T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

GÖKHAN ZEYTİN

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA - 2018

Gökhan ZEYTİN **KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI** **2018**

TEZ ONAYI

Gökhan ZEYTİN tarafından hazırlanan **"KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI"**adlı tez çalışması 11/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mustafa KAZAZ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Yılmaz TUNCER** Uşak Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Gökhan ZEYTİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E^n	: $n-$ boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	: $n-$ boyutlu iç çarpım uzayı
Q_R	: Reel kuaterniyonlar cümlesi
$\boldsymbol{V}$	: Vektör uzayı
$\boldsymbol{V}_i$	: E^n, $n-$ boyutlu Öklid uzayında $i-$ inci Frenet vektörü
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$	: E^n, $n-$ boyutlu Öklid uzayında herhangi iki vektör
I	: $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\langle \, , \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: Vektörel çarpım
β, θ	: E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında herhangi eğriler
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$	: E^3 Öklid uzayında Frenet vektörleri
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$	: E^4 Öklid uzayında Frenet vektörleri
k_i	: E^n Öklid uzayında $i-$ inci eğriliği
κ, τ, σ	: Öklid uzayında Frenet eğrilikleri
M	: Öklid uzayında küresel bir eğri
S^p	: Öklid uzayında yüzeyi $p-$ boyutlu bir küre
S_0^2	: 0 merkezli bir küre
m_i	: M nin $i-$ inci eğrilik fonksiyonu
q	: Herhangi bir reel kuaterniyon

S_q	: q kuaterniyonun skaler kısmı
$\boldsymbol{V}_q$	: q kuaterniyonun vektörel kısmı
q^{-1}	: q kuaterniyonun tersi
q_0	: q birim kuaterniyonu
αq	: q kuaterniyonun eşleniği
$\oplus$	: Kuaterniyonlarda toplama
$\odot$	: Kuaterniyonlarda skaler çarpım
$\times$	: Kuaterniyonik çarpım
$h(\,,)$	: Kuaterniyonik iç çarpım
ξ	: E^3 Öklid uzayında kuaterniyonik uzaysal eğri
γ	: E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik eğri
$\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$	: E^3 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet vektörleri
k,r	: E^3 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet eğrilikleri
$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3$	: E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet vektörleri
$K,k,(r-K)$	: E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet eğrilikleri
f,g	: İkinci mertebeden türevlenebilir herhangi fonksiyon
ρ	: Kuaterniyonik eğrinin eğrilik yarıçapı

TEŞEKKÜR

Bu çalışma değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT''in **"KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI"** konusunda çalışmamı teşvik etmesi ile hayat bulmuş ve verilen yoğun çabalar sonucunda bugünkü şeklini almıştır. Öncelikle danışmanlığımı yapan ve her konuda yardımını benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT'e teşekkürü bir borç bilirim. Hayatımın her anında yanımda olup benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, nişanlım Selin SÜNETCİ'ye ve Türkçe Öğretmeni arkadaşım Okan BORAZAN'a teşekkür ederim.

Gökhan ZEYTİN
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Gökhan ZEYTİN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kuaterniyonlar ve kuaterniyonik eğriler hakkında genel bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, eğriler ve yüzeyler teorisindeki temel ifadelerin tanımları ve teoremleri verilmiştir.

Ücüncü bölümde, E^n Öklid uzayında küresel eğri tanımı, küresel eğri olma şartları ve diferensiyelenebilir bazı eğrilerin karakterizasyonları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, kuaterniyonlar teorisindeki temel ifadelerin tanımları ve reel kuaterniyonların özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, $3-$ ve $4-$boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler tanımlanıp, kuaterniyonik Frenet formülleri hesaplanışları verilmiştir. Ayrıca kuaterniyonik eğrilikleri ile Frenet türevleri arasındaki formüller verilmiştir.

Altıncı bölümde, E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında herhangi bir kuaterniyonik uzay eğrisinin küresel kuaterniyonik eğrisi olmasını veren diferensiyel denklemler hesaplanılmıştır. Ayrıca, bu denklemlerin kuaterniyonik çatıya göre bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reel kuaterniyon, küresel eğri, kuaterniyonik eğri, $3-$boyutlu ve $4-$boyutlu Öklid uzayı, Frenet çatısı

2018, 40 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CHARACTERISTICS OF SPHERICAL CURVES ACCORDING TO THE QUATERNIANIC FRAME

Gökhan ZEYTİN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

This thesis consists of six parts.

In the first chapter, general informations about quaternions and quaternionic curves.

In the second chapter, definitions of the basic expressions in the theory of curves and surfaces are given.

In the third chapter, the definition of spherical curves, the conditions of spherical curves and the characteristics of some curves which can be differentiated are given in Euclidean space.

In the fourth chapter, the definitions of the basic expressions in the quaternions theory and the properties of the real quaternions are given.

In the fifth chapter quaternionic curves are defined in 3 and 4 dimensional Euclidean space and quaternionic Frenet formulas are given. In addition, formulas between quaternionic curvatures and Frenet derivatives are given.

In the sixth chapter, any quaternionic space curves in the E^3 and E^4 Euclidean spaces and the differential equations giving any uniformity are calculated. In addition, some of the characterizations of these equations are given with respect to the quaternionic frame.

Keywords: Real quaternion, spherical curve, quaternionic curve, 3-dimensional and 4-dimensional Euclidean space, Frenet frame.

2018, 40 pages

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kuaterniyonlar, İrlandalı matematikçi Rowan Hamilton'un karmaşık sayıları $3-$boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulmuştur. Hamilton ilk olarak kompleks sayılar üzerinde çalışmış ve kompleks sayıların bir cebir yapısı oluşturduğu sonucuna varmıştır. Kuaterniyonların toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için bir metot geliştirememiştir. Hamilton, çarpma işlemine göre değişmeli olmadığını da anlayınca $\boldsymbol{e}_1^{\,2}=\boldsymbol{e}_2^{\,2}=\boldsymbol{e}_3^{\,2}=-1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımlamıştır. Böylece kuaterniyon ismini verdiği $4-$boyutlu vektörleri keşfetmiştir [2].

Q_R reel kuaterniyonlar cümlesinde $s\in I=[0,1]$ olmak üzere,

$$\xi : I\subset\mathbb{R}\to Q_R$$
$$s\to\xi(s)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(s)\boldsymbol{e}_i$$

olarak tanımlanan diferansiyellenebilir ξ eğrisine uzaysal kuaterniyonik eğri denir [8] .

Regüler bir eğrinin, belirli bir noktasındaki teğet, asal normal ve binormal birim vektörlerinden meydana gelen üçyüzlü, Frenet üçyüzlüsü olarak adlandırılır Kuaterniyonik eğriler ve kuaterniyonik Frenet formülleri ilk olarak E^3 ve E^4 de bir eğrinin Frenet formüllerini uzaysal kuaterniyonlar yardımıyla K. Barathi ve M. Nagaraj tarafından incelenmiştir [2].

Bu çalışmada, reel kuaterniyonların cebirsel özellikleri verildikten sonra E^3 ve E^4 Öklid uzayında herhangi bir kuaterniyonik uzay eğrisinin, küreselliğini veren diferensiyel denklemler hesaplanılmıştır. Ayrıca, bu denklemlerin kuaterniyonik çatıya göre bazı karakterizasyonları verilmiştir.

2. BÖLÜM

ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid uzayı, Öklid metriği, Öklid çatısı, eğri, birim hızlı eğri, eğrilik, burulma, Frenet çatısı gibi eğriler ve yüzeyler teorisindeki temel ifadelerin tanım ve teoremleri verilecektir.

Tanım 2.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen $n-$ boyutlu vektör uzayı $\boldsymbol{V}$ olsun. $\boldsymbol{V}$ vektör uzayı üzerinde $\boldsymbol{x}=(x_1,x_{2,}...,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\langle\,,\rangle:\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}&\to\mathbb{R}\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&\to\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i\end{aligned}$$

şeklinde bir iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayının $n-$boyutlu bir Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [6].

Tanım 2.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen $n-$ boyutlu vektör uzayı $\boldsymbol{V}$ olsun. $\boldsymbol{V}$ vektör uzayı üzerinde $\boldsymbol{x}=(x_1,x_{2,}...,x_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\|\;\|:V&\to\mathbb{R}\\x&\to\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\end{aligned}$$

şeklinde norm fonksiyonu tanımlanır.

Tanım 2.3. $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\boldsymbol{V}$ ile birleşen bir Öklid uzayı E^n olsun. $\boldsymbol{V}$ vektör uzayı üzerindeki norm $\|\,,\|$ olmak üzere,

$$d:E^n\times E^n\to\mathbb{R}$$

$$d(X,Y)=\|\boldsymbol{XY}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2},\ \begin{cases}X=(x_1,x_2,...,x_n)\\Y=(y_1,y_2,...,y_n)\end{cases},$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $X,Y \in E^n$ için $d(X,Y)$ değerine de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir [6].

Teorem 2.1. E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir [6].

Tanım 2.4. E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna, $n-$boyutlu Öklid uzayında Öklid metriği denir [6].

Tanım 2.5. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X,Y,Z olsun. $\boldsymbol{XY}$ ile $\boldsymbol{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \le \theta \le \pi$ olmak üzere,

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\langle \boldsymbol{XY}, \boldsymbol{XZ} \rangle}{\|\boldsymbol{XY}\| \|\boldsymbol{XZ}\|}$$

dır [6].

Tanım 2.6. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu reel iç çarpım uzayı ile birleşen E^n Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)-$lisi için eğer $\{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_n\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının bir ortanormal bazı ise bu nokta $(n+1)-$lisine bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [6].

Tanım 2.7. E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının E^n Öklid uzayında ki standart Öklid çatısına göre ifadesi,

$$\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_i$$

dir. Burada , $x_i : E^n \to \mathbb{R} \quad (1 \le i \le n)$ fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $x_1, x_2, ..., x_n$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar $n-$lisine de E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayının Öklid koordinat sistemi denir [6].

Tanım 2.8. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık,

$$\begin{aligned} \beta : I &\to E^n \\ s &\to \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), ..., \beta_n(s)) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $\beta(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında (I, β) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına, β eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\beta(s)$ eğrisinin parametresi denir [6].

Tanım 2.9. M eğrisi E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında (I, β) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri,

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), ..., \beta_n(s))$$

olsun. Bu taktirde,

$$\left.\frac{d\beta}{ds}\right|_s = \beta'(s)\Big|_s = \left(\left.\frac{d\beta_1}{ds}\right|_s, \left.\frac{d\beta_2}{ds}\right|_s, ..., \left.\frac{d\beta_n}{ds}\right|_s \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\beta(s)$ noktasında ki hız vektörü denir [6].

Tanım 2.10. $M \subset E^n$ eğrisi, (I, β) koordinat komşuluğuyla verilsin.

$$\begin{aligned} \|\beta'\| : I &\to \mathbb{R} \\ s &\to \|\beta'\|(s) = \|\beta'(s)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\beta'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,β) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu, $\|\beta'(s)\|$ reel sayısına M eğrisinin $\beta(s)$ noktasında ki skalar hızı denir. Eğer, $\|\beta'(s)\|=1$ ise, M eğrisine birim hızlı eğri ve $s\in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir [6].

Tanım 2.11. $M\subset E^n$ eğrisi, (I,β) koordinat komşuluğuyla verilsin. $a,b\in I$ olmak üzere,

$$s=\int_a^b \|\beta'(s)\|ds$$

reel sayısına M eğrisinin $\beta(a)$ ve $\beta(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir [6].

Tanım 2.12. M eğrisi E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,β) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\psi=(\beta',\beta'',...,\beta^{(r)})$$

sistemi lineer bağımsız olsun.

$$\beta^{(k)}\in S_p\{\psi\},\quad k>r$$

olmak üzere, ψ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $V_1,V_2,...,V_r$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret – Frenet $r-$ayaklı alanı , $m\in M$ için $\boldsymbol{V}_1(m),\boldsymbol{V}_2(m),...\boldsymbol{V}_r(m)$ sistemine $m\in M$ noktasındaki Serret – Frenet $r-$ayaklısı ve her bir V_i, $1\le i\le r$ vektörüne de Serret – Frenet vektörü denir [6].

Tanım 2.13. M eğrisi E^n , $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in I$ yay parametresine karşılık gelen $\beta(s)\in M$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı $\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{s}),\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{s}),...,\boldsymbol{V}_r(\boldsymbol{s})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k_i : I &\to \mathbb{R} \qquad (1 \le i < r) \\ s &\to k_i(s) = \left\langle \boldsymbol{V}_i'(s), \boldsymbol{V}_{i+1}'(s) \right\rangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$inci eğrilik fonksiyonunu ve $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki $i-$inci eğriliği denir [6].

Teorem 2.2. $M \subseteq E^n$ eğrisi (I, β) koordinat komşuluğuyla verilen $s \in I$ yay parametreli bir eğri olsun. M eğrisinin $\beta(s)$ noktasında ki $i-$inci eğriliği $k_i(s)$ Frenet $r-$ayaklısı da $\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \ldots \boldsymbol{V}_r(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1'(s) &= k_1(s)\boldsymbol{V}_2(s) \\ \boldsymbol{V}_i'(s) &= -k_{i-1}(s) + \boldsymbol{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\boldsymbol{V}_{i+1}(s), \ (1 < i < r) \\ \boldsymbol{V}_r'(s) &= -k_{r-1}(s)\boldsymbol{V}_{r-1}(s) \end{aligned} \tag{2.2}$$

bağıntıları sağlanır [6].

Şimdi özel olarak $n = 3$ ve $n = 4$ durumunu ele alalım.

Teorem 2.3. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, M eğrisinin $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ Frenet vektörleri,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \beta'(s), \\ \boldsymbol{n}(s) &= \frac{\beta''(s)}{\left\| \beta''(s) \right\|}, \\ \boldsymbol{b}(s) &= \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{ 2.3}$$

dir [6].

Teorem 2.4. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ Frenet vektörleri,

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{\beta'(s)}{\left\|\beta'(s)\right\|},$$

$$\boldsymbol{b}(s) = \frac{\beta'(s) \wedge \beta''(s)}{\left\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\right\|}, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{n}(s) = \boldsymbol{b}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s)$$

dır [6].

Teorem 2.5. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması sırasıyla $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \frac{\left\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\right\|}{\left\|\beta'(s)\right\|^3}$$

$$\tau(s) = \frac{\left\langle \beta'(s) \wedge \beta''(s), \beta'''(s) \right\rangle}{\left\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\right\|^2} \tag{2.5}$$

şeklinde hesaplanır [9].

Teorem 2.6. $\beta : I \to E^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi cinsinden verilsin. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$; eğrilik ve burulması sırasıyla $\kappa(s), \tau(s)$ olmak üzere, $\beta(s)$ eğrisinin Frenet formülleri,

$$\boldsymbol{t}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$$

$$\boldsymbol{n}'(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s) \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{b}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{n}(s)$$

dir. Bu Frenet formüllerinin matris ifadesi,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [9].

Teorem 2.7. $\beta : I \to E^3$ eğrisinin herhangi bir parametresi $s \in I$ olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı $\boldsymbol{t}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)$; eğrilik ve burulması sırasıyla $\kappa(s),\tau(s)$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{t}'(s)=\|\beta'(s)\|\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$$

$$\boldsymbol{n}'(s)=\|\beta'(s)\|(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s)+\tau(s)\boldsymbol{b}(s)) \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{b}'(s)=-\|\beta'(s)\|\tau(s)\boldsymbol{n}(s)$$

şeklinde hesaplanır [6].

Teorem 2.8. $M \subseteq E^4$ eğrisi (I,θ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\theta(s)$ noktasında ki $\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s),\boldsymbol{E}(s)$ Frenet vektörleri,

$$
\boldsymbol{T}(s)=\frac{\theta'(s)}{\left\|\theta'(s)\right\|}
$$

$$
\boldsymbol{N}(s)=\frac{\left\|\theta'(s)\right\|^{2}\theta''(s)-\left\langle\theta'(s),\theta''(s)\right\rangle\theta'(s)}{\left\|\left\|\theta'(s)\right\|^{2}\theta''(s)-\left\langle\theta'(s),\theta''(s)\right\rangle\theta'(s)\right\|}
$$

$$
\boldsymbol{B}(s)=\eta\boldsymbol{E}(s)\wedge\boldsymbol{T}(s)\wedge\boldsymbol{N}(s) \tag{2.8}
$$

$$
\boldsymbol{E}(s)=\eta\frac{\boldsymbol{T}(s)\wedge\boldsymbol{N}(s)\wedge\theta'''(s)}{\left\|\boldsymbol{T}(s)\wedge\boldsymbol{N}(s)\wedge\theta'''(s)\right\|},\qquad(\eta=\pm1)
$$

dir. Burada ki vektörel çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır [6].

Tanım 2.13. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}$ olmak üzere,

$$
\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{T}&\boldsymbol{N}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}\\a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\end{vmatrix},\quad\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)\\\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)\\\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,c_3,c_4)\end{array}\right\}
$$

determinantına $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpım veya dış çarpım denir [6].

Teorem 2.9. $M\subseteq E^4$ eğrisi (I,θ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s\in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\theta(s)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri $\kappa(s),\tau(s)$ ve $\sigma(s)$ olmak üzere,

$$\kappa(s)=\frac{\left\|\left\|\theta'(s)\right\|^2\theta''(s)-\left\langle\theta'(s),\theta''(s)\right\rangle\theta'(s)\right\|}{\left\|\theta'(s)\right\|^4},$$

$$\tau(s)=\frac{\left\|\boldsymbol{T}(s)\wedge\boldsymbol{N}(s)\wedge\theta'''(s)\right\|\left\|\theta'(s)\right\|}{\left\|\left\|\theta'(s)\right\|^2\theta''(s)-\left\langle\theta'(s),\theta''(s)\right\rangle\theta'(s)\right\|},\tag{2.9}$$

$$\sigma(s)=\frac{\left\langle\theta^{(4)}(s),\boldsymbol{E}(s)\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{T}(s)\wedge\boldsymbol{N}(s)\wedge\theta'''(s)\right\|\left\|\theta'(s)\right\|}$$

şeklinde hesaplanır [6].

Teorem 2.10. $\theta: I\rightarrow E^4$ eğrisi $s\in I$ yay parametresi ile verilsin. θ eğrisinin $\theta(s)$ noktasında ki Frenet $4-$ayaklısı $\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s),\boldsymbol{E}(s)$ ve eğrilikleri $\kappa(s),\tau(s),\sigma(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}'(s)&=\kappa(s)\boldsymbol{N}(s)\\
\boldsymbol{N}'(s)&=-\kappa(s)\boldsymbol{T}(s)+\tau(s)\boldsymbol{B}(s)\\
\boldsymbol{B}'(s)&=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s)+\sigma(s)\boldsymbol{E}(s)\\
\boldsymbol{E}'(s)&=-\sigma(s)\boldsymbol{B}(s)
\end{aligned}\tag{2.10}$$

şeklindedir. Bu formüllere Frenet formülleri denir. Bu formüllerin matris ifadesi,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}'\\\boldsymbol{N}'\\\boldsymbol{B}'\\\boldsymbol{E}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa&0&0\\-\kappa&0&\tau&0\\0&-\tau&0&\sigma\\0&0&-\sigma&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\\boldsymbol{N}\\\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\tag{2.11}$$

şeklindedir [6].

3. BÖLÜM

E^3 ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER

Bu bölümde E^n Öklid uzayında küresel eğri tanımı, bazı temel kavramlar, Öklid uzayında bir eğrinin küresel bir eğri olma şartları ve diferensiyellenebilir bazı eğrilerin karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 3.1. $M \subseteq E^n$ eğrisi ve $S^p \subseteq E^n$ küresi verilsin. Eğer $M \subseteq S^p$ ise M ye E^n $n-$boyutlu Öklid uzayının bir küresel eğrisi denir. S^p, Öklid uzayında $p-$boyutlu herhangi bir küredir. $n=3$ ve $p=1$ halinde M eğrisi bir çember veya çember yayıdır [6].

Buradan $n=3$ ve $p=2$ olduğunda $M \subseteq S^2$ küresel eğrisi için bir karakterizasyon elde edilecektir

Teorem 3.1. Kürenin merkezini O orijin noktası alalım. Küre üzerine çizilmiş bir eğrinin normal düzlemlerinin O noktasından geçeceği açıktır. Yani $S_0{}^2$, O merkezli bir küre ve $M \subseteq S_0{}^2$ küresel eğrisi verilsin. Bu taktirde, M için koordinat komşuluğu $s \in I$ yay parametresi,

$$\langle \beta(s), \boldsymbol{V}_i(s) \rangle = -m_i(s), \qquad 1 \leq i \leq 3 \tag{3.1}$$

dir. Burada $\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \boldsymbol{V}_3(s)$ ile M eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet $3-$ayaklısını göstermektedir [6].

Teorem 3.2. O merkezli bir küre $S_0^2 \subseteq E^3$ olsun. Eğer $M \subseteq S_0{}^2$ ise M eğrisinin oskülatör küresi S_0^2 dir [6].

Teorem 3.3. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\tau(s) \neq 0$, $m_3 \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasında oskilatör kürenin yarıçapı sabit olması için gerek ve yeter şart oskilatör kürelerin merkezleri aynıdır [6].

Teorem 3.4. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\tau(s) \neq 0$, $m_3 \neq 0$ ise M küresel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $m_3' + m\tau = 0$ olmasıdır [6].

Teorem 3.5. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to E^3$, s yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun. β eğrisi merkezi c ve yarıçapı r olan bir küre üzerinde olması için gerek ve yeter şart,

$$\left[\frac{1}{\kappa}\right]^2 + \left[\frac{1}{\kappa'} + \frac{1}{\tau}\right]^2 = r^2 \tag{3.2}$$

olmasıdır [6].

.

Teorem 3.6. $E^3, 3-$ boyutlu Öklid uzayında s yay parametresiyle verilmiş $\beta(s)$ eğrisinin küresel bir eğri olması için gerek ve yeter koşul A, B herhangi iki sabit olmak üzere,

$$A\cos\int \tau ds + B\sin\int \tau ds = \frac{1}{\kappa} \tag{3.3}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [6].

4.BÖLÜM

KUATERNİYONLAR

Kuaterniyonlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton (1805-1865) kompleks sayıları $3-$boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur. Kuaterniyonlar ilk olarak, 13 Kasım 1843 yılında "On a new Species of Imeginary Quantities connected with the Theory of Quaternions." adlı makalede yayımlanmıştır [2].

Bu bölümde, kuaterniyonlar teorisindeki temel ifadelerin tanımları ve bazı özellikler verilmiştir. Özellikle reel kuaterniyonların cebirsel yapıları üzerinde durulmuş ve bunların bazı özellikler verilmiştir.

4.1. Kuaterniyon Cebiri

Tanım 4.1. $Q_R = \{q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3\}$

cümlesini ele alalım. $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ birimlerinin çarpımları,

$$\boldsymbol{e}_0 = 1,\ \boldsymbol{e}_0{}^2 = 1,\ \boldsymbol{e}_1{}^2 = \boldsymbol{e}_2{}^2 = \boldsymbol{e}_3{}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3.\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_2.\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3.\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1.\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$$

dir. Q_R nin her bir elemanına reel kuaterniyon denir. a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q nun bileşenleri denir. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ birimleri $3-$boyutlu reel vektör uzayının dik koordinat sistemi olarak alınabilir.

$$q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

Reel kuaterniyonunun skaler kısmı S_q ve vektörel kısmı $\boldsymbol{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

$$S_q = a_0$$

$$\boldsymbol{V}_q = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

şeklindedir [7].

Tanım 4.2. $q_1, q_2 \in Q_R$ herhangi iki kuaterniyon olmak üzere bu iki kuaterniyonun toplamı;

$$\begin{aligned} \oplus : Q_R \times Q_R &\to Q_R \\ (q_1, q_2) &\to q_1 \oplus q_2 = (S_{q_1} + S_{q_2}) + (\boldsymbol{V}_{q_1} \oplus \boldsymbol{V}_{q_2}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve "+" işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir. $\boldsymbol{V}_{q_1}, \boldsymbol{V}_{q_2}$ birer reel vektör olup "$\oplus$" işlemi reel vektör uzayındaki toplama işlemidir [7].

Tanım 4.3. Bir skaler ile bir reel kuaterniyonun çarpımı;

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times Q_R &\to Q_R \\ (\lambda, q) &\to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall q_1, q_2 \in Q_R$

$$\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2)$$

ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in Q_R$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$$

iii) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in Q_R$

$$(\lambda_1 . \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$$

iv) $1 \odot q = q$

Böylece $\{Q_R, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır [7].

Tanım 4.4. Reel kuaterniyonların çarpımı,

$$\begin{aligned} \times : Q_R \times Q_R &\to Q_R \\ (q, p) &\to q \times p = S_q S_p + S_q \boldsymbol{V}_p + S_p \boldsymbol{V}_q - \langle \boldsymbol{V}_q, \boldsymbol{V}_p \rangle + \boldsymbol{V}_q \wedge \boldsymbol{V}_p \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada "$\langle \; , \; \rangle$" $\mathbb{R}^3$ teki iç çarpım ve "$\wedge$" $\mathbb{R}^3$ teki vektörel çarpımdır [7].

$$q = a_0 \boldsymbol{e}_0 + a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$p = b_0 \boldsymbol{e}_0 + b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + b_3 \boldsymbol{e}_3$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} q \times p &= (a_0 \boldsymbol{e}_0 + a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3) \times (b_0 \boldsymbol{e}_0 + b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + b_3 \boldsymbol{e}_3) \\ &= a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_3) \boldsymbol{e}_2 + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 4.5. Bir $q \in Q_R$ kuaterniyonun eşleniği;

$$q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : Q_R &\to Q_R \\ q &\to \alpha q = S_q - \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki özellikleri sağlar [2, 8].

$\forall q_1, q_2 \in Q_R,\ a, b \in \mathbb{R}$

i) $\alpha(aq_1 + bq_2) = a(\alpha q_1) + b(\alpha q_2)$

ii) $\alpha(q_1 \times q_2) = \alpha q_2 \times \alpha q_1$

iii) $\alpha(\alpha q) = q$

Tanım 4.6. Kuaterniyonik iç çarpımı;

$$\begin{aligned} h : Q_R \times Q_R &\to \mathbb{R} \\ (p, q) &\to h(p, q) = \frac{1}{2}[p \times \alpha q + q \times \alpha p] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Reel değerli, simetrik, bilineer h fonksiyonu, iç çarpım aksiyomlarını sağlar.

i) Simetri aksiyomu: $\forall p, q \in Q_R$ için,

$$h(p, q) = h(q, p)$$

ii) Bilineerlik aksiyomu: $\forall c \in \mathbb{R}$ ve $p, q, r \in Q_R$ için,

$$h(cp,q)=ch(p,q)=h(p,cq)$$

$$h(p+q,r)=h(p,q)+h(q,r)$$

$$h(p,q+r)=h(p,q)+h(p,r)$$

iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu: $\forall p\in Q_R$ için,

$$h(p,p)=p\times\alpha p=\|p\|^2\geq 0$$

$$h(p,p)=0\Leftrightarrow p=0$$

olur [2, 8].

Tanım 4.7. Eğer $p,q\in Q_R$ kuaterniyonları için $h(p,q)=0$ oluyorsa p ile q kuaterniyonlarına $h-$ ortogonal denir [2, 8].

Tanım 4.8. $q=a_0\boldsymbol{e}_0+a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3\in Q_R$ kuaterniyonunun normu,

$$\begin{aligned}\|\ \|:Q_R&\to\mathbb{R}\\ q&\to\|\ \|\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}h(q,q)=\|q\|^2&=q\times\alpha q=\alpha q\times q\\ &=a_0{}^2+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına q kuaterniyonun normu denir [2, 8].

Tanım 4.9. Bir $q\in Q_R$ kuaterniyonun tersi,

$$\begin{aligned}(\ )^{-1}:Q_R-\ 0\ &\to Q_R-\ 0\\ q&\to q^{-1}=\frac{q}{\|q\|}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ters eleman tanımından,

$$q \times q^{-1} = q^{-1} \times q$$

eşitliği doğrulanır. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in Q_R$ elemanının bir q^{-1} tersi vardır. Böylece Q_R cebiri bir bölüm cebiridir [7].

Tanım 4.10. $q \neq 0$ olmak üzere, p kuaterniyonunu, q kuaterniyonu ile bölmek için, kuaterniyon çarpımının değişme özelliği olmadığından, p kuaterniyonu q kuaterniyonu ile sağdan ve soldan çarpılırsa,

$$r_1 = p \times q^{-1}$$

$$r_2 = q^{-1} \times p$$

elde edilir. Burada r_1 kuaterniyonuna, p kuaterniyonunun q kuaterniyonu ile sağdan bölümü, r_2 kuaterniyonuna, p kuaterniyonunun q kuaterniyonu ile soldan bölümü denir. Kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından, $r_1 \neq r_2$ dir [7].

Tanım 4.11. Normu bir olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. q_0 birim kuaterniyonu,

$$q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \in Q_R$$

$$\| q \|^2 = h(q,q) = q \times \alpha q = a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}$$

olmak üzere,

$$q_0 = \frac{q}{\| q \|} = \frac{a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}}$$

dir [7].

Tanım 4.12. Eğer $q \in Q_R$ kuaterniyonunda,

$$q + \alpha q = 0$$

ise q kuaterniyonuna bir uzaysal kuaterniyon denir. Uzaysal kuaterniyonların cümlesi $3-$boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur. Burada q kuaterniyonunda, $S_q = 0, \boldsymbol{V}_q \neq 0$ dir. Ayrıca, p ve q gibi iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı:

$$p \times q = -\langle p, q \rangle + p \wedge q$$

şeklindedir. Dolayısıyla, iki uzaysal kuaterniyon birbirine dikse kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına, parelel ise kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skaler çarpımının ters işaretlisine eşit olur [2].

Tanım 4.13. Eğer $q \in Q_R$ kuaterniyonunda,

$$q - \alpha q = 0$$

ise, q kuaterniyonuna temporal kuaterniyon denir. Burada q kuaterniyonunda,

$$S_q \neq 0, \boldsymbol{V}_q = 0$$

dir. Ayrıca p ve q gibi iki temporal kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı:

$$p \times q = -\langle p, q \rangle$$

şeklindedir. Dolayısıyla iki temporal kuaterniyon birbirine dikse kuaterniyonik çarpımları 0 olur.

Genel olarak bir q kuaterniyonu,

$$q = \frac{1}{2}(q + \alpha q) + \frac{1}{2}(q - \alpha q)$$

şeklinde bir uzay kuaterniyon ile bir temporal kuaterniyon toplamı olarak yazılabilir [2,7]

5.BÖLÜM

KUATERNİYONİK EĞRİLER VE FRENET ÇATI ELEMANLARI

Bu bölümde, 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik eğriler tanımlanıp, kuaterniyonik Frenet formülleri hesaplanmıştır. Bununla birlikte kuaterniyonik eğrilikler ile Frenet vektörlerinin türevleri arasındaki formüller verilmiştir.

Tanım 5.1. Q_R reel kuaterniyonlar cümlesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \xi : I \subset \mathbb{R} \to Q_R \\ s \to \xi(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(s)\boldsymbol{e}_i, \quad (1 \leq i \leq 3) \end{aligned} \tag{5.1}$$

olarak tanımlanan diferansiyellenebilir ξ eğrisine uzaysal kuaterniyonik eğri denir [8].

Teorem 5.1. $\xi : I \to E^3$, birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay parametresi ile verilsin. $\xi(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)$ kuaterniyonik Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \xi'(s) \\ \boldsymbol{n}_1(s) &= \frac{\xi''(s)}{\|\xi''(s)\|} \\ \boldsymbol{n}_2(s) &= \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) \end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklinde hesaplanır. Kuaterniyonik Frenet vektörleri arasında,

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{n}_1(s)\times\boldsymbol{n}_1(s)=\boldsymbol{n}_2(s)\times\boldsymbol{n}_2(s)=-1\\
&\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}_1(s)=\boldsymbol{n}_2(s)=-\boldsymbol{n}_1(s)\times\boldsymbol{t}(s)\\
&\boldsymbol{n}_1(s)\times\boldsymbol{n}_2(s)=\boldsymbol{t}(s)=-\boldsymbol{n}_2(s)\times\boldsymbol{n}_1(s)\\
&\boldsymbol{n}_2(s)\times\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{n}_1(s)=-\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}_2(s)
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır [2, 5].

Teorem 5.2. $\xi : I \to E^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi olmak üzere, $\xi(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)$ Frenet vektörleri,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}(s)=\frac{1}{\nu(s)}\xi'(s), \quad \|\xi'(s)\|=\nu(s)\\
&\boldsymbol{n}_2(s)=\frac{\xi'(s)\times\xi''(s)+\nu(s)\nu'(s)}{\|\xi'(s)\times\xi''(s)+\nu(s)\nu'(s)\|}\\
&\boldsymbol{n}_1(s)=\boldsymbol{n}_2(s)\times\boldsymbol{t}(s)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklindedir [2, 5].

Teorem 5.3. $\xi : I \to E^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi ve $\xi(s)$ noktasındaki eğriliği ile burulması sırasıyla, $k(s), r(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&k(s)=\frac{\|\xi'(s)\times\xi''(s)+\nu(s)\nu'(s)\|}{\nu^3(s)}, \quad \|\xi'(s)\|=\nu(s)\\
&r(s)=\frac{h(\xi'(s)\times\xi''(s),\xi'''(s))}{\|\xi'(s)\times\xi''(s)+\nu(s)\nu'(s)\|^2}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

şeklinde hesaplanır [2, 5].

Teorem 5.4. $\xi : I \to E^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay parametresi ile verilsin. ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet $3-$ayaklısı $\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)$ ve eğrilikleri de $k(s), r(s)$ olmak üzere, eğrisi boyunca vektörlerinin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= k(s)\boldsymbol{n}_1(s) \\ \boldsymbol{n}_1(s) &= -k(s)\boldsymbol{t}(s) + r(s)\boldsymbol{n}_2(s) \\ \boldsymbol{n}_2'(s) &= -r(s)\boldsymbol{n}_1(s) \end{aligned} \tag{5.6}$$

biçimindedir. Bu formüllere kuaterniyonik Frenet Türev Yapı formülleri denir ve matris ifadesi,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}_1{}' \\ \boldsymbol{n}_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_1 \\ \boldsymbol{n}_2 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

dir [2,5].

Tanım 5.5. Q_R reel kuaterniyonlar kümesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\gamma : I \subset \mathbb{R} \to Q_R \\ &\qquad s \to \gamma(s) = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i(s)\boldsymbol{e}_i, \quad (0 \le i \le 3), \ (\boldsymbol{e}_0 = 1) \end{aligned} \tag{5.8}$$

şeklinde tanımlanan eğriye kuaterniyonik eğri denir [2,8].

Teorem 5.5. $\gamma: I \to Q_R$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. γ kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}_1(s), \boldsymbol{N}_2(s), \boldsymbol{N}_3(s)$ kuaterniyonik Frenet vektörleri,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} \\
\boldsymbol{N}_1(s) &= \frac{\|\gamma'(s)\|^2 \gamma''(s) - h(\gamma'(s), \gamma''(s))\gamma'(s)}{\left\| \|\gamma'(s)\|^2 \gamma''(s) - h(\gamma'(s), \gamma''(s))\gamma'(s) \right\|} \\
\boldsymbol{N}_2(s) &= \eta \boldsymbol{N}_3(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \\
\boldsymbol{N}_3(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \gamma'''(s)}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \gamma'''(s)\|}, \quad (\eta = \pm 1)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

dır.

Teorem 5.6. $\gamma: I \to Q_R$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. γ kuaterniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki kuaterniyonik Frenet eğrilikleri, sırasıyla $K(s), k(s)$ ve $(r(s) - K(s))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
K(s) &= \frac{\left\| \|\gamma(s)\|^2 \gamma''(s) - h(\gamma'(s), \gamma''(s))\gamma'(s) \right\|}{\|\gamma'(s)\|^4} \\
k(s) &= \frac{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \gamma'''(s)\| \|\gamma'(s)\|}{\left\| \|\gamma'(s)\|^2 \gamma''(s) - h(\gamma'(s), \gamma''(s))\gamma'(s) \right\|} \\
r(s) - K(s) &= \frac{h(\gamma^{(4)}(s), \boldsymbol{N}_3(s))}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \gamma'''(s)\| \|\gamma'(s)\|}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde hesaplanır [2,5].

Teorem 5.7. $\gamma : I \to Q_R$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. $\gamma(s)$ noktasındaki kuaterniyonik Frenet $4-$ayaklısı $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}_1(s), \boldsymbol{N}_2(s), \boldsymbol{N}_3(s)$ ve eğrilikleri de $K(s), k(s)$ ve $(r(s)-K(s))$ olmak üzere, $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca Frenet vektörleri ile eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}'(s) = K(s)\boldsymbol{N}_1(s), \qquad K(s) = \|\boldsymbol{T}(s)\| \\
&\boldsymbol{N}_1(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{T}(s) \\
&\boldsymbol{N}_1'(s) = -K(s)\boldsymbol{T}(s) + k(s)\boldsymbol{N}_2(s) \\
&\boldsymbol{N}_2(s) = \boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{T}(s) \\
&\boldsymbol{N}_2'(s) = -k(s)\boldsymbol{N}_1(s) + (r(s) - K(s))\boldsymbol{N}_3(s) \\
&\boldsymbol{N}_3(s) = \boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{T}(s) \\
&\boldsymbol{N}_3'(s) = -(r(s) - K_\gamma(s))\boldsymbol{n}_2'(s)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Bu formüllere kuaterniyonik Frenet formülleri denir ve matris ifadesi,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}_1' \\ \boldsymbol{N}_2' \\ \boldsymbol{N}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & k & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{N}_3 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

şeklindedir. Burada seçilen $\gamma(s)$ eğrisinin birim teğet vektörü $\boldsymbol{T}(s)$,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \boldsymbol{N}_1(s)\times\alpha\boldsymbol{T}(s) \\ \\ \boldsymbol{N}_1(s) &= \boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}(s) \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

bağıntısı ile verildi. O halde $\gamma(s)$, kuaterniyonik eğrisinin burulması $\xi(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliğidir. Ayrıca $\xi(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin burulması $r(s)$ ve $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliği $K(s)$ olmak üzere, $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisinin üçüncü eğriliği $(r(s)-K(s))$ dir.

6. BÖLÜM

KÜRESEL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde E^3 ve E^4 Öklid uzayında herhangi bir kuaterniyonik uzay eğrisinin küreselliğini veren diferensiyel denklemler hesaplanılmıştır. Ayrıca, bu denklemlerin kuaterniyonik çatıya göre bazı karakterizasyonları verilmiştir.

6.1. E^3 Öklid Uzayındaki Küresel Kuaterniyonik Eğriler için Diferensiyel Denklemler ve Karakterizasyonları

E^3 Öklid uzayında kuaterniyonik bir uzay eğrisi bir önceki bölümde tanımlanmıştır. Verilen herhangi bir kuaterniyonik uzay eğrisinin küresel kuaterniyonik eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 6.1.1. ξ, s yay parametresi ile verilen bir uzay kuaterniyonik eğrisi olsun. Bu kuaterniyonik uzay eğrisinin küresel kuaterniyonik eğri olması için gerek ve yeter şart,

i) $k(s) \neq 0$ (Eğrinin burulması tek olarak belirlidir.)

ii) $f \in C^1$ fonksiyonu $k(s), r(s)$ kuaterniyonik eğrisinin eğrilikleri olmak üzere,

$$\frac{d\rho}{ds} = r(s) f \qquad (6.1.1)$$

$$\frac{df}{ds} = -r(s)\rho \qquad (6.1.2)$$

dır.

Burada $\rho(s)=\dfrac{1}{k(s)}$ kuaterniyonik eğrinin eğrilik yarıçapıdır. Kuaterniyonik eğrinin burulma, $r(s)\neq 0$ olmak zorunda değildir.

Bu teoremin (6.1.1) denklemi kullanılarak E^3 Öklid uzayında küresel kuaterniyonik bir eğri olma şartını veren diferensiyel denklem,

$$f=\frac{1}{r(s)}\frac{d\rho}{ds}$$

olduğundan ve bu fonksiyonun s ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{df}{ds}=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{r(s)}\frac{d\rho}{ds}\right]=-r(s)\rho$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{r}\frac{d\rho}{ds}\right]+\rho r=0 \tag{6.1.3}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin tam çözümünü ilk olarak Breuer ve Gottlieb 1971 de vermiştir. Verilen bu çözüm küresel kuaterniyonik eğriler için,

$$\rho(s)=A\cos\int r(s)ds+B\sin\int r(s)ds \tag{6.1.4}$$

şeklindedir. Kuaterniyonik eğrinin eğrilik yarıçapının s yay parametresine bağlı çözümünde A ve B katsayıları herhangi bir sabittir [3, 10].

Şimdi E^3, Öklid uzayında bir $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin küresel kuaterniyonik bir eğri olduğunu (6.1.1) denklemini kullanarak gösterelim.

(6.1.1) denkleminin her iki tarafını ρ ile çarparak (6.1.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{df}{ds} = -r(s)\rho, \quad \rho\frac{d\rho}{ds} = -f\,\frac{df}{ds} \tag{6.1.5}$$

elde edilir. Buradan,

$$\rho\frac{d\rho}{ds} + f\,\frac{df}{ds} = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir ve çözüldüğünde,

$$\rho^2 + f^2 = a^2 \tag{6.1.6}$$

elde edilir. Burada a sabit olup kuaterniyonik eğrinin üzerinde bulunduğu kürenin yarıçapıdır. Böylece bu şartı sağlayan ξ kuaterniyonik uzay eğrisi küresel kuaterniyonik bir eğridir.

Sonuç 6.1.1. $\xi(s)$, E^3 Öklid uzayında $k(s)$ ve $r(s)$ kuaterniyonik Frenet eğrilikleriyle verilmiş, birim hızlı kuaterniyonik bir eğri olsun. $\rho(s) = \dfrac{1}{k(s)}$ kuaterniyonik eğrinin eğrilik yarıçapı olmak üzere,

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{r}\frac{d\rho}{ds}\right] + \rho r = 0 \tag{6.1.7}$$

diferensiyel denklemini sağlıyorsa kuaterniyonik uzay eğrisi küresel kuaterniyonik uzay eğrisidir.

Şimdi a yarıçaplı c merkezli $S^2(a)$ küresi üzerinde uzanan küresel kuaterniyonik uzay eğrilerini karakterize edeceğiz.

Teorem 6.1.2. $\xi=\xi(s)$ bir kuaterniyonik uzay eğrisi $S^2(a)$ küresi üzerinde uzanması için gerek ve yeter şart,

$$\left[\frac{1}{k(s)}\right]^2+\left\{\left[\frac{1}{k(s)}\right]'+\frac{1}{r(s)}\right\}^2=a^2 \tag{6.1.8}$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat: ξ**,** a yarıçaplı $S^2(a)$ küresi üzerinde uzansın. $S^2(a)$ küresinin merkezi 0 orijin noktası olsun. $\xi(s)$, $S^2(a)$ küresinde bir kuaterniyonik eğri olduğundan,

$$h(\xi,\xi)=a^2$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın s yay parametresine göre türev alınırsa,

$$h(\xi,\xi')+h(\xi',\xi)=0,\quad \xi'(s)=\boldsymbol{t}(s),$$

$$2h(\xi,\boldsymbol{t})=0$$

olur, tekrar türevi alındığında,

$$h(\xi',\boldsymbol{t})+h(\xi,\boldsymbol{t}')=0$$

$$1+h(\xi,k\boldsymbol{n}_1)=0$$

$$kh(\xi,\boldsymbol{n}_1)=-1$$

$$h(\xi,\boldsymbol{n}_1)=-\frac{1}{k} \tag{6.1.9}$$

elde edilir. $k\neq 0$ olur. r kuaterniyonik eğrinin burulmasınında sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, p,q,m herhangi reel kuaterniyon olmak üzere,

$$\xi(s)=p\boldsymbol{t}+q\boldsymbol{n}_1+m\boldsymbol{n}_2 \tag{6.1.10}$$

şeklinde yazabiliriz. ξ kuaterniyonik eğrisinde p,q,m kuaterniyon katsayıları,

$$p = h(\xi(s), \boldsymbol{t})$$

$$q = h(\xi(s), \boldsymbol{n}_1)$$

$$m = h(\xi(s), \boldsymbol{n}_2)$$

şeklinde hesaplanır. Kürede yarıçap vektörü teğet vektörüne $h-$ortogonal olduğundan ,

$$p = h(\xi(s), \boldsymbol{t}) = 0 \tag{6.1.11}$$

bulunur. p katsayısının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$q = h(\xi(s), \boldsymbol{n}_1) = -\frac{1}{k} \tag{6.1.12}$$

bulunur. q katsayısının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{k}\right]' &= h(\xi(s), \boldsymbol{n}_1)' \\
&= h(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1) + h(\xi(s), -k\boldsymbol{t} + r\boldsymbol{n}_2) \\
&= 0 - kh(\xi(s), \boldsymbol{t}) + rh(\xi(s), \boldsymbol{n}_2) \\
&= 0 - 0 + rh(\xi(s), \boldsymbol{n}_2) \\
&= rh(\xi(s), \boldsymbol{n}_2) = rm
\end{aligned}$$

$$m = \left[-\frac{1}{k}\right]' \frac{1}{r} \tag{6.1.13}$$

olduğu görülür. Bu taktirde,

$$\xi(s) = -\frac{1}{k}\boldsymbol{n}_1 - \left[-\frac{1}{k}\right]' \frac{1}{r}\boldsymbol{n}_2 \tag{6.1.14}$$

küresel kuaterniyonik eğrinin konum vektörü Frenet çatı elemanları ve eğrilikleri yardımıyla yazılabilir. Buradan kürenin yarıçapından norm alarak,

$$a^2 = \|\xi - 0\|$$

$$a^2 = \left[\frac{1}{k}\right]^2 + \left\{\left[-\frac{1}{k}\right]' \frac{1}{r}\right\}^2 \tag{6.1.15}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Tersine olarak, ξ kuaterniyonik uzay eğrisinin teoremin şartını sağladığını kabul edelim. $\xi = c(s)$ kuaterniyonik uzay eğrisi,

$$c(s) = \xi + \frac{1}{k(s)}\boldsymbol{n}_1 + \left[\frac{1}{k(s)}\right]' \frac{1}{r(s)}\boldsymbol{n}_2 \tag{6.1.16}$$

şeklinde tanımlansın. $a(s)$ fonksiyonu da

$$a^2 = \xi(s) - c(s)^{\,2} = \left[\frac{1}{k(s)}\right]^2 + \left\{\left[-\frac{1}{k(s)}\right]' \frac{1}{r(s)}\right\}^2 \tag{6.1.17}$$

olarak tanımlayalım. Eğer $c(s)$ ve a^2 nin s yay parametresine göre türevleri alınıp kuaterniyonik Frenet türev formülleri kullanılırsa,

$$c' = 0 \text{ ve } a' = 0$$

olur. Böylece $\xi = c(s)$, s parametreli kuaterniyonik uzay eğrisi bir n noktasına düşer. $c(s)$ fonksiyonunda n kuaterniyonik bir noktadır. Böylece $\xi(s)$, c merkezli a yarıçaplı $S^2(a)$ küresi üzerinde uzanır.

6.2. E^4 Öklid Uzayındaki Küresel Kuaterniyonik Eğriler için Diferensiyel Denklemler ve Karakterizasyonları

1981 de Dannon E^3 Öklid uzayında verilen küresel eğri olma şartını E^4 Öklid uzayındaki eğrilere genişletmiştir. E^4 Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğri tanımı bir önceki bölümde verilmiştir. E^4 Öklid uzayında, kuaterniyonik bir eğrinin küresel kuaterniyonik bir eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem. 6.2.1. γ**,** s yay parametreli küresel kuaterniyonik bir eğri olması için gerek ve yeter şart $k \neq 0$ için,

$$\frac{d\rho}{ds} = kf \tag{6.2.1}$$

$$\frac{df}{ds} = -k\rho + [r - K]g \tag{6.2.2}$$

$$\frac{dg}{ds} = -[r - K]f \tag{6.2.3}$$

olacak şekilde, $f(s), g(s) \in C^2$ fonksiyonları vardır. Burada $\rho = \dfrac{1}{K(s)}$ kuaterniyonik eğrinin eğrilik yarıçapıdır ve fonksiyonları kuaterniyonik Frenet eğrilikleridir. Bu durumda $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi küre üzerine uzanır.

Şimdi, E^4, $4-$boyutlu Öklid uzayında verilen küresel kuaterniyonik eğri denklemlerinden E^3, $3-$ boyutlu Öklid uzayındaki gibi (6.2.1), (6.2.2) ve (6.2.3) denklemlerinden elde edelim.

(6.2.1) denkleminin her iki tarafını ρ eğrilik yarıçapı ile çarpılırsa,

$$\rho\frac{d\rho}{ds}=\rho k f \tag{6.2.4}$$

elde edilir. (6.2.2) denkleminin her iki tarafını f fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$f\frac{df}{ds}=-fk\rho+f[r-K]g \tag{6.2.5}$$

elde edilir. (6.2.3) in denkleminin her iki tarafını g fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$g\frac{dg}{ds}=-g[r-K]f \tag{6.2.6}$$

elde edilir. Elde edilen (6.2.4), (6.2.5) ve (6.2.6) denklemleri taraf tarafa toplanıldığında,

$$\rho\frac{d\rho}{ds}+f\frac{df}{ds}+g\frac{dg}{ds}=0 \tag{6.2.7}$$

diferensiyel denklemini elde ederiz. Bu diferensiyel denklem çözülürse,

$$\rho^2+f^2+g^2=b^2 \tag{6.2.8}$$

elde edilir. Burada b sabit olup üzerinde bulunduğu S^3 kürenin yarıçapıdır. Böylece bu şartı sağlayan $\gamma(s)$, kuaterniyonik eğrisi E^4 te küresel kuaterniyonik bir eğridir.

$\gamma: I\to Q_R$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s\in I$ parametresiyle verilsin. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in Q_R$, eğrilikleri de $K(s),k(s)$ ve $[r(s)-K(s)]$ olmak üzere,

$$\gamma(s)=\lambda_1(s)\boldsymbol{T}+\lambda_2(s)\boldsymbol{N}_1+\lambda_3(s)\boldsymbol{N}_2+\lambda_4(s)\boldsymbol{N}_3 \tag{6.2.9}$$

eğrisinde, $\lambda_i(1\le i\le 4)$ kuaterniyon katsayıları,

$$\lambda_1(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{T})$$

$$\lambda_2(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{N}_1)$$

$$\lambda_3(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{N}_2)$$

$$\lambda_4(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{N}_3)$$

şeklinde hesaplanır. Kürede yarıçap vektörü teğet vektörüne $h-$ortogonal olduğundan ,

$$\lambda_1(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{T})=0 \tag{6.2.10}$$

bulunur. $\lambda_1(s)$ katsayısının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\lambda_2(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{N}_1)=-\frac{1}{K} \tag{6.2.11}$$

bulunur. $\lambda_2(s)$ katsayısının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\lambda_3(s)=h(\xi(s),\boldsymbol{N}_2)=\left[\frac{1}{K}\right]'\frac{1}{k} \tag{6.2.12}$$

bulunur. Aynı şekilde $\lambda_3(s)$ katsayısının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\lambda_4(s)=h(\gamma(s),\boldsymbol{N}_3)=\frac{1}{r-K}\left[\left[-\frac{1}{K}\right]'\frac{1}{k}\right]' \tag{6.2.13}$$

elde edilir. Böylece,

$$\gamma(s)=-\frac{1}{K}\boldsymbol{N}_1+\left[\frac{1}{K}\right]'\frac{1}{k}\boldsymbol{N}_2+\frac{1}{(r-K)}\left[\left[-\frac{1}{K}\right]'\frac{1}{k}\right]'\boldsymbol{N}_3 \tag{6.2.14}$$

küresel kuaterniyonik eğrinin konum vektörü Frenet çatı elemanları ve eğrilikleri yardımıyla yazılabilir.

(6.2.1) ve (6.2.2) denklemlerinde E^4 Öklid uzayındaki küresel kuaterniyonik eğri olma şartı altında f ve g fonksiyonlarını yalnız bırakıp s yay parametresine göre türevi alındığında,

$$f = \frac{1}{k}\frac{d\rho}{ds}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{k}\frac{d^2\rho}{ds^2} = -k\rho + r - K\ g \tag{6.2.15}$$

elde edilir. Her iki tarafın tekrar s 'ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{1}{k}\frac{d^3\rho}{ds^3} = -k\frac{d\rho}{ds} + (r-K)\frac{dg}{ds} \tag{6.2.16}$$

elde edilir. (6.2.16) denklemini düzenlemek için (6.2.1), (6.2.2) ve (6.2.3) denklemlerini kullanalım.

$$f = \frac{1}{k}\frac{d\rho}{ds}$$

$$\frac{dg}{ds} = -(r-K)\frac{1}{k}\frac{dg}{ds}$$

$$\frac{dg}{ds} = -\frac{(r-K)}{k}\frac{dg}{ds} \tag{6.2.17}$$

elde edilir. (6.2.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{k}\frac{d^3\rho}{ds^3} = -k\frac{d\rho}{ds} - \frac{(r-K)(-(r-K))}{k}\frac{d\rho}{ds}$$

$$\frac{1}{k}\frac{d^3\rho}{ds^3} + k\frac{d\rho}{ds} + \frac{(r-K)^2}{k}\frac{d\rho}{ds} = 0$$

elde edilir. $(r-K)$ ile sadeleştirilirse,

$$\frac{1}{k(r-K)}\frac{d^3\rho}{ds^3}+\left[\frac{k}{r-K}\right]\frac{d\rho}{ds}+\left[\frac{r-K}{k}\right]\frac{d\rho}{ds}=0$$

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{k(r-K)}\frac{d^2\rho}{ds^2}+\left[\frac{k}{r-K}\right]\rho\right\}+\left[\frac{r-K}{k}\right]\frac{d\rho}{ds}=0$$

denklemi elde edilir. Tekrar düzenlenirse,

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(r-K)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\frac{d\rho}{ds}\right)+k\rho\right]\right\}+\left[\frac{r-K}{k}\right]\frac{d\rho}{ds}=0 \qquad (6.2.18)$$

E^4 te küresel kuaterniyonik eğrileri karakterize eden diferensiyel denklem elde edilir. Burada $\rho=\frac{1}{K}$, k ve $[r-K]$ sıfırdan farklıdır.

s yay parametresini başka bir ν parametresine $\nu=\int k(s)ds$ dönüşümü uygulanırsa, küresel kuaterniyonik eğri olmayı veren diferensiyel denklem aşağıdaki şekle indirgenir.

$$\frac{d}{d\nu}\left\{\left[\frac{k(\nu)}{r(\nu)-K(\nu)}\right]\left(\frac{d^2\rho}{ds^2}+\rho\right)\right\}+\left[\frac{r(\nu)-K(\nu)}{k(\nu)}\right]\frac{d\rho}{d\nu}=0 \qquad (6.2.19)$$

Burada $\left[\frac{k}{r-K}\right]=h(\nu)$ olarak alındığında,

$$\frac{d}{d\nu}\left[h(\nu)\left(\frac{d^2\nu}{d\nu^2}\right)\right]+\frac{1}{h(\nu)}\frac{d\rho}{d\nu}=0 \qquad (6.2.20)$$

$h(\nu)$ bilinmeyenli Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir.Bu Bernoulli diferensiyel denklemin çözümünden, küresel kuaterniyonik eğrilerin karakterisazyonunu veren lineer olmayan aşağıdaki denklem elde edilir. r sabit olmak üzere,

$$h^2\left[\frac{d^2\rho}{d\nu^2}+\rho\right]^2+\left[\frac{d\rho}{d\nu}\right]^2+\rho^2=r^2 \tag{6.2.21}$$

(6.2.14) denkleminde, $\lambda(s)=\int(r-K)ds$ dönüşümünü uygulanırsa,

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{(r-K)}{k}\frac{d\rho}{d\lambda}\right]+\frac{r}{r-K}\rho\right\}+\left[\frac{r-K}{k}\right]\frac{d\rho}{d\lambda}=0 \tag{6.2.22}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Görüldüğü üzere (6.2.20), (6.2.21) ve (6.2.22) diferensiyel denklemlerinin her biri (6.2.18) küresel kuaterniyonik eğri olma şartına eşittir.

Sonuç 6.2.1. $\gamma(s)$, E^4 Öklid uzayında $K(s), k(s)$ ve $r(s)-K(s)$ kuaterniyonik Frenet eğrilikleriyle verilmiş, birim hızlı kuaterniyonik bir eğri olsun.

$$\rho(s)=\frac{1}{K(s)}$$

Kuaterniyonik eğrinin eğrilik yarıçapı olmak üzere,

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{r-K}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\frac{d\rho}{ds}\right)+k\rho\right]\right\}+\left[\frac{r-K}{k}\right]\frac{d\rho}{ds}=0 \tag{6.2.22}$$

diferensiyel denklemini sağlıyorsa $\gamma(s)$ kuaterniyonik eğrisi küresel kuaterniyonik bir eğridir.

SONUÇ

E^3, $3-$boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin Frenet üçyüzlüsünün birim vektörleri için küresel göstergeler, S^2 birim küresi üzerine düşmektedir. E^4 Öklid uzayında Frenet dörtyüzlüsünün birim vektörleri için küresel göstergeler, S^3 birim küresi üzerinde düşmektedir.

Bu çalışmada kuaterniyonik uzay eğrilerini karakterize eden diferensiyel denklemin çözümünden S^2 küresinin denklemi elde edilmiştir. Aynı şekilde kuaterniyonik eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemin çözümünden, S^3 küresinin genel denklemi elde edilmişitir.

Son olarak, E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında küresel eğri denklemleri kullanılarak, küresel kuaterniyonik eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler elde edilmiştir. Elde edilen bu diferensiyel denklemlerin çözümlerinin küre yüzeyi üzerine düştükleri görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] ARNOL'D, V., I., The Geometry of Spherical Curves And The Algebra of Quaternions. Russian Math. Surveys. 1995, Volume 50:1, 1-68.

[2] BARATHI, K., NAGARAJ, M. , Quaternion Valued Function of A Real Variable Serret – Frenet Formulae. Indian J. Pure Appl. Math. 1987, 18(6): 507–511.

[3] BREUR, S., GOTTLIEB, D., Explicit Characterization of Spherical Curves. Proc., Amer. Math. Soc. 1971, 27, 126 – 127.

[4] DEMİR, S. Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları. Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilimdalı, Eskişehir, 2003, 130 s. (Doktora Tezi).

[5] DEMİR, S., ÖZDAŞ K., Reel kuaterniyonlarla Serret – Frenet Formülleri. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. 2005, 9(3), 1-7.

[6] HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, 1998.

[7] HACISALİHOĞLU, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No:2, 1983, 338 s.

[8] KARADAĞ, M., SİVRİDAĞ, A. İ., Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri. Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 1997, 13 (1,2), 23 – 36.

[9] SABUNCUOĞLU, A., Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları, Ankara, 2004, 511 s.

[10] SEZER, M., Differential Equations and Integral Characterizations For E^4 Spherical Curves. Doğa 1989, 88580 – 174.

[11] SOYDAŞ, M., Bikuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulanması. Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Eskişehir, 2003, 68 s. (Yüksek Lisans Tezi).

.[12] O'NEIL, B., Elementary Differantial Geometry. Academic Pres., Newyork, 1966, 405 s.

[13] WONG, Y. C., A Global Formulation of the Condition for a Curve to Lie in a Sphere. Monatsh. Math. 1963, 67, 363 – 365.

[14] Kreyzig, E. Differential Geometry, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1959, 361 p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gökhan ZEYTİN

Doğum Yeri : Soma – Manisa

Doğum Tarihi : 1986

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : gz.gokhan.zeytin@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Kırkağaç Süper Lisesi, 2004.

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011.