanacak t test istatistiği:

$$t = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b_c(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{(s_{y.x}^2)_c \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{A_c} \right]}} \quad (3.9)$$

Hesaplanan t test istatistiği s_{dc} serbestlik dereceli t tablo değeri ile karşılaştırılarak sabitler arası farklılık yorumlanır. t hesap değeri t tablo değerinden büyük bulunması halinde regresyon sabitleri birbirinden farklı bulunur. Regresyon doğruları, hesaplanan ortak eğim kullanılarak farklı sabitlerle ifade edilir (16, 30).

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i &= a_1 + \beta_c X_i \\ \hat{Y}_i &= a_2 + \beta_c X_i\end{aligned}\quad (3.10)$$

Eğer t hesap değeri tablo değerinden küçük bulunur ise sabitler arası farklılık bulunmamaktadır (30). Böyle bir durumda iki regresyon doğrusu için ortak parametreler hesaplanır ve tek bir regresyon doğrusu ile ifade edilir (Yani iki regresyon doğrusuna ait eğimlerde sabitlerde farksız bulunduğu durum). Regresyon doğruları için hesaplanan ortak sabit değeri:

$$a_c = \bar{Y}_p - b_c \bar{X}_p \quad (3.11)$$

Toplanmış örnek ortalamaları \bar{Y}_p ve \bar{X}_p :

$$\bar{X}_p = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \quad \text{ve} \quad \bar{Y}_p = \frac{n_1 \bar{Y}_1 + n_2 \bar{Y}_2}{n_1 + n_2} \quad (3.12)$$

Kullanılacak ortak regresyon eşitliği:

$$\hat{Y}_i = a_c + b_c X_i \quad (3.13)$$

Regresyon doğrularının eğimleri farksız, sabitleri farklı bulunduğu durumda iki doğrunun paralel olduğu varsayılır ve herhangi bir X_i değerine karşılık gelen \hat{Y}_i değeri iki doğrudan farklı bulunur (24). Fakat eğimler farklı bulunduğu takdirde doğrular paralelden ziyade bir noktada kesişmektedir. Bu durumda belirli bir X değerinde \hat{Y} değerlerinin aynı olup olmadığı test edilebilir.

$$H_0 : \mu_{\hat{Y}_1} = \mu_{\hat{Y}_2}$$

$$H_1 : \mu_{\hat{Y}_1} \neq \mu_{\hat{Y}_2}$$

Hesaplanacak olan t test istatistiği:

$$t = \frac{\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2}{S_{\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2}} \quad (3.14)$$

Y tahmin değerlerinin farklarına ait standart hata:

$$S_{\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2} = \sqrt{(S_{y \cdot x}^2)_p \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(X - \bar{X}_1)^2}{(\sum x^2)_1} + \frac{(X - \bar{X}_2)^2}{(\sum x^2)_2} \right]} \quad (3.15)$$

3.3.2. İkiiden Çok Regresyon Modelinin Karşılaştırılması

İkiiden çok regresyon eşitliği karşılaştırılırken ilk olarak $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$ hipotezi test edilir (25, 31, 32). Buradaki k regresyon modeli sayısını göstermektedir. Regresyon eğimlerinin eşitliği ile ilgili hipotez kovaryans analizi ile test edilebilmektedir (24, 26). k tane regresyon doğrusunu karşılaştırmak için bazı temel hesaplamaların yapılması gerekmektedir. Bu hesaplamalar Çizelge 3.2' de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Regresyon doğrularını karşılaştırmak için gerekli hesaplamalar

	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	HKT	Hata sd
Regresyon1	A_1	B_1	C_1	$SS_1 = C_1 - \frac{B_1^2}{A_1}$	$sd_1 = n_1 - 2$
Regresyon2	A_2	B_2	C_2	$SS_2 = C_2 - \frac{B_2^2}{A_2}$	$sd_2 = n_2 - 2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Regresyonk	A_k	B_k	C_k	$SS_k = C_k - \frac{B_k^2}{A_k}$	$sd_k = n_2 - 2$
Toplanmış Regresyon				$SS_p = \sum_{i=1}^k SS_i$	$sd_p = \sum_{i=1}^k (n_i - 2)$
Ortak Regresyon	$A_c = \sum_{i=1}^k A_i$	$B_c = \sum_{i=1}^k B_i$	$C_c = \sum_{i=1}^k C_i$	$SS_c = C_c - \frac{B_c^2}{A_c}$	$sd_c = \sum_{i=1}^k n_i - k - 1$
Total Regresyon	A_t	B_t	C_t	$SS_t = C_t - \frac{B_t^2}{A_t}$	$sd_t = \sum_{i=1}^k n_i - 2$

Çizelge 3.2 deki hesaplamalar ışığında $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$ hipotezini test etmek için Eşitlik (3.16)' da verilen F test istatistiği kullanılır (16, 31, 33).

$$F = \frac{\frac{SS_c - SS_p}{k-1}}{\frac{SS_p}{sd_p}} \quad (3.16)$$

Hesaplanan F test istatistiği (k-1, sd_p) serbestlik dereceli F kritik tablo ile karşılaştırılır. Eğer H₀ hipotezi red edilirse hangi eğimin farklı olduğunu bulmak için çoklu karşılaştırma testi yapılabilir. H₀ hipotezi kabul edilirse o zaman k tane regresyon için ortak regresyon katsayısı hesaplanır (34) (Eşitlik (3.17)).

$$b_c = \frac{\sum_{i=1}^k (\sum xy)_i}{\sum_{i=1}^k (\sum x^2)_i} \quad (3.17)$$

K tane regresyon doğrusuna ait eğimler karşılaştırıldıktan sonra eğimler arası bir farklılık bulunmadığı takdirde bu doğruların sabitlerinin farklı olup olmadığı test edilir. Sabitlerin farksız bulunması regresyon doğrularının benzer ve birleştirilebilir olduğunu gösterir. Regresyon sabitlerinin farksız olduğu şeklinde kurulan H₀ hipotezi kovaryans analizi ile test edilebilmektedir (16). Bunun için kurulan F test istatistiği:

$$F = \frac{\frac{SS_t - SS_c}{k-1}}{\frac{SS_p}{sd_p}} \quad (3.18)$$

Hesaplanan F test istatistiği (k-1, sd_p) serbestlik dereceli F tablo değeri ile karşılaştırılarak yorum yapılır. F hesap değeri tablo değerinden büyük çıktığı takdirde H₀ hipotezi red edilerek regresyon sabitlerinin birbirinden farklı olduğu sonucuna varılır. Böyle bir durumda çoklu karşılaştırma testleri yapılabilir. Eğer H₀ hipotezi kabul edilirse regresyon doğruları arasında farklılık yoktur denir ve k tane regresyon eşitliği için Eşitlik (3.5), (3.11), (3.13) yardımıyla ortak regresyon denklemi kurulur. k regresyon tek bir regresyon denklemi ile ifade edilebilir.

3.3.2.1. Parametreler İçin Çoklu Karşılaştırma

K tane regresyon eğiminin kovaryans analizi ile karşılaştırılması sonucunda, eğimlerin eşit olduğu şeklinde kurulan H₀ hipotezi red edilirse hangisinin farklı olduğunu bulmak için çoklu karşılaştırma testlerinin yapılabileceği ifade edilmiştir.

Bunun için Tukey testi kullanılabilir (16). Örneğin k tane regresyon içinden 2 tanesi ele alınsın:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 &= \beta_2 \\ H_1 : \beta_1 &\neq \beta_2 \end{aligned} \quad \text{Hesaplanacak test istatistiği } q;$$

$$q = \frac{|b_1 - b_2|}{SE} \quad (3.19)$$

Eğer 1. ve 2. Regresyon doğruları için varyanslar homojen ($\sum x^2$ eşit) ise standart hata:

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_p}{\sum x^2}} \quad (3.19a)$$

Eşit değil ise standart hata:

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_p}{2} \left[\frac{1}{(\sum x^2)_1} + \frac{1}{(\sum x^2)_2} \right]} \quad (3.19b)$$

Hesaplanan q istatistiği, sd_p serbetlik dereceli tablo değeri ile karşılaştırılır.

K tane regresyon eğimi farksız fakat regresyon sabitleri farklı bulunduğu takdirde, regresyon sabitleri için çoklu karşılaştırma yapılır (16, 25). Bunun için Tukey istatistiği:

$$q = \frac{|(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b_c(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|}{SE} \quad (3.20)$$

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_c}{2} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2} \right]} \quad (3.20a)$$

Eşitlik (3.20) de hesaplanan q değeri için uygun serbestlik derecesi sd_c dir.

K tane regresyon eşitliği, tek bir F testi yardımıyla da test edilebilmektedir. Burada kurulan H_0 hipotezi, tüm eğimler ve regresyon sabitleri birbirinden farksızdır şeklindedir. Bunun için hesaplanan test istatistiği:

$$F = \frac{\frac{SS_t - SS_p}{2(k-1)}}{\frac{SS_p}{sd_p}} \quad (3.21)$$

Elde edilen F değeri (2(k-1), sd_p) serbestlik dereceli F tablo değeri ile karşılaştırılır. H_0 hipotezi kabul edilirse regresyon doğruları eşit kabul edilir ve ortak regresyon eşitliği hesaplanır. Fakat H_0 hipotezi red edildiği takdirde önceki işlem basamaklarının en baştan ayrı ayrı uygulanması gerekmektedir.

3.4. Çoklu Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması

Araştırmacılar basit regresyon modellerini karşılaştırmak istedikleri gibi iki ya da daha fazla çoklu regresyon modellerini de karşılaştırmak isteyebilir. Yani söz konusu bu doğruların paralel olup olmadıkları incelenebilir (31). Bir regresyon doğrusuna ait kısmi beta parametreleri karşılık gelen diğer regresyon doğrusuna (ya da doğrularına) ait kısmi beta katsayısına eşitse fakat regresyon sabitleri farklı ise bu doğrular paraleldir yorumu getirilir. Bu ihtiyaçtan yola çıkarak “tüm regresyon eşitliklerinden elde edilen β parametreleri farksızdır” şeklinde kurulan ve regresyon doğrularının paralel olduğunu varsayan H_0 hipotezi test edilebilir (16). Bu işlem için hesaplanacak F test istatistiği (Eşitlik 3.16):

$$F = \frac{\frac{SS_c - SS_p}{(k-1)}}{\frac{SS_p}{sd_p}}$$

Hesaplanan değeri, (k-1), (sd_p) serbestlik dereceli F tablo değeri ile karşılaştırılır. Eşitlik (3.16) da verilen değerlerin hesaplanması Çizelge 3.1 de gösterilmiştir. Farklı olarak sd_p ' nin hesaplanması Eşitlik (3.22) de gösterilmiştir.

$$sd_p = \sum_{i=1}^k n_i - k(m+1) \quad (3.22)$$

Burada k, regresyon eşitliği sayısını, m ise bağımsız değişken sayısını göstermektedir.

Regresyon doğrularının paralel olduğu şeklinde kurulan H_0 hipotezi red edildiği takdirde k adet regresyon doğrusunun birbirinden farklı olduğu söylenir. Fakat H_0 hipotezi kabul edilirse yani doğruların paralel olduğu kabul edilirse o zaman regresyon sabitlerinin de karşılaştırılması istenir (16). Regresyon sabitleri

arasında farklılığın olmadığını ifade eden H_0 hipotezi Eşitlik (3.18) ile değerlendirilir.

$$F = \frac{\frac{SS_t - SS_c}{(k-1)}}{\frac{SS_p}{sd_p}}$$

Hesaplanan F değeri $(k-1)$, (sd_p) serbestlik dereceli F tablo değeri ile karşılaştırılır.



4. UYGULAMA

Bu bölümde regresyon analizi sonuçları SPSS programı yardımıyla verildikten sonra regresyon doğrularının karşılaştırılma işlemlerinin el ile çözümleri sunulmuştur. Ayrıca el ile çözüm basamakları gösterildikten sonra regresyon doğrularının karşılaştırılması Statgraphics paket programı ile de yapılmıştır. Regresyon parametrelerinin hesaplanması ikinci bölümde bahsedildiği için üzerinde durulmamıştır.

Uygulama 1:

Uygulama kısmında ilk olarak iki regresyon doğrusunun karşılaştırılması ele alınmıştır. Bunun için Bilkaya (2016)'nın çalışmasına ait veriler kullanılmıştır (35). Anne karnında ölen fetüslerin öldükleri hafta ve o haftadaki kafatası göz boşluğu alanları kaydedilmiştir. Fetüslerin öldükleri hafta ile kafatası göz boşluğu alanları arasındaki ilişki regresyon modeli kurularak değerlendirilmiştir. Belirtilen regresyon modelleri erkek ve kızlar için ayrı oluşturulmuştur. Erkek ve kız fetüsleri için oluşturulan iki ayrı regresyonda, hafta değişkeni bağımsız değişken, kafatası göz boşluğu alanı (alan) değişkeni bağımlı değişken olarak alınmıştır. Bu değişkenlere ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.1' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Hafta ve alan (mm²) değişkenleri için tanımlayıcı istatistikler

Cinsiyet	Özelik	N	Min	Max	Ort	S.sapma
Erkek	Hafta (x ₁)	96	15,00	40,00	30,74	7,46
	Alan (y ₁)	96	83,10	778,67	342,43	158,26
Kız	Hafta (x ₂)	56	20,00	40,00	31,38	5,94
	Alan (y ₂)	56	126,68	623,92	348,24	132,49

Erkek ve kız fetüslere ait regresyon sonuçları SPSS paket programı yardımıyla elde edilmiştir. Bebekler için regresyon analizi sonucu parametre tahmin değerleri Çizelge 4.2' de verilmiştir.

Çizelge 4.2. Fetüsler için regresyon katsayılar tablosu

		Katsayı	S.hata	t	p
Erkek	Regresyon Sabiti	-170,32	42,74	-3,99	0,00
	Hafta	16,68	1,35	12,34	0,00
Kız	Regresyon Sabiti	-237,75	52,85	-4,50	0,00
	Hafta	18,68	1,66	11,28	0,00

Oluşturulan regresyon eşitliği $\hat{Y}_{erkek} = -170,32 + 16,68 * X_{hafta}$ dir. Regresyon katsayıları istatistiksel olarak önemli bulunmuştur ($p < 0,05$). Haftalık bir birim artış göz boşluğu alanında %17' lik değişime sebep olmaktadır.

Kız fetüsleri için oluşturulan regresyon denklemi $\hat{Y}_{kız} = -237,75 + 18,68 * X_{hafta}$ dir. Haftalık bir birim artış, kız fetüslere ait göz boşluğu alanında %19' luk bir değişime sebep olmaktadır.

Çizelge 4.3. Fetüsler için varyans analiz tablosu

		Kareler top	sd	Kareler ort	F	p	R ²
Erkek	Regresyon	1471429,08	1	1471429,08	152,34	0,00	0,62
	Hata	907957,27	94	9659,12			
	Toplam	2379386,35	95				
Kız	Regresyon	677809,16	1	677809,16	127,25	0,00	0,70
	Hata	287636,27	54	5326,60			
	Toplam	965445,43	55				

Varyans analiz tablosu incelendiğinde modellerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir ($p < 0,05$). İlk modele ait R² değeri 0,62 olarak bulunmuştur. Bu değer, oluşturulan modelin %62' sinin bağımsız değişken tarafından açıklandığını ifade etmektedir. İkinci modelde ise hafta değişkeni modelin %70' ini açıklamaktadır ($R^2=0,702$).

Erkek ve kız fetüsleri için oluşturulan $\hat{Y}_{erkek} = -170,32 + 16,68 * X_{hafta}$ ve $\hat{Y}_{kız} = -237,745 + 18,68 * X_{hafta}$ doğrularının karşılaştırılması:

İlk olarak eğimlerin farklı olup olmadığı test edilir. Bunun için Eşitlik (3.1)' de verilen t test istatistiğini hesaplamak gerekir. t test istatistiğini hesaplamak için ise regresyon katsayılarının standart hatasını ve toplanmış hata kareler ortalamasını bilmek gerekmektedir.

$$(s_{y.x}^2)_p = \frac{(HKT)_e + (HKT)_k}{(hatasd)_e + (hatasd)_k} = \frac{907957,27 + 287636,27}{94 + 54} = 8078,33$$

$$(\sum x^2)_e = 5588,50$$

$$(\sum x^2)_k = 1943,10$$

$$s_{b_e-b_k} = \sqrt{\frac{(s_{y.x}^2)_p}{(\sum x^2)_e} + \frac{(s_{y.x}^2)_p}{(\sum x^2)_k}} = 2,38$$

$$t = \frac{b_e - b_k}{S_{b_e-b_k}} = \frac{16,68 - 18,67}{2,38} = -0,84$$

t istatistik değeri -0,84 olarak hesaplanmış oldu. Bu değer uygun tablo değeri ile karşılaştırılarak eğimler arası fark olup olmadığı yorumlanır. t tablo değeri için serbestlik derecesi $(96-2) + (56-2) = 148$ olarak hesaplanır. $t_{0,05;148}$ tablo değeri 1,96, t test istatistiğinden büyük olduğu için eğimler arası farklılık yoktur denir ve bu iki regresyon eşitliği için ortak regresyon katsayısının hesaplanabileceği ifade edilir. Ortak regresyon katsayısı (ortak eğim) Eşitlik (3.5) ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$b_c = \frac{(\sum x^2)_e b_e + (\sum x^2)_k b_k}{(\sum x^2)_e + (\sum x^2)_k} = \frac{5588,50 * 16,68 + 1943,10 * 18,67}{5588,50 + 1943,10} = 17,22$$

Eğimler arası farklılık bulunmadığı için regresyon sabitleri arası farklılık da test edilir. Regresyon sabitlerinin karşılaştırılması için Eşitlik (3.9)' da verilen t test istatistiği kullanılır. Bunun için Çizelge 3.2' deki formüller kullanılarak hesaplamalar yapılır.

$$A_c = (\sum x^2)_e + (\sum x^2)_k = 7231,60$$

$$B_c = (\sum xy)_e + (\sum xy)_k = 124504,93$$

$$C_c = (\sum y^2)_e + (\sum y^2)_k = 3344829,90$$

$$SS_c = C_c - \frac{B_c^2}{A_c} = 1201253,78 \quad sd_c = n_e + n_k - 3 = 149$$

$$(s_{y.x}^2)_c = \frac{SS_c}{sd_c} = 8062,11 \quad \bar{Y}_e = 342,43 \quad \bar{Y}_k = 348,24$$

$$\bar{X}_e = 30,74 \quad \bar{X}_k = 31,38$$

$$t = \frac{(\bar{Y}_e - \bar{Y}_k) - b_c (\bar{X}_e - \bar{X}_k)}{\sqrt{(s_{y.x}^2)_c \left[\frac{1}{n_e} + \frac{1}{n_k} + \frac{(\bar{X}_e - \bar{X}_k)^2}{A_c} \right]}} = 0,34$$

Ortak regresyon için hesaplanan değerler yardımıyla t test istatistiği 0,34 olarak bulunmuştur. Bu değer $t_{0,05;149}$ tablo değerine karşılık gelen 1,96 ile karşılaştırılır. Tablo değeri test istatistiğinden büyük olduğu için regresyon sabitleri

arası farklılık bulunmamaktadır. Eşitlik (3.11) ve (3.12) kullanılarak regresyon sabitleri için ortak bir katsayı hesaplanır.

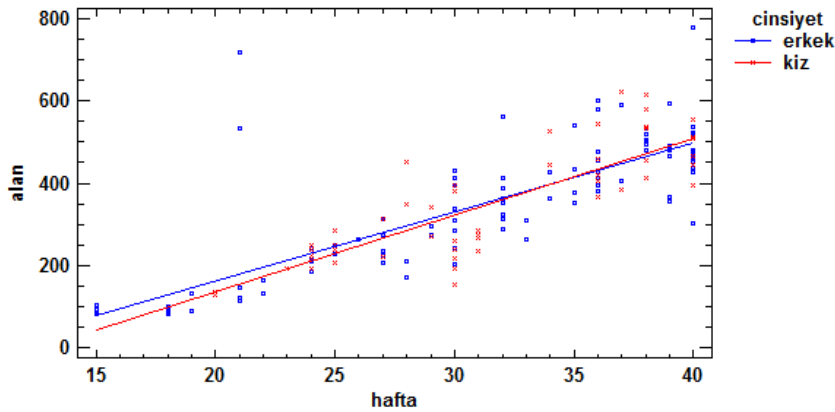
$$\bar{X}_p = \frac{n_e \bar{X}_e + n_k \bar{X}_k}{n_e + n_k} = 30,98 \quad \text{ve} \quad \bar{Y}_p = \frac{n_e \bar{Y}_e + n_k \bar{Y}_k}{n_e + n_k} = 344,57$$

$$a_c = \bar{Y}_p - b_c \bar{X}_p = -188,91$$

Eğimlerin ve sabitlerin farksız bulunduğu iki regresyon eşitliği ortak hesaplanan parametreler yardımıyla tek bir regresyon eşitliğiyle ifade edilebilmektedir. Burada cinsiyet faktörü ortadan kaldırılmıştır. Yani erkek ve kız fetüsler için oluşturulan regresyon doğruları birbirinden farksız bulunmuştur ve tek bir eşitlikle ifade edilebilecektir. Eşitlik (3.13)' de ifade edildiği gibi erkek ve kız fetüsler için oluşturulan ortak regresyon eşitliği:

$$\hat{Y}_i = a_c + b_c X_i = -188,91 + 17,22 * X_{hafta}$$

İki regresyon doğrusunun karşılaştırılması Statgraphics paket programı ile de gerçekleştirilebilmektedir. Erkek ve kız fetüsler için yapılan uygulama Statgraphics programı ile analiz edilerek gösterilmiştir (Çizelge 4.4 ve 4.5).



Grafik 4.1. Erkek ve kız fetüslerin haftalara göre göz boşluğu alanı (mm²) değişimi

Çizelge 4.4. Toplanmış regresyon için varyans analiz tablosu

Varyasyon kaynağı	sd	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F	P
Model	3	2,15043E6	716811,00	88,73	0,00
Hata	148	1,19559E6	8078,33		
Toplam(Corr)	151	3,34603E6			

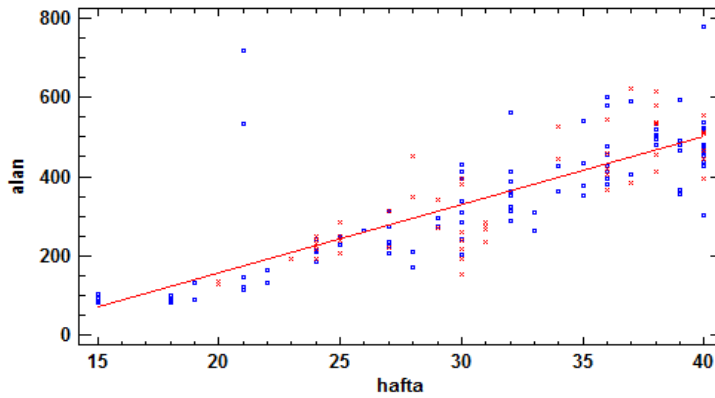
Çizelge 4.5. Kız ve erkek fetüslerin regresyon parametrelerinin karşılaştırılması

Varyasyon kaynağı	sd	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F	P
hafta	1	2,14384E6	2,14384E6	265,38	0,00
Sabitler	1	926,94	926,94	0,11	0,74
Eğimler	1	5664,38	5664,38	0,70	0,40
Model	3	2,15043E6			

Çizelge 4.6. Ortak parametreler

cinsiyet	Kesişim katsayısı	Regresyon katsayısı
erkek	-188,21	17,20
kiz	-188,21	17,20

El ile yapılan çözümde olduğu gibi Statgraphicp programı yardımıyla da eğim ve sabitler arası farklılığın olmadığı gösterilmiştir. Çizelge 4.5 eğim ve sabitlerin farklılığına ait p değerini göstermiştir. Her iki parametre içinde hesaplanan p değeri 0,05' in üstündedir yani farklılık yoktur. Bu yüzden Grafik 4.2' de gösterildiği gibi tek bir regresyon doğrusu oluşturulur.



Grafik 4.2. Ortak regresyon doğrusu

Uygulama 2:

Bu uygulamada ise fetüslerin kafatası göz boşluklarına ait yatay ve dikey uzunlukların haftalara göre değişimi dikkate alınarak karşılaştırma yapılmıştır. Birinci regresyon eşitliği hafta ve dikey uzunluk değişkenleri ile, ikinci regresyon eşitliği hafta ve yatay uzunluk değişkenleri ile oluşturulmuştur. Belirtilen değişkenler için tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.7' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.7. Hafta, yatay ve dikey uzunluk (mm) için tanımlayıcı istatistikler

	N	Min.	Max.	Ort.	S.sapma
Hafta (x)	152	15,00	40,00	30,97	6,93
Dikey uz. (y ₁)	152	9,21	27,51	18,28	4,02
Yatay uz. (y ₂)	152	8,92	34,35	21,28	5,59

Hafta-uzunluk değişkenleri için regresyon analizi sonuçları Çizelge 4.8' deki gibidir.

Çizelge 4.8. Hafta-uzunluk (mm) regresyonu için katsayılar tablosu

		Katsayı	S.hata	t	p
Dikey	Regresyon Sabiti	4,10	0,92	4,43	0,00
	Hafta	0,46	0,03	15,68	0,00
Yatay	Regresyon Sabiti	0,42	1,15	0,37	0,71
	Hafta	0,67	0,04	18,60	0,00

Çizelge 4.9. Hafta-uzunluk (mm) regresyonu için varyans analiz tablosu

		sd	Kareler top	Kareler ort	F	p	R ²
Dikey	Regresyon	1	1517,39	1517,39	245,79	0,00	0,62
	Hata	150	926,01	6,17			
	Toplam	151	2443,40				
Yatay	Regresyon	1	3285,78	3285,78	345,79	0,00	0,69
	Hata	150	1425,33	9,50			
	Toplam	151	4711,11				

Çizelge 4.7 incelendiğinde modeldeki katsayıların istatistiksel olarak önemli olduğu, Çizelge 4.9 incelendiğinde kurulan modellerinin anlamlı olduğu görülmektedir. Regresyon analiz sonucuna göre elde edilen ilk model $\hat{Y}_{dikey} = 4,10 + 0,46 * X_{dikey}$ dir. Elde edilen ikinci model ise $\hat{Y}_{yatay} = 0,42 + 0,67 * X_{yatay}$ dır.

Regresyon parametreleri hesaplandıktan sonra;

$$\hat{Y}_{dikey} = 4,10 + 0,46 * X_{dikey} \text{ ve } \hat{Y}_{yatay} = 0,42 + 0,67 * X_{yatay}$$

eşitlikleri karşılaştırılır. Eğimlerin karşılaştırılması için t test istatistiği hesaplanır.

Toplanmış hata kareler ortalaması:

$$(s_{y.x}^2)_p = \frac{(HKT)_d + (HKT)_y}{(hata\ sd)_d + (hata\ sd)_y} = \frac{926,01 + 1425,33}{150 + 150} = 7,84$$

İki regresyon için de bağımsız değişken (hafta) aynı olduğu için, bağımsız değişken için hesaplanan kareler toplamı tektir.

$$(\sum x^2)_d = (\sum x^2)_y = 7245,89$$

Regresyon katsayılarının farkının standart hatası:

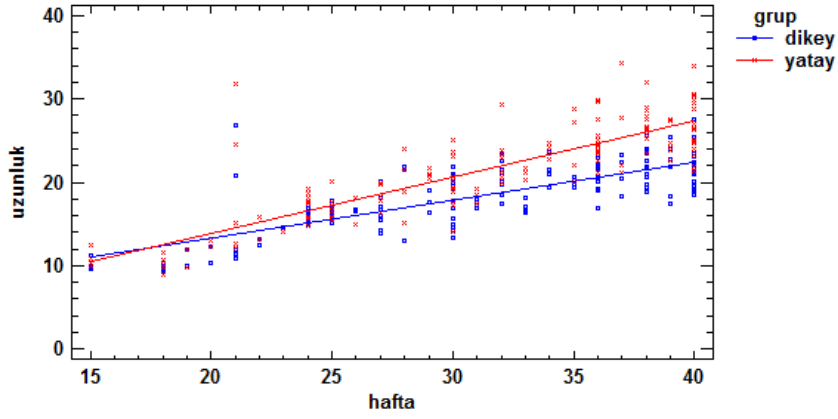
$$s_{b_d - b_k} = \sqrt{\frac{(s_{y.x}^2)_p}{(\sum x^2)_d} + \frac{(s_{y.x}^2)_p}{(\sum x^2)_y}} = 0,05$$

$$t = \frac{b_d - b_y}{S_{b_d - b_y}} = \frac{0,46 - 0,67}{0,05} = -4,47$$

Tablo değeri için hesaplanan serbestlik derecesi $(152-2)+(152-2)=300$ olarak bulunur. $t_{0,05;300}$ tablo değeri 1,96 dir. t istatistik değeri mutlak değerce tablo değerinden büyük olduğu için eğimlerin farklı olduğu sonucuna varılır. Eğimler farklı bulunduğu için regresyon sabitlerini karşılaştırmaya gerek kalmamıştır ve iki regresyon doğrusu istatistiksel olarak birbirinden farklıdır denir. Eğimleri farklı bulunan regresyon doğrularının kesiştiği nokta Eşitlik (3.4) yardımı ile hesaplanabilmektedir.

$$X_k = \frac{a_y - a_d}{b_d - b_y} = \frac{0,42 - 4,10}{0,46 - 0,67} = 17,53$$

Hafta-dikey uzunluk ve hafta-yatay uzunluk regresyon eşitliklerinin karşılaştırılmasının Statgraphics programı çıktıları Çizelge 4.10 ve 4.11' de gösterilmiştir.



Grafik 4.3. Haftalık dikey ve yatay uzunluk (mm) değişimi

Çizelge 4.10. Toplanmış regresyon için varyans analiz tablosu

Varyasyon kaynağı	sd	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F	P
Model	3	5489,64	1829,88	233,47	0,00
Hata	300	2351,35	7,83782		
Toplam(Corr)	303	7840,98			

Çizelge 4.11' de görüldüğü gibi regresyon sabitleri ve eğimlerine ait p değerleri 0,05' in altındadır, yani sabitler ve eğimler istatistiksel olarak birbirinden farklıdır.

Çizelge 4.11. Yatay ve dikey uzunluk regresyon parametrelerinin karşılaştırılması

Varyasyon kaynağı	sd	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F	P
hafta	1	4634,48	4634,48	591,30	0,00
Sabitler	1	686,47	686,47	87,58	0,00
Eğimler	1	168,69	168,69	21,52	0,00
Model	3	5489,64			

Uygulama 3:

Bu uygulamada ikiden çok regresyon doğrusunun karşılaştırılması gösterilmiştir. Bunun için üç farklı kimyasalın hücrelerdeki kalsiyum salınımına etkisi zamana bağlı olarak ölçülerek kayıt altına alınmıştır. Bu uygulamada zaman bağımsız değişken üç farklı kimyasal da bağımlı değişken olarak alınmıştır. Bağımsız değişken ve üç kimyasala ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.12' de verilmiştir.

Çizelge 4.12. Zaman (sn)ve kimyasal (nM) değişkenlerine ait tanımlayıcı istatistikler

	N	Min	Max	Ort	S.sapma
Zaman (x)	71	31,00	101,00	66,00	20,64
Kimyasal1 (y ₁)	71	83,78	187,25	137,13	34,19
Kimyasal2 (y ₂)	71	78,69	324,11	195,67	79,79
Kimyasal3 (y ₃)	71	64,13	223,34	152,20	52,24

Zaman ve kimyasal değişkenleri ile oluşturulan regresyon eşitliklerine ait sonuçlar çizelge 4.13 ve 4.14’ de verilmiştir.

Çizelge 4.13. Zaman (sn)-Kimyasal (nM) regresyonları ait katsayılar tablosu

		Katsayı	S.hata	t	p
Kimyasal1	Regresyon sabiti	28,47	1,51	18,92	0,00
	Zaman	1,65	0,02	75,61	0,00
Kimyasal2	Regresyon sabiti	-58,53	2,76	-21,20	0,00
	Zaman	3,85	0,04	96,39	0,00
Kimyasal3	Regresyon sabiti	-13,92	2,21	-6,31	0,00
	Zaman	2,52	0,03	78,84	0,00

Regresyon analizi sonucunda $\hat{Y}_1 = 28,47 + 1,65 * X_{zaman}$ eşitliği elde edilmiştir. Birinci kimyasal uygulandığında zamandaki bir birim değişim hücrelerdeki kalsiyum salınımında %1,65’ lik bir artışa sebep olmaktadır.

Zaman ve kimyasal2 değişkenleri ile oluşturulan regresyon analizi sonucunda $\hat{Y}_2 = -58,53 + 3,85 * X_{zaman}$ eşitliği elde edilmiştir. İkinci kimyasal uygulandığında zamandaki bir birim değişim hücrelerdeki kalsiyum salınımında %3,85’lik bir artışa sebep olmaktadır.

Zaman ve kimyasal3 değişkenleri ile oluşturulan regresyon analizi sonucunda $\hat{Y}_3 = -13,92 + 2,52 * X_{zaman}$ eşitliği elde edilmiştir. Üçüncü kimyasal uygulandığında zamandaki bir birim değişim hücrelerdeki kalsiyum salınımında %2,52’lik bir artışa sebep olmaktadır.

Çizelge 4.14. Zaman (sn)-Kimyasal (nM) regresyonları için varyans analiz tablosu

		sd	Kareler top.	Kareler ort.	F	p	R ²
Kimyasal1	Regresyon	1	80833,45	80833,45	5717,30	0,00	0,98
	Hata	69	975,55	14,14			
	Toplam	70	81809,00				
Kimyasal2	Regresyon	1	442368,31	442368,31	9291,18	0,00	0,99
	Hata	69	3285,20	47,61			
	Toplam	70	445653,51				
Kimyasal3	Regresyon	1	188909,81	188909,81	6216,43	0,00	0,99
	Hata	69	2096,83	30,39			
	Toplam	70	191006,64				

Çizelge 4.14 incelendiğinde kurulan modellerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir. Belirleme katsayısına bakıldığında, zaman bağımsız değişkeninin, kimyasal1 bağımlı değişkenini %98 oranında açıkladığı, zaman bağımsız değişkeninin, kimyasal2 bağımlı değişkenini %99 oranında açıkladığı, zaman bağımsız değişkeninin, kimyasal3 bağımlı değişkenini %99 oranında açıkladığı görülmektedir.

Zamana bağlı olarak üç farklı kimyasal uygulaması sonucu hücrelerdeki kalsiyum salınımları incelenmiş ve üç ayrı regresyon doğrusu oluşturulmuştur.

$$\hat{Y}_1 = 28,47 + 1,65 * X_{zaman}$$

$$\hat{Y}_2 = -58,53 + 3,85 * X_{zaman}$$

$$\hat{Y}_3 = -13,92 + 2,52 * X_{zaman}$$

Elde edilen bu üç doğrunun karşılaştırılması için gerekli işlem adımları aşağıda gösterilmiştir. Karşılaştırma işlemine önceki uygulamalarda olduğu gibi ilk olarak eğimlerin karşılaştırılması ile başlanır. Üç regresyon doğrusuna ait eğimlerin karşılaştırılmasında Eşitlik (3.16)' da verilen F test istatistiği kullanılır.

$$F = \frac{\frac{SS_c - SS_p}{k-1}}{\frac{SS_p}{sd_p}}$$

F değerini hesaplamak için toplanmış hata kareler toplamını, ortak hata kareler toplamını, k ve sd_p değerlerini hesaplamamız gerekmektedir. Bu hesaplamalar için Çizelge 3.1 kullanılır.

Ortak hata kareler toplamı:

$$A_c = (\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2 + (\sum x^2)_3 = 89460,00$$

$$B_c = (\sum xy)_1 + (\sum xy)_2 + (\sum xy)_3 = 239004,77$$

$$C_c = (\sum y^2)_1 + (\sum y^2)_2 + (\sum y^2)_3 = 718463,96$$

$$SS_c = C_c - \frac{B_c^2}{A_c} = 79929,64$$

Toplanmış hata kareler toplamı:

$$SS_p = Hkt_1 + Hkt_2 + Hkt_3 = 6357,58$$

k değeri oluşturulan regresyon eşitliği sayısını belirtmektedir, bu uygulama için k=3 tür. Her bir değişken 71 veri içermektedir yani n=71 dir.

$$sd_p = \sum_{i=1}^k (n_i - 2) = 207$$

$$F = \frac{\frac{SS_c - SS_p}{k-1}}{\frac{SS_p}{sd_p}} = \frac{36786,03}{30,71} = 1197,85$$

Hesaplanan F test istatistiği $F_{0,05;2,207}$ tablo değeri ile karşılaştırılır. Tablo değeri yaklaşık olarak 3,04 tür ve F test istatistiğinden küçük olduğu için eğimler farklıdır yorumu yapılır. Fakat hangi eğimin farklı olduğu bilinmemektedir. Buna eğimlerin ikili karşılaştırılması sonucu karar verilecektir. İkili karşılaştırmalardan önce sabitlerin karşılaştırılması gösterilmiştir.

Elde edilen üç regresyon doğrusuna ait sabitlerin karşılaştırılmasında Eşitlik (3.18)' de verilen F test istatistiği kullanılmaktadır.

$$F = \frac{\frac{SS_t - SS_c}{k-1}}{\frac{SS_p}{sd_p}}$$

Sabitler için hesaplanacak F değeri için toplanmış ve ortak hata kareler toplamı ile k ve sd_p değerleri hesaplanmıştır. Toplam hata kareler toplamı ise tüm

ortamlara ait veriler birleştirilerek elde edilecek regresyon eşitliğinin hata kareler toplamını ifade etmektedir. Verilerin birleştirilerek oluşturulduğu regresyon analizine ait varyans analiz tablosu bize toplam hata kareler toplamını (SS_t) verecektir (Çizelge 4.15).

Çizelge 4.15. Birleştirilmiş regresyona ait varyans analiz tablosu

	sd	Kareler top.	Kareler Ort.	F	p
Regresyon	1	638538,43	638538,43	638,15	0,00
Hata	211	211128,79	1000,61		
Toplam	212	849667,22			

$$SS_t = 211128,79$$

$$F = \frac{\frac{SS_t - SS_c}{k-1}}{\frac{SS_p}{sd_p}} = \frac{65599,58}{30,71} = 2136,10$$

Hesaplanan F değeri eğimlerin karşılaştırılmasında kullanılan aynı tablo değeri ile yani $F_{0,05;2,207}$ tablo değeri (3,04) ile karşılaştırılır. F değeri, tablo değerinden büyük olduğu için sabitler arası farklılığın da istatistiksel olarak önemli olduğu bulunur.

El ile çözüm işlemlerinin yanında üç regresyon doğrusunun karşılaştırılması Statgraphics paket program çıktıları ile gösterilmiştir (Çizelge 4.16, 4.17, 4.18, Grafik 4.4).

Çizelge 4.16. Üç farklı regresyon analizine ait parametreler

ortam	Kesişim katsayısı	Regresyon katsayısı
1	28,47	1,65
2	-58,53	3,85
3	-13,92	2,52

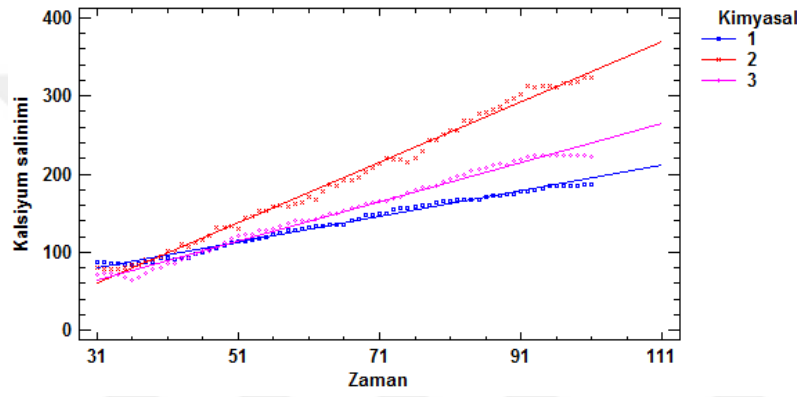
Çizelge 4.17. Toplanmış regresyon için varyans analiz tablosu

Varyasyon kaynağı	sd	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F	P
Model	5	843310,00	168662,00	5491,56	0,00
Hata	207	6357,58	30,71		
Toplam(Corr)	212	849667,00			

Çizelge 4.18. Üç regresyona ait parametrelerin karşılaştırılması

Varyasyon kaynağı	sd	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F	P
x	1	638538,00	638538,00	20790,53	0,00
Sabitler	2	131198,00	65599,00	2135,88	0,00
Eğimler	2	73573,10	36786,60	1197,75	0,00
Model	5	843310,00			

Statgraphics paket program çıktıları da incelendiğinde oluşturulan üç regresyon eşitliğindeki eğim ve sabitlerin el ile çözümlerde olduğu gibi istatistiksel olarak farklı olduğu görülmektedir. Çizelge 4.17’ de sabitlere ve eğimlere ait p değeri 0,05’ ten küçük olduğu görülmektedir.



Grafik 4.4. Zamana bağlı olarak kimyasallara göre kalsiyum salınım (nM) değişimi

Uygulama 3’ te oluşturulan üç regresyon eşitliğine ait eğimler ve sabitler ele alınarak karşılaştırılmış ve her iki parametrenin de istatistiksel olarak farklı olduğu bulunmuştur. Fakat hangi parametrelerin farklı olduğuna ikili karşılaştırmalar sonucu karar verilebilmektedir. Bunun için eğimlerin ve sabitlerin ikili karşılaştırma işlemleri bir sonraki adımda gösterilmiştir.

Eğimler için çoklu karşılaştırma:

1. ve 2. regresyona ait eğimlerin karşılaştırılması:

Kimyasal1 ve kimyasal2 için oluşturulan regresyon eğimleri karşılaştırılmıştır. Bunun için Eşitlik (3.19)’ da verilen tukey testi (q istatistik değeri) kullanılır.

$$q_{12} = \frac{|b_1 - b_2|}{SE}$$

Parametreler bilindiği için hesaplanması gereken değer SE değeridir. $\sum x^2$ kareler toplamı tüm regresyonlarda aynı olduğu için SE, Eşitlik (3.19a) ile hesaplanır.

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_p}{\sum x^2}}$$

$$(s_{y.x}^2)_p = \frac{(HKT)_1 + (HKT)_2 + (HKT)_3}{(hatasd)_1 + (hatasd)_2 + (hatasd)_3}$$

$$= \frac{975,55 + 3285,20 + 2096,83}{69 + 69 + 69} = 30,71$$

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_p}{\sum x^2}} = \sqrt{\frac{30,71}{29820}} = 0,032$$

$$q_{12} = \frac{|b_1 - b_2|}{SE} = \frac{|1,65 - 3,85|}{0,032} = 68,75$$

Hesaplanan q değeri Ek-3' te verilen k (3) ve sd_p (207) serbestlik dereceli q tablo değeri ile karşılaştırılır. Bu değer 3,31' tür ve hesaplanan q değerinden küçüktür. Yani kimyasal1 ve kimyasal2' ye ait eğimler farklıdır.

1. ve 3. regresyona ait eğimlerin karşılaştırılması:

Kimyasal1 ve kimyasal3 için oluşturulan regresyon eğimleri karşılaştırılmıştır.

$$q_{13} = \frac{|b_1 - b_3|}{SE} = \frac{|1,65 - 2,52|}{0,032} = 27,19$$

Burada hesaplanan q (27,19) değeri de tablo değerinden büyük olduğu için kimyasal1 ve kimyasal3 e ait eğimler farklı bulunmuştur.

2. ve 3. regresyona ait eğimlerin karşılaştırılması:

Kimyasal2 ve kimyasal3 için oluşturulan regresyon eğimleri karşılaştırılmıştır.

$$q_{23} = \frac{|b_2 - b_3|}{SE} = \frac{|3,85 - 2,52|}{0,032} = 41,56$$

Kimyasal2 ve kimyasal3' e ait eğimlerin ikili karşılaştırmasında q değeri 41,56 olarak bulunmuştur ve 3,31 olarak bulunan tablo değerinden büyüktür ve 2 ve 3. uygulamaya ait eğimler de farklıdır.

Eğimlerin ikili karşılaştırılması sonucu üç eğimde birbirinden farklı bulunmuştur. Bu durumda üç regresyon doğrusu istatistiksel olarak birbirinden farklıdır yorumu yapılabilmektedir.

Sabitler için çoklu karşılaştırma:

1. ve 2. regresyona ait sabitlerin karşılaştırılması:

Kimyasal1 ve kimyasal2 için oluşturulan regresyon eğimleri karşılaştırılmıştır. Bunun için Eşitlik (3.20)' de verilen tukey testi (q istatistik değeri) kullanılır.

$$q_{12} = \frac{|(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b_c(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|}{SE}$$

Burada SE Eşitlik (3.20a)' dan elde edilir.

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_c}{2} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2} \right]}$$

$$(s_{y.x}^2)_c = \frac{SS_c}{sd_c}, \quad sd_c = \sum_{i=1}^k n_i - k - 1, \quad b_c = \frac{(\sum x^2)_1 \beta_1 + (\sum x^2)_2 \beta_2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2}$$

$$\bar{X} = 66 \quad \bar{Y}_1 = 137,13 \quad \bar{Y}_2 = 195,67$$

$$b_c = \frac{(\sum x^2)_1 b_1 + (\sum x^2)_2 b_2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2} = \frac{29820 * (1,65 + 3,85)}{2 * 29820} = 2,75$$

SS_c değeri eğimlerin karşılaştırılması için gerekli F test istatistiği hesaplanırken bulunmuştur.

$$SS_c = 79929,64 \quad sd_c = 3 * 71 - 3 - 1 = 209$$

$$(s_{y.x}^2)_c = \frac{SS_c}{sd_c} = 382,44$$

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_c}{2} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_2} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{382,44}{2} \left[\frac{1}{71} + \frac{1}{71} + \frac{0}{2 * 29820} \right]} = 2,32$$

$$q_{12} = \frac{|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b_c(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)|}{SE} = \frac{|137,13 - 195,67 - 0|}{2,32} = 25,23$$

Burada hesaplanan q değeri Ek-3' te verilen k ve sd_c serbestlik dereceli tablo değeri ile karşılaştırılır. q değerinin tablo değerinden büyük çıkması iki sabitin birbirinden farklı olduğunu belirtir. k (3) ve sd_c (209) serbestlik dereceli tablo değeri 3,31 tür. Buradan kimyasal1 ve kimyasal2' ye ait regresyon sabitlerinin farklı olduğu anlaşılmıştır.

1. ve 3. regresyona ait sabitlerin karşılaştırılması:

Kimyasal1 ve kimya3 için oluşturulan regresyon eğimleri karşılaştırılmıştır.

$$\bar{X} = 66 \quad \bar{Y}_1 = 137,13 \quad \bar{Y}_3 = 152,20$$

$$b_c = \frac{(\sum x^2)_1 b_1 + (\sum x^2)_3 b_3}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_3} = \frac{29820 * (1,65 + 2,52)}{2 * 29820} = 2,09$$

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x}^2)_c}{2} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_3)^2}{(\sum x^2)_1 + (\sum x^2)_3} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{382,44}{2} \left[\frac{1}{71} + \frac{1}{71} + \frac{0}{2 * 29820} \right]} = 2,32$$

$$q_{13} = \frac{|\bar{Y}_1 - \bar{Y}_3) - b_c(\bar{X}_1 - \bar{X}_3)|}{SE} = \frac{|137,13 - 152,20 - 0|}{2,32} = 6,50$$

Hesaplanan q değeri (6,50), tablo değerinden (3,31) büyüktür, 1 ve 3. regresyon sabitleri de birbirinden farklı bulunmuştur.

2. ve 3. regresyona ait sabitlerin karşılaştırılması:

Kimyasal2 ve kimyasal3 için oluşturulan regresyon eğimleri karşılaştırılmıştır.

$$\bar{X} = 66 \quad \bar{Y}_2 = 195,67 \quad \bar{Y}_3 = 152,20$$

$$b_c = \frac{(\sum x^2)_2 b_2 + (\sum x^2)_3 b_3}{(\sum x^2)_2 + (\sum x^2)_3} = \frac{29820 * (3,85 + 2,52)}{2 * 29820} = 3,19$$

$$SE = \sqrt{\frac{(S_{y.x})_c}{2} \left[\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_3)^2}{(\sum x^2)_2 + (\sum x^2)_3} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{382,44}{2} \left[\frac{1}{71} + \frac{1}{71} + \frac{0}{2 * 29820} \right]} = 2,32$$

$$q_{23} = \frac{|(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3) - b_c(\bar{X}_2 - \bar{X}_3)|}{SE} = \frac{|195,67 - 152,20 - 0|}{2,32} = 18,74$$

Kimyasal2 ve kimyasal3' e ait regresyon sabitleri karşılaştırılması incelendiğinde q değerinin tablo değerinden (3,31) büyük olduğu görülmektedir. Böylelikle üç regresyon eşitliğine ait sabitlerin birbirinden farklı olduğu görülmüştür.

İkili karşılaştırmalar incelendiğinde; hem eğimlerin hemde sabitlerin farklı bulunduğu durumda regresyon doğrularının birleştirilebilirliği söz konusu değildir. Yani üç regresyon doğrusunun birbirinden farklı olduğu sonucuna varılmıştır.

Uygulama 4:

Dördüncü uygulamada çoklu regresyon doğrularının karşılaştırılması gösterilmiştir. Bu uygulama için uyku apnesi olan hastalara ait veriler kullanılmıştır. Oksijen desaturasyon indeksinin (ODI) ve uyku süresinin, uyku apnesi indeksini (AHI) etkilediği düşünülerek erkek ve kadınlar için iki ayrı regresyon eşitliği kurulmuştur. Bahsedilen regresyon eşitliklerinde apne indeksi (AHI) bağımlı değişken, oksijen desaturasyon indeksi ve uyku süresi bağımsız değişken olarak alınmıştır ve erkek ve kadınlara ait oluşturulan regresyon eşitlikleri karşılaştırılmıştır.

Bu uygulamada kullanılan verilere ait tanımlayıcı istatistikler Çizelge 4.19' da verilmiştir.

Çizelge 4.19. Erkek ve kadınlara ait tanımlayıcı istatistikler

Cinsiyet	Değişken	N	Min	Max	Ort.	S.sapma
Erkek	AHI (y_1)	43	5,70	109,30	36,22	25,83
	Uyku süresi (x_1) ₁	43	168,50	523,50	394,05	76,01
	ODI (x_2) ₁	43	28,00	601,00	210,53	146,73
Kadın	AHI (y_2)	28	5,90	88,30	26,38	23,99
	Uyku süresi (x_1) ₂	28	159,00	499,50	388,39	75,89
	ODI (x_2) ₂	28	25,00	595,00	166,57	159,85

Erkek hastalara ait regresyon analizi sonuçları Çizelge 4.20 ve 4.21' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.20. Hastalara ait regresyon parametreleri

		Katsayı	S.hata	t	p
Erkek	Regresyon sabiti	51,33	6,87	7,48	0,00
	Uyku süresi	-0,13	0,02	-7,33	0,00
	ODI	0,16	0,01	18,36	0,00
Kadın	Regresyon sabiti	19,90	2,92	6,82	0,00
	Uyku süresi	-0,05	0,01	-6,44	0,00
	ODI	0,15	,004	42,46	0,00

Çizelge 4.21. Hastaların regresyonuna ait varyans analiz tablosu

		sd	Kareler top.	Kareler ort.	F	p	R ²
Erkek	Regresyon	2	25240,82	12620,41	181,81	0,00	0,90
	Hata	40	2776,69	69,42			
	Toplam	42	28017,52				
Kadın	Regresyon	2	15340,16	7670,08	906,17	0,00	0,98
	Hata	25	211,61	8,46			
	Toplam	27	15551,77				

Çizelge 4.19 ve 4.20' de görüldüğü gibi elde edilen regresyon modelleri $\hat{Y}_{erkek} = 51,33 - 0,13 * X_{uyku} + 0,16 * X_{ODI}$ ve $\hat{Y}_{kadın} = 19,90 - 0,05 * X_{uyku} + 0,15 * X_{ODI}$ olarak bulunmuştur. Elde edilen model ve parametreler istatistiksel olarak önemlidir ($p < 0,05$). Modele ait belirleme katsayısı 0,90' dır. Yani AHI değişkeni, ODI ve uyku süresi değişkenleri ile %90 oranında açıklanmaktadır.

Kadınlar için oluşturulan modele ait belirtme katsayısı 0,98' dir. Yani AHI değişkeni, ODI ve uyku süresi değişkenleri ile %98 oranında açıklanmaktadır.

Erkek ve kadınlara ait regresyon parametreleri bulunduktan sonra çoklu regresyon eşitliklerinin karşılaştırılma işlemleri bir sonraki adımda yapılmıştır. Öncelikle elde edilen bu iki doğrunun paralel olup olmadıkları değerlendirilir. Bunun için Eşitlik (3.16)' da verile F test istatistiği hesaplanır.

$$F = \frac{\frac{SS_c - SS_p}{(k-1)}}{\frac{SS_p}{sd_p}}$$

Burada SS_p değeri, regresyon doğrularına ait hata kareler toplamının toplanması ile, sd_p değeri ise Eşitlik (3.23) ile elde edilir. Bu eşitlikte k regresyon sayısını, m ise bağımsız değişken sayısını belirtmektedir.

$$SS_p = Hkt_1 + Hkt_2 = 2776,693 + 211,606 = 2988,299$$

$$sd_p = \sum_{i=1}^k n_i - k(m+1) = (43 + 28) - 2 * 3 = 65$$

SS_c değeri ise, basit regresyon doğrularının karşılaştırılmasında olduğu gibi direk değil, bağımsız değişken sayısı birden fazla olduğu için matris yardımıyla hesaplanmaktadır. Hesaplamalardaki e ve k alt indisleri erkek ve kadınlara ait verilerden elde edilmiş değerleri belirtmektedir.

$$SS_c = \sum y^2 - [b_{c1} \quad b_{c2}] * \begin{bmatrix} \sum x_1 y_1 \\ \sum x_2 y_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum y^2 = (\sum y^2)_e + (\sum y^2)_k = 28017,52 + 15551,77 = 43569,29$$

$$\sum x_1 y_1 = (\sum x_1 y_1)_e + (\sum x_1 y_1)_k = -21175,9 + 3465,84 = -17710,06$$

$$\sum x_2 y_2 = (\sum x_2 y_2)_e + (\sum x_2 y_2)_k = 139462,67 + 101687,54 = 241150,21$$

$$b_{c1} = \frac{(\sum x_1^2)_e (b_1)_e + (\sum x_1^2)_k (b_1)_k}{(\sum x_1^2)_e + (\sum x_1^2)_k}$$

$$= \frac{242655,91 * -0,13 + 155509,68 * -0,05}{242655,91 + 155509,68} = -0,06$$

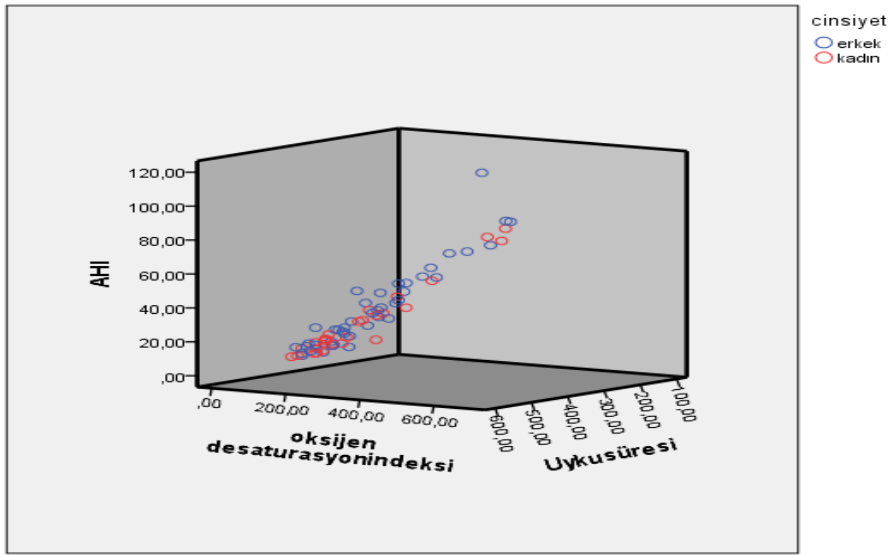
$$b_{c2} = \frac{(\sum x_2^2)_e (b_2)_e + (\sum x_2^2)_k (b_2)_k}{(\sum x_2^2)_e + (\sum x_2^2)_k}$$

$$= \frac{904242,70 * 0,16 + 689864,86 * 0,15}{904242,70 + 689864,86} = 0,16$$

$$SS_c = 43569,29 - [-0,06 \quad 0,16] * \begin{bmatrix} -17710,06 \\ 241150,21 \end{bmatrix} = 3922,65$$

$$F = \frac{\frac{SS_c - SS_p}{sd_p}}{\frac{SS_p}{65}} = \frac{\frac{3922,65 - 2988,299}{1}}{\frac{2988,299}{65}} = \frac{934,35}{45,97} = 20,33$$

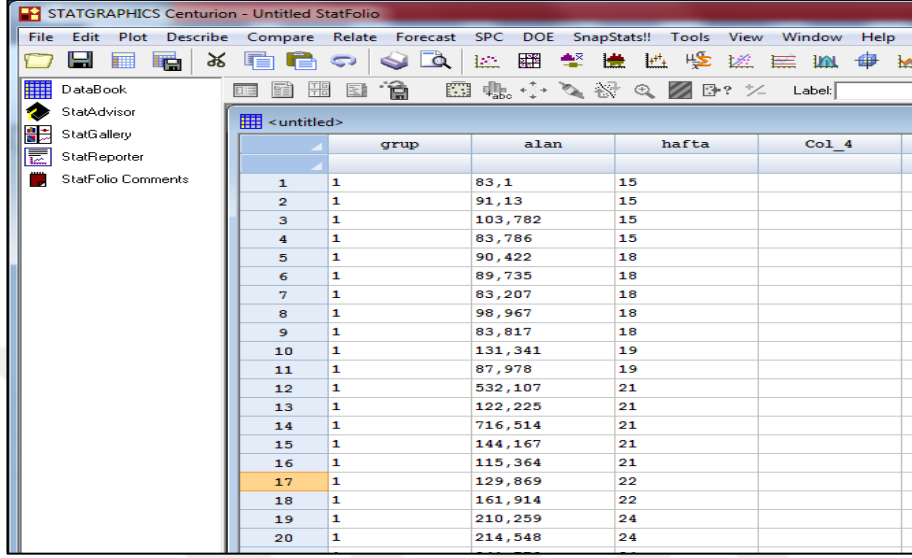
Hesaplanan F değeri (k-1), sd_p serbeslik dereceli tablo değeri ile kıyaslanır. $F_{0,05;1,65}$ tablo değeri 3,99' dur. F hesap değeri tablo değerinden büyük olduğu için regresyon doğruları paralel değildir sonucu çıkarılır. Regresyon doğrularının paralel olmaması iki eşitliğin birbirinden farklı olduğunu gösterir. Bu durumda sabitlerin karşılaştırılmasına gerek kalmamıştır. Sonuç olarak ODI ve uyku süresinin AHI üzerinde etkisi erkek ve kadınlarda farklı olduğu sonucuna varılır. Çoklu regresyon doğrularının paket programda karşılaştırılması olmadığı için sadece el ile çözümü gösterilmiştir. Erkek ve kadınlarda ODI ve uyku süresine göre AHI değişimi grafik 4.5' de verilmiştir.



Grafik 4.5. ODI ve uyku süresine göre AHI değişimi

4.1. Paket Program İle İşlem Basamakları

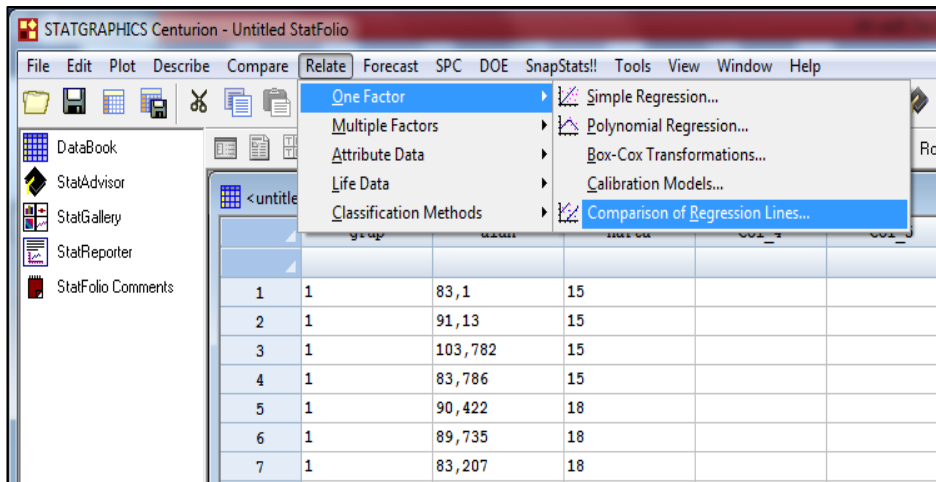
Bu çalışmada regresyon doğrularının karşılaştırılması statgraphics paket programı ile de yapılmıştır. Statgraphics paket programına veri girişi Şekil 4.1' de gösterilmiştir.



	grup	alan	hafta	Col_4
1	1	83,1	15	
2	1	91,13	15	
3	1	103,782	15	
4	1	83,786	15	
5	1	90,422	18	
6	1	89,735	18	
7	1	83,207	18	
8	1	98,967	18	
9	1	83,817	18	
10	1	131,341	19	
11	1	87,978	19	
12	1	532,107	21	
13	1	122,225	21	
14	1	716,514	21	
15	1	144,167	21	
16	1	115,364	21	
17	1	129,869	22	
18	1	161,914	22	
19	1	210,259	24	
20	1	214,548	24	

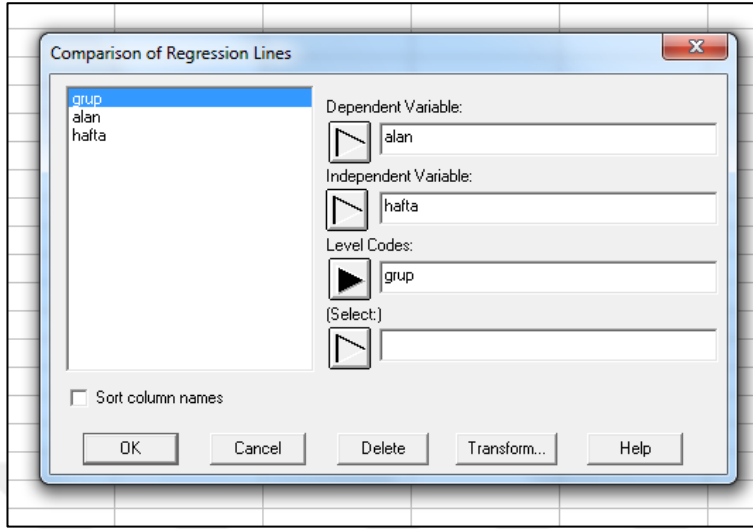
Şekil 4.1. Paket program veri girişi

Bağımlı ve bağımsız değişkene ait veriler alt alta girildikten sonra grup değişkeni oluşturulur. Ekran görüntüsündeki hafta bağımsız değişken, alan bağımlı değişkendir. Grup değişkenide kaç grup olduğunu ve kaç grubun karşılaştırılacağını ifade etmektedir. Karşılaştırma işlemi için Relate menüsünden One Factor, oradan da Comparison of Regression Lines seçeneği işaretlenir.

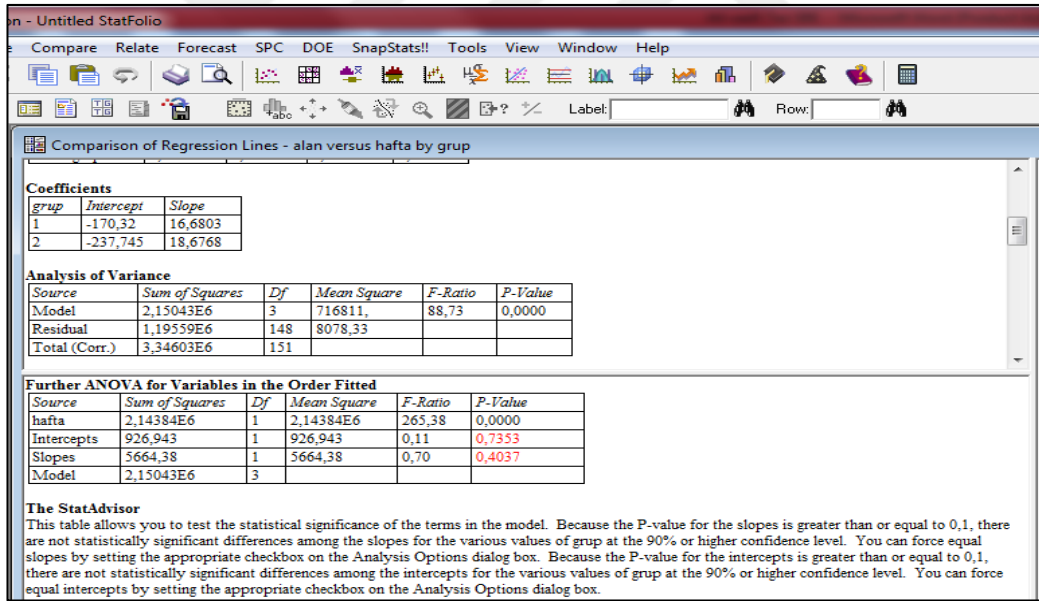


Şekil 4.2. Karşılaştırma işlemi için kullanılan menüler

Karşımıza çıkan pencerede bağımlı ve bağımsız değişkenler karşı kutucuğa, grup değişkenimiz de level codes kutucuğuna atılır ve ok butonuna basılır.

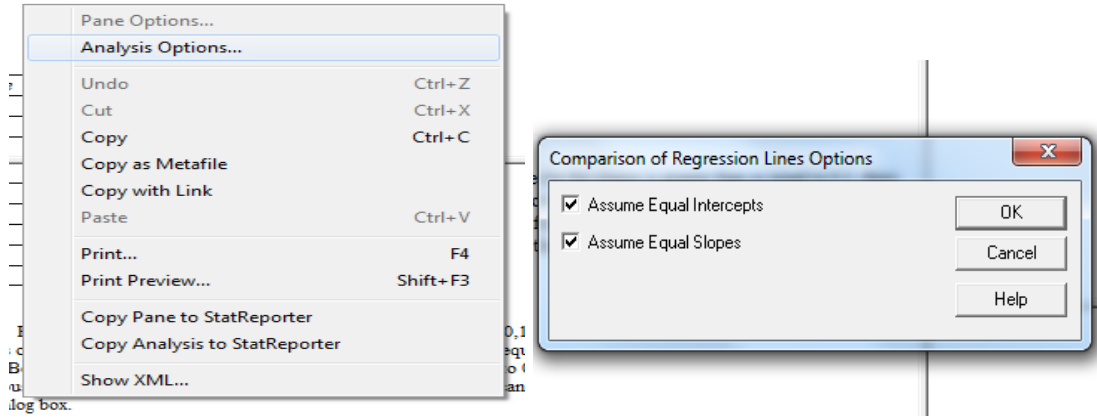


Şekil 4.3. Değişkenlerin kutucuklara atılması işlemi



Şekil 4.4. Paket program analiz sonuçları

Şekil 4.4 aracılığıyla Further Anova tablosundan eğim ve sabitlerin istatistiksel olarak farklı olup olmadığını görebilmekteyiz. Eğim ve sabitler için p değeri 0,05 den büyük olduğu için istatistiksel olarak farklılık yoktur denir. Fark olmadığı için program aracılığı ile ortak parametreler hesaplanır. Bunun için analiz sonucu ekranında sağ tıklanarak analysis options seçeneğine tıklanır. Açılan pencerede ortak parametreler işaretlenir ve ok butonuna basılır.



Şekil 4.5. Ortak parametreleri hesaplama seçenekleri

Şekil 4.6 bize ortak regresyon doğrusuna ait parametreleri vermektedir.

Multiple Regression Analysis

Parameter	Estimate	Standard Error	T	P-Value
CONSTANT	-188,206	33,3747	-5,63918	0,0000
hafta	17,2009	1,05171	16,3552	0,0000

Coefficients

grup	Intercept	Slope
1	-188,206	17,2009
2	-188,206	17,2009

Şekil 4.6. Ortak regresyon sonucu

5. SONUÇLAR

Günümüzde tıp, biyoloji vb. birçok alanda yapılan araştırmalarda, incelenen değişkenler arası doğrusal ilişkiyi bir eşitlikle açıklamada regresyon analizi sıklıkla kullanılmaktadır. Elde edilen regresyon eşitliği sayesinde ileriye yönelik tahminler yapılabilmesi de regresyon analizinin sunduğu en önemli faydalardan biridir. Bazı durumlarda aynı değişkenlerle farklı gruplara ait birden çok regresyon eşitliği oluşturulabilmektedir. Fakat araştırmalarda oluşturulan regresyon eşitliklerinin gruplar arası farklılık gösterip göstermediği dikkate alınmamaktadır. Gruplar farklılık göstermediği takdirde tek bir regresyon doğrusu oluşturularak ilgili örnek temsil edilebilmektedir. Bu araştırmada belirtilen konu üzerinde durulmuştur.

Bu çalışmada basit doğrusal regresyon ve çoklu doğrusal regresyon analizi ile ilgili bilgi verilerek daha sonra regresyon doğrularının karşılaştırılması elle çözümleriyle ve Statgraphics paket program çıktılarıyla gösterilmiştir. Karşılaştırma işlemleri regresyon parametrelerinin karşılaştırılması ile gerçekleştirilmiştir. Bu yüzden karşılaştırma işlemine geçmeden önce basit ve çoklu doğrusal regresyon analizinde parametrelerin hesaplanması birer örnek üzerinde gösterilmiştir. Daha sonra dört farklı uygulama yapılarak karşılaştırma işlemleri gösterilmiştir. Birinci ve ikinci uygulamada iki basit doğrusal regresyon doğrusunun karşılaştırılması, üçüncü uygulamada ikiden çok basit doğrusal regresyon doğrusunun karşılaştırılması, dördüncü uygulamada ise iki çoklu regresyon doğrusunun karşılaştırılması gösterilmiştir. Karşılaştırma işlemlerinde ilk olarak regresyon eğimleri karşılaştırılmış, farklılık bulunmaması durumunda regresyon sabitlerinin karşılaştırılmasına gidilmiştir.

Birinci uygulamada haftalara göre ölen fetüslerin göz boşluğu alan değişimi regresyon analizi ile incelenmiş, bu değişimin cinsiyete göre farklılık gösterip göstermediği araştırılmıştır. Erkek ve kız fetüsler için oluşturulan regresyon denklemlerinde eğimler farksız bulunmuş ve ortak eğim hesaplanmıştır (Çizelge 4.6). Eğimler farksız bulunduğu için sabitlerin mukayesesine geçilmiştir. Sabitlerinde farksız bulunması sonucunda fetüslerde haftalık göz boşluğu alanı değişiminde cinsiyetin bir etkisi olmadığı görülmüş ve iki regresyon doğrusunun birleştirilerek (ortak parametreler hesaplanarak) tek bir doğru ile ifade edilebileceği gösterilmiştir (Grafik 4.2).

İkinci uygulamada ise fetüslerin haftalara göre göz boşluklarının yatay ve dikey uzunlukları değişimini gösteren iki regresyon doğrusu oluşturulmuştur. Oluşturulan yatay ve dikey uzunluk doğrularının karşılaştırılması yapılmıştır. Karşılaştırma sonrası eğimler farklı bulunmuştur (Çizelge 4.11). Eğimlerin farklı bulunması iki regresyon doğrusunun farklı olduğunu belirtmektedir. Yani haftalara göre yatay ve dikey uzunluklar farklılık göstermektedir. Eğimlerin farklı bulunmasından dolayı sabitlerin karşılaştırılmasına gerek kalmamıştır. Eğimleri

farklı bulunan doğruların kesiştikleri nokta, Eşitlik (3.4) yardımıyla hesaplanarak gösterilmiştir. Birinci uygulamada regresyon doğrularının birleştirilebilirliği, ikinci uygulamada ise doğruların farklı oldukları ve kesiştikleri noktanın bulunması gösterilmiştir.

Üçüncü uygulamada üç farklı kimyasalın uygulanması sonucu hücrelerdeki kalsiyum salınımının zamana bağlı değişimini ifade eden, üç ayrı regresyon eşitliği kurulmuştur. Burada eğimlerin karşılaştırılması birinci ve ikinci uygulamadan farklı olarak F test istatistiği hesaplanarak yapılmıştır. İki çok eğimin karşılaştırılmasında t test istatistiğinin kullanılmadığı başlık (3.2.1)' de belirtilmiştir. Karşılaştırma sonucu eğimlerin eşit olduğunu belirten H_0 hipotezi red edilmiştir (Çizelge 4.22). Fakat hangi eğimin farklı olduğunu bilinmemektedir. Bu yüzden ikili karşılaştırma işlemleri uygulanmıştır. İkili karşılaştırmalar sonucunda da üç eğim de birbirinden farklı bulunmuştur. Yani üç regresyon eşitliğine birbirinden farklıdır yorumu yapılmıştır ve bu yüzden regresyon doğruları birleştirilememiştir. Üç farklı kimyasala göre zamana bağlı değişen kalsiyum salınımları birbirinden farklı bulunmuştur. Bu uygulamada eğimlerin birbirinden farklı olduğu bulunduğu için regresyon doğrularının farklı olduğuna karar verilmiş ve sabitlerin karşılaştırılmasına gerek kalmamıştır. Fakat sabitler için ikili karşılaştırma işlem basamakları gösterilmesi amacıyla regresyon sabitlerinin karşılaştırılmasında yer verilmiştir. Regresyon sabitleri için yapılan ikili karşılaştırmalar sonucunda üç regresyon doğrusuna ait sabitlerin de farklı olduğu bulunmuştur.

Çalışmanın dördüncü uygulamasında ise çoklu regresyon doğrularının karşılaştırılması gösterilmiştir. Bunun için uyku apnesini etkilediği düşünülen oksijen desatrasyon ve uyku süresi değişkenleri ile erkek ve kadınlar için iki ayrı regresyon doğrusu oluşturulmuştur ve cinsiyete göre regresyon doğrularının farklılığı test edilmiştir. Karşılaştırma sonucu, iki eşitliğin birbirine paralel olduğunu ifade eden H_0 hipotezi red edilmiştir. Böylelikle regresyon doğruları farklıdır denir ve regresyon sabitlerini karşılaştırmaya gerek kalmamıştır. Oksijen desatrasyonu ve uyku süresine göre uyku apnesi indeksinin değişimi cinsiyetler açısından farklı bulunmuştur. Çizelge 4.23 incelendiğinde erkeklere ait ortalamaların kadınlardan daha yüksek olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak yapılan tez çalışmasında, regresyon doğrularının karşılaştırılmasının nasıl yapıldığı, işlem basamakları ve paket program çıktılarıyla adım adım gösterilmiştir. Çalışmalarında regresyon analizi kullanacak çeşitli bilim dallarındaki araştırmacılara uygulamalı örnekleri ile birlikte yol gösterici bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

ÖZET

Basit ve Çoklu Regresyon Modellerinde Parametre Tahminlerinin Karşılaştırılması

Bu çalışmanın amacı regresyon doğrularının parametreler aracılığı ile karşılaştırılmasını göstermektir. Bunun için regresyon analizi konusuna değindikten sonra dört ayrı uygulama gerçekleştirilmiştir. Herbir uygulamada öncelikle regresyon parametreleri elde edilmiştir. Daha sonra regresyon doğrularına ait eğimler ve regresyon sabitleri karşılaştırılmıştır. Birinci ve ikinci uygulamada iki regresyon doğrusunun karşılaştırılması ele alınmıştır. Birinci uygulamada regresyon doğrularının farksız ve birleştirilebilir olduğu, ikinci uygulamada ise iki regresyon doğrusunun birbirinden farklı olduğu ve bir noktada kesiştiği gösterilmiştir. Üçüncü uygulamada ikiden çok regresyon doğrusunun karşılaştırılması adım adım incelenmiştir. Son uygulamada ise çoklu regresyon doğrularının karşılaştırılmasıyla ilgili uygulama gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer regresyon doğruları, ortak eğim, parametre karşılaştırması

ABSTRACT

Comparison of parameter evaluations to simple and multiple regression models

The purpose of this research is to display the comparison of regression lines through parameters. With that perspective, four separate applications were carried out following addressing at regression analysis. Regression parameters were foremost obtained in each application. Then the slopes and regression constants of the regression lines were compared. At the first and second applications, the comparisons of the two regression lines were addressed. It has been shown in the first application that the regression lines were indifferent and combinable, as in the second application the two regression lines were different from each other and intersected at one point. Comparisons of more than two regression lines were evaluated step by step at the third application. An application of comparing multiple regression lines was conducted during the final application.

Keywords: Linear regression lines, common slope, parameter comparison

KAYNAKLAR

1. Pamukçu E. Sistolik Kan Basıncını Etkileyebilecek Faktörlerin Ridge Regresyon Analizi İle İncelenmesi ve Çoklu Bağlantı Problemi. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Elazığ, (Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Cemil ÇOLAK), 2010; 1-84.
2. Neter J, Kunter M H, Nachtsheim C J, Wasserman W. Applied Linear Regression Models, The Mc Graw-Hill Companies, Inc.,Chicago, 1996.
3. Serper Ö. Uygulamalı İstatistik 2, Ezgi Kitabevi, Bursa, 2004.
4. Hamzaoğlu S. Çoklu Regresyon Yöntemlerinde Güç Analizi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Samsun (Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yüksek Terzi), 2013; 1-88.
5. Soysal M İ, Gürcan E K. Minitab ve SPSS Yazılımı ile İstatistiksel Analizler. Namık Kemal Üniversitesi, Ziraat Fakültesi, Tekirdağ, 2012.
6. Özdamar K. Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi. Nisan Kitabevi, Ankara, 2013.
7. Biçkici B. Çok Değişkenli Varyans Analizi Ve Çoklu Doğrusal Regresyon Analizinin Uygulamalı Olarak Karşılaştırılması. Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum (Tez Danışmanı: Prof. Dr. Necati Yıldız), 2007; 1-54.
8. Çerçi İ. Çok Değişkenli Regresyon Analizi (Gsm Sektöründe Bir Uygulama). Gazi Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara (Tez Danışmanı: Prof. Dr. Aydın ÜNSAL), 2010; 1-142.
9. Eye A, Schuster C. Regression Analysis For Social Sciences. Academic Press Limited, London, 1998.
10. Akdeniz F, Öztürk F. Lineer Modeller. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 1996.
11. Günaşdı N E. Çok Değişkenli Çoklu Doğrusal Regresyon Analizinin İncelenmesi. Erzurum Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum (Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet TOPAL), 2014; 1-45.
12. Mendeş M. Uygulamalı Bilimler İçin İstatistik ve Araştırma Yöntemleri. Kriter Yayınevi, İstanbul, 2012.
13. Montgomery D C, Peck W A, Vining G G. Introduction To Linear Regression Analysis. John Wiley Interscience, New York, 2006.

14. Armitage P, Berry G, Matthews J N S. Statistical Methods in Medical Research. John Wiley, New York, 2002.
15. Efe E, Bek Y, Şahin M. SPSS' te Çözümleri İle İstatistik Yöntemler II. Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Rektörlüğü, Kahramanmaraş, 2000.
16. Zar J. Biostatistical Analysis. Fifth Edition, New Jersey: Upper Saddle River, 1984.
17. Alpar R. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş I. Nobel Yayın Dağıtım, 408 s, Ankara, 2003.
18. Cohen J, Cohen P, West S G, Aiken L S. Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for the Behavioral Sciences. Lawrence Applebaum Associates, Mahwah, 2003.
19. Tüter A. Çoklu Regresyon Analizi ile Talep Analizi. Yıldız Üniversitesi, Fen Bilimleri Entitüsü, Doktora Tezi, İstanbul (Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim Sezginman), 1984; 1-72.
20. Alvin C R. Methods Of Multivariate Analysis. Brigham Young University, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, Second Edition, Canada, 2002.
21. James H S. Linear Statistical Models. Michigan State University, A Wiley-Interscience Publication, Newyork, 1995.
22. Julian J F. Linear Models With R. A CRC Press Company, Washington, 2005.
23. Vittinghoff E, Glidden D V, Shiboski S C, McCulloch C E. Statistic For Biology and Healty. United States of America, 2005.
24. McDonald J H. Handbook of Biological Statistics. Maryland: Sparky House Publishing, Baltimore, 2014.
25. Anonim3. Multiple Regression Analysis (Ancova). Erişim tarihi: 10.03.2016, <http://www.csub.edu/~psmith3/teaching/310-12.pdf>.
26. Andrade J M, Estevez-Perez M G. Statistical comparison of the slopes of two regression lines: A tutorial. Anal Chim Acta. 2014; 1 (838):1-12.
27. Larsen P V. Master of Applied Statistics. Erişim tarihi: 9.03.2016, <http://statmaster.sdu.dk/maskel/docs/sample/ST111>.
28. Anonim1. Compare Two Regression Lines and Simple Covariance Analysis Explained. Erişim tarihi: 10.03.2016, https://www.statstodo.com/Comp2Regs_Exp.php.
29. Clewer A G, Scarisbrick D H. Practical Statistics and Experimental Design for Plant and Crop Science. John Wiley, New York, 2001.

30. Anonim2. Comparing two regression slopes by means of an Ancova. Erişim tarihi: 09.03.2016, <http://recoevo.blogspot.com.tr/2011/08/comparingtworegressionslopesby>. Html.
31. Seber G A F, Lee A J. Linear Regression Analysis. 2nd ed. John Wiley, New York, 2003.
32. Anonim4. How can I compare regression coefficients across 3 (or more) groups. Erişim tarihi: 02.04.2016, <http://www.ats.ucla.edu/stat/stata/faq/compreg3.htm>.
33. Spellman F R, Whiting N E. Handbook of Mathematics and Statistics for The Environment. Taylor & Francis Group, Newyork, 2014.
34. Huitema B E. The Analysis of Covariance and Alternatives. John Wiley, New York, 2011.
35. Bilkaya C. Fetal Dönem Boyunca Orbit ve Bulbus Oculi' nin Geliřimi. Süleyman Demirel Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Isparta (Tez Danışmanı: Doç. Dr. Esra Koyuncu), 2016; 1-108.

EKLER

Ek-1 t tablo değerleri (0,05)

Serbestlik Derecesi	Tek Yönlü Testte, α				
	0.25	0.05	0.025	0.01	0.005
	Çift Yönlü Testte, α				
	0.50	0.10	0.05	0.02	0.01
1	1.000	6.34	12.71	31.82	63.66
2	0.816	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.765	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.741	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.727	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.718	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.711	1.90	2.36	3.00	3.50
8	0.706	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.703	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.700	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.697	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.695	1.78	2.18	2.68	3.06
13	0.694	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.692	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.691	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.690	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.689	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.688	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.688	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.687	1.72	2.09	2.53	2.84
21	0.686	1.72	2.08	2.52	2.93
22	0.686	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.685	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.685	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.684	1.71	2.06	2.48	2.79
26	0.684	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.684	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.683	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.683	1.70	2.04	2.46	2.76
30	0.683	1.70	2.04	2.46	2.75
35	0.682	1.69	2.03	2.44	2.72
40	0.681	1.68	2.02	2.42	2.71
45	0.680	1.68	2.02	2.41	2.69
50	0.679	1.68	2.01	2.40	2.68
60	0.678	1.67	2.00	2.39	2.66
70	0.678	1.67	2.00	2.38	2.65
80	0.677	1.66	1.99	2.38	2.64
90	0.677	1.66	1.99	2.37	2.63
100	0.677	1.66	1.98	2.36	2.63
125	0.676	1.66	1.98	2.36	2.62
150	0.676	1.66	1.98	2.35	2.61
200	0.675	1.65	1.97	2.35	2.60
300	0.675	1.65	1.97	2.34	2.59
400	0.675	1.65	1.97	2.34	2.59
500	0.674	1.65	1.96	2.33	2.59
1000	0.674	1.65	1.96	2.33	2.58
∞	0.674	1.64	1.96	2.33	2.58

Ek-2 F tablo değerleri (0,05)

		v ₁ (Pay serbestlik derecesi)																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18	20	25	30	40	60	100	200
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	247.32	248.01	249.26	250.10	251.14	252.20	253.04	254.68	
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.44	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.49	
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.67	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.54	
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.82	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.65	
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.58	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.41	4.39	
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.90	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.71	3.69	
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.47	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.25	
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.17	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.95	
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.96	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.76	2.73	
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.80	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.59	2.56	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.67	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.46	2.43	
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.57	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.35	2.32	
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.48	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.26	2.23	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.41	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.19	2.16	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.35	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.12	2.10	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.30	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.26	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.02	1.99	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.22	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.98	1.95	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.18	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.15	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.91	1.88	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.88	1.84	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.10	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.85	1.82	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.08	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.82	1.79	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.05	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.80	1.77	
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.04	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.78	1.75	
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	2.02	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.76	1.73	
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	2.00	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79	1.74	1.71	
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.99	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.73	1.69	
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.97	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75	1.71	1.67	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.96	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.70	1.66	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.87	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.59	1.55	
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.87	1.81	1.78	1.73	1.69	1.63	1.58	1.52	1.48	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.78	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.48	1.44	
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.89	1.81	1.75	1.72	1.66	1.62	1.57	1.50	1.45	1.40	
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.79	1.73	1.70	1.64	1.60	1.54	1.48	1.43	1.38	
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.86	1.78	1.72	1.69	1.63	1.59	1.53	1.46	1.41	1.36	
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.77	1.71	1.68	1.62	1.57	1.52	1.45	1.39	1.34	
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.72	1.66	1.62	1.56	1.52	1.46	1.39	1.32	1.26	

v₂ (Payda serbestlik derecesi)

Ek-3 Tukey testi için q kritik değerleri

$\alpha = 0.05$									
v	$k : 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.085	8.331	9.798	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.853	9.177	9.462
4	3.927	5.040	5.757	6.287	6.707	7.053	7.347	7.602	7.826
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.802	6.995
6	3.461	4.339	4.896	5.305	5.628	5.895	6.122	6.319	6.493
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.606	5.815	5.998	6.158
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.597	5.767	5.918
9	3.199	3.949	4.415	4.756	5.024	5.244	5.432	5.595	5.739
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.305	5.461	5.599
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.487
12	3.082	3.773	4.199	4.508	4.751	4.950	5.119	5.265	5.395
13	3.055	3.735	4.151	4.453	4.690	4.885	5.049	5.192	5.318
14	3.033	3.702	4.111	4.407	4.639	4.829	4.990	5.131	5.254
15	3.014	3.674	4.076	4.367	4.595	4.782	4.940	5.077	5.198
16	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557	4.741	4.897	5.031	5.150
17	2.984	3.628	4.020	4.303	4.524	4.705	4.858	4.991	5.108
18	2.971	3.609	3.997	4.277	4.495	4.673	4.824	4.956	5.071
19	2.960	3.593	3.977	4.253	4.469	4.645	4.794	4.924	5.038
20	2.950	3.578	3.958	4.232	4.445	4.620	4.768	4.896	5.008
24	2.919	3.532	3.901	4.166	4.373	4.541	4.684	4.807	4.915
30	2.888	3.486	3.845	4.102	4.302	4.464	4.602	4.720	4.824
40	2.858	3.442	3.791	4.039	4.232	4.389	4.521	4.635	4.735
60	2.829	3.399	3.737	3.977	4.163	4.314	4.441	4.550	4.646
120	2.800	3.356	3.685	3.917	4.096	4.241	4.363	4.468	4.560
∞	2.772	3.314	3.633	3.858	4.030	4.170	4.286	4.387	4.474
v	$k : 11$	12	13	14	15	16	17	18	19
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57
3	9.717	9.946	10.15	10.35	10.53	10.69	10.84	10.98	11.11
4	8.027	8.208	8.373	8.525	8.664	8.794	8.914	9.028	9.134
5	7.168	7.324	7.466	7.596	7.717	7.828	7.932	8.030	8.122
6	6.649	6.789	6.917	7.034	7.143	7.244	7.338	7.426	7.508
7	6.302	6.431	6.550	6.658	6.759	6.852	6.939	7.020	7.097
8	6.054	6.175	6.287	6.389	6.483	6.571	6.653	6.729	6.802
9	5.867	5.983	6.089	6.186	6.276	6.359	6.437	6.510	6.579
10	5.722	5.833	5.935	6.028	6.114	6.194	6.269	6.339	6.405
11	5.605	5.713	5.811	5.901	5.984	6.062	6.134	6.202	6.265
12	5.511	5.615	5.710	5.798	5.878	5.953	6.023	6.089	6.151
13	5.431	5.533	5.625	5.711	5.789	5.862	5.931	5.995	6.055
14	5.364	5.463	5.554	5.637	5.714	5.786	5.852	5.915	5.974
15	5.306	5.404	5.493	5.574	5.649	5.720	5.785	5.846	5.904
16	5.256	5.352	5.439	5.520	5.593	5.662	5.727	5.786	5.843
17	5.212	5.307	5.392	5.471	5.544	5.612	5.675	5.734	5.790
18	5.174	5.267	5.352	5.429	5.501	5.568	5.630	5.688	5.743
19	5.140	5.231	5.315	5.391	5.462	5.528	5.589	5.647	5.701
20	5.108	5.199	5.282	5.357	5.427	5.493	5.553	5.610	5.663
24	5.012	5.099	5.179	5.251	5.319	5.381	5.439	5.494	5.545
30	4.917	5.001	5.077	5.147	5.211	5.271	5.327	5.379	5.429
40	4.824	4.904	4.977	5.044	5.106	5.163	5.216	5.266	5.313
60	4.732	4.808	4.878	4.942	5.001	5.056	5.107	5.154	5.199
120	4.641	4.714	4.781	4.842	4.898	4.950	4.998	5.044	5.086
∞	4.552	4.622	4.685	4.743	4.796	4.845	4.891	4.934	4.974

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ali Vasfi AĞLARCI

Doğum Tarihi: 07/12/1989

Doğum Yeri: ISPARTA

Yabancı Dil: İngilizce

Eposta: aglarci32@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise: Isparta Anadolu Lisesi (2004-2008)

Lisans: Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi

İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü (2008-2012)

(Pedagojik Formasyon Sertifikası 2010-2012)

Y. Lisans: Süleyman Demirel Üniversitesi

Zootehni Anabilim dalı- Biyometri ve Genetik (2013-2015)