T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

FARKLI TİP METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA SABİT NOKTA SONUÇLARI

Meltem ERDEN EGE

Danışman
Doç. Dr. Cihangir ALACA

MANİSA–2018

TEZ ONAYI

Meltem ERDEN EGE tarafından hazırlanan **Farklı Tip Metrik Uzaylar ve Bu Uzaylarda Sabit Nokta Sonuçları** adlı tez çalışması 11.04.2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Doç. Dr. Cihangir ALACA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Bekir TANAY** Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. İshak ALTUN** Kırıkkale Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Meltem ERDEN EGE

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B_\omega(x, r)$	Açık yuvar
$B_\omega[x, r]$	Kapalı yuvar
$diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	$n \times n$ tipindeki köşegen matris
$M_2(\mathbb{R})$	Reel sayılar üzerindeki tüm 2×2 tipindeki matrislerin kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$O(x, T)$	x elemanının yörüngesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayıların kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzay
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	x_n dizisi
X_ω	Modüler metrik uzay
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\delta_\omega(x)$	Yörüngenin çapı
$\sigma(x)$	x elemanının spektrumu
ω	Metrik modüler
$\|\cdot\|$	Norm
$*$	Üs alma işlemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübesiyle her zaman en büyük destekçim olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Cihangir ALACA hocama, tez aşaması boyunca değerli vakitlerini ayıran tez izleme komitesi üyelerinden Prof. Dr. Ali MUTLU ve Doç. Dr. Bekir TANAY'a, ayrıca değerli tez savunma jürisi üyelerine çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu tez çalışması, "BİDEB-2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı" adı altında finansal olarak TÜBİTAK tarafından desteklendiği için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olan sevgili eşim Doç. Dr. Özgür EGE'ye, biricik kızım Öykü'ye ve aileme çok teşekkür ederim.

Meltem Erden Ege
Manisa, 2018

ÖZET

Doktora Tezi

Farklı Tip Metrik Uzaylar ve Bu Uzaylarda Sabit Nokta Sonuçları

Meltem ERDEN EGE

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Cihangir ALACA

Bu tez çalışmasında ilk olarak modüler metrik uzaylarda T-yörüngesel w-tamlık, yörüngesel w-süreklilik ve hemen hemen zayıf w-büzülme dönüşümü gibi bazı yeni kavramlar tanıtılmıştır. Bu yeni kavramlar için bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve elde edilen sonuçlar ile ilgili bir homotopi uygulaması verilmiştir. Modüler S-metrik uzaylar ve bu uzayların sahip olduğu bazı özellikler literatüre kazandırılarak tam modüler S-metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Modüler ultrametrik uzay kavramı ilk kez tanımlanmış ve modüler küresel tam ultrametrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir. Modüler b-metrik uzay kavramı ilk kez tanıtılarak bazı sabit nokta sonuçları verilmiş ve lineer denklem sistemlerinin çözümü üzerine bir uygulama yapılmıştır. Literatürde yeni bir kavram olarak C*-cebir-değerli S-metrik uzaylar verilmiş ve bu uzayda Banach büzülme dönüşüm prensibinin karşılığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teorisi, metrik uzaylar, modüler metrik uzay, Banach büzülme dönüşümü prensibi

2018, 81 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Different Type Metric Spaces and Fixed Point Results in These Spaces

Meltem ERDEN EGE

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Cihangir ALACA

In this thesis, firstly some new notions such as T-orbitally w-completeness, orbitally w-continuity and almost weakly w-contractive mapping in the modular metric spaces are defined. Some fixed point theorems for these new concepts are proved and a homotopy application related to obtained results is given. Some fixed point theorems on complete modular S-metric spaces are proved by adding of modular S-metric spaces and their some properties to literature. The concept of modular ultrametric space is first defined and some fixed point theorems are given in modular spherically complete ultrametric space. Some fixed point results are given by introducing for the first time the modular b-metric spaces and an application for the systems of linear equations is performed. As a new concept in literature, C*-algebra-valued S-metric spaces are given and the version of Banach contraction mapping principle in this space is proved.

Keywords: Fixed point theory, metric spaces, modular metric space, Banach contraction mapping principle

2018, 81 pages

1. GİRİŞ

Boş olmayan bir X kümesi ve bir $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktaları varsa bu noktalara T nin sabit noktaları denir. Yani T nin sabit noktaları T altında değişmeyen noktalardan oluşur. Örneğin;

• $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = 5x$ dönüşümü için $x = 0$ noktası bir sabit noktadır.

• $X = [0, 1]$ olmak üzere $Tx = x^3$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

• $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x + 5$ öteleme dönüşümünün X de hiçbir sabit noktası yoktur.

Yukarıdaki örneklerden görülebileceği üzere bir dönüşümün sabit noktasının varlığı hem küme yapısına hem de dönüşümün nasıl tanımlandığına bağlıdır. Sabit nokta teorisi çalışmalarında genel olarak,
(a) Dönüşümün sabit noktası var mıdır?
(b) Varsa bu nokta tek midir?
(c) Bu nokta tek ise nasıl bulunabilir?
gibi sorulara cevaplar bulunmaya çalışılmaktadır.

Sabit nokta teorisinin; genel topoloji, fonksiyonel analiz, lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori, diferansiyel denklemler, mühendislik, biyoloji, istatistik ve oyun teorisi gibi birçok alanda uygulamaları vardır. Örneğin, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığının ve tekliğinin araştırılmasında sabit nokta teoremleri kullanılmaktadır. $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ ve $y(t_0) = y_0$ şeklinde verilen bir başlangıç değer problemi

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, y(s))ds$$

şeklinde bir Volterra integral denklemine dönüştürülür. Ayrıca her $t \in [0, 1]$ için

$$F(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, y(s))ds$$

şeklinde tanımlı $F : C[0, 1] \to C[0, 1]$ dönüşümünün sabit noktasının varlığının gösterilmesi, yukarıdaki integral denklemin ve böylece en başta verilen başlangıç değer probleminin çözümünün varlığını garanti eder.

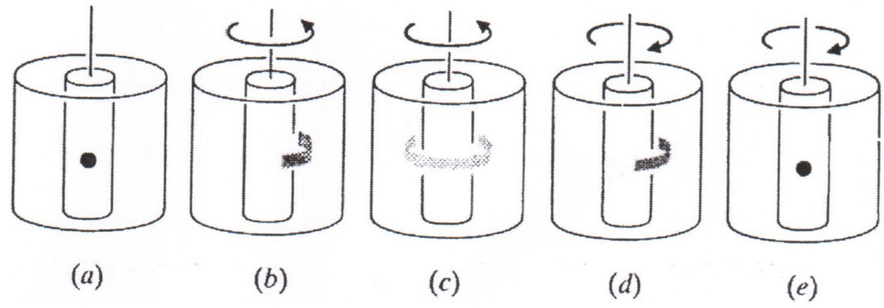
Analizde $Sx = 0$ ve $Tx = x$ şeklindeki denklemlere sıkça rastlanmaktadır. Bu problemlerin tam veya yaklaşık sonucunu veren çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Sabit nokta teorisi de bunlardan biridir. Örnek olarak, $x^2 - 7x + 12 = 0$ şeklindeki bir denklem ele alındığında $x = 3$ ve $x = 4$ bu denklemin birer köküdür. Bu denklem $x = \frac{x^2+12}{7}$ şeklinde de yazılabilir. Bu durumda $Tx = \frac{x^2+12}{7}$ olmak üzere bu denklem $x = Tx$ olarak ifade edilebilir. O halde $x = 3$ ve $x = 4, T$ nin iki farklı sabit noktasıdır. Buradan görülebileceği üzere, $Sx = 0$ şeklindeki bir denklemin çözümünün bulunması problemi, $Sx = Tx - x$ ile verilen T fonksiyonunun sabit noktasının bulunması problemi ile aynıdır.

Sabit nokta teorisi; topolojik, ayrık ve metrik olmak üzere üç temel alanda gelişerek günümüze kadar ulaşmış ve halen gelişimini hızla devam ettirmektedir. Şimdi bu üç temel alanı kısaca açıklayalım.

1.1. Topolojik Sabit Nokta Teorisi

Bu teoride yapılan çalışmalar, normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler üzerinedir. Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Brouwer ile başlamıştır. Analizden "*$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere her sürekli $f : [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde en az bir sabit noktaya sahip olduğu*" bilinmektedir. Brouwer [15] bu teoremi, 1912 yılında $\mathbb{R}^n$ in kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının var olduğunu göstererek n-boyutlu Öklid uzaya genelleştirmiştir. Teoremin ifadesi, "*C, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar, $T : C \to C$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere T nin, C de bir sabit noktası vardır*" şeklindedir. Bu teoreme günlük hayattan bir örnek verilebilir.

Laboratuvar ortamında, iki silindir arasında sarı renkli bir şurup düşünün [1]. İçindeki bir damla boyansın. Sıvı akışı homojen olmak üzere iç kısımdaki silindir birkaç kez döndürüldükten sonra ilk pozisyonuna gelecek şekilde ters yönde tekrar aynı sayıda döndürülürse boyalı noktanın aynı yerde kaldığı Şekil 1.1 den gözlemlenebilir. Burada yapılan işlem bir fonksiyon olarak düşünülürse bu boyalı noktanın fonksiyonun bir sabit noktası olduğu söylenebilir.



Şekil 1.1. Brouwer Teoremine günlük hayattan bir örnek

Brouwer teoreminin reel eksende özel bir durumu şu şekildedir:

"$T : [0,1] \to [0,1]$ *sürekli bir dönüşüm ise* T *nin bir sabit noktası vardır.*"

Brouwer'ın bu teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmesi düşünülmüş olsa da Kakutani, bu teoremin sonsuz boyutlu uzaylarda geçerli olmadığını gösteren bir örneği şöyle ifade etmiştir. $(l_2, \|\cdot\|_2)$ Hilbert uzay ve

$$C = \{x = \{x_n\} \in l_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$$

bu uzay üzerinde tanımlı kapalı birim yuvar olsun. $T : C \to C$ dönüşümü

$$Tx = \{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $x = \{x_n\} \in l_2$ için

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2 &= \sqrt{1 - \|x\|_2^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 + \ldots} \\ &= \sqrt{1 - \|x\|_2^2 + \|x\|_2^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Ayrıca T dönüşümü süreklidir. T nin $x_0 = \{x_0^{(n)}\}$ şeklinde bir sabit noktasının var olduğu kabul edilirse, $\|x_0\|_2 = \|Tx_0\|_2 = 1$ elde edilir. Fakat,

$$\begin{aligned}Tx_0 &= \{\sqrt{1 - \|x_0\|_2^2}, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)}, \ldots\} \\ &= \{0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)}, \ldots\} \\ &= x_0 \\ &= \{x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)}, \ldots\}\end{aligned}$$

olduğundan $x_0^{(1)} = 0, x_0^{(2)} = 0, \ldots, x_0^{(n)} = 0$ veya $x_0 = \{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ bulunur. Bu ise $\|x_0\|_2 = 1$ olması ile çelişir.

Brouwer teoremi bazı ek şartlarla birlikte 1930 yılında Schauder [64] tarafından sonsuz boyutlu uzaylara şu şekilde genişletilmiştir: "*X bir Banach uzayı, C, X in boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir altkümesi olsun. Her sürekli ve kompakt $T : C \to C$ dönüşümünün C de en az bir sabit noktası vardır*".

Darbo [29] ise Schauder teoremini daha da genişletmiştir: "*X bir Banach uzayı ve S, X in boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T : S \to S$ sürekli bir dönüşüm olsun. S in herhangi bir E alt kümesi için α, X de tanımlı kompaktsızlığın bir ölçümü olmak üzere $\alpha(TE) \leq k\alpha(E)$ olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabiti varsa T nin S de en az bir sabit noktası vardır*". Darbo sabit nokta teoremi, özellikle kapalı diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin varlık problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Bu alanda kullanılan bir başka önemli teorem aşağıda ifade edilmiştir:

Teorem 1.1.1. [51]. M, bir $(S, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, konveks ve boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $A, B : M \to S$ dönüşümleri aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

(i) Her $x, y \in M$ için $A(x) + B(y) \in M$ dir,

(ii) A sürekli ve $A(M)$ bir kompakt kümede kapsanır,

(iii) B, $\alpha < 1$ sabit olmak üzere bir büzülme dönüşümüdür.

Bu durumda $A(y) + B(y) = y$ olacak şekilde bir $y \in M$ noktası vardır.

1.2. Ayrık Sabit Nokta Teorisi

Bu alandaki çalışmalar, kısmi sıralı bir kümeden kendisi üzerine tanımlı olan dönüşümler için yapılmıştır. Günümüze kadar elde edilen bazı önemli sonuçlar şöyledir. $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

Teorem 1.2.1. [49]. Her $x \in X$ için $x \leq Tx$ ve X deki her zincir bir supremuma sahip ise T nin X de bir sabit noktası vardır.

Teorem 1.2.2. [73]. X bir tam latis ve T monoton artan bir dönüşüm ise T nin X de bir sabit noktası vardır.

Teorem 1.2.3. [5]. T monoton artan bir dönüşüm olsun. X deki her zincir bir supremuma sahip ve $x_0 \leq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, T nin X de bir sabit noktası vardır.

1.3. Metrik Sabit Nokta Teorisi

Metrik uzay kavramının Frechet [35] tarafından tanımlanmasıyla başlayan metrik sabit nokta teorisindeki esas amaç, Banach sabit nokta teoreminin farklı uzaylarda çeşitli genelleştirmelerinin verilebilmesidir. Klasik analizden modern analize geçişi sağlayan çok önemli bir köprü olan metrik uzaylar, reel ve kompleks analizde bilinen birçok özelliğin herhangi bir uzayda nasıl yapılacağını gösterir. Diğer taraftan topolojide soyut olan bazı kavramlar, metrik uzaylarda daha somut bir şekilde açıklanabilir.

Şimdi bu alandaki bazı temel kavramları kısaca açıklayalım. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $\lambda \geq 0$ sabiti varsa T ye bir *Lipschitz dönüşümü* adı verilir. Bu eşitsizliği sağlayan λ sayılarının en küçüğüne ise T nin *Lipschitz sabiti* denir ve genellikle L ile gösterilir. $L < 1$ ise T ye *büzülme dönüşümü*, $L \leq 1$ ise T ye *genişlemeyen dönüşüm* denir. Burada $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye *büzülebilir dönüşüm* denir. Tüm bu dönüşümler arasındaki ilişki aşağıda verilmektedir:

Büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm

$\Rightarrow$ Lipschitz koşulunun sağlanması

Teorem 1.3.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi) [11]. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Banach sabit nokta teoremi, sabit noktanın varlığıyla birlikte tek olduğu ve bu noktanın nasıl bulunabileceği konusunda diğer teoremlerden farklı olarak bilgi verir. Bu teorem genişlemeyen dönüşümler için geçerli olmayabilir. Üstelik iterasyon dizileri de yakınsak olmayabilir. Örneğin,

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad Tx = x + a \ \ (a \neq 0)$$

öteleme dönüşümü, $\mathbb{R}$ deki standart metriğe göre genişlemeyen dönüşümdür ancak hiçbir sabit noktası yoktur. Ayrıca bu dönüşüm ile oluşturulan iterasyon dizisi yakınsak değildir.

Diğer taraftan, tam metrik uzaylarda büzülebilir dönüşümlerin sabit noktası olmayabilir. Edelstein [30] X kompakt iken büzülebilir dönüşümlerin sabit noktasının var, tek ve hatta her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisinin bu sabit noktaya yakınsadığını göstermiştir.

Her büzülme dönüşümü düzgün sürekli olduğundan aynı zamanda sürekli bir dönüşümdür. Bu durumda T sürekli değilse kesinlikle büzülme dönüşümü de olamaz.

Teorem 1.3.2. [16]. (X, d) bir tam metrik uzay ve $n \geq 2$ için T^n bir büzülme dönüşümü ise T nin bir tek sabit noktası vardır.

Bu teoreme göre T büzülme dönüşümü değilse bile T^n nin büzülme dönüşümü olması, T nin sabit noktasının varlığını garanti etmektedir. Aşağıda bu durumu açıklayan bir örnek verilmektedir.

Örnek 1.3.1. $T : [0, 2] \to [0, 2]$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0, x \in [0, 1] \\ 1, x \in (1, 2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T, $x = 1$ noktasında sürekli olmadığı için bir büzülme dönüşümü olamaz. Ancak T^2, $[0, 2]$ de bir büzülme dönüşümüdür ve 0, T nin bir tek sabit noktasıdır.

Sabit nokta teorisi alanında çalışılan bazı ünlü teoremler şöyledir:

Teorem 1.3.3. (Kannan Sabit Nokta Teoremi) [43]. (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere eğer bir $T : X \to X$ dönüşümü, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, Tx) + d(y, Ty))$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ sabiti varsa T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 1.3.4. (Chatterjea Sabit Nokta Teoremi) [18]. (X, d) bir tam metrik uzay ve bir $T : X \to X$ dönüşümü tanımlansın. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, Ty) + d(y, Tx))$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ sabiti varsa T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 1.3.5. (Reich Sabit Nokta Teoremi) [61]. Bir (X, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlı $T : X \to X$ dönüşümü $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 1.3.6. (Hardy-Rogers Sabit Nokta Teoremi) [39]. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$, her $x, y \in X$ için $a, b, c, e, f \geq 0$ ve $a+b+c+e+f < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, Ty) + ed(y, Tx) + fd(x, y)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 1.3.7. (Ćirić Sabit Nokta Teoremi) [26]. (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere bir $T : X \to X$ dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)]\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ sabiti varsa T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 1.3.8. (Suzuki Sabit Nokta Teoremi) [72]. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Artmayan $\theta : [0, 1) \to (\frac{1}{2}, 1]$ fonksiyonu

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, 0 \leq r \leq \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \\ \frac{(1-r)}{r^2}, \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{1+r}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $x, y \in X$ için

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0, 1)$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar.

Şimdi Banach sabit nokta teoreminin bazı önemli uygulamalarını ele alacağız. Şekil 1.2 de verilen ünlü gülen ineğe dikkatlice bakılırsa, ineğin sağ kulağında yer alan küpede ilk baştaki resmin iç içe tekrarlı olarak yer aldığı görülebilir.

Şekil 1.2. Ünlü gülen inek

Bu resimde bulunan her bir nokta, sağ kulaktaki küpe üzerinde karşılık gelen nokta ile birleştirilirse resmin kendisinden kendisine giden bir F fonksiyonunun var olduğu söylenebilir. Örnek olarak, ineğin çene ucu ile sağdaki küpe üzerinde yer alan küçük ineğin çene ucu birleştirilsin. İneğin sağ gözünün merkezi ile sağ küpe üzerindeki küçük ineğin sağ gözünün merkezi birleştirilsin. Buna benzer diğer tüm işlemler gözönünde bulundurulursa "Acaba bu süreçte kendisine gönderilen bir nokta var mı?" şeklinde bir soru ortaya çıkar. İşte böyle bir nokta varsa bu sabit nokta olacaktır. Görsel olarak, bu iç içe geçmiş sağ küpelerin A şeklinde bir noktaya yaklaştığı ve A'nın çözüm için bir aday olduğu görülmektedir. Bu durum matematiksel olarak açıklanabilir. Önce herhangi bir noktayla, örneğin çene ucuyla başlansın. Bu nokta P_0 ile gösterilsin. P_0, $P_1 = F(P_0)$ a yani sağ küpe üzerindeki küçük ineğin çene ucuna gönderilmiştir. Sonra P_1, $P_2 = F(P_1)$ e yani küçük ineğin sağ küpesinde görünen ineğin çene ucuna resmedilmiştir. Burada işlemler genelleştirilerek devam ettirilirse şu sonuçlara ulaşılır:

(i) İşlem sonsuz kez tekrarlanırsa $P_{n+1} = F(P_n)$ olmak üzere bir $\{P_n\}$ dizisi elde edilir. Bu dizi bir Cauchy dizisidir.

(ii) Yakınsak olan bu Cauchy dizisinin limiti A noktasıdır ve A sabit noktadır.

(iii) Görsel olarak dizinin sadece sonlu sayıdaki noktaları belirgin şekilde görünmektedir, diğer noktalar ayırt edilemez. Eğer görüntü büyütülüp yakından

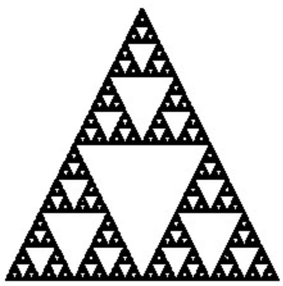
bakılırsa daha fazla nokta görülebilir. Fakat resim ne kadar büyütülürse büyütülsün yine de sadece sonlu sayıda nokta ayırt edilir ve geri kalan diğer noktalar ayırt edilemez.
İşte Banach sabit nokta teoremi bu F fonksiyonunun tek bir sabit noktaya sahip olduğunu, yani $F(A) = A$ olacak şekilde bir tek A noktasının var olduğunu söyler.

Bir diğer önemli uygulama alanı ise görüntü sıkıştırma üzerinedir. Bir görüntüyü bilgisayar belleğine kaydetmenin en iyi yolu, her pikselin rengini depolamaktır. Fakat bu yöntemde iki temel sorun vardır:

• Bu işlem önemli miktarda bellek gerektirir.

• Örneğin oldukça büyük bir resim için görüntü büyütülmeye çalışılırsa, pikseller daha büyük kareler haline gelecek ve bu karelerde detayların doldurulması konusunda eksik kalınacaktır.

Görüntü sıkıştırmanın temel prensibi orijinal görüntüden daha az bilgi kodlamaktır. Burada dikkat edilmesi gereken şey, kişilerin görüntünün bozukluğunu anlayamayacak şekilde işlem yapılması gerektiğidir. İnternet, iyi görüntü sıkıştırma ihtiyacını artırmıştır. Gerçekten görüntüler, web üzerindeki gezinmeyi önemli derecede yavaşlatır. Dolayısıyla, internette gezinmek için, resimlerdeki kodlanmış görüntülerin olabildiğince küçük olması iyi bir fikirdir. Bilgisayar ekranındaki görüntüye baktığınızda görüntünün bozulduğunu göremezsiniz ancak büyütmeye çalışırsanız hemen kalitenin zayıf olduğunu gözlemleyebilirsiniz.

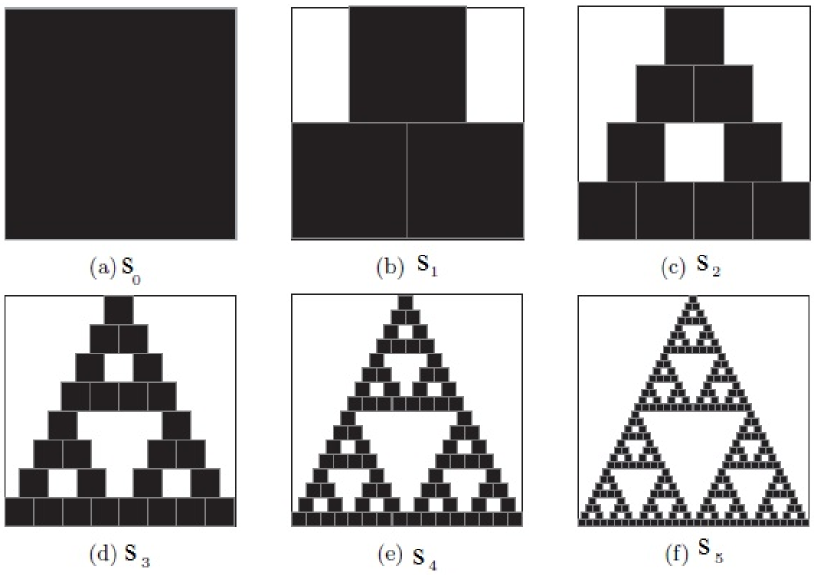


Şekil 1.3. Sierpinski halısı

Şimdi görüntü sıkıştırma olayını bir örnekle açıklamaya çalışalım. Burada ele alınan örnek, Şekil 1.3 de verilen Sierpinski halısı olacaktır. Amaç, bu görüntüyü en ekonomik şekilde bilgisayara depolayabilmektir. Bunun için bir program oluşturulması gerekmektedir. Sierpinski halısı yakından incelenecek olursa, bu halının boyutunun yarısı olan genişlik ve yükseklikte üç Sierpinski halısının birleşiminden oluştuğu görülebilir. S_0, Şekil 1.4 (a) daki gibi olsun. S_0 dan başlanarak, aşağıda verilen işlemler aracılığı ile ikinci bir halı oluşturulabilir:

- S_0 ın bir kopyası S_0 ın sol alt köşesine yapıştırılsın.
- S_0 ın başka bir kopyası da yine S_0 ın sağ alt köşesine yapıştırılsın.
- Böylece S_1 ile gösterilen yeni bir görüntü elde edilir.

Benzer işlemler S_1 e uygulanırsa yeni bir görüntü olarak S_2 elde edilir. Bu adımdan itibaren oluşturulan tüm şekiller S_2 Sierpinski halısı ile aynı özellikte olacaktır. S_0-S_5 arasında oluşan görüntüler için Şekil 1.4 e bakabilirsiniz.



Şekil 1.4. Sierpinski halısının oluşumu

Bu işlemler matematiksel anlamda bir fonksiyon olarak görülebilir. W fonksiyonu S_i leri $S_{i+1} = W(S_i)$ lere götüren bir fonksiyon olmak üzere $W(S_2) = S_2$ olduğu açıktır. S_2 bu fonksiyonun bir sabit noktasıdır. Burada sonsuz şekilde devam edilirse bir $\{S_n\}$ dizisi elde edilir. Bu dizi S_2 ye yakınsar. S_5 ile S_2 görüntülerini birbirinden ayırt etmek çok zordur. Bilgisayar programı daha iyi bir çözünürlük için

S_2 yerine S_5 i tercih ederken daha hızlı çalışmak ve depolamayı ekonomik kullanmak istiyorsa S_2 yi tercih etmelidir.

Bu tez çalışmasında, farklı tipte metrik uzaylar ele alınarak çeşitli sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve elde edilen sonuçların bazı uygulamaları verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan çeşitli metrik uzaylar ile ilgili bazı önemli tanım, teorem ve özelliklere yer verilecektir.

2.1. Modüler Metrik Uzaylar

Modüler uzay kavramı, Nakano [56] tarafından tanımlanmış ve Koshi ile Shimogaki [50] tarafından geliştirilmiştir. Keyfi bir küme üzerindeki metrik modüler kavramı 2006 yılında [19] ve F-modüler tarafından oluşturulan modüler metrik uzay kavramı 2008 yılında Chistyakov [20] tarafından verilmiştir. Chistyakov [21] metrik uzayların bir genelleştirmesi olarak modüler metrik uzayları tanımlamıştır. Mongkolkeha ve arkadaşları [54] modüler metrik uzaylarda büzülme dönüşümü için bazı sabit nokta teoremleri vermiştir. Azadifar ve diğer araştırmacılar [7] modüler metrik uzaylarda, integral tipteki bağdaşabilir dönüşümlerin ortak sabit noktasının varlığını ve tekliğini ispatlamıştır. Kılınç ve Alaca [44] (ϵ, k)-düzgün yerel büzülme dönüşümü ve η-zincirlenebilir kavramlarını tanımlayarak tam modüler metrik uzaylarda bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Modüler metrik uzaylar ile ilgili farklı sabit nokta sonuçları için $[8, 9, 17, 32, 33, 45, 55, 74]$ çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 2.1.1. [57]. X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olmak üzere X üzerindeki bir modüler aşağıdaki şartları sağlayan bir $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonelidir:

(A1) $\rho(0) = 0$,

(A2) $x \in X$ ve her $\alpha > 0$ sayısı için $\rho(\alpha x) = 0$ ise $x = 0$,

(A3) Her $x \in X$ için $\rho(-x) = \rho(x)$,

(A4) $\alpha + \beta = 1$ şeklindeki her $\alpha, \beta \geq 0$ ve $x, y \in X$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Eğer (A4) şartı,

• $\alpha, \beta \geq 0$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere $\alpha^s + \beta^s = 1$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$

şeklinde değiştirilirse ρ ya s-konveks denir. $s = 1$ durumunda ρ bir konveks modülerdir. ρ, X de bir modüler olmak üzere

$$X_\rho = \{x \in X : \lambda \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \rho(\lambda x) \to 0\}$$

kümesine bir modüler uzay denir. Burada X_ρ, X in bir alt vektör uzayıdır.

Modüler uzayın fiziksel yorumunu verecek olursak; herhangi bir küme üzerinde alınan metrik, kümenin herhangi iki noktası arasındaki negatif olmayan sonlu uzaklığı belirtir ancak aynı küme üzerindeki bir modüler, negatif olmayan hızların bir bölgesini temsil eder.

Boştan farklı bir X kümesi ve bir $\lambda \in (0,\infty)$ sayısı verilsin. Her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $\omega : (0,\infty) \times X \times X \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonu $\omega_\lambda(x,y) = \omega(\lambda, x, y)$ ile gösterilsin.

Tanım 2.1.2. [21]. X boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$\omega : (0,\infty) \times X \times X \longrightarrow [0,\infty]$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa ω ya X üzerinde bir metrik modüler ve (X,ω) ikilisine de modüler metrik uzay denir:

(a) Her $\lambda > 0$ için $\omega_\lambda(x,y) = 0$ dır ancak ve ancak $x = y$,

(b) Her $\lambda > 0$ için $\omega_\lambda(x,y) = \omega_\lambda(y,x)$,

(c) Her $\lambda, \mu > 0$ için $\omega_{\lambda+\mu}(x,y) \leq \omega_\lambda(x,z) + \omega_\mu(z,y)$.

$x, y \in X$ noktaları arasındaki harekette geçen zaman λ ve $d(x,y)$, bu noktalar arasındaki uzaklık olmak üzere

$$\omega_\lambda(x,y) = \frac{d(x,y)}{\lambda}$$

değeri, ortalama hızı gösterir. Şimdi metrik modülerin tanımında yer alan maddelerin fiziksel yorumlarını açıklayalım:

(a) X deki keyfi iki nokta x ve y olmak üzere x ile y nin birbiriyle çakışık olması için gerek ve yeter şart her λ anında x noktasından y noktasına $\omega_\lambda(x,y) = 0$ hızıyla hareket edilmesidir.

(b) x den y ye olan hareket süresince ortalama hız, y den x e olan hareketteki ortalama hıza eşittir.

(c) Kabul edelim ki x den y ye iki farklı yolla hareket edilsin.

(i) Farklı bir $z \in X$ noktasından geçerek varıldığında,

(ii) x den y ye doğrudan varıldığında,

geçen süreler aynı olsun. λ, x den z ye ve μ, z den y ye gitmek için gerekli olan zamanı göstermek üzere ortalama hızlar $\omega_\lambda(x,z)$ ve $\omega_\mu(z,y)$ dir. (i) durumu için toplam zaman $\lambda + \mu$ ve ortalama hız $\omega_{\lambda+\mu}(x,y)$ olup (ii) deki ortalama hıza eşittir. Metrik uzaydaki üçgen eşitsizliğinden açıktır ki $\omega_{\lambda+\mu}(x,y)$ hızı $\omega_\lambda(x,z)$ veya $\omega_\mu(z,y)$ hızlarından en az birini geçmez.

(a) koşulunda değişiklikler yapılarak aşağıdaki tanımlar elde edilir:
(a*) Her $\lambda > 0$ için $\omega_\lambda(x,x) = 0$ ise ω ya bir yarı metrik modüler denir.

Eğer ω bir yarı metrik modülerse ve
(a)** Her $x, y \in X$ için $\omega_\lambda(x,y) = 0$ olacak şekilde x ve y ye bağlı bir $\lambda > 0$ sayısı varken $x = y$ olma şartını sağlıyorsa ω ya X üzerinde bir mutlak modüler denir.

Şimdi $\omega_\lambda(x,y)$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde artmayan olduğunu gösterelim. $0 < \mu < \lambda$ ise (a)-(c) koşullarından

$$\omega_\lambda(x,y) \leq \omega_{\lambda-\mu}(x,x) + \omega_\mu(x,y) \leq \omega_\mu(x,y)$$

elde edilir. Yine (a)-(c) koşullarından dolayı fiziksel olarak mümkün olmayan fakat matematiksel açıdan varlığı mümkün olabilen

$$\lambda < d(x,y) \;\Rightarrow\; \omega_\lambda(x,y) = \infty,\; \lambda > d(x,y) \;\Rightarrow\; \omega(x,y) = 0$$

durumları vardır. Bu nedenle metrik modülerin görüntü kümesi $[0,\infty]$ olarak verilmiştir.

Örnek 2.1.1. [21]. (X,d) bir metrik uzay ve $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$\omega_\lambda(x,y) = \frac{d(x,y)}{\phi(\lambda)}$$

ile tanımlı fonksiyon X üzerinde bir metrik modülerdir.

Örnek 2.1.2. [21]. (X,d) bir metrik uzay, $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ olmak üzere

$$\omega_\lambda(x,y) = \frac{d(x,y)}{\lambda + d(x,y)}$$

fonksiyonu X üzerinde bir metrik modüler belirtir.

ω metrik modüler olmak üzere X_ω ve X_ω^* modüler kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır [21]:

$$X_\omega = \{x \in X : \lambda \to \infty \text{ iken } \omega_\lambda(x,x_0) \to 0\},$$

$$X_\omega^* = \{x \in X : \omega_\lambda(x,x_0) < \infty \text{ olacak şekilde bir } \lambda = \lambda(x) > 0 \text{ vardır}\}.$$

Tanım 2.1.3. [54]. (X, ω) bir modüler metrik uzay olsun.

- X_ω^* daki bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her $\lambda > 0$ için $n \to \infty$ olmak üzere $\omega_\lambda(x_n, x) \to 0$ ise bu diziye $x \in X_\omega^*$ noktasına ω-yakınsaktır denir.
- Bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_\omega^*$ dizisinin ω-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $\epsilon > 0$ için $n, m \geq n(\epsilon)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $\omega_\lambda(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının var olmasıdır.
- X_ω^* ın bir C alt kümesi verilsin. C deki ω-yakınsak her dizinin limiti her zaman C de ise C ye ω-kapalıdır denir.
- X_ω^* ın bir C alt kümesindeki her ω-Cauchy dizisi ω-yakınsak ve bunların limiti C de ise C ye ω-tam denir.

Şimdi modüler metrik uzaylarda ispatlanmış olan bazı önemli teoremlere değineceğiz.

Tanım 2.1.4. [22]. X boştan farklı bir küme, bu küme üzerinde bir ω metrik modüleri ve $T : X_\omega \to X_\omega$ dönüşümü verilsin. Her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X_\omega$ için

$$\omega_{k\lambda}(Tx, Ty) \leq \omega_\lambda(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 < k < 1$ sayısı varsa T ye modüler büzülme dönüşümü denir.

Banach sabit nokta teoreminin modüler metrik uzaylardaki karşılığı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Teorem 2.1.1. [54]. (X, ω) bir tam modüler metrik uzay ve $T : X_\omega \to X_\omega$ bir modüler büzülme dönüşümü olsun. $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\omega$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda T nin X_ω kümesinde bir tek sabit noktası vardır. Üstelik, her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.1.2. [54]. (X, ω) bir tam modüler metrik uzay, $T : X_\omega \to X_\omega$ bir modüler büzülme dönüşümü ve $x^* \in X_\omega$, T nin bir sabit noktası olsun. Ayrıca her $\lambda > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ özelliğine sahip bir ϵ_n dizisi ve $\omega_\lambda(\gamma_{n+1}, T\gamma_n) \leq \epsilon_n$ özelliğini sağlayan bir $\gamma_n \subset X_\omega$ dizisi verilsin. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = x^*$$

eşitliği sağlanır.

Banach sabit nokta teoreminin modüler metrik uzaylarda bir genelleştirmesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.3. [54]. (X, ω) bir tam modüler metrik uzay ve $T : X_\omega \to X_\omega$ bir dönüşüm olsun. Bir n pozitif tamsayısı için T^n bir modüler büzülme dönüşümü ise T nin, X_ω da bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.1.4. [54]. (X, ω) modüler metrik uzay ve $T : X_\omega \to X_\omega$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X_\omega$, $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$ ve her $\lambda > 0$ için $k \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \leq k[\omega_{2\lambda}(Tx, x) + \omega_{2\lambda}(Ty, y)]$$

eşitsizliği varsa T, X_ω da bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, her $x \in X_\omega$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Quasi-büzülmeler için metrik uzaylarda olmayan fakat modüler metrik uzaylarda oluşabilen belirsizlikleri ortadan kaldırmak amacıyla aşağıda bir özellik verilmiştir.

Tanım 2.1.5. [23]. (X, ω) bir modüler metrik uzay olmak üzere ω metrik modüleri her $y \in X_\omega$, $\lambda \in (0, \infty)$, $\{x_n\} \to x$ için

$$\omega_\lambda(x, y) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \omega_\lambda(x_n, y)$$

özelliğini sağlıyorsa ω, Fatou özelliğine sahiptir denir.

Tanım 2.1.6. [23]. (X, ω) bir modüler metrik uzay ve X in boştan farklı bir alt kümesi S olsun. $T : S \to S$ dönüşümü $0 < k < 1$ için

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \leq k \max\{\omega_\lambda(x, y), \omega_\lambda(x, Tx), \omega_\lambda(y, Ty), \omega_\lambda(x, Ty), \omega_\lambda(Tx, y)\}$$

koşulunu sağlıyor ise T ye modüler quasi-büzülme dönüşümü denir.

Tanım 2.1.7. [23]. (X, ω) bir modüler metrik uzay olmak üzere bir $T : X_\omega^* \to X_\omega^*$ dönüşümü verilsin. T nin bir $x \in X_\omega^*$ noktasındaki yörüngesi

$$O(x, T) := \{x, Tx, \cdots, T^n x, \cdots\}$$

ve yörüngenin çapı

$$\delta_\omega(x) = \sup\{\omega_\lambda(T^m x, T^n x) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.1.1. [23]. (X, ω) bir modüler metrik uzay, X in boştan farklı bir alt kümesi C ve $T : C \to C$ bir quasi-büzülme dönüşümü olsun. $x \in C$ elemanı $\delta_\omega(x) < \infty$ olacak şekilde verilsin. Her $n \geq 1$ için

$$\delta_\omega(Tx) \leq k\delta_\omega(x)$$

ve her $m, n \geq 1$, $\lambda \in (0, \infty)$ için

$$\omega_\lambda(T^n x, T^{n+m} x) \leq k^n \delta_\omega(x)$$

ifadeleri vardır.

Tanım 2.1.8. [3]. (X, ω) bir modüler metrik uzay olsun. $r > 0$ ve $x \in X_\omega$ için x merkezli ve r yarıçaplı $B_\omega(x, r)$ açık yuvarı ve $B_\omega[x, r]$ kapalı yuvarı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} B_\omega(x, r) =& \{y \in X_\omega : \omega_\lambda(x, y) < r\}, \\ B_\omega[x, r] =& \{y \in X_\omega : \omega_\lambda(x, y) \leq r\}. \end{aligned}$$

Tanım 2.1.9. [44]. (X, ω) boştan farklı bir modüler metrik uzay ve $T : X_\omega \to X_\omega$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X_\omega$ ve

$$p, q \in B(x, \epsilon) = \{y : \omega_\lambda(x, y) < \epsilon\}$$

için

$$\omega_\lambda(Tp, Tq) \leq k\omega_\lambda(p, q)$$

koşulunu sağlayan $\epsilon > 0$ ve $0 \leq k < 1$ sayıları varsa T ye yerel büzülme dönüşümü denir. T yerel büzülme dönüşümü ve ϵ ile k, x e bağlı değilse T ye (ϵ, k)-düzgün yerel büzülme dönüşümü denir.

Tanım 2.1.10. [44]. (X, ω) bir modüler metrik uzay ve her $a, b \in X_\omega$ için X_ω ϵ-zincire sahip yani $\omega_\lambda(x_{i-1}, x_i) \leq \epsilon$ olacak şekilde $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ kümesine sahip ise X_ω ya ϵ-zincirlenebilirdir denir.

Teorem 2.1.5. [44]. (X, ω) bir ϵ-zincirlenebilir tam modüler metrik uzay ve T, X_ω üzerinde tanımlı bir (ϵ, k)-düzgün yerel büzülme dönüşümü ise $Tx = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X_\omega$ noktası vardır.

Tanım 2.1.11. [44]. (X, ω) bir modüler metrik uzay olmak üzere

$$\sup\{k(r) : 0 < p \leq r \leq q\} < 1$$

olacak şekilde verilen bir $k : (0,\infty) \to [0,1)$ dönüşümü için

$$\omega_\lambda(Tx,Ty) \leq k[\omega_\lambda(x,y)]\omega_\lambda(x,y)$$

eşitsizliğini sağlayan $T : X_\omega \to X_\omega$ dönüşümüne zayıf büzülme dönüşümü denir.

Teorem 2.1.6. [44]. (X,ω) bir tam modüler metrik uzay ve $T : X_\omega \to X_\omega$ bir zayıf büzülme dönüşümü ise T nin X_ω da bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.1.7. [45]. Bir (X,ω) modüler metrik uzayı üzerinde tanımlı $T : X_\omega \to X_\omega$ dönüşümü, $a+b+c \leq 1$ özelliğine sahip $a,b,c \geq 0$ reel sayıları ve $x,y \in X_\omega$ için

$$\omega_\lambda(Tx,Ty) \leq a\omega_\lambda(x,y) + b\omega_\lambda(x,Tx) + c\omega_\lambda(y,Ty)$$

koşulunu sağlıyorsa T nin bir sabit noktası vardır ve $\omega_\lambda(x,Tx) < \infty$ olması durumunda bu sabit nokta tektir.

Teorem 2.1.8. [45]. (X,ω) bir modüler metrik uzay ve $T : X_\omega \to X_\omega$ bir dönüşüm olsun. $\epsilon > 0$ için

$$\epsilon \leq \omega_\lambda(x,y) < \epsilon + \delta \;\Rightarrow\; \omega_\lambda(Tx,Ty) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa T nin bir tek sabit noktası vardır. $\omega_\lambda(Tx,x) < \infty$ ise bu sabit nokta tektir ve her $x \in X_\omega$ için T^n bu noktaya yakınsar.

2.2. S-Metrik Uzaylar

S-metrik uzay kavramı 2012'de Sedghi ve arkadaşları [66] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Sedghi ve Dung [67] S-metrik uzaylarda genel bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Gupta [38] S-metrik uzayda periyodik büzülme kavramlarını tanımlamış ve bazı sabit nokta teoremleri vermiştir. 2014 yılında, Sedghi ve arkadaşları [68] tam S-metrik uzaylarda çok değerli dönüşümler için bir ortak sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Rezaee ve arkadaşları [62] 2017 yılında S-metrik uzaylar üzerinde tanımlı zayıf büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta sonuçları elde etmiş ve bir homotopi uygulaması vermişlerdir. S-metrik uzaylar ile ilgili diğer sabit nokta sonuçları için [24, 40] çalışmalarına bakılabilir.

Bu kısımda S-metrik uzaylar ile ilgili bazı tanım ve teoremlere değinilecektir.

Tanım 2.2.1. [66]. X boştan farklı bir küme olsun. X üzerindeki bir S-metrik, her $x,y,z,a \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir $S : X^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonudur:

(i) $S(x,y,z) \geq 0$,

(ii) $S(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$,

(iii) $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$.

Bu şartları sağlayan (X, S) ikilisine de S-metrik uzay denir.

Örnek 2.2.1. [66]. X boştan farklı bir küme ve d, X üzerinde herhangi bir metrik olmak üzere

$$S(x, y, z) = d(x, z) + d(y, z)$$

şeklinde alınırsa X üzerinde bir S-metrik olur.

Tanım 2.2.2. [66]. (X, S) bir S-metrik uzay olsun.

(1) X deki bir $\{x_n\}$ dizisinin x e yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ olması durumunda $S(x_n, x_n, x) \to 0$ olmasıdır. Yani her $\epsilon > 0$ ve her $n \geq 0$ için $S(x_n, x_n, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının var olmasıdır.

(2) X de bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $\epsilon > 0$ ve her $n, m \geq n_0$ için $S(x_n, x_n, x_m) < \epsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(3) (X, S) S-metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, S) ikilisine tam S-metrik uzay denir.

Tanım 2.2.3. [66]. (X, S) bir S-metrik uzay ve $F : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$S(F(x), F(x), F(y)) \leq LS(x, x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq L < 1$ sabiti varsa F ye büzülme dönüşümü denir.

Teorem 2.2.1. [66]. (X, S) bir tam S-metrik uzay ve $F : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda F nin bir tek $u \in X$ sabit noktası vardır. Üstelik her $x \in X$ için

$$S(F^n(x), F^n(x), u) \leq \frac{2L^n}{1 - L} S(x, x, F(x))$$

olmak üzere $\lim\limits_{n \to \infty} F^n(x) = u$ eşitliği vardır.

Teorem 2.2.2. [66]. (X, S) bir kompakt S-metrik uzay olsun. $F : X \to X$ dönüşümü, her farklı $x \neq y \in X$ için

$$S(F(x), F(x), F(y)) < S(x, x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa F nin X de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.3. [24]. (X, S) bir tam S-metrik uzay, $f, g : X \to X$ örten dönüşümler ve $a, b \geq 0$, $c > 1$, $x \neq y$ olmak üzere

$$S(fx, fx, gy) \geq \frac{aS(x, x, fx)S(y, y, gy)}{S(x, x, y)} + b[S(x, x, fx) + S(y, y, gy)] + cS(x, x, y)$$

olsun. Bu durumda f ve g, X de bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.2.4. [65]. X boştan farklı bir küme olmak üzere bir $F : \mathbb{R} \times X \to X$ fonksiyonu verilsin. Her $t \in \mathbb{R}$ için $F(t, g(t)) = g(t)$ ise $g : \mathbb{R} \to X$ fonksiyonuna F nin bir rastgele (random) sabit noktası denir.

Teorem 2.2.4. [65]. (X, S) bir tam S-metrik uzay olsun. $F, G : \mathbb{R} \times X \to X$ fonksiyonları $i = 1, 2, 3$ için $k_i \geq 0$ ve $0 < k_1 + k_2 + k_3 < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$, $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} S(F(t,x), G(t,y), G(t,y)) \leq & k_1 S(x, F(t,x), F(t,x)) + k_2 S(y, G(t,y), G(t,y)) \\ & + k_3 S(x, y, y) \end{aligned}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda F ve G nin bir tek ortak rastgele (random) sabit noktası vardır.

2.3. b-Metrik Uzaylar

b-metrik uzay kavramı 1993 yılında Czerwik [28] tarafından tanımlanmıştır. Czerwik'in amacı ölçülebilir fonksiyonlarla ilgili bir problemi çözmekti. Bu amaçla metrik uzay kavramını genelleştirerek b-metrik uzayı tanımlayan Czerwik çalışmasında Banach sabit nokta teoreminin genelleştirmesini ispatlamıştır. Daha sonra Boriceanu [13] iki b-metriğe sahip bir küme üzerinde çok değerli genelleştirilmiş büzülme için bazı sabit nokta sonuçları vermiştir. Aydi ve arkadaşları [6] b-metrik uzaylarda küme değerli quasi-büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır.

Tanım 2.3.1. [28]. X boştan farklı bir küme olsun ve bir $s \geq 1$ reel sayısı verilsin. Bir $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(1) $d(x, y) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$

koşullarını sağlıyorsa d ye bir b-metrik, (X, d) ikilisine de bir b-metrik uzay denir.

Örnek 2.3.1. [13]. $0 < p < 1$ olmak üzere $l_p = \{(x_n) \subset \mathrm{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ uzayı ele alınsın. $x = x_n$, $y = y_n \in l_p$ olmak üzere $d : l_p \times l_p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanırsa d fonksiyonu ile birlikte l_p uzayı bir b-metrik uzaydır.

Tanım 2.3.2. [13]. (X,d) bir b-metrik uzay olsun.

(1) X deki bir $\{x_n\}$ dizisinin x e yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $\epsilon > 0$ ve her $n \geq n(\epsilon)$ için $d(x_n, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının var olmasıdır.

(2) X de bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $\epsilon > 0$ ve her $n, m \geq n(\epsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(3) Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu (X,d) ikilisine tam b-metrik uzay denir.

Literatürde var olan bazı teoremler aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.1. [28]. (X,d) bir tam b-metrik uzay olsun ve $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$$

özelliğine sahip artan bir fonksiyon olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü,

$$d(T(x), T(y)) \leq \phi(d(x,y)), \;\; x, y \in X$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda T nin u gibi bir sabit noktası vardır ve her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(x), u) = 0$$

dır.

Teorem 2.3.2. [46]. (X,d) bir tam b-metrik uzay olsun ve bu uzayda bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi verilsin. $s \geq 1$, $k \in [0,1)$ ve $ks < 1$ olmak üzere $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $\{x_n\} \to x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ vardır ve x^*, T nin tek sabit noktasıdır.

Teorem 2.3.3. [46]. (X,d) bir tam b-metrik uzay olmak üzere bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi ve bir $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \mu[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

koşulunu sağlayan bir $\mu \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.4. [46]. Bir (X,d) tam b-metrik uzayında bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ dizisi ve $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

olacak şekilde bir $s\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

2.4. Ultrametrik Uzaylar

Ultrametrik uzay, güçlü üçgen eşitsizliği denilen

$$d(x,y) < \max\{d(x,z), d(z,y)\}$$

özelliğine sahip bir metrik uzaydır. Ultrametrik kavramı, matematik dışında taksonomi ve filogenetik ağaçlar gibi kavramlarda kullanılmaktadır. Ultrametrik uzay kavramı Van Rooij [75] tarafından tanımlanmıştır. 1998 yılında ise Priess-Crampe ve Ribenboim [59] ultrametrik uzaylar için ortak sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Gajic [36] ultrametrik uzayda genelleştirilmiş büzülebilir dönüşümün bir sınıfı için bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Kirk ve Shahzad [47] ultrametrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri vermiştir. Ultrametrik uzaylar ile ilgili elde edilen bazı sabit nokta sonuçları için [37, 60] çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 2.4.1. [75]. (X,d) bir metrik uzay olsun. d metriği, her $x,y,z \in X$ için

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$$

güçlü üçgen eşitsizliğini sağlıyorsa d ye X üzerinde ultrametrik ve (X,d) ikilisine de ultrametrik uzay denir.

Örnek 2.4.1. [36]. X boştan farklı bir küme ve bu küme üzerinde d metriği

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere (X,d) bir ultrametrik uzaydır.

Tanım 2.4.2. [75]. (X,d) ultrametrik uzayında iç içe azalan yuvarlar boştan farklı bir kesişime sahip ise bu uzaya küresel tam ultrametrik uzay denir.

Teorem 2.4.1. [36]. (X,d) küresel tam ultrametrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü her $x,y \in X, x \neq y$ için

$$d(Tx,Ty) < \max\{d(x,Tx), d(x,y), d(y,Ty)\}$$

koşulunu sağlıyorsa T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.4.2. [58]. (X,d) bir ultrametrik uzay olsun. X in küresel tam olması için gerek ve yeter koşul her $T : X \to X$ büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır.

Teorem 2.4.3. [60]. (X,d) bir ultrametrik uzay olmak üzere $f,S,T : X \to X$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

(1) $f(X)$ küresel tam,

(2) $x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(Sx, Ty) < \max\{d(fx, fy), d(fx, Sx), d(fy, Ty)\}$,

(3) $fS = Sf$, $fT = Tf$, $ST = TS$,

(4) $S(X) \subseteq f(X), T(X) \subseteq f(X)$.

Bu durumda bir $w \in X$ noktası için $f(w) = S(w)$ veya $f(w) = T(w)$ dır.

Teorem 2.4.4. [47]. (X, d) bir küresel tam ultrametrik uzay ve $T : X \to X$, aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun:

(1) $z \neq T(z)$ ve $d(x, T(z)) \leq d(T^2(z), T(z))$ ise $d(x, T(x)) \leq d(z, T(z))$,

(2) T, yörüngeler üzerinde bir büzülme dönüşümüdür.

Bu durumda T nin $B(x; d(x, T(x)))$ şeklinde tanımlı her yuvarında bir sabit noktası vardır.

2.5. C*-Cebir-Değerli Metrik Uzaylar

C*-cebir-değerli metrik uzay kavramı 2014 yılında Ma ve arkadaşları [52] tarafından tanımlanmıştır. Aynı çalışmada C*-cebir-değerli büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi ispatlamışlardır. 2015 yılında ise Ma ve Jiang [53] C*-cebir-değerli b-metrik uzayları tanımlamış, operatör ve integral denklemler ile ilişkili bazı uygulamalar vermiştir. Tam C*-cebir-değerli metrik uzaylarda iki dönüşüm için çakışık ve ortak sabit nokta teoremleri [63] ispatlanmıştır.

Batul ve Kamran [12] C*-cebir-değerli büzülme dönüşümlerini genelleştirmiş ve bunlar için bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. 2016 yılında C*-cebir-değerli metrik uzaylar için Caristi sabit nokta teoremi Shehwar ve arkadaşları [71] tarafından verilmiştir. Kamran ve arkadaşları [42] C*-cebir-değerli b-metrik uzaylarda Banach büzülme prensibini ve bir uygulamasını ispatlamıştır. Bai [10] C*-cebir-değerli b-metrik uzaylarda ikili sabit nokta teoremleri vermiştir. Bu konu ile ilgili diğer önemli çalışmalar için [4, 41, 48, 69, 70, 76, 77] makaleleri incelenebilir.

C*-cebir-değerli metrik uzayları tanımlamak için gerekli olan bazı kavramları vereceğiz.

$\mathbb{A}$ kümesi I birimli bir cebir olsun. $\mathbb{A}$ üzerindeki bir üs alma işlemi, $\mathbb{A}$ üzerinde $a \mapsto a^*$ eşlemesini yapan bir eşlenik lineer dönüşümdür öyle ki her $a, b \in \mathbb{A}$ için

$$a^{**} = a \ \text{ ve } \ (ab)^* = b^*a^*$$

özellikleri vardır. $(\mathbb{A}, *)$ ikilisine bir $*$-cebir denir. Bir Banach $*$-cebir,

$$\|a^*\| = \|a\| \ \ (\forall a \in A)$$

özelliğine sahip bir tam altçarpımsal norm ile birlikte bir $*$-cebirdir. C*-cebir ise $\|a^*a\| = \|a\|^2$ özelliğine sahip bir Banach $*$-cebirdir.

$\mathbb{A}$ bir Banach $*$-cebir ve $a \in \mathbb{A}$ olsun. a nın spektrumu

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - a, \ \mathbb{A} \text{ da tersinir değil}\}$$

kümesidir.

$\mathbb{A}_h = \{x \in \mathbb{A} : x = x^*\}$ kümesi tanımlansın ve bir $x \in \mathbb{A}_h$ elemanı verilsin. $\sigma(x)$, x in spektrumu olmak üzere $\sigma(x) \subset [0, \infty)$ ise x e bir pozitif eleman denir ve $x \succeq \theta$ ile gösterilir. $\mathbb{A}_h$ üzerinde bir kısmı sıralama $\preceq$, pozitif elemanlar aracılığıyla ve θ, $\mathbb{A}$ daki sıfır eleman olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x \preceq y \ \Leftrightarrow \ y - x \succeq \theta.$$

Burada $\{x \in \mathbb{A} : x \succeq \theta\}$ kümesi $\mathbb{A}_+$ ile gösterilecektir.

I, $\mathbb{A}$ nın birimi olmak üzere herhangi bir $x \in \mathbb{A}_+$ elemanı için

$$x \preceq I \ \Leftrightarrow \ \|x\| \leq 1$$

denkliği ve $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ eşitliği vardır.

Tanım 2.5.1. [52]. X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{A}$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

(1) Her $x, y \in X$ için $\theta \preceq d(x, y)$ ve $d(x, y) = \theta \ \ \Leftrightarrow \ \ x = y$,

(2) Her $x, y \in X$ $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$.

Bu durumda d ye X üzerinde bir C*-cebir-değerli metrik ve $(X, \mathbb{A}, d)$ ye bir C*-cebir-değerli metrik uzay denir.

Metrik uzay tanımındaki $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{A}_+$ geldiği için C*-cebir-değerli metrik uzaylar, metrik uzayların bir genelleştirmesidir.

Tanım 2.5.2. [52]. $(X, \mathbb{A}, d)$ bir C*-cebir-değerli metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ ve $x \in X$ olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için $n > N$ özelliğine sahip tüm n ler düşünüldüğünde $\|d(x_n, x)\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine $\mathbb{A}$ ya göre yakınsak denir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > N$ özelliğine sahip tüm n, m ler düşünüldüğünde $\|d(x_n, x_m)\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine $\mathbb{A}$ ya göre bir Cauchy dizisi denir.

(iii) $(X, \mathbb{A}, d)$ C*-cebir-değerli metrik uzayındaki her Cauchy dizisi $\mathbb{A}$ ya göre yakınsak ise $(X, \mathbb{A}, d)$ ye bir tam C*-cebir-değerli metrik uzay denir.

Örnek 2.5.1. [52]. $X = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{A} = M_2(\mathbb{R})$ olsun. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \geq 0$ bir sabit olmak üzere

$$d(x, y) = diag(|x - y|, \alpha|x - y|)$$

metriği tanımlansın. d bir C*-cebir-değerli metriktir ve $\mathbb{R}$ nin tamlığından dolayı $(X, M_2(\mathbb{R}), d)$ bir tam C*-cebir-değerli metrik uzaydır.

Tanım 2.5.3. [52]. $(X, \mathbb{A}, d)$ bir C*-cebir-değerli metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in A$ için

$$d(Tx, Ty) \preceq A^* d(x, y) A$$

olacak şekilde $\|A\| < 1$ özelliğine sahip bir $A \in \mathbb{A}$ elemanı varsa T ye C*-cebir-değerli büzülme dönüşümü denir.

Teorem 2.5.1. [52]. $(X, \mathbb{A}, d)$ bir tam C*-cebir-değerli metrik uzay ve T bir C*-cebir-değerli büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 2.5.4. [52]. X boştan farklı bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan T dönüşümüne, X üzerinde bir C*-cebir-değerli genişleme dönüşümü denir:

(1) $T(X) = X$,

(2) $A \in \mathbb{A}$ bir tersinir eleman ve $\|A^{-1}\| < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \succeq A^* d(x, y) A$.

Teorem 2.5.2. [52]. $(X, \mathbb{A}, d)$ bir tam C*-cebir-değerli metrik uzay ve $T : X \to X$ genişleme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

Lemma 2.5.1. [52]. $\mathbb{A}$, birimi I olan bir C*-cebir olsun.

(1) $\|a\| < \frac{1}{2}$ olmak üzere $a \in \mathbb{A}_+$ ise $I - a$ tersinirdir ve $\|a(I - a)^{-1}\| < 1$ dir.

(2) $a, b \succeq \theta$ ve $ab = ba$ özelliklerine sahip $a, b \in \mathbb{A}$ elemanları için $ab \succeq \theta$ dır.

(3) $\mathbb{A}^{'} = \{a \in \mathbb{A} : ab = ba, \ \forall b \in \mathbb{A}\}$ şeklinde tanımlıdır.

Verilen bir $a \in \mathbb{A}^{'}$ elemanı için $b \succeq c \succeq \theta$ özelliğine sahip $b, c \in \mathbb{A}$ elemanları var ve $I - a \in \mathbb{A}^{'}_{+}$ bir tersinir operatör ise $(I-a)^{-1}b \succeq (I-a)^{-1}c$ ifadesi vardır.

Teorem 2.5.3. [52]. $(X, \mathbb{A}, d)$ bir tam C*-cebir-değerli metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $A \in \mathbb{A}^{'}_{+}$ ve $\|A\| < \frac{1}{2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \preceq A(d(Tx, y) + d(Ty, x))$$

şartını sağlasın. Bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde farklı tip metrik uzaylarda elde edilen orijinal sonuçlara yer verilecektir. Bu sonuçlar [3, 31–34] nolu eserlerde yayımlanmıştır.

3.1. Modüler Metrik Uzaylar Üzerine Bazı Sonuçlar

Bu kısımda, modüler metrik uzaylarda T-yörüngesel w-tamlık, yörüngesel w-süreklilik ve hemen hemen zayıf w-büzülme dönüşümü şeklinde bazı yeni kavramlar tanımlanmış, bu kavramlar aracılığıyla özel şartlara sahip dönüşümlerle ilgili bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve son olarak homotopi üzerine bir uygulama verilmiştir.

Tanım 3.1.1. X_ω^* ın bir U alt kümesi verilsin. Her $x \in U$ için $B_\omega(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U ya ω-açık denir.

Tanım 3.1.2. (X, ω) bir modüler metrik uzay ve $T : X_\omega^* \to X_\omega^*$ bir dönüşüm olsun.

- $x \in X_\omega^*$ elemanı için $O(x, T)$ yörüngesindeki herhangi bir w-Cauchy $\{T^{n_i}x\}$ alt dizisi X_ω^* da yakınsak ise (X, ω) ya T-yörüngesel ω-tam denir.
- $i \to \infty$ olması durumunda

  $$\{T^{n_i}x\} \to x_0 \ \Rightarrow \ \{T(T^{n_i}x)\} \to Tx_0$$

  ise T ye yörüngesel ω-sürekli denir.
- $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere her $x, y \in X_\omega^*$ için

  $$\omega_\lambda(T^n x, T^n y) \leq [\alpha(x, y)]^n \delta(x, y)$$

  olacak şekilde $0 \leq \alpha(x, y) < 1$ ve $\delta(x, y) > 0$ sayıları varsa T ye ω-büzülme tipi dönüşüm denir.

Örnek 3.1.1. $X = [1, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlı $\omega_\lambda(x, y) = \frac{\max\{x,y\}}{\lambda}$ fonksiyonu bir modüler metriktir:

(a) $\omega_\lambda(x, y) = \frac{\max\{x,y\}}{\lambda} \geq 0$ dır.

(b) $\omega_\lambda(x, y) = \frac{\max\{x,y\}}{\lambda} = \frac{\max\{y,x\}}{\lambda} = \omega_\lambda(y, x)$ dir.

(c) $\omega_{\lambda+\mu}(x,y) \leq \omega_\lambda(x,z) + \omega_\lambda(z,y)$ eşitsizliğinin var olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\omega_{\lambda+\mu}(x,y) &= \frac{\max\{x,y\}}{\lambda+\mu} \\
&\leq \frac{\max\{x,y,z\}}{\lambda+\mu} \\
&\leq \frac{\max\{x,z\}}{\lambda+\mu} + \frac{\max\{y,z\}}{\lambda+\mu} \\
&\leq \frac{\max\{x,z\}}{\lambda} + \frac{\max\{y,z\}}{\mu} \\
&= \omega_\lambda(x,z) + \omega_\mu(z,y)
\end{aligned}$$

$T : X \to X$ dönüşümü $Tx = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlansın. $0 \leq \alpha(x,y) = \frac{1}{2} < 1$ ve $\delta(x,y) = \frac{\max\{x,y\}}{\lambda} > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(T^n x, T^n y) &= \omega_\lambda\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) \\
&= \frac{\max\{\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\}}{\lambda} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\max\{x,y\}}{\lambda} \\
&= [\alpha(x,y)]^n \delta(x,y)
\end{aligned}$$

olduğundan T bir ω-büzülme tipi dönüşümdür. Kabul edelim ki $\{x_n\} \to x$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2} = \frac{x}{2} = Tx$$

olduğundan T, yörüngesel ω-süreklidir.

Aşağıdaki teorem, Ciric tarafından verilen [25] nolu makaledeki teoremin modüler metrik uzaylardaki karşılığıdır.

Teorem 3.1.1. (X,ω) bir T-yörüngesel ω-tam modüler metrik uzay ve $T : X_\omega^* \to X_\omega^*$ hem ω-büzülme tipi hem de yörüngesel ω-sürekli bir dönüşüm olsun. $\omega_\lambda(x,Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\omega^*$ elemanı var olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır:

(i) Her $x_0 \in X_\omega^*$ için $\{x_n\} = \{T^n x_0\} \to u$ dur,

(ii) T nin bir tek $u \in X_\omega^*$ sabit noktası vardır,

(iii) $0 \leq \alpha(x_0, Tx_0) < 1,\ \ \delta(x_0, Tx_0) > 0$ olmak üzere

$$\omega_\lambda(T^n x_0, u) \leq \frac{[\alpha(x_0,Tx_0)]^n}{1-\alpha(x_0,Tx_0)}\delta(x_0,Tx_0)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: **(i)** $x_0 \in X_\omega^*$ olmak üzere $x_i = T^i x_0$ şeklinde bir $\{x_n\} \subset X_\omega^*$ dizisi tanımlansın. $\{x_n\}$ in bir ω-Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz. Modüler metrik tanımından dolayı

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(T^n x_0, T^{n+r} x_0) =& \omega_\lambda(T^n x_0, T^{n+r-1} T x_0)\\ \leq& \omega_{\frac{\lambda}{r}}(T^n x_0, T^n T x_0) + \omega_{\frac{\lambda}{r}}(T^{n+1} x_0, T^{n+1} T x_0) + \cdots \\ &+ \omega_{\frac{\lambda}{r}}(T^{n+r-1} x_0, T^{n+r-1} T x_0)\end{aligned}$$

ifadeleri vardır. T bir ω-büzülme tipi dönüşüm olduğundan

$$\omega_\lambda(T^n x_0, T^{n+r} x_0) \leq [\alpha(x_0, Tx_0)]^n \delta(x_0, Tx_0) + \cdots + [\alpha(x_0, Tx_0)]^{n+r-1} \delta(x_0, Tx_0)$$

olup buradan

$$\omega_\lambda(T^n x_0, T^{n+r} x_0) \leq \left(\sum_{k=n}^{n+r-1} [\alpha(x_0, Tx_0)]^k \right) \delta(x_0, Tx_0) \tag{3.1}$$

elde ederiz. $\alpha(x_0, Tx_0) < 1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_\lambda(T^n x_0, T^{n+r} x_0) = 0$ dır. Sonuç olarak $\{x_n\} = \{T^n x_0\}$ bir ω-Cauchy dizisidir ve X_ω^* ın T-yörüngesel ω-tamlığından dolayı

$$u = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n x_0$$

olacak şekilde bir $u \in X_\omega^*$ noktası vardır.

(ii) T nin yörüngesel ω-sürekliliğinden

$$Tu = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u$$

bulunur. O halde u, T nin bir sabit noktasıdır.

u noktasının T nin tek sabit noktası olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $u^{'}$, T nin başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda

$$\omega_\lambda(u, u^{'}) = \omega_\lambda(T^n u, T^n u^{'}) \leq [\alpha(u, u^{'})]^n \delta(u, u^{'})$$

elde ederiz. $\lim\limits_{n\to\infty} [\alpha(u, u^{'})]^n = 0$ olduğundan $\omega_\lambda(u, u^{'}) = 0$ dır, yani $u = u^{'}$ dür.

(iii) (3.1) de $r \to \infty$ şeklinde limite geçersek

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \omega_\lambda(T^n x_0, T^{n+r} x_0) \leq& \lim_{r\to\infty} \left(\sum_{k=n}^{n+r-1} [\alpha(x_0, Tx_0)]^k \right) \delta(x_0, Tx_0)\\ =& \lim_{r\to\infty} [\alpha(x_0, Tx_0)]^n \big(1 + \alpha(x_0, Tx_0) + \cdots + [\alpha(x_0, Tx_0)]^{r-1}\big)\\ & \delta(x_0, Tx_0)\\ =& \lim_{r\to\infty} [\alpha(x_0, Tx_0)]^n \frac{1 - [\alpha(x_0, Tx_0)]^r}{1 - \alpha(x_0, Tx_0)} \delta(x_0, Tx_0)\\ =& \frac{[\alpha(x_0, Tx_0)]^n}{1 - \alpha(x_0, Tx_0)} \delta(x_0, Tx_0)\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\omega_\lambda(T^n x_0, u) \leq \frac{[\alpha(x_0, Tx_0)]^n}{1-\alpha(x_0, Tx_0)}\delta(x_0, Tx_0)$$

eşitsizliğine ulaşılır. ■

Tanım 3.1.3. (X, ω) modüler metrik uzay ve $T : X^*_\omega \to X^*_\omega$ bir dönüşüm olmak üzere keyfi $x, y \in X^*_\omega$ noktaları verilsin. $\alpha : (0, \infty) \to [0, 1)$, her $0 < p < q < \infty$ için $\sup\{\alpha(r) : p \leq r \leq q\} < 1$ özelliğine sahip bir reel fonksiyon olsun. $j, k \geq m(x, y)$ şeklindeki tüm sayılar için

$$\omega_\lambda(T(T^j x), T(T^k y)) \leq \alpha(\omega_\lambda(T^j x, T^k y))\omega_\lambda(T^j x, T^k y) \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir $m(x, y)$ pozitif tamsayısı varsa T ye hemen hemen zayıf ω-büzülme dönüşümü denir.

Aşağıdaki teorem, Ciric tarafından [27] nolu makalede verilmiş teoremin modüler metrik uzaylardaki bir karşılığıdır..

Teorem 3.1.2. (X, ω) bir T-yörüngesel ω-tam modüler metrik uzay ve $T : X^*_\omega \to X^*_\omega$ bir dönüşüm olsun. $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X^*_\omega$ elemanının var olduğunu kabul edelim. T hemen hemen zayıf ω-büzülme dönüşümü ise aşağıdaki ifadeler vardır:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = u$ dur,

(2) T nin bir tek $u \in X^*_\omega$ sabit noktası vardır,

(3) Her $x \in X^*_\omega$ için

$$\alpha(\varepsilon) = \sup\{\alpha(r) : 0 < \varepsilon \leq r \leq 2\varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\omega_\lambda(T^{n-1}x, T^n x) \leq [1 - \alpha(\varepsilon)]\varepsilon$$

ve $n \geq m(x, Tx) + 1$ iken $\omega_\lambda(T^n x, u) \leq \varepsilon$ dur.

İspat: **(1)** X^*_ω daki herhangi iki nokta x ve y olsun. $n \geq m(x, y)$ için

$$\omega_\lambda(T^{n+1}x, T^{n+1}y) \leq \alpha[\omega_\lambda(T^n x, T^n y)]\omega_\lambda(T^n x, T^n y) < \omega_\lambda(T^n x, T^n y)$$

elde ederiz. Buradan $\{\omega_\lambda(T^n x, T^n y)\}$ artmayan bir dizidir. Kabul edelim ki $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_\lambda(T^n x, T^n y) = t$ ve $t > 0$ olsun. $\alpha(t) = \sup\{\alpha(r) : 0 < t \leq r \leq 2t\}$

tanımlansın. Bu durumda

$$t \leq \omega_\lambda(T^s x, T^s y) < t + [1-\alpha(t)]t = [2-\alpha(t)]t$$

olacak şekilde bir $s > m(x,y)$ tamsayısı vardır. Ancak

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(T^{s+1}x, T^{s+1}y) \leq& \alpha[\omega_\lambda(T^s x, T^s y)]\omega_\lambda(T^s x, T^s y)\\ <&\alpha(t)[2-\alpha(t)]t\\ =&\big(1-[1-\alpha(t)]^2\big)t\\ <&t\end{aligned}$$

şeklinde bir çelişki durumu ortaya çıkar çünkü her $n \geq m(x,y)$ için $\omega_\lambda(T^n x, T^n y) \geq t$ dir. Sonuç olarak her $x, y \in X_\omega^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(T^n x, T^n y) = 0 \tag{3.3}$$

elde ederiz. $x \in X_\omega^*$ olmak üzere $\{T^n x\}$ dizisinin x noktasında bir ω-Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz.

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\alpha(\varepsilon) = \sup\{\alpha(r) : \varepsilon \leq r \leq 2\varepsilon\}$ tanımlansın. (3.3) den dolayı her $k \geq n_0$ için

$$\omega_\lambda(T^{k-1}x, T^k x) < [1-\alpha(\varepsilon)]\varepsilon \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $n_0 \geq m(x, Tx)+1$ tamsayısı vardır. r üzerinden tümevarım yaparak

$$\omega_\lambda(T^k x, T^{k+r}x) < \varepsilon \tag{3.5}$$

eşitsizliğini göstermeliyiz. $r = 1$ durumu (3.4) den dolayı sağlanır. $r \geq 1$ için (3.5) in sağlandığını kabul edelim. (3.4) ve tümevarım hipotezinden aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(T^{k-1}x, T^{k+r}x) &\leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^{k-1}x, T^k x) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^k x, T^{k+r}x)\\ &< [1-\alpha(\varepsilon)]\varepsilon + \varepsilon = [2-\alpha(\varepsilon)]\varepsilon\end{aligned} \tag{3.6}$$

$\omega_\lambda(T^{k-1}x, T^{k+r}x) < \varepsilon$ ve $k-1 \geq m(x, Tx)$ ise T için verilen hipotezden dolayı

$$\omega_\lambda(T^k x, T^{k+r+1}x) < \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon \leq \omega_\lambda(T^{k-1}x, T^{k+r}x)$ durumunu kabul edersek (3.2) ve (3.6) dan dolayı

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(T^k x, T^{k+r+1}x) \leq& \alpha[\omega_\lambda(T^{k-1}x, T^{k+r}x)]\omega_\lambda(T^{k-1}x, T^{k+r}x)\\ \leq& \alpha(\varepsilon)\omega_\lambda(T^{k-1}x, T^{k+r}x)\\ <&\alpha(\varepsilon)[2-\alpha(\varepsilon)]\varepsilon\\ =&(1-(1-\alpha(\varepsilon))^2)\varepsilon\\ <&\varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak tümevarıma göre (3.5) in her $r \in \mathbb{N}$ için sağlandığını görürüz. Böylece $\{T^n x\}$ bir ω-Cauchy dizisidir ve X_ω^* ın T-yörüngesel ω-tamlığından dolayı $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = u$ olacak şekilde bir $u \in X_\omega^*$ elemanı vardır.

(2) T yörüngesel ω-sürekli olduğundan $Tu = u$ dur. Şimdi u nun T nin tek sabit noktası olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki u', $Tu' = u'$ olacak şekilde bir başka sabit nokta olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(u,u') =& \omega_\lambda(T^{n+1}u, T^{n+1}u') \\
\leq& \alpha[\omega_\lambda(T^n u, T^n u')]\omega_\lambda(T^n u, T^n u') \\
=& \alpha[\omega_\lambda(T^n u, T^n u')]\omega_\lambda(u,u') \\
\Rightarrow \big(1 - \alpha[\omega_\lambda(T^n u, T^n u')]\big)&\omega_\lambda(u,u') \leq 0
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha[\omega_\lambda(T^n u, T^n u')] < 1$ olduğundan $\omega_\lambda(u,u') = 0$ dır ve böylece $u = u'$ dür. (3.5) de $r \to \infty$ şeklinde limit alınırsa (3) ispatlanmış olur. ■

Aşağıdaki teorem Boyd ve Wong tarafından [14] nolu makalede verilmiş olan teoremin modüler metrik uzaylar için bir karşılığıdır.

Teorem 3.1.3. (X,ω) bir ω-tam metrik uzay ve $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ reel, üstten yarı-sürekli, azalmayan ve $t > 0$ için

$$\phi(t) < t \tag{3.7}$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun.

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \leq \phi[\omega_{3\lambda}(x,y)] \tag{3.8}$$

özelliğine sahip bir $T : X_\omega^* \to X_\omega^*$ dönüşümü verilsin. $\omega_\lambda(x,Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\omega^*$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda T nin bir tek $y \in X_\omega^*$ sabit noktası vardır ve her $x \in X_\omega^*$ için $n \to \infty$ iken $\{T^n x\} \to y$ dir.

İspat: Keyfi bir $x \in X_\omega^*$ için $\alpha_n = \omega_\lambda(T^{n-1}x, T^n x)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} =& \omega_\lambda(T^n x, T^{n+1}x) \\
=& \omega_\lambda(TT^{n-1}x, TT^n x) \\
\leq& \phi[\omega_{3\lambda}(T^{n-1}x, T^n x)] \\
<& \omega_{3\lambda}(T^{n-1}x, T^n x) \\
<& \omega_\lambda(T^{n-1}x, T^n x) \\
=& \alpha_n.
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\{\alpha_n\}$ bir azalan dizi olup a şeklinde bir limite sahiptir. $a > 0$ kabul edelim. $\alpha_{n+1} \leq \phi(\alpha_n)$ ve ϕ sağdan üst yarı-sürekli olduğundan

$$a \leq \lim_{\alpha_n \to a+} \sup \phi(\alpha_n) \leq \phi(a)$$

bulunur. Fakat son ifade, (3.7) ile çelişir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(T^{n-1}x, T^n x) = 0$$

buluruz.

Şimdi $\{T^n x\}$ in ω-Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\{T^n x\}$ dizisinin ω-Cauchy olmadığını kabul edersek her $n \in \mathbb{N}$ ve $m = m(n) > n$ için

$$\omega_\lambda(T^n x, T^m x) \geq \epsilon \tag{3.9}$$

şeklinde bir $\epsilon > 0$ sayısının var olduğu sonucuna ulaşırız. $m(n)$ yi (3.9) u sağlayan en küçük tamsayı olarak kabul edebiliriz. Bunun anlamı

$$\omega_\lambda(T^n x, T^{m-1}x) < \epsilon$$

olmasıdır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\epsilon \leq \omega_\lambda(T^n x, T^m x) &\leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^n x, T^{m-1}x) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m-1}x, T^m x)\\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m-1}x, T^m x)\\ &< \epsilon + \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m-1}x, T^m x)\end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{m\to\infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m-1}x, T^m x) = 0$ olduğundan

$$\gamma_n = \omega_\lambda(T^n, T^m x) \to \epsilon \quad m \to \infty$$

elde edilir. $m > n$ ifadesi $\omega_\lambda(T^m x, T^{m+1}x) \leq \omega_\lambda(T^n x, T^{n+1}x)$ eşitsizliğini gerektirdiği için

$$\begin{aligned}\epsilon \leq \gamma_n = \omega_\lambda(T^n x, T^m x) &\leq \omega_{\frac{\lambda}{3}}(T^n x, T^{n+1}x) + \omega_{\frac{\lambda}{3}}(TT^n x, TT^m x) + \omega_{\frac{\lambda}{3}}(T^m x, T^{m+1}x)\\ &\leq 2\omega_{\frac{\lambda}{3}}(T^n x, T^{n+1}x) + \phi[\omega_\lambda(T^n x, T^m x)]\\ &= 2\omega_{\frac{\lambda}{3}}(T^n x, T^{n+1}x) + \phi(\gamma_n)\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece ϕ nin sürekliliği, (3.7) ile çelişen aşağıdaki ifadeye sebep olur.

$$\epsilon \leq \lim_{n\to\infty} 2\omega_{\frac{\lambda}{3}}(T^n x, T^{n+1}x) + \lim_{n\to\infty} \sup \phi(\gamma_n) < \phi(\epsilon).$$

Sonuç olarak, $\{T^n x\}$ bir ω-Cauchy dizisidir ve X_ω^*, ω-tam olduğundan $\{T^n x\}$, X_ω^* daki bir x_0 noktasına ω-yakınsar. T, (3.7) ve (3.8) den dolayı ω-süreklidir ve böylece

$$Tx_0 = T(\lim_{n\to\infty} T^n x) = \lim_{n\to\infty} T(T^n x) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = x_0$$

eşitliği vardır. O halde $\{T^n x\}$ in limit noktası olan x_0, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi tekliği ispatlayacağız. u, T nin x_0 dan farklı bir sabit noktası olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(u, x_0) =& \omega_\lambda(Tu, Tx_0)\\ \leq& \phi[\omega_{3\lambda}(u, x_0)]\\ <& \omega_{3\lambda}(u, x_0)\\ <& \omega_\lambda(u, x_0)\end{aligned}$$

bulunur. Ortaya çıkan çelişkiden dolayı $u = x_0$ olmak zorundadır. O halde T nin bir tek sabit noktası vardır. ■

Şimdi Teorem 3.1.3 ü sağlayan bir örnek verelim.

Örnek 3.1.2. $X = [0, 2]$, $\omega_\lambda(x, y) = \frac{|x-y|}{\lambda}$, $\phi(t) = \frac{t}{2}$, $Tx = \frac{x}{7}$ olmak üzere

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) = \frac{|Tx - Ty|}{\lambda} = \frac{1}{7}\frac{|x-y|}{\lambda}$$

ve

$$\phi(\omega_{3\lambda}(x, y)) = \phi\left(\frac{|x-y|}{3\lambda}\right) = \frac{|x-y|}{6\lambda}$$

eşitlikleri vardır. Buradan

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) \leq \phi(\omega_{3\lambda}(x, y))$$

eşitsizliğini elde ederiz. Teorem 3.1.3 ün koşulları sağlandığı için 0, T nin bir tek sabit noktasıdır.

3.1.1. Homotopi üzerine bir uygulama

Teorem 3.1.4. (X, ω) bir ω-tam metrik uzay ve $U \subset V$ olmak üzere X_ω^* ın açık ve kapalı alt kümeleri sırasıyla U ve V olsun. $\omega_\lambda(x, Tx)$ sonlu olacak şekilde bir X_ω^* da bir $x = x(\lambda)$ elemanı var olsun. $H : V \times [0, 1] \to X_\omega^*$ operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın:

(a) Her $x \in V \setminus U$ ve her $t \in [0,1]$ için $x \neq H(x,t)$ dir,
(b) Her $t \in [0,1]$ ve her $x, y \in V$ için

$$\omega_\lambda(H(x,t), H(y,t)) \leq \phi[\omega_{3\lambda}(x,y)]$$

olacak şekilde $\phi(u) < u$ ve $u > 0$ için $\phi(u) > 0$ özelliklerine sahip sürekli, azalmayan bir $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu vardır,
(c) Her $t, s \in [0,1]$ ve her $x \in V$ için

$$\omega_\lambda(H(x,t), H(x,s)) \leq |\alpha(t) - \alpha(s)|$$

olacak şekilde bir $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır,
(d) $\psi(x) = x - \phi(x)$ olmak üzere $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ kesin olarak azalmayan bir dönüşümdür.
Bu durumda $H(.,0)$ ın bir sabit noktasının var olması için gerek ve yeter şart $H(.,1)$ in bir sabit noktasının var olmasıdır.

İspat: G kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$G := \{t \in [0,1] \ : \ \text{bir } \ x \in U \ \text{ için } \ x = H(x,t)\}.$$

$(\Rightarrow)$ $H(.,0)$ ın bir sabit noktası var olsun. (a) dan dolayı $0 \in G$ olduğundan G boştan farklı bir kümedir. G nin $[0,1]$ de hem kapalı hem de açık olduğunu göstereceğiz. $[0,1]$ in bağlantılılığından dolayı, $G = [0,1]$ olacağından gerekli sonuca ulaşmış oluruz.

Öncelikle G nin $[0,1]$ de açık olduğunu gösterelim. $t_0 \in G$ ve $x_0 = H(x_0,t_0)$ olmak üzere $x_0 \in U$ olsun. U, X_ω^* da açık olduğundan $B_\omega(x_0,r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ vardır. $\varepsilon = r - \omega_\lambda(x,x_0) > 0$ durumunu göz önünde bulundurursak α, t_0 da sürekli olduğundan her $t \in (t_0 - \beta(\varepsilon), t_0 + \beta(\varepsilon))$ için $|\alpha(t) - \alpha(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\beta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$t \in (t_0 - \beta(\varepsilon), t_0 + \beta(\varepsilon))$ olmak üzere

$$x \in \overline{B_\omega(x_0,r)} = \{x \in X_\omega^* \ : \ \omega_\lambda(x,x_0) \leq r\}$$

için

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(H(x,t),x_0) =&\omega_\lambda(H(x,t),H(x_0,t_0))\\
\leq&\omega_{\frac{\lambda}{2}}(H(x,t),H(x,t_0))+\omega_{\frac{\lambda}{2}}(H(x,t_0),H(x_0,t_0))\\
\leq&|\alpha(t)-\alpha(t_0)|+\phi[\omega_{\frac{3\lambda}{2}}(x,x_0)]\\
\leq&\varepsilon+\omega_{\frac{3\lambda}{2}}(x,x_0)\\
\leq&\varepsilon+\omega_\lambda(x,x_0)\\
=&r-\omega_\lambda(x,x_0)+\omega_\lambda(x,x_0)\\
=&r
\end{aligned}$$

ve $H(x,t)\in\overline{B_\omega(x_0,r)}$ elde ederiz. Böylece her sabit $t\in(t_0-\beta(\varepsilon),t_0+\beta(\varepsilon))$ için

$$H(.,t):\overline{B_\omega(x_0,r)}\to\overline{B_\omega(x_0,r)}$$

dir. Teorem 3.1.3 deki tüm hipotezler sağlandığı için $H(.,t)$ nin V de bir sabit noktası vardır fakat bu sabit nokta (a) dan dolayı U da olmalıdır. Böylece

$$(t_0-\beta(\varepsilon),t_0+\beta(\varepsilon))\subseteq G$$

olup G, $[0,1]$ de açıktır.

Şimdi G nin $[0,1]$ aralığında kapalı olduğunu gösterelim. G de $n\to\infty$ iken $t_n\to t^*\in[0,1]$ özelliğine sahip bir $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ dizisi verilsin. Amacımız $t^*\in G$ olduğunu göstermektir. G nin tanımından dolayı, her $n\in\mathbb{Z}^+$ için $x_n=H(x_n,t_n)$ şeklinde $x_n\in U$ elemanı vardır. Üstelik $m,n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
\omega_\lambda(x_n,x_m) =&\omega_\lambda(H(x_n,t_n),H(x_m,t_m))\\
\leq&\omega_{\frac{\lambda}{2}}(H(x_n,t_n),H(x_n,t_m))+\omega_{\frac{\lambda}{2}}(H(x_n,t_m),H(x_m,t_m))\\
\leq&|\alpha(t_n)-\alpha(t_m)|+\phi[\omega_{\frac{3\lambda}{2}}(x_n,x_m)]\\
\leq&|\alpha(t_n)-\alpha(t_m)|+\phi[\omega_\lambda(x_n,x_m)]
\end{aligned}$$

elde ederiz. (d) den dolayı

$$\psi(\omega_\lambda(x_n,x_m))\leq|\alpha(t_n)-\alpha(t_m)|$$

bulunur ve

$$\omega_\lambda(x_n,x_m)\leq\psi^{-1}(|\alpha(t_n)-\alpha(t_m)|)$$

elde edilir.

Şimdi bu eşitsizliği kullanarak $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. ψ^{-1} ile α nın sürekliliğinden ve $n,m \to \infty$ iken $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ in yakınsaklığından dolayı $\lim\limits_{n,m\to\infty} \omega_\lambda(x_n, x_m) = 0$ sonucuna ulaşırız. Yani $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$, X_ω^* da bir ω-Cauchy dizisidir.

X_ω^*, ω-tam olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x^*, x_n) = 0$$

olacak şekilde $x^* \in V$ noktası vardır. Aşağıda verilen

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x_n, H(x^*, t^*)) =&\omega_\lambda(H(x_n, t_n), H(x^*, t^*))\\ \leq&\omega_{\frac{\lambda}{2}}(H(x_n, t_n), H(x_n, t^*)) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}(H(x_n, t^*), H(x^*, t^*))\\ \leq&|\alpha(t_n) - \alpha(t^*)| + \phi[\omega_{\frac{3\lambda}{2}}(x_n, x^*)],\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ şeklinde limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x_n, H(x^*, t^*)) = 0$$

ve

$$\omega_\lambda(x^*, H(x^*, t^*)) = \lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(x_n, H(x^*, t^*)) = 0$$

elde edilir. Buradan $x^* = H(x^*, t^*)$ dır. (a) dan dolayı $x^* \in U$ dur. Sonuç olarak $t^* \in G$ dir ve G, $[0, 1]$ de kapalıdır.

($\Leftarrow$) Benzer şekilde gerek şartın ispatındaki yöntem kullanılarak gösterilebilir. ■

3.2. Modüler S-Metrik Uzaylar ve Bazı Sabit Nokta Sonuçları

Çalışmamızın bu kısmında S-metrik ve modüler metrik kavramlarını birleştirip yeni bir kavram olarak modüler S-metrik uzayı tanıtacağız ve bu uzayla ilgili elde ettiğimiz orijinal sonuçları vereceğiz.

Tanım 3.2.1. X boştan farklı bir küme olsun. X üzerindeki bir modüler S-metrik her $x, y, z \in X$ ve $\lambda > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$s : (0, \infty) \times X \times X \times X \to [0, \infty]$$

fonksiyonudur:

$(S1)$ $s_\lambda(x, y, z) \geq 0$,

$(S2)$ $s_\lambda(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$,

$(S3)$ Her $\lambda, \mu, \nu > 0$ ve $a \in X$ için

$$s_{\lambda+\mu+\nu}(x, y, z) \leq s_\lambda(x, x, a) + s_\mu(y, y, a) + s_\nu(z, z, a)$$

eşitsizliği vardır.

Bu durumda (X, s) ikilisine modüler S-metrik uzay denir.

Örnek 3.2.1. (X, S) bir S-metrik uzay ve $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere X üzerinde tanımlı $s_\lambda(x, y, z) = \dfrac{S(x, y, z)}{\varphi(\lambda)}$ fonksiyonu bir modüler S-metriktir.

Örnek 3.2.2. $X = [0, 1)$ ve $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere X üzerinde tanımlı

$$s_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{\lambda} \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\}$$

bir modüler S-metriktir:

$(S1)$ $s_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{\lambda} \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\} \geq 0$ olduğu açıktır.

$(S2)$ $s_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{\lambda} \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $|x - y| = |y - z| = |x - z| = 0$ yani $x = y = z$ olmasıdır.

$(S3)$ $s_{\lambda+\mu+\nu}(x, y, z) = \frac{\max\{|x-y|,|y-z|,|x-z|\}}{\lambda+\mu+\nu}$ olsun. İncelenmesi gereken üç durum vardır:

<u>1. Durum</u>: $\max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\} = |x - y|$ olması durumunda

$$\frac{|x - y + a - a|}{\lambda + \mu + \nu} \leq \frac{|x - a| + |y - a|}{\lambda + \mu + \nu} \leq \frac{|x - a| + |y - a| + |z - a|}{\lambda + \mu + \nu}$$

elde edilir.

<u>2. Durum</u>: $\max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\} = |y - z|$ durumunda

$$\frac{|y - z + a - a|}{\lambda + \mu + \nu} \leq \frac{|y - a| + |z - a|}{\lambda + \mu + \nu} \leq \frac{|x - a| + |y - a| + |z - a|}{\lambda + \mu + \nu}$$

bulunur.

<u>3. Durum</u>: $\max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\} = |x - z|$ olması durumunda ise

$$\frac{|x - z + a - a|}{\lambda + \mu + \nu} \leq \frac{|x - a| + |z - a|}{\lambda + \mu + \nu} \leq \frac{|x - a| + |y - a| + |z - a|}{\lambda + \mu + \nu}$$

sonucuna ulaşılır. Bu üç durumdan aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
s_{\lambda+\mu+\nu}(x, y, z) &= \frac{\max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\}}{\lambda + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{|x - a| + |y - a| + |z - a|}{\lambda + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{|x - a|}{\lambda} + \frac{|y - a|}{\mu} + \frac{|z - a|}{\nu} \\
&= \frac{\max\{|x - x|, |x - a|, |x - a|\}}{\lambda} + \frac{\max\{|y - y|, |y - a|, |y - a|\}}{\mu} \\
&\quad + \frac{\max\{|z - z|, |z - a|, |z - a|\}}{\nu} \\
&= s_\lambda(x, x, a) + s_\mu(y, y, a) + s_\nu(z, z, a).
\end{aligned}$$

Lemma 3.2.1. (X,s) modüler S-metrik uzay ve $x,y,z\in X$ olmak üzere

$$s_\lambda(x,x,y)=s_\lambda(y,y,x)$$

eşitliği vardır.

İspat: Modüler S-metrik tanımından dolayı

$$s_\lambda(x,x,y)\leq s_\varepsilon(x,x,x)+s_\varepsilon(x,x,x)+s_{\lambda-2\varepsilon}(y,y,x)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı vardır. $\varepsilon\to 0$ şeklinde limite geçersek

$$s_\lambda(x,x,y)\leq s_\lambda(y,y,x)$$

elde ederiz. Benzer şekilde $s_\lambda(y,y,x)\leq s_\lambda(x,x,y)$ dir. Böylece

$$s_\lambda(x,x,y)\leq s_\lambda(y,y,x)\leq s_\lambda(x,x,y)$$

ve

$$s_\lambda(x,x,y)=s_\lambda(y,y,x)$$

sonucuna ulaşırız. ■

Uyarı 3.2.1. (X,s) modüler S-metrik uzay ve $x,y,z\in X$ olmak üzere $\lambda>0$ için $s_\lambda(x,y,z)$, $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ise bu aralık üzerinde artmayan bir fonksiyondur. Gerçekten $0<\nu<\mu<\lambda$ ise $(S3)$ den

$$s_\lambda(x,x,y)\leq s_{\lambda-\mu}(x,x,x)+s_{\mu-\nu}(x,x,x)+s_\nu(y,y,x)$$

ve $(S2)$ den de

$$s_\lambda(x,x,y)\leq s_\nu(y,y,x)$$

sonucu elde edilir.

Lemma 3.2.1 den dolayı $s_\lambda(x,x,y)\leq s_\nu(x,x,y)$ olduğundan $s_\lambda(x,y,z)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde artmayandır. Bundan dolayı $[0,\infty]$ aralığında her $\lambda>0$ noktası için sağ limit

$$s_{\lambda+0}(x,y,z)=\lim_{\mu\to\lambda+0}s_\mu(x,y,z)$$

ve sol limit

$$s_{\lambda-0}(x,y,z)=\lim_{\varepsilon\to 0}s_{\lambda-\varepsilon}(x,y,z)$$

vardır ve aşağıdaki iki eşitsizlik sağlanır:

$$s_{\lambda+0}(x,y,z)\leq s_\lambda(x,y,z)\leq s_{\lambda-0}(x,y,z).$$

Tanım 3.2.2. (X,s) bir modüler S-metrik uzay olsun. X üzerinde $x,y\in X$ için

$$x \overset{s}{\sim} y \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(x,x,y)=0 \tag{3.10}$$

ile tanımlı $\overset{s}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Şimdi bu bağıntının denklik bağıntısı olduğunu yansıma, simetri ve geçişme özelliğini sağlatarak gösterelim. $x \overset{s}{\sim} x$ durumu $(S2)$ şartından dolayı açıktır. Lemma 3.2.1 den dolayı

$$x \overset{s}{\sim} y \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(x,x,y)=0=\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(y,y,x) \Leftrightarrow y \overset{s}{\sim} x$$

elde ederiz.

$x \overset{s}{\sim} y$ ve $y \overset{s}{\sim} z$ ise $\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(x,x,y)=0$ ve $\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(y,y,z)=0$ bulunur. $(S3)$ ve Lemma 3.2.1 den dolayı

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(x,x,z) \leq& \lim_{\lambda\to\infty} s_{\frac{\lambda}{3}}(x,x,y)+\lim_{\lambda\to\infty} s_{\frac{\lambda}{3}}(x,x,y)+\lim_{\lambda\to\infty} s_{\frac{\lambda}{3}}(y,y,z)\\ =&0+0+0\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $(S1)$ özelliğinden dolayı

$$\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(x,x,z)=0 \Leftrightarrow x \overset{s}{\sim} z$$

olduğu açıktır. $X \diagup \overset{s}{\sim}$ bölüm kümesindeki $x\in X$ elemanının denklik sınıfı

$$X_s=\{y\in X : y \overset{s}{\sim} x\}$$

şeklinde tanımlanır. $x_0\in X$ için X_s^* kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X_s^*=\{x\in X : s_\lambda(x,x,x_0)<\infty \text{ olacak şekilde } \exists\lambda=\lambda(x)>0 \text{ vardır}\}.$$

Teorem 3.2.1. (X,s) bir modüler S-metrik uzay ise modüler küme X_s, $x,y\in X_s$ için

$$S^\circ(x,x,y)=\inf\{\lambda>0 : s_\lambda(x,x,y)\leq\lambda\}$$

ile tanımlı S-metrik ile birlikte bir S-metrik uzaydır.

İspat: $x \overset{s}{\sim} y$ olduğundan $\lambda\geq\lambda_0$ için (3.10) denkliğinden

$$s_\lambda(x,x,y)\leq 1$$

olacak şekilde bir $\lambda_0>0$ sayısı vardır. $\lambda_1=\max\{1,\lambda_0\}$ alınırsa $S^\circ(x,x,y)$ nin tanımıyla birlikte

$$s_{\lambda_1}(x,x,y)\leq 1\leq\lambda_1$$

eşitsizliği

$$S^{\circ}(x,x,y) \leq \lambda_1 < \infty$$

sonucunu verir. Verilen bir $x \in X_s$ elemanı için $(S2)$ aksiyomu her $\lambda > 0$ için $s_\lambda(x,x,x) = 0$ ve böylece $S^{\circ}(x,x,x) = 0$ olduğunu gösterir. s_λ, $(S2)$ yi sağlasın, $x, y \in X_s$ ve $S^{\circ}(x,x,y) = 0$ olsun. Bu durumda $s_\mu(x,x,y)$, $\mu > 0$ için μ yü geçemez. Böylece herhangi bir $\lambda > 0$ ve $0 < \mu < \lambda$ için, Uyarı 3.2.1 den $\mu \to 0$ durumunda $s_\lambda(x,x,y) \leq s_\mu(x,x,y) \leq \mu \to 0$ elde edilir. Buradan her $\lambda > 0$ için $s_\lambda(x,x,y) = 0$ dır. Böylece $(S2)$ aksiyomu $x = y$ eşitliğini verir.

$(S1)$ aksiyomundan dolayı $S^{\circ}(x,x,y) \geq 0$ dır. Şimdi üçgen eşitsizliğini yani bir $z \in X_s$ için

$$S^{\circ}(x,x,y) \leq 2S^{\circ}(x,x,z) + S^{\circ}(y,y,z)$$

eşitsizliğini gösterelim. Gerçekten S° ın tanımından herhangi $\lambda > S^{\circ}(x,x,z)$ ve $\mu > S^{\circ}(y,y,z)$ için $s_\lambda(x,x,z) \leq \lambda$ ve $s_\mu(y,y,z) \leq \mu$ buluruz. Sonuç olarak $(S3)$ aksiyomundan dolayı

$$s_{2\lambda+\mu}(x,x,y) \leq 2s_\lambda(x,x,z) + s_\mu(y,y,z) \leq 2\lambda + \mu$$

elde ederiz. Buradan S° ın tanımı gereği $S^{\circ}(x,x,y) \leq 2\lambda + \mu$ dur ve $\lambda \to S^{\circ}(x,x,z)$ ile $\mu \to S^{\circ}(y,y,z)$ şeklinde limite geçilirse ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.2. (X, s) bir modüler S-metrik uzay olsun ve her $x, y \in X_s$ için

$$S^1(x,x,y) = \inf\{\lambda + s_\lambda(x,x,y) : \lambda > 0\}$$

tanımlansın. Bu durumda S^1 metriği, $S^{\circ} \leq S^1 \leq 2S^{\circ}$ olacak şekilde X_s üzerinde bir S-metriktir.

İspat: $x, y \in X_s$ için $s_\lambda(x,x,y)$ değeri (3.10) daki ifadeye göre yeterince büyük $\lambda > 0$ için sonlu olduğundan, $\{\lambda + s_\lambda(x,x,y) : \lambda > 0\} \subset \mathbb{R}^+$ kümesi boştan farklıdır ve alttan sınırlıdır. Böylece $S^1(x,x,y) \in \mathbb{R}^+$ sonucuna ulaşılır.

$s_\lambda(x,x,x) = 0$ olduğundan S^1 in tanımından dolayı,

$$S^1(x,x,x) = \inf\{\lambda + \underbrace{s_\lambda(x,x,x)}_{0} : \lambda > 0\} = 0$$

dır. s_λ, $(S2)$ aksiyomunu sağlasın, $x, y \in X_s$ ve $S^1(x,x,y) = 0$ olsun. Her $\lambda > 0$ için $s_\lambda(x,x,y) = 0$ olduğunu gösterirsek $x = y$ eşitliği $(S2)$ aksiyomundan elde edilir.

Kabul edelim ki bir $\lambda_0 > 0$ için $s_{\lambda_0}(x,x,y) > 0$ olsun. Bu durumda $\lambda \geq \lambda_0$ için $\lambda + s_\lambda(x,x,y) \geq \lambda_0$ buluruz ve $0 < \lambda < \lambda_0$ iken Uyarı 3.2.1 den dolayı

$$0 < s_{\lambda_0}(x,x,y) \leq s_\lambda(x,x,y) \leq \lambda + s_\lambda(x,x,y)$$

dir. Böylece her $\lambda > 0$ için $\lambda + s_\lambda(x,x,y) \geq \lambda_1 = \min\{\lambda_0, s_{\lambda_0}(x,x,y)\}$ dir. S^1 in tanımından, $S^1(x,x,y) \geq \lambda_1 > 0$ elde edilir. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

Şimdi üçgen eşitsizliğini gösterelim:

$$S^1(x,x,y) \leq 2S^1(x,x,z) + S^1(y,y,z).$$

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için S^1 in tanımından

$$\lambda + s_\lambda(x,x,z) \leq S^1(x,x,z) + \varepsilon \text{ ve } \mu + s_\mu(y,y,z) \leq S^1(y,y,z) + \varepsilon$$

olacak şekilde $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ ve $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$ buluruz. $(S3)$ aksiyomunun uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} S^1(x,x,y) \leq& (2\lambda + \mu) + s_{2\lambda+\mu}(x,x,y) \leq 2\lambda + \mu + 2s_\lambda(x,x,z) + s_\mu(y,y,z) \\ \leq& 2S^1(x,x,z) + 2\varepsilon + S^1(y,y,z) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan eşitsizlik elde edilir.

S° ve S^1 metriklerinin X_s üzerinde denk olduklarını gösterelim.

$$S^\circ(x,x,y) \leq S^1(x,x,y)$$

eşitsizliğini göstermek için $\lambda > 0$ sayısını keyfi olarak kabul edelim. $s_\lambda(x,x,y) \leq \lambda$ ise S° ın tanımından $S^\circ(x,x,y) \leq \lambda$ dır. $s_\lambda(x,x,y) > \lambda$ ise $S^\circ(x,x,y) \leq s_\lambda(x,x,y)$ dir. $\mu = s_\lambda(x,x,y)$ tanımlanırsa $\mu > \lambda$ elde edilir. Böylece Uyarı 3.2.1 den

$$s_\mu(x,x,y) \leq s_\lambda(x,x,y) = \mu$$

bulunur. Buradan

$$S^\circ(x,x,y) \leq \mu = s_\lambda(x,x,y)$$

dir. Sonuç olarak herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$S^\circ(x,x,y) \leq \max\{\lambda, s_\lambda(x,x,y)\} \leq \lambda + s_\lambda(x,x,y)$$

elde edilir. Eşitsizlikte infimuma geçilirse

$$S^{\circ}(x,x,y) \leq S^{1}(x,x,y)$$

bulunur.

Diğer eşitsizliği elde etmek için S° ın tanımından $S^{\circ}(x,x,y) < \lambda$ olacak şekilde verilen $\lambda > 0$ sayısını alalım. Bu durumda $s_{\lambda}(x,x,y) \leq \lambda$ dır. Böylece $S^{1}(x,x,y) \leq \lambda + s_{\lambda}(x,x,y) \leq 2\lambda$ bulunur. $\lambda \to S^{\circ}(x,x,y)$ şeklinde limite geçilirse

$$S^{1}(x,x,y) \leq 2S^{\circ}(x,x,y)$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.3. (X,s) bir modüler S-metrik uzay, $x,y \in X_s$ ve $\lambda > 0$ olsun.

(a) $S^{\circ}(x,x,y) < \lambda$ ise $s_{\lambda}(x,x,y) \leq S^{\circ}(x,x,y) < \lambda$ dır.

(b) $s_{\lambda}(x,x,y) = \lambda$ ise $S^{\circ}(x,x,y) = \lambda$ dır.

(c) $\lambda = S^{\circ}(x,x,y) > 0$ ise $s_{\lambda+0}(x,x,y) \leq \lambda \leq s_{\lambda-0}(x,x,y)$ dir.

(d) $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $\mu \to s_{\mu}(x,x,y)$ fonksiyonu sağdan sürekli olsun. $(a)-(c)$ koşullarıyla birlikte aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$S^{\circ}(x,x,y) \leq \lambda \Leftrightarrow s_{\lambda}(x,x,y) \leq \lambda.$$

(e) $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $\mu \to s_{\mu}(x,x,y)$ fonksiyonu soldan sürekli olsun. $(a)-(c)$ koşullarıyla birlikte aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$S^{\circ}(x,x,y) < \lambda \Leftrightarrow s_{\lambda}(x,x,y) < \lambda.$$

(f) $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $\mu \to s_{\mu}(x,x,y)$ fonksiyonu sürekli olsun. $(a)-(e)$ koşullarıyla birlikte aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$S^{\circ}(x,x,y) = \lambda \Leftrightarrow s_{\lambda}(x,x,y) = \lambda.$$

İspat: **(a)** S° ın tanımından ve Uyarı 3.2.1 den $S^{\circ}(x,x,y) < \mu < \lambda$ olacak şekilde her $\mu > 0$ için $s_{\mu}(x,x,y) \leq \mu$ ve $s_{\lambda}(x,x,y) \leq s_{\mu}(x,x,y)$ elde ederiz. Böylece $s_{\lambda}(x,x,y) \leq \mu$ dür. $\mu \to S^{\circ}(x,x,y)$ şeklinde limite geçersek sonuç elde edilir.

(b) Tanımdan, $S^{\circ}(x,x,y) \leq \lambda$ dır ve (a) dan dolayı $S^{\circ}(x,x,y) = \lambda$ dır.

(c) Herhangi $\mu > \lambda = S^{\circ}(x,x,y)$ için S° ın tanımından dolayı $s_{\mu}(x,x,y) \leq \mu$ dür ve böylece

$$s_{\lambda+0}(x,x,y) = \lim_{\mu \to \lambda+0} s_{\mu}(x,x,y) \leq \lim_{\mu \to \lambda+0} \mu = \lambda$$

elde edilir. Her $0 < \mu < \lambda$ için $s_\mu(x, x, y) > \mu$ bulunur ve dolayısıyla

$$s_{\lambda-0}(x, x, y) = \lim_{\mu \to \lambda - 0} s_\mu(x, x, y) \geq \lim_{\mu \to \lambda - 0} \mu = \lambda$$

sonucuna ulaşılır.

(d) Yeter koşul S° ın tanımından elde edilir. Şimdi gerek şartı ispatlayalım. $S^\circ(x, x, y) < \lambda$ ise (a) dan dolayı, $s_\lambda(x, x, y) < \lambda$ dır ve $S^\circ(x, x, y) = \lambda$ ise

$$s_\lambda(x, x, y) = s_{\lambda+0}(x, x, y) \leq \lambda$$

olup bu durum $\mu \to s_\mu(x, x, y)$ fonksiyonunun sağdan sürekli olmasının ve (c) nin bir sonucudur.

(e) (a) dan dolayı, sadece yeter şartı ispatlayacağız. S° ın tanımı $S^\circ(x, x, y) \leq \lambda$ yı verir fakat $S^\circ(x, x, y) = \lambda$ ise (c) den dolayı

$$s_\lambda(x, x, y) = s_{\lambda-0}(x, x, y) \geq \lambda$$

elde ederiz. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

(f) Yeter koşul (b) den gelir. Gerek koşul için

$$s_\lambda(x, x, y) \leq \lambda \leq s_\lambda(x, x, y)$$

eşitsizlikleri (c) den elde edilir. ■

Tanım 3.2.3. (X, s) bir modüler S-metrik uzay olsun.

(1) Bir $\{x_n\} \subset X_s^*$ dizisi için $n \to \infty$ iken $s_\lambda(x_n, x_n, x) \to 0$ ise bu dizi $x \in X_s^*$ noktasına yakınsar. Yani her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $s_\lambda(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $\{x_n\} \to x$ şeklinde gösterilir.

(2) Bir $\{x_n\} \subset X_s^*$ dizisi için $m, n \to \infty$ iken $s_\lambda(x_n, x_n, x_m) \to 0$ ise bu diziye s-Cauchy dizisi denir. Diğer bir deyişle, her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $s_\lambda(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(3) X_s^* daki her s-Cauchy dizisi s-yakınsak ise X_s^* modüler S-metrik uzayı s-tamdır.

Örnek 3.2.3. $X = [0, 1)$ uzayı üzerinde tanımlı modüler S-metrik, Örnek 3.2.2 deki gibi verilsin. $\{x_n\} = \{1 - \frac{1}{n}\}$ dizisi bu uzayda

$$s_\lambda(x_n, x_n, x_m) = \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

olduğundan bir s-Cauchy dizisidir fakat

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \notin X$$

olduğundan X de bir s-yakınsak dizi değildir. Böylece (X, s) tam olmayan bir modüler S-metrik uzaydır.

Lemma 3.2.2. (X, s) bir modüler S-metrik uzay olsun. $\{x_n\} \to x$ ve $\{y_n\} \to y$ ise $s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \to s_\lambda(x, x, y)$ dir.

İspat: $\{x_n\} \to x$ ve $\{y_n\} \to y$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\forall n \geq n_1,\ s_\lambda(x_n, x_n, x) < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_2,\ s_\lambda(y_n, y_n, y) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Genel durumu bozmadan aşağıdaki eşitsizlikleri kabul edebiliriz:

$$\forall n \geq n_1, s_\delta(x_n, x_n, x) < \varepsilon(\delta) = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\forall n \geq n_2, s_\delta(y_n, y_n, y) < \varepsilon(\delta) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alırsak her $n \geq n_0$ için $\lambda > \delta > 0$ olmak üzere üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \leq& 2s_\delta(x_n, x_n, x) + s_{\lambda-2\delta}(y_n, y_n, x) \\ \leq& 2s_\delta(x_n, x_n, x) + 2s_\delta(y_n, y_n, y) + s_{\lambda-4\delta}(x, x, y) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\delta \to 0$ alırsak

$$s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + s_\lambda(x, x, y)$$

$$s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \leq \varepsilon + s_\lambda(x, x, y)$$

$$s_\lambda(x_n, x_n, y_n) - s_\lambda(x, x, y) \leq \varepsilon$$

buluruz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_\lambda(x, x, y) \leq& 2s_\delta(x, x, x_n) + s_{\lambda-2\delta}(y, y, x_n) \\ \leq& 2s_\delta(x, x, x_n) + 2s_\delta(y, y, y_n) + s_{\lambda-4\delta}(x_n, x_n, y_n) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Lemma 3.2.1 i kullanır ve $\delta \to 0$ şeklinde limite geçersek

$$\begin{aligned} s_\lambda(x, x, y) \leq& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \\ \leq& \varepsilon + s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \end{aligned}$$

$$s_\lambda(x, x, y) - s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \leq \varepsilon$$

elde ederiz. O halde yukarıdaki eşitsizliklerden $|s_\lambda(x_n, x_n, y_n) - s_\lambda(x, x, y)| < \varepsilon$ elde edilir. Yani $s_\lambda(x_n, x_n, y_n) \to s_\lambda(x, x, y)$ dir. ■

3.2.1. Sabit nokta teoremleri

Burada modüler S-metrik uzaylar ile ilgili elde ettiğimiz bazı sabit nokta teoremlerini vereceğiz.

Tanım 3.2.4. (X, s) bir modüler S-metrik uzay ve $T : X_s^* \to X_s^*$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$s_\lambda(Tx, Tx, Ty) \leq k s_\lambda(x, x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ sabiti varsa T ye s-büzülme denir.

Örnek 3.2.4. $X = [0, 1)$ uzayı üzerinde Örnek 3.2.2 deki modüler S-metriğini ele alalım. $T : X \to X$ dönüşümü $Tx = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlansın.

$$s_\lambda(Tx, Tx, Ty) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}s_\lambda(x, x, y)$$

eşitliğinde $0 \leq k = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan T dönüşümü bir s-büzülmedir.

Sonuç 3.2.1. (X, s), (Y, s) modüler S-metrik uzaylar ve $f : X_s^* \to Y_s^*$ bir dönüşüm olsun. f nin $x \in X_s^*$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\} \to x$ iken $\{f(x_n)\} \to f(x)$ olmasıdır.

Teorem 3.2.4. (X, s) bir s-tam modüler S-metrik uzay ve $T : X_s^* \to X_s^*$ bir s-büzülme olsun. $s_\lambda(x, x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_s^*$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda T nin bir tek $u \in X_s^*$ sabit noktası vardır.

İspat: İlk önce sabit noktanın varlığını gösterelim. $x \in X_s^*$ seçelim. $\{T^n x\}$ in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n = 0, 1, 2, \cdots$ için tümevarımla

$$\begin{aligned} s_\lambda(T^n x, T^n x, T^{n+1}x) &\leq k s_\lambda(T^{n-1}x, T^{n-1}x, T^n x) \\ &\vdots \\ &\leq k^n s_\lambda(x, x, Tx) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $n \to \infty$ şeklinde limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty} s_\lambda(T^n x, T^n x, T^{n+1}x) = 0$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}
s_\lambda(T^n x, T^n x, T^m x) \leq & 2\sum_{i=n}^{m-2} s_{\frac{\lambda}{m-n}}(T^i x, T^i x, T^{i+1}x) + s_{\frac{\lambda}{m-n}}(T^{m-1}x, T^{m-1}x, T^m x) \\
\leq & 2\sum_{i=n}^{m-2} k^i s_{\frac{\lambda}{m-n}}(x, x, Tx) + k^{m-1} s_{\frac{\lambda}{m-n}}(x, x, Tx) \\
\leq & 2\sum_{i=n}^{m-2} k^i s_{\frac{\lambda}{m-n}}(x, x, Tx) + 2k^{m-1} s_{\frac{\lambda}{m-n}}(x, x, Tx) \\
\leq & \frac{2k^n}{1-k} s_{\frac{\lambda}{m-n}}(x, x, Tx) \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\{T^n x\}$ bir Cauchy dizisidir. X_s^* ın s-tam olmasından dolayı $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$ olacak şekilde bir $u \in X_s^*$ vardır. T nin sürekliliğinden

$$u = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = \lim_{n\to\infty} T(T^n x) = Tu$$

elde ederiz. Böylece u, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $x = Tx$ ve $y = Ty$ olacak şekilde $x, y \in X_s^*$ noktaları var olsun. Buradan

$$s_\lambda(x, x, y) = s_\lambda(Tx, Tx, Ty) \leq k s_\lambda(x, x, y)$$

elde edilir. Böylece $s_\lambda(x, x, y) = 0$ dır. ■

$\mathcal{M}$, $M : (\mathbb{R}^+)^5 \to \mathbb{R}^+$ şeklindeki tüm sürekli ve artan fonksiyonların bir ailesi olsun. Bir $k \in [0, 1)$ için aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım:

$(C1)$ Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için $z \leq 2x + y$ olmak üzere $y \leq M(x, x, 0, z, y)$ ise $y \leq kx$ dir.

$(C2)$ Her $y \in \mathbb{R}^+$ için $y \leq M(y, 0, y, y, 0)$ ise $y = 0$ dır.

Teorem 3.2.5. (X, s) bir s-tam modüler S-metrik uzay olsun. $T : X_s^* \to X_s^*$ dönüşümü her $x, y, z \in X_s^*$ ve bir $M \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}
s_\lambda(Tx, Tx, Ty) \leq M(&s_\lambda(x, x, y), s_\lambda(Tx, Tx, x), s_\lambda(Tx, Tx, y), s_{3\lambda}(Ty, Ty, x), \\
&s_\lambda(Ty, Ty, y))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

şartını sağlasın. $s_\lambda(x, x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_s^*$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda

(1) M, $(C1)$ durumunu sağlıyorsa T nin bir sabit noktası vardır.

(2) M, $(C2)$ durumunu sağlıyorsa ve T nin bir sabit noktası varsa bu sabit nokta tektir.

İspat: **(1)** Her $x_0 \in X_s^*$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ tanımlansın. (3.11) ve Lemma 3.2.1 den

$$\begin{aligned}
s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) =& s_\lambda(Tx_n, Tx_n, Tx_{n+1}) \\
\leq& M(s_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}), s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n), s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1}), \\
& s_{3\lambda}(x_{n+2}, x_{n+2}, x_n), s_\lambda(x_{n+2}, x_{n+2}, x_{n+1})) \\
=& M(s_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}), s_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}), 0, s_{3\lambda}(x_n, x_n, x_{n+2}), \\
& s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}))
\end{aligned}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği ve Lemma 3.2.1 den dolayı

$$s_{3\lambda}(x_n, x_n, x_{n+2}) \leq 2s_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}) + s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) \tag{3.12}$$

elde ederiz. (3.12) den $z \leq 2x + y$ dir. M, $(C1)$ i sağladığı için

$$s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) \leq ks_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \cdots \leq k^{n+1}s_\lambda(x_0, x_0, x_1) \tag{3.13}$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sayısı vardır. $n \to \infty$ şeklinde limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} s_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}) = 0$$

elde edilir. Böylece $\lambda > 0$ için $s_\lambda(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

Genelliği bozmaksızın, $\frac{\lambda}{m-n} > 0$ için

$$s_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2(m-n)}$$

olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{2(m-n)}$ sayısının var olduğunu kabul edebiliriz. Böylece her $n < m$ için $(S3)$, Uyarı 3.2.1 ve (3.13) ün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
s_\lambda(x_n, x_n, x_m) \leq& 2s_{\frac{\lambda}{3}}(x_n, x_n, x_{n+1}) + s_{\frac{\lambda}{3}}(x_m, x_m, x_{n+1}) \\
=& 2s_{\frac{\lambda}{3}}(x_n, x_n, x_{n+1}) + s_{\frac{\lambda}{3}}(x_{n+1,}x_{n+1}, x_m) \\
& \vdots \\
\leq& 2(\frac{\varepsilon}{2(m-n)} + \frac{\varepsilon}{2(m-n)} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2(m-n)}) \\
\leq& \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum $\{x_n\}$ nin s-tam X_s^* da s-Cauchy olduğunu gösterir. O halde $\{x_n\}$ bir $x \in X_s^*$ noktasına yakınsaktır.

Şimdi x in T nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. (3.11) i kullanırsak

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx) =& s_\lambda(Tx_n, Tx_n, Tx) \\ \leq& M(s_\lambda(x_n, x_n, x), s_\lambda(Tx_n, Tx_n, x_n), s_\lambda(Tx_n, Tx_n, x), \\ & s_{3\lambda}(Tx, Tx, x_n), s_\lambda(Tx, Tx, x)) \end{aligned}$$

elde ederiz. $M \in \mathcal{M}$ olduğundan Lemma 3.2.2 yi kullanarak ve $n \to \infty$ şeklinde limit alarak

$$s_\lambda(x, x, Tx) \leq M(0, 0, 0, s_{3\lambda}(Tx, Tx, x), s_\lambda(Tx, Tx, x))$$

sonucuna ulaşılır. Uyarı 3.2.1 den

$$s_{3\lambda}(Tx, Tx, x) \leq s_\lambda(Tx, Tx, x)$$

yazabiliriz. Bu durumda eşitsizlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$s_\lambda(x, x, Tx) \leq M(0, 0, 0, s_\lambda(Tx, Tx, x), s_\lambda(Tx, Tx, x)).$$

M, $(C1)$ i sağladığı için $s_\lambda(x, x, Tx) \leq k.0 = 0$ dır. Bu durumda $x = Tx$ dir.
(2) x ve y, T nin iki farklı sabit noktası olsun. $x = y$ olduğunu ispatlayacağız. (3.11) den

$$\begin{aligned} s_\lambda(x, x, y) =& s_\lambda(Tx, Tx, Ty) \\ \leq& M(s_\lambda(x, x, y), s_\lambda(Tx, Tx, x), s_\lambda(Tx, Tx, y), s_{3\lambda}(Ty, Ty, x), \\ & s_\lambda(Ty, Ty, y)) \\ \leq& M(s_\lambda(x, x, y), 0, s_\lambda(x, x, y), s_{3\lambda}(y, y, x), 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Uyarı 3.2.1 ve Lemma 3.2.1 den

$$s_\lambda(x, x, y) \leq M(s_\lambda(x, x, y), 0, s_\lambda(x, x, y), s_\lambda(x, x, y), 0)$$

bulunur. M, $(C2)$ durumunu sağladığı için

$$s_\lambda(x, x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

denkliği ile sabit noktanın tek olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Uyarı 3.2.2. Teorem 3.2.4, Teorem 3.2.5 in bir sonucudur. Bu durum $k \in [0, 1)$ ve $x, y, z, s, t \in \mathbb{R}_+$ için $M(x, y, z, s, t) = k.x$ alınarak elde edilebilir.

Teorem 3.2.5 den aşağıdaki gibi bir sonuç verebiliriz.

Sonuç 3.2.2. (X, s) bir s-tam modüler S-metrik uzay, $T : X_s^* \to X_s^*$ bir dönüşüm olmak üzere bir $a \in [0, \frac{1}{2})$ ve her $x, y \in X_s^*$ için

$$s_\lambda(Tx, Tx, Ty) \le a(s_\lambda(Tx, Tx, x) + s_\lambda(Ty, Ty, y))$$

olsun. $s_\lambda(x, x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_s^*$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Böylece T nin X_s^* da bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $M(x, y, z, s, t) = a(y + t)$ nin $(C1)$ ve $(C2)$ durumlarını sağladığını göstermeliyiz. İlk olarak

$$M(x, x, 0, z, y) = a(x + y)$$

elde ederiz. Böylece $z \le 2x + y$ olmak üzere $y \le M(x, x, 0, z, y)$ ise

$$\begin{aligned} y \le& M(x, x, 0, z, y) = a(x + y) \\ y \le& ax + ay \\ y \le& \frac{a}{1-a}x \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\dfrac{a}{1-a} \in [0, 1)$ olduğundan M, $(C1)$ durumunu sağlar.

$y \le M(y, 0, y, y, 0) = 0$ ise $y = 0$ dır. Bu nedenle M, $(C2)$ yi sağlar.

$$\begin{aligned} s_\lambda(Tx, Tx, Ty) \le& a(s_\lambda(Tx, Tx, x) + s_\lambda(Ty, Ty, y)) \\ =& M(s_\lambda(x, x, y), s_\lambda(Tx, Tx, x), s_\lambda(Tx, Tx, y), s_\lambda(Ty, Ty, x), \\ & s_\lambda(Ty, Ty, y)) \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.2.5 den dolayı T nin X_s^* da bir tek sabit noktası vardır. ■

3.3. Modüler Ultrametrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısma ilk olarak modüler ultrametrik uzay kavramını vererek başlayalım.

Tanım 3.3.1. (X, ω) bir modüler metrik uzay olsun. ω, her $x, y, z \in X$ için

$$\omega_\lambda(x, y) \le \max\{\omega_\lambda(x, z), \omega_\lambda(z, y)\}$$

güçlü üçgen eşitsizliğini sağlıyorsa ω ya X üzerinde bir modüler ultrametrik denir.

Örnek 3.3.1. X pozitif tamsayılardan oluşan tüm dizilerin bir ailesi olsun. X in herhangi iki elemanı $x = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ ve $y = \{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ olmak üzere

$$k(x, y) = \inf\{j : n_j \ne m_j\}$$

tanımlansın. $\omega : (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$\omega_\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{1}{\lambda k(x,y)}, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere (X,ω) bir modüler ultrametrik uzaydır:

$x, y, z \in X$ olsun. $x = y$ veya $y = z$ veya $z = x$ iken

$$\omega_\lambda(x,z) \leq \max\{\omega_\lambda(x,y), \omega_\lambda(y,z)\}$$

ifadesi açıktır. Diğer durumlarda, $x = \{n_j\}_{j=1}^\infty$, $y = \{m_j\}_{j=1}^\infty$, $z = \{p_j\}_{j=1}^\infty$ olmak üzere $j < k(x,y)$ iken $n_j = m_j$ ve $j < k(y,z)$ iken $m_j = p_j$ dir. Buradan

$$j < \min\{k(x,y), k(y,z)\}$$

durumunda $n_j = p_j$ elde edilir. O halde

$$k(x,z) \geq \min\{k(x,y), k(y,z)\}$$

dir. Bu durumda

$$\frac{1}{k(x,z)} \leq \max\{\frac{1}{k(x,y)}, \frac{1}{k(y,z)}\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda k(x,z)} \leq \max\{\frac{1}{\lambda k(x,y)}, \frac{1}{\lambda k(y,z)}\}$$
$$\Rightarrow \omega_\lambda(x,z) \leq \max\{\omega_\lambda(x,y), \omega_\lambda(y,z)\}$$

elde edilir ve güçlü üçgen eşitsizliği sağlanır.

Örnek 3.3.2. $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde λ pozitif bir sayı olmak üzere

$$\omega_\lambda(b,c) = \omega_\lambda(a,d) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\omega_\lambda(a,b) = \omega_\lambda(b,d) = \omega_\lambda(a,c) = \omega_\lambda(c,d) = \frac{2}{\lambda}$$

şeklinde tanımlı $\omega : (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu bir modüler ultrametriktir:

$a, b \in X$ için

$$\omega_\lambda(a,b) \leq \max\{\omega_\lambda(a,c), \omega_\lambda(c,b)\} = \max\{\frac{2}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\} = \frac{2}{\lambda}$$
$$\omega_\lambda(a,b) \leq \max\{\omega_\lambda(a,d), \omega_\lambda(d,b)\} = \max\{\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\} = \frac{2}{\lambda}$$

olduğundan güçlü üçgen eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde X in her elemanı için bu eşitsizlik vardır.

Uyarı 3.3.1. Her modüler ultrametrik uzay bir modüler metrik uzaydır ancak tersi her zaman doğru değildir. Bu durumu açıklayan bir örnek verelim. $\mathbb{R}$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\omega_\lambda(x,y) = \frac{|x-y|}{\lambda}$$

şeklinde tanımlı ω fonksiyonu bir modüler metriktir ancak güçlü üçgen eşitsizliğini sağlamadığı için bir modüler ultrametrik değildir. $x, y, z \in \mathbb{R}$ elemanları için

$$\omega_\lambda(x,y) \leq \max\{\omega_\lambda(x,z), \omega_\lambda(z,y)\}$$

yani

$$\frac{|x-y|}{\lambda} \leq \max\{\frac{|x-z|}{\lambda}, \frac{|z-y|}{\lambda}\}$$

eşitsizliğini ele alalım. Eğer eşitsizliğin sağındaki ifadede yer alan maksimum değer $\frac{|x-z|}{\lambda}$ olursa

$$\frac{|x-y|}{\lambda} \leq \frac{|x-z|}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad y \geq z \text{ veya } 2x - y \leq z$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda güçlü üçgen eşitsizliği tüm x, y, z ler için sağlanmış olmaz. Maksimum değerin $\frac{|z-y|}{\lambda}$ olması durumunda da benzer sonuca ulaşılır.

Tanım 3.3.2. (X, ω) bir modüler ultrametrik uzay olsun. $r > 0$ ve $x \in X_\omega$ için x merkezli r yarıçaplı $B_\omega(x,r)$ açık yuvarı ve $B_\omega[x,r]$ kapalı yuvarı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_\omega(x,r) = \{y \in X_\omega : \omega_\lambda(x,y) < r\},$$

$$B_\omega[x,r] = \{y \in X_\omega : \omega_\lambda(x,y) \leq r\}.$$

Tanım 3.3.3. (X, ω) modüler ultrametrik uzayında iç içe azalan yuvarlar boştan farklı bir kesişime sahipse bu uzaya modüler küresel tam ultrametrik uzay denir.

Örnek 3.3.3. Örnek 3.3.2 de verilen (X, ω) uzayı modüler küresel tam ultrametrik uzaydır. Bu durumu açıklamak için öncelikle tüm açık yuvarları tespit etmeliyiz.

$$B_\omega(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & r \leq \frac{1}{\lambda} \\ \{a,d\}, & \frac{1}{\lambda} < r \leq \frac{2}{\lambda} \\ X, & r > \frac{2}{\lambda} \end{cases} \qquad B_\omega(b,r) = \begin{cases} \{b\}, & r \leq \frac{1}{\lambda} \\ \{b,c\}, & \frac{1}{\lambda} < r \leq \frac{2}{\lambda} \\ X, & r > \frac{2}{\lambda} \end{cases}$$

$$B_\omega(c,r) = \begin{cases} \{c\}, & r \leq \frac{1}{\lambda} \\ \{b,c\}, & \frac{1}{\lambda} < r \leq \frac{2}{\lambda} \\ X, & r > \frac{2}{\lambda} \end{cases} \qquad B_\omega(d,r) = \begin{cases} \{d\}, & r \leq \frac{1}{\lambda} \\ \{a,d\}, & \frac{1}{\lambda} < r \leq \frac{2}{\lambda} \\ X, & r > \frac{2}{\lambda} \end{cases}$$

Buradan (X, ω) daki iç içe azalan yuvarların herbirinin boştan farklı bir kesişime sahip olduğu görülmektedir.

Teorem 3.3.1. (X, ω) bir modüler küresel tam ultrametrik uzay olsun. $\omega_\lambda(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\omega^*$ elemanı verilsin. Eğer $T : X_\omega^* \to X_\omega^*$ birbirinden farklı her $x, y \in X_\omega^*$ için

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) < \max\{\omega_\lambda(x, Tx), \omega_\lambda(x,y), \omega_\lambda(y, Ty)\} \tag{3.14}$$

özelliğine sahip bir dönüşüm ise T nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $B_a = B_\omega[a, \omega_\lambda(a, Ta)]$, a merkezli $\omega_\lambda(a, Ta)$ yarıçaplı kapalı yuvar ve $\mathcal{A}$, her $a \in X_\omega^*$ için bu yuvarların ailesi olsun.

$$B_a \leq B_b \Leftrightarrow B_b \subseteq B_a$$

bağıntısının $\mathcal{A}$ üzerinde bir kısmi sıralama olduğu açıktır.

Şimdi $\mathcal{A}$ nın tam sıralı bir $\mathcal{A}_1$ alt ailesini ele alalım. X_ω^* modüler küresel tam olduğundan

$$\bigcap_{B_a \in \mathcal{A}_1} B_a = B \neq \emptyset$$

elde ederiz.

$b \in B$, $B_a \in \mathcal{A}_1$ ve $x \in B_b$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(x, b) \leq \omega_\lambda(b, Tb) &\leq \max\{\omega_\lambda(b, a), \omega_\lambda(a, Ta), \omega_\lambda(Ta, Tb)\} \\ &= \max\{\omega_\lambda(a, Ta), \omega_\lambda(Ta, Tb)\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Kabul edelim ki $\omega_\lambda(Ta, Tb) \leq \omega_\lambda(a, Ta)$ olsun. Buradan

$$\omega_\lambda(x, b) \leq \omega_\lambda(a, Ta)$$

eşitsizliği vardır. Kabul edelim ki $\omega_\lambda(Ta, Tb) > \omega_\lambda(a, Ta)$ olsun. (3.15) den dolayı

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(x, b) \leq \omega_\lambda(b, Tb) \leq &\omega_\lambda(Ta, Tb) < \max\{\omega_\lambda(a, Ta), \omega_\lambda(a, b), \omega_\lambda(b, Tb)\} \\ &= \max\{\omega_\lambda(a, Ta), \omega_\lambda(b, Tb)\} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\omega_\lambda(b, Tb) \leq \omega_\lambda(a, Ta)$ olduğundan

$$\omega_\lambda(x, b) \leq \omega_\lambda(a, Ta)$$

eşitsizliği vardır ve $\omega_\lambda(b, Tb) > \omega_\lambda(a, Ta)$ ifadesinden $\omega_\lambda(b, Tb) < \omega_\lambda(b, Tb)$ sonucu çıkar. Bu ise bir çelişkidir. $x \in B_b$ için $\omega_\lambda(x, b) \leq \omega_\lambda(a, Ta)$ dır.

$$\omega_\lambda(x, a) \leq \omega_\lambda(a, Ta)$$

olduğundan $x \in B_a$ ve her $B_a \in \mathcal{A}_1$ için $B_b \subseteq B_a$ dır. Böylece B_b, $\mathcal{A}$ ailesi için bir üst sınırdır. Zorn lemmasından, $z \in X_\omega^*$ olmak üzere $\mathcal{A}$ nın bir B_z maksimal elemana sahip olduğunu görürüz.

Şimdi $z = Tz$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $z \neq Tz$ olsun. (3.14) eşitsizliğinden

$$\omega_\lambda(Tz, T(Tz)) < \omega_\lambda(z, Tz)$$

ifadesine ulaşabiliriz. $y \in B_{Tz}$ ise $\omega_\lambda(y, Tz) \leq \omega_\lambda(Tz, T(Tz)) < \omega_\lambda(z, Tz)$ dir. Bu durumda

$$\omega_\lambda(y, z) \leq \max\{\omega_\lambda(y, Tz), \omega_\lambda(Tz, z)\} = \omega_\lambda(Tz, z)$$

elde ederiz. Yani $y \in B_z$ ve $B_{Tz} \subseteq B_z$ dir. Üstelik

$$\omega_\lambda(z, Tz) > \omega_\lambda(Tz, T(Tz))$$

olduğundan $z \notin B_{Tz}$ dir. Sonuç olarak $B_{Tz} \subsetneq B_z$ dir. Fakat bu B_z nin maksimalliği ile çelişir. Bu yüzden $z = Tz$ dir.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Bunun için farklı bir sabit nokta olarak u yu alalım. $u \neq z$ için

$$\omega_\lambda(z, u) = \omega_\lambda(Tz, Tu) < \max\{\omega_\lambda(Tz, z), \omega_\lambda(z, u), \omega_\lambda(u, Tu)\} = \omega_\lambda(z, u)$$

vardır. Bu da bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3.2. (X, ω) bir modüler ultrametrik uzay ve $f, S, T : X^*_\omega \to X^*_\omega$ aşağıdaki özellikleri sağlayan dönüşümler olsun:

(1) $f(X^*_\omega)$ modüler küresel tam,

(2) $x, y \in X^*_\omega$, $x \neq y$ için $\omega_\lambda(Sx, Ty) < \max\{\omega_\lambda(fx, fy), \omega_\lambda(fx, Sx), \omega_\lambda(fy, Ty)\}$,

(3) $fS = Sf,\ fT = Tf,\ ST = TS$,

(4) $S(X^*_\omega) \subseteq f(X^*_\omega),\ T(X^*_\omega) \subseteq f(X^*_\omega)$ dır.

Bu durumda bir $w \in X^*_\omega$ için ya $fw = Sw$ ya da $fw = Tw$ dır.

İspat: $a \in X^*_\omega$ için $B_a = [fa, \max\{\omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fa, Ta)\}]$, fa merkezli $\max\{\omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fa, Ta)\}$ yarıçaplı kapalı yuvarı alınsın. $\mathcal{A}$, her $a \in f(X^*_\omega)$ için tüm yuvarların ailesi olsun. $B_a \leq B_b \Leftrightarrow B_b \subseteq B_a$ bağıntısının $\mathcal{A}$ üzerinde bir kısmi sıralama olduğunu ifade edelim. $\mathcal{A}$ nın tam sıralı bir $\mathcal{A}_1$ alt ailesi için $f(X^*_\omega)$ modüler küresel tam olduğundan

$$\bigcap_{B_a \in A_1} B_a = B \neq \emptyset$$

vardır. $b \in f(X^*_\omega)$ olmak üzere $fb \in B$ ve $B_a \in \mathcal{A}_1$ olsun. Bu durumda $fb \in B_a$ dır ve buradan

$$\omega_\lambda(fb, fa) \leq \max\{\omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fa, Ta)\} \tag{3.16}$$

dır. $a = b$ ise $B_a = B_b$ dir. $a \neq b$ ve $x \in B_b$ olduğunu kabul edelim. (2) koşulu ve (3.16) dan

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x, fb) &\leq \max\{\omega_\lambda(fb, Sb), \omega_\lambda(fb, Tb)\} \\ &\leq \max\{\omega_\lambda(fb, fa), \omega_\lambda(fa, Ta), \omega_\lambda(Ta, Sb), \omega_\lambda(fb, fa), \omega_\lambda(fa, Sa), \\ &\qquad \omega_\lambda(Sa, Tb)\} \\ &< \max\{\omega_\lambda(fb, fa), \omega_\lambda(fa, Ta), \omega_\lambda(fa, Sa), \\ &\qquad \max\{\omega_\lambda(fb, fa), \omega_\lambda(fb, Sb), \omega_\lambda(fa, Ta)\}, \\ &\qquad \max\{\omega_\lambda(fa, fb), \omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fb, Tb)\}\} \\ &= \max\{\omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fa, Ta)\}\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\omega_\lambda(x, fb) < \max\{\omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fa, Ta)\} \tag{3.17}$$

dır. (3.16) ve (3.17) den

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(x, fa) &\leq \max\{\omega_\lambda(x, fb), \omega_\lambda(fb, fa)\} \\ &\leq \max\{\omega_\lambda(fa, Sa), \omega_\lambda(fa, Ta)\}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $x \in B_a$ dır. Herhangi bir $B_a \in \mathcal{A}_1$ için $B_b \subseteq B_a$ dır ve B_b, $\mathcal{A}_1$ ailesi için $\mathcal{A}$ da bir üst sınırdır. Zorn lemmasından $\mathcal{A}$ da bir maksimal eleman vardır. $z \in f(X^*_\omega)$ olmak üzere B_z ile gösterelim. $z = fw$ olacak şekilde bir $w \in X^*_\omega$ elemanı vardır. $fw \neq Sw$ ve $fw \neq Tw$ olduğunu kabul edelim. $fS = Sf$ olduğundan

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(Sfw, TSw) &< \max\{\omega_\lambda(f^2w, fSw), \omega_\lambda(f^2w, Sfw), \omega_\lambda(fSw, TSw)\} \\ &= \omega_\lambda(f^2w, fSw)\end{aligned} \tag{3.18}$$

dır. $fT = Tf$ olduğundan

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(STw, Tfw) &< \max\{\omega_\lambda(fTw, f^2w), \omega_\lambda(fTw, STw), \omega_\lambda(f^2w, Tfw)\} \\ &= \omega_\lambda(f^2w, fTw)\end{aligned} \tag{3.19}$$

dır. $ST = TS$ olduğundan (3.18) ve (3.19) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(Sfw, S^2w) &\leq \max\{\omega_\lambda(Sfw, TSw), \omega_\lambda(TSw, Tfw), \omega_\lambda(Tfw, S^2w)\} \\ &< \max\{\omega_\lambda(f^2w, fSw), \omega_\lambda(f^2w, fTw), \\ &\qquad \max\{\omega_\lambda(fSw, f^2w), \omega_\lambda(fSw, S^2w), \omega_\lambda(f^2w, Tfw)\}\} \\ &= \max\{\omega_\lambda(f^2w, fSw), \omega_\lambda(f^2w, fTw)\}\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.18) ve (3.20) den

$$\max\{\omega_\lambda(Sfw, TSw), \omega_\lambda(Sfw, S^2w)\} < \max\{\omega_\lambda(f^2w, fSw), \omega_\lambda(f^2w, fTw)\} \tag{3.21}$$

eşitsizliği vardır. (3.18) ve (3.19) dan

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(Tfw, T^2w) &\leq \max\{\omega_\lambda(Tfw, TSw), \omega_\lambda(TSw, Sfw), \omega_\lambda(Sfw, T^2w)\} \\ &< \max\{\omega_\lambda(f^2w, fTw), \omega_\lambda(f^2w, fSw), \\ &\qquad \max\{\omega_\lambda(f^2w, fTw), \omega_\lambda(f^2w, Sfw), \omega_\lambda(fTw, T^2w)\}\} \\ &= \max\{\omega_\lambda(f^2w, fTw), \omega_\lambda(f^2w, fSw)\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde ederiz. (3.19) ve (3.22) dan

$$\max\{\omega_\lambda(STw, Tfw), \omega_\lambda(Tfw, T^2w)\} < \max\{\omega_\lambda(f^2w, fTw), \omega_\lambda(f^2w, fSw)\} \tag{3.23}$$

dır. $\max\{\omega_\lambda(f^2w, fTw), \omega_\lambda(f^2w, fSw)\} = \omega_\lambda(f^2w, fSw)$ durumunda (3.21) den $f^2w \notin B_{Sw}$ sonucunu veren

$$\max\{\omega_\lambda(Sfw, TSw), \omega_\lambda(Sfw, S^2w)\} < \omega_\lambda(f^2w, fSw)$$

ifadesi vardır. Böylece $fz \notin B_{Sw}$ dır. Fakat $fz \in B_z$ idi. O halde $B_z \nsubseteq B_{Sw}$ dır. $Sw \in S(X_\omega^*) \subseteq f(X_\omega^*)$ olup bu durum B_z nin $\mathcal{A}$ daki maksimalliği ile çelişir.

$$\max\{\omega_\lambda(f^2w, fTw), \omega_\lambda(f^2w, fSw)\} = \omega_\lambda(f^2w, fTw)$$

ise (3.23) den dolayı $f^2w \notin B_{Tw}$ sonucunu veren

$$\max\{\omega_\lambda(STw, Tfw), \omega_\lambda(Tfw, T^2w)\} < \omega_\lambda(f^2w, fTw)$$

ifadeye ulaşırız. Böylece $fz \notin B_{Tw}$ dır. $fz \in B_z$ olduğundan $B_z \nsubseteq B_{Tw}$ elde ederiz. $Tw \in T(X_\omega^*) \subseteq f(X_\omega^*)$ olduğundan B_z nin $\mathcal{A}$ daki maksimalliği ile çelişir. Sonuç olarak ya $fw = Sw$ dır ya da $fw = Tw$ dır. ■

Önerme 3.3.1. (X, ω) bir modüler küresel tam ultrametrik uzay ve

$$f, T : X_\omega^* \to X_\omega^*,$$

$T(X_\omega^*) \subseteq f(X_\omega^*)$ ve her $x, y \in X_\omega^*$, $x \neq y$ için

$$\omega_\lambda(Tx, Ty) < \max\{\omega_\lambda(fx, fy), \omega_\lambda(fx, Tx), \omega_\lambda(fy, Ty)\} \tag{3.24}$$

özelliklerini sağlayan dönüşümler olsun. Bu durumda $fz = Tz$ olacak şekilde $z \in X_\omega^*$ vardır. Üstelik f ve T, z de tesadüfi (coincidentally) değişmeli ise z, f ve T nin bir tek ortak sabit noktasıdır.

İspat: $B_a = [fa, \omega_\lambda(fa, Ta)]$, fa merkezli $\omega_\lambda(fa, Ta)$ yarıçaplı kapalı yuvarı göstersin ve $\mathcal{A}$, her $a \in X$ için bu yuvarların ailesi olsun. Teorem 3.3.2 deki benzer ispattan bir $z \in X_\omega^*$ için $\mathcal{A}$ nın bir B_z maksimal elemanının olduğunu sonuçlandırırız.

Kabul edelim ki $fz \neq Tz$ olsun. $Tz \in T(X_\omega^*) \subseteq f(X_\omega^*)$ olduğundan $Tz = fw$ olacak şekilde $w \in X_\omega^*$ vardır. $w \neq z$ olduğu açıktır. (3.24) den

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(fw, Tw) =& \omega_\lambda(Tz, Tw) \\ &< \max\{\omega_\lambda(fz, fw), \omega_\lambda(fz, Tz), \omega_\lambda(fw, Tw)\} \\ &= \omega_\lambda(fz, fw) \end{aligned}$$

vardır. Böylece $fz \notin B_w$ ve $B_z \nsubseteq B_w$ dır. Bu B_z nin maksimalliği ile çelişir. Bu yüzden $fz = Tz$ dir.

Diğer yandan f ve T nin z de tesadüfi (coincidentally) değişmeli olduğunu kabul edelim.

$$f^2z = f(fz) = fTz = Tfz = T(Tz) = T^2z$$

dir. $fz \neq z$ olduğunu varsayarsak (3.24) den

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(Tfz, Tz) <& \max\{\omega_\lambda(f^2z, fz), \omega_\lambda(f^2z, Tfz), \omega_\lambda(fz, Tz)\} \\ =& \omega_\lambda(Tfz, Tz) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Bu da bir çelişkidir. Bu nedenle $z = fz = Tz$ dir.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. u farklı bir sabit nokta olsun. $u \neq z$ için

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(z, u) &= \omega_\lambda(Tz, Tu) < \max\{\omega_\lambda(fz, fu), \omega_\lambda(fz, Tz), \omega_\lambda(fu, Tu)\} \\ &= \omega_\lambda(z, u) \end{aligned}$$

vardır. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı sabit nokta tektir. ■

3.4. Modüler b-Metrik Uzaylarla İlgili Elde Edilen Sonuçlar

Burada modüler metrik uzaylar ile b-metrik uzay kavramlarının birleştirilmesiyle oluşan modüler b-metrik uzaylar ve sahip olduğu bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 3.4.1. X boştan farklı bir küme ve $s \geq 1$ bir reel sayı olsun. Her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir $\nu : (0, \infty) \times X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ dönüşümüne modüler b-metrik denir:

(i) Her $\lambda > 0$ için $\nu_\lambda(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

(ii) Her $\lambda > 0$ için $\nu_\lambda(x,y) = \nu_\lambda(y,x)$,

(iii) Her $\lambda, \mu > 0$ için $\nu_{\lambda+\mu}(x,y) \leq s[\nu_\lambda(x,z) + \nu_\mu(z,y)]$.

Böylece (X,ν) ikilisi modüler b-metrik uzay olarak adlandırılır.

Modüler b-metrik uzay kavramı, modüler metrik uzay kavramının bir genelleştirmesi olarak alınabilir.

Örnek 3.4.1. $X = \{2,4,6,\cdots,100\}$ ve X üzerindeki metrik, $\lambda \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$\nu_\lambda(x,y) = \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

şeklinde tanımlansın. (X,ν) ikilisi bir modüler b-metrik uzaydır. (i) ve (ii) nin sağlandığı tanımdan açıktır. (iii) özelliğinin sağlandığı aşağıdaki eşitsizliklerden görülebilir:

$$\begin{aligned}
\nu_{\lambda+\mu}(x,y) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| &\leq \frac{1}{\lambda+\mu}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \frac{1}{\lambda+\mu}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \frac{1}{\mu}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| \\
&= \nu_\lambda(x,z) + \nu_\mu(y,z).
\end{aligned}$$

Her modüler metrik uzay bir modüler b-metrik uzaydır ancak tersi her zaman doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.4.2. $X = [0,\infty)$ kümesi üzerinde tanımlı $\nu : (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$\nu_\lambda(x,y) = \frac{(e^x - e^y)^2}{\lambda}$$

şeklinde verilsin.

$$\begin{aligned}
\nu_{\lambda+\mu}(x,y) = \frac{(e^x - e^y)^2}{\lambda+\mu} &= \frac{(e^x - e^y + e^z - e^z)^2}{\lambda+\mu} \\
&= \frac{(e^x - e^z)^2}{\lambda+\mu} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\lambda+\mu} + \frac{2(e^x - e^z)(e^y - e^z)}{\lambda+\mu} \\
&\leq \frac{(e^x - e^z)^2}{\lambda} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\mu} + \frac{(e^x - e^z)^2}{\lambda} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\mu} \\
&= 2\left[\frac{(e^x - e^z)^2}{\lambda} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\mu}\right] \\
&= 2[\nu_\lambda(x,z) + \nu_\mu(y,z)]
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $s = 2 \geq 1$ olduğundan (X,ν) bir modüler b-metrik uzaydır ancak bir modüler metrik uzay değildir.

Tanım 3.4.2. (X,ν) bir modüler b-metrik uzay olsun. $x,y \in X$ için X üzerinde

$$x \overset{\nu}{\sim} y \;\Leftrightarrow\; \lim_{\lambda\to\infty} \nu_\lambda(x,y) = 0$$

şeklinde tanımlı ikili işlem $\overset{\nu}{\sim}$ bir denklik bağıntısıdır. Bir modüler küme

$$X_\nu = \{y \in X : y \overset{\nu}{\sim} x\}$$

ve

$$X_\nu^* = \{x \in X : \nu_\lambda(x,x_0) < \infty \text{ olacak şekilde } \lambda = \lambda(x) > 0 \text{ vardır } \} \;\; (x_0 \in X)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi ν-Cauchy, ν-yakınsaklık ve ν-tamlık kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 3.4.3. (X,ν) bir modüler b-metrik uzay olsun. X_ν^* da bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin.

- Her $\lambda > 0$ için $n \to \infty$ iken $\nu_\lambda(x_n,x) \to 0$ oluyorsa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $x \in X_\nu^*$ noktasına ν-yakınsaktır denir.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_\nu^*$ dizisinin ν-Cauchy olması için gerek ve yeter koşul her $\epsilon > 0$ için bir $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n,m \geq n(\epsilon)$ ve $\lambda > 0$ için $\nu_\lambda(x_n,x_m) < \epsilon$ dur.
- X_ν^* daki her ν-Cauchy ν-yakınsak ve limiti X_ν^* da ise X_ν^* modüler b-metrik uzayına ν-tamdır denir.

Tanım 3.4.4. (X,ν) bir modüler b-metrik uzay ve $T : X_\nu^* \longrightarrow X_\nu^*$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X_\nu^*$ ve her $\lambda > 0$ için

$$\nu_\lambda(Tx,Ty) \leq k\nu_\lambda(x,y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ sayısı varsa T dönüşümüne bir ν-büzülme denir.

Aşağıdaki teorem, modüler b-metrik uzayda Banach büzülme prensibini ifade eder.

Teorem 3.4.1. (X,ν) bir tam modüler b-metrik uzay ve $T : X_\nu^* \longrightarrow X_\nu^*$ dönüşümü $s \geq 1$, $k \in [0,1)$ ve $sk < 1$ olmak üzere bir ν-büzülme olsun. $\nu_\lambda(x,Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\nu^*$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\} \to \bar{x}$ dir ve $\bar{x}$, T nin bir tek sabit noktasıdır.

İspat: $x_0 \in X_\nu^*$ olsun. X_ν^* da bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. T, ν-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\nu_\lambda(T^2x_0, T^2x_1) \leq k\nu_\lambda(Tx_0, Tx_1) \leq k^2\nu_\lambda(x_0, x_1)$$

elde ederiz. Bu işlem ardışık olarak tekrarlanırsa

$$\nu_\lambda(T^nx_0, T^nx_1) \leq k^n\nu_\lambda(x_0, x_1)$$

sonucuna ulaşırız.

Şimdi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin X_ν^* da bir ν-Cauchy olduğunu gösterelim. $m > n$ ve $m, n > 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizler vardır.

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(x_n, x_m) \leq & s\nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) + s^2\nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + s^{m-n}\nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{m-1}, x_m) \\ \leq & sk^n\nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) + s^2k^{n+1}\nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) + \ldots + s^{m-n}k^{m-1}\nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) \\ = & \nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1)sk^n[1 + sk + (sk)^2 + \ldots + (sk)^{m-n-1}]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

(3.25) denkleminde $n, m \to \infty$ şeklinde limite geçilirse

$$\lim_{n,m\to\infty} \nu_\lambda(x_n, x_m) = 0$$

elde ederiz. Böylece $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X_ν^* da bir ν-Cauchy dizisidir.

X_ν^*, ν-tam olduğundan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{x} \in X_\nu^*$ elemanına ν-yakınsaktır.

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(T\bar{x}, \bar{x}) &\leq s[\nu_{\frac{\lambda}{2}}(T\bar{x}, x_n) + \nu_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, \bar{x})] \\ &\leq s[k\nu_{\frac{\lambda}{2}}(\bar{x}, x_{n-1}) + \nu_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, \bar{x})] \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

ifadelerinden dolayı $T\bar{x} = \bar{x}$ dir ve $\bar{x}$, T nin sabit noktasıdır.

Son olarak $\bar{x}$ nin T nin bir tek sabit noktası olduğunu göstermek kaldı. Kabul edelim ki y, T nin $\bar{x}$ den farklı bir sabit noktası olsun. O halde $Ty = y$ dir.

$$\nu_\lambda(\bar{x}, y) = \nu_\lambda(T\bar{x}, Ty) \leq k\nu_\lambda(\bar{x}, y)$$

olduğundan

$$(1-k)\nu_\lambda(\bar{x}, y) \leq 0 \;\Rightarrow\; \nu_\lambda(\bar{x}, y) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = y$$

sonucuna ulaşırız. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi Teorem 3.4.1 e bir örnek verelim.

Örnek 3.4.3. $X = [0,1]$, $\nu_\lambda(x,y) = \frac{|x-y|}{\lambda}$ ve $T : X \to X$ dönüşümü $Tx = \frac{x^2}{16}$ şeklinde tanımlanmış olmak üzere (X,ν) bir tam modüler b-metrik uzaydır çünkü

$$\begin{aligned}\nu_{\lambda+\mu}(x,y) = \frac{|x-y|}{\lambda+\mu} &\leq \frac{|x-z|}{\lambda+\mu} + \frac{|y-z|}{\lambda+\mu} \\ &\leq \frac{|x-z|}{\lambda} + \frac{|y-z|}{\mu} \\ &= \nu_\lambda(x,z) + \nu_\mu(y,z)\end{aligned}$$

ve $s = 1$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(Tx,Ty) &= \nu_\lambda\left(\frac{x^2}{16}, \frac{y^2}{16}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\frac{1}{16}|x^2-y^2| \\ &= \frac{1}{16\lambda}|x-y||x+y| \\ &\leq \frac{1}{16\lambda}|x-y|.2 \\ &= \frac{1}{8\lambda}|x-y| \\ &= \frac{1}{8}\nu_\lambda(x,y)\end{aligned}$$

olduğundan T, ν-büzülmedir. Bu eşitsizlikten $k = \frac{1}{8}$ olup Teorem 3.4.1 in ifadesindeki $sk = \frac{1}{8} < 1$ koşulu sağlanır. O halde 0, T nin bir tek sabit noktasıdır.

Bundan sonra vereceğimiz iki teorem de Teorem 3.4.1 in birer genelleştirmesi olacaktır.

Teorem 3.4.2. (X,ν) bir tam modüler b-metrik uzay ve $T : X_\nu^* \longrightarrow X_\nu^*$, her $x, y \in X_\nu^*$ için

$$\nu_\lambda(Tx,Ty) \leq \alpha[\nu_\lambda(x,Tx) + \nu_\lambda(y,Ty)] \tag{3.26}$$

olacak şekilde $s\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ve $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ kısıtlamalarına sahip bir dönüşüm olsun. $\nu_\lambda(x,Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\nu^*$ elemanı var olsun. Bu durumda $\{x_n\} \to \overline{x}$ dir ve $\overline{x}$, T nin bir tek sabit noktasıdır.

İspat: $x_0 \in X_\nu^*$ elemanını seçelim. X_ν^* da bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, \cdots$$

şeklinde tanımlanırsa, (3.26) dan dolayı

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= \nu_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha[\nu_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \nu_\lambda(x_n, x_{n+1})]\end{aligned}$$

ve

$$\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\nu_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$

elde ederiz. Yukarıda kullanılan yöntemle şu sonuca ulaşırız:

$$\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \nu_\lambda(x_0, x_1). \tag{3.27}$$

$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $\frac{\alpha}{1-\alpha} \in [0,1)$ elde edilir. Böylece T bir ν-büzülmedir. (3.27) eşitsizliğinden

$$\nu_\lambda(x_n, x_m) \leq s\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \frac{1-\left(\frac{s\alpha}{1-\alpha}\right)^{m-n}}{1-\frac{s\alpha}{1-\alpha}} \nu_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1)$$

elde ederiz. $n, m \to \infty$ şeklinde limite geçersek $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nin bir ν-Cauchy ve dolayısıyla ν-yakınsak olduğunu görürüz. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\overline{x} \in X_\nu^*$ elemanına yakınsak olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) &\leq s[\nu_\lambda(\overline{x}, x_n) + \nu_\lambda(x_n, T\overline{x})] \\
&\leq s\nu_\lambda(\overline{x}, x_n) + s\alpha[\nu_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x})] \\
&\leq \frac{s}{1-s\alpha}\nu_\lambda(\overline{x}, x_n) + \frac{s\alpha}{1-s\alpha}\nu_\lambda(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. $n \to \infty$ şeklinde limite geçildiğinde

$$\lim_{n\to\infty} \nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) = 0$$

elde edildiği için $\overline{x} = T\overline{x}$ dir.

Şimdi $\overline{x}$ nin tekliğini göstermeliyiz. $v \neq \overline{x}$, T nin başka bir sabit noktası ise

$$\begin{aligned}
0 < \nu_\lambda(\overline{x}, v) = \nu_\lambda(T\overline{x}, Tv) &\leq \alpha[\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) + \nu_\lambda(v, Tv)] \\
&= \alpha[\nu_\lambda(\overline{x}, \overline{x}) + \nu_\lambda(v, v)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bir çelişkiye ulaşırız. Bu durumda T nin başka bir sabit noktası yoktur. ■

Teorem 3.4.3. (X, ν) bir tam modüler b-metrik uzay ve $T : X_\nu^* \longrightarrow X_\nu^*$, her $x, y \in X_\nu^*$ için

$$\nu_\lambda(Tx, Ty) \leq k[\nu_\lambda(x, Ty) + \nu_\lambda(y, Tx)] \tag{3.28}$$

olacak şekildeki $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayıları için $sk \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ özelliğine sahip bir dönüşüm olsun. $\nu_\lambda(x, Tx)$ sonlu olacak şekilde bir $x = x(\lambda) \in X_\nu^*$ elemanı var olsun. Bu durumda $\{x_n\} \to \overline{x}$ olup $\overline{x}$, T nin bir tek sabit noktasıdır.

İspat: $x_0 \in X_\nu^*$ olmak üzere X_ν^* da bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, n = 1, 2, \cdots$$

şeklinde tanımlansın. (3.28) eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) = \nu_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) &\leq k[\nu_\lambda(x_{n-1}, Tx_n) + \nu_\lambda(x_n, Tx_{n-1})] \\ &= k[\nu_\lambda(x_{n-1}, x_{n+1}) + \nu_\lambda(x_n, x_n)] \\ &\leq sk[\nu_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \nu_\lambda(x_n, x_{n+1})]\end{aligned}$$

elde ettiğimiz için

$$\nu_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{sk}{1-sk}\nu_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece T bir ν-büzülmedir çünkü $sk \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ dir ve $\frac{sk}{1-sk} \in [0, 1)$ dir. Teorem 3.4.1 ve Teorem 3.4.2 nin ispatlarında uygulanan metotlara benzer şekilde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir ν-Cauchy ve dolayısıyla yakınsak olduğunu görmek mümkündür.

$\overline{x} \in X_\nu^*$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsadığı nokta olsun. $\overline{x}$ nin, T nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) &\leq s[\nu_\lambda(\overline{x}, x_{n+1}) + \nu_\lambda(x_{n+1}, T\overline{x})] \\ &= s\nu_\lambda(\overline{x}, x_{n+1}) + s\nu_\lambda(Tx_n, T\overline{x}) \\ &\leq s\nu_\lambda(\overline{x}, x_{n+1}) + sk[\nu_\lambda(\overline{x}, Tx_n) + \nu_\lambda(x_n, T\overline{x})]\end{aligned}$$

eşitsizliklerinden

$$\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) \leq s\nu_\lambda(\overline{x}, x_{n+1}) + sk\nu_\lambda(\overline{x}, x_{n+1}) + sk\nu_\lambda(x_n, T\overline{x})$$

elde ederiz. $n \to \infty$ şeklinde limite geçilirse

$$\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) \leq sk\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) \tag{3.29}$$

bulunur. $\nu_\lambda(\overline{x}, T\overline{x}) \neq 0$ ise (3.29) eşitsizliği yanlıştır. Sonuç olarak $\overline{x} = T\overline{x}$ dir.

$\overline{x}$ nin T nin bir tek sabit noktası olduğunu göstermek amacıyla y nin T nin bir başka sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\nu_\lambda(\overline{x}, y) = \nu_\lambda(T\overline{x}, Ty) \leq k[\nu_\lambda(\overline{x}, Ty) + \nu_\lambda(y, T\overline{x})]$$

olup buradan $\nu_\lambda(\overline{x}, y) \leq 2k\nu_\lambda(\overline{x}, y)$ sonucuna ulaşırız. Bu ise $y = \overline{x}$ demektir ve böylece ispat tamamlanır. ■

3.4.1. Lineer denklem sistemleri üzerine bir uygulama

Burada amacımız, Teorem 3.4.1 i kullanarak bir lineer denklem sisteminin çözümünü bulmaktır. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 3.4.4. $X = \mathbb{R}^n$, $x, y \in X$ ve

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

olmak üzere X üzerinde tanımlı modüler b-metrik

$$\nu_\lambda(x,y) = \frac{d(x,y)}{\lambda}$$

olsun. $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}| \leq \alpha < 1$$

ise n bilinmeyenli n tane lineer denklemden oluşan

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n = v_1 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n = v_2 \\ \vdots \\ u_{n1}x_1 + u_{n2}x_2 + \ldots + u_{nn}x_n = v_n \end{cases} \tag{3.30}$$

lineer denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

İspat: (X, ν) bir tam modüler b-metrik uzay olduğu için, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ve

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$T(x) = Ax + v$$

şeklinde tanımlı $T : X \to X$ dönüşümünün bir ν-büzülme olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanları için

$$\begin{aligned}
\nu_\lambda(Tx, Ty) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(x_j - y_j)\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|u_{ij}||x_j - y_j| \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|u_{ij}||x_j - y_j| \\
&\leq \frac{\alpha}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j| \\
&= \alpha\frac{d(x,y)}{\lambda} \\
&= \alpha\nu_\lambda(x,y)
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinden dolayı T bir ν-büzülme dönüşümüdür. Teorem 3.4.1 den dolayı (3.30) daki lineer denklem sisteminin bir tek çözümü vardır. ■

3.5. C*-Cebir-Değerli S-Metrik Uzaylar

Bu kısımda, C*-cebir-değerli S-metrik uzaylarda elde ettiğimiz sabit nokta sonuçlarını vereceğiz.

Tanım 3.5.1. X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{A}$ bir C*-cebir olsun. $S : X \times X \times X \to \mathbb{A}$ dönüşümü her $x, y, z, a \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $S(x, y, z) \succeq \theta$,

(ii) $S(x, y, z) = \theta \;\Leftrightarrow\; x = y = z$,

(iii) $S(x, y, z) \preceq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$.

Bu durumda S ye, C*-cebir-değerli S-metrik ve $(X, \mathbb{A}, S)$ ye C*-cebir-değerli S-metrik uzay denir.

Örnek 3.5.1. $X = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{A} = M_2(\mathbb{R})$, toplama, skaler çarpım ve matris çarpımı özelliklerine sahip 2×2-tipindeki tüm reel değerli matrislerin oluşturduğu küme olsun. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{A}$ olmak üzere

$$\|A\| = (\sum_{i,j=1}^{2}|a_{i,j}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ifadesinin $\mathbb{A}$ üzerinde bir norm tanımladığı açıktır. $* : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dönüşümü $\mathbb{A}$ üzerinde $A^* = A$ şeklinde bir üs alma işlemi tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{A}$ bir C*-cebirdir [69]. $\mathbb{A}$ kümesindeki herhangi iki $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrisi için bir kısmi sıralama aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$A \preceq B \quad \Leftrightarrow \quad (a_{ij} - b_{ij}) \leq 0, \;\; i, j = 1, 2.$$

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir metrik ve $S : X^3 \to \mathbb{A}$ dönüşümü

$$S(x,y,z) = \begin{bmatrix} d(x,z)+d(y,z) & 0 \\ 0 & d(x,z)+d(y,z) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzaydır.

Lemma 3.5.1. Bir $(X, \mathbb{A}, S)$ C*-cebir-değerli S-metrik uzayında

$$S(x,x,y) = S(y,y,x)$$

eşitliği vardır.

İspat: C*-cebir-değerli S-metrik tanımındaki (iii) koşulundan dolayı

$$S(x,x,y) \preceq S(x,x,x) + S(x,x,x) + S(y,y,x) = S(y,y,x)$$

ve

$$S(y,y,x) \preceq S(y,y,y) + S(y,y,y) + S(x,x,y) = S(x,x,y)$$

elde ederiz. Böylece $S(x,x,y) = S(y,y,x)$ dir. ■

Tanım 3.5.2. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay olsun. X de bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin.

(i) $\{x_n\}$ dizisi $\mathbb{A}$ ya göre $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $n \to \infty$ iken $S(x_n, x_n, x) \to \theta$ dır.

(ii) Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n, m \succeq N$ için $\|S(x_n, x_n, x_m)\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine $\mathbb{A}$ ya göre bir Cauchy dizisi denir.

(iii) X deki her Cauchy dizisi $\mathbb{A}$ ya göre yakınsak ise $(X, \mathbb{A}, S)$ ye tam C*-cebir-değerli S-metrik uzay denir.

Örnek 3.5.2. $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $X = \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı C*-cebir-değerli S-metrik $S(x,y,z) = (|x-z| + |y-z|, 0)$ olsun. $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ bir Cauchy dizisidir çünkü

$$S(x_n, x_n, x_m) = (2|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|, 0) \leq (2\big(|\frac{1}{n}| + |\frac{1}{m}|\big), 0) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$$

dır. Ayrıca,

$$S(x_n, x_n, 0) = (2|\frac{1}{n}|, 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$$

olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $0 \in X$ noktasına yakınsar.

Tanım 3.5.3. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$S(Tx, Tx, Ty) \preceq A^* S(x,x,y) A \tag{3.31}$$

olacak şekilde $\|A\| < 1$ özelliğine sahip bir $A \in \mathbb{A}$ varsa T ye C*-cebir-değerli büzülme dönüşümü denir.

Örnek 3.5.3. $X = [0,1]$, $\mathbb{A} = M_2(\mathbb{R})$ ve a_i ler A matrisinin girdileri olmak üzere $\|A\| = \max\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ olsun.

$$S(x,y,z) = \begin{bmatrix} |x-z|+|y-z| & 0 \\ 0 & |x-z|+|y-z| \end{bmatrix}$$

ve $\mathbb{A}$ üzerindeki kısmi sıralama

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geq b_i, \text{ for } i = 1,2,3,4$$

olmak üzere $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzaydır. $T : X \to X$ dönüşümü $T(x) = \frac{x}{4}$ şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned}
S(Tx,Tx,Ty) &= S(\frac{x}{4}, \frac{x}{4}, \frac{y}{4}) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|x-y| & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}|x-y| \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x-y| & 0 \\ 0 & |x-y| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&\preceq \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2|x-y| & 0 \\ 0 & 2|x-y| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= A^* S(x,x,y) A
\end{aligned}$$

olmak üzere $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ alırsak $\|A\| < 1$ olduğundan T bir C*-cebir-değerli büzülme dönüşümüdür.

Aşağıdaki teorem, Banach büzülme prensibinin C*-cebir-değerli S-metrik uzaylardaki versiyonudur.

Teorem 3.5.1. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir tam C*-cebir-değerli S-metrik uzay ve $T : X \to X$ bir C*-cebir-değerli büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat: İlk olarak sabit noktanın varlığını ispatlayalım. Bunun için bir $x \in X$ elemanı seçelim ve $\{T^n x\}$ in $\mathbb{A}$ ya göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Tümevarımı kullanarak $n = 0, 1, \ldots$ için aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
S(x_n, x_n, x_{n+1}) &= S(T^n x, T^n x, T^{n+1} x) \\
&\preceq A^* S(T^{n-1} x, T^{n-1} x, T^n x) A \\
&\preceq (A^*)^2 S(T^{n-2} x, T^{n-2} x, T^{n-1} x) A^2 \\
&\vdots \\
&\preceq (A^*)^n S(x, x, Tx) A^n.
\end{aligned}$$

$m > n$ için

$$\begin{aligned}
S(x_n, x_n, x_m) &= S(T^n x, T^n x, T^m x) \\
&\preceq 2 \sum_{i=n}^{m-2} S(T^i x, T^i x, T^{i+1} x) + S(T^{m-1} x, T^{m-1} x, T^m x) \\
&\preceq 2 \sum_{i=n}^{m-2} (A^*)^i S(x, x, Tx) A^i + (A^*)^{m-1} S(x, x, Tx) A^{m-1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|S(x_n, x_n, x_m)\| &\leq 2 \sum_{i=n}^{m-2} \|A^*\|^i \|S(x, x, Tx)\| \|A\|^i + \|A^*\|^{m-1} \|S(x, x, Tx)\| \|A\|^{m-1} \\
&= 2\|S(x, x, Tx)\| \sum_{i=n}^{m-2} \|A\|^{2i} + \|A\|^{2m-2} \|S(x, x, Tx)\| \\
&\leq 2\|S(x, x, Tx)\| \frac{\|A\|^{2n}}{1 - \|A\|} + \|S(x, x, Tx)\| \|A\|^{2m-2} \qquad \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

ifadeleri vardır. Bu durumda $\{T^n(x)\}$, $\mathbb{A}$ ya göre bir Cauchy dizisidir. $(X, \mathbb{A}, S)$ uzayının tamlığından dolayı $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0$ şeklinde bir $x_0 \in X$ elemanı vardır.

$$\begin{aligned}
\theta &\preceq S(Tx_0, Tx_0, x_0) \\
&\preceq S(Tx_0, Tx_0, Tx_n) + S(Tx_0, Tx_0, Tx_n) + S(x_0, x_0, x_n) \\
&\preceq A^* S(x_0, x_0, x_n) A + A^* S(x_0, x_0, x_n) A + S(x_0, x_0, x_n) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta
\end{aligned}$$

olduğundan $Tx_0 = x_0$ olup x_0 noktası, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $u = Tu$ ve $v = Tv$ şeklinde iki farklı $u, v \in X$ elemanı var olsun. T, C*-cebir-değerli büzülme dönüşümü olduğundan

$$S(u, u, v) = S(Tu, Tu, Tv) \preceq A^* S(u, u, v) A$$

elde ederiz. Diğer yandan, $\|A\| < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|S(u,u,v)\| &= \|S(Tu,Tu,Tv)\| \\ &\leq \|A^*S(u,u,v)A\| \\ &\leq \|A^*\|\|S(u,u,v)\|\|A\| \\ &= \|A\|^2\|S(u,u,v)\| \\ &< \|S(u,u,v)\|\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Fakat bu durumda ortaya bir çelişki çıktığı için $S(u,u,v) = \theta$ yani $u = v$ olmalıdır. Sonuç olarak sabit nokta tektir. ■

Örnek 3.5.4. X, $\mathbb{A}$, S ve T, Örnek 3.5.3 deki gibi tanımlansın. T, Teorem 3.5.1 in tüm koşullarını sağlar. O halde 0, T nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 3.5.4. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay ve $F : X \times X \to X$ bir dönüşüm olsun. $F(x,y) = x$ ve $F(y,x) = y$ eşitlikleri varsa $(x,y) \in X \times X$ elemanına F nin ikili sabit noktası denir.

Tanım 3.5.5. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay, $F : X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ birer dönüşüm olsun. $F(x,y) = gx$ ve $F(y,x) = gy$ eşitlikleri varsa $(x,y) \in X \times X$ elemanına F nin ikili çakışık noktası denir.

Tanım 3.5.6. [2]. X boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y \in X$ için $F : X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ dönüşümleri $gF(x,y) = F(gx, gy)$ eşitliğini sağlıyorsa F ile g ye L-koşulunu sağlar denir.

Tanım 3.5.7. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay olsun. $F : X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ dönüşümleri $\|A\| < 1$ olmak üzere her $x, y, z, w, u, v \in X$ için $\mathbb{A}$ ya göre

$$S(F(x,y), F(x,y), F(z,w)) \preceq kA^*[S(gx,gx,gz) + S(gy,gy,gw)]A \tag{3.32}$$

özelliğine sahip ise F ve g ye k-büzülmeyi sağlar denir.

Lemma 3.5.2. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay olsun. $F : X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ dönüşümleri $k \in (0, \frac{1}{2})$ için k-büzülmeyi sağlasın. (x,y), F ve g dönüşümlerinin ikili çakışık noktası ise

$$F(x,y) = gx = gy = F(y,x)$$

eşitlikleri vardır.

İspat: (x,y), F ve g dönüşümlerinin ikili çakışık noktası olduğundan $gx = F(x,y)$ ve $gy = F(y,x)$ eşitlikleri vardır. Kabul edelim ki $gx \neq gy$ olsun. Bu durumda (3.32) ve Lemma 3.5.1 den dolayı

$$\begin{aligned} S(gx,gx,gy) &= S(F(x,y),F(x,y),F(y,x)) \\ &\preceq kA^*[S(gx,gx,gy)+S(gy,gy,gx)]A \\ &= 2kA^*S(gx,gx,gy)A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|S(gx,gx,gy)\| &\leq 2k\|A\|^2\|S(gx,gx,gy)\| \\ &< \|S(gx,gx,gy)\| \end{aligned}$$

elde ederiz. Son ifadede oluşan çelişkiden dolayı

$$gx = gy \quad \text{ve} \quad F(x,y) = gx = gy = F(y,x)$$

eşitliklerine ulaşılır. ■

Teorem 3.5.2. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay ve $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Kabul edelim ki $F : X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ dönüşümleri $k \in (0, \frac{1}{2})$ için k-büzülmeyi ve L-koşulunu sağlasın. $g(X)$, $F(X \times X) \subset g(X)$ olacak şekilde bir kapalı bölgede sürekli ise $gx = F(x,x) = x$ olacak şekilde X de bir tek x noktası vardır.

İspat: $x_0, y_0 \in X$ olsun. $F(X \times X) \subseteq g(X)$ olduğundan x_1, y_1 elemanlarını aşağıdaki gibi seçebiliriz:

$$gx_1 = F(x_0,y_0) \quad \text{ve} \quad gy_1 = F(y_0,x_0).$$

(x_1,y_1) ikilisinden başlayarak X de $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri

$$gx_{n+1} = F(x_n,y_n) \quad \text{ve} \quad gy_{n+1} = F(y_n,x_n)$$

şeklinde oluşturulabilir. (3.32) eşitsizliğinden dolayı $n \in \mathbb{N}$ için

$$S(gx_{n-1},gx_{n-1},gx_n) \preceq kA^*[S(gx_{n-2},gx_{n-2},gx_{n-1}) + S(gy_{n-2},gy_{n-2},gy_{n-1})]A \tag{3.33}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer yandan

$$\begin{aligned} S(gy_{n-1},gy_{n-1},gy_n) \preceq& kA^*[S(gy_{n-2},gy_{n-2},gy_{n-1}) \\ &+ S(gx_{n-2},gx_{n-2},gx_{n-1})]A \end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.33) ve (3.34) ifadelerini taraf tarafa toplarsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} S(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gx_n) + S(gy_{n-1}, gy_{n-1}, gy_n) \preceq & 2kA^*[S(gx_{n-2}, gx_{n-2}, gx_{n-1}) \\ & + S(gy_{n-2}, gy_{n-2}, gy_{n-1})]A \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. (3.32) eşitsizliği ardışık olarak uygulanırsa

$$\begin{aligned} S(gx_n, gx_n, gx_{n+1}) &\preceq 2k^2(A^*)^2[S(gx_{n-2}, gx_{n-2}, gx_{n-1}) + S(gy_{n-2}, gy_{n-2}, gy_{n-1})]A^2 \\ &\vdots \\ &\preceq \frac{1}{2}k^n(\sqrt{2}A^*)^n[S(gx_0, gx_0, gx_1) + S(gy_0, gy_0, gy_1)](\sqrt{2}A)^n \end{aligned}$$

bulunur. C*-cebir-değerli S-metrik uzay tanımından ve Lemma 3.5.1 den $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n + 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S(gx_n, gx_n, gx_m) &\preceq 2\sum_{i=n}^{m-2} S(gx_i, gx_i, gx_{i+1}) + S(gx_{m-1}, gx_{m-1}, gx_m) \\ &\preceq 2\sum_{i=n}^{m-2} \frac{1}{2}k^i(\sqrt{2}A^*)^i[S(gx_0, gx_0, gx_1) + S(gy_0, gy_0, gy_1)](\sqrt{2}A)^i \\ &+ \frac{1}{2}k^{m-1}(\sqrt{2}A^*)^{m-1}[S(gx_0, gx_0, gx_1) + S(gy_0, gy_0, gy_1)](\sqrt{2}A)^{m-1} \end{aligned}$$

elde eder ve böylece

$$\begin{aligned} \|S(gx_n, gx_n, gx_m)\| \leq & \sum_{i=n}^{m-2} k^i\|\sqrt{2}A\|^{2i}\|S(gx_0, gx_0, gx_1) + S(gy_0, gy_0, gy_1)\| \\ & + \frac{1}{2}k^{m-1}\|\sqrt{2}A\|^{2m-2}\|S(gx_0, gx_0, gx_1) + S(gy_0, gy_0, gy_1)\| \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Son eşitsizlikte $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğundan $n, m \to \infty$ şeklindeki limit durumunda $\|S(gx_n, gx_n, gx_m)\| \to 0$ bulunur. Böylece $\{gx_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Benzer şekilde $\{gy_n\}$ de bir Cauchy dizisidir. $g(X)$ in kapalılığından dolayı $\{gx_n\}$ ve $\{gy_n\}$, sırasıyla $x \in X$ ve $y \in X$ noktalarına yakınsaktır. g sürekli olduğundan $\{g(gx_n)\}$, gx e ve $\{g(gy_n)\}$, gy ye yakınsaktır. F ve g, L-koşulunu sağladığı için

$$g(gx_{n+1}) = g(F(x_n, y_n)) = F(gx_n, gy_n)$$

$$g(gy_{n+1}) = g(F(y_n, x_n)) = F(gy_n, gx_n)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(g(gx_{n+1}), g(gx_{n+1}), F(x, y)) \preceq & kA^*[S(g(gx_n), g(gx_n), gx) \\ & + S(g(gy_n), g(gy_n), gy)]A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|S(g(gx_{n+1}), g(gx_{n+1}), F(x, y))\| \leq & k\|A\|^2\|S(g(gx_n), g(gx_n), gx) \\ & + S(g(gy_n), g(gy_n), gy)\| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Limit durumunda

$$\|S(gx, gx, F(x, y))\| \leq k\|A\|^2\|S(gx, gx, gx) + S(gy, gy, gy)\| = 0$$

olduğundan $gx = F(x, y)$ bulunur. Benzer şekilde $gy = F(y, x)$ eşitliği gösterilebilir. Lemma 3.5.2 den (x, y), F ve g dönüşümlerinin ikili çakışık noktasıdır. Bu durumda $gx = F(x, y) = F(y, x) = gy$ dir.

$$\begin{aligned} S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, gx) &= S(F(x_n, y_n), F(x_n, y_n), F(x, y)) \\ &\preceq kA^*(S(gx_n, gx_n, gx) + S(gy_n, gy_n, gy))A \end{aligned}$$

ve

$$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, gy) \preceq kA^*(S(gy_n, gy_n, gy) + S(gx_n, gx_n, gx))A$$

olduğundan

$$\begin{aligned} S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, gx) + S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, gy) \preceq & 2kA^*[S(gx_n, gx_n, gx) \\ & + S(gy_n, gy_n, gy)]A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, gx) + S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, gy)\| \leq & 2k\|A^*\|\|S(gx_n, gx_n, gx) \\ & + S(gy_n, gy_n, gy)\|\|A\| \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ şeklinde limite geçilirse

$$\begin{aligned} \|S(x, x, gx) + S(y, y, gy)\| &\leq 2k\|A^*\|\|S(x, x, gx) + S(y, y, gy)\|\|A\| \\ &= 2k\|A\|^2\|S(x, x, gx) + S(y, y, gy)\| \end{aligned}$$

bulunur. $2k < 1$ ve $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ifadelerinden dolayı $S(x, x, gx) = 0$ ve $S(y, y, gy) = 0$ dır. O halde $gx = x$ ve $gy = y$ yani $gx = gy = x = y$ dir. Sonuç olarak

$$gx = F(x, x) = x$$

elde edilir.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $z = gz = F(z, z)$ olacak şekilde X de bir $z \neq x$ elemanı var olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(x, x, z) &= S(F(x, x), F(x, x), F(z, z)) \\ &\preceq 2kA^*S(gx, gx, gz)A \\ &= 2kA^*S(x, x, z)A \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $2k < 1$, $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve

$$\|S(x,x,z)\| \leq 2k\|A\|^2\|S(x,x,z)\|$$

olduğundan $S(x,x,z) = 0$ dır yani $x = z$ dir. ■

Teorem 3.5.2 den çıkarılabilecek bir sonuç verelim.

Sonuç 3.5.1. $(X, \mathbb{A}, S)$ bir C*-cebir-değerli S-metrik uzay ve $\|A\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Bir $F : X \times X \to X$ dönüşümü her $x, y, z, u, v, w \in X$ ve $k \in (0, \frac{1}{2})$ için $\mathbb{A}$ ya göre

$$S(F(x,y), F(u,v), F(z,w)) \preceq kA^*[S(x,u,z) + S(y,v,w)]A$$

koşulunu sağlıyorsa $F(x,x) = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ elemanı vardır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, literatürde var olan farklı tipteki metrik uzaylardan hareketle yeni tipte metrik uzaylar tanımlanmış ve bu yeni tipteki metrik uzaylarda çeşitli sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

Tezin birinci bölümü olan giriş bölümünde metrik uzaylar hakkında bilgi verilerek tezin önemi ve amacı belirtilmiştir. Ayrıca Banach sabit nokta teoreminin görüntü analizi üzerine bazı uygulamalarını açıklayarak bu yolla sabit nokta teorisinin oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olduğuna dikkat çekilmeye çalışılmıştır.

İkinci bölümde, tezin konusunu oluşturan farklı tip metrik uzayların tanımları ve bazı temel özellikleri verilmiş ve halihazırda literatürdeki önemli çalışmalar okuyucunun ilgisine sunulmuştur.

Tez çalışmasının orijinal sonuçlarının yer aldığı üçüncü bölümde, modüler metrik uzaylarda tamlık, süreklilik ve büzülme dönüşümü ile ilgili yeni tanımlar verilmiştir. Bu kavramları içeren sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve homotopi üzerine bir uygulama oluşturulmuştur. İlk kez tanımlanan modüler S-metrik uzayların metrik ve topolojik özellikleri incelenmiş ve önemli sabit nokta sonuçlarına ulaşılmıştır. Bölümün devamında, modüler ultrametrik uzaylar literatüre kazandırılmış ve modüler küresel tam ultrametrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca, modüler metrik uzayların bir genelleştirmesi olarak modüler b-metrik uzaylar ve bu uzayların sahip olduğu bazı sabit nokta özellikleri çeşitli örnekler verilerek tanıtılmış ve elde edilen sabit nokta sonuçlarının lineer denklem sistemleri için bir uygulaması verilmiştir. Bölümün sonunda, C*-cebir-değerli S-metrik uzaylar tanımlanmış ve bu uzayda bazı orijinal sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Burada ilk kez verilmiş olan çeşitli metrik uzay tanımları ve bu uzaylarla ilgili metrik ve topolojik özelliklerin, sabit nokta teorisi ile ilgili sunulmuş olan temel teoremlerin ve bunların uygulamalarının, bu alanda çalışmayı düşünen araştırmacılar için faydalı olacağı düşünülmektedir. Bu yeni kavram ve tekniklerin kullanılmasıyla gelecekte bu çalışma alanlarıyla ilgili daha farklı yaklaşımlar ortaya konulabileceği ve literatürün geliştirilebileceği umut edilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Acheson, D. J. Elementary Fluid Dynamics. Clarendon Press, Oxford, New York, 1990, 32-33 s.

[2] Afra, J. M. Fixed point type theorem in S-metric spaces. Middle-East Journal of Scientific Research. 2014, 22(6), 864-869.

[3] Alaca, C., Ege, M. E., Park, C. Fixed point results for modular ultrametric spaces. Journal of Computational Analysis and Applications. 2016, 20(7), 1259-1267.

[4] Alsulami, H. H., Agarwal, R. P., Karapinar, E., Khojasteh, F. A short note on C*-valued contraction mappings. Journal of Inequalities and Applications. 2016, 2016:50, 1-3.

[5] Amann, H. Order structure and fixed points. Atti 2 Seminario Analisi Funzionale Applicazione Universita di Cosenza. 1977, 1-50.

[6] Aydi, H., Bota, M. F., Karapinar, E., Mitrovic, S. A fixed point theorem for set valued quasi-contractions in metric spaces. Fixed Point Theory and Applications. 2012, 2012:88, 1-8.

[7] Azadifar, B., Sadeghi, G., Saadati, R., Park, C. Integral type contractions in modular metric spaces. Journal of Inequalities and Applications. 2013, 2013:483, 1-14.

[8] Azadifar, B., Maramaei, M., Sadeghi, G. Common fixed point theorems in modular G-metric spaces. Journal of Nonlinear Analysis and Application. 2013, 1, 1-9.

[9] Azadifar, B., Maramaei, M., Sadeghi, G. On the modular G-metric spaces and fixed point theorems. Journal of Nonlinear Science and Applications. 2013, 6, 293-304.

[10] Bai, C. Coupled fixed point theorems in C*-algebra-valued b-metric spaces with application. Fixed Point Theory and Applications. 2016, 2016:70, 1-12.

[11] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales. Fundamenta Mathematicae. 1922, 3, 133-181.

[12] Batul, S., Kamran, T. C*-valued contractive type mappings. Fixed Point Theory and Applications. 2015, 2015:142, 1-9.

[13] Boriceanu, M. Fixed point theory for multivalued generalized contraciton on a set with two b-metrics. Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica. 2009, 3, 1-14.

[14] Boyd, D. W., Wong, J. S. On nonlinear contractions. Proceedings of the American Mathematical Society. 1969, 20, 458-464.

[15] Brouwer, L. E. J. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen. 1912, 71(598), 97-115.

[16] Bryant, V. W. A remark on a fixed point for iterated mappings. American Mathematical Monthly. 1968, 75, 399-400.

[17] Chaipunya, P., Cho, Y. J., Kumam, P. Geraghty-type theorems in modular metric spaces with an application to partial differential equation. Advances in Difference Equations. 2012, 2012:83, 1-12.

[18] Chatterjea, S. K. Fixed point theorems. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727-730.

[19] Chistyakov, V. V. Metric modulars and their application. Doklady Akademii Nauk. 2006, 406(2), 165-168.

[20] Chistyakov, V. V. Modular metric spaces generated by F-modulars. Folia Mathematica. 2008, 14, 3-25.

[21] Chistyakov, V. V. Modular metric spaces I. basic concepts. Nonlinear Analysis. 2010, 72, 1-14.

[22] Chistyakov, V. V. Fixed points of modular contractive maps. Doklady Mathematics. 2012, 86, 515-518.

[23] Cho, Y. J., Saadati, R., Sadeghi, G. Quasi-contractive mappings in modular metric spaces. Journal of Applied Mathematics. 2012, 1-5.

[24] Chouhan, P., Malviya, N. A common unique fixed point theorem for expansive type mappings in S-metric spaces. International Mathematical Forum. 2013, 8(26), 1287-1293.

[25] Ciric, L. B. On contraction type mapping. Mathematica Balkanica. 1971, 1, 52-57.

[26] Ciric, L. B. Fixed points for generalized multi-valued contractions. Matematicki Vesnik. 1972, 9(24), 265-272.

[27] Ciric, L. Fixed and periodic points of almost contractive operators. Mathematica Balkanica. 1973, 3, 45-47.

[28] Czerwik, S. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis. 1993, 1, 5-11.

[29] Darbo, G. Punti uniti in transformazioni a condominio non compacto. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. 1955, 24, 84-92.

[30] Edelstein, M. Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces. Proceedings of the American Mathematical Society. 1947, 44, 369-374.

[31] Ege, M. E., Alaca, C. Fixed point results and an application to homotopy in modular metric spaces. Journal of Nonlinear Analysis and Application. 2015, 8(6), 900-908.

[32] Ege, M. E., Alaca, C. Some results for modular b-metric spaces and an application to system of linear equations. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2018, 8(1), 3-14.

[33] Ege, M. E., Alaca, C. Some properties of modular S-metric spaces and its fixed point results. Journal of Computational Analysis and Applications. 2016, 20(1), 24-33.

[34] Ege, M. E., Alaca, C. C*-algebra-valued S-metric spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics. 2018, 66(2), 165-177.

[35] Frechet, M. Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906, 22, 1-74.

[36] Gajic, L. On ultrametric space. Novi Sad Journal of Mathematics. 2001, 31, 69-71.

[37] Gajic, L. A multivalued fixed point theorem in ultrametric spaces. Matematicki Vesnik. 2002, 54, 89-91.

[38] Gupta, A. Cyclic contraction on S-metric space. International Journal of Analysis and Applications. 2013, 3(2), 119-130.

[39] Hardy, G. E., Rogers, T. D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin. 1973, 16, 201-206.

[40] Hieu, N. T., Ly, N. T. T., Dung, N. V. A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces. Thai Journal of Mathematics. 2015, 13(2), 369-380.

[41] Kadelburg, Z., Radenovic, S. Fixed point results in C*-algebra-valued metric spaces are direct consequences of their standard metric counterparts. Fixed Point Theory and Applications. 2016, 2016:53, 1-6.

[42] Kamran, T., Postolache, M., Ghiura, A., Batul, S., Ali, R. The Banach contraction principle in C*-algebra-valued b-metric spaces with application. Fixed Point Theory and Applications. 2016, 2016:10, 1-7.

[43] Kannan, R. Some results on fixed points. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 1968, 10, 71-76.

[44] Kilinc, E., Alaca, C. A fixed point theorem in modular metric spaces. Advances in Fixed Point Theory. 2014, 4(2), 199-206.

[45] Kilinc, E., Alaca, C. Fixed point results for commuting mappings in modular metric spaces. Journal of Applied Functional Analysis. 2015, 10(3-4), 204-210.

[46] Kir, M., Kiziltunc, H. On some well known fixed point theorems in b-metric spaces. Turkish Journal of Analysis and Number Theory. 2013, 1, 13-16.

[47] Kirk, W. A., Shahzad, N. Some fixed point results in ultrametric spaces. Topology and its Applications. 2012, 159, 3327-3334.

[48] Klin-eam, C., Kaskasem, P. Fixed point theorems for cyclic contractions in C*-algebra-valued b-metric spaces. Journal of Function Spaces. 2016, 1-16.

[49] Kneser, H. Eine direkte ableitung des zornschen lemmas aus dem auswahlaxiom. Mathematische Zeitschrift. 1950, 53, 110-113.

[50] Koshi, S., Shimogaki, T. On F-norms of quasi-modular spaces. Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University I. 1961, 15(3), 202-218.

[51] Krasnoselskii, M. A. Some problems of nonlinear analysis. American Mathematical Society Translations. 1958, 10(2), 345-409.

[52] Ma, Z., Jiang, L., Sun, H. C*-algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems. Fixed Point Theory and Applications. 2014, 2014:206, 1-11.

[53] Ma, Z., Jiang, L. C*-algebra-valued b-metric spaces and related fixed point theorems. Fixed Point Theory and Applications. 2015, 2015:222, 1-12.

[54] Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W., Kumam, P. Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces. Fixed Point Theory and Applications. 2011, 2011:93, 1-9.

[55] Mutlu, A., Ozkan, K., Gurdal, U. Coupled fixed point theorem in partially ordered modular metric spaces and its an application. Journal of Computational Analysis and Applications. 2018, 25(2), 207-216.

[56] Nakano, H. Modulared Semi-Ordered Linear Spaces. Tokyo Mathematical Book Series, Maruzen Co, Tokyo, 1950.

[57] Orlicz, W. A note on modular spaces. VII. Bulletin L'Academie Polonaise des Science, Serie des Sciences Mathematiques, Astronomiques et Physiques. 1961, 9, 157-162.

[58] Priess-Crampe, S. Der Banachsche fixpunktsatz für ultrametrische raume. Results in Mathematics. 1990, 18, 178-186.

[59] Priess-Crampe, S., Ribenboim, P. The common point theorem for ultrametric spaces. Geometriae Dedicata. 1998, 72, 105-110.

[60] Rao, K. P. R., Kishore, G. N. V., Rao, T. R. Some coincidence point theorems in ultra metric spaces. International Journal of Mathematical Analysis. 2007, 1, 897-902.

[61] Reich, S. Fixed points of contractive functions. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1972, 5, 26-42.

[62] Rezaee, M. M., Shahraki, M., Sedghi, S., Altun, I. Fixed point theorems for weakly contractive mappings on S-metric spaces and a homotopy result. Applied Mathematics E-Notes. 2017, 17, 58-67.

[63] Qiaoling, X., Lining, J., Ma, Z. Common fixed point theorems in C*-algebra valued metric spaces. Journal of Nonlinear Science and Applications. 2016, 9, 4617-4627.

[64] Schauder, J. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. Studia Mathematica. 1930, 2, 171-180.

[65] Sedghi, S., Shobe, N. A common unique random fixed point theorems in S-metric spaces. Journal of Prime Research in Mathematics. 2011, 7, 25-34.

[66] Sedghi, S., Shobe, N., Aliouche, A. A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces. Matematicki Vesnik. 2012, 64, 258-266.

[67] Sedghi, S., Dung, N. V. Fixed point theorems on S-metric spaces. Matematicki Vesnik. 2014, 66, 113-124.

[68] Sedghi, S., Altun, I., Shobe, N., Salahshour, M. A. Some properties of S-metric spaces and fixed point results. Kyungpook Mathematical Journal. 2014, 54(1), 113-122.

[69] Shateri, T. L. C*-algebra-valued modular spaces and fixed point theorems. Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2017, 19(2), 1551-1560.

[70] Shehwar, D., Kamran, T. C*-valued G-contractions and fixed points. Journal of Inequalities and Applications. 2015, 2015:304, 1-8.

[71] Shehwar, D., Batul, S., Kamran, T., Ghiura, A. Caristi's fixed point theorem on C*-algebra-valued metric spaces. Journal of Nonlinear Science and Applications. 2016, 9, 584-588.

[72] Suzuki, T. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. Proceedings of the American Mathematical Society. 2008, 136, 1861-1869.

[73] Tarski, A. A lattice theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific Journal of Mathematics. 1955, 5, 285-309.

[74] Turkoglu, D., Kilinc, E. Some fixed point results for Caristi type mappings in modular metric spaces with an application. International Journal of Analysis and Applications. 2016, 12(1), 15-21.

[75] Van Rooij, A. C. M. Non-Archimedean Functional Analysis. Marcel Dekker, New York, 1978.

[76] Zada, A., Saifullah, S. Fixed point theorem for integral type C*-valued contraction. Journal of Analysis and Number Theory. 2016, 4(2), 101-104.

[77] Zada, A., Saifullah, S., Ma, Z. Common fixed point theorems for G-contraction in C*-algebra-valued metric spaces. International Journal of Analysis and Applications. 2016, 11(1), 23-27.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Meltem ERDEN EGE
Doğum Yeri ve Yılı	:	Zonguldak, 1987
Yabancı Dili	:	İngilizce
Medeni Durumu	:	Evli, 1 kızı var
E-posta	:	mltmrdn@gmail.com.tr

Eğitim Durumu

Lise	:	Şirinyer Lisesi, 2006
Lisans	:	Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011
Yüksek Lisans	:	Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013

Yayınları

1. Ege, M.E., Alaca, C. Fixed point results and an application to homotopy in modular metric spaces. Journal of Nonlinear Science and Applications. 2015, 8(6), 900–908.
2. Ege, M.E., Alaca, C. Some properties of modular S-metric spaces and its fixed point results. Journal of Computational Analysis and Applications. 2016, 20(1), 24–33.
3. Alaca, C., Ege, M.E., Park, C. Fixed point results for modular ultrametric spaces. Journal of Computational Analysis and Applications. 2016, 20(7), 1259–1267.
4. Ege, M.E., Alaca, C. Some results for modular b-metric spaces and an application to system of linear equations. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2018, 8(1), 3–14.
5. Ege, M.E., Alaca, C. C*-algebra-valued S-metric spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1: Mathematics and Statistics. 2018, 66(2), 165–177.

Katıldığı Konferanslar

1. Ege, M.E., Alaca, C. On Banach Fixed Point Theorem in Modular b-metric Spaces. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2015), 8-12 June, 2015, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey (Bildiri Özetleri Kitabı, 199 s.)