T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN TEORİSİ VE İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI

Ceyda SARITEPE

Danışman
Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA–2018

Ceyda
SARITEPE

BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN TEORİSİ VE İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI

2018

TEZ ONAYI

Ceyda SARITEPE tarafından hazırlanan **"BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN TEORİSİ VE İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI"** adlı tez çalışması 07/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman: **Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Prof. Dr. Mustafa KAZAZ**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER**
Uşak Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ceyda SARITEPE

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu reel vektör uzayı
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
E^3	3-boyutlu Öklid uzayı
$\left\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right\}$	3-boyutlu Öklid uzayında Frenet-3 çatısı
κ	3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu
τ	3-boyutlu Öklid uzayında burulma fonksiyonu
k_1, k_2	3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları
$\left\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$	3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı
ρ	3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik yarıçap fonksiyonu
σ	3-boyutlu Öklid uzayında burulma yarıçap fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip bana vakit ayıran, çalışmamın her aşamasında bana destek olan ve bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenimim süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a ve manevi desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEMİR'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteğini daima hissettiğim tez yazma sürecinde yanımda olan sevgili eşime ve sabırları için çocuklarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ceyda SARITEPE
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN TEORİSİ VE İNTEGRAL KARAKTERİZASYONLARI

Ceyda SARITEPE

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Diferansiyel geometrinin üzerinde durduğu en önemli konulardan birisi uzay eğrilerinin incelenmesidir. 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin karakterize etmek için teğet, asli normal ve binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı kullanılır. Bu çatı uzay eğriler için çalışılabilecek en iyi ortonormal çatıdır. Ayrıca bir eğrinin eğriliği ve burulması, bu eğrinin uzaydaki yerel davranışı hakkında bilgi verir. Bir eğrinin eğriliği, bu eğrinin teğet doğrudan sapma miktarını gösterir ve bu sapma miktarı küçüldükçe eğri kapalı bir görünüme sahip olur. Bir uzay eğrisinin eğriliğinin sıfırdan farklı olması durumunda tanımlanan eğrinin burulması da bu eğrinin teğet ve normal vektörlerinin belirlediği oskülatör düzlemden sapma miktarını ölçer. Genel olarak, bir uzay eğrisi, eğrilik ve burulmayı içeren bir diferansiyel denklem ile karakterize edilebilir. Bu nedenle, bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilmesi gerekmektedir. Bir eğrinin bazı noktalarda eğriliği sıfırlanabilir, yani ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda eğrinin daha iyi incelenebilmesi için Frenet çatısına alternatif ve onunla ilişkili olan Bishop çatısı oluşturulabilir. Frenet çatısında bulunan $\vec{T}(s)$ teğet vektörünü değiştirmeden diğer asli normal ve binormal vektörleri belli bir açı ile döndürerek Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı adı verilen başka bir çatı elde edilir. Buna göre Bishop çatısında $\vec{T}(s)$ vektörü aynen kalır ve bu vektöre dik düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ bazı seçilir. Bu iki vektörün türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlıdır. Dolayısıyla bir eğrinin Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğrilikleri ile bu eğrinin eğriliği ve burulması arasında bir ilişki vardır. Son zamanlarda, Bishop çatısı kullanılarak uzay eğrilerinin birçok farklı karakterizasyonu verilmektedir. Uzay eğrilerinin en önemlilerinden birisi de küre üzerinde yatan, küresel eğrilerdir. Bu çalışmada, Frenet çatısına göre bir küresel eğrinin integral karakterizasyonları incelenmiştir. Özellikle, bir eğrinin küresel eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart, Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğrilikler kullanılarak ortaya konmuştur. Son olarak da Frenet çatısına alternatif bir çatı olan Bishop çatısı kullanılarak bir küresel eğriyi karakterize eden üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet 3- çatısı, Bishop çatısı, Küresel eğri, Eğrilik, Öklid iç çarpım

2018, 35 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THEORY AND INTEGRAL CHARACTERIZATIONS OF SPHERİCAL CURVES ACCORDING TO BİSHOP FRAME

Ceyda SARITEPE

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

One of the most important topics of differential geometry is the study of space curves. Frenet frame consisting of tangential, fundamental normal and binormal vectors is used to characterize curves in 3-dimensional Euclidean space. This is the best orthonormal frame for frame space curves. In addition, the curvature and torsion of a curve informs about the local behavior of this curve in space. The curvature of a curve indicates the tangential direct deviation of this curve, and as the amount of this deviation becomes smaller, the curve has a closed appearance. If the curvature of a space curve differs from zero, the torsion of the defined curve also measures the amount of deviation from the oscillator plane determined by the tangent and normal vectors of this curve. In general, a space curve can be characterized by a differential equation including curvature and torsion. For this reason, a curve must be able to be reproduced at least up to the third order in order to fully examine it. The curvature of a curve at some points can be reset, ie the second derivative can be zero. In this case, an alternative to the Frenet roof and the associated Bishop framework can be created for better examination of the curve. Without changing the $\vec{T}(s)$ tangent vector on the frame of the Frenet, another original frame called the frame of the Bishop or parallel translational frame is obtained by rotating the other normal normal and binormal vectors at an angle. Accordingly, the vector $\vec{T}(s)$ remains in the Bishop frame, and any two element $\left\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\right\}$ present in the plane perpendicular to this vector is selected. The derivatives of these two vectors are linked only to the $\vec{T}(s)$ vector. Therefore, there is a relationship between the first and second curvatures of this curve and the curvature and torsion of this curve. Recently, many different characterizations of space curves are given using the Bishop framework. One of the most important space curves is the spherical curves lying on the sphere. In this study, integral characterizations of a spherical curve according to Frenet frame are investigated. Particularly necessary and sufficient condition for a curve to be a spherical curve has been demonstrated by using the first and second curvatures according to the Bishop frame. Finally, a third-order differential equation is used to characterize a spherical curve using an alternative frame to Frenet frame.

Keywords: Frenet 3-frame, Bishop frame, Spherical curve, Curvature, Euclidean inner product

2018, 35 pages

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere, diferansiyel geometrinin en önemli konularından biri eğrilerin teorisidir. Uzay eğrilerinin farklı karakterizasyonlarını içeren pek çok çalışma vardır. Uzay eğrilerinden en önemlilerinden biriside küresel eğrilerdir, yani, küre yüzeyi üzerinde yatan eğrilerdir. Küresel eğrileri karakterize eden birçok çalışma vardır. Eğrilerin karakterizasyonunda kullanılan en önemli kavramlar Frenet formülleri ve eğrinin eğrilikleridir. Bir küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklem ilk olarak E. Kreyzig [12] tarafından $\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\tau(s)}\frac{d\rho}{ds}\right\}+\rho(s)\,\tau(s)=0$ olarak verilmiştir. Daha sonra, Breuer ve D. Gottlieb 1971'de bir küresel eğriyi karakterize eden bu diferansiyel denklemin çözülebilirliği üzerine çalışmalar yapmış ve bir çözüm olarak $\rho(s)=a\cos\int_0^s \tau(\delta)\,d\delta+b\sin\int_0^s \tau(\delta)\,d\delta$ elde etmişlerdir [5]. Küresel eğriler ile ilgili ilk karakterizasyon Y. C. Wong tarafından 1963 yılında verilmiştir [17]. Y. C. Wong [5] ve S. Breuer, D. Gottlieb [16, 17], bir küresel eğrinin eğrilik ve burulmayı içeren bir denklem ile karakterize edilebileceğini göstermişlerdir. V. Dannon [7] ise E^4 de bir küresel eğrinin Frenet-benzeri denklemler ile verilebileceğini göstererek, E^4 de verilen bir küresel eğrinin bir integral karakterizasyonunun bir E^3 Frenet eğrisi için bir integral karakterizasyonunu bulmaya denk olduğunu göstermiştir.

E. Mehlum ve J. Wimp 1985'te herhangi bir küresel eğrinin konum vektörünün 3. dereceden bir lineer diferansiyel denklemin çözümü olarak verilebileceğini göstermişlerdir [13].

2003'te H. Kocayiğit, N. Yaz, Ç. Camcı, H. H. Hacısalihoğlu, n-boyutlu Öklid uzayında ($n\geq 3$ n≥3) bir küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklemin, eğrinin n. eğrilik fonksiyonunu, eğrilikleri ve diğer eğrilik fonksiyonları cinsinden ifade etmek amacıyla çözülebilirliğini göstermişlerdir [10].

Ç. Camcı, Y. Yaylı, H. H. Hacısalihoğlu, regüler bir eğrinin küresel karakterizasyonunu 3-boyutlu Sasakian uzayında vermişlerdir. Ayrıca bu bahsedilen karakterizasyonu ifade eden diferansiyel denklem 2007'de çözülmüştür [6].

Küresel eğriler Lorentziyen uzaylar, Dual uzaylar ve Dual Lorentziyen uzaylarda gibi bir çok farklı uzaylarda bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. [1, 2, 3, 11].

Bu tezde çalışmasında, P. B. Okullu ve H. Kocayiğit [14] tarafından verilen Bishop çatısını göre herhangi bir küresel eğrinin konum vektörünün 3. dereceden bir lineer diferansiyel denklemin çözümü olarak verilebileceği sonucu ele alınarak incelenmiştir.

2. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Öklid 3- uzayı, Öklid iç çarpımı, birim hızlı eğri, eğrilik fonksiyonu, Frenet vektörleri ve çatısı, Bishop çatısı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. E^3 Öklid 3- Uzayında Frenet Çatısına Göre Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Boş olmayan bir cümle A ve bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki üç önermeye uyan bir $f: A\times A \to V$ fonksiyonu varsa A ya V ile eşlenen bir Afin uzay denir [9].

i. $\forall P,Q\in A$ nokta çifti için $f(P,Q)=\alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha \in V$ vektörü vardır.

ii. A da belli bir nokta seçildiğinde A daki geri kalan her noktaya V deki bir vektör karşılık gelir.

iii. $\forall P,Q,R\in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$.

$F=\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olarak alınması halinde afin uzayı reeldir.

Tanım 2.1.2 (Öklid Uzayı): $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,x_3,......,x_n): x_i\in\mathbb{R}\}$ vektör uzayında iki vektör $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,....,x_n)$ ve $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3,.....,y_n)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$(\vec{x},\vec{y}) \to \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{2.1.1}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir.

Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı $\mathbb{R}^n$ afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [12, 15].

Tanım 2.1.3 (Vektörel Çarpım): $\vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1)$ ortonormal baz vektörleri olsun. Bu durumda

$$\langle \vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle = \langle \vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle = \langle \vec{e}_3,\vec{e}_3\rangle = 1,$$

ve

$$\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle = \langle \vec{e}_2,\vec{e}_3\rangle = \langle \vec{e}_1,\vec{e}_3\rangle = 0,$$

ya da kısaca,

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3,\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$$

olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin **vektörel çarpım;**

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \qquad (2.1.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörel çarpımı aşağıdaki gibi bir sembolik determinant ile gösterilebilir:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Eğer $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri lineer bağımsız, aksi durumda lineer bağımlıdır [9].

Tanım 2.1.4: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı üzerinde, $x \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\ \| &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned} \qquad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^3$ bir normdur [9].

Tanım 2.1.5: *3*-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen Öklid uzayı E^3 olsun.

$$\begin{aligned} &\mathrm{d} : E^3 \times E^3 \to \mathbb{R} \\ &\mathrm{d}(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2},\ \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \end{aligned} \qquad (2.1.5)$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^3 Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $x, y \in E^3$ için $\mathrm{d}(x, y)$ değerine de *x* ile *y* noktaları arasındaki uzaklık denir [9].

Tanım 2.1.6: $I, \mathbb{R}$ reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere, diferansiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} &\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3, \\ &s \to \gamma(s) = (\gamma_1(s),\ \gamma_2(s),\ \gamma_3(s)) \end{aligned}$$

fonksiyonuna E^3, $3-$boyutlu Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir parametrik eğri denir. Bu durumda $\gamma(s) \subset E^3$ alt kümesine γ eğrisinin grafiği veya izi denir.

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralığına, γ eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\gamma(s)$ eğrisinin parametresi denir [9]. Buradaki γ_i , $1 \le i \le 3$, ler $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$, $t \to \gamma_i(t)$, $1 \le i \le 3$, şeklinde fonksiyonlar olup, γ nın koordinat fonksiyonları (bileşenleri) olarak isimlendirilirler.

Tanım 2.1.7: $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$, $s \to \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ bir eğri olsun.

γ_i , $i = 1,2,3$, koordinat fonksiyonlarının t noktasındaki birinci türevleri $\gamma'_i(t)$ ler olmak üzere,

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) \in \mathbb{R}^3$$

vektörüne γ eğrisinin t noktasındaki teğet vektörü veya hız vektörü denir.

Ayrıca,

$$\|\gamma'\| : \mathrm{I} \to R,\ s \to \|\gamma'\|(s) = \|\gamma'(s)\| = \sqrt{(\gamma'_1(s))^2 + (\gamma'_2(s))^2 + (\gamma'_3(s))^2} \tag{2.1.4}$$

şeklinde tanımlı $\|\gamma'\|$ fonksiyonuna γ eğrisinin hız fonksiyonu ve $\|\gamma'(s)\|$ reel sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise, γ eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in \mathrm{I}$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir [9].

Tanım 2.1.8: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{T}(s) = \gamma'(s) \tag{2.1.6}$$

eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir $[15]$.

Tanım 2.1.9: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : \mathrm{I} \to R,\quad s \to \kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|, \tag{2.1.7}$$

fonksiyonuna, γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir $[15]$.

Eğrilik, teğet doğrudan sapma miktarını ölçer. Bu anlamda eğrilik değeri küçüldükçe eğri doğruya yaklaşır, büyüdükçe kapalı bir görünüme sahip olur.

$\|\vec{T}(s)\| = 1$ olduğundan $\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = 1$ dir. Bu eşitliğinin her iki tarafın türevi alınır ve düzenleme yapılırsa $\langle \vec{T}'(s), \vec{T}(s) \rangle = 0$ elde edilir. Yani $\vec{T}'(s)$ vektörü $\vec{T}(s)$

vektörüne diktir. Şimdi $\vec{T}'(s)$ vektörünü normuna bölersek, $\vec{T}(s)$ vektörüne dik yeni bir birim vektör elde ederiz.

Tanım 2.1.10: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için,

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\vec{T}'(s), \tag{2.1.8}$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **asli normali** denir [15].

Tanım 2.1.11: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için,

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s), \tag{2.1.9}$$

eşitliği ile belirli $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki binormali denir [15].

Tanım 2.1.12 (Öklid 3-uzayında Frenet çatısı): $\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s)$ vektörlerine, $\gamma : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesine de γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir $[15]$.

Tanım 2.1.13: $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ bir eğri ve $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ Frenet vektör alan sistemi verilsin. $s \in I$ için $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlemi** veya **dokunum düzlemi,** $\{\vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** ve $\{\vec{T}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme ise γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlemi** veya **doğrultman düzlemi** denir [15].

Tanım 2.1.14: Bir $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere,

$$\tau = \mathrm{I} \to \mathbb{R},$$

$$s \to \tau(s) = -\left\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \right\rangle, \tag{2.1.11}$$

fonksiyonuna γ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **burulması** denir [15].

Burulma, eğrinin oskülatör düzlemden sapma miktarını ölçer.

Teorem 2.1.1 (Öklid 3-uzayında Frenet türev formülleri): Birim hızlı bir $\gamma : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ ise

$$\begin{aligned} \vec{T}'(s) &= \kappa \vec{N}(s), \\ \vec{N}'(s) &= -\kappa \vec{T}(s) + \tau \vec{B}(s), \\ \vec{B}' &= -\tau \vec{N}(s), \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

şeklindedir [15].

Tanım 2.1.15: $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ bir eğri ve $\alpha(s_0)$ bu eğri üzerinde bir nokta olsun. Bir $\gamma : J \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için $t_0 \in J$ olmak üzere eğer,

$$\alpha(s_0) = \gamma(t_0),$$

oluyorsa γ eğrisi α eğrisine 0' **ıncı basamaktan değiyor** denir.

Eğer

$$\gamma(t_0) = \alpha(s_0),\ \gamma'(t_0) = \alpha'(s_0)$$

oluyorsa γ eğrisi α eğrisine 1' **inci basamaktan değiyor** denir.

Eğer

$$\alpha(t_0) = \gamma(s_0),\quad \alpha'(t_0) = \gamma'(s_0),\quad \alpha''(t_0) = \gamma''(s_0)$$

oluyorsa γ eğrisi α eğrisine 2' **inci basamaktan değiyor** denir. Bu şekilde devam edilirse, eğer

$$\alpha(t_0) = \gamma(s_0),\quad \alpha'(t_0) = \gamma'(s_0),\quad \ldots,\quad \alpha^{(k)}(t_0) = \gamma^{(k)}(s_0)$$

oluyorsa γ eğrisi α eğrisine k' **nıncı basamaktan değiyor** denir [15].

Tanım 2.1.16 (Eğrilik yarıçapı fonksiyonu): $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\dfrac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik yarıçapı fonksiyonu** denir ve ρ ile gösterilir. $t \in \mathrm{I}$ için $\rho(t) = \dfrac{1}{\kappa(t)}$ sayısına, $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **eğrilik yarıçapı** denir [15].

Teorem 2.1.2: $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ biri hızlı bir eğri olsun. $s_0 \in \mathrm{I}$ ve $\kappa(s_0) > 0$ olmak üzere,

$$\gamma(0) = \alpha(s_0),\ \gamma'(0) = \alpha'(s_0),\ \gamma''(0) = \alpha''(s_0)$$

olacak biçimde α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 2'inci basamaktan değen bir ve yalnız bir $\gamma : J \to E^3$ **birim hızlı çemberi** vardır. Bu çember

$$\rho_0 = \rho(s_0),\ \mathrm{N}_0 = \mathrm{N}(s_0),\ \mathrm{T}_0 = \mathrm{T}(s_0)$$

olmak üzere,

$$\gamma(\theta) = \alpha(s_0) + \rho_0\,\mathrm{N}_0 + \rho_0 \cos\left(\frac{\theta}{\rho_0}\right)(-\mathrm{N}_0) + \rho_0 \sin\left(\frac{\theta}{\rho_0}\right)\mathrm{T}_0,$$

denklemiyle verilir. Bu çemberin merkezi $\alpha(s_0) + \rho_0\,\mathrm{N}_0$ noktasıdır [15].

Tanım 2.1.17 (Eğrilik çemberi): Bir $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ birim hızlı eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında ikinci basamaktan değen γ çemberine, α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki **eğrilik çemberi** denir. $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik çemberinin merkezine, $\alpha(s_0)$ noktasına ilişkin **eğrilik merkezi** denir.

$\alpha(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezinden geçen ve B_0 vektörüne paralel olan doğruya $\alpha(s_0)$ noktasına ilişkin **eğrilik ekseni** denir $[15]$.

Tanım 2.1.18: E^3 uzayında birim hızlı $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisini göz önüne alalım. E^3 uzayındaki dik koordinat sistemi (y_1, y_2, y_3) olsun. Bu koordinat sistemini kısaca y ile gösterelim. $\langle y-d, y-d \rangle = r^2$ denklemiyle verilen küreye K diyelim. Burada d kürenin merkezi, r kürenin yarıçapıdır. $\alpha(s_0)$ noktasının K küresine göre kuvveti $f(s)$ olsun. Böylece,

$$f(s) = \|\alpha(s) - d\|^2 - r^2$$

eşitliğiyle belirlenmiş bir $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanmış olur.

$$\|\alpha(s) - d\|^2 = \langle \alpha(s) - d, \alpha(s) - d \rangle$$

olduğundan,

$$f(s) = \langle \alpha(s) - d, \alpha(s) - d \rangle - r^2$$

olur $[15]$.

Tanım 2.1.19: $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $f(s) = \langle \alpha(s) - d, \alpha(s) - d \rangle - r^2$, olsun. $s_0 \in \mathrm{I}$ olmak üzere $f(s_0) = 0$ ise K küresi, α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 0' **ıncı basamaktan değiyor,** denir.

Eğer $f(s_0)=0,\ f'(s_0)=0$ ise K küresi, α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 1**'inci basamaktan değiyor** denir.

Eğer $f(s_0)=0,\ f'(s_0)=0,\ f''(s_0)=0$ ise K küresi, α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 2' **inci basamaktan değiyor** denir.

Eğer $f(s_0)=0,\ f'(s_0)=0,\ f''(s_0)=0,\ f'''(s_0)=0$ ise K küresi, α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 3' **üncü basamaktan değiyor** denir $[15]$.

Teorem 2.1.3: $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_0 \in \mathrm{I}$ olsun. α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 2'inci basamaktan değen kürelerin merkezlerinin geometrik yeri, $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$d(\mu)=\alpha(s_0)+\rho_0 N_0+\mu B_0$$

eşitliğiyle belirli $d(\mu)$ noktalarının belirlediği doğrudur.

Burada

$$\rho_0=\rho(s_0),\ N_0=N(s_0),\ B_0=B(s_0)$$

anlamındadır [15].

Teorem 2.1.4: $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_0 \in \mathrm{I}$ olsun. α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 3'üncü basamaktan değen bir ve yalnız bir küre vardır ve bu kürenin merkezi

$$d_0=\alpha(s_0)+\rho_0 N_0+\rho_0'\sigma_0 B_0$$

eşitliğiyle belirli d_0 noktasıdır. Burada

$$\sigma=\frac{1}{\tau},\ \sigma_0=\sigma(s_0)\ \text{ve}\ \rho_0'=(\rho')_0=\rho'(s_0)$$

anlamındadır [15].

Tanım 2.1.20 (Eğrilik küresi): α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında üçüncü basamaktan değen küreye, α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki **eğrilik küresi (dokunma küresi** veya **oskülatör küre)** denir. $\sigma=\dfrac{1}{\tau}$ eşitliğiyle tanımlı σ fonksiyonuna eğrinin **burulma yarıçapı** denir $[15]$.

2.2. E^3 Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1 (Öklid 3-uzayında Bishop çatısı): Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır. Bir eğrinin bazı noktalarında eğrilik sıfırlanabilir yani eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda alternatif bir çatı olan Bishop çatısı oluşturulabilir.

Bir eğrinin Frenet çatısında bulunan $\vec{T}(s)$ teğet vektörünü değiştirmeden diğer asli normal ve binormal vektörleri belli bir açı ile döndürülerek Bishop çatısı veye paralel öteleme çatısı adı verilen alternatif çatı oluşturulur. Buna göre Bishop çatısında $\vec{T}(s)$ vektörü aynen alınır ve bu vektöre dik bir düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ bazı seçilir. Bu iki vektörün türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlıdır. Böylece oluşturulan $\{\vec{T}(s), \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ Bishop çatısı dik bir çatı olup türev formülleri,

$$\begin{aligned} \vec{T}'(s) &= k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s) \\ \vec{N}_1'(s) &= -k_1\vec{T}(s) \\ \vec{N}_2'(s) &= -k_2\vec{T}(s) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu formüllerin matris ifadesi

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{N}_1'(S) \\ \vec{N}_2'(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}_1(s) \\ \vec{N}_2(s) \end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

ile verilir [3]. Burada k_1, k_2 Bishop çatısına göre eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleridir.

Bir α eğrisinin eğrilik ve burulması κ ve τ olmak üzere eğrilikler arasında

$$\kappa(s) = \sqrt{\|\alpha''(s)\|} = \sqrt{\|\vec{T}'(s)\|} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \tag{2.2.2}$$

$$k_1(s) = \kappa(s)\cos\theta,\ k_2(s) = \kappa(s)\sin\theta, \tag{2.2.3}$$

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right),\ k_1 \neq 0, \tag{2.2.4}$$

$$\tau = \theta' = \frac{k_1k_2' - k_1'k_2}{k_1^2 + k_2^2}. \tag{2.2.5}$$

bağıntıları vardır [4].

Son olarak E^3 Öklid uzayında Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki geçişi

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

matrisleri ile verebiliriz.

3. E^3 ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER

3.1. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğrilere Giriş

Bu bölümde Öklid 3-uzayında küresel eğri tanımı, Öklid 3-uzayında bir eğrinin küresel olma şartı ve oskülatör küre ile ilgili teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.1: Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi bir $S^2 \subset E^3$ birim küresi üzerinde yatıyorsa bu eğriye bir küresel eğri denir. Bir eğri bir küre üzerinde yatıyorsa bu eğrinin her noktasındaki normal düzlemi kürenin merkezinden geçer [9, 15].

Teorem 3.1.1: S_0^2 , O merkezli bir küre ve $M \subset S_0^2$ bir küresel eğri olmak üzere, M eğrisinin bir koordinat komşuluğu (I,α) ve s $\in$I yay parametresi için;

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \vec{T}(s) \rangle &= -m_1(s) \\ \langle \alpha(s), \vec{N}(s) \rangle &= -m_2(s) \\ \langle \alpha(s), \vec{B}(s) \rangle &= -m_3(s) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

şeklindedir. Burada $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısıdır [9].

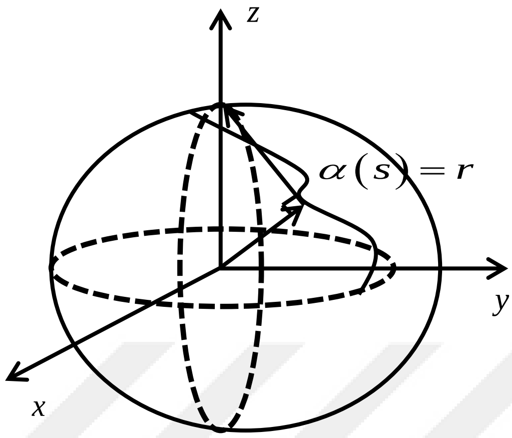
İspat: $M \subset S_0^2$ küresel eğrisi alalım. M için bir koordinat komşuluğu (I,α) ve s $\in$I yay parametresi olmak üzere, $\forall\ s \in I$ için $\alpha(s) \in S_0^2$ olur. Bu durumda S_0^2 küresinin yarıçapı r olmak üzere,

$$\left\| \overrightarrow{O\alpha}(s) \right\| = \left\| \vec{\alpha}(s) \right\| = r,$$

$$\sqrt{\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle} = r,$$

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2 \tag{3.1.2}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.1.1

(3.1.2) eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}(s) \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{T}(s), \vec{\alpha}(s) \rangle = 0. \tag{3.1.3}$$

olur. Ayrıca M küresel eğrisi üzerinde bir $\alpha(s)$ noktası alınırsa küresel eğrinin konum vektörü,

$$\overrightarrow{\alpha(s)O} = m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}(s) + m_3(s)\vec{B}(s),$$

$$-\vec{\alpha}(s) = m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}(s) + m_3(s)\vec{B}(s),$$

$$\vec{\alpha}(s) = -m_1(s)\vec{T}(s) - m_2(s)\vec{N}(s) - m_3(s)\vec{B}(s), \tag{3.1.4}$$

şeklindedir. Bu eşitliği herhangi bir A merkezli küre için,

$$\overrightarrow{\alpha(s)A} = m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}(s) + m_3(s)\vec{B}(s), \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılabiliriz.

(3.1.4) denkleminin her iki tarafına $\vec{T}(s)$ ile iç çarpım uygulanırsa,

$$\langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle = -m_1(s)\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle - m_2(s)\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle$$
$$- m_3(s)\langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle,$$

$$\langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle = -m_1(s), \tag{3.1.6}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (3.1.4) denkleminin her iki tarafına sırasıyla $\vec{N}(s)$ ve $\vec{B}(s)$ vektörleri ile iç çarpım uygulanırsa,

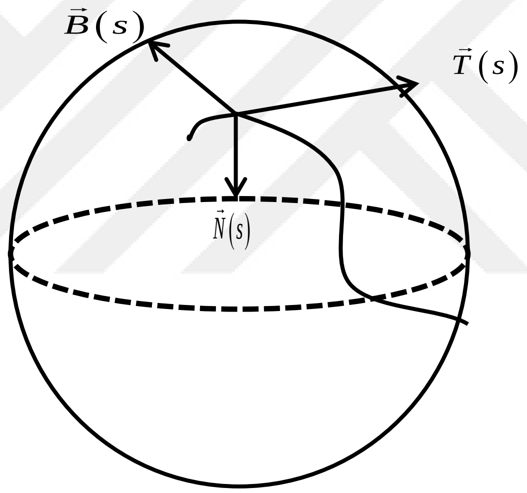
$$\begin{aligned}\left\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \right\rangle = &-m_1(s)\left\langle \vec{N}(s), \vec{T}(s) \right\rangle - m_2(s)\left\langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \right\rangle \\ &- m_3(s)\left\langle \vec{N}(s), \vec{B}(s) \right\rangle\end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \right\rangle = -m_2(s) \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \right\rangle = &-m_1(s)\left\langle \vec{B}(s), \vec{T}(s) \right\rangle - m_2(s)\left\langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \right\rangle \\ &- m_3(s)\left\langle \vec{B}(s), \vec{B}(s) \right\rangle\end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \right\rangle = -m_3(s) \tag{3.1.8}$$

eşitlikleri bulunup, ispat tamamlanmış olur.■



Şekil 3. 2

Teorem 3.1.2: O merkezli bir küresel eğrinin konum vektörü,

$$\vec{\alpha}(s) = -\frac{1}{k_1(s)}\vec{N}(s) - \left(\frac{1}{k_1(s)}\right)' \frac{1}{k_2(s)}\vec{B}(s) \tag{3.1.9}$$

şeklindedir [9].

İspat: $\alpha : I \to E^3$ bir küresel eğri olsun ve $s \in I$ yay parametresi olsun. Amacımız (3.1.4) denklemindeki $m_1(s)$, $m_2(s)$, $m_3(s)$ değerlerinin eşitliklerini bulmaktır.

Daha önce elde ettiğimiz (3.1.3) denklemindeki $\left\langle \vec{T}(s), \vec{\alpha}(s) \right\rangle = 0$ ve (3.1.6) denklemindeki $\left\langle \alpha(s), \vec{T}(s) \right\rangle = -m_1(s)$, eşitliklerinden

$$-m_1 = \left\langle \vec{T}(s), \vec{\alpha}(s) \right\rangle = 0, \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (3.1.3) eşitliğinin her iki tarafının s ' ye türevi alındığında,

$$\left\langle \vec{T}'(s), \alpha(s) \right\rangle + \left\langle \vec{T}(s), \alpha'(s) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_1(s)\vec{N}(s), \alpha(s) \right\rangle + 1 = 0$$

$$k_1(s)\left\langle \vec{N}(s), \alpha(s) \right\rangle = -1$$

$$\left\langle \vec{N}(s), \alpha(s) \right\rangle = \frac{-1}{k_1(s)}, \tag{3.1.11}$$

$$m_2(s) = -\left\langle \alpha(s), \vec{N}(s) \right\rangle = \frac{1}{k_1(s)}, \tag{3.1.12}$$

bulunur. (3.1.11) denkleminin her iki tarafının s ' ye göre türevi alınırsa;

$$\left\langle \vec{N}'(s), \alpha(s) \right\rangle + \left\langle \vec{N}(s), \alpha'(s) \right\rangle = \left(\frac{-1}{k_1(s)} \right)'$$

$$\left\langle -k_1(s)\vec{T}(s) + k_2(s)\vec{B}(s), \alpha(s) \right\rangle = \left(\frac{-1}{k_1(s)} \right)'$$

$$-k_1(s)\left\langle \vec{T}(s), \alpha(s) \right\rangle + k_2(s)\left\langle \vec{B}(s), \alpha(s) \right\rangle = \left(\frac{-1}{k_1(s)} \right)'$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemde (3.1.3) ve (3.1.8) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$m_3(s) = \left(\frac{1}{k_1(s)} \right)' \frac{1}{k_2(s)}, \tag{3.1.13}$$

bulunur. Bulunan $m_1(s)$, $m_2(s)$, $m_3(s)$ değerleri (3.1.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\vec{\alpha}(s) = -\frac{1}{k_1(s)}\vec{N}(s) - \left(\frac{1}{k_1(s)} \right)' \frac{1}{k_2(s)}\vec{B}(s)$$

denklemi elde edilir, böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1.3: O merkezli bir küre $S_0^2 \subset E^3$ olsun. Bir $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(I) \subset S_0^2$ küresel eğrisinin her noktasındaki oskülatör küresi S_0^2 dir [9].

Teorem 3.1.4: $\alpha : I \to E^3$ bir eğri olsun. $m_3(s) \neq 0, k_2(s) \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürelerin yarıçaplarının sabit olması için gerek ve yeter şart oskülatör kürelerin merkezlerinin aynı olmasıdır [9].

Teorem 3.1.5: $\alpha : I \to E^3$ bir eğri ve $\forall s \in I$ için $k_2(s) \neq 0,\ m_3(s) \neq 0$ olsun. α bir küresel eğridir ancak ve ancak $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezleri aynıdır [9].

İspat: Eğer α eğrisi bir küresel eğri ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör küresi α eğrisinin üzerinde bulunduğu küre olacağından ispat tamamdır.

Tersine, $s \in \mathrm{I}$ noktasındaki oskülatör kürelerin merkezleri sabit bir b noktası ise bu takdirde Teorem 3.1.4 gereğince oskülatör kürelerin yarıçapları da aynı bir r sabitine eşittir. Dolayısıyla her $\alpha(s)$ noktası için $\alpha(s)$ noktasının b noktasına olan uzaklığı r dir. Bu ise α eğrisinin bir küresel eğri olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3.2. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklemler ve İntegral Karakterizasyonları

Bu bölümde, E^3 Öklid uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklemler ve İntegral Karakterizasyonları ile ilgili temel teoremler verilmiştir.

Teorem 3.2.1 (Küresel eğrileri karakterize eden teorem): $\alpha : I \to E^3$ bir eğri olsun. Bu durumda, $\forall s \in \mathrm{I}$ yay parametresi ve $k_2(s) \neq 0,\ m_3(s) \neq 0$ olmak üzere, α eğrisinin küresel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $m_3'(s) + m_2(s)k_2(s) = 0$ olmasıdır [9].

İspat: A merkezli $\alpha : I \to E^3$ küresel eğrisi verilsin. Bu durumda $m_3'(s) + m_2(s)k_2(s) = 0$ olduğunu gösterelim.

$\alpha(I)$, A merkezli bir küresel eğri ise α eğrisinin konum vektörü;

$$\overrightarrow{A(s)\alpha(s)} = \left(\frac{1}{k_1(s)}\right)\vec{N}(s) + \left(\frac{1}{k_1(s)}\right)'\left(\frac{1}{k_2(s)}\right)\vec{B}(s)$$

şeklindedir ve Teorem 3.1.5 gereğince $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezleri aynıdır. Ayrıca Teorem 3.1.4'e dayanarak oskülatör kürenin yarıçaplarının sabit olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan,

$$\overrightarrow{\alpha(s)A(s)} = (m_1, m_2, m_3)$$

ve

$$\left\|\overrightarrow{\alpha(s)A(s)}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\alpha(s)A(s)}, \overrightarrow{\alpha(s)A(s)} \right\rangle} = r$$

eşitliklerinden,

$$r^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^3$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu denklemin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$m_2(s)m_2'(s) + m_3(s)m_3'(s) = 0$$

elde edilir. Burada $m_3(s) = m_2'(s)\left(\frac{1}{k_2(s)}\right)$ eşitliği yerine yazılırsa;

$$m_2(s)m_2'(s) + m_2'(s)\frac{1}{k_2(s)}m_3'(s) = 0$$

$$m_2'(s)\left(m_2(s) + \frac{1}{k_2(s)}m_3'(s)\right) = 0$$

$$\left(m_2(s) + \frac{1}{k_2(s)}m_3'(s)\right) = 0$$

$$k_2(s)m_2(s) + m_3'(s) = 0$$

eşitliği bulunur. Şimdi aksine $m_2(s)k_2(s) + m_3'(s) = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.4 gereği oskülatör kürenin yarıçapları sabit olduğundan $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha(s)$ oskülatör kürenin merkezleri aynıdır. Teorem 3.1.5 gereği de α eğrisi küreseldir.■

Teorem 3.2.2: E^3 de yay parametresiyle verilmiş bir eğri α (s) olsun. $\alpha(s)$ küreseldir ancak ve ancak k_1 >0 ve

$$f\,k_2 = \left(\frac{1}{k_1}\right)', \quad f' + \frac{k_2}{k_1} = 0$$

olacak şekilde bir $f : \alpha \subset E^3 \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyon vardır [17, 9].

İspat: $\alpha(s)$ küresel eğri olsun. Bu durumda;

$$A(s)=\alpha(s)+\frac{1}{k_1}\vec{N}+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\vec{B}$$

olur ve bu eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında

$$\vec{T}+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{N}+\frac{1}{k_1}\vec{N}'+\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\right]'\vec{B}+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\vec{B}'=0$$

$$\vec{T}+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\vec{N}+\frac{1}{k_1}(-k_1\vec{T}+k_2\vec{B})+\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\right]'\vec{B}+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}(-k_2\vec{N})=0$$

$$\left\{\frac{k_2}{k_1}+\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\right]'\right\}\vec{B}=0$$

$$\frac{k_2}{k_1}+\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\right]'=0$$

bulunur. $f=\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}$ olduğunda

$$k_2 f=\left(\frac{1}{k_1}\right)' \text{ ve } f'+\frac{k_2}{k_1}=0$$

elde edilir. Burada $f:\alpha\subset E^3\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyondur.■

Teorem 3.2.3: E^3 deki $\alpha(s)$ eğrisinin küresel olması için gerek ve yeter şart, A ve B sabitler olmak üzere;

$$k_1\left[A\cos\left(\int_0^s k_2 ds\right)+B\sin\left(\int_0^s k_2 ds\right)\right]=1$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [17, 9].

İspat: $\alpha(s)$ küresel eğri olsun ve bu kürenin yarıçapı $r=a$ alalım. Daha önce elde ettiğimiz $m_2^2+m_3^3=r^2$ eşitliğinden,

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^2+\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'\frac{1}{k_2}\right]^2=a^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $y=\frac{1}{k_1}$, olarak alınırsa

$$(\mathrm{y})^2 + (\mathrm{y}')^2 \left(\frac{1}{k_2} \right)^2 = a^2$$

$$(\mathrm{y}')^2 = k_2^2 \left(a^2 - y^2 \right)$$

$$\mathrm{y}' = \pm k_2 \sqrt{a^2 - y^2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{dy}{ds} = k_2 \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$\frac{dy}{ds} = -k_2 \sqrt{a^2 - y^2},$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradaki denklemler sırayla çözüldüğünde

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = k_2 ds$$

olur ve ayrıca integral formüllerinden,

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \arcsin \frac{u}{a} + c,$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = -\arccos \frac{u}{a} + c$$

olduğu bilindiği için,

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = k_2 ds$$

$$\arcsin \frac{y}{a} = \int_0^s k_2 ds$$

ve

$$\frac{y_1}{a} = \sin\left(\int_0^s k_2 ds \right)$$

$$y_1 = a \sin\left(\int_0^s k_2 ds \right)$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\frac{dy_2}{\sqrt{a^2-y^2}}=-k_2ds$$
$$-\arccos\frac{y_2}{a}=-\int_0^s k_2ds$$
$$\frac{y_2}{a}=\cos\left(\int_0^s k_2ds\right)$$
$$y_2=a\cos\left(\int_0^s k_2ds\right)$$

elde edilir. $y=\frac{1}{k_1}$ denkleminin çözümü;

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$
$$y=c_1a\sin\left(\int_0^s k_2ds\right)+c_2a\cos\left(\int_0^s k_2ds\right)$$

$c_1a=B,\ c_2a=A,$ olarak alındığında

$$y=B\sin\left(\int_0^s k_2ds\right)+A\cos\left(\int_0^s k_2ds\right)$$
$$1=k_1\left\{A\cos\left(\int_0^s k_2ds\right)+B\sin\left(\int_0^s k_2ds\right)\right\}$$

elde edilir.■

3.3. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğriler İçin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu bölümde, küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklem ve küre yarıçapını veren formül ile ilgili teoremler verilmiştir.

Teorem 3.3.1: $\alpha:I\subset\mathbb{R}\to E^3$ küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklem,

$$\lambda_1\alpha'''(s)+\lambda_2\alpha''(s)+\lambda_3\alpha'(s)+\lambda_4\alpha(s)=0 \tag{3.3.1}$$

şeklindedir ve buradaki $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ ve λ_4 değerleri;

$$\lambda_1=\kappa\kappa',$$
$$\lambda_2=-\left(\kappa^2\tau^2+(\kappa')^2\right),$$
$$\lambda_3=\kappa^3\kappa',$$
$$\lambda_4=-\kappa^4\tau^2$$

eşitlikleri ile verilir [13].

İspat: α(s) yay parametreli bir eğri olsun.

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \|\alpha(s)\| . \|\alpha(s)\| . \cos 0 = r^2$$
$$\langle \alpha, \alpha \rangle = r^2$$

ve burada r kürenin yarıçapıdır. $\alpha(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\vec{\alpha}(s) = c_1 \vec{T}(s) + c_2(s)\vec{N}(s) + c_3(s)\vec{B}(s), \tag{3.3.2}$$

olsun. $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2$ eşitliğinin her iki tarafının s 'ye göre türevi alındığında

$$\langle \vec{T}(s), \alpha(s) \rangle = 0, \tag{3.3.3}$$

olur. (3.3.3) eşitliğinin iki tarafının s 'ye göre türevi alındığında,

$$\langle \vec{T}'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \vec{T}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$
$$\left\langle \kappa \vec{N}(s), \alpha(s) \right\rangle + \left\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \right\rangle = 0$$
$$\kappa \left\langle \vec{N}(s), \alpha(s) \right\rangle + 1 = 0$$
$$\langle \vec{N}(s), \alpha(s) \rangle = \frac{-1}{\kappa} \tag{3.3.4}$$

olur. (3.3.4) eşitliğinin iki tarafının s 'ye göre tekrar türevi alındığında

$$\langle \vec{N}'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \vec{N}(s), \alpha'(s) \rangle = -\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$
$$\langle -\kappa \vec{T}(s) + \tau \vec{B}(s), \alpha(s) \rangle + \langle \vec{N}(s), \vec{T}(s) \rangle = \frac{\kappa'}{\kappa^2}$$
$$-\kappa \langle \vec{T}(s), \alpha(s) \rangle + \tau \langle \vec{B}(s), \alpha(s) \rangle + \langle \vec{N}(s), \vec{T}(s) \rangle = \frac{\kappa'}{\kappa^2}$$

bulunur. Bulduğumuz bu denklemde $\langle \vec{T}(s), \alpha(s) \rangle = 0$ ve $\langle \vec{N}(s), \vec{T}(s) \rangle = 0$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\langle \vec{B}(s), \alpha(s) \rangle = \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Şimdi de (3.3.2) denkleminin her iki tarafının s 'ye göre türevi alınarak Frenet türev formülleri uygulanırsa;

$$\alpha'(s) = c_1' \vec{T}(s) + c_1(\kappa \vec{N}(s)) + c_2' \vec{N}(s) + c_2(-\kappa \vec{T}(s)$$
$$+ \tau \vec{B}(s)) + c_3' \vec{B}(s) + c_3(-\tau \vec{N}(s))$$
$$\vec{T}(s) = \left(c_1' - \kappa c_2\right) \vec{T}(s) + \left(\kappa c_1 + c_2' - \tau c_3\right) \vec{N}(s)$$
$$+ \left(\tau c_2 + c_3'\right) \vec{B}(s)$$

ve buradan

$$1 = c_1' - \kappa c_2, \quad 0 = \kappa c_1 + c_2' - \tau c_3$$

olduğundan

$$0 = \tau c_2 + c_3', \tag{3.3.6}$$

elde edilir. (3.3.2) ve (3.3.3) eşitliklerinden;

$$\langle \vec{T}(s), \lambda_1(s)\vec{T}(s) + \lambda_2(s)\vec{N}(s) + \lambda_3(s)\vec{B}(s)\rangle = 0,$$

$$c_1(s)\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s)\rangle + c_2(s)\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s)\rangle + c_3(s)\langle \vec{T}(s), \vec{B}(s)\rangle = 0$$
$$c_1(s) = 0$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik (3.3.6) denkleminde kullanılırsa;

$$1 = c_1' - \kappa c_2$$
$$1 = 0 - \kappa c_2(s)$$
$$c_2(s) = \frac{-1}{\kappa} \tag{3.3.7}$$
$$0 = c_2'(s) - \tau c_3(s)$$
$$c_3(s) = \frac{c_2'(s)}{\tau} = \frac{-1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \tag{3.3.8}$$

ve

$$0 = \tau c_2 + c_3'$$
$$0 = \frac{-\tau}{\kappa} - \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'$$

olur. Sonuç olarak, bir eğrinin küresel olma şartı;

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0 \tag{3.3.9}$$

veya

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = 0 \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Şimdi $\alpha'(s) = \vec{T}(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s 'ye göre türevi alınarak Frenet türev formülleri uygulanırsa;

$$\alpha''(s)=\vec{T}'(s)=\kappa\vec{N}(s) \tag{3.3.11}$$

$$\vec{N}(s)=\frac{1}{\kappa}\alpha''(s) \tag{3.3.12}$$

bulunur. (3.3.11) eşitliğinin her iki tarafının s ’ye göre tekrar türevi alınarak Frenet türev formülleri uygulanırsa;

$$\alpha'''(s)=\kappa'\vec{N}(s)+\kappa\left(-\kappa\vec{T}(s)+\tau\vec{B}(s)\right)$$
$$\alpha'''(s)=\kappa'\vec{N}(s)-\kappa^2\vec{T}(s)+\kappa\tau\vec{B}(s)$$
$$\alpha'''(s)=\frac{\kappa'}{\kappa}\alpha''(s)-\kappa^2\alpha'(s)+\kappa\tau\vec{B}(s)$$
$$\vec{B}(s)=\frac{1}{\kappa\tau}\alpha'''(s)-\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\alpha''(s)+\frac{\kappa}{\tau}\alpha'(s)$$

olur. $\alpha(s)=c_1(s)\vec{T}(s)+c_2(s)\vec{N}(s)+c_3(s)\vec{B}(s)$ eşitliğinde bulunan tüm değerler yerine yazılırsa;

$$\alpha(s)=\frac{-1}{\kappa}\vec{N}(s)+\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\vec{B}(s)$$
$$\alpha(s)=\frac{-1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}\alpha''(s)\right)+\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\left(\frac{1}{\kappa\tau}\alpha'''(s)-\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\alpha''(s)+\frac{\kappa}{\tau}\alpha'(s)\right)$$

$$\alpha(s)=\frac{-1}{\kappa^2}\alpha''(s)+\frac{\kappa'}{\kappa^3\tau^2}\alpha'''(s)-\frac{(\kappa')^2}{\kappa^4\tau^2}\alpha''(s)+\frac{\kappa'\kappa}{\kappa^2\tau^2}\alpha'(s) \tag{3.3.14}$$

elde edilir ve (3.3.14) eşitliğinin her iki tarafı $\kappa^4\tau^2$ ile çarpıldığında

$$\kappa^4\tau^2\alpha(s)=-\kappa^2\tau^2\alpha''(s)+\kappa\kappa'\alpha'''(s)-(\kappa')^2\alpha''(s)+\kappa^3\kappa'\alpha'(s)$$

$$\kappa\kappa'\alpha'''(s)-\left(\kappa^2\tau^2+(\kappa')^2\right)\alpha''(s)+\kappa^3\kappa'\alpha'(s)-\kappa^4\tau^2\alpha(s)=0 \tag{3.3.15}$$

olur ve teorem ispatlanmış olur.■

Teorem 3.3.2: $\alpha(s):I\subset\mathbb{R}\to E^3$ biçiminde bir küresel eğri olmak üzere kürenin yarıçapı

$$r^2=\frac{1}{\kappa^2}+\frac{(\kappa')^2}{\kappa^4\tau^2} \tag{3.3.16}$$

şeklindedir [13].

İspat: $\alpha(s):I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ biçiminde bir küresel eğri olsun. O halde

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2 \tag{3.3.17}$$

eşitliğini yazabiliriz ve (3.3.17) denkleminin her iki tarafın s'ye göre türevi alındığında,

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \tag{3.3.18}$$

olur. Bulunan bu (3.3.18) eşitliğin s'ye göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned} &\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\ &1 + \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\ &\langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = -1 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

elde edilir. Son defa bulunan (3.3.19) eşitliğin s'ye göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned} &\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \\ &\langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \\ &\left\langle \vec{T}(s), \vec{T}'(s) \right\rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \\ &\left\langle \vec{T}(s), \kappa \vec{N}(s) \right\rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \\ &\kappa \left\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \right\rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \\ &\langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

olur. (3.3.15) eşitliğinin her iki tarafına $\alpha(s)$ ile iç çarpım uygulanır ve bulunan (3.3.17), (3.3.18), (3.3.19) ve (3.3.20) eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &\kappa\kappa' \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle - \left(\kappa^2 \tau^2 + (\kappa')^2 \right) \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle \\ &\quad + \kappa^3 \kappa' \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle - \kappa^4 \tau^2 \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0 \\ &\kappa^4 \tau^2 r^2 = \kappa^2 \tau^2 + (\kappa')^2 \\ &r^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4 \tau^2}. \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.■

4. E^3 ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLER İÇİN DİFERANSİYEL DENKLEM KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre küresel eğriler için diferansiyel denklem karakterizasyonlarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.1: $\alpha(s): \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to E^3$ yay uzunluğu parametresi s olan bir küresel eğri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s) = c_1\vec{T}(s) + c_2\vec{N}_1(s) + c_3\vec{N}_2(s)$ bir küre belirtiyorsa Bishop çatısına göre, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere küresel eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$c_2k_1 + c_3k_2 = -1$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha(s)$, E^3 de yay uzunluğu parametresi s olan birim hızlı bir küresel eğri olsun. Bu eğrinin konum vektörü,

$$\alpha(s) = c_1\vec{T}(s) + c_2\vec{N}_1(s) + c_3\vec{N}_2(s) \tag{4.1}$$

şeklindedir. (4.1) denklemin her iki tarafına sırasıyla $\vec{T}(s), \vec{N}_1(s)$ve $\vec{N}_2(s)$ ile iç çarpım uygulandığında

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \alpha(s) \right\rangle = c_1 \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle + c_2 \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{N}_1(s) \right\rangle \\ + c_3 \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{N}_2(s) \right\rangle,\end{aligned}$$

$$c_1 = \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \alpha(s) \right\rangle \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{N}_1(s), \alpha(s) \right\rangle = c_1 \left\langle \vec{N}_1(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle + c_2 \left\langle \vec{N}_1(s), \vec{N}_1(s) \right\rangle \\ + c_3 \left\langle \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s) \right\rangle\end{aligned}$$

$$c_2 = \left\langle \vec{N}_1(s), \alpha(s) \right\rangle \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{N}_2(s), \alpha(s) \right\rangle = c_1 \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{T}(s) \right\rangle + c_2 \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{N}_1(s) \right\rangle \\ + c_3 \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{N}_2(s) \right\rangle,\end{aligned}$$

$$c_3 = \left\langle \vec{N}_2(s), \alpha(s) \right\rangle \tag{4.4}$$

bulunur. (3.3.17) ve (3.3.18) eşitliklerinden

$$\left\langle \vec{T}(s), \alpha(s) \right\rangle = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. O halde (4.2) eşitliğinden c_1=0 bulunur. (4.5) eşitliğinin s parametresine göre türevi alındığında

$$\left\langle \vec{T}'(s),\alpha(s)\right\rangle + \left\langle \vec{T}(s),\alpha'(s)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_1\vec{N}_1(s)+k_2\vec{N}_2(s),\alpha(s)\right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_1\vec{N}_1(s)+k_2\vec{N}_2(s),\vec{\alpha}(s)\right\rangle = -1 \tag{4.6}$$

$$k_1\left\langle \vec{N}_1(s),\alpha(s)\right\rangle + k_2\left\langle \vec{N}_2(s),\alpha(s)\right\rangle = -1$$

$$k_1c_2 + k_2c_3 = -1 \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinin her iki tarafının s' ye göre türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left\langle k_1'\vec{N}_1(s)+k_1\vec{N}_1'(s)+k_2'\vec{N}_2(s)+k_2\vec{N}_2'(s),\alpha(s)\right\rangle$$
$$+\left\langle k_1\vec{N}_1(s)+k_2\vec{N}_2(s),\alpha'(s)\right\rangle = 0$$

$$k_1'\left\langle \vec{N}_1(s),\alpha(s)\right\rangle + k_2'\left\langle \vec{N}_2(s),\alpha(s)\right\rangle + k_1\left\langle \vec{N}_1'(s),\alpha(s)\right\rangle$$
$$+k_2\left\langle \vec{N}_2'(s),\alpha(s)\right\rangle + k_1\left\langle \vec{N}_1(s),\alpha'(s)\right\rangle$$
$$+k_2\left\langle \vec{N}_2(s),\alpha'(s)\right\rangle = 0$$

$$k_1'c_2 + k_2'c_3 + k_1\left\langle -k_1\vec{T}(s),\alpha(s)\right\rangle + k_2\left\langle -k_2\vec{T}(s),\alpha(s)\right\rangle$$
$$+k_1\left\langle \vec{N}_1(s),\vec{T}(s)\right\rangle + k_2\left\langle \vec{N}_2(s),\vec{T}(s)\right\rangle = 0$$

$$k_1'c_2 + k_2'c_3 = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitlikleri ortak çözüm yapılırsa;

$$\left.\begin{array}{l} k_2' \;/\; k_1c_2 + k_2c_3 = -1 \\ -k_2 \;/\; k_1'c_2 + k_2'c_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} k_2'k_1c_2 + k_2'k_2c_3 = -k_2' \\ -k_2k_1'c_2 - k_2k_2'c_3 = 0 \end{array}\right\}, \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) sistemindeki denklemler taraf tarafa toplandığında

$$c_2\left(k_2'k_1 - k_2k_1'\right) = -k_2'$$

$$c_2 = \frac{-k_2'}{k_2'k_1 - k_2k_1'}$$

$$c_2 = \left\langle \vec{N}_1(s),\alpha(s)\right\rangle = \frac{-k_2'}{k_2'k_1 - k_2k_1'} \tag{4.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.7) ve (4.8) denklemlerinden

$$k_1'k_1c_2 + k_1'k_2c_3 = -k_1'$$
$$-k_1'k_1c_2 - k_1k_2'c_3 = 0$$
$$c_3\left(k_1'k_2 - k_1k_2'\right) = -k_1'$$
$$c_3 = \frac{k_1'}{k_2'k_1 - k_2k_1'}$$
$$c_3 = \left\langle \vec{N}_2(s), \alpha(s)\right\rangle = \frac{k_1'}{k_2'k_1 - k_2k_1'} \tag{4.11}$$

elde edilir. Bu durumda $\alpha(s)$ küresel eğrisi çatı elemanlarının lineer birleşimi olarak ;

$$\alpha(s) = c_1\vec{\mathrm{T}}(s) + c_2\vec{N}_1(s) + c_3\vec{N}_2(s)$$

şeklinde yazılabilir.(4.1) denkleminin her iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında

$$\alpha'(s) = \vec{T}(s) = c_1'\vec{T}(s) + c_1\vec{T}'(s) + c_2'\vec{N}_1(s) + c_2\vec{N}_1'(s)$$
$$+c_3'\vec{N}_2(s) + c_3\vec{N}_2'(s)$$
$$\alpha'(s) = \vec{T}(s) = c_1'\vec{T}(s) + c_1\left(k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s)\right) + c_2'\vec{N}_1(s)$$
$$+c_2\left(-k_1\vec{T}(s)\right) + c_3'\vec{N}_2(s) + c_3\left(-k_2\vec{T}(s)\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = \vec{T}(s) &= \vec{T}(s)\left(c_1' - c_2k_1 - c_3k_2\right) + \vec{N}_1(s)\left(c_1k_1 + c_2'\right) \\ &+\vec{N}_2(s)\left(c_1k_2 + c_3'\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada (4.12) eşitliğin iki tarafına $\vec{T}(s)$ ile iç çarpım uygulandığında;

$$\left(c_1' - c_2k_1 - c_3k_2\right) = 1$$

eşitliği elde edilir. Burada $c_1 = 0$ olduğundan

$$c_2k_1 + c_3k_2 = -1$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.2: E^3 de merkezi M ve yarıçapı r olan bir küre yüzeyi üzerindeki bir $X = X(s)$ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem

$$\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)X''' - \left(k_2'^2 + k_1'^2\right)X'' + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)X' - \left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2 X = 0.$$

ile verilir. Burada k_1, k_2 Bishop çatısına göre eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleridir.

İspat: Kürenin merkezi M olmak üzere, küre üzerindeki birim hızlı bir eğrinin bir $X = X(s)$ noktasını alalım. O halde

$$\left\| \overrightarrow{MX}(s) \right\| = r$$

$$\left\langle \vec{X}-\vec{M}, \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = r^2 \tag{4.12}$$

olur. Şimdi;

$$g(s) = \left\langle \vec{X}-\vec{M}, \vec{X}-\vec{M} \right\rangle - r^2 = 0 \tag{4.13}$$

fonksiyonu tanımlayalım. (4.13) in iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında;

$$\frac{dg(s)}{ds} = \left\langle \frac{d\vec{X}}{ds}, \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + \left\langle \vec{X}-\vec{M}, \frac{d\vec{X}}{ds} \right\rangle - 0 = 0$$

$$2\left\langle \frac{d\vec{X}}{ds}, \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{d\vec{X}}{ds}, \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = 0$$

$$\frac{dg(s)}{ds} = \left\langle \vec{T}(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = 0 \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2 g}{ds^2} = \left\langle \vec{T}'(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \frac{d\vec{X}}{ds} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + 1 = 0,$$

$$k_1\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_2\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = -1 \tag{4.15}$$

(4.15) eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$k_1'\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_1\left\langle \vec{N}_1'(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_1\left\langle \vec{N}_1(s), \frac{d\vec{X}}{ds} \right\rangle$$

$$+k_2'\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_2\left\langle \vec{N}_2'(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_2\left\langle \vec{N}_2(s), \frac{d\vec{X}}{ds} \right\rangle = 0$$

$$k_1'\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_1\left\langle -k_1\vec{T}(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_1\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{T}(s) \right\rangle$$

$$+k_2'\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_2\left\langle -k_2\vec{T}(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_2\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{T}(s) \right\rangle = 0$$

$$k_1'\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle + k_2'\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = 0 \tag{4.16}$$

olur. (4.15) ve (4.16) eşitliklerinde

$$\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = a \text{ ve } \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = b$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} k_1 a + k_2 b &= -1 \\ k_1' a + k_2' b &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde ortak çözüm yapıldığında

$$\begin{aligned} -k_2' \,/\, k_1 a + k_2 b = -1 &\Rightarrow -k_2' k_1 a - k_2' k_2 b = k_2' \\ k_2 \,/\, k_1' a + k_2' b = 0 &\Rightarrow k_2 k_1' a + k_2 k_2' b = 0 \\ &\Rightarrow a\left(k_2 k_1' - k_2' k_1\right) = k_2' \\ &\Rightarrow a = \frac{k_2'}{k_2 k_1' - k_2' k_1} \end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \frac{\dfrac{dk_2}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds} k_2 - \dfrac{dk_2}{ds} k_1} \tag{4.18}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} -k_1' \,/\, k_1 a + k_2 b = -1 &\Rightarrow -k_1' k_1 a - k_1' k_2 b = k_1' \\ k_1 \,/\, k_1' a + k_2' b = 0 &\Rightarrow k_1' k_1 a + k_2' k_1 b = 0 \\ &\Rightarrow b(k_2' k_1 - k_2 k_1') = k_1' \\ &\Rightarrow b = \frac{-k_1'}{k_2 k_1' - k_2' k_1} \end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \frac{-\dfrac{dk_1}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds} k_2 - \dfrac{dk_2}{ds} k_1} \tag{4.19}$$

elde edilir. O halde $\overrightarrow{MX} = \vec{X} - \vec{M}$ vektörünü Bishop çatısının lineer birleşimi olarak,

$$\vec{X} - \vec{M} = \alpha \vec{T}(s) + \beta \vec{N}_1(s) + \gamma \vec{N}_2(s) \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. (4.20) denklemdeki α, β ve γ değerlerini bulalım. (4.20) eşitliğinin her iki tarafına $\vec{T}(s)$ ile iç çarpım uygulanırsa;

$$\left\langle \vec{T}(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \right\rangle + \beta \left\langle \vec{T}(s), \vec{N}_1(s) \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{T}(s), \vec{N}_2(s) \right\rangle$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha = 0 \tag{4.21}$$

bulunur. (4.20) eşitliğinin her iki tarafına $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ ile iç çarpım uygulanırsa;

$$\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{N}_1(s), \vec{T}(s) \right\rangle + \beta \left\langle \vec{N}_1(s), \vec{N}_1(s) \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s) \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{N}_1(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \beta$$

$$\beta = \frac{\dfrac{dk_2}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \tag{4.22}$$

$$\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{T}(s) \right\rangle + \beta \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{N}_1(s) \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{N}_2(s), \vec{N}_2(s) \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{N}_2(s), \vec{X}-\vec{M} \right\rangle = \gamma$$

$$\gamma = \frac{-\dfrac{dk_1}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \tag{4.23}$$

elde edilir. Kürenin merkez denklemi (4.21), (4.22) ve (4.23) eşitlikleri (4.20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\vec{M} = \vec{X} - \left[\frac{\dfrac{dk_2}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \right] \vec{N}_1(s) + \left[\frac{\dfrac{dk_1}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \right] \vec{N}_2(s), \tag{4.24}$$

biçiminde elde edilir. Kürenin yarıçapı

$$r = \sqrt{\left\langle \vec{X}-\vec{M}, \vec{X}-\vec{M} \right\rangle}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\dfrac{dk_2}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \right)^2 + \left(\frac{\dfrac{dk_1}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \right)^2}$$

$$r^2 = \left(\frac{\dfrac{dk_2}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \right)^2 + \left(\frac{\dfrac{dk_1}{ds}}{\dfrac{dk_1}{ds}k_2 - \dfrac{dk_2}{ds}k_1} \right)^2 \tag{4.25}$$

elde edilir. Eğer kürenin merkezi orijin $(M=0)$ ise küre yüzeyindeki eğrinin konum vektörü

$$\vec{X} = \left(0, \frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2 - \frac{dk_2}{ds}k_1}, \frac{-\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2 - \frac{dk_2}{ds}k_1} \right) \tag{4.26}$$

şeklindedir. (4.24) eşitliğinden

$$\vec{X} = \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\vec{N}_1(s) - \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\vec{N}_2(s) \tag{4.27}$$

yazılabilir. $X = X(s)$ birim hızlı eğri olduğundan

$$\vec{X}' = \vec{T}(s) \tag{4.28}$$

eşitliği vardır. (4.28) eşitliğinin s parametresine göre türevi alındığında

$$\vec{X}'' = \vec{T}(s) = k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s) \tag{4.29}$$

olur. (4.29) eşitliğinin s parametresine göre türevi alındığında

$$\vec{X}''' = k_1'\vec{N}_1(s) + k_1\vec{N}_1'(s) + k_2'\vec{N}_2(s) + k_2\vec{N}_2'(s)$$

$$\vec{X}''' = k_1'\vec{N}_1(s) - k_1{}^2\vec{T}(s) + k_2'\vec{N}_2(s) - k_2{}^2\vec{T}(s)$$

$$\vec{X}''' = -\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)\vec{T}(s) + k_1'\vec{N}_1(s) + k_2'\vec{N}_2(s) \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.29) ve (4.30) eşitliklerinden;

$$-k_2' \,/\, \vec{X}'' = k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s)$$

$$k_2 \,/\, \vec{X}''' = -\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)\vec{X}' + k_1'\vec{N}_1(s) + k_2'\vec{N}_2(s)$$

$$\vec{N}_1(s) = \frac{k_2\vec{X}''' - k_2\vec{X}'' + k_2\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1} \tag{4.31}$$

ve benzer şekilde

$$-k_1' \,/\, \vec{X}'' = k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s)$$

$$k_1 \,/\, \vec{X}''' = -\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)\vec{X}' + k_1'\vec{N}_1(s) + k_2'\vec{N}_2(s)$$

$$\vec{N}_2(s) = \frac{k_1\vec{X}''' - k_1'\vec{X}'' + k_1\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right)\vec{X}'}{k_1k_2' - k_1'k_2} \tag{4.32}$$

bulunur. (4.27) denkleminde (4.31) ve (4.32) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\vec{X} = \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_2\vec{X}''' - k_2'\vec{X}'' + k_2\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\right] - \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_1\vec{X}''' - k_1'\vec{X}'' + k_1\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)\vec{X}'}{k_1k_2' - k_1'k_2}\right]$$

$$\vec{X} = \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_2\vec{X}''' - k_2'\vec{X}'' + k_2\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\right] + \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_1\vec{X}''' - k_1'\vec{X}'' + k_1\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\right]$$

$$\vec{X} = \frac{k_2'k_2 + k_1'k_1}{\left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2}\vec{X}''' - \frac{k_2'^2 + k_1'^2}{\left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2}\vec{X}'' + \frac{\left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)}{\left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2}\vec{X}' \tag{4.33}$$

$$\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)\vec{X}''' - \left(k_2'^2 + k_1'^2\right)\vec{X}'' + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)\vec{X}' - \left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2\vec{X} = 0.$$

şeklinde küre yüzeyindeki bir eğrinin konum vektörünün 3.dereceden bir diferansiyel denklemi elde edilir.■

SONUÇ

Bu tez çalışmasında E^3 Öklid 3-uzayında Frenet çatısına göre küresel eğriler detaylı bir şekilde incelenip, bu eğrilerle ilgili temel teoremler ispatlarıyla beraber verilmiştir. Daha sonra diferansiyel denklem ve integral karakterizasyonları incelenmiştir. Özellikle Öklid 3-uzayında Bishop çatısına göre küresel eğriler incelenerek, bir küresel eğriyi karakterize eden 3.mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Abdel, Bakey., R.A."An Explicit Characterization of Dual Spherical Curve", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series Al Vol.51.(no.2) pp.1-9 (2002).

2. Arslan, K., Camci, Ç., Kocayiğit, H., Hacisalihoğlu, H. H. "On the explicit characterization of spherical curves in 3- dimensional Lorentzian space", Journal of Inverse and III-posed Problems, 2003.

3. Ayyıldız, N., Çoken, A. C. and Yücesan, A. "A Characterization of Dual Lorentzian Spherical Curves in the Dual Lorentzian space", Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 11, No. 4, pp. 999-1018, September 2007.

4. Bishop, L.R. "There is More Than One Way to Frame a Curve", Amer. Math. Monthly, 82 (3), pp. 246-251, 1975.

5. Breuer, S., Gottlieb, D. "An Explicit Characterization of Spherical Curves", Proc.Am.Math.Soc.27, pp.126-127, 1971.

6. Camci, Ç., Yayli, Y., Hacisalihoğlu, H.H . "On the characterization of spherical curves in 3-dimensional Sasakian spaces" , Ankara University, Faculty of Sciences, Department of Mathematics,2007.

7. Dannon, V. Integral Chacracterizationsand the Theory of Curves, Proc. Amer. Math. Soc. 81, 4, 600-602, 1981.

8. Do Carmo, M. P. "İfferential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1976)

9. Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, 1998.

10. Kocayiğit, H., Yaz, N., Camci, Ç., Hacisalihoğlu, H.H . "On the explicit characterization of spherical curves in 3-dimensional Euclidean space", Journal of Inverse and III-posed Problems, 2003.

11. Köse, Ö., Nizamoğlu, Ş., Sezer, M. " An Explicit Characterization of Dual Spherical Curves", Doğa Mat.12(3), pp.105-113, 1998.

12. Kreyzig, E. Differantial Geometry, Univ.of Toronto Press,Toronto,1959.

13. Mehlum, E., Wimp, J. "Spherical Curves and Quadratic Relationships for Special Functions", Austral. Mat. Soc, pp.11-124, 1985.

14. Okullu B.P., Kocayiğit H. An Explicit Characterization of Spherical Curves According to Bishop Frame, to Submit, 2018.

15. Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel Geometri, Ankara, 2004.

16. Wong, Y.C. "On An Explicit Characterization of Spherical Curves", Proc. Am. Math. Soc.34, pp.239-242, 1972.

17. Wong,Y.C. "A Global Formulation of the Condition for a Curve to lie in a Sphere", Monatsh. Math. 67 (1963), 363-365.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ceyda SARITEPE
Doğum Yeri ve Yılı	: Muğla, 1981
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	:ceydasaritepe@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Halil Kale Fen Lisesi, 1999
Lisans	: Balıkesir Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2004
Yüksek Lisans	: Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018

Mesleki Deneyim

Çankırı / Korgun Çok Programlı Lisesi	2008-2009
Erzurum / Pasinler Lisesi	2009-2011
Manisa / Turgutlu Anadolu İmam Hatip Lisesi	2011-2017
Manisa / Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi	2017-