T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

Pertürbasyon-Sonlu Farklar Metodunun Titreşim Problemlerine Uygulaması

Emine KAHRAMAN

Danışman
Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR
II. Danışman
Doç. Dr. B. Gültekin SINIR

MANİSA–2018

Emine KAHRAMAN

Pertürbasyon-Sonlu Farklar Metodunun Titreşim Problemlerine Uygulaması

2018

TEZ ONAYI

Emine KAHRAMAN tarafından hazırlanan **"Pertürbasyon-Sonlu Farklar Metodunun Titreşim Problemlerine Uygulaması"** adlı tez çalışması 15/03/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak savunulmuş ve **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman	**Yrd. Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
II. Danışman	**Doç. Dr. B. Gültekin SINIR** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Necdet BİLDİK** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. H. Seçil ARTEM** İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Erkan DOĞAN** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Emine KAHRAMAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

w	Düşey doğrultudaki yer değiştirme
u	Yatay doğrultudaki yer değiştirme
$a(x)$	Enine kesit ve kütle değişimi temsil eden fonksiyon
x	Yapı elemanının yönünü gösteren konum değişkeni
t	Zaman değişkeni
$y(x,t)$	Enine deplasman
$L_1[y]$	Rijit yapı elemanı
$L_2[y]\cos\Omega_1 t$	Parametrik zorlama terimi
$F(x)\cos\Omega_2 t$	Harmonik dış kuvvet
$F(x)$	Dış kuvvetin genliği
Ω_1	İç zorlama frekansı
Ω_2	Dış zorlama frekansı
ε	Boyutsuz çok küçük bir parametre
N	Alt aralık sayısı
L	İki mesnet arası uzunluk
A	Kesit alanı
I	Atalet momenti
E	Elastisite modülü
$\hat{\mu}$	Lineer viskoz sönüm katsayısı
$\hat{k}$	Yay sabiti
$\hat{f}$	Dış zorlama kuvveti
$\hat{\Omega}$	Dış zorlama frekansı
m	Birim kesit kütlesi
$\hat{P}(\hat{t})$	Eksenel harmonik basınç yükü
$\langle \hat{x}-\hat{\eta}_j \rangle^{-1}$	Singülerite fonksiyonu
ρ	Yoğunluk
$\bar{M}_j$	Konsantre kütle
$\hat{g}$	Dış zorlama genliği

T_0	Hızlı zaman ölçeği
T_1	Yavaş zaman ölçeği
T_2	Daha yavaş zaman ölçeği
D_n	T_n 'ye göre türev
ω_n	Doğal frekans
A_n	Kompleks genlik
$\bar{A}_n$	Kompleks genliğin eşleniği
$k.e.$	Kompleks eşlenik
i	Kompleks sayı
y_i	İlgili perturbasyon mertebesindeki çözüm fonksiyonu
$\hat{}$	Boyutlu ifadeler için gösterge

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLO DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans öğrenim hayatıma adım attığım ilk günden beri benimle ilgilenip yol gösteren, her zaman destek ve katkıda bulanan danışman hocam Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR'e, engin bilgileri ve tecrübesi ile beni aydınlatan, bu yolda bilgi dağarcığımı genişleten başarıya ulaşmam için sürekli teşvikte bulunan maddi-manevi kazanımlar sağlayan ve tüm zorlu aşamalarda yanımda olup, desteğini esirgemeyen diğer danışman hocam Doç. Dr. B. Gültekin SINIR'a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen aileme, eşime ve üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerime, dostlarıma ve yakınlarıma yürekten teşekkür ederim.

Emine KAHRAMAN
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans

Pertürbasyon-Sonlu Farklar Metodunun Titreşim Problemlerine Uygulaması

Emine KAHRAMAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR
II. Danışman: Doç. Dr. B. Gültekin SINIR

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, süreksizlik fonksiyonları, çözülebilirlik şartı, self-adjointlik şartı gibi bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Ayrıca sonlu farklar yöntemi ve pertürbasyon metodu kullanılmıştır.

İkinci bölümde, genel model çözüm prosedürü farklı bir teknik ile sunulmuştur. Ayrıca her bir durum ayrı ayrı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, genel modelin bir uygulaması olarak Winkler tipi elastik temel üzerindeki kirişin enine titreşimleri, parametrik eksenel kuvvete maruz düşey olarak yerleştirilmiş çoklu yay mesnetli kirişler ve kütle-kiriş sistemi verilmiştir. Malzemeden ve geometriden bağımsız sonuçlar elde etmek için denklemler boyutsuz hale getirilmiştir.

Son bölümde ise sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Süreksizlik Fonksiyonları, Sonlu Farklar Yöntemi, Çok Zaman Ölçekli Metot, Genel Model

2018, 67 Sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

The Application to the vibration problems of Perturbation - Finite Differences Method

Emine KAHRAMAN

Manisa Celal Bayar University
The Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Assoc. Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR
Assoc. Prof. Dr. B. Gültekin SINIR

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some basic concepts, such as discontinuous functions, solvability condition, self-adjoint condition are given. Besides, finite differences technique and method of multiple time-scales are introduced.

In the second chapter, the procedure of general solution is presented by a different solution technique. Furthermore, each case is examined separately.

In the third chapter, transverse vibrations of beam lying on Winkler type-foundation, the beams with multiple span under vertically spring-support subjected to parametric axial force and the beam-mass system are given as an application of the general model. The equation is become non-dimensional to obtain independent results from material and geometry.

In the last chapter, conclusion and suggestions are introduced.

Keywords: Discontinuous Functions, Finite Difference method, Multi time-scale method, General model.

2018, 67 Pages

1. GİRİŞ

Fen bilimleri, mühendislik ve temel bilimler gibi alanlarda karşılaşılan problemler bir matematiksel model kurularak ele alınır. Böylece, elde edilen model sayesinde sistemin davranışına ilişkin çözüm bulunur. Bu model ortaya konulurken oluşturulan çözüm algoritmasının geçerli olması için, model yapısının sistemi tanımlama ve analiz etmeye uygun olması gerekir [1].

Bir yapı, kolon, kiriş, döşeme gibi farklı yapı elamanlarından oluşmaktadır. Yapılardaki çeşitli durumlara bağlı olarak yapı elemanlarında bazı süreksizliklerle karşılaşıla bilinir. Örneğin bir kirişte oluşan çatlak, kiriş boyunca belli aralıklarla yerleştirilmiş mesnetler, kiriş üzerinde bulunan tekil kuvvetler veya aralıklı olarak yerleştirilmiş konsantre kütleler gibi durumlar yapı elamanlarında süreksizliklere neden olur. Süreksizlik içeren yapı elemanlarının statik veya dinamik davranışlarının analizinde süreksizlik durumu bazı sorunlar yaratmaktadır [2].

Literatürde yapı elemanlarının dinamik analizinde kullanılan üç farklı çözüm yöntemi vardır. Bunlar analitik yöntemler, yarı analitik yöntemler ve nümerik yöntemlerdir. Analitik veya yarı analitik yöntemlerle, ilgili yapı elemanın davranışını analizi etmek istersek süreksizliğe sebep olan noktalar arasında kalan her açıklık için ayrı ayrı denklemler yazılmalıdır. Çözüm için sınır koşulları haricinde süreksizliğin görüldüğü her nokta için uygunluk koşulları da yazılmalıdır [3-6]. Az sayıdaki süreksizlik noktası için analitik veya yarı analitik çözüm yapılabilirken süreksizlik nokta sayısı arttıkça yazılan denklem sayısı ve uygunluk koşulları sayısı artacağından ve bu durumun bilgisayar programını yazmak zorlaşacağından çözüm yapmak giderek daha da karmaşık bir hal alır. Belirli bir süreksizlik sayısından sonra ise çözüm imkânsız hale gelebilir. Bundan dolayı, bu tip problemlerin çözümünde nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi sayısal yöntemler gerçeğe çok yakın sonuçlar verdiği görülür [7]. Lanker ve ark. [8] düzgün olmayan bölgeler üzerinde tanımlanan problemleri sonlu farklar metodunu kullanarak, Laplace denklemi ve kararlı olmayan hal için ısı iletim denkleminin çözümlerini bulmuşlardır. Hassanien ve ark. [9] sonlu farklar metodunu kullanarak bir boyutlu Burgers denklemini çözmüştür. Yılmaz [10] dairesel plağı temsil edecek yeni bir şeklin çözümünde sonlu farklar yöntemini uygulamıştır. Deplasman ve moment değerleri bu metot ile elde edilmiş, bu değerler gerçek çözümle kıyaslanmıştır. Günay [11] kısmi diferansiyel denklemle modellenen temel model denklemlerin çözümünde sonlu farklar metodunu kullanarak akışkan maddelerin hareketlerini analiz edip, literatürde yer alan analitik çözüm ve diğer çalışmaların sonuçlarını karşılaştırmıştır.

Bir yapının dinamik davranışını analiz etmek için kullanılan en önemli yöntemlerden biri de yarı analitik bir yöntem olan pertürbasyon metodudur. Bu metot ile lineer ve lineer olmayan modellerin analizleri kolaylıkla yapılabilir. Yapılan bu analizlerin sonucunda birfurkasyon noktaları ve stabilite şartları bulunup, zorlama tepki grafiği çizilebilir. Pertürbasyon yöntemleri arasında çok zaman ölçekli metot uygulaması en kolay ve en güçlü olandır [12-16].

Sürekli ortam titreşim problemleri çok farklı matematik modellere sahiptirler. Bunları ayrı ayrı çözmek yerine farklı problemleri kapsayan genel bir modeli ele alarak onun çözümünü yapmak oldukça pratik bir yöntemdir. Herhangi bir konuda, her durum için farklı matematiksel modeller oluşturup, her biri için ayrı ayrı çözüm elde etmek yerine, o konuya ait birçok problemi kapsayan genel bir model oluşturup, bu modelin genel çözüm algoritmasını oluşturmak uygulama açısından büyük kolaylık sağlamaktadır. Literatürde, genel çözüm algoritmasının oluşturulması ile ilgili birçok örnek vardır [1]. İlk olarak genel bir model pertürbasyon metodu ile Pakdemirli tarafından çözülmüştür [17]. Bu şekilde düzlem içi serbest ve sönümlü titreşimler, kuadratik ve kübik lineer olmayan keyfi operatörlerle genel olarak ifade edilen ve sonlu mod analizi yapılan başlangıç modeli oluşturulmuştur. Pakdemirli ve ark. [18] tarafından sonsuz modda genelleştirilmiş ve baskın rezonans durumu araştırılmıştır. Boyacı ve ark. [19] tarafından yalnızca kübik nonlineerliğe sahip bir başka model incelenmiştir. Boyacı [20] pertürbasyon metodunu, genel modeli sürekli ortam titreşimleri için zorlama ve sönüm terimi içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilen modele uygulamıştır. Öz [21], eksenel hareketli sürekli ortamların titreşimlerini incelemiş hareket denklemlerini yalnızca lineer denklemleri kullanarak elde etmiştir. Jiang ve ark. [22] ise elektromanyetik dalgalar yayan bir biçerdöver enerjisini eksenel yüklü kiriş ile modelleyip elde edilen matematiksel modele pertürbasyon metodu uygulayarak iç ve baskın rezonans durumlarını incelemişlerdir. Nayfeh ve ark. [23] sabit-sabit, sabit-ankastre ve ankastre-ankastre sınır koşullarına sahip kirişlerin burkulma sonrası yapılandırmaları için nonlineer burkulma problemini çözmüş, uygulanan eksenel yük açısından burkulma sonrası konfigürasyonlara ait kapalı formda bir çözüm bulmuşlardır. Ayrıca lineer burkulma probleminin çözülmesi sonucunda kritik burkulma yükleri ve bunların mod şekilleri elde edilerek bunların burkulma sonrası konfigürasyonlarının dinamik stabilitesi de incelenmiştir.

2. TEZİN AMACI

Burada kiriş, tel ve demir çubuk gibi bazı yapı elemanlarına karşılık gelen genel model ortaya konulmuştur. Literatürde genellikle sürekli modeller dolayısıyla bunlara karşılık gelen sabit katsayılı genel modeller mevcuttur. Buna karşı, bu çalışmada literatürden farklı olarak süreksiz modellere karşılık gelen değişken katsayılı bir genel model göz önüne alınmıştır. Yine alışılmışın dışında çözüm tekniği olarak klasik çözüm yerine, yani süreksiz modelde her bir açıklık için bir denklem yazıp bir sistemi çözmek yerine, tüm açıklıkları bir süreksizlik fonksiyonuyla modelleyerek tek bir denklem analiz edilmiştir. Böylece değişken katsayılı genel modelin çözülebilmesi için farklı bir çözüm prosedürü geliştirilmiştir. Bu teknik herhangi bir süreksizlik içeren yapı elemanı modelinin, pertürbasyon metodu ile dinamik analizinde avantaj sağlamaktadır. Öncelikle genel modele pertürbasyon yöntemlerinden biri olan çok zaman ölçekli metot uygulanmıştır. Bu metot ile sınır şartlarından bağımsız çözüm yapılarak, yöntem direk olarak kısmi diferansiyel denkleme uygulanmıştır. Elde edilen değişken katsayılı diferansiyel denklemin çözümünü analitik olarak elde etmek zor olacağından sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulmakta olup, bu amaçla burada sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Daha yüksek mertebeden denklemlerin çözümünde karşılaşılan integrallerin hesaplanmasında, nümerik integrasyon yöntemlerinden biri olan Simpson metodu ele alınmış, sayısal hesaplamalar için ise Maple paket programı tercih edilmiştir.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Lineer ve Lineer Olmayan Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X ’fden alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y üzerinde bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralına X uzayından Y uzayına bir “operatör” adı verilir ve L operatörünün x noktasındaki değeri $L(f;x)=g(x)$ şeklinde gösterilir.

Burada $L(f;x)=L(f(t);x)$ olmak üzere, L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur.

X ve Y bir lineer uzay ve $L: X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f+\beta g;x)=\alpha L(f;x)+\beta L(g;x) \tag{1.1}$$

koşulu sağlanıyorsa, bu takdirde L operatörüne “lineer operatör” denir [24,25].

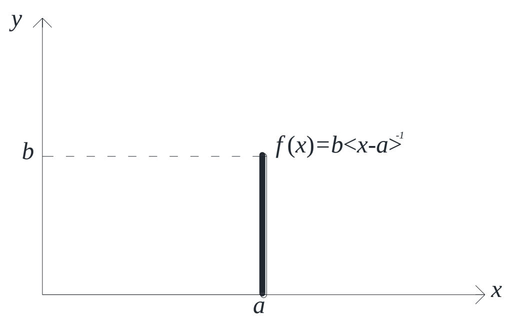
1.2. Süreksizlik Fonksiyonları

Süreksizlik fonksiyonları, matematiksel fonksiyonlarda farklı tip süreksizlikleri belirtir. Süreksizlik fonksiyonları çeşitli alanlarda farklı isimler ve simgeler altında ortaya çıkabilir. Bu fonksiyonlar, a bir süreksizlik ihtiva etmek üzere x ekseni boyunca konumunu temsil edecek şekilde, $\langle x-a\rangle^n$ olarak göz önüne alınır. n üs indisi $\langle x-a\rangle^n$ ’in süreksizlik tipini karakterize eden bir tam sayıdır. Süreksizlik fonksiyonları, singüler veya singüler olmayan fonksiyonlar olmak üzere ikiye ayrılır. Singüler olmayan süreksizlik fonksiyonu aynı zamanda negatif olmayan n $(n\geq 0)$ için adi fonksiyon olarak adlandırılır. Eğer, n bir negatif tam sayı ise, $\langle x-a\rangle^n$ alışılmış bir fonksiyon değildir. Bu takdirde, $x=a$ da güçlü singüler davranış gösteren bir süreksizlik fonksiyonu singülerite fonksiyonu olarak tanımlanır. $n=-1$ durumu literatürde iyi bilinen Dirac delta fonksiyonuna (δ) karşılık gelir [26]. Bu fonksiyonlar negatif olmayan kuvvetler için farklı isimler alır. Bazı süreksizlik fonksiyonları aşağıdaki tabloda verilmektedir.

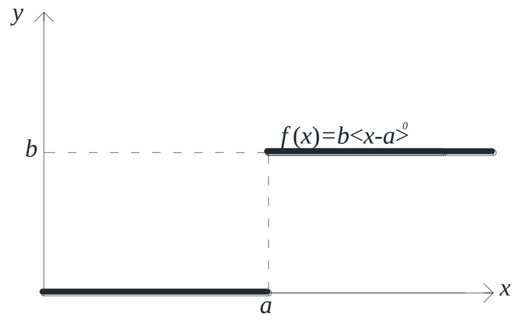
Tablo 1.1: Süreksizlik Fonksiyonlarının Tablosu [26]

İsim	Sembol	Tanım
(Dirac) Delta fonksiyonu	$\langle x-a\rangle^{-1}$	Delta fonksiyonunun antitürevi adım fonksiyonu
Adım fonksiyonu	$\langle x-a\rangle^{0}$	$x>a$ ise 1, aksi halde 0
Rampa fonksiyonu	$\langle x-a\rangle^{1}$	$x>a$ ise $x-a$, aksi halde 0
Parabolik rampa fonksiyonu	$\langle x-a\rangle^{2}$	$x>a$ ise $(x-a)^2$, aksi halde 0
…	…	…
n. Mertebeden Rampa fonksiyonu	$\langle x-a\rangle^{n}$	$x>a$ ise $(x-a)^n$, aksi halde 0 $(n\geq 0)$
$n\geq 0$ ve $x_0\leq a$ ise $n=0,1,2,\ldots$ için kullanışlı bir $\int_{x_0}^{x}\langle x-a\rangle^n dx=\frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1}$ integral formülü geçerlidir. x'in başlangıcı sol uçta olmak üzere, kiriş problemleri için, x_0 normal olarak sıfırdır. $n=-1$ ise, integral adım fonksiyonudur. Eğer $n=-2$ ise, integral delta fonksiyonudur.		

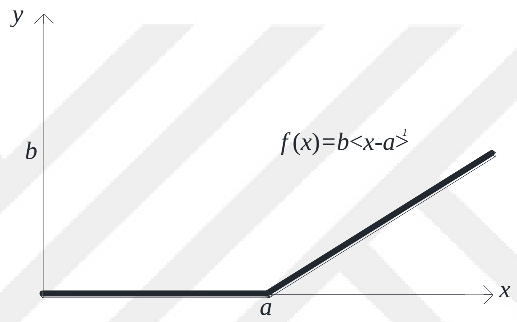
Farklı yükleme veya zemin durumları için ortaya çıkan süreksizlik fonksiyonları grafiklerle gösterilmiştir. Negatif ve negatif olmayan kuvvetler için ortaya çıkan süreksizlik fonksiyonları şekil 1.1, şekil 1.2 ve şekil 1.3'de gösterilmiştir [26].



Şekil 1.1. $n=-1$ için Dirac delta fonksiyonu.



Şekil 1.2. $n=0$ için adım fonksiyonu.



Şekil 1.3. $n=1$ için birim rampa fonksiyonu.

1.3. Bazı Özel Süreksizlik Fonksiyonları

1.3.1. Heaviside Adım Fonksiyonu

$$H(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

ile tanımlı süreksiz fonksiyona Heaviside Adım fonksiyonu denir.

Heaviside adım fonksiyonun $x=0$ daki türevi klasik anlamda tanımsız olup, literatürde, bu türev Dirac delta fonksiyonu olarak tanımlanır ve $\delta(x)$ ile gösterilir. Yani $H'(x)=\delta(x)$ şeklindedir.

1.3.2. Dirac Delta Fonksiyonu

Dirac delta fonksiyonu, sıfır hariç her yerde değeri sıfır olan genelleştirilmiş bir fonksiyondur ve

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{1.3}$$

biçiminde tanımlanır [27].

1.4. Çözülebilirlik Şartı

Çok zaman ölçekli metot gibi pertürbasyon tekniklerinin uygulamasında, ardarda çözüm gerektiren problemler elde edilir. Genellikle birinci mertebeden problem homojen olup, yüksek mertebeden problemler homojen değildir ve lineerdir. Yavaş zaman ölçeğine bağımlılığı tanımlamak için önce yüksek mertebeden problemler incelenir ve açılmış formunu oluşturan şartlar uygulamaya koyulur. Lineer olmayan basit titreşim problemlerinin çözümü için, sistem bizi küçük bölen terim ve seküler terimlerin yok edilmesine yönlendirir. Sadece birinci dereceden bağımsız denklem için küçük bölenler ve seküler terimin yok edilmesi için gerekli durumları belirlemek kolaydır. Her zaman sıfıra eşit olan seküler terimleri üreten terimlerin katsayılarının her bir kümesi elde edilmelidir. Fakat ana denklemleri eşleşmiş olan yüksek dereceli bazı sistemler için çok az olan seküler terimlere yol açan terimleri yok etmek daha gereklidir.

Çözülebilirlik durumları çeşitli sınır koşullarına sahip dördüncü mertebeden homojen olmayan denklemler için de türetilebilir [28].

1.5. Self-Adjointlik Şartı

Tanım: $a_k(x)\ (k=0,1,...,n)$, fonksiyonları yeter derecede türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$L=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}(x)\frac{d^k}{dx^k}=a_o(x)\frac{d^k}{dx^k}+a_1(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+a_n(x) \tag{1.4}$$

lineer diferansiyel operatörünün formal adjointi (biçimsel eşleniği) L^*,uygun bir φ fonksiyonu ile,

$$L^*\varphi=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left[a_{n-k}(x)\varphi(x)\right] \tag{1.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer L bir H hilbert uzayının tümü üzerinde tanımlı ise, bu takdirde

$$\langle Lu,v\rangle=\langle u,L^*v\rangle, \qquad \forall u,v\in H \tag{1.6}$$

bağlantısı sağlanır. Bu genel bir lineer operatör olan A için de geçerlidir. Buna göre,

$$\langle Af,g\rangle=\langle f,A^{*}g\rangle,\qquad \forall f,g\in H \tag{1.7}$$

biçiminde tanımlanan A^{*} adjoint operatörünün lineer olduğu gösterilebilir. Genelde A ve A^{*} operatörlerinin tanım kümesi farklıdır.

Tanım: Bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı A operatörü $A=A^{*}$ şartını sağlıyorsa, A operatörünün biçimsel self-adjoint (formal self-adjoint) olduğu söylenir. Buna ek olarak A ile A^{*} operatörlerinin tanım kümeleri de aynı ise, bu takdirde A'nın self-adjoint (kendine eşlenik) olduğu söylenir [29].

$X_n(x)$ ve $u(x)$, $[0,1]$ aralığında dördüncü mertebeden sürekli türevlere sahip iki fonksiyon olsun. Genel olarak L_i operatörünün L_i^{*} adjointi (ya da hermityen eşleniği)

$$\langle L_i[X_n],u\rangle=\langle u,L_i^{*}[X_n]\rangle \tag{1.13}$$

ile tanımlanır. Şimdi iç çarpım

$$\langle X_n,u\rangle=\int_0^1 X_n(x)u(x)dx \tag{1.14}$$

olacak şekilde, L_i operatörü için çözülebilirlik koşulu dikkate alınır [28]. $[0,1]$ aralığında sürekli dördüncü mertebeden türevlere sahip

$$\begin{aligned}L_i[X_n]&=p_4(x)X_n^{iv}(x)+p_3(x)X_n'''(x)+p_2(x)X_n''(x)\\&\quad+p_1(x)X_n'(x)+p_0(x)X_n(x)\end{aligned} \tag{1.15}$$

operatörünü göz önüne alalım. Buna göre adjoint problemini belirlemek için, (1.13) denkleminin sol tarafı

$$\begin{aligned}\langle L_i[X_n],u\rangle&=\int_0^1 L_i(X_n)u(x)dx\\&=\int_0^1\left[p_4uX_n^{iv}+p_3uX_n'''+p_2uX_n''+p_1uX_n'+p_0uX_n\right]dx\end{aligned} \tag{1.16}$$

biçiminde göz önüne alınır.

Türevler X_n'den u'ya aktarılarak (1.16) denklemine kısmi integrasyon uygulanır ve Green özdeşliğinden elde edilen sonuç denklem yeniden düzenlenirse,

$$\int_0^1 \left[L_i\left(X_n\right)u - X_n L^*\left(u\right)\right]dx = \{ p_4 u X_n''' - \left[p_4 u' + \left(p_4' - p_3 \right)u \right] X_n''$$
$$+\left[p_4 u'' + \left(2p_4' - p_3 \right)u' + \left(p_4'' - p_3' + p_2 \right)u \right] X_n' \qquad (1.17)$$
$$-\left[p_4 u''' + \left(3p_4' - p_3 \right)u'' + \left(3p_4'' - 2p_3' + p_2 \right)u' + \left(p_4''' - p_3'' + p_2' - p_1 \right)u \right] X_n \}_a^b$$

bulunur. Burada L_i operatörüne karşılık gelen L_i^* adjoint operatörü

$$L_i^*\left[u\right] = \left(p_4 u\right)^{iv} - \left(p_3 u\right)''' + \left(p_2 u\right)'' - \left(p_1 u\right)' + p_0 u \qquad (1.18)$$

biçimindedir. L_i ve L_i^* operatörlerinin birbirinin adjointi olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $L_i\left[X_n\right]=0$ diferansiyel denkleminin adjointi olan $L_i^*\left[u\right]=0$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Eğer $L_i = L_i^*$ ise, L_i operatörü self adjointtir. Buna göre, (1.15) ve (1.18) denklemleri karşılaştırıldığında ancak

$$p_3 = 2p_4' \text{ ve } p_1 = p_2' - p_4''' \qquad (1.19)$$

eşitlikleri sağlanırsa, L_i'nin self adjoint olacağı sonucuna varılır [28].

1.6. Nümerik İntegrasyon

Mühendislikte sık karşılaşılan matematiksel işlemlerden biri de integral işlemidir. Bilindiği gibi integral bir büyüklüğün toplam değerinin bulunması işlemidir. Dolayısıyla bir fonksiyonun belli sınırlar arasında integrali, fonksiyon eğrisinin altında ve sınır değerler arasında kalan toplam alanı vermektedir. Bu bakımdan integrasyon işlemi mühendislikte düzenli ve düzensiz şekillerin alanlarının veya hacimlerinin hesaplanmasında, ortalama değerlerin bulunmasında, alan ve eylemsizlik momentlerinin elde edilmesinde, toplam kütlenin bulunmasında, hız ve alınan yolların hesaplanmasında, transfer edilen toplam ısı miktarının hesabında vb. yaygın olarak kullanılır.

Her fonksiyonun integrali analitik olarak alınamayacağı gibi bazı durumlarda da fonksiyonun analitik ifadesi yerine belli bir aralıkta fonksiyonun aldığı sayısal değerler tablo halinde verilebilir. Her durumda, analitik veya tablo halinde verilen bir fonksiyonun integralini sayısal yöntemler kullanarak hesaplamak mümkündür. Sayısal integrasyon yöntemleri, eğri altındaki alanı dilimlere bölme ya da fonksiyon yerine verilen aralıktaki noktalardan geçen interpolasyon polinomlarını kullanma esasına dayanır [30].

1.6.1. Yamuk (Trapez) Kuralı

İnterpolasyon polinomu olarak, Gregory-Newton interpolasyon polinomu göz önüne alınır ve bu formülde $n=1$ alınırsa lineer interpolasyon formülü

$$y_p = y_0 + s.\Delta y_0 \tag{1.20}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$s = \frac{x-x_0}{h} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{1}{h}dx \tag{1.21}$$

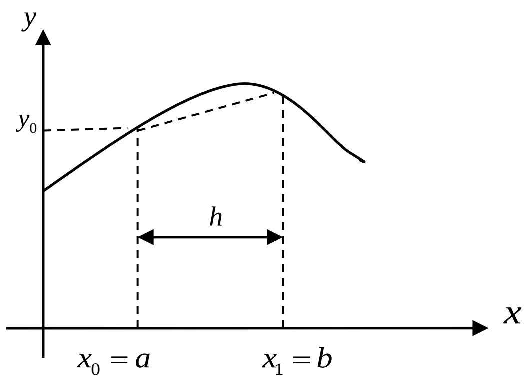
diferansiyeli kullanılırsa, fonksiyonun belirli integrali, integral sınırları da göz önünde bulundurularak,

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_1} y_p(x)\,dx = \int_{s=0}^{s=1} y_p h\,ds = \int_0^1 \left(y_0 + s\Delta y_0\right)h\,ds \tag{1.22}$$

biçiminde yazılır. Bu integral alındığında,

$$\begin{aligned} A &\cong h\left[y_0 s + \Delta y_0 \frac{s^2}{2} \right]\Bigg|_0^1 \\ A &\cong h\left(y_0 + \frac{\Delta y_0}{2} \right) = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right) \end{aligned} \tag{1.23}$$

bulunur.



Şekil 1.4. Eğri altındaki alanın yamuk kuralı ile yaklaşık hesabı

Şekil 1.4.'de görüldüğü gibi, eğri altında kalan alan yamuğun alanı olup, yaklaşık olarak elde edilen

$$A \cong \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right) \tag{1.24}$$

formülü, yamuk veya trapez kuralı olarak adlandırılır. Buna göre Gregory–Newton interpolasyon polinomu kullanıldığında elde edilecek formülün hatası,

$$e_i \cong \int_a^b \binom{s}{n+1} h^{n+1} y^{(n+1)}\left(x_s\right) dx \tag{1.25}$$

olarak bulunur. Yamuk kuralının hatası ise, $n = 1$ alınarak yazılırsa,

$$e_i = \int_{x_0}^{x_1} h^2 \frac{s(s-1)}{2} y^{(n+1)}\left(x_s\right) dx = \int_0^1 \frac{s(s-1)}{2} hh^2 y''\left(x_s\right) dx \tag{1.26}$$

bulunur. Burada $y''\left(x_s\right)$ türevinin bu aralıkta işaret değiştirmediği kabul edilirse, integraller için ortalama değer teoreminden

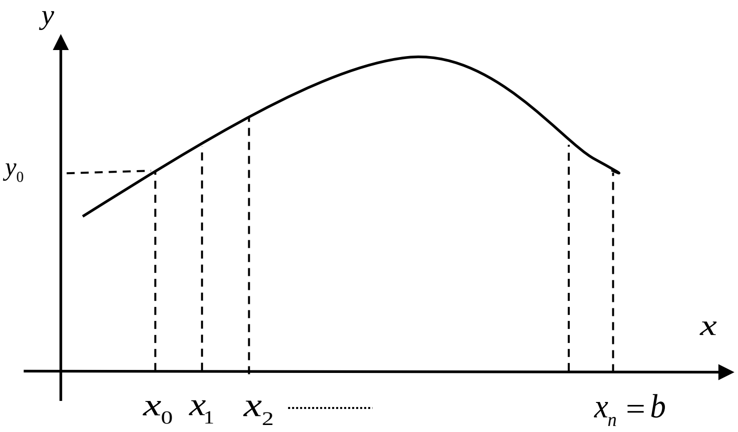
$$e_i = \frac{1}{2} hh^2 y''\left(x_s\right) \int_0^1 (s^2 - s) ds = \frac{1}{2} h^3 y''\left(x_s\right) \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right]_0^1 \tag{1.27}$$

$$e_i = -\frac{h^3}{12} y''\left(x_s\right), \qquad x_0 \le x_s \le x_1 \tag{1.28}$$

elde edilir. Burada hatanın h^3 ile orantılı olduğu görülmektedir. Buna göre $\Delta x = h$ dilim kalınlığının küçük olması, hatanın kübik olarak azalacağı anlamına gelir. Ayrıca fonksiyonun lineer olması halinde, ikinci türevi sıfır olacağından hata sıfır olacak yani tam sonuç bulunmuş olacaktır. Bazı durumlarda birden fazla dilim verilebilir veya integral aralığı geniş ise hatayı azaltmak üzere verilen aralık birden fazla dilime bölünebilir. $[a, b]$ aralığı n tane eşit kalınlıklı dilime bölünmüş ise

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{1.29}$$

olacaktır (Şekil 1.5).



Şekil 1.5 Yamuk kuralının n dilime uygulanması

Bu takdirde her dilime yamuk kuralı uygulanırsa

$$A = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right) + \frac{h}{2}\left(y_1 + y_2\right) + \ldots + \frac{h}{2}\left(y_{n-1} + y_n\right) \tag{1.30a}$$

$$A \cong \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right) \tag{1.30b}$$

biçiminde genel bir formül yazılabilir. Elde edilen bu genel yamuk formülünün hatası her dilimde oluşan hataların toplamından elde edilebilir. Böylece toplam integrasyon hatası:

$$e_{it} = -\frac{h^3}{12} y''\left(x_{s1}\right) - \frac{h^3}{12} y''\left(x_{s2}\right) - \frac{h^3}{12} y''\left(x_{s3}\right) - \ldots = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} y''\left(x_{si}\right) \tag{1.31}$$

veya

$$e_{it} = -\frac{\left(b-a\right)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} y''\left(x_{si}\right) \tag{1.32}$$

biçimindedir. Ortalama türev tanımından bu hatayı daha basit olarak yazmak mümkündür. Buna göre

$$\bar{y}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y''\left(x_{si}\right) \tag{1.33}$$

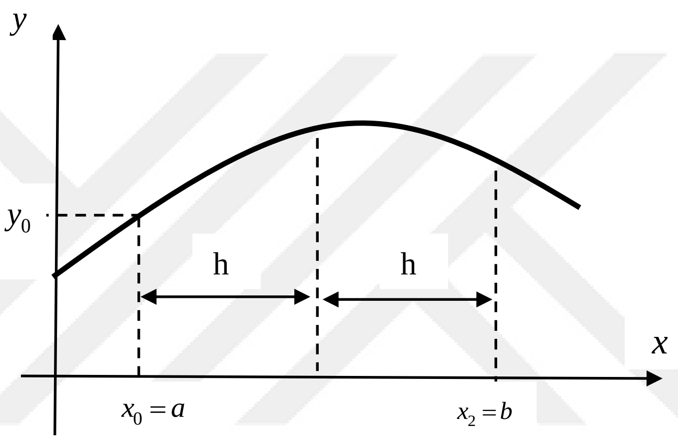
ile toplam hata

$$e_{it} \cong -\frac{\left(b-a\right)^3}{12n^2} \bar{y}'' = -\frac{h^2}{12}\left(b-a\right)\bar{y}'' \tag{1.34}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi lokal hata mertebesi $O\left(h^3\right)$ olmasına rağmen hataların birikmesi nedeniyle bu ifadedeki toplam hata bir mertebe azalarak $O\left(h^2\right)$'ye indirgenmiştir [30].

1.6.2. Simpson 1/3 Kuralı

Gregory-Newton interpolasyon polinomunda $n=2$ alarak farklı bir integrasyon formülü bulunabilir. Ancak bunun için üç nokta yani iki dilim gerektiğinden integral sınırları x_0'dan x_2'ye kadar olacaktır.



Şekil 1.6. Simpson 1/3 kuralının uygulanması

Bu takdirde,

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_2} y_p(x)\,dx=\int_0^2 (y_0+s\cdot\Delta y_0+\frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 y_0)\,h\,ds \qquad (1.35)$$

$$A=h\left[2y_0+2\Delta y_0+\frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right]\cong\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right] \qquad (1.36)$$

biçiminde Simpson 1/3 kuralı adı verilen integrasyon formülü elde edilir.

Hata mertebesini bulmak için $n=2$ için (1.25) denklemi ile verilen hata teriminin integrali alınırsa, sonucun sıfır olduğu görülür. Bu ise hatanın sıfır olduğunu değil, atılan terimlerden ilkinin sıfır olduğu anlamına gelir. Bu durumda atılan terimlerden ikincisi, yani $n=3$ hali alınarak hata terimi elde edilebilir. Buna göre, $n=3$ için hata teriminin integrali

$$
\begin{aligned}
e_i &= \int_{x_0}^{x_2} h^4 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24} y^{(iv)}(x_s)\,dx \\
&= \frac{1}{24} h \cdot h^4 y^{(iv)}(x_s) \int_0^2 \left(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s\right) ds \qquad (1.37) \\
e_i &= \frac{h^5}{90} y^{(iv)}(x_s) \qquad\qquad (x_0 \le x_s \le x_2)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada hatanın h^5 ile orantılı olduğu görülmektedir. İntegrali alınan fonksiyonun kübik bir polinom olması halinde hatanın sıfır olacağı yani tam sonuç elde edileceği de görülmektedir. Çünkü kübik polinomun dördüncü türevi sıfır olacaktır. İntegralin alınacağı $[a,b]$ aralığı eşit kalınlıklı n adet dilime bölünmüş ise yani

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{1.38}$$

ise, her çift dilime Simpson 1/3 kuralını uygulayarak genel bir ifade bulunabilir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] + \frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right] + \ldots + \frac{h}{3}\left[y_{n-2} + 4y_{n-2} + y_n\right] \qquad (1.39) \\
A &\cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada kural her çift dilime uygulandığından, dilim sayısı olan n çift olmalıdır. Aksi halde bu yöntem doğrudan uygulanamaz.

Çok dilim sayısının olması halinde integralin toplam hatası, ayrı ayrı hataların toplamına eşittir. Yani toplam integrasyon hatası

$$
\begin{aligned}
e_{it} &= -\frac{h^5}{90} y^{(iv)}(x_{s1}) - \frac{h^5}{90} y^{(iv)}(x_{s2}) - \frac{h^5}{90} y^{(iv)}(x_{s3}) - \ldots \\
&= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{si})
\end{aligned} \tag{1.40}
$$

veya

$$e_{it} = -\frac{(b-a)^5}{90n^5} \sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}(x_{si}) \tag{1.41}$$

biçimindedir. Ortalama türev tanımından bu hatayı daha basit ifade emek mümkündür. İntegrasyon formülü her iki dilime bir kez uygulandığına göre ortalama türev

$$\bar{y}^{(iv)} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y^{(iv)}\left(x_{si}\right) \tag{1.42}$$

olup, toplam hata

$$e_{it} \cong -\frac{\left(b-a\right)^5}{180n^4}\bar{y}^{(iv)} = -\frac{h^4}{180n^4}\left(b-a\right)\bar{y}^{(iv)} \tag{1.43}$$

biçiminde elde edilir. Görüldüğü üzere lokal hata mertebesi $O(h^5)$ iken, hataların birikmesi nedeniyle meydana gelen hata mertebesi $O(h^4)$ 'e inmiştir [30].

1.7. Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi, bir problemin analitik çözümünde zorluklarla karşılaşıldığında kullanılan sayısal bir yöntemdir. Sonlu farklar yönteminde tanım kümesi noktalara bölünür. Bölünme noktalarında bilinmeyen fonksiyonlar tanımlanır ve denklemdeki türev açılımları ileri, geri ve merkezi farklar cinsinden üç farklı şekilde yazılabilir. Böylece cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen fonksiyonun değerleri belli noktalarda elde edilir.

Bir $y = f(x)$ eğrisinin n noktasındaki teğetinin eğimi $\left(\frac{dy}{dx}\right)_n \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n$ olmak üzere, $(\Delta y / \Delta x)_n$ değeri sırasıyla ileri, geri ve merkezi sonlu farklar cinsinden

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n, \tag{1.44a}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n, \tag{1.44b}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n \tag{1.44c}$$

olarak yazılabilir. Bu taktirde, daha küçük hataya sahip olan merkezi sonlu farklara ait formüllerden ikinci, üçüncü ve dördüncü türevler

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_n = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_n \cong \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n \tag{1.45}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n-1}\right] \tag{1.46}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x} - \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}\right) = \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\Delta x^2} \tag{1.47}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{\Delta x^2} - \frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{\Delta x^2}\right] \tag{1.48}$$

$$\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)_n = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_{n-1}-y_{n-2}}{\Delta x^3} \tag{1.49}$$

$$\frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_{n+1} - 2\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n + \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_{n-1}\right] \tag{1.50}$$

$$\left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right)_n = \frac{y_{n+2}-4y_{n+1}+6y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{\Delta x^4} \tag{1.51}$$

biçiminde elde edilir [31-32].

1.8. Pertürbasyon Metodu

Fiziksel sistemlerin modellemelerinde farklı yapılarda problemlere rastlanır. Analiz için kullanılan sistemlerde lineer olmayan terimler, değişken katsayılar, lineer olmayan sınır şartları gibi özellikler bulunabilir. Fiziksel problemleri çözmek için sayısal ve analitik çözümler gibi farklı yöntemler kullanılabilir. Bazı durumlarda her iki yöntem de kullanılabilir. Yarı analitik çözüm yöntemlerinden biri olan pertürbasyon yöntemi birçok farklı yapıdaki modele çözüm üretir. Pertürbasyon teorisi tam olarak çözülemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemden yola çıkarak yaklaşık çözüm elde etmek için kullanılan matematiksel metotlar içeren yöntemdir. Kesin olarak çözülebilen problemin matematiksel tanımına çok küçük bir terim eklenerek eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilirdir. Pertürbasyon metodu, aranan çözümün kesin çözümlü problemden sapmanın miktarını belirleyen küçük parametre kullanılarak asimptotik seri olarak ifade edilmesini sağlar. Pertürbasyon teorisi çok kullanılan etkili bir yöntem olup, nümerik analizde kullanılan metotlarla ilişkilidir.

Pertürbasyon metotları, orijinal problemin yeterince basitleştirilmesi ile başlar. Basitleştirilmiş problem koşulları çözüme ulaşmak için pertürbe edilir. Bu yöntemle, bazı problemlerin tam çözümü bulunabilse de lineer olmayan problemlerde genellikle yaklaşık analitik çözümler bulunur. Bu ise özellikle fiziksel bir modelin sonuçlarını yorumlayabilmek için onun çözüm yapıları hakkında fikir verebilmesi avantajını sağlar. Sayısal çözümlerde, denklemlerin çözüm yapılarına hakim olunmaz bu da yanıltıcı yorum yapılmasına sebep olur. Ancak pertürbasyon metotları ile çözümün analitik yapısı öngörülerek, fiziksel terimlerin çözüme etkileri kolaylıkla yorumlanabilir [33].

Pertürbasyon tekniği asimptotik bir yöntemdir. Burada çözümler asimptotik açılımlarla gösterilir ve bu açılımlar iki üç terimli açılımlardır. Bu yöntemle denklemde var olan veya yapay olarak eklenen parametrelere veya koordinatlara göre asimptotik açılımlar önerilerek çözülmeye çalışılır. Çok zaman ölçekli metot gibi pertürbasyon metotları, ardarda çözülmesi gereken problemlerin çözümlerini bulmak için kullanılır. Genellikle birinci mertebeden problemler homojen, daha yüksek mertebeden problemler ise lineerdir ve homojen değildir. Daha yavaş zamana göre bağımlılığı belirlemek için, daha yüksek mertebeden problemler araştırılır ve düzgün açılımların yapıldığı şartlar uygulanır. Lineer olmayan basit titreşim problemleri için yukarıdaki işlem, seküler terimlerin eliminasyonunu sağlar. Sadece birinci dereceden serbest sistemler göz önünde bulundurulursa, seküler terimlerin eliminasyonu için şartları belirlemek oldukça kolaydır [28].

Daha önce de bahsedilen fiziksel sistemlere ait denklemlerin lineer ve lineer olmayan terimleri olabilir. Denklemin lineer ve lineer olmayan terimleri ayrı ayrı gruplandığında lineer olmayan terimler lineer terimlere göre küçük ise, böyle sistemlere zayıf lineer olmayan sistemler ya da yarı lineer sistemler denir. Çok küçük bir parametre olan ε kullanılarak uygulanan pertürbasyon yöntemleri, bu tarzdaki sistemlerin çözümünde kullanılabilecek yöntemlerdir [12].

II. BÖLÜM

2.1. Genel Model

İç ve dış harmonik zorlamaya sahip

$$a(x)\,\ddot{y}(x,t)+L_1[y]+\varepsilon\{L_2[y]\cos\Omega_1 t+F(x)\cos\Omega_2 t+L_3[\dot{y}]\}=0 \qquad (2.1a)$$

$$B_{11}(y(x,t))=B_{12}(y(x,t))=0 \text{ ve } B_{21}(y(x,t))=B_{22}(y(x,t))=0 \qquad (2.1b)$$

biçiminde tanımlı lineer genel model, bir boyutlu sürekli ortamların dinamiğine karşılık gelir. Burada göz önüne alınan kiriş Euler-Bernoulli kiriş modelidir. Modelde $a(x)$ enine kesit ve kütle değişimini temsil eden fonksiyondur. x yapı elemanının yönünü gösteren konum değişkeni ve t zaman değişkeni olmak üzere, $y(x,t)$ enine deplasmanı gösterir. $L_1[y]$ rijit yapı elemanı ile ilgilidir. $L_2[y]\cos\Omega_1 t$ parametrik zorlama terimi, $F(x)\cos\Omega_2 t$ harmonik dış kuvvet ve $L_3[\dot{y}]$ sistemin viscoelastik özelliğini temsil eden operatördür. $F(x)$ dış kuvvetin genliğini, Ω_1 ve Ω_2 sırasıyla iç ve dış zorlama frekansını temsil etmektedir. ε boyutsuz çok küçük bir parametredir. Burada nokta türev zamana (t) göre türevi ifade eder. Sınır şartlarındaki i, j alt indisleri B_{ij} için i. mesnetin j. koşulunu gösterir. $a(x)$ ve L_1 operatörü (çok mesnetli, çatlaklı veya basamaklı kiriş gibi) bir boyutlu yapıların süreksizliklerini tanımlamak için süreksiz fonksiyon ihtiva edebilir. L_1, L_2 ve L_3 değişken katsayılı lineer ve self-adjoint diferansiyel operatörlerdir. Yapısal eleman olarak kirişlerin matematiksel modeli dikkate alındığında, en yüksek mertebeden türev olarak dördüncü mertebeden türev ihtiva edeceğinden

$$L_i=P_4(x)\frac{d^4}{dx^4}+P_3(x)\frac{d^3}{dx^3}+P_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+P_1(x)\frac{d}{dx}+P_0(x) \qquad (2.2)$$

değişken katsayılı $L_i\ (i=1,2,3)$ diferansiyel operatörünü göz önüne alalım. Böylelikle, bu lineer operatörler çubuk, tel ve kablo gibi bir boyutlu yapısal elemanlara da karşılık gelir. Örneğin, bir çubuk veya tel şeklindeki yapı elemanları için p_3 ve p_4 ortadan kalkar.

2.2. Çok Zaman Ölçekli Metodun Uygulaması

Burada direkt olarak (2.1a) denklemine pertürbasyon tekniklerinden biri olan çok zaman ölçekli metot uygulanır. T_n, $\varepsilon^n t$ formundaki farklı zaman ölçekleri olmak üzere, pertürbasyon seri açılımı

$$y(x,\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1;\varepsilon)=y_0(x,\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1;\varepsilon)+\varepsilon y_1(x,\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1;\varepsilon)+\ldots \tag{2.3}$$

biçiminde kabul edilir. Böylece yeni zaman ölçeğine göre zamana bağlı türevler, $D_i=\partial/\partial T_i$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}=D_0+\varepsilon D_1+\cdots \tag{2.4a}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0 D_1+\cdots \tag{2.4b}$$

biçimindedir. (2.3-2.4b) denklemleri (2.1) genel model ve sınır şartlarında yerine yazılır, elde edilen denklem ε mertebesine göre ayrıştırılırsa,

$$O(1):\quad a(x)D_0^2 y_0+L_1[y_0]=0 \tag{2.5}$$

$$B_{11}[y_0]=B_{12}[y_0]=0 \tag{2.6a}$$

$$B_{21}[y_0]=B_{22}[y_0]=0 \tag{2.6b}$$

$$\begin{aligned}O(\varepsilon):\quad a(x)D_0^2 y_1+L_1[y_1]&=-L_3[D_0 y_0]-2a(x)D_0 D_1 y_0\\&\quad -L_2[y_0]\cos\Omega_1 T_0-F(x)\cos\Omega_2 T_0\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$B_{11}[y_1]=B_{12}[y_1]=0 \tag{2.8a}$$

$$B_{21}[y_1]=B_{22}[y_1]=0 \tag{2.8b}$$

denklemleri bulunur. A_n ve $\bar{A}_n$ sırasıyla kompleks genliği ve onun eşleniğini ifade etmek üzere, birinci mertebedeki genel çözümü

$$y_0(x,\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1)=\left(A_n(\mathrm{T}_1)e^{i\omega_n \mathrm{T}_0}+\bar{A}_n(\mathrm{T}_1)e^{-i\omega_n \mathrm{T}_0}\right)X_n(x)\qquad n=1,2,3,\ldots \tag{2.9}$$

biçiminde kabul edelim. Önerilen (2.9) çözümü (2.5) denklemini sağlamalıdır. Buna göre, (2.9) çözümü (2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&a(x)\omega_n^2\left[-A_n(\mathrm{T}_1)e^{i\omega_n \mathrm{T}_0}-\bar{A}_n(\mathrm{T}_1)e^{-i\omega_n \mathrm{T}_0}\right]X_n(x)\\&+\left[A_n(\mathrm{T}_1)e^{i\omega_n \mathrm{T}_0}+\bar{A}_n(\mathrm{T}_1)e^{-i\omega_n \mathrm{T}_0}\right]L_1\left[X_n(x)\right]=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında, sonuç denklem

$$L_1[X_n]-a(x)\omega_n^2 X_n=0 \tag{2.11}$$

$$B_{11}[X_n]=B_{12}[X_n]=0 \tag{2.12a}$$

$$B_{21}\left[X_n\right]=B_{22}\left[X_n\right]=0 \tag{2.12b}$$

olarak bulunur. Elde edilen denklem bir öz değer-öz fonksiyon problemidir. Burada ω_n doğal frekans olup, sistemin öz değerlerinde mod yapısını temsil eden X_n ise sistemin öz fonksiyonlarına karşılık gelir. Böylece (2.11) denkleminden ω_n ve X_n hesaplanabilir.

(2.11) denklemi genel olarak, $L\left[X_n\right]=0$ ile ifade edilir. Bir boyutlu sürekli ortamların titreşimini incelemek için yaygın olarak Euler-Bernoulli kiriş modeli kullanıldığından $L\left[X_n\right]=0$ denklemi genel formda

$$L\left[X_n\right]=P_4\left(x\right)X_n^{iv}\left(x\right)+P_3\left(x\right)X_n'''\left(x\right)+P_2\left(x\right)X_n''\left(x\right)+P_1\left(x\right)X_n'\left(x\right)+P_0\left(x\right)X_n\left(x\right) \tag{2.13}$$

biçiminde göz önüne alınır. Burada $L\left[X_n\right]$, X_n'in x konum değişkenine bağlı türevlerini ihtiva eder. L operatörü lineer, homojen, self-adjoint ve pozitif tanımlı diferansiyel ya da integro-diferansiyel operatördür.

2.3. Sonlu Farklar Yönteminin Uygulaması

Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemleri çözmek için seri çözümü ve mertebe indirgeme gibi yöntemler kullanılabilir. Fakat bazı durumlarda bu yöntemler uygulandığında çeşitli sorunlarla karşılaşılabilir. Analitik çözümün zor olduğu veya mümkün olmadığı durumlarda nümerik yöntemler tercih edilir. Biz bu çalışmada, ele aldığımız probleme nümerik yöntemler içerisinde en etkili tekniklerden biri olan sonlu farklar yöntemini uygulayacağız. Buna göre $\Delta x=1/N$ olmak üzere ilk dört türev aşağıdaki gibi verilir:

$$X_j' \approx \frac{X_{j+1}-X_{j-1}}{2\Delta x} \tag{2.14a}$$

$$X_j'' \approx \frac{X_{j+1}-2X_j+X_{j-1}}{\Delta x^2} \tag{2.14b}$$

$$X_j'''=\frac{X_{j+2}-2X_{j+1}+2X_{j-1}-X_{j-2}}{2\Delta x^3} \tag{2.14c}$$

$$X_j^{iv}=\frac{X_{j+2}-4X_{j+1}+6X_j-4X_{j-1}+X_{j-2}}{\Delta x^4} \tag{2.14d}$$

Burada N alt aralık sayısıdır. Ayrıca alt indis, konuma göre düğüm noktasını gösterir. j inci düğüm noktasında (2.14) sonlu fark açılımları (2.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$P_4(x)\left(\frac{X_{j+2}-4X_{j+1}+6X_j-4X_{j-1}+X_{j-2}}{\Delta x^4}\right)+P_3(x)\left(\frac{X_{j+2}-2X_{j+1}+2X_{j-1}-X_{j-2}}{2\Delta x^3}\right)$$
$$+P_2(x)\left(\frac{X_{j+1}-2X_j+X_{j-1}}{\Delta x^2}\right)+P_1(x)\left(\frac{X_{j+1}-X_{j-1}}{2\Delta x}\right)+P_0(x)X_j(x)=0$$

(2.15)

bulunur, elde edilen denklem yeniden düzenlenirse,

$$\left(\frac{P_4}{\Delta x^4}+\frac{P_3}{2\Delta x^3}\right)X_{n,j+2}+\left(-\frac{4P_4}{\Delta x^4}-\frac{P_3}{\Delta x^3}+\frac{P_2}{\Delta x^2}+\frac{P_1}{2\Delta x}\right)X_{n,j+1}+\left(\frac{6P_4}{\Delta x^4}-\frac{2P_2}{\Delta x^2}+P_0\right)X_{n,j}$$
$$+\left(-\frac{4P_4}{\Delta x^4}+\frac{P_3}{\Delta x^3}+\frac{P_2}{\Delta x^2}-\frac{P_1}{2\Delta x}\right)X_{n,j-1}+\left(\frac{P_4}{\Delta x^4}-\frac{P_3}{2\Delta x^3}\right)X_{n,j-2}=0$$

(2.16)

haline indirgenir. (2.16) denklemindeki katsayılar

$$b_{0,j}=\frac{P_{4,j}}{\Delta x^4}-\frac{P_{3,j}}{2\Delta x^3} \quad (2.17a)$$

$$b_{1,j}=-\frac{4P_{4,j}}{\Delta x^4}+\frac{P_{3,j}}{\Delta x^3}+\frac{P_{2,j}}{\Delta x^2}-\frac{P_{1,j}}{2\Delta x} \quad (2.17b)$$

$$b_{2,j}=\frac{6P_{4,j}}{\Delta x^4}-\frac{2P_{2,j}}{\Delta x^2}+P_{0,j} \quad (2.17c)$$

$$b_{3,j}=-\frac{4P_{4,j}}{\Delta x^4}-\frac{P_{3,j}}{\Delta x^3}+\frac{P_{2,j}}{\Delta x^2}+\frac{P_{1,j}}{2\Delta x} \quad (2.17d)$$

$$b_{4,j}=\frac{P_{4,j}}{\Delta x^4}+\frac{P_{3,j}}{2\Delta x^3} \quad (2.17e)$$

biçiminde göz önüne alınırsa, (2.16) denklemi

$$b_{4,j}X_{n,j+2}+b_{3,j}X_{n,j+1}+b_{2,j}X_{n,j}+b_{1,j}X_{n,j-1}+b_{0,j}X_{n,j-2}=0 \quad (2.18)$$

formunda yazılır. Bu taktirde, iki ucu basit mesnet için sınır şartları;

$$B_{11}(X_n)=X_n,\; B_{12}(X_n)=X_n'',\; B_{21}(X_n)=X_n,\; B_{22}(X_n)=X_n'' \quad (2.19)$$

iki ucu ankastre mesnet için sınır şartları;

$$B_{11}(X_n)=X_n,\; B_{12}(X_n)=X_n',\; B_{21}(X_n)=X_n,\; B_{22}(X_n)=X_n' \quad (2.20)$$

bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnet için sınır şartları;

$$B_{11}(X_n)=X_n,\; B_{12}(X_n)=X_n'',\; B_{21}(X_n)=X_n,\; B_{22}(X_n)=X_n' \quad (2.21)$$

biçimindedir. Böylece sınır şartları uygulanırsa, (2.16) denkleminden bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Sınır şartlarına sonlu farklar uygulanırsa, iki ucu basit mesnet için sınır şartları;

$$X_{n,0} = 0,\ X_{n,-1} = -X_{n,1},\ X_{n,N} = 0,\ X_{n,N+1} = -X_{n,N-1} \tag{2.22}$$

iki ucu ankastre mesnet için sınır şartları;

$$X_{n,0} = 0,\ X_{n,-1} = X_{n,1},\ X_{n,N} = 0,\ X_{n,N+1} = X_{n,N-1} \tag{2.23}$$

bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnet için sınır şartları;

$$X_{n,0} = 0,\ X_{n,-1} = -X_{n,1},\ X_{n,N} = 0,\ X_{n,N+1} = X_{n,N-1} \tag{2.24}$$

bulunur. İki ucu basit mesnet için (2.22) sınır şartlarını ve (2.16-2.17) eşitliklerini kullanarak oluşturulan cebirsel denklem sisteminin matris formundaki gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix}
b_{2,j}-b_{0,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_3, j \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j}-b_{4,j}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ X_{n,3} \\ X_{n,4} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n,N-4} \\ X_{n,N-3} \\ X_{n,N-2} \\ X_{n,N-1} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

Benzer şekilde sırasıyla iki ucu ankastre mesnet ve bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnet için cebirsel denklem sistemlerinin matris formu,

$$\begin{bmatrix} b_{2,j}+b_{0,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_3,j \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j}+b_{4,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ X_{n,3} \\ X_{n,4} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n,N-4} \\ X_{n,N-3} \\ X_{n,N-2} \\ X_{n,N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} b_{2,j}-b_{0,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_{3,j} & b_{4,j} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j} & b_3,j \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{0,j} & b_{1,j} & b_{2,j}+b_{4,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ X_{n,3} \\ X_{n,4} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n,N-4} \\ X_{n,N-3} \\ X_{n,N-2} \\ X_{n,N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

biçiminde verilebilir. Aşikar olmayan yani sıfırdan farklı çözüm için (2.25-2.27) katsayılar matrisinin determinantı sıfırdır. Burada X_n mod yapısı $N/2$ düğümüne bağlı olarak elde edilir. Böylece (2.5) denkleminin çözümü y_0 belirlenir. ε-mertebesindeki yaklaşık çözüm için, (2.9) denklemi (2.7) denkleminde yerine yazılır ve denklem yeniden düzenlenirse, $k.e.$ kompleks eşlenik olmak üzere,

$$\begin{aligned} a(x)D_0^2 y_1 + L_1[y_1] &= -\left[2a(x)i\omega_n X_n D_1 A_n + i\omega_n A_n L_3[X_n]\right]e^{i\omega_n T_0} \\ &\quad -\frac{L_2[X_n]}{2}\left[A_n\left(e^{i(\omega_n+\Omega_1)T_0} + e^{i(\omega_n-\Omega_1)T_0}\right)\right] - \frac{F(x)}{2}e^{i\Omega_2 T_0} + k.e. \end{aligned} \quad (2.28)$$

bulunur. Bu takdirde (2.28) denkleminin çözümü

$$y_1(x,T_0,T_1) = \phi_n(x,T_1)e^{i\omega_n T_0} + Y(x,T_0,T_1) + k.e. \quad (2.29)$$

biçiminde göz önüne alınabilir. Burada ilk terim seküler terimle, ikinci terim ise seküler olmayan terimle ilgilidir. Zorlama ile ilgili terim, frekansa bağlı olarak ya seküler ya da seküler olmayan terimdir. Burada ortaya çıkabilecek tüm durumlar tek tek aşağıda analiz edilecektir.

2.4. Durum İncelenmesi

Bu bölümde, zorlama frekansına bağlı olarak ortaya çıkan dört farklı durum incelenecektir. Bu durumların araştırılmasında [24] de detayları verilen çözülebilirlik şartları uygulanmıştır. Çözülebilirlik şartlarının uygulamasından sonra, sayısal değerleri var olan X_n, mod yapısını içeren bazı belirli integraller ve türevleri

$$\alpha_{in} = \int_0^1 X_n L_i\left[X_n\right]dx \tag{2.30}$$

formunda bulunur. Dolayısıyla nümerik integrasyon tekniğine ihtiyaç duyulur. Bu çalışmada nümerik integrasyon yöntemi olarak Simpson metodu kullanılır. N alt aralık sayısı ve $\Delta x = 1/N$ olmak üzere, Simpson metodu

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx \cong \frac{\Delta x}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}\right) + 2\left(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N}\right) + f_N\right] \tag{2.31}$$

formülü ile verilir. Burada f_j fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_j = \frac{X_{n,j}}{\Delta x^4}\Big[& X_{n,j+2}\left(\Delta x P_3\left(x_j\right) + P_4\left(x_j\right)\right) \\ & + X_{n,j+1}\left(\Delta x^3 P_1\left(x_j\right) + \Delta x^2 P_2\left(x_j\right) - 2\Delta x P_3\left(x_j\right) - 4P_4\left(x_j\right)\right) \\ & + X_{n,j}\left(\Delta x^4 P_0\left(x_j\right) - 2\Delta x^2 P_2\left(x_j\right) + 6P_4\left(x_j\right)\right) \\ & + X_{n,j-1}\left(-\Delta x^3 P_1\left(x_j\right) + \Delta x^2 P_2\left(x_j\right) + 2\Delta x P_3\left(x_j\right) - 4P_4\left(x_j\right)\right) \\ & + X_{n,j-2}\left(-\Delta x P_3\left(x_j\right) + P_4\left(x_j\right)\right)\Big] \end{aligned} \tag{2.32}$$

denklemine karşılık gelmektedir.

2.4.1. Ω_1'in 0 ve $2\omega_n$'den, Ω_2'nin ω_n'den uzak olduğu durum ($\Omega_1 \neq 0$, $\Omega_1 \neq 2\omega_n$ ve $\Omega_2 \neq \omega_n$)

Burada çözülebilirlik şartı ve yaklaşık doğal frekans bulunacaktır. Ω_1'in 0'dan ve $2\omega_n$'den, Ω_2'nin ω_n'den uzak olduğu durum için (2.28) denklemi aşağıdaki gibidir:

$$a\left(x\right)D_0^2 y_1 + L_1\left[y_1\right] = -\left(2a\left(x\right)i\omega_n X_n D_1 A_n + i\omega_n A_n L_3\left[X_n\right]\right)e^{i\omega_n T_0} + k.e. + S.O.T \tag{2.33}$$

Burada *k.e.* önceki terimlerin kompleks eşleniklerini ve *S.O.T* seküler olmayan terimleri göstermektedir. (2.29) denklemi (2.33) denklemde yerine yazılırsa,

$$L_1(\phi_n) - a(x)\omega_n^2\phi_n = -2a(x)i\omega_n X_n D_1 A_n - i\omega_n L_3[X_n]A_n \tag{2.34}$$

elde edilir. Burada homojen kısmın, basit olmayan bir çözümü olduğundan, homojen olmayan (2.34) denkleminin bir çözümünün olabilmesi ancak çözülebilirlik şartına bağlıdır. Buna göre, (2.34) denkleminin her iki tarafı X_n ile çarpılır ve tanım kümesi üzerinden integre edilirse,

$$2i\omega_n D_1 A_n \int_0^1 a(x) X_n^2 dx + i\omega_n A_n \int_0^1 L_3[X_n] X_n dx = 0 \tag{2.35}$$

bulunur. Burada α_{3n} katsayısı

$$\alpha_{3n} = \frac{1}{2}\int_0^1 X_n L_3[X_n] dx \tag{2.36}$$

olmak üzere,

$$\int_0^1 a(x) X_n^2 dx = 1 \tag{2.37}$$

normalizasyonu ile

$$D_1 A_n + \alpha_{3n} A_n = 0 \tag{2.38}$$

elde edilir. (2.38) denkleminin çözümünden

$$A_n = ce^{-\alpha_{3n}T_1} \tag{2.39}$$

bulunur. Burada c keyfi sabit, α_{3n} reel ve pozitiftir. Burada sistemin genliğinin hızla azaldığı ve çözümün kararlı olduğu görülmektedir.

2.4.2. Ω_1 in 0'a yakın, Ω_2'nin ω_n'den uzak olduğu durum ($\Omega_1 \approx 0$ ve $\Omega_2 \neq \omega_n$)

Burada σ_n ayar parametresi olmak üzere, $\Omega_1 = 0 + \varepsilon\sigma_n$ olup (2.28) denklemi bu değerlere göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} a(x)D_0^2 y_1 + L_1[y_1] = &-\left(2a(x)i\omega_n X_n D_1 A_n + i\omega_n A_n L_3[X_n]\right)e^{i\omega_n T_0} \\ &-\frac{L_2[X_n]}{2}\left(A_n\left(e^{i(\omega_n+\varepsilon\sigma_n)T_0} + e^{i(\omega_n-\varepsilon\sigma_n)T_0}\right)\right) + k.e. + S.O.T \end{aligned} \tag{2.40}$$

biçiminde elde edilir. Buna göre $\varepsilon T_0 = T_1$ olmak üzere, (2.29) denklemi (2.40) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L_1(\varphi_n) - a(x)\omega_n^2\varphi_n = &-2a(x)i\omega_n X_n D_1 A_n - i\omega_n L_3[X_n]A_n \\ &-L_2[X_n]A_n \cos\sigma_n T_1 \end{aligned} \tag{2.41}$$

haline indirgenir. Burada homojen kısmın basit olmayan bir çözümü olduğundan, (2.41) denklemine çözülebilirlik şartı uygulanırsa

$$\int_0^1 \left(a(x) X_n{}^2 D_1 A_n + \frac{1}{2} A_n X_n L_3 [X_n] \right) dx - A_n \cos \sigma_n T_1 \frac{i}{2\omega_n} \int_0^1 X_n L_2 [X_n] dx = 0 \quad (2.42)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (2.36) denklemi ve

$$\alpha_{2n} = -\frac{1}{4\omega_n} \int_0^1 X_n L_2 [X_n] dx \quad (2.43)$$

katsayısı (2.42) denklemde yerine yazılırsa,

$$D_1 A_n + (\alpha_{3n} + 2i\alpha_{2n} \cos \sigma_n T_1) A_n = 0 \quad (2.44)$$

olarak bulunur. Böylece (2.44) denkleminin çözümü

$$A_n = A_0 e^{-\alpha_{3n} T_1 - \frac{2i\alpha_{2n}}{\sigma} \sin \sigma_n T_1} \quad (2.45)$$

biçimindedir. Burada $A_0 e^{-\alpha_{3n} T_1}$ teriminin genliğin azalmasına yol açtığı görülmektedir. Diğer taraftan $|\sin \sigma_n T_1| \leq 1$ olduğundan kompleks genlik zamana göre sınırlıdır. Bununla birlikte, yaklaşımın bu mertebesinin kararsızlığa sahip olmadığı görülür.

2.4.3. Ω_1'in $2\omega_n$'e yakın, Ω_2'nin ω_n'den uzak olduğu durum ($\Omega_1 \cong 2\omega_n$ ve $\Omega_2 \neq \omega_n$)

Bu bölümde zorlama frekansının doğal frekanslardan birinin iki katı olduğu durum olan temel parametrik rezonans incelenecektir. $\Omega_1 \cong 2\omega_n$ ve $\Omega_2 \neq \omega_n$ olduğu durum için $\Omega_1 = 2\omega_n + \varepsilon\sigma_n$ olmak üzere, (2.28) denklemi

$$\begin{aligned} a(x) D_0^2 y_1 + L_1 [y_1] = &-\left(2a(x) i\omega_n X_n D_1 A_n + i\omega_n A_n L_3 [X_n]\right) e^{i\omega_n T_0} \\ &- \frac{L_2 [X_n]}{2} \left(\bar{A}_n \left(e^{i(\omega_n + \varepsilon\sigma_n) T_0} + e^{i(-3\omega_n - \varepsilon\sigma_n) T_0} \right) \right) + k.e + S.O.T \end{aligned} \quad (2.46)$$

formuna indirgenir. (2.29) denklemi (2.46) denkleminde yerine yazılırsa,

$$L_1(\varphi_n) - a(x)\omega_n^2 \varphi_n = -2a(x) i\omega_n X_n D_1 A_n - i\omega_n L_3(X_n) A_n - \frac{L_2 [X_n]}{2} \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \quad (2.47)$$

bulunur. (2.47) denklemine çözülebilirlik şartı uygulanırsa,

$$\int_0^1 \left(a(x) X_n{}^2 D_1 A_n + \frac{1}{2} A_n X_n L_3 [X_n] \right) dx - \bar{A}_n e^{i\sigma_n T_1} \frac{i}{4\omega_n} \int_0^1 X_n L_2 [X_n] dx = 0 \quad (2.48)$$

sonucuna ulaşılır. Normalizasyon yapılır, (2.36) ve (2.43) katsayılarına göre denklem düzenlenirse,

$$D_1 A_n + \alpha_{3n} A_n + i\alpha_{2n} e^{i\sigma_n T_1} \bar{A}_n = 0 \tag{2.49}$$

elde edilir. Buna göre, A_n kutupsal formda

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \tag{2.50}$$

biçiminde kabul edilerek, (2.49) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{da_n(T_1)}{dT_1} e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2} a_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} e^{i\beta_n(T_1)} + \alpha_{3n}\frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2}\alpha_{2n} a_n(T_1) e^{i\sigma_n T_1 - i\beta_n(T_1)} = 0 \tag{2.51}$$

bulunur. Elde edilen denklem $e^{-i\beta_n(T_1)}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + i a_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{3n} a_n(T_1) + i\alpha_{2n} a_n(T_1) e^{i(\sigma_n T_1 - 2\beta_n(T_1))} = 0 \tag{2.52}$$

elde edilir. Burada $\gamma = \sigma_n T_1 - 2\beta$ alınırsa,

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + i a_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{3n} a_n(T_1) + i\alpha_{2n} a_n(T_1) e^{i\gamma} = 0 \tag{2.53}$$

bulunur. Sonuçta bu denklem reel ve imajiner olmak üzere ayrıştırılıp, gerekli matematiksel işlemler yapılırsa,

$$\text{Re:} \frac{da_n}{dT_1} + \alpha_{3n} a_n - a_n \alpha_{2nI} \sin\gamma = 0 \tag{2.54}$$

$$\text{Im: } \sigma_n - \frac{d\gamma}{dT_1} + \alpha_{2nI}\cos\gamma = 0 \tag{2.55}$$

biçiminde baskın rezonans durumuna ait genlik ve faz modülasyon denklemleri elde edilir. Kararlı hal çözümleri için da_n/dT_1 ve $d\gamma/dT_1$ türevleri sıfıra eşit olmalıdır. Bu şart (2.54) ve (2.55) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\text{Re:} \alpha_{3n} a_n - a_n \alpha_{2nI} \sin\gamma = 0 \tag{2.56}$$

$$\text{Im: } \sigma_n - \alpha_{2nI}\cos\gamma = 0 \tag{2.57}$$

bulunur. Bu denklemlerde de γ ifadesi yok edilirse, σ_n ayar parametresi

$$\sigma_n = \mp\sqrt{\alpha_{2nI}^2 - \alpha_{3n}^2} \tag{2.58}$$

formunda elde edilir.

2.4.4. Ω_1 'in 0 ve $2\omega_n$ 'den uzak, Ω_2 'nin ω_n 'e yakın olduğu durum ($\Omega_1 \neq 0$, $\Omega_1 \neq 2\omega_n$ ve $\Omega_2 \cong \omega_n$)

Bu kısımda dış zorlama kuvvetine ait frekansın, sistemin doğal frekanslarından birine eşit veya çok yakın olmasıyla meydana gelen baskın rezonans durumu incelenecektir. Bu durumda $\Omega_2 = \omega_n + \varepsilon\sigma_n$ olma durumu göz önüne alınırsa, (2.28) denklemi

$$a(x)D_0^2 y_1 + L_1[y_1] = -\left(2a(x)i\omega_n X_n D_1 A_n + i\omega_n A_n L_3[X_n]\right)e^{i\omega_n T_0} - \frac{F(x)}{2}e^{i(\omega_n+\varepsilon\sigma_n)T_0} + k.e. + S.O.T \tag{2.59}$$

olarak bulunur. (2.29) denklemi (2.59) denkleminde yerine yazılırsa,

$$L_1(\varphi_n) - a(x)\omega_n^2\varphi_n = -2a(x)i\omega_n X_n D_1 A_n - i\omega_n L_3(X_n)A_n - \frac{F(x)}{2}e^{i\varepsilon\sigma_n T_0} \tag{2.60}$$

formuna indirgenir. (2.60) denklemine çözülebilirlik şartı uygulanırsa

$$\int_0^1\left(a(x)X_n{}^2 D_1 A_n + \frac{1}{2}A_n X_n L_3[X_n]\right)dx - \frac{i}{\omega_n}\int_0^1 X_n\frac{F(x)}{4}e^{i\sigma_n T_1}\,dx = 0 \tag{2.61}$$

bulunur. Böylece, (2.36) denklemi ile birlikte

$$\alpha_{1n} = \frac{1}{2\omega_n}\int_0^1 F(x)X_n dx \tag{2.62}$$

olmak üzere,

$$D_1 A_n + \alpha_{3n}A_n = \frac{1}{2}i\alpha_{1n}e^{i\sigma_n T_1} \tag{2.63}$$

elde edilir. Kutupsal formda tanımlanan

$$A_n = \frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} \tag{2.64}$$

ifadesi (2.63) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{da_n(T_1)}{dT_1}e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2}a_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1}e^{i\beta_n(T_1)} + \alpha_{3n}\frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} - \frac{1}{2}i\alpha_{1n}e^{i\sigma_n T_1} = 0 \tag{2.65}$$

olup, sonuç denklem $e^{i\beta_n(T_1)}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + ia_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{3n}a_n(T_1) + i\alpha_{1n}\,e^{i(\sigma_n T_1 - \beta_n(T_1))} = 0 \tag{2.66}$$

bulunur. Sonuç denklemde $\gamma_n = \sigma_n T_1 - \beta_n(T_1)$ yerine yazılarak, reel ve imajiner olmak üzere iki kısma ayrıştırılırsa,

$$\text{Re: } \frac{da_n}{dT_1} + \alpha_{3n} a_n = -\alpha_{1nI} \sin\gamma_n \tag{2.67}$$

$$\text{Im: } \sigma_n a_n - \frac{d\gamma}{dT_1} a_n = \alpha_{1nI} \cos\gamma_n \tag{2.68}$$

elde edilir. Buna göre, kararlı hal çözümleri için da_n/dT_1 ve $d\gamma/dT_1$ ifadeleri sıfıra eşitlenirse,

$$\text{Re: } \alpha_{3n} a_n = -\alpha_{1nI} \sin\gamma_n \tag{2.69}$$

$$\text{Im: } \sigma_n a_n = \alpha_{1nI} \cos\gamma_n \tag{2.70}$$

bulunur. Bu denklemlerde γ_n ifadesi yok edilirse, σ_n ayar parametresi

$$\sigma_n = \mp \frac{1}{a_n} \sqrt{\alpha_{1nI}^2 - a_n^2 \alpha_{3n}^2} \tag{2.71}$$

biçiminde elde edilir.

III. BÖLÜM

UYGULAMALAR

3.1. Winkler Tipi Elastik Temel Üzerindeki Kirişin Enine Titreşimleri

Burada Winkler tipi elastik temel üzerindeki kirişin enine titreşimleri göz önüne alınacaktır. Daha önce literatürde [34] ile ifade edilen çalışmada ortaya koyulan matematik modele dış zorlama ve sönüm terimi eklenerek, yeni bir hareket denklemi elde edilmiştir. Buna göre hareket denklemi ve sınır şartları

$$EI\,\hat{y}^{iv} + \hat{k}_0\,H\left(\hat{x}-\hat{a}\right)\hat{y} + \varepsilon\hat{\mu}\,\dot{\hat{y}} + m\,\ddot{\hat{y}} = \hat{f}\left(\hat{x}\right)\cos\hat{\Omega}\hat{t} \tag{3.1a}$$

$$\hat{y}\left(0,t\right) = EI\,\hat{y}''\left(0,t\right) = 0 \text{ ve } \hat{y}\left(\ell,t\right) = EI\,\hat{y}''\left(\ell,t\right) = 0 \tag{3.1b}$$

biçimindedir. Burada $\hat{y}(\hat{x},\hat{t})$ enine deplasmanı, $\hat{x}$ konumu, $\hat{t}$ zaman değişkenini temsil eder. E elastisite modülü, I atalet momenti, $\hat{k}$ yay sabiti ve ε çok küçük bir parametredir. $\hat{\mu}$ lineer viskoz sönüm katsayısı, m birim kesit kütlesi ve ℓ iki mesnet arası uzunluktur. $\hat{f}$ ve $\hat{\Omega}$ sırasıyla dış zorlama kuvveti ve frekansını temsil etmektedir. H Heaviside adım fonksiyonudur.

(3.1a) denklemi malzeme bağımlılığından kurtulmak için boyutsuzlaştırılır. Literatürde yaygın olarak bilinen boyutsuz terim

$$y = \frac{\hat{y}}{\ell},\; x = \frac{\hat{x}}{\ell},\; t = \frac{\hat{t}}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{3.2}$$

olmak üzere, bu değerler (3.1) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\frac{EI}{\ell^3}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varepsilon\hat{\mu}\frac{\sqrt{EI}}{\ell\sqrt{m}}\frac{\partial y}{\partial t} + \hat{k}_0 H\left(\hat{x}-\hat{a}\right)\ell y + \frac{EI}{\ell^3}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \hat{f}(x)\cos\left(\hat{\Omega}\ell^2\sqrt{\frac{m}{EI}}t\right) = 0 \tag{3.3}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafı $\dfrac{\ell^3}{EI}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varepsilon\hat{\mu}\frac{\ell^2}{\sqrt{EIm}}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\ell^4}{EI}\hat{k}_0 H\left(\hat{x}-\hat{a}\right)y + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\ell^3}{EI}\hat{f}(x)\cos\left(\hat{\Omega}\ell^2\sqrt{\frac{m}{EI}}t\right) = 0 \tag{3.4}$$

bulunur. Boyutsuz yeni terimler

$$\mu = \hat{\mu}\frac{\ell^2}{\sqrt{EIm}},\; k_0 H\left(x-a\right) = \frac{\ell^4}{EI}\hat{k}_0\,H\left(\hat{x}-\hat{a}\right),\; \varepsilon f = \frac{\ell^3}{EI}\hat{f}(x),\; \Omega = \hat{\Omega}\ell^2\sqrt{\frac{m}{EI}} \tag{3.5}$$

olmak üzere, (3.4) denklemi ve sınır şartları

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\varepsilon\mu\frac{\partial y}{\partial t}+k_0 H\left(x-a\right)y+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\varepsilon\, f(x)\cos\Omega t \tag{3.6a}$$

$$y(0,t)=y''(0,t)=0 \text{ ve } y(1,t)=y''(1,t)=0 \tag{3.6b}$$

olarak elde edilir. Böylece, genel modelde verilen operatörlere karşılık gelen terimlerin

$$L_1\left[y\right]=y^{iv}+k_0 H\left(x-a\right)y \tag{3.7a}$$

$$L_2\left[y\right]=0 \tag{3.7b}$$

$$L_3\left[\dot{y}\right]=\mu\dot{y} \tag{3.7c}$$

$$a\left(x\right)=1 \text{ ve } \Omega_1=\Omega \tag{3.7d}$$

olduğu görülür. Bu terimler (2.11) denkleminde yerine koyulursa,

$$X_n^{iv}+\left(k_0 H\left(x-a\right)-\omega_n^2\right)X_n=0 \tag{3.8}$$

$$X_n(0)=X_n''(0)=0 \text{ ve } X_n(1)=X_n''(1)=0 \tag{3.9}$$

bulunur. Ardından (3.8) denkleminin katsayıları, (2.17) denklemindeki katsayılara karşılık getirilirse

$$b_{0,i}=1,\ b_{1,i}=-4\ ,\ b_{2,i}=6+\left(k_0 H\left(x-a\right)-\omega_n^2\right)\Delta x^4,\ b_{3,i}=-4,\ b_{4,i}=1 \tag{3.10}$$

bulunur. Burada H Heaviside Adım fonksiyonu

$$H(x-a)=\begin{cases}0 & x<a\\ 1 & x\geq a\end{cases} \tag{3.11}$$

ile tanımlıdır ve $b_{2,i}$ katsayısı

$$\overline{b}_{2,i}=6-\omega_n^2\Delta x^4,\ \ \underline{b}_{2,i}=6+\left(k_0-\omega_n^2\right)\Delta x^4 \tag{3.12}$$

biçiminde yazılır. Burada $\overline{b}_{2,i}$ zeminin bulunmadığı kısım ve $\underline{b}_{2,i}$ zeminin olduğu kısımdaki değerleri göstermektedir. (3.10)-(3.12) katsayıları (2.25) matrisinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{bmatrix}
\bar{b}_{2,i}-1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
-4 & \bar{b}_{2,i} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & & \\
1 & -4 & \bar{b}_{2,i} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 1 & -4 & \bar{b}_{2,i} & -4 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & \underline{b}_{2,i} & -4 & 1 & 0 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & \underline{b}_{2,i} & -4 & 1 & \\
 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & \underline{b}_{2,i} & -4 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & \underline{b}_{2,i}-1 &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ X_{n,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n,N-3} \\ X_{n,N-2} \\ X_{n,N-1} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

(3.13)

bulunur. Basit olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu taktirde, sistemin doğal frekansı yaklaşık olarak bulunabilir. Ayrıca mod yapısı da numerik olarak elde edilebilir. Eğer pertürbatif çözüme devam edilirse bu problem için 2.4.1 ve 2.4.4 durumları ortaya çıkacaktır.

Buna göre, α_{3n} ve α_{1n} katsayıları

$$
\alpha_{3n} = \frac{\mu}{2} \qquad \text{ve} \qquad \alpha_{1n} = -\frac{1}{2\omega_n}\int_0^1 f(x) X_n dx \tag{3.14}
$$

biçimindedir. α_{1n} katsayısındaki belirli integrali hesaplamak için, nümerik integrasyona ihtiyaç duyulur. Bu yöntemlerden en iyi sonuç veren Simpson nümerik integrasyon yöntemi kullanılır. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması için mevcut örnek klasik yöntemle de çözülmüştür.

3.1.1. Klasik Çözüm

Elde edilen sonuçları karşılaştırmak için (3.6) denklemi için boyutsuz hareket denklem sistemi

$$
y_1^{iv} + \varepsilon\mu\dot{y}_1 + \ddot{y}_1 - \varepsilon f(x)\cos\Omega t = 0 \tag{3.15}
$$

$$
y_2^{iv} + \varepsilon\mu\dot{y}_2 + k_0 y_2 + \ddot{y}_2 - \varepsilon f(x)\cos\Omega t = 0 \tag{3.16}
$$

olmak üzere, sınır şartları

$$
y_1(0,t) = 0 \quad EIy_1''(0,t) = 0 \ \text{ ve } \ y_2(1,t) = 0 \quad EIy_2''(1,t) = 0 \tag{3.17}
$$

ve geçiş şartları

$$
y_1(\eta,t) = y_2(\eta,t) \tag{3.18a}
$$

$$
y_1'(\eta,t) = y_2'(\eta,t) \tag{3.18b}
$$

$$EIy_1''(\eta,t) = EIy_2''(\eta,t) \tag{3.18c}$$

$$\left(EIy_1''(\eta,t)\right)' = \left(EIy_2''(\eta,t)\right)' \tag{3.18d}$$

biçiminde verilir. Çok zaman ölçekli metoda göre

$$y_1(x,T_0,T_1;\varepsilon) \cong y_{10}(x,T_0,T_1) + \varepsilon y_{11}(x,T_0,T_1) + ... \tag{3.19}$$

$$y_2(x,T_0,T_1;\varepsilon) \cong y_{20}(x,T_0,T_1) + \varepsilon y_{21}(x,T_0,T_1) + ... \tag{3.20}$$

pertürbasyon seri açılımını göz önüne alınır ve (3.19)-(3.20) denklemleri (3.15)-(3.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_{10}^{iv} + \varepsilon y_{11}^{iv} + \varepsilon\mu D_0 y_{10} + D_0^2 y_{10} + \varepsilon D_0^2 y_{11} + 2\varepsilon D_0 D_1 y_{10} - \varepsilon f(x)\cos\Omega T_0 = 0 \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} y_{20}^{iv} + \varepsilon y_{21}^{iv} + \varepsilon\mu D_0 y_{20} + k_0 y_{20} + \varepsilon k_0 y_{21} + D_0^2 y_{20} \\ + \varepsilon D_0^2 y_{21} + 2\varepsilon D_0 D_1 y_{20} - \varepsilon f(x)\cos\Omega T_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Sonuç denklem mertebelerine ayrıştırılırsa, bir mertebesindeki denklem

$$O(1): y_{10}^{iv} + D_0^2 y_{10} = 0 \tag{3.23}$$

$$y_{20}^{iv} + k_0 y_{20} + D_0^2 y_{20} = 0 \tag{3.24}$$

olmak üzere, sınır şartları

$$y_{10}(0,T_0,T_1) = 0, EIy_{10}''(0,T_0,T_1) = 0 \text{ ve } y_{20}(1,T_0,T_1) = 0,\ EIy_{20}''(1,T_0,T_1) = 0 \tag{3.25}$$

ve geçiş şartları

$$y_{10}(\eta,T_0,T_1) = y_{20}(\eta,T_0,T_1), \tag{3.26a}$$

$$y_{10}'(\eta,T_0,T_1) = y_{20}'(\eta,T_0,T_1), \tag{3.26b}$$

$$EIy_{10}''(\eta,T_0,T_1) = EIy_{20}''(\eta,T_0,T_1), \tag{3.26c}$$

$$\left(EIy_{10}''(\eta,T_0,T_1)\right)' = \left(EIy_{20}''(\eta,T_0,T_1)\right)' \tag{3.26d}$$

olarak bulunur. ε mertebesindeki denklem

$$O(\varepsilon): y_{11}^{iv} + D_0^2 y_{11} = -\mu D_0 y_{10} - 2D_0 D_1 y_{10} + \varepsilon f(x)\cos\Omega T_0 \tag{3.27}$$

$$y_{21}^{iv} + D_0^2 y_{21} + k_0 y_{21} = -\mu D_0 y_{20} - 2D_0 D_1 y_{20} + f(x)\cos\Omega T_0 \tag{3.28}$$

olup, sınır şartları

$$y_{11}(0,T_0,T_1) = 0\ ,\ EIy_{11}''(0,T_0,T_1) = 0 \text{ ve } y_{21}(1,T_0,T_1) = 0\ ,\ EIy_{21}''(1,T_0,T_1) = 0 \tag{3.29}$$

ve geçiş şartları

$$y_{11}(\eta,T_0,T_1) = y_{21}(\eta,T_0,T_1), \tag{3.30a}$$

$$y_{11}'(\eta,T_0,T_1) = y_{21}'(\eta,T_0,T_1), \tag{3.30b}$$

$$EIy''_{11}\left(\eta, T_0, T_1\right) = EIy''_{21}\left(\eta, T_0, T_1\right), \tag{3.30c}$$

$$\left(EIy''_{11}\left(\eta, T_0, T_1\right)\right)' = \left(EIy''_{21}\left(\eta, T_0, T_1\right)\right)'. \tag{3.30d}$$

biçimindedir. Buna göre, $O(1)$ mertebesindeki çözüm

$$y_{10} = \left(A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0}\right)X_{1n}(x) \tag{3.31}$$

$$y_{20} = \left(A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_n T_0}\right)X_{2n}(x) \tag{3.32}$$

olmak üzere, (3.31)-(3.32) denklemleri (3.23)-(3.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X_{1n}^{iv} - \omega_n^2 X_{1n} = 0 \tag{3.33}$$

$$X_{2n}^{iv} + (k_0 - \omega_n^2) X_{2n} = 0 \tag{3.34}$$

Sınır şartları,

$$X_{1n}\left(0\right) = 0, EIX''_{1n}\left(0\right) = 0 \text{ ve } X_{2n}\left(1\right) = 0, EIX''_{2n}\left(1\right) = 0 \tag{3.35}$$

Geçiş şartları

$$X_{1n}(\eta) = X_{2n}(\eta), \tag{3.36a}$$

$$X'_{1n}(\eta) = X'_{2n}(\eta), \tag{3.36b}$$

$$EIX''_{1n}\left(\eta\right) = EIX''_{2n}\left(\eta\right), \tag{3.36c}$$

$$\left(EIX''_{1n}\left(\eta\right)\right)' = \left(EIX''_{2n}\left(\eta\right)\right)' \tag{3.36d}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (3.33)-(3.34) denkleminin çözümü

$$X_{1n}\left(x\right) = c_1 \cos(\sqrt{\omega_n})x + c_2 \sin(\sqrt{\omega_n})x + c_3 \cosh(\sqrt{\omega_n})x + c_4 \sinh(\sqrt{\omega_n})x \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} X_{2n}\left(x\right) = {} & d_1 \cos(\sqrt{\sqrt{\omega_n{}^2 - k_0}})x + d_2 \sin(\sqrt{\sqrt{\omega_n{}^2 - k_0}})x \\ & + d_3 \cosh(\sqrt{\sqrt{\omega_n{}^2 - k_0}})x + d_4 \sinh(\sqrt{\sqrt{\omega_n{}^2 - k_0}})x \end{aligned} \tag{3.38}$$

biçimindedir. Elde edilen çözüme, sınır ve geçiş şartları uygulanırsa matris formunda yazılan denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\sqrt{\beta}a & \sin\sqrt{\beta}a & \cosh\sqrt{\beta}a & \sinh\sqrt{\beta}a & -\cos\sqrt{\lambda}a & -\sin\sqrt{\lambda}a & -\cosh\sqrt{\lambda}a & -\sinh\sqrt{\lambda}a \\ \sqrt{\beta}\sin\sqrt{\beta}a & \sqrt{\beta}\cos\sqrt{\beta}a & \sqrt{\beta}\sinh\sqrt{\beta}a & \sqrt{\beta}\cosh\sqrt{\beta}a & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a & -\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}a & -\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}a \\ -\beta\cos\sqrt{\beta}a & -\beta\sin\sqrt{\beta}a & \beta\cosh\sqrt{\beta}a & \beta\sinh\sqrt{\beta}a & \lambda\cos\sqrt{\lambda}a & \lambda\sin\sqrt{\lambda}a & -\lambda\cosh\sqrt{\lambda}a & -\lambda\sinh\sqrt{\lambda}a \\ \beta^{3/2}\sin\sqrt{\beta}a & -\beta^{3/2}\cos\sqrt{\beta}a & \beta^{3/2}\sinh\sqrt{\beta}a & \beta^{3/2}\cosh\sqrt{\beta}a & \lambda^{3/2}\sin\sqrt{\lambda}a & \lambda^{3/2}\cos\sqrt{\lambda}a & \lambda^{3/2}\sinh\sqrt{\lambda}a & \lambda^{3/2}\cosh\sqrt{\lambda}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\sqrt{\lambda}L & \sin\sqrt{\lambda}L & \cosh\sqrt{\lambda}L & \sinh\sqrt{\lambda}L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\sqrt{\lambda}L & -\sin\sqrt{\lambda}L & \cosh\sqrt{\lambda}L & \sinh\sqrt{\lambda}L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Burada β ve λ katsayıları sırasıyla ω_n ve $\sqrt{\omega_n^2 - k_0}$ biçimindedir. Basit çözümden farklı bir çözüm için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu takdirde, kritik eksenel yük ve doğal frekans, yay katsayısına ve konuma bağlı olarak hesaplanır. Daha sonra ise keyfi sabitler belirlenerek mod yapıları bulunur.

ε mertebesindeki çözüm için (3.31)-(3.32) denklemi (3.27)-(3.28) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_{11}^{iv} + D_0^2 y_{11} = -\left(\mu i\omega_n A(T_1) X_{1n}(x) + 2i\omega_n X_{1n}(x) D_1 A(T_1)\right) e^{i\omega_n T_0} + \frac{f(x)}{2} e^{i\Omega T_0} + k.e. \tag{3.40}$$

$$y_{21}^{iv} + D_0^2 y_{21} + k_0 y_{21} = -\left(\mu i\omega_n A(T_1) X_{2n}(x) + 2i\omega_n X_{2n}(x) D_1 A(T_1)\right) e^{i\omega_n T_0} + \frac{f(x)}{2} e^{i\Omega T_0} + k.e. \tag{3.41}$$

elde edilir. Buna göre, (3.40)-(3.41) denklemlerinin çözümü

$$y_{11} = \varphi_1(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + W_1(x, T_0, T_1) + k.e. \tag{3.42}$$

$$y_{21} = \varphi_2(x, T_1) e^{i\omega_n T_0} + W_2(x, T_0, T_1) + k.e. \tag{3.43}$$

olarak bulunur.

3.1.2. Ω ’nin ω_n ’den ($\Omega \neq \omega_n$) uzak olduğu durum

Ω ’nin ω_n ’den ($\Omega \neq \omega_n$) uzak olduğu durum için (3.40)-(3.41) denklemi aşağıdaki gibidir.

$$y_{11}^{iv} + D_0^2 y_{11} = -\left(\mu i\omega_n A(T_1) X_{1n}(x) + 2i\omega_n X_{1n}(x) D_1 A(T_1)\right) e^{i\omega_n T_0} + k.e. + S.O.T. \tag{3.44}$$

$$y_{21}^{iv} + D_0^2 y_{21} + k_0 y_{21} = -\left(\mu i\omega_n A(T_1) X_{2n}(x) + 2i\omega_n X_{2n}(x) D_1 A(T_1)\right) e^{i\omega_n T_0} + k.e. + S.O.T. \tag{3.45}$$

(3.42)-(3.43) denklemleri (3.44)-(3.45) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\varphi_1^{iv} - \varphi_1 \omega_n^{\,2} = -\mu i\omega_n A(T_1) X_{1n}(x) - 2i\omega_n X_{1n}(x) D_1 A(T_1) \tag{3.46}$$

$$\varphi_2^{iv} - \varphi_2 \omega_n^2 + k_0 \varphi_2 = -\mu i\omega_n A(T_1) X_{2n}(x) - 2i\omega_n X_{2n}(x) D_1 A(T_1) \tag{3.47}$$

bulunur. Burada homojen kısmın basit olmayan bir çözümü olduğundan, (3.46)-(3.47) denklemlerine çözülebilirlik şartı uygulanırsa,

$$\frac{\mu}{2} A(T_1) \int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)\,dx + D_1 A(T_1) \int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)\,dx = 0 \tag{3.48}$$

$$\frac{\mu}{2}A(T_1)\int_{\eta}^{L}X_{2n}^2(x)dx+D_1A(T_1)\int_{\eta}^{L}X_{2n}^2(x)dx=0 \tag{3.49}$$

elde edilir. Burada

$$\int_{0}^{\eta}X_{1n}^2(x)dx+\int_{\eta}^{L}X_{2n}^2(x)dx=0 \tag{3.50}$$

normalizasyonu ile

$$\alpha_{3n}=\frac{\mu}{2} \tag{3.51}$$

olmak üzere,

$$D_1A_n+A_n\alpha_{3n}=0 \tag{3.52}$$

bulunur. Böylece çözüm

$$A_n=ce^{-\alpha_{3n}T_1} \tag{3.53}$$

elde edilir. Burada c keyfi bir sabit katsayı olup, α_{3n} reel ve pozitiftir. Bu takdirde, sistemin genliği hızla azalır ve çözüm kararlıdır.

3.1.3 Ω'nin ω_n ($\Omega\cong\omega_n$) olduğu durum

Bu kısımda, dış zorlama kuvvetine ait frekansın, sistemin doğal frekanslarından birine eşit veya çok yakın olmasıyla meydana gelen baskın rezonans durumu incelenecektir. Bu durumda, sisteme ait genlik değerinde teorik olarak sonsuza giden bir artış olur. $\Omega\cong\omega_n$ koşulu (3.40)-(3.41) denkleminde uygulanırsa,

$$\begin{aligned}y_{11}^{iv}+D_0^2y_{11}=&-\left(\mu i\omega_nA(T_1)X_{1n}(x)+2i\omega_nX_{1n}(x)D_1A(T_1)\right)e^{i\omega_nT_0}\\&+\frac{f(x)}{2}e^{i\Omega T_0}+k.e.+S.O.T.\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}y_{21}^{iv}+D_0^2y_{21}+k_0y_{21}=&-\left(\mu i\omega_nA(T_1)X_{2n}(x)+2i\omega_nX_{2n}(x)D_1A(T_1)\right)e^{i\omega_nT_0}\\&+\frac{f(x)}{2}e^{i\Omega T_0}+k.e.+S.O.T.\end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.42)-(3.43) denklemi (3.54)-(3.55) denklemde yerine yazılırsa,

$$\varphi_1^{iv}-\varphi_1\omega_n^{\,2}=-\mu i\omega_nA(T_1)X_{1n}(x)-2i\omega_nX_{1n}(x)D_1A(T_1)+\frac{f(x)}{2}e^{i(\Omega-\omega_n)T_0} \tag{3.56}$$

$$\varphi_2^{iv}-\varphi_2\omega_n^2+k_0\varphi_2=-\mu i\omega_nA(T_1)X_{2n}(x)-2i\omega_nX_{2n}(x)D_1A(T_1)+\frac{f(x)}{2}e^{i(\Omega-\omega_n)T_0} \tag{3.57}$$

bulunur. Burada homojen kısmın basit olmayan bir çözümü olduğundan, (3.56)-(3.57) denklemlerine çözülebilirlik şartı uygulanırsa

$$\frac{\mu}{2}A(T_1)\int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)dx + D_1A(T_1)\int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)dx + \frac{i}{2\omega_n}\int_0^{\eta}\frac{f(x)}{2}X_{1n}^2(x)e^{i(\Omega-\omega_n)T_0}dx = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{\mu}{2}A(T_1)\int_{\eta}^{L} X_{2n}^2(x)dx + D_1A(T_1)\int_{\eta}^{L} X_{2n}^2(x)dx + \frac{i}{2\omega_n}\int_{\eta}^{L}\frac{f(x)}{2}X_{2n}^2(x)e^{i(\Omega-\omega_n)T_0}dx = 0 \quad (3.59)$$

elde edilir. Bu takdirde, baskın rezonans koşulu

$$\Omega_2 = \omega_n + \varepsilon\sigma_n \quad (3.60)$$

olmak üzere, (3.58)-(3.59) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\mu}{2}A(T_1)\int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)dx + D_1A(T_1)\int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)dx + \frac{i}{2\omega_n}e^{i\sigma_nT_0}\int_0^{\eta}\frac{f(x)}{2}X_{1n}^2(x)dx = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{\mu}{2}A(T_1)\int_{\eta}^{L} X_{2n}^2(x)dx + D_1A(T_1)\int_{\eta}^{L} X_{2n}^2(x)dx + \frac{i}{2\omega_n}e^{i\sigma_nT_0}\int_{\eta}^{L}\frac{f(x)}{2}X_{2n}^2(x)dx = 0 \quad (3.62)$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^{\eta} X_{1n}^2(x)dx + \int_{\eta}^{L} X_{2n}^2(x)dx = 0 \quad (3.63)$$

normalizasyonu ile

$$\alpha_{3n} = \frac{\mu}{2} \text{ ve } \alpha_{1n} = \frac{1}{2\omega_n}\left(\int_0^{\eta} f(x)X_{1n}\,dx + \int_{\eta}^{L} f(x)X_{2n}(x)dx\right) \quad (3.64)$$

olmak üzere, genlik denklemi

$$D_1A_n + \alpha_{3n}A_n = \frac{1}{2}i\alpha_{1n}e^{i\sigma_nT_1} \quad (3.65)$$

olarak elde edilir. α_{1n} katsayısındaki belirli integrali hesaplamak için, Simpson metodu kullanılır. Kutupsal formda tanımlanan $A_n = \frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)}$ ifadesi (3.65) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{da_n(T_1)}{dT_1}e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{i}{2}a_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1}e^{i\beta_n(T_1)} + \alpha_{3n}\frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} - \frac{1}{2}i\alpha_{1n}e^{i\sigma_nT_1} = 0 \quad (3.66)$$

bulunur. Elde edilen denklem $e^{i\beta_n(T_1)}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + ia_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{3n}a_n(T_1) + i\alpha_{1n}\,e^{i(\sigma_nT_1-\beta_n(T_1))} = 0 \quad (3.67)$$

formuna indirgenir. $\gamma_n = \sigma_nT_1 - \beta_n(T_1)$ yerine yazılır denklem düzenlenirse,

$$\frac{da_n(T_1)}{dT_1} + ia_n(T_1)\frac{d\beta_n(T_1)}{dT_1} + \alpha_{3n}a_n(T_1) + i\alpha_{1n}e^{i\gamma_n} = 0 \tag{3.68}$$

bulunur. Eğer (3.68) denklemi reel ve imajiner kısımlara ayrıştırılırsa,

$$\text{Re: } \frac{da_n}{dT_1} + \alpha_{3n}a_n = -\alpha_{1nI}\sin\gamma_n \tag{3.69}$$

$$\text{Im: } \sigma_n a_n - \frac{d\gamma_n}{dT_1}a_n = \alpha_{1nI}\cos\gamma_n \tag{3.70}$$

elde edilir. Kararlı hal çözümleri için da_n/dT_1 ve $d\gamma_n/dT_1$ ifadeleri sıfıra eşitlenir ve (3.69)-(3.70) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\text{Re: } \alpha_{3n}a_n = -\alpha_{1nI}\sin\gamma_n \tag{3.71}$$

$$\text{Im: } \sigma_n a_n = \alpha_{1nI}\cos\gamma_n \tag{3.72}$$

bulunur. Bu denklemlerden γ_n ifadesi yok edilirse, σ_n ayar parametresi

$$\sigma_n = \mp\frac{1}{a_n}\sqrt{\alpha_{1nI}^2 - a_n^2\alpha_{3n}^2} \tag{3.73}$$

biçiminde elde edilir.

3.1.4. Sayısal sonuçlar

Klasik yöntemden farklı bir teknik olarak burada pertürbasyon-sonlu farklar açılımı kullanılmaktadır. Sonlu fark açılımında N toplam grid noktası (nod) sayısını göstermektedir. Aşağıdaki tabloda farklı yay katsayısı ve lokasyonu ile elde edilmiş kritik eksenel yük değerlerinin ve α_{1n} katsayılarının karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 3.1.1. $N = 200$ ve $f(x) = 5$ için klasik çözüm (3.1.1) ve **mevcut yöntem (kalın)** ile kritik eksenel yük değerlerinin (α_{1n}) ve frekansların karşılaştırılması

η	$k = 50$				$k = 100$			
	ω		α_1		ω		α_1	
20	12.1279	**12.1414**	2.6247	**2.6215**	14.0271	**14.0466**	2.2694	**2.2659**
50	11.9506	**11.9589**	2.6644	**2.6626**	13.7160	**13.7210**	2.3223	**2.3209**
100	11.0497	**11.0718**	2.8804	**2.8743**	12.0898	**12.1198**	2.6318	**2.6251**

Tablo 3.1.2. $N = 200$ ve $f(x) = x$ için klasik çözüm (3.1.1) ve **mevcut yöntem (kalın)** ile kritik eksenel yük değerlerinin (α_{1n}) ve frekansların karşılaştırılması

η	$k=50$				$k=100$			
	ω		α_1		ω		α_1	
20	12.1279	**12.1433**	52.4824	**52.4315**	14.0271	**14.0429**	45.3679	**45.3391**
50	11.9506	**11.9541**	53.1476	**53.1306**	13.7160	**13.7270**	46.1972	**46.1982**
100	11.0497	**11.0664**	57.1944	**57.1477**	12.0898	**12.1071**	51.8812	**51.8427**

Bu sonuçlar klasik yöntem ile sonlu farklarla elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğunu göstermektedir.

3.2. Parametrik Eksenel Kuvvete Maruz Düşey Olarak Yerleştirilmiş Çoklu Yay Mesnetli Kirişler

Bu bölümde lineer elastik yaylarla mesnetlenmiş kiriş ele alınır [2]. M tane lineer elastik yaylı süreksiz fonksiyonlar içeren hareket denklemi ve sınır şartları

$$EI\hat{y}^{iv} + \hat{P}\hat{y}'' + \sum_{j=1}^{M} \hat{k}_j \, \delta\left(\hat{x} - \hat{\eta}_j\right)\hat{y} + m\ddot{\hat{y}} + \hat{\mu}\dot{\hat{y}} = 0 \tag{3.74}$$

$$\hat{y}(0,\hat{t}) = \hat{y}''(0,\hat{t}) = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{y}(\ell,\hat{t}) = \hat{y}''(\ell,\hat{t}) = 0 \tag{3.75}$$

şeklindedir. (3.74) denkleminde verilen $\hat{y}(\hat{x},\hat{t})$ enine deplasmanı, $\hat{x}$ konumu, $\hat{t}$ zamanı gösterir. E elastisite modülü ve I atalet momentidir. m birim kesit kütlesi, ℓ iki mesnet arası uzunluk ve ε çok küçük bir parametredir. $\hat{P}(\hat{t})$ eksenel harmonik basınç yükü olup, $\hat{P} = \hat{P}_0 + \varepsilon \hat{P}_1 \cos\Omega\hat{t}$ ile tanımlanır. $\hat{\mu}$ lineer viskoz sönüm katsayısını, $\hat{k}$ ise yay sabitini temsil eder. $\left\langle \hat{x} - \hat{\eta}_j \right\rangle^{-1}$ singülerite fonksiyonuna karşılık gelen Dirac delta fonksiyonu δ ile gösterilir. Çeşitli yük ve mesnet şartlarına sahip kirişlerin deplasmanlarını hesaplamak için süreksizlik fonksiyonları kullanılır. Literatürde yaygın olarak bilinen boyutsuz terimler

$$y = \frac{\hat{y}}{\ell}, \; x = \frac{\hat{x}}{\ell}, \; t = \frac{\hat{t}}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{3.76}$$

olmak üzere, bu değerler (3.74)-(3.75) denklemlerinde yerine yazılır,

$$\frac{EI}{\ell^3}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\hat{P}}{\ell}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{M}\hat{k}_j\,\delta\left(x\ell-\hat{\eta}_j\right)y\ell+\frac{EI}{\ell^3}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\hat{\mu}\frac{\sqrt{EI}}{\ell\sqrt{m}}\frac{\partial y}{\partial t}=0 \tag{3.77}$$

denklemin her iki tarafı $\dfrac{\ell^3}{EI}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\hat{P}\ell^2}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\ell^3}{EI}\sum_{j=1}^{M}\hat{k}_j\,\delta\left(x\ell-\hat{\eta}_j\right)y\ell+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\hat{\mu}\frac{\ell^2}{\sqrt{EIm}}\frac{\partial y}{\partial t}=0 \tag{3.78}$$

bulunur. Buna göre, yeni boyutsuz terimler

$$\eta_j=\frac{\hat{\eta}_j}{\ell},\; k_j=\frac{\hat{k}_j\ell^3}{EI},\; P=\frac{\hat{P}\ell^2}{EI},\;\; \mu=\frac{\hat{\mu}\ell^2}{\sqrt{E\,Im}} \tag{3.79}$$

olmak üzere, (3.74)-(3.75) denklemi ve sınır şartları

$$y^{iv}+Py''+\sum_{j=1}^{M}k_j\delta\left(x-\eta_j\right)y+\ddot{y}+\mu\dot{y}=0 \tag{3.80}$$

$$y(0,t)=y''(0,t)=0 \text{ ve } y(1,t)=y''(1,t)=0\,. \tag{3.81}$$

olarak elde edilir.

Şimdi bir tane yay ve iki açıklığa sahip elastik kirişin dinamik analizini göz önüne alalım. Burada $M=1$ için, (3.80) denklemi

$$y^{iv}+Py''+k\,\delta\left(x-\eta\right)y+\ddot{y}+\mu\dot{y}=0 \tag{3.82}$$

haline gelir. Böylece genel modelde verilen operatörler

$$L_1\left[y\right]=y^{iv}+P_0y''+k\,\delta\left(x-\eta\right)y \tag{3.83a}$$

$$L_2\left[y\right]=P_1y'' \tag{3.83b}$$

$$L_3\left[\dot{y}\right]=\mu\dot{y} \tag{3.83c}$$

$$a\left(x\right)=1 \text{ ve } \Omega_1=\Omega \tag{3.83d}$$

biçimindedir. Bu terimler (2.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X_n^{iv}+P_0X_n''+kX_n\delta\left(x-\eta\right)-\omega_n^2X_n=0 \tag{3.84}$$

$$X_n(0)=X_n''(0)=0 \text{ ve } X_n(1)=X_n''(1)=0 \tag{3.85}$$

bulunur. Buradan (3.84) denkleminin (2.17) denkleminde yer alan terimlere karşılık gelen katsayılarının

$$b_{0,j}=1,\qquad b_{1,j}=\left(P_0\Delta x^2-4\right),$$

$$b_{2,j}=6-2P_0\Delta x^2+\left(k\,\delta\left(x-\eta\right)-\omega_n^2\right)\Delta x^4,$$

$$b_{3,j}=\left(P_0\Delta x^2-4\right),\qquad b_{4,j}=1 \tag{3.86}$$

biçiminde olduğu görülür. Burada $b_{2,j}$ dışındaki tüm değerler j 'nin her bir değeri için sabittir. (3.86) katsayıları (2.25) matrisinde yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} b_{2,j}-1 & b_{3,j} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -4 & b_{2,j} & b_{3,j} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 1 & -4 & b_{2,j} & b_{3,j} & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & b_{3,j} & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & b_{3,j} & 1 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & b_{3,j} & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & b_{3,j} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j}-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ X_{n,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n,N-3} \\ X_{n,N-2} \\ X_{n,N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.87)

bulunur. Basit olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu şart kullanılarak, sistemin doğal frekansı yaklaşık olarak bulunabilir. Ayrıca mod yapısı da nümerik olarak bulunur. Eğer pertürbatif çözüme devam edilirse bu problem için 2.4.1, 2.4.2 ve 2.4.3 durumları ortaya çıkar. Böylece, α_{3n} ve α_{2n} katsayıları

$$\alpha_{3n} = \frac{\mu}{2} \text{ ve } \alpha_{2n} = -\frac{P_1}{4\omega_n}\int_0^1 X_n X_n'' \, dx \tag{3.88}$$

olarak bulunur. α_{2n} katsayısını hesaplamak için nümerik integrasyon metodu olarak Simpson metodu kullanılır. Buna göre Simpson metodunun

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 2f_{M-2} + 4f_{M-1} + f_M\right) \tag{3.89}$$

genel formülünde yer alan f_j 'ler

$$f_j = \frac{X_{n,j}}{\Delta x^2}\left(X_{n,j+1} - 2X_{n,j} + X_{n,j-1}\right). \tag{3.90}$$

olarak elde edilir.

3.2.1. Klasik çözüm

Elde edilen sonuçları karşılaştırmak için (3.82) denklemi boyutsuz hareket denklem sistemi olarak yazılır. Çözümlerin detaylı gösterimi [2]'de mevcuttur. Böylece denklem sistemi

$$y_1^{iv} + Py_1'' + \ddot{y}_1 + \mu\dot{y}_1 = 0 \tag{3.91a}$$

$$y_2^{iv} + Py_2'' + \ddot{y}_2 + \mu\dot{y}_2 = 0 \tag{3.91b}$$

olmak üzere, sınır şartları

$$y_1(0,t) = y_1''(0,t) = 0 \text{ ve } y_2(1,t) = y_2''(1,t) = 0 \tag{3.92}$$

ve geçiş şartları

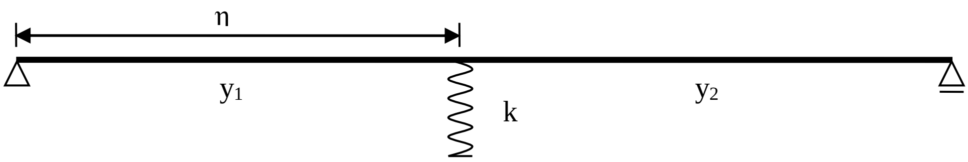
$$y_1(\eta,t) = y_2(\eta,t) \tag{3.93a}$$

$$y_1'(\eta,t) = y_2'(\eta,t) \tag{3.93b}$$

$$EIy_1''(\eta,t) = EIy_2''(\eta,t) \tag{3.93c}$$

$$y_1''' + Py_1' - ky_1 = y_2''' + Py_2' \tag{3.93d}$$

biçimindedir.



Şekil 3.1. İki açıklıklı tek yaylı elastik kiriş

Burada α_{2n} katsayısı

$$\alpha_{2n} = -i\frac{P_1}{4\omega_n}\int_0^{\eta} X_{1n}X_{1n}''\,dx + \int_{\eta}^{1} X_{2n}X_{2n}''\,dx. \tag{3.94}$$

olarak hesaplanır [2]. Sonlu fark açılımında N toplam bölünme noktası sayısını göstermek üzere, aşağıda verilen Tablo 3.2.1, Tablo 3.2.2 ve Tablo 3.2.3' de farklı k yay katsayısı ve η yay lokasyonu için elde edilen kritik eksenel yük değerlerinin karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 3.2.1. $N = 200$ için klasik çözümden [2] elde edilen eksenel yük değerlerinin **mevcut yöntemle (kalın)** karşılaştırılması

η \ k	100		1000	
0.1	11.6355	**11.6353**	18.6836	**18.6820**
0.3	20.4587	**20.4582**	30.7234	**30.7207**
0.5	29.2960	**29.2957**	39.4784	**39.4752**

Tablo 3.2.2. $N=200$ ve $P_0=10$ için klasik çözümden [2] elde edilen doğal frekansların **mevcut yöntemle (kalın)** karşılaştırılması

η \ k	100		1000	
0.1	4.0239	**4.0236**	9.7712	**9.7702**
0.3	10.4605	**10.4602**	19.5262	**19.5244**
0.5	13.8591	**13.8587**	34.1140	**34.1107**

Tablo 3.2.3. $P_0=10$, $P_1=1$ ve $N=200$ için klasik çözümden [2] elde edilen α_{2n} katsayısının **mevcut yöntemle (kalın)** karşılaştırılması

η \ k	100		1000	
0.1	-0.6150	**-0.6150**	-0.2778	**-0.2769**
0.3	-0.2466	**-0.2467**	-0.2212	**-0.2295**
0.5	-0.1792	**-0.1792**	-0.0984	**-0.0967**

Tablodaki sayısal değerler klasik yöntem ile pertürbasyon-sonlu fark tekniğinden elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğunu göstermektedir.

3.3. Kütle-Kiriş Sistemi

Euler-Bernoulli kirişini üzerine konsantre kütleler yerleştirerek kütle-yay sistemi olarak göz önüne alalım. Burada ρ yoğunluk, A enine kesit alanı, E elastisite modülü, I atalet momenti, $\bar{M}_j$ konsantre kütle, $\hat{\mu}$ viskoz sönüm katsayısı, $\hat{g}$ dış zorlama genliği ve $\hat{\Omega}$ dış zorlama frekansı, olmak üzere hareket denklemi [35],

$$\left[\rho A+\bar{M}_j\,\delta\left(\hat{x}-x_j\right)\right]\ddot{\hat{w}}+EI\,\hat{w}^{iv}+\hat{\mu}\dot{\hat{w}}-\hat{g}\left(\hat{x}\right)\cos\hat{\Omega}\hat{t}=0\ ;\quad j=1,2,\ldots,n \tag{3.95}$$

$$\hat{w}\left(0,\hat{t}\right)=\hat{w}''\left(0,\hat{t}\right)=0\,,\ \hat{w}\left(\ell,\hat{t}\right)=\hat{w}''\left(\ell,\hat{t}\right)=0\,. \tag{3.96}$$

biçiminde elde edilir. Malzeme yapısı ve şekil bağımlılığından kurtulmak için (3.95) denklemi boyutsuzlaştırılır. Literatürde yaygın olarak bilinen boyutsuz terimler

$$w=\frac{\hat{w}}{\ell},\qquad x=\frac{\hat{x}}{\ell},\qquad \eta_j=\frac{x_j}{\ell},\qquad t=\frac{\hat{t}}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{3.97}$$

olmak üzere, (3.95) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left[\rho A+\bar{M}_j\frac{\delta\left(x-\eta_j\right)}{\ell}\right]\frac{EI}{\ell^3\rho A}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{EI}{\ell^3}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\hat{\mu}\frac{\sqrt{EI}}{\ell\sqrt{\rho A}}\frac{\partial w}{\partial t}-\hat{g}\left(\hat{x}\right)\cos\hat{\Omega}t\ell^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}}=0 \tag{3.98}$$

elde edilir. (3.98) denklemin her iki tarafı $\frac{\ell^3}{EI}$ ile çarpılırsa,

$$\left[\rho A+\bar{M}_j\frac{\delta\left(x-\eta_j\right)}{\ell}\right]\frac{1}{\rho A}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\hat{\mu}\frac{\ell^2}{\sqrt{\rho AEI}}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\ell^3}{EI}\hat{g}\left(\hat{x}\right)\cos\hat{\Omega}t\ell^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}}=0 \tag{3.99}$$

bulunur. Böylece yeni boyutsuz terimler

$$\alpha_j=\bar{M}_j/\rho A\ell,\ \Omega=\hat{\Omega}\ell^2/\sqrt{EI/\rho A},\ \varepsilon g=\hat{g}\ell^3/EI,\ \varepsilon\mu=\hat{\mu}\ell^2/\sqrt{EI\rho A} \tag{3.100}$$

olacak şekilde (3.95) denklemi ve sınır şartları

$$\left[1+\alpha_j\,\delta\left(x-\eta_j\right)\right]\ddot{w}+w^{iv}+\mu\dot{w}-g\left(x\right)\cos\Omega t=0 \tag{3.101}$$

$$w\left(0,t\right)=w''\left(0,t\right)=0,\ w\left(1,t\right)=w''\left(1,t\right)=0 \tag{3.102}$$

biçimindedir. Burada α kütle kiriş sitemine yerleştirilen kütle oranıdır. Böylece genel modele karşılık gelen operatörler

$$L_1\left[y\right]=w^{iv} \tag{3.103a}$$

$$L_2\left[y\right]=0 \tag{3.103b}$$

$$L_3\left[\dot{y}\right]=\mu\dot{w} \tag{3.103c}$$

$$a\left(x\right)=1+\alpha_j\delta\left(x-\eta_j\right) \tag{3.103d}$$

$$\Omega_2=\Omega\ \text{ve}\ F\left(x\right)=-g\left(x\right). \tag{3.103e}$$

biçimindedir. Bu terimler (2.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X_n^{iv}-\left(1+\alpha_j\delta\left(x-\eta_j\right)\right)\omega_n^2X_n=0 \tag{3.104}$$

$$X_n\left(0\right)=X_n''\left(0\right)=0\ \text{ve}\ X_n\left(1\right)=X_n''\left(1\right)=0 \tag{3.105}$$

bulunur. Ardından, (3.104) denkleminin (2.17) denklemindekilere karşılık gelen katsayıları

$$b_{0,j}=1,\ b_{1,j}=-4,\ b_{2,j}=6-\omega_n^2\left(1+\alpha_j\delta\left(x-\eta_j\right)\right)\Delta x^4$$

$$b_{3,j} = -4,\ b_{4,j} = 1 \tag{3.106}$$

biçiminde elde edilir. (3.106) katsayıları (2.25) matrisinde yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} b_{2,j}-1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -4 & b_{2,j} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\ 1 & -4 & b_{2,j} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & -4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & -4 & 1 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & -4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j} & -4 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_{2,j}-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ X_{n,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n,N-3} \\ X_{n,N-2} \\ X_{n,N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.107)

bulunur. Basit olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu şart kullanılarak, sistemin doğal frekansı yaklaşık olarak hesaplanabilir. Ayrıca mod yapısı da nümerik olarak bulunur. Buna göre, bu problem için 2.4.1 ve 2.4.4 durumları ortaya çıkar. Buradan α_{1n} ve α_{3n} katsayıları,

$$\alpha_{3n} = \frac{\mu}{2} \text{ ve } \alpha_{1n} = -\frac{1}{2\omega_n}\int_0^1 g(x)\,X_n\,dx \tag{3.108}$$

biçiminde bulunur. α_{1n} katsayısı nümerik integrasyondan hesaplanır. Ref. [36,37] ile verilen modelin lineer formu burada çözülen denklemle aynı olduğundan nümerik kıyaslamalar aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.3.1 Tek kütle için, farklı kütle oranı ve konumu için ilk üç doğal frekansın klasik çözüm [35] ve **mevcut yöntemle (kalın)** karşılaştırılması $(N = 100)$

		ω_1		ω_2		ω_3	
α	η	ω_1	Ref.36	ω_2	Ref.36	ω_3	Ref.36
1	0.0	**9.8688**	9.8695	**39.4654**	39.4784	**88.7607**	88.8264
	0.1	**8.9954**	8.9962	**29.8755**	29.8891	**66.0088**	66.0691
	0.2	**7.4533**	7.4541	**26.9359**	26.9462	**73.4569**	73.5140
	0.3	**6.3941**	6.3946	**29.7397**	29.7503	**86.6638**	86.7293
	0.4	**5.8463**	5.8468	**35.2250**	35.2374	**79.9135**	79.9788
	0.5	**5.6791**	5.6795	**39.4654**	39.4784	**67.8305**	67.8883
10	0.0	**9.8688**	9.8695	**39.4654**	39.4785	**88.7607**	88.8264
	0.1	**5.3312**	5.3322	**19.8249**	19.8959	**59.0482**	59.0995
	0.2	**3.2594**	3.2598	**22.0495**	22.0545	**70.7174**	70.7723
	0.3	**2.5276**	2.5279	**26.7608**	26.7706	**86.0802**	86.1462
	0.4	**2.2250**	2.2252	**33.6682**	33.6806	**77.2029**	77.2690
	0.5	**2.1393**	2.1395	**39.4654**	39.4785	**62.3954**	62.4517

Tablo 3.3.2. İki kütle için, farklı kütle oranı ve konumuna karşılık gelen doğal frekansların klasik çözüm [36] ve **mevcut yöntemle (kalın)** karşılaştırılması $(N = 100)$

				ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
α_1	α_2	η_1	η_2	ω_1	Ref.37	ω_2	Ref.37	ω_3	Ref.37	ω_4	Ref.37
1	1	0.1	0.3	**6.118**	6.118	**27.536**	26.506	**55.338**	55.412	**98.966**	99.097
			0.7	**6.183**	6.183	**22.588**	22.598	**60.165**	60.226	**124.852**	125.021
		0.5	0.3	**4.730**	4.785	**25.116**	19.802	**60.830**	45.252	**141.073**	95.238
			0.7	**4.730**	4.730	**25.116**	25.128	**60.830**	60.883	**141.073**	141.289
1	10	0.1	0.3	**2.509**	2.509	**26.066**	26.075	**50.993**	51.069	**94.388**	94.505
			0.7	**2.516**	2.516	**20.052**	20.060	**58.763**	58.824	**124.117**	124.285
		0.5	0.7	**2.387**	2.387	**17.916**	17.925	**59.518**	59.569	**136.776**	136.993
10	1	0.1	0.3	**4.513**	4.514	**18.548**	18.563	**38.536**	38.578	**96.578**	96.694
			0.7	**4.671**	4.671	**12.423**	12.429	**50.941**	50.992	**121.270**	121.432
		0.5	0.7	**2.078**	2.078	**22.025**	22.036	**54.599**	54.647	**140.648**	140.866
10	10	0.1	0.3	**2.356**	2.357	**16.238**	16.257	**29.949**	29.975	**92.758**	92.863
			0.7	**2.412**	2.413	**8.845**	8.850	**48.883**	48.883	**120.858**	121.018
		0.5	0.7	**1.677**	1.677	**9.806**	9.812	**53.472**	53.516	**136.317**	136.535

Tablo 3.3.3. Üç kütle için, farklı kütle oranı ve konumuna karşılık gelen doğal frekansların klasik çözüm [36] ve **mevcut yöntemle (kalın)** karşılaştırılması $(N = 100)$

						ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
α_1	α_2	α_3	η_1	η_2	η_3	ω_1	**Ref.37**	ω_2	**Ref.37**	ω_3	**Ref.37**	ω_4	**Ref.37**
1	1	1	0.1	0.4	0.8	**5.130**	5.130	**18.908**	18.915	**40.627**	40.668	**101.805**	101.949
1	1	10	0.1	0.4	0.8	**3.011**	3.011	**11.726**	11.731	**39.407**	39.445	**98.570**	98.713
1	10	1	0.1	0.4	0.8	**2.182**	2.182	**17.179**	17.186	**37.318**	37.356	**99.182**	99.323
10	1	1	0.1	0.4	0.8	**4.141**	4.142	**13.012**	13.021	**25.934**	25.958	**99.303**	99.439
10	10	10	0.1	0.4	0.8	**1.864**	1.864	**6.672**	6.675	**14.144**	14.161	**93.644**	93.774
1	1	1	0.2	0.5	0.7	**4.411**	4.411	**18.193**	18.201	**39.151**	39.189	**137.782**	137.980
1	1	10	0.2	0.5	0.7	**2.350**	2.350	**13.463**	13.469	**34.966**	35.001	**134.570**	134.770
1	10	1	0.2	0.5	0.7	**2.048**	2.048	**18.178**	18.185	**29.348**	29.378	**137.760**	137.958
10	1	1	0.2	0.5	0.7	**2.857**	2.857	**10.767**	10.771	**35.346**	35.379	**137.078**	137.274
10	10	10	0.2	0.5	0.7	**1.540**	1.540	**6.381**	6.383	**13.564**	13.578	**134.055**	134.252

Tablo 3.3.1 de görüldüğü gibi doğal frekansın nümerik sonuçları klasik çözüm ile çok yakındır. Tablo 3.3.2’de iki konsantre kütle için ve Tablo 3.3.3’de üç konsantre kütle için de benzer sonuçlar elde edilir.

IV. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, değişken malzeme, kesit ya da diğer bazı süreksizliklere sahip olabilen yapı elemanlarının dinamik davranışını analiz etmek için bir genel model göz önüne alınmıştır. Çözüm tekniği olarak ise hem çok zaman ölçekli metot hem de sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Çözülebilirlik şartından gelen integrallerin yaklaşık hesabında ise nümerik integrasyon kurallarından Simpson yöntemi kullanılmıştır. Burada klasik yaklaşımdan farklı olarak süreksizlik ihtiva eden her bir açıklık için ayrı denklem yazmak yerine, tüm süreksizlikleri ihtiva eden süreksizlik fonksiyonuna sahip tek bir denklem ele alınmıştır. Bu ise pratikte büyük fayda sağlar. Genel olarak literatürde süreksizlik oluşturan her bir açıklık için ayrı denklem yazıldığından karşımıza açıklık sayısı kadar denklemden meydana gelen bir sistem çıkmaktadır. Klasik yöntem olarak adlandırdığımız bu teknikte sistem çözümü yapıldığından bazı zorluklarla karşılaşılır. Bu çalışmada ise herhangi bir yapısal elemanda meydana gelen tüm süreksizlikler tek bir denklemle modellendiği için çözümde büyük kolaylık sağlamaktadır. Mevcut tekniğin doğruluğunu göstermek için genel çözüm prosedürü Winkler tipi elastik temel üzerindeki kiriş, çoklu lineer elastik yaylı kiriş ve kiriş kütle sistemi gibi üç farklı probleme uygulanmıştır. Göz önüne alınan modeller ayrıca klasik yöntemle de çözülerek elde edilen sayısal değerler önerilen teknikle bulunanlarla kıyaslanmıştır. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda klasik yaklaşım ile yeni yöntemin uygulanması neticesinde elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Ayrıca bu yaklaşım konumsal tanım bölgesinde sürekli değişim içeren dinamik problemlere de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Dönmez Demir, D. Kesirli Türevlere Sahip Sürekli Ortamların Dinamik Analizi. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2012 (Doktora Tezi).
[2] Sınır, B.G., Sınır, S. Eksenel Parametrik Zorlamalı Çok Yaylı Kirişlerin Yeni Bir Yaklaşımla Dinamik Analizi. XVII. Ulusal Mekanik Kongresi, 6-9 Eylül, 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye.
[3] Naguleswaran, S. Transverse vibration and stability of an Euler–Bernoulli beam with step change in cross-section and in axial force Journal of Sound and Vibration 270, 1045–1055, 2004
[4] Low, K.H. On the methods to derive frequency equations of beams carrying multiple masses International Journal of Mechanical Sciences 43, 871-881, 2001
[5] Özkaya, E., Pakdemirli, M. Non-linear vibrations of a beam-mass system with both ends clamped, Journal of Sound and Vibration 221, 491-503, 1999.
[6] Tekin, A., Özkaya, E., Bağdatlı, S. M. Three-to-one internal resonance in multiple stepped beam systems, Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. 30(9), 1131–1142, 2009
[7] Öz, H. R., Özkaya, E. Natural frequencies of beam-mass systems in transverse motion for different end conditions, Mathematical and Computational Applications, Vol. 10, No. 3, pp. 369-376, 2005.
[8] Lakner, M., Plazl, I. The finite differences method for solving systems on irregular shapes. Computers & Chemical Engineering, 32(12), 2891–2896, 2008.
[9] Hassanien, I.A., Salama, A.A. Hosham, H.A. Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation. Applied Mathematics and Computation, 170(2), 781-800, 2005.
[10] Yılmaz, A. Dairesel Plakların Sonlu Farklar ile Çözülmesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul, 2016. (Yüksek Lisans Tezi)
[11] Günay, A. Akışkanlar Mekaniğinin Temel Model Problemlerinin Sonlu Fark Çözümleri. Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, 2010. (Yüksek Lisans Tezi)
[12] Özhan, B.B. Kübik Non-Lineer Bir Sürekli Ortam Sisteminin Dış Zorlamalı ve Parametrik Titreşimlerine Genel Bir Yaklaşım. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 2009.(Doktora Tezi).
[13] Pakdemirli, M. Comparison of higher order versions of the metod of multiple scales for an odd nonlinearity problem. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262, 989-998.
[14] Mahmoodi, S.N., Khadem, S.E., Kokabi, M. Non-linear free vibrations of Kelvin-Voight visco-elastik beam. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49(6), 722-732.
[15] Fung, R.F., Huang, J.S., Chen, Y.C., Yao, C.M. Nonlinear dynamic analysis of the viscoelastic string with a harmonically varying transport speed. Computers & Structures, 1998, 66(6), 777-784.
[16] Fung, R.F., Huang, J.S., Chen, Y.C. The transient amplitude of the viscoelastic travelling string: An integral constıtutıve law. Journal of Sound and Vibration, 1997, 201(2), 153-167.

[17] Pakdemirli, M. A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities. Mechanics Research Communications, 1994, 21(2), 203-208.
[18] Pakdemirli, M., Boyacı, H. Comparison of direct perturbation methods with discretization–perturbation methods for non-linear vibrations. Journal of Sound and Vibration, 1995, 186(5), 837-845.
[19] Boyacı, H. Pakdemirli, M. A comparison of different versions of the method of multible scales for partial differential equations. Journal of Sound and Vibration, 1997, 204(4), 595-607.
[20] Boyacı, H. Sürekli Ortamların Non-Lineer Titreşimlerine Genel Bir Yaklaşım, Celal Bayar Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 1998 (Doktora Tezi).
[21] Öz, H.R. Eksenel Hareketli Sürekli Ortam Titreşimleri. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 1999, (Doktora Tezi).
[22] Jiang, W.A., Chen, L.Q., Ding H. Internal resonance in axially loaded beam energy harvesters with an oscillator to enhance the bandwidth. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(4), 2507-2520.
[23] Nayfeh, H.A., Emam, S.A. Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams. Nonlinear Dynamics, 2008, 54(4), 395-408.
[24] Korovkin, P.P. Linear operators and theory of approximation, Hindustan Pub. Corp., 1960, 38-45.
[25] Çetin, N. Genelleştirilmiş Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin İstatistiksel Yaklaşımı, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 2009, (Yüksek Lisans Tezi).
[26] Beam deflections by discontinuity functions. IAST, Lect12
[27] Hacıoğlu, M. Tekil Terimli Hiperbolik Denklemlerin Nümerik Çözümleri. Bahçeşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik, İstanbul, 2015, (Yüksek Lisans Tezi).
[28] Nayfeh, A.H., Introduction to Perturbation Techniques, New York, 388-471, 1981
[29] Hasçelik, A.İ. Sınır Değer Problemleri I, 2014
[30] Karagöz, İ. Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2011, 293-301.
[31] Yıldırım, M. Bazı Ortotropik Plakların Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü. İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği, İstanbul, 2007, (Yüksek Lisans Tezi).
[32] Usta L. Singülerite Fonksiyonlarına Sahip Yapı Dinamiği Problemlerinin Çözümüne Yeni Bir Yaklaşım. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017 (Yüksek Lisans Tezi).
[33] tr.wikipedia.org/wiki/pertürbaston_teorisi.
[34] Çetin K., Usta L., Sınır B. G., Effect of soil coefficients and Poisson's ratio on the behavior of modified Euler-Bernoulli beam lying on Winkler foundation, 3rd International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering (ICCESEN-2016), Antalya, Turkey, 19-24 October 2016.
[35] Özkaya, E. Pakdemirli M, Öz HR. Non-Linear vibrations of a beam-mass system under different boundary conditions. Journal of Sound and Vibration 1997; 199 (4): 679-696.

[36] Özkaya, E. Linear transverse vibrations of a simply supported beam carrying concentrated mass. Mathematical and Computational Applications 2001; 6 (3): 147-151.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emine KAHRAMAN

Doğum Yeri ve Yılı : Liestal, İSVİÇRE, 1988

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : emine.35@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Karşıyaka Gazi Lisesi, 2006

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2018

Mesleki Deneyim

1. TÜBİTAK PROJESİ Araştırmacı, Celal Bayar Üniversitesi / Hafif eğrili geliştirilmiş Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişinin eğilme, titreşim ve burkulma tepkisi, Yürütücü: B. Gültekin SINIR, Proje No: 214M050.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında (proceedings) Basılan Bildiriler

1. Demir D.D., Sınır B.G., Kahraman E., The dynamic behavior of beam lying on Winkler type-foundation. The 6th International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2017), 22-25 Temmuz 2017, Prague, Czech Republic.

2. Sınır B.G., Demir D.D., Kahraman E., Dynamical analysis of beam type structural elements with discontinuities. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), 10-12 Mayıs 2017, İstanbul, Turkey.