C.DOĞAN. 2019

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMUTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARDA SINIRLILIĞI

CANSU DOĞAN

Ağustos 2019

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMUTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARDA SINIRLILIĞI

CANSU DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Ahmet EROĞLU

Ağustos 2019

Cansu DOĞAN tarafından **Doç. Dr. Ahmet EROĞLU** danışmanlığında hazırlanan "**Kesirli Oskülatör İntegral Operatörler ve Onların Komutatörlerinin Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarda Sınırlılığı**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Adnan TUNA
(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)

Üye : Doç. Dr. Ahmet EROĞLU
(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER
(Kastamonu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve …........................... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Prof. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cansu DOĞAN

ÖZET

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMUTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARDA SINIRLILIĞI

DOĞAN, Cansu
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ahmet EROĞLU

Ağustos 2019, 67 sayfa

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Harmonik Analizin bazı fonksiyon uzayları tanıtılarak, bu uzayların bazı temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise kesirli oskülatör integral operatörler ve bu operatörlerin komütatörlerinin lokal genelleştirilmiş Morrey uzaylarda sınırlılığı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Genelleştirilmiş Morrey uzayı, Riesz potansiyeli, kesirli oskülatör integral operatörü, komütatör

SUMMARY

THE BOUNDED OF THE MULTIPLE OSCULATOR INTEGRAL OPERATORS AND THEIR CONTROLLERS IN THE GENERALIZED LOCAL MORREY SPACES

DOĞAN, Cansu
Niğde Ömer Halisdemir University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ahmet Eroğlu

August 2019, 67 page

This master’s thesis consists of four parts. The first section is reserved for the entrance. In the second chapter, the basic definitions and theorems used in thesis study are included. In the third chapter, some function spaces of Harmonic Analysis are introduced and some besic properties of these spaces are given. In the fourth chapter, the bounded of fractional oscillator integral operators an their commutators in local generalized Morrey spaces are investigated in detail.

Keywords: Generalized Morrey space, Riesz potential, fractional oscillator integral operator, commutator

ÖN SÖZ

Ders dönemim boyunca ve tez çalışmalarım esnasında yardım ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Ahmet EROĞLU’na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Reel uzay
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$\lvert B(x,r)\rvert$	$B(x,r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de p -lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$\lVert\bullet\rVert_{L^p}$	Lebesgue normu
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$WL^p(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Lebesgue uzayı
$M_{p\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey Uzayı
$WM_{p\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Morrey Uzayı
$M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
$WM^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf Genelleştirilmiş Morrey Uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
M_α	Kesirli maksimal operator
I_α	Riesz potansiyel operatörü
T	Calderon-Zygmund operatörü (Singüler integral operatörü)
H_w	Ağırlıklı Hardy operatörü

Kısaltmalar	**Açıklama**
Exp	Üstel Fonksiyon
d	Metrik
(X,d)	Metrik Uzay

BÖLÜM I

GİRİŞ

1938 yılında Morrey tarafından tanımlanan Morrey uzaylarının, ağırlıklı Lebesgue uzaylarıyla birlikte eliptik diferansiyel denklemlerin çözümünde, potansiyel teorisinde, maksimal ve singüler operatör teorisinde, Navier-Stokes denklemleri, Schridinger denklemleri ve matematiğin pek çok mekanik problemlerinde geniş uygulamaları vardır. $M_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$ Morrey uzayları, $0 \leq \lambda \leq n,\ p \geq 1,\ f \in L_p^{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve $B(x,r),\ \mathbb{R}^n$ de x merkezli ve r yarıçaplı yuvar olmak üzere

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{r>0, x\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şartını sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesidir.

Son yıllarda fonksiyon uzaylarının modern teorisi S.L Sobolev, A. Calderon, E.M. Stein, S.M. Nikolskii, P.I. Lizorkin, V.I. Burenkov ve birçok dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmektedir.

Bu teorem reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna uygulamıştır. Araştırmalar sonucu ortaya çıkan yeni sonuçların incelenmesi ve fonksiyon uzaylarındaki bazı eksikliklerin giderilebilmesi için yeni tip fonksiyon uzaylarının tanımlanmasına ve araştırılmasına gerek duyulmuştur.

Harmonik analizin klasik operatörlerinden, Riesz potansiyeli, maksimal operatör, kesirli maksimal operatör ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. 1944 yılında E. Nakai tarafından Harmonik Analizde önemli bir yere sahip olan Riesz potansiyelinin, maksimal integral operatörünün ve singüler integral operatörünün $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığı araştırılmıştır.

$M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayları; $\varphi(x,r)$,$\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon, $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x,r)} \cdot \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesidir. Burada özel olarak $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda - n}{p}}$ alınırsa $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edilir.

Bu tez çalışmasında Morrey uzaylarının, genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımları ve temel özellikleri verilerek, Harmonik analizin bazı fonksiyonel operatörü olan kesirli oskülatör integral operatörünün ve komütatörlerinin sınırlılığı incelendi.

BÖLÜM II

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

2.1 Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.1: (Norm, Normlu Vektör Uzayları) X, K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, x \to X$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

$$(N_1)\|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$(N_2)\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$
$$(N_3)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \left(\text{Üçgen Eşitsizliği}\right)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde <u>norm</u> adı verilir. $\left(X, \|\cdot\|\right)$ ikilisine de **normlu vektör uzayları** denir. $\left(X, \|\cdot\|\right)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 2.1.2: (Denk Norm) X, K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x \in X$ için

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları varsa X üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk norm** denir (Rudin, 1991).

Tanım 2.1.3: (Yakınsaklık, Norma Göre Yakınsaklık) $(x_n), (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

olursa x_n dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir ve

$$x_n \to x_0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya **norma göre yakınsaklık** denir (Rudin, 1991).

Tanım 2.1.4: (Metrik ve Metrik Uzay) X boş olmayan bir cümle olsun.

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$M_1) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$M_2) d(x,y) = d(y,x) \text{ (simetri özelliği) ve}$$
$$M_3) d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

şartları sağlanıyorsa d ’ye X ’de bir **metrik** ve d ile birlikte X ’e **metrik uzay** denir ve genellikle (X,d) veya x_d ile gösterilir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.5: ($\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayı) $x=(x_1,...,x_n)$ ve $y=(y_1,...,y_n)$, $\mathbb{R}^n$ 'de vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu öklidyen uzayı $(x,y)=\sum_{j=1}^{n} x_i y_i$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu reel uzayıdır (Çakar, 2007).

Tanım 2.1.6: (Çap, Sınırlı Küme, Sınırlı Dizi) $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay ve bunun bir alt kümesi d olsun.

$$d(A):=\sup\{\|x-y\|: x\in d, y\in A\}\geq 0$$

sayısına A kümesinin **çapı** denir. Eğer bir $A\subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine **sınırlı küme** denir. X içinde (x_n) dizisine karşılık gelen, noktalar kümesi ise (x_n) **sınırlı dizi** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.7: (Cauchy Dizisi) $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde (x_n) bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $m,n\geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir n_ε doğal sayısı varsa o zaman (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir (Rudin,1991).

Cauchy dizisi ile ilgili aşağıdaki önermeler doğrudur.

(a) Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

(b) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

(c) $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) bir Cauchy dizisi $x\in X$ noktasına yakınsak (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x 'e yakınsaktır.

(d) $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzayında (x_n) ve (y_n) bir Cauchy dizisi ise, (x_n+y_n) de bir Cauchy dizisidir (Rudin,1991).

Tanım 2.1.8: (Banach Uzayları) Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı içindeki her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyor ise bu $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına **Banach uzayları** adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.9: (Üstten sınırlı, Üst sınır, Supremum) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (x_n) dizisi **üstten sınırlıdır** denir. m sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir. $\sup x_n$ ile gösterilir (Balcı, 1998).

Tanım 2.1.10: (Alttan sınırlı, Alt Sınır, İnfimum) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq M$ olacak şekilde m reel sayısı varsa (x_n) dizisi **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir. $\inf x_n$ ile gösterilir (Balcı, 1998).

Ayrıca infimum ve supremum özellikleri aşağıdaki önermede verildi:

Önerme 2.1.11: A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. $\inf A = \alpha$ ve $\sup A = b$ olmak üzere α ve b sayılarının özellikleri aşağıdaki gibi sağlanır (Balcı,1997).

i. $\forall x \in A$ için $x \geq \alpha$ ’dır. Çünkü α alt sınırlıdır.
ii. $\forall \delta > 0$ için

$$x < \alpha + \delta \tag{2.1}$$

olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır. Çünkü o alt sınırların en büyüğüdür. Eğer A ’nın hiçbir elemanı için (2.1) bağıntısı sağlanmadıysa A kümesinin bütün x elemanları içi

$$x \geq \alpha + \delta$$

olacaktır.

Bu ise $\alpha+\delta$ sayınısın bir alt sınırı olduğunu ifade eder. Halbuki bu alt sınır, en büyük alt sınır olarak kabul edilen α sayısından daha büyüktür. Bu mümkün değildir.

i. $\forall x \in A$ için $x \leq b$'dir. Dolayısıyla b bir üst sınırdır.
ii. $\forall \delta > 0$ için

$$x > b - \delta$$

olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır (Balcı, 1998).

Tanım 2.1.12: (Azalan Fonksiyon, Artmayan Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A'nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **azalan fonksiyon** denir. Artan fonksiyon $\uparrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa da **azalmayan fonksiyon** denir (Balcı,1997).

Tanım 2.1.13: (Artan Fonksiyon, Azalmayan Fonksiyon) $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A'nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2$ elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan fonksiyon** denir. Azalan fonksiyon $\downarrow$ ile gösterilir. Eğer $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa da **artmayan fonksiyon** denir. (Balcı,1997)

Tanım 2.1.14: (f^* Azalan Yeniden Düzenleme) f fonksiyonunun $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ yeniden düzenlemesi

$$f^*(t) := \inf\{\lambda \geq 0 : \alpha_f(\lambda) \leq t\}$$

şeklinde tanımlanır (Bennett ve Sharpley 1988).

Tanım 2.1.15: (Eş Ölçülebilir Fonksiyonlar) $f \in M_0(R,\mu), g \in M_0(S,\upsilon)$ olmak üzere f ve g aynı dağılım fonksiyonuna sahip ise, yani $\forall t \geq 0$ için

$$\alpha_f(t) = a_g(t)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ve g ye **eş ölçülebilir fonksiyonlar** denir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 2.1.16: (Topolojik Vektör Uzayı) X bir topolojik Hausdorff uzayı olsun. $X \times X$ ve $\mathbb{C} \times X$ topolojik çarpım uzaylarından X uzayına olan

$$(x, y) \to x + y \quad \text{ve} \quad (c, x) \to cx$$

Dönüşümleri sürekli ise bu durumda X uzayına bir **topolojik vektör uzayıdır** denir. Burada $\mathbb{C}$, Öklidyen metriği tarafından belirlenmiş olan alışılmış topolojiye sahiptir (Adams ve Fournier, 2003).

Tanım 2.1.17: (Dual Uzay) Bir X topolojik vektör uzayı üzerindeki bütün sürekli, lineer fonksiyonellerin kümesi X ’in duali olarak adlandırılır ve X ile gösterilir. Noktasal toplama ve skalerle çarpma altında X bir vektör uzayıdır:

$f, g \in X', \; x \in X, \; c \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (cf)(x) = cf(x)$$

tanımlanır (Grafakos, 2008).

Tanım 2.1.18: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $x \in X$ ve $t > 0$ olmak üzere;

$B(x,t) = \{y \in X : \|x - y\| < t\}$ kümesi x merkezli t yarıçaplı açık yuvar

$B(x,t) = \{y \in X : \|x - y\| < t\}$ kümesi x merkezli t yarıçaplı kapalı yuvar

$B(x,t)=\{y\in X:\|x-y\|<t\}$ kümesi x merkezli t yarıçaplı yuvar yüzeyi olarak tanımlanır (Başkan vd., 2006)

Tanım 2.1.19: $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A\subset X$ olsun. A 'nın elemanlarından oluşan her bir (x_n) dizisinin yakınsadığı değer X uzayının bir elemanı ise A kümesi X uzayında **yoğundur** denir (Başkan vd., 2006)

Tanım 2.1.20: X normlu uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse X normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir (Başkan vd., 2006)

2.2 Operatör Teorisi

Bu kısımda operatör kavramlarına ve bu operatörlerin teoremlerine yer verildi.

Tanım 2.2.1: (Operatör) X ve Y boş olmayan kümeler ve $D\subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir **operatör** veya **dönüşüm** denir. A operatörünün x'e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir.

A operatörünün $x\in D$'yi, $A(x)\in Y$ 'ye götürdüğünü belirtmek için, $A:D\rightarrow Y$ gösterimi kullanılır.

Bu durumda D'ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir.

$$\Re=\Re(A)=\{y\in Y: y=A(x), x\in D(A)\}$$

kümesine A operatörünün değer (veya görüntü) kümesi denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.2: (Özdeşlik Operatörü) $A:X\rightarrow X$ operatörü verilsin. $\forall x\in X$ için

$$A(x)=x$$

ise A operatörüne **özdeşlik operatörü** denir. I_X veya I ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.3: (Lineer Operatör) $X \text{ ve } Y$ aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin.

Eğer $D(A)$, X'in bir alt uzayı ve $\forall x, y \in D(A) \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne **lineer operatör** denir (Balcı, 2000).

Tanım 2.2.4: (Sabit Operatör) $A: X \to Y$ bir operatör ve $b \in Y$ bir eleman olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $A(x) = b$ ise A operatörüne **sabit operatör** adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.5: (Süreklilik) $X \text{ ve } Y$ iki normlu uzay ve $T: D(T) \to Y$ operatörü verilsin.

i. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ olmak üzere $\forall x \in D(T), \|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

ii. x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$$

şartları sağlanıyorsa bu durumda T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında **süreklidir** denir. Eğer $T: X \to Y$ operatörü $D(T)$'nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.6: (Sınırlılık) $X \text{ ve } Y$ iki normlu uzay ve $D(A) \subset X$ olmak üzere $T: D(A) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(A)$ için

$$\|Ax\| \le C\|x\|$$

olacak şekilde bir $C \in \mathbb{R}$ varsa, A operatörüne **sınırlıdır** denir.

Bir A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.7: $A: X \to Y$ ve $E \subset X$, $F \subset Y$ olsun.

$$A(E) = \{A(x) : x \in E\}$$

kümesine E'nin **görüntüsü**, $A^{-1}(F) = \{x \in X : A(x) \in F\}$ kümesine F'nin **ters görüntüsü** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.8: $A: X \to Y$ ve $B: X \to Y$ operatörleri verilmiş olsun. Eğer $D(A) = D(B) = D$ ve $\forall x \in D$ için $A(x) = B(x)$ ise A ile B operatörleri eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir. Eğer $D(A) \subset D(B)$ ve $\forall x \in D(A)$ için $A(x) = B(x)$ ise A operatörüne B operatörünün kısıtlaması (veya B operatörüne A operatörünün genişlemesi) denir ve $A = B|_{D(A)}$ ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.9: $X \text{ ve } Y$ normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı olmasıdır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2.10: $T: L \to L$' ye lineer operatör olsun. T altında L'nin özdeş elemanına dönüşen elemanların cümlesine, T'nin **sıfır uzayı** veya **çekirdeği** denir ve Çek$T$ ile gösterilir. Demek ki,

$$\text{Çek}T = \left\{x \in L : T(x) = \theta'\right\} = T^{-1}\left(\theta'\right)$$

dür (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.2.11: (Gömme) X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun.

$$D_T(I) = \Re(I) = X,$$

yani $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ olacak şekilde Y de en az bir eleman olmaz üzere

$$I: X \to Y$$

ile verilen operatöre birim operatörü denir. Bu operatör sürekli ise yani $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_Y \le c\|x\|_X$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti var ise X uzayı Y uzayına **sürekli gömülür** denir. I operatörüne X uzayından Y uzayına bir **gömme operatörü** denir. Alternatif olarak bazen X uzayının Y uzayına bir sürekli (veya sınırlı) gömmesi mevcuttur denir.

$$\|I\|_{X \to Y} := \sup_{f \ne 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

şeklinde gösterilen bu sayıya da I'nın operatör normu denir. Eğer X ve Y iki normlu lineer uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına bir sürekli gömme mevcut ise

$$X \to Y$$

şeklinde gösterilir. Eğer

$$X \rightarrow Y \text{ ve } Y \rightarrow X$$

aynı anda oluyorsa

$$X \rightleftarrows Y$$

şeklinde gösterilir ve eğer bu gömme operatörü kompakt ise de

$$X \rightarrow\rightarrow Y$$

şeklinde gösterilir (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.2.12: (Fonksiyonel) Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlanan skaler değerli bir fonksiyona **fonksiyonel** adı verilir. Eğer $x, y \in X$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(ax+by) = af(x)+bf(y)$$

ise f lineerdir denir. X bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer bir fonksiyonel X uzayından $\mathbb{C}$ 'ye sürekli ise X üzerinde süreklidir denir (Grafakos, 2008).

2.3 Ölçü Teorisi

Tanım 2.3.1: (Cebir ve σ-Cebir)

$X \neq \varnothing$ bir küme ve $A \subset A(x)$ olsun.

i. $\varnothing, x \in A$

ii. $\forall f \in A, f^c = x / f \in A$

iii. $\forall k = 1, 2, ..., n \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in A \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} f_k \in A$

şartları sağlanıyor ise bu durumda A sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in A \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \in A$$

şartı sağlanırsa A cebrine bir σ-cebir denir (Royden, 1968).

Teorem 2.3.2: X üzerinde σ-cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yine bir σ-cebridir (Balcı, 2012).

İspat: I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için A_i bir σ-cebir olduğundan $X \in A_i$ ’dir. Buradan $X \in \bigcap_{i \in I} A_i$ olur. Eğer $E \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ise her bir $i \in I$ için A_i bir σ-cebri olduğundan $E^c \in A_i$ ’dir. Dolayısıyla $E^c \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ’dir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \bigcap_{i \in I} A_i$ olsun. Her bir i için $E_n \in A_i$ ve dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A_i$ buradan da $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \in \bigcap_{i \in I} A_i$ bulunur. Bu ispatı tamamlar (Balcı, 2012).

Tanım 2.3.3: (Borel Cebri)

Bir K sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne K ’nın ürettiği (veya doğurduğu) σ-cebri denir ve $D(K)$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ ’deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebrine **Borel cebri** denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ ’nin her bir elemanına Borel kümesi denir (Royden, 1968).

Tanım 2.3.4 (Ölçülebilir Uzay, Ölçü Uzayı, Ölçülebilir Küme)

X boştan farklı bir küme, $A \subset P(x)$ ’de X ’in bir σ-cebri ve $\mu : A \to [0, \infty)$ ’de A üzerinde bir ölçü olsun. (X, A) ikilisine bir **ölçülebilir uzay** denir. (X, A, μ) üçlüsüne de bir ölçü uzayı denir. A 'daki her bir eleman da **ölçülebilir küme** olarak adlandırılır (Royden, 1968).

Tanım 2.3.5: (Ölçü, Sonlu Ölçü, σ -sonlu, Olasılık Ölçüsü)

(X, A) bir ölçülebilir uzay olsun. A üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

i. $\mu(\emptyset)=0$

ii. $\forall \alpha \in A, \mu(\alpha) \geq 0$

iii. Her ayrık $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\alpha_n)$

Özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** adı verilir. Eğer $\forall \alpha \in A$ için $\mu(\alpha)<\infty$ oluyorsa μ 'ye **sonlu ölçü** denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsüne σ **-sonlu** denir. Eğer $\mu(X)=1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir (Royden, 1968).

Teorem 2.3.6: (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun.

1. (A_n) A 'daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

dir.

2. (B_n), A 'daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1)<\infty$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$$

dir (Balcı, 2012).

Tanım 2.3.7: Genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu için

i. $\mu^*(\varnothing)=0$

ii. $\forall E\in P(X), \mu^*(E)\geq 0$

iii. $A\subset B\subset X, \mu^*(A)\leq \mu^*(B)$

iv. $\forall n\in\mathbb{N}, A_n\in P(X)\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right)\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$

şartları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir (Royden, 1969).

Tanım 2.3.8: (Lebesgue Dış Ölçüsü, Lebesgue Ölçülebilir) $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A=\left\{(I_k)=A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k):(I_k)\in\tau_A\right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. $n-$ boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I=\{x:a_i\leq x_i\leq b_i,\quad i=1,....,n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alınırsa, bu aralıkların hacimleri

$$\upsilon(I)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E\subset\mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\lambda^*(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon(I_k):E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\ I_k\ \text{bir aralık}\right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A\subset\mathbb{R}^n$ için eğer

$$\lambda^*(A)=\lambda^*(A\cap E)+\lambda^*\left(A\cap\left(\mathbb{R}^n-E\right)\right)$$ **(Caratheodary Ölçümü)**

ise E kümesine **Lebesgue ölçülebilirdir** denir (Royden, 1968).

Tanım 2.3.9: (Ölçülebilir Fonksiyon) (X,Σ) bir ölçülebilir uzay ve $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\left(]\alpha,+\infty[\right)=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\Sigma$$

oluyorsa f ye **ölçülebilir fonksiyon** denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X,\Sigma)$ ile gösterilir. Ayrıca (X,Σ) bir ölçülebilir uzay olmak üzere X deki negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $M^+(X,\Sigma)$ ile gösterilir (Royden,1968).

Tanım 2.3.10: (Karakteristik Fonksiyon) $A\subset\mathbb{R}^n$ olsun.

$$\aleph_A=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

ile tanımlanan $\aleph_A$ fonksiyonuna A nın **karakteristik fonksiyonu** denir (Grafakos, 2008).

Tanım 2.3.11: (Basit Fonksiyon) Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen φ fonksiyonuna bir **basit fonksiyon** denir (Balcı, 2000).

Tanım 2.3.12: (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar, $A_1, A_2, ..., A_n$ ler A ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \aleph_{A_k}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Bu tanıma göre φ nin μ ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da μ sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir.

Şurasını hemen belirtelim ki, φ fonksiyonunun μ ye göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır. Bununla ilgili olarak şu teoremi verebiliriz (Balcı, 2012).

Teorem 2.3.13: (X, A, μ) bir ölçü uzayı, $\varphi \in S^+ (X, A)$ ve A_k lar ayrık olmak üzere φ nin bir gösterimi $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \aleph_{A_k}$ olsun. φ nin μ ölçüsüne göre integrali ne a_k sayılarına ne de A_k kümelerine bağlıdır (Balcı, 2012).

İspat: $b_1, b_2, ..., b_m$ ler negatif olmayan reel sayılar ve $B_1, B_2, ..., B_m$ ler de A ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i \aleph_{B_i}$$

olsun.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{i=1}^{m} B_i = X$$

olacağı açıktır. Eğer $A_k \cap B_i \neq \varnothing$ ise $A_k \cap B_i$ üzerinde $a_k = b_i$ olacaktır.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi d\mu &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(A_k \cap X\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(A_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i \right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} \left(A_k \cap B_i\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} \mu\left(A_k \cap B_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_k \mu\left(A_k \cap B_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_i \mu\left(A_k \cap B_i\right) = \sum_{k=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{m} \mu\left(A_k \cap B_i\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap B_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i \mu\left(B_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu\left(B_i \cap X\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu\left(B_i\right)
\end{aligned}$$

olur. Şu halde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_i \mu\left(B_i\right)$$

dir. O halde integralin değeri a_k sayılarından da, A_k kümelerinden de bağımsızdır.

Teorem 2.3.14: (Fatou Lemması) (X, A, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, A)$ fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

dır (Balcı, 2012).

İspat: $\liminf f_n = \sup_{m\ge 1}\left(\inf_{n\ge m} f_n\right)$ olduğundan, $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ denirse $m \le n$ için $g_m \le f_n$ dir. Dolayısıyla $m \le n$ için

$$\int_X g_m d\mu \le \int_X f_n d\mu \Rightarrow \int_X g_m d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \int_X g_m d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

bulunur.

(g_m) artan ve $\lim g_m = \sup g_m = \liminf f_n$ olduğundan Monoton yakınsaklık teoreminden

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \int_X \lim_{m\to\infty} g_m d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X g_m d\mu \le \liminf_{m\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

bulunur.

Bu teoremden $f \ge 0$ şartı kaldırılamaz.

Tanım 2.3.15: (Dağılım Fonksiyonu) (X, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}(\text{veya } \mathbb{C})$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \lambda\right\}\right)$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 2.3.16: (Hemen Hemen Her Yerde (h.h.y)) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan küme veya kendisi $\mathcal{A}$ ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme **hemen hemen her yerde** doğrudur denir, kısaca **h.h.y** biçiminde yazılır.

Bir $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, $p(x)$ önermesi **hemen hemen her** x için doğrudur denir (Balcı, 1998).

Tanım 2.3.17: (Yeniden Düzenleme Altında Değişmeyen (Rearrengement Invariant) Uzayları) $\rho(X,\Sigma,\mu)$, $\sigma-$sonlu bir ölçü uzayı üzerinde bir norm olsun. f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar ve $f, g \in M_0^+(X,\mu)$ olmak üzere

$$\rho(f) = \rho(g)$$

sağlanıyorsa $X = X(\rho)$ uzayına **yeniden düzenleme altında değişmeyen (Rearrengement Invariant) uzayları** denir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 2.3.18: (Homojen Fonksiyon) α ve λ iki reel sayı olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna α**. dereceden homojen fonksiyon** denir (Fucik vd., 2012).

Tanım 2.3.19: (Örtü, Açık Örtü, Alt Örtü, Sonlu Alt Örtü) Birleşimleri A kümesini kapsayan $\bigcup_i$ kümeler ailesine A kümesinin bir **örtüsüdür** denir. Bu $\bigcup_i$ kümelerinin her biri açıksa bu halde $\bigcup_i$, A kümesinin **açık örtüsüdür** denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün **alt örtüsü** adı verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye **sonlu alt örtü** denir (Balcı, 2000).

Tanım 2.3.20: (Kompaktlık) X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine **kompakttır** denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani kapalı ve sınırlı her küme kompakttır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.3.21: (Destek) $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kümesinin kapanışına f fonksiyonunun **desteği** denir ve

$$\sup pf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.3.22: (Düzgün Fonksiyon) Bir bölge üzerinde her mertebeden sürekli türevlere sahip olan bir f fonksiyonuna **düzgün fonksiyon** denir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.3.23: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ metrik ile verilen bir $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda bir $s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun basit olması için gerek ve yeter şart s fonksiyonunun görüntüsü sonlu bir küme ve desteğinin sonlu ölçülü olmasıdır (Pick vd., 2012).

Teorem 2.1.24: (Monoton Yakınsaklık Teoremi) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \Sigma)$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsar ise

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

dir (Grafakos, 2008).

Teorem 2.1.25: (Lebesgue Yakınsaklık) (X,Σ,μ) bir ölçü uzayı, $g:X\to[0,\infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2, \ldots$ X üzerinde $\Sigma-$ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer h.h.x için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ve

ise bu durumda f ve f_n integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dır (Grafakos, 2008).

BÖLÜM III

FONKSİYON UZAYLARI

Lebesgue, Banach, Morrey ve Genelleştirilmiş Morrey uzayları Harmonik Analizin önemli fonksiyon uzayları arasında yer alır. Bu bölümde tez konusu ile ilgili inceleme yapacağımız uzaylar hakkında bilgi verilecektir.

3.1 L^p Uzayları (Lebesgue Uzayları)

Matematikte; Harmonik analiz, varyasyonel hesap ve diferansiyel denklemler, Fizikte; akışkanlar dinamiği, elastik mekanik gibi uygulamaları olan Lebesgue uzayları, fonksiyonel analizde de Banach uzaylarının ve topolojik vektör uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturur.

Bu kısımda Harmonik analizin temel konularından biri olan $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımı ve özellikleri incelenerek gerekli olan bazı teoremlere yer verildi.

Tanım 3.1.1: (L^p Uzayları, (Lebesgue Uzayları)) (X,γ) bir ölçü uzayı ve $M, f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı γ-ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$L^p(x) := \left\{ f \in M : \int_X |f|^p \, d\gamma < 1 \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. f fonksiyonunun L^p normu

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\gamma \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ye **Lebesgue uzayları** denir. Burada

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)| = \inf\left\{\lambda : \gamma\left(\left\{x\in X : |f(x)|>\lambda\right\}\right)=0\right\}$$

dır (Pick vd., 2012).

Tanım 3.1.2: (Minkowski Eşitsizliği) $1\le p<\infty$ ve $f,g\in L^p$ olsun. Bu durumda $(f+g)\in L^p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lebesgue integralinin özellikleri ve Hölder eşitsizliği göz önüne alındığında L^p uzaylarının $1\le p<\infty$ için bir vektör uzayı olduğu görülür. Bununla beraber bir $f\in L^p$ olmak üzere $\|f\|_{L^p}$ normu altında;

$$L_1)\ \|f\|_{L^p} \ge 0$$
$$L_2)\ \|f\|_{L^p} = 0 \Rightarrow \text{hemen hemen her yerde } f(x)$$
$$L_3)\ \|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha|\,\|f\|_{L^p},\ \alpha\in\mathbb{R}$$
$$L_4)\ \|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

şartları sağlandığından $1\le p<\infty$ için L^p bir normlu uzaydır (Pick vd., 2012).

Tanım 3.1.3: (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $1\le p<\infty$, (X,μ) ve (Y,ν) ölçülebilir uzaylar olsun. $f,(X,\mu)\times(Y,\nu)$ çarpım uzayı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\int_Y\left(\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_X\left(\int_Y |f(x,y)|^p\,d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

eşitsizliği sağlanır (Grafakos, 2008).

Tanım 3.1.4: (L^p Uzaylarında Yakınsaklık) $f_n, f \in L^p$ olmak üzere $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna p. Mertebeden yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \ge n_0$ için $\|f_n - f\|_{L^p} < \varepsilon$ olmasıdır.

Burada

$$\|f_n - f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f_n - f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Buna göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin f fonksiyonuna L^p yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$$

olmasıdır (Fucik vd., 2012).

Tanım 3.1.5: $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $L^p(\Omega)$ uzayları

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Normu altında tam ve dolayısıyla Banach uzayıdır (Royden, 1968).

Tanım 3.1.6: (Fubini) f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} |f(x,y)| dxdy$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| dx \right) dy$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| dx \right) dy$$

İntegrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrallenebilen bir g fonksiyonu vardır öyle ki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

i. Hemen her $y \in \mathbb{R}^m, f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

ii. Hemen her $x \in \mathbb{R}^n, f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$

iii. $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

iv. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

v. $I_1 = I_2 = I_3$

şartları elde edilir (Fucik vd., 2012)

Tanım 3.1.7: (Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık) $1 \le p, q < \infty$ olmak üzere $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L^q} \le A \|f\|_{L^p}$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p,q) tipindedir denir. μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall \alpha > 0$ için

$$\mu\left\{x : |Tf(x)| > \alpha\right\} \leq \left(\frac{A\|f\|_{L^p}}{\alpha}\right)^q, \quad q < \infty$$

olacak şekilde α ve f ’den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p,q) tipindedir denir (Sadosky, 1979).

Tanım 3.1.8: (Lokal İntegrallenebilme) f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her K kompakt kümesi üzerinde

$$\int_K |f|\, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonunun lokal(veya yerel) integrallenebilir adı verilir ve

$$L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f : \int_K |f|\, d\mu < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{ f : \left(\int_K |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, K \subset \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Royden,1968).

Teorem 3.1.9: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p uzaylarındaki basit fonksiyonların kümesi L^p uzaylarında yoğundur (Royden, 1968).

Tanım 3.1.10: (L^p_w Uzayları (Ağırlıklı Lebesgue Uzayları)) $1 \leq p < \infty$ ve w bir ağırlık fonksiyonu olsun. f fonksiyonları bütün ölçülebilir norma sahip ise bu durumda $L^p_w\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayları

$$\|f\|_{L_w^p}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $L_w^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayları denir. $p=\infty$ durumunda ise $L^\infty(w) \equiv L^\infty\left(\mathbb{R}^n, w\right)$ de norm

$$\|f\|_{L_w^\infty} \equiv \|f\|_{L_w^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|\, w(x)$$

ile tanımlanır (Royden, 1968).

Tanım 3.1.11: (Dual Uzayı) $g \in L^{p'}$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$ için

$$\Phi(f) := \int_\Omega f(x) g(x)\, dx$$

gösterilsin. Bu durumda,

$$\Phi_g \in \left[L^p(\Omega)\right]^*$$

ve

$$\left\|\Phi_g\right\| = \|g\|_{p'}$$

olarak tanımlanır (Fucik vd., 2012).

Tanım 3.1.12: $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'nin boş olmayan sınırlı açık alt kümesi ve g de Ω üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p>1$ ve $M>0$ olmak üzere öyle keyfi bir $f \in L^p(\Omega)$ için

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

ve

$$\left|\int_{\Omega} f(x)g(x)dx\right| \le M\|f\|_p$$

şeklindedir. Bu durumda $g \in L^{p'}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'} \le M$ biçiminde olur (Royden, 1968).

Tanım 3.1.13: (Riesz Potansiyeli) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere, I_α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır (Stein, 1970).

Teorem 3.1.14: $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $d = çap(\Omega) = \sup\{|x-y|; x, y \in \Omega\}$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\|I_a f\|_{L^q(\Omega)} \le \overline{c}(p,\alpha,n)\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

gerçeklenir, burada $\overline{c}(p,\alpha,n)$ pozitif sabiti

$$\overline{c}(p,\alpha,n) = c\frac{n}{\alpha[n-\alpha p]}(p')^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir ve $c > 0$ sabiti p ve α ya bağlı değildir (Meskhi, 2011).

Tanım 3.1.15: (Maksimal Operatör) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $Mf : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,y)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır (Stein, 1970).

Teorem 3.1.16: $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

i. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

ii. Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m\{x : Mf(x) > y\} \le \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)| dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

iii. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \le \infty$ ise $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olur ve

$$\|Mf\|_p \le A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein, 1970).

Tanım 3.1.17: (Singüler İntegral) $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n / \operatorname{supp} f$

Calderon-Zygmund operatörü $T : C_0^\infty \to L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatördür. $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L^2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Ayrıca

$$K(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$$

dışında sürekli bir fonksiyondur ve $c_1 > 0$ ve $0 < \varepsilon \le 1$ olmak üzere

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \ne y$ için

b) $c_1|x-x^1| \leq |x-y|$ için

$$\left|K(x,y)-K\left(x^1-y\right)\right|+\left|K(y,x)-K\left(y-x^1\right)\right| \leq c_1\left(\frac{|x-x^1|}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Burenkov vd., 2008).

Önerme 3.1.17: T Calderon- Zygmund operatörü $L^p\left(\mathbb{R}^n\right), 1<p<\infty$ üzerinde sınırlıdır ve (1,1) tiplidir (Dynkin, 1991).

Teorem 3.1.18: (Marcinkiewicz) *T* alttoplamsal operatör ve $p_0<q_0, p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olsun. Ayrıca *T* operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun ve p ile q

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}, \ (0<\theta<1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda *T* operatörü (p,q) tipli operatördür (Sadosky, 1979).

Teorem 3.1.19: (Hardy Eşitsizliği) $1 \leq p \leq q<\infty$, v ve w ölçülebilir, $(0,\infty)$ üzerinde pozitif ve azalan iki fonksiyon olsun. Bu durumda c, φ fonksiyonundan bağımsız bir sabit olmak üzere;

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)^q w(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_0^\infty \varphi(t)^p v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x,y)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$K = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty w(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r v(t)^{1-p'}\,dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \qquad (x', y')$$

olmasıdır. Burada $p + p' = pp'$ 'dir. Ayrıca (2.1) i sağlayan en iyi c sabiti

$$K \le c \le k(p,q)K \qquad (x'', y'')$$

biçimindedir.

(x'', y'') deki $k(p,q)$ sabiti

$$k(p,q) = p^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p'}}, \; k(p,q) = q^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}}$$

veya

$$k(p,q) = \left(1 + \frac{q}{p'} \right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

gibi farklı biçimlerde verilebilir (Mazya, 1985).

3.2 Banach Fonksiyon Uzayları

Tanım 3.2.1: (Banach Fonksiyon Normu) (R,μ) bir ölçü uzayı, $M^+, f : R \to [0,\infty]$ tanımlı $\mu-$ölçülebilir fonksiyonların kümesi ve $\rho : M^+ \to [0,\infty]$ bir fonksiyon olsun. M^+ daki $f, g, f_n, (n = 1,2,3,...)$ fonksiyonları, $\forall \alpha \ge 0$ sabiti ve $\mu-$ölçülebilir $E \subset R$ kümesi için

(P_1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow$ h.h.y $f = 0,$

(P_2) $\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f),$

(P_3) $\rho(f+g) \le \rho(f) + \rho(g)$,

(P_4) h.h.y $0 \le g \le f \Rightarrow \rho(g) \le \rho(f)$,

(P_5) h.h.y $0 \le f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$,

(P_6) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$,

(P_7) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f d\mu \le C_E \rho(f)$,

(burada $C_E, 0 < C_E < \infty$, E ve ρ ya bağlı fakat f ye bağlı değildir.)

özellikleri sağlanıyorsa ρ ya **Banach fonksiyon normu (fonksiyon normu)** denir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 3.2.2: (Banach Fonksiyon Uzayları) (R, μ) bir ölçü uzayı, M de R üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler değerli (reel ya da kompleks) $\mu-$ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ve ρ bir fonksiyon normu olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ olacak biçimde M deki f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına **Banach fonksiyon uzayı** denir.

$\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

şeklinde ifade edilir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Teorem 3.2.3: ρ bir fonksiyon normu, $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı ve $\|\cdot\|_X$ Tanım 3.2.2'deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda vektör uzay işlemleri altında $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu lineer uzaydır. S de R üzerinde tanımlı $\mu-$basit fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$S \subset X \to M_0$$

içermeleri sağlanır.

Özel olarak, X te $f_n \to f$ ise sonlu ölçülü kümeler üzerinde $f_n \to f$ ölçüde yakınsaktır ve f_n im bir alt dizisi h.h.y f ye $\mu-$noktasal yakınsaktır (Bennett ve Sharpley,1988).

Teorem 3.2.4: X bir Banach fonksiyon uzayı, $f_n \in X(n=1,2,...)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_X < \infty$$

olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n X$ te $f \in X$ e yakınsaktır ve

$$\|f\|_X \le \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_X$$

gerçeklenir. Özel olarak X tamdır (Bennett ve Sharpley, 1988).

Tanım 3.2.5: (Mutlak Sürekli Norm) X bir Banach fonksiyon uzayı, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi ve f, X uzayında bir fonksiyon olsun.

Eğer h.h.y $E_n \to \varnothing$ olacak biçimde her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\|f\chi_{E_n}\| \to 0$$

oluyorsa bu durumda f fonksiyonuna **mutlak sürekli norma sahiptir** denir (Bennett ve Sharpley, 1988)

3.3 $M^{p,\lambda}$ Morrey Uzayları

$M_{p,\lambda}$ Morrey uzayı 1938 yılında C. Morrey tarafından eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin lokal davranışlarının çalışmalarında varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır.

Bu kısımda Morrey uzaylarının tanımı verilecek ve bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.3.1: ($M_{p,\lambda}$ **Uzayları)** $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun. $M_{p,\lambda}(\Omega)$ uzaylarının tüm ölçülebilir fonksiyonları için

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ 0\leq r<d}} \left[\frac{1}{r^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan normlu uzaylara $M_{p,\lambda}$ **uzayları** denir (Eridonivd., 2009).

$M_{p,\lambda}$ uzaylarının cebirsel özellikleri hakkında bazı temel sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- $\lambda = 0$ olduğunda

$$L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$$

Dolayısıyla bu uzay bilinen Lebesgue uzayına dönüşür.

- $\lambda = n$ olduğunda

$$M_{p,n}(\mathbb{R}^n) = M_{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

- $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ olduğunda ise, bu durumda

$$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$$

olup burada $\theta, \mathbb{R}^n$ 'de 0'a denk olan fonksiyonların kümesini belirtir.

Teorem 3.3.2: (Hölder Eşitsizliği)

$1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olmak üzere $f\in L^p(\Omega)$ ve $g\in L^{p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $fg\in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır (Fucik vd., 2012)

Teorem 3.3.3: $1\le p<q<\infty,\ \lambda,\mu\ge 0$ ve $\frac{\lambda-n}{p}\le\frac{\mu-n}{q}$ olsun. Bu durumda

$$M_{q,\mu}\to M_{p,\lambda}$$

gömülmesi gerçeklenir (Eridoni vd., 2009).

İspat: $\frac{1}{p/q}$ ile $\frac{1}{1-p/q}$ eşlenik olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy = \left(\int_{B(x,r)} 1dy\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\le \left(\nu_n r^n\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\le \left(\nu^n\right)^{1-\frac{p}{q}} r^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}}\left(r^{-\mu}\int_{B(x,r)} |f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{\lambda-n}{p}\leq\frac{\mu-n}{q}\Leftrightarrow\lambda\leq n\left(1-\frac{n}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{r}{d}\right)^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}}\leq\left(\frac{r}{d}\right)^{\lambda}$$

$$\Rightarrow(r)^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}}\leq r^{\lambda}d^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)+\mu\frac{p}{q}-\lambda}$$

elde edilir. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\left(r^{-\lambda}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{p}\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\left(r^{-\mu}\int_{B(x,r)}|f(y)|^{q}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

bulunur. Böylece $\|f\|_{M_{p,\lambda}}\lesssim\|f\|_{M_{q,\mu}}$ gerçeklenir.

Tanım 3.3.4: (Zayıf Morrey Uzayı) $1\leq p<\infty$, $0\leq\lambda\leq n$ ve f lokal integrallenebilir fonksiyon olmak üzere bu uzay $WM_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ile gösterilir. Bu uzayda sonlu norm

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^{n}\right)}=\|f\|_{WM_{p,\lambda}}=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^{n}\\ t>0}}t^{\frac{-\lambda}{p}}\|f\|_{WM_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^{n}\right)}$$

şeklinde tanımlanır (Guliyev,2009).

Sonuç 3.3.5: $\lambda=0$ iken Morrey uzayı ile Modifiye edilmiş Morrey uzayı Lebesgue uzayına dönüşür. Yani;

$$\tilde{M}_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=M_{p,0}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=M_{p}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$$

$\lambda<0$ veya $\lambda>0$ için

$\tilde{M}_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=M_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\theta$ (θ $\mathbb{R}^{n}$ de 0'a denk olan bütün fonksiyonların kümesidir.)

Tanım 3.3.6: $1 \le p < \infty,\ 0 \le \lambda \le n\ [t]_1 = \min\{1, t\}$ ve f lokal integrallenebilir fonksiyon olmak üzere $W\tilde{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayına **Zayıf Modifiye edilmiş Morrey uzayı** denir. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{W\tilde{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W\tilde{M}_{p,\lambda}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t>0}} [t]_1^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{WM_p(\mathbb{R}^n)}$$ şeklinde tanımlanır (Mizuhara,1991).

Sonuç 3.3.7: $\lambda = 0$ iken Zayıf Morrey uzayı ile Zayıf Modifiye edilmiş Morrey uzayları Zayıf Lebesgue uzayına dönüşür.

$$W\tilde{M}_{p,0}(\mathbb{R}^n) = WM_{p,0}(\mathbb{R}^n) = WM_p(\mathbb{R}^n)$$

3.4 $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Morrey uzaylarının bir genişlemesi olan $M_{p,\lambda}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı Mizuhara tarafından 1991 yılında tanımlanmıştır. Ardından 1994 yılında Nakai, harmonik analizin integral operatörlerinin, yani maksimal integral operatörünün, singüler integral operatörünün ve Riesz potansiyelinin bu uzaydaki sınırlılığını araştırmıştır.

Ayrıca $M_{p,\lambda}$ Genelleştirilmiş Morrey uzaylarının normalleştirilmiş hali Guliyev(2009) tarafından tanımlanmış, integral operatörlerinin sınırlılığı Mizuhara ve Nakai'ye göre daha geniş koşullar altında araştırılmıştır.

Tanım 3.4.1: $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{L_p(B\pi(x,r))} < \infty$$

quasi-normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{WL_p(B\pi(x,r))} < \infty$$

Normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre, $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçildiğinde $M_{p,r^{\frac{\lambda-n}{p}}} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı ve $WM_{p,r^{\frac{\lambda-n}{p}}} \equiv WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Morrey uzayı olduğu görülür.

Nakai (1994), $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında $M, \overline{T}$ ve I_α sınırlılığını araştırmış ve φ fonksiyonu üzerine $r \le t \le 2r$ olmak üzere

$$C^{-1}\varphi(x,r) \le \varphi(x,r) \le C\varphi(x,r)$$

noktasal *doubling* şartını koymuştur. Burada $C > 0$; t, r ve $x \in \mathbb{R}^n$ den bağımsız bir sabittir. Ayrıca bu şarta ilave olarak

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p$$

koşulu sağlanıyorsa M ve $\overline{T}$ operatörlerinin $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı üzerinde ve eğer $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ olmak üzere

$$\int_r^\infty t^{\alpha p}\varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le Cr^{\alpha p}\varphi(x,r)^p$$

koşulu sağlanıyorsa I_α operatörünün $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlı olduklarını göstermiştir. (Guliyev,2009)

Tanım 3.4.2: $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy$$

olsun. Eğer $\|f\|_* < \infty$ ise f fonksiyonu ortalama salınıma sahiptir denir ve $\|f\|_* < \infty$ olmak üzere $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi $BMO(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ bir lineer uzaydır. Bundan başka $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve λ skaler olmak üzere

$$\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$
$$\|\lambda f\|_* = |\lambda| \|f\|_*$$

sağlanır (Guliyev,2009).

Tanım 3.4.3: Ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı bir lineer T operatörü ve bir $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $[b,T]$ komütatörü

$$[b,T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$$

ile tanımlanır (Guliyev,2009).

Tanım 3.4.4: $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{LM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{LM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0} \varphi(0,r)^{-1} |B(0,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(0,r))} < \infty$$

quasi-normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $LM_{p,\varphi} \equiv LM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Ayrıca

$$\|f\|_{WLM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WLM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0} \varphi(0,r)^{-1} |B(0,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(0,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $WLM_{p,\varphi} \equiv WLM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. (Guliyev, 2009).

BÖLÜM IV

KESİRLİ OSKÜLATÖR İNTEGRAL OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARDA SINIRLILIĞI

4.1 Giriş ve Ana Sonuçlar

Morrey uzayları, çeşitli yazarlar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmıştır ve kısmi diferansiyel denklemler teorisinde ağırlıklı Lebesgue uzayları ile birlikte önemli bir rol oynamaktadır; Eliptik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yerel davranışlarının incelenmesinde oldukça yararlı olduğu ve yerel düzenliliği Lebesgue uzaylarından daha kesin olarak tanımladıkları görülmüştür.

$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x,r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım altında $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzayı haline gelir; $\lambda = 0$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda = 1$ için $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ile kesişir.

Bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının $WM_{p,\lambda}$ zayıf Morrey uzayı

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

Biçimindedir. Burada WL_p zayıf L_p uzayı olarak tanımlanır.

Tanım 4.1.1: $\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

Sonlu quasi-normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ile gösterilir.

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı da zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi(\mathbb{R}^n)}$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre, $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$: seçimi altında $M_{p,\lambda}$ ve $WM_{p,\lambda}$ uzayları

$$M_{p,\varphi}\,|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}} = M_{p,\lambda},$$

$$WM_{p,\varphi}\,|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}} = WM_{p,\lambda}$$

olur.

Maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve tekil integral operatörleri vb. gibi reel analizin klasik operatörlerinin sınırlılık teorisi, bir ağırlıklı Lebesgue uzayından diğerine doğru çalışılmıştır. $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Fraksiyonel maksimal operatör M_α ve Riesz potansiyeli I_α,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1+\frac{a}{n}} \int_{B(x,t)} |f(y)|\,dy, \quad 0 \le \alpha < n$$

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\alpha = 0$ ise, $M \equiv M_0$ Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür. Chiarenza ve Frasca $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$de M'nin sınırlılığını elde etmişlerdir. Adams, $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ de I_α'nın sınırlılığını oluşturmuştur.

Burada ve devamında C doğrudan doğruya değişebilen ancak uygun niteliklerden bağımsız olarak kalabilen bir pozitif sabiti gösterir.

K'nın bir Calderon-Zygmund çekirdeği olduğunda Calderon-Zygmund tekil integral operatörü;

$$\tilde{T}f(x) = p \cdot v \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $0 < a < b$ olmak üzere her a, b için

$$|K(x)| \le \frac{c}{|x|^n}, \tag{4.1.2}$$

$$|\nabla K(x)| \le \frac{c}{|x|^{n+1}} \tag{4.1.3}$$

ve

$$\int_{a<|x|<b} K(x)dx = 0,$$

sağlanırsa $K \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ çekirdeği bir CZK'dır.

Chiarenza ve Frasca $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde $\tilde{T}$'nin sınırlılığını gösterdi. (4.1.1)'deki çekirdek konvolüsyon çekirdeği olmak üzere bir değerdir. Ancak, her ikisi de salınımlı integrallerin versiyonları olan Fourier dönüşümü ve Radon dönüşümü konvolüsyon olmayan çekirdekli bir çok operatör türü bulunur.

Bu tezde dikkate aldığımız amaç Ricci ve Stein'a göre salınımlı integrallerin sınıfıdır. $P(x,y)$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan reel değerli bir polinom ve K bir Calderon-Zygmund çekirdeği olduğunda (CZK);

$$Tf(x) = p\cdot v\int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)}K(x-y)f(y)dy \tag{4.1.4}$$

olur.

Salınım faktörü $e^{iP(x,y)}$ 'nin, Calderon-Zygmund operatörleri veya kesirli integraller durumundaki yöntemle (1.5)'in L_p norm eşitsizliklerini oluşturmayı imkânsız kılmıştır. Chanillo ve Christ, T'nin zayıf (4.1.1) tip tahminini oluşturmuştur.

Bir dağılım çekirdeği K, aşağıdaki hipotezleri sağlaması durumunda standart bir Calderon-Zygmund çekirdeği olarak adlandırılır.

$$|K(x,y)| \le \frac{c}{|x-y|^n}, \qquad x \ne y \tag{4.1.5}$$

ve

$$|\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \le \frac{c}{|x-y|^{n+1}}, \qquad x \ne y \tag{4.1.6}$$

$P(x,y)$, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$'de tanımlanan reel değerli bir polinom olduğunda ilgili Calderon-Zygmund integral operatörü ve salınımlı integral operatörü $\tilde{S}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{S}f(x,y) = p \cdot v \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \tag{4.1.7}$$

$$Sf(x) = p \cdot v \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)}K(x,y)f(y)dy \tag{4.1.8}$$

Lu ve Zhang, $1 < p < \infty$ olmak üzere L_p üzerinde S 'nin sınırlılığını ispatladı.

Ricci ve Stein $0 < \alpha < n$ olmak üzere (4.1.6) ve (4.1.7) şartlarının yerine

$$|K_a(x,y)| \le \frac{c}{|x-y|^{n-\alpha}}, \qquad x \ne y$$

(4.1.9)

ve

$$|\nabla_x K_\alpha(x,y)| + |\nabla_y K_\alpha(x,y)| \le \frac{c}{|x-y|^{n+1-\alpha}}, \qquad x \ne y \tag{4.1.10}$$

alındığında standart kesirli Calderon Zygmund çekirdeği K_α 'yı tanımladılar.

$P(x,y)$'nin $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 'de tanımlanan reel bir polinom olduğu durumda karşılık gelen kesirli oskülatör integral operatörü şu şekilde tanımlanır;

$$S_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iP(x,y)}K_\alpha(x,y)f(y)dy \tag{4.1.11}$$

$\alpha = 0$ olduğunda, $S_0 = S$ ve $K_0 = K.$ olduğu açıkça görülür. Ding ve Guliyev'den ve Guliyev, Aliyev, Karaman ve Shukurov'un sonuçları yardımıyla aşağıda bu çalışmanın sonuçları verilebilir.

Teorem 4.1.2: $1 \le p < \infty$ olsun. (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname{ess\,sup}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \le C\varphi_2(x,r) \tag{4.1.12}$$

şartını sağlar. Burada C, x ve t ’den bağımsızdır.

Eğer K bir SCZK ve $\tilde{S}$ operatörü $\left(L_2\left(\mathbb{R}^n\right), L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ tipli ise, $1<p<\infty$ ve herhangi bir $P(x,y)$ polinomu için S operatörü, M_{p,φ_1}'den M_{p,φ_2} ’ye sınırlıdır. Ayrıca $p=1$ için K bir CZK operatörüdür, T operatörü de M_{1,φ_1}'den WM_{1,φ_2} ’ye sınırlıdır.

Teorem 4.1.3: $1\le p<\infty$, $0<a<\frac{n}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{a}{n}$, $P(x,y)$ bir polinom ve (φ_1,φ_2)

$$\int_r^{\infty} \frac{\operatorname{ess\,sup}_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \le C\varphi_2(x,r) \tag{4.1.13}$$

şartını sağlasın. Burada C, x ve t ’den bağımsızdır. Böylece $p>1$ için S_α operatörü M_{p,φ_1}'den M_{q,φ_2}'ye sınırlıdır ve $p=1$ için S_α operatörü M_{1,φ_1}'den WM_{q,φ_2}'ye sınırlıdır.

Lokal integrallenebilir b fonksiyonu için, S (veya S_α) ve b tarafından oluşturulan komütatör operatörü,

$$S_b f(x) = b(x)Sf(x) - S(bf)(x)$$

ve

$$S_{\alpha,b} f(x) = b(x)Sf(x) - S_\alpha(bf)(x).$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.4: $1<p<\infty,\ b\in BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve $\left(\varphi_1,\varphi_2\right)$

$$\int_r^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname{ess\,sup}_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}}dt\le C\varphi_2(x,r)\,, \tag{4.1.14}$$

şartını sağlasın.

Burada C, x ve t'den bağımsızdır. Eğer K bir SCZK ise $\tilde{S}$ operatörü $\left(L_2\left(\mathbb{R}^n\right),L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ tipindeyse, herhangi bir polinom $P(x,y)$ için S_b operatörü M_{p,φ_1}'den M_{p,φ_2}'ye sınırlıdır.

Teorem 4.1.5: $1<p<\infty,\ b\in BMO(\mathbb{R}^n)\ \ 0<a<\frac{n}{p},\ \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{a}{n},\ P(x,y)$ bir polinom ve $\left(\varphi_1,\varphi_2\right)$

$$\int_r^{\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname{ess\,sup}_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}}dt\le C\varphi_2(x,r), \tag{4.1.15}$$

şartı sağlansın. Burada C, x ve t bağımsızdır ve $S_{b,\alpha}$ operatörü M_{p,φ_1} den M_{q,φ_2} ye sınırlıdır.

4.2 Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında $M_{p,\varphi}\left(\mathbb{R}^n\right)$ Bilinen Bazı Sonuçlar

Nakai, Mizuhara, Akbulut, Mustafayev ve Guliyev tarafından $M_{p,\varphi_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$'den $M_{p,\varphi_2}\left(\mathbb{R}^n\right)$ye kadar olan tekil operatör T'nin sınırlılığı için φ_1 ve φ_2 ağırlıkları üzerinde yeterli koşulları elde edildi.

Aşağıdaki ifadeler Nakai tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.1: $1 \le p < \infty$ ve $\varphi(x,r)$, $c(\ge 1), t$ üzerinde r ve $x \in \mathbb{R}^n$ den bağımsız olmak üzere ve $r \le t \le 2r$ olduğunda

$$C^{-1}\varphi(x,r) \le \varphi(x,t) \le C\varphi(x,r) \tag{4.2.1}$$

ve C, x ve r 'den bağımsız olmak üzere

$$\int_r^{\infty} \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p \tag{4.2.2}$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için M ve T operatörleri $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ 'de sınırlıdır ve $p = 1$ için M ve T, $M_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$'den $WM_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$'ye sınırlıdır.

Teorem 4.2.2: $1 \le p < \infty$, $0 < a < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$ ve $\varphi(x,t)$, (2.1) ve

$$\int_r^{\infty} \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p, \tag{4.2.3}$$

şartları sağlansın. Burada C, x ve r 'den bağımsızdır. Böylece p>1 için, M_α ve I_α operatörleri $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$'den $M_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$'ye sınırlıdır ve p=1 için M_α ve I_β $M_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n)$'den $WM_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$'ye sınırlıdır. Nakai sonuçlarını içeren aşağıdaki durumlar, Guliyev tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.3: $1 \le p < \infty$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_t^{\infty} \varphi_1(x,r) \frac{dr}{r} \le C_{\varphi_2}(x,t), \tag{4.2.4}$$

şartını sağlasın. Burada C, x ve t 'den bağımsızdır. M ve T operatörleri $p>1$ için M_{p,φ_1} den M_{q,φ_2} ye ve M_{1,φ_1} 'den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır.

Teorem 4.2.4: $1 \le p < \infty,\ 0 < a < \frac{n}{p},\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x,t)\frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r), \tag{4.2.5}$$

şartı sağlansın. Burada C, x ve t 'den bağımsızdır. M_α ve I_α, $p>1$ için M_{p,φ_1} den M_{q,φ_2} ye ve $p=1$ için M_{1,φ_1} 'den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır.

Guliyev'in sonuçlarını içeren aşağıdaki durumlar Guliyev ve arkadaşları tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.5: $1 \le p < \infty$ ve (φ_1, φ_2) (4.2.4)'teki şartları sağlasın. Böylece $p>1$ için M ve T operatörleri M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye ve M_{1,φ_1} 'den WM_{1,φ_2} 'ye sınırlıdır.

Teorem 4.2.6: $1 \le p < \infty,\ 0 < a < \frac{n}{p},\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$ ve (φ_1, φ_2) (4.1.14) şartını sağlasın.

Böylece M_α ve I_α, p>1 için M_{p,φ_1} den M_{q,φ_2} ye ve $p=1$ için M_{1,φ_1} 'den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır.
1956 tarihli Bary ve Stechkin çalışmasından sonra (4.2.3)'ün tipli integral şartları Bary-Stechkin veya Zygmund-Bary-Stechkin şartları olarak başvuruldu. Böyle integral koşulları sağlayan hemen hemen monoton fonksiyonların sınıfları daha sonra birkaç makalede incelenmiştir ve buradaki referanslar, bu türdeki integral eşitsizliklerin karakterizasyonunun bilinen belirli alt ve üst indislerin açısından verildiği Matuszewska-Orlicz endeksleri olarak bilinir. Belirtilen makalelerde, tüm integral eşitsizlikleri $r \to 0$ için çalışıldı. Böyle eşitsizlikler aynı zamanda $r \to 0$ ve $r \to \infty$ gibi

farklı koşulları yüklendiklerinde de ilgi çekicidir; Bu durum da Kokilashvili ve Samko'nun makalelerinde incelenmiştir.

4.3 $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarındaki Kesirli Oskülatör İntegral Operatörleri

Bu bölümde, Hardy operatörünün sınırlılığı hakkında aşağıdaki durumu kullanacağız

$$(Hg)(t) := \frac{1}{t}\int_0^t g(r)dr, \qquad 0 < t < \infty$$

Teorem 4.3.1: Bütün negatif olmayan ve $(0,\infty)$ üzerinde artmayan g fonksiyonu için

$$\operatorname{ess\,sup} \omega(t)\, Hg(t) \le c \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} v(t) g(t)$$

eşitsizliğinin olması için gerek ve yeter şart

$$A := \sup_{t>0} \frac{w(t)}{t} \int_0^t \frac{dr}{\operatorname{ess\,in\,f}_{0<s<r} v(s)} < \infty,$$

ve $c \approx A$ olmasıdır (Carro vd.,2001)

Lemma 4.3.2: $1 \le p < \infty$, K bir SCZK ve Calderon-Zygmund tekil integral $\tilde{S}$ operatörü $\left(L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right), \left(L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ tipli olsun. $1 < p < \infty$ ve herhangi bir polinom $P(x, y)$ için

$$\|Sf\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve tüm $f \in L_1^{loc}(R^n)$ için sağlanır.

Ayrıca, p=1, K bir CZK, herhangi bir yuvar $B(x_0, r)$ ve tüm $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için;

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x_0,r))} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-n} dt \tag{4.3.1}$$

dir.

İspat: $p \in (1,\infty)$ olsun. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için, x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar için $B = B(x_0, r)$ kümesi, $2B = B(x_0, 2r)$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{2B}(y), f_2(y)\chi_{(2B)}c(y)$$

olarak gösterilir ve

$$\|Sf\|_{L_p(B)} \le \|Sf_1\|_{L_p(B)} + \|Sf_2\|_{L_p(B)}$$

dir.

Eğer K bir SCZK ve $\tilde{S}$ operatörü $\left(L_2(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)\right)$ tipli bir operatör ise, bu durumda $1 < p < \infty$ ve herhangi bir $P(x,y)$ polinomu için S operatörü, $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır.

$f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n), Sf_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ ve S, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı olduğundan

$$\|Sf\|_{L_p(B)} \le \|Sf_1\|_{L_p(R^n)} \le C\|f_1\|_{L_p(R^n)} = C\|f_1\|_{L_p(2B)}$$

olarak gösterilir. Burada C>0 ve f'den bağımsızdır.

$x \in B,\ y \in (2B)^C$ olduğunda $\frac{1}{2}|x_0 - y| \le |x - y| \le \frac{3}{2}|x_0 - y|$

$$|Sf_2(x)| \le c_0 \int_{(2B)^c} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde edilir.

Fubini'nin teoremi ve Hölder Eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned}\int_{(2B)^c} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}dy &\approx \int_{(2B)^c} |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} t^{-1-t}dtdy \\ &\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r<|x_0-y|<t} |f(y)|dyt^{-1-n}dt \\ &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)|dyt^{-1-n}dt \\ &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}}dt\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

elde edilir.

Ayrıca bütün $p \in [1,\infty)$ için

$$\|Sf_2\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}}dt \tag{4.3.3}$$

geçerlidir. Böylece

$$\|Sf_2\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}}dt.$$

diğer yandan,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_p(2B)} &\approx r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} t^{-1-\frac{n}{p}}dt \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_pB(x_0,t)} t^{-1-\frac{n}{p}}dt.\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Bundan dolayı,

$$\|Sf\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt$$

dır.

p=1 olsun. Zayıf (1.1)'den T'nin ve (4.3.4)'ün sınırlılığı

$$\|Tf_1\|_{WL_1(B)} \le \|Tf_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$
$$= \|f\|_{L_1(2B)} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

(4.3.5)

biçimindedir.

Böylece (4.3.4) ve (4.3.5) yardımıyla (4.3.1) eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 4.1.1'in ispatı Lemma 4.3.1 ve Teorem 4.3.1 yardımıyla $p \in (1,\infty)$ ise

$$\|Sf\|_{\mu_{p,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt$$
$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^{r^{-\frac{n}{p}}} \|f\|_{L_p\left(B(x,t^{-\frac{p}{n}})\right)} dt$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2\left(x, r^{-\frac{p}{n}}\right)^{-1} \int_r^{r^{-\frac{n}{p}}} \|f\|_{L_p\left(B(x,t^{-\frac{p}{n}})\right)} dt$$
$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1\left(x, r^{-\frac{p}{n}}\right)^{-1} r \|f\|_{L_p\left(B(x,t^{-\frac{p}{n}})\right)} = \|f\|_{\mu_{p,\varphi_1}}$$

elde edilir.

Eğer p=1 ise;

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_{W\mu_1,\varphi_2} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x,t))} t^{-1-n}\, dt \\
&\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{r^{-n}} \|f\|_{L_1\left(B(x,t^{-\frac{1}{n}})\right)} dt \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2\left(x, r^{-\frac{1}{n}}\right)^{-1} \int_0^{r} \|f\|_{L_1\left(B(x,t^{-\frac{1}{n}})\right)} dt \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1\left(x, r^{-\frac{1}{n}}\right)^{-1} r \|f\|_{L_1\left(B(x,t^{-\frac{1}{n}})\right)} = \|f\|_{\mu_1,\varphi_1}
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem 4.1.2'nin İspatı, Teorem 4.2.6'dan ve

$$|S_a f(x)| \le I_a(|f|)(x)$$

eşitsizliğinden elde edilir.

4.4 Kesirli Oskülatör İntegral Operatörlerin $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarındaki Komütatörleri

T bir Calderon-Zygmund tekil integral operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Coiffman, Rochberg ve Weiss'in sonuçları, $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı $[b,T]f = T(bf) - bTf$ komütatör operatörü olduğunu belirttiği iyi bilinmektedir. Calderon-Zygmund operatörlerinin komütatörü, ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin düzenliliğini incelerken önemli bir rol oynamıştır (Chiarenza ve Frasca, 1989).

İlk olarak $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzay tanımını hatırlayalım.

Tanım 4.4.1 : Kabul edelim ki $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

olmak üzere

$$\|f\|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy < \infty$$

olsun.

$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_1^{loc}\left(\mathbb{R}^n\right) : \|f\|_* < \infty \right\}$ olarak tanımlanır.

Biri, farkı bir sabit olan iki fonksiyon dikkate alınırsa, böylece uzay $BMO(\mathbb{R}^n)$, $\|.\|_*$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

AÇIKLAMA 1:

a) John-Nirenberg Eşitsizliği: $c_1, c_2 > 0$ sabitleri vardır. Tüm $f \in BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve $\beta > 0$ için öyle ki;

$$\left|\left\{ x \in B : |f(x) - f_B > \beta| \right\}\right| \le c_1 |B| e^{-c_2\beta/\|f\|_*}, \forall B \subset \mathbb{R}^n. \text{dir.}$$

b) John-Nirenberg Eşitsizliği: $1 < p < \infty$ için,

$$\|f\|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.4.1}$$

dir.

c) $f \in BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$ olsun. Sabit bir C>0 vardır ve öyle ki $0 < 2r < t$ için

$$\left|f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)}\right| \leq c\|f\|_* \ln\frac{t}{r} \tag{4.4.2}$$

dir.

Burada C; f, x, r ve t'den bağımsızdır.

LEMMA 4.4.2: $1 \leq p < \infty$, $b \in BMO\left(\mathbb{R}^n\right)$, K bir SZCK ve Calderon-Zygmund tekil integral operatörü $\tilde{S}\left(L_2\left(\mathbb{R}^n\right), L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ tipli olsun. $1 < p < \infty$, herhangi bir yuvar $B(x_0, r)$ ve tüm $f \in L_p^{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ve herhangi bir $P(x,y)$ polinomu için

$$\|S_b f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt$$

eşitliği sağlanır.

İSPAT: $p \in (1, \infty)$ olsun. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar için $B = B(x_0, r)$ kümesi, $2B = B(x_0, 2r)$ için

$$f = f_1 + f_2,\ f_1(y) = f(y)\chi 2B(y),\ f_2(y) = f(y)\chi_{(2B)^C}(y)$$

olarak gösterilir ve

$$\|S_b f\|_{L_p(B)} \leq \|S_b f_1\|_{L_p(B)} + \|S_b f_2\|_{L_p(B)}$$

dir.

Eğer K bir SZCK ve $\tilde{S}$ operatörü $\left(L_2\left(\mathbb{R}^n\right), L_2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ tipli bir operatör ise bu durumda, $1<p<\infty$ ve herhangi bir $P(x,y)$ polinomu için S_b komütatör operatörü $L_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ sınırlıdır. $f_1 \in L_p\left(R^n\right), Sf_1 \in L_p\left(R^n\right)$ ve S_b $L_p\left(\mathbb{R}^n\right)$'de sınırlı olduğundan

$$\|S_b f_1\|_{L_p(B)} \leq \|S_b f_1\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n\right)} \leq c\|b\|_* \|f_1\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n\right)} = c\|b\|_* \|f_1\|_{L_p(2B)},$$

dır. Burada C>0, f den bağımsızdır.

$x \in B$ için,

$$\begin{aligned}
\left|S_b f_2(x)\right| &\underset{\sim}{<} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|b(y)-b(x)\right|}{|x-y|^n}\left|f(y)\right| dy \\
&\approx \int_{c_{(2B)}} \frac{\left|b(y)-b(x)\right|}{|x_0-y|^n}\left|f(y)\right| dy
\end{aligned}$$

dır.

Böylece

$$\begin{aligned}
\|S_b f_2\|_{L_p(B)} &\underset{\sim}{<} \left(\int_B \left(\int_{C_{(2B)}} \frac{\left|b(y)-b(x)\right|}{|x_0-y|^n}\left|f(y)\right| dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\underset{\sim}{<} \left(\int_B \left(\int_{C_{(2B)}} \frac{\left|b(y)-b_B\right|}{|x_0-y|^n}\left|f(y)\right| dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_B \left(\int_{C_{2B}} \frac{\left|b(x)-b_B\right|}{|x_0-y|^n}\left|f(y)\right| dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= I_1 + I_2 .
\end{aligned}$$

dir.

I_1,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{C_{(2B)}} \frac{|b(y)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)| dy \\
&\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{C_{(2B)}} |b(y)-b_B| |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \le |x_0-y| \le t} |b(y)-b_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\le r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Hölder eşitsizliğini uygulayarak ve (4.4.1), (4.4.2) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
I_1 &\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} \left|b(y)-b_{B(x_0,t)}\right| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left|b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}\right| \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\le r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(\int_{B(x_0,t)} \left|b(y)-b_{B(x_0,t)}\right|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left|b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}\right| \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt \\
&\lesssim \|b\|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt .
\end{aligned}
$$

elde edilir.

I_2 değerini elde etmek için;

$$
I_2 = \left(\int_B |b(x)-b_B|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \int_{C_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy
$$

(4.1) yardımıyla,

$$
I_2 \lesssim \|b\|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{C_{(2B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy
$$

elde edilir.

Böylece (4.3.2)'den;

$$I_2 \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt$$

olur.

Bütün $p \in (1,\infty)$ için

$$\|S_b f_2\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt \tag{4.4.3}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|S_b f\|_{L_p(B)} \lesssim \|b\|_* \|f\|_{L_p(2B)} + \|b\|_* \, r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p}} dt, \tag{4.4.4}$$

ve Lemma 4.4.2 nin ifadesi (4.3.4) ile bulunur.

Teorem 4.1.4'ün İspatı: Lemma 4.4.2 ve Teorem 4.3.1 yardımıyla, Teorem 4.3.1'in ispatı ile aynı şekilde bulunur.

Teorem 4.1.5'in İspatı: Guliyev, Aliyev, Karaman ve Shukurov'un çalışmalarından Teorem 7.4'ten ve

$$|S_{a,b} f(x)| \le I_{a,b}(|f|)(x)$$

eşitsizliğinden elde edilir.

KAYNAKLAR

Adams, D. R. “A note on Riesz potentials”. ***Duke Math.*** 42, 765-778, 1975.

Alp, M. ve Musayev, B. Fonksiyonel Analiz, ***Balcı Yayınları***, Ankara, 2000.

Akbulut, A., Guliyev, V. S. and, Mustafayev, R., “On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces”. ***Math. Bohem.*** 137 (1), 27- 43, 2012.

Balcı, M., Analiz I, ***Balcı Yayınları***, Ankara, 1997.

Balcı, M., Analiz II, ***Balcı Yayınları***, Ankara, 1997.

Balcı, M., Reel Analiz, ***Balcı Yayınları***, Ankara, 1998.

Balcı, M., Reel Analiz, ***Balcı Yayınları,*** Ankara, 2000.

Balcı, M., Genel Matematik I, ***Sürat Yayınları,*** Ankara, 2012.

Bary, N. K. and Stechkin, S. B., "Best approximations and differential properties of two conjugate functions". ***Tr. Mosk. Mat. Obˆs***. 5, 483-522, 1956.

Bennett, C. and Sharpley, R., Interpolation of Operators, ***Academic Press***, Cambridge, Massachusetts, 1998.

Carro, M., Pick, L., Soria, J. and Stepanov, V. D., "On embeddings between classical Lorentz spaces". ***Math. Inequal. Appl***. 4 (3), 397-428, 2001.

Chanillo, S. and Christ, M., "Weak (1, 1) bounds for oscillatory singular integral". ***Duke Math***. J. 55, 141-155, 1987.

Chiarenza, F. and Frasca, M., "Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function". ***Rend. Mat. Appl.*** 7, 273-279, 1987.

Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P., "Interior $W2,p$-estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients". ***Ric. Mat.*** 40, 149-168, 1991.

Coifman, R., Rochberg, R. and Weiss, G., "Factorization theorems for Hardy spaces in several variables". ***Ann. Math***. 103 (2), 611-635, 1976.

Ding, Y., "Lp-Boundedness for fractional oscillatory integral operator with rough kernel". ***Approx. Theory Appl***. 12, 70-79, 1996.

Fazio, G. D. and Ragusa, M. A., "Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nodivergence form equations with discontinuous coefficients". ***J. Funct. Anal.*** 112, 241- 256, 1993.

Guliyev, V. S., "Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in R*n"*. Doctor of Sciences, ***Mat. Inst. Steklova,*** Moscow, 1994.

Guliyev, V. S., "Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces". Research Article, ***J. Inequal. Appl.*** 2009.

Guliyev, V. S., Aliyev, S. S., Karaman, T. and Shukurov, P. S., "Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey space". ***Integral Equ. Oper. Theory*** 71, 327-355, 2011.

Guseinov, A. I. and Mukhtarov, K.S., Introduction to the Theory of Nonlinear Singular Integral Equations***. Nauka,*** Moscow, 1980.

Karapetiants, N. K. and Samko, N. G., "Weighted theorems on fractional integrals in the generalized Hölder spaces *Hω* 0 (*ρ*) via the indices *mω* and *Mω"*. ***Fract. Calc. Appl. Anal***. 7 (4), 437-458, 2004.

Kokilashvili, V. and Samko, S., "Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non- standard growth". ***J. Math. Anal. Appl.*** 352, 15-34, 2009.

Lu, S. Z. and Zhang, Y., "Criterion on *Lp*-boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels". ***Rev. Mat***. ***Iberoam***. 8, 201-219, 1992.

Lu, S. Z., "A class of oscillatory integrals". ***Int. J. Appl. Math. Sci.*** 2 (1), 42-58, 2005.

Lu, S. Z., Ding, Y. and Yan, D. Y., Singular Integrals and Related Topics. ***World Scientific***, Singapore, 2007.

Mizuhara, T., Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. In: Igari, S (ed.) ***Harmonic Analysis. ICM 90 Satellite Proceedings,*** 183-189. Springer, Tokyo, 1991.

Morrey, C. B., "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans." ***Am. Math. Soc.*** 43, 126-166, 1938.

Nakai, E., "Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces". ***Math. Nachr***. 166, 95-103, 1994.

Phong, D. H. and Stein, E. M., "Singular integrals related to the Radon transform and boundary value problems". ***Proc. Natl. Acad. Sci***. 80, 7697-7701, 1983.

Pick, L.; Kufner, A.; John O. and Fucik, S., Function Spaces, ***De Gruyter***, Deutsch, 2012.

Samko, N., "On non-equilibrated almost monotonic functions of the Zygmund-Bary-Stechkin class". ***Real Anal. Exch.*** 30 (2), 727-745, 2005.

Samko, N., Samko, S. and Vakulov, B., "Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent". ***J. Math. Anal. Appl.*** 335, 560-583, 2007.

Sawano, Y., Sugano, S. and Tanaka, H., "A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces". ***Bound. Value Probl***. 2009.

Softova, L., "Singular integrals and commutators in generalized Morrey spaces. Acta Math". ***Sin. Engl. Ser.*** 22 (3), 757-766, 2006.

ÖZ GEÇMİŞ

Cansu DOĞAN 1991 yılında Mersin'de doğdu. İlk ve ortaokulu 3 Ocak İlköğretim okulunda okudu. Lise eğitimini 2005 – 2009 yılları arasında Yusuf Kalkavan Anadolu Lisesinde okuduktan sonra 2009 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2013 yılında mezun olduktan sonra 2014 yılında ODTÜ Gv. Özel Niğde Ortaokulunda göreve başladı. 2019 yılı Temmuz ayında ayrıldı. Yine 2019 Temmuz ayında ODTÜ Gv. Mersin Ortaokulunda göreve başladı. Mersin'de çalışmaya devam etmektedir.