T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

DUAL UZAYDA BAZI EĞRİLERİN DUAL BİSHOP ÇATISINA GÖRE KARAKTERİZASYONLARI

Damla GÖKYEŞİL

Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

MANİSA-2018

Damla GÖKYEŞİL

DUAL UZAYDA BAZI EĞRİLERİN DUAL BİSHOP ÇATISINA GÖRE KARAKTERİZASYONLARI

2018

TEZ ONAYI

Damla GÖKYEŞİL tarafından hazırlanan "**Dual Uzayda Bazı Eğrilerin Dual Bishop Çatısına Göre Karakterizasyonları**" adlı tez çalışması 14/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'ında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Mustafa KAZAZ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	……………………
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU** Gazi Üniversitesi	……………………
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	……………………

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Damla GÖKYEŞİL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R^n	n boyutlu Reel uzay
κ	Reel uzayda birinci eğrilik (eğrilik)
τ	Reel uzayda ikinci eğrilik (torsiyon)
D	Dual Steiner vektörü
D^3	Dual uzay
$\bar{s}$	Dual yay uzunluğu parametresi
$\hat{\alpha}$	Dual vektör
$\overline{k}_1$	Dual uzayda birinci eğrilik
$\overline{k}_2$	Dual uzayda ikinci eğrilik
$\vec{T}$	Dual Bishop teğet vektörü
$\vec{N}_1$	Dual Bishop normal vektörü
$\vec{N}_2$	Dual Bishop binormal vektörü
$\vec{w}$	Dual Bishop Darboux vektörü
$\hat{S}^2$	Dual birim küre

TEŞEKKÜR

Lisans yıllarımdan itibaren çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, değerli vaktini bana ayırıp her konuda yardım eden danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa KAZAZ’a saygı ile teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde maddi-manevi her konuda bana destek olan aileme saygı ile teşekkürlerimi sunarım.

Damla GÖKYEŞİL
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL UZAYDA BAZI EĞRİLERİN DUAL BİSHOP ÇATISINA GÖRE KARAKTERİZASYONLARI

Damla GÖKYEŞİL

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

Eğrilerin diferansiyel geometrisi farklı uzaylarda farklı çatılara göre çalışılan en önemli alanlardan birisidir. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı bu eğrinin diferansiyel geometrisinin çalışılabilmesi için en iyi bilinen bir ortonormal çatıdır. Ayrıca bir uzay eğrisinin şekli, yani uzaydaki yerel davranışı bu eğrinin eğrilik ve burulması ile tamamen belirlidir. Dolasıyla bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilmesi gerekmektedir. Eğrilerin incelenmesinde Frenet çatısıyla aynı avantajlara sahip ve Frenet çatısıyla karşılaştırılabilen başka çatılar da vardır. Bunlardan birisi 1975 yılında Richard L. Bishop tarafından tanımlanan Bishop çatısıdır. Bu çatı bir eğrinin ikinci türevinin tamamen sıfır olduğu durumda bile iyi tanımlanan bir hareketli çatıdır. Bishop çatısı kullanılarak uzay eğrileri ile ilgili birçok çalışma yapılmış ve değişik karakterizasyonlar verilmiştir. Eğrilerin incelendiği bir uzay da D^3 dual uzayıdır. D^3 dual uzayı 3-boyutlu R^3 Öklid uzayını içeren 6-boyutlu bir reel uzay olarak göz önüne alınabileceğinden D^3 dual uzayındaki eğrilere R^3 Öklid uzayındaki eğrilerin bir doğal genişlemesi olarak bakılabilir. Bu nedenle birçok araştırmacı D^3 dual uzayında dual Frenet ve dual Bishop çatılarını kullanarak eğrileri incelemektedir. Bu çalışmada dual Bishop çatısı kullanılarak dual genel helisler, dual slant helisler, dual Darboux helisler ve dual benzer (similar) eğriler gibi bazı eğrilerin bazı karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca dual birim küre üzerindeki eğrilerin dual Frenet çatısından yararlanılarak dual Bishop çatısına göre dual küresel gösterge eğrileri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dual Bishop çatısı, Dual birim küre, Dual küresel gösterge eğrileri, Dual slant helis, Dual Darboux helis, Dual similar eğri

2018, 65 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CHARACTERIZATIONS OF SOME CURVES ACCORDING TO DUAL BISHOP FRAME IN DUAL SPACE

Damla GÖKYEŞİL

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

The differential geometry of curves is one of the most significant areas that are studied according to different frames in different spaces. Frenet frame which consists of the tangent, principal normal, and binormal vectors of a curve in 3-dimension Euclid Space is the best known ortonormal frame for study the differential geometry of this curve. Furthermore, the shape of a space curve, in other words, the local behaviour in space is completely determined by the curvature and torsion of this curve. Therefore, the curve must be continuously derivatiable up to at least 3rd order as a curve can be completely studied. There are also the other frames which have the same advantages as Frenet frame and can be compared with Frenet fame in studying of the curves. One of them is Bishop frame that is defined by Richard L. Bishop in 1975. This frame is a moving frame which is well-defined even when the curve has vanishing second derivative. Several studies about space curves by using Bishop frame did and various characterizations are given. Another space in which curves are studied is dual space D^3. The curves in D^3 can be seen as natural expansion of the curves in Euclid space R^3 due to the fact that D^3 can be able to take into consideration as a 6-dimension reel space including 3-dimension Euclid space R^3. So, some researchers have studied these curves by using dual Frenet and dual Bishop frames in dual space D^3.

In this study, some characterizations of dual general helices, dual slant helices, dual Darboux helices, and dual similar curves by using dual Bishop frame are studied. Also, dual spherical indicatrix curves according to dual Bishop frame are obtained with the help of dual Frenet frame of curves on dual unit sphere.

Key words: Dual Bishop Frame, Dual unit sphere, Dual spherical indicatrix curves, Dual slant helices, Dual Darboux helices, Dual similar curve.

2018, 65 pages

1. GİRİŞ

Eğriler matematikte farklı çatılara ve uzaylara göre incelenmiş ve incelenmeye devam edilmektedir.

İlk olarak Reel uzay düşünüldüğünde farklı çatılara göre incelemeler görmek mümkündür. Örneğin Zıplar, Şenol ve Yaylı (2012) Darboux helisleri Reel uzayda Frenet çatısına göre incelemiştir [1].

Fakat bilindiği üzere Frenet çatısıyla hesap yapmak eğrinin üçüncü mertebeden diferansiyelinin sıfır olduğu durumlarda mümkün olmayabilir. Bu nedenle Richard L. Bishop (1975) tarafından Bishop çatısı tanımlanmıştır [2].
Bu çatı Frenet çatısında bulunan teğet vektör sabit tutularak normal vektörlerin belli bir açıyla döndürülmesiyle oluşur [2]. Elde edilen yeni çatıda Frenet çatısındaki gibi bir dezavantaj oluşmaz. Bukcu ve Karacan (2009) slant helisleri Bishop çatısına göre incelemişlerdir [3]. Yılmaz, Özyılmaz ve Turgut (2010) söz konusu Bishop çatısının bileşenlerinin küresel görüntüleri üzerine çalışmıştır [4]. Babadağ (2016) ise Similar(benzer) eğrileri Bishop çatısına göre karakterize etmiştir[5].

Eğriler sadece Reel uzayda değil, Dual uzayda da incelenmiştir. Dual sayılar W.K. Clifford (1849-1879) tarafından tanımlanmıştır[6]. Dual uzay geometrik olarak dönme ve öteleme hareketlerinden oluşturulabilir [7]. Bu uzaya göre de Frenet çatısı kullanılabilir. Örneğin Lee, Choi ve Jin (2011) helisleri Frenet çatısına göre incelemişlerdir [8]. Şahiner ve Önder (2016) slant helisleri, darboux helisleri ve similar(benzer) eğrileri Dual uzayda Frenet çatısına göre incelemişlerdir [9]. İncelenen eğriler birim küre üzerine taşınabilir ve geometrik olarak anlamlı bir yere sahip olur. Önder ve Uğurlu (2013) bu uzayda normal ve küresel eğriler üzerine bir çalışma yapmıştır [10]. Kisi, Büyükkütük, Öztürk ve Zor (2017) ise dual birim küre üzerinde Bishop çatısına göre T-sabit ve N-sabit eğrileri incelemişlerdir [11].

Bu tez çalışmasında, Dual Bishop çatısına göre Dual uzayda slant helislerin, Darboux helislerin ve similar(benzer) eğrilerin, Dual birim küre üzerinde bulunan bazı eğrilerin ve Dual küresel gösterge eğrilerinin bazı karakterizasyonları verilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. 3-boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu kısımda, tezin ana konusuna temel olan bazı tanım ve kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1. R^3 üç boyutlu Öklid uzayında iç çarpım, $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)\in R^3$ keyfi iki vektör olmak üzere

$$<,>: R^3\times R^3\to R$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\mapsto <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> = <(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)> = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

şeklinde tanımlıdır. İç çarpım aşağıdaki aksiyomları sağlar [12,13]: Her $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^3$ ve $\lambda\in R$ için,

i) $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> = <\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}>$

ii) $<\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> = \lambda<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> = <\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}>$

iii) $<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}> = <\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}> + <\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}>, <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}> = <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> + <\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>$

iv) $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}>\geq 0$, $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}>=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Tanım 2.1.2. Herhangi bir $\boldsymbol{a}\in R^3$ vektörün normu

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}>} \tag{2.1.1}$$

sayısı olarak tanımlanır. Normu $\|\boldsymbol{a}\|=1$ olan bir $a\in R^3$ vektörüne bir birim vektör denir[12,13].

Tanım 2.1.3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in R^3$ herhangi iki vektör olsun. Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1\right) \tag{2.1.2}$$

ile verilen bir vektördür[12,13].

Tanım 2.1.4. $I \subset R$ bir açık aralık olsun. R^3 Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir eğri (veya parametrik bir eğri) bir

$$\alpha : I \subset R \to R^3,\ t \mapsto \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right)$$

dönüşümü ile verilir. Eğer $\alpha : I \to R^3$ eğrisi C^k sınıfından ise α ya C^k sınıfından bir eğri denir. Buradaki $\alpha_i : I \to R,\ t \mapsto \alpha_i(t), 1 \le i \le 3$ fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir. $t \in I \subseteq R$ parametresi zaman parametresi olarak düşünülürse, $\alpha(t)$ eğrisi hareketli bir noktanın R^3 deki yörüngesi olarak ele alınabilir.

Tanım 2.1.5. $\alpha : I \subset R \to R^3, \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right)$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $\alpha'(t) = \left(\alpha_1'(t),\ \alpha_2'(t),\ \alpha_3'(t)\right) \in R^3$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında teğet vektörü veya hız vektörü denir.

$$\|\alpha'\| : I \to R,\ t \mapsto \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left[\alpha_1'(t)\right]^2 + \left[\alpha_2'(t)\right]^2 + \left[\alpha_3'(t)\right]^2}$$

olarak tanımlanan $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\| \in R$ reel sayısına da α eğrisinin t noktasındaki (skaler) hızı denir.

Tanım 2.1.6. $\alpha : I \subset R \to R^3, \alpha = \alpha(t)$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere α eğrisinin bir t_0 dan t ye kadar olan yay uzunluğu fonksiyonu

$$s : I \to R,\ t \mapsto s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du$$

ile tanımlanan s fonksiyonudur. Yay uzunluğu fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olup, diferansiyeli

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = \|\alpha'(t)\| \qquad (2.1.3)$$

dır. Böylece, $\alpha(t)$ hareketli bir noktanın t anındaki konumu olarak düşünüldüğünde $\frac{ds}{dt}$, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı olur.

Tanım 2.1.7. $\alpha: I \subset R \to R^3, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α ya birim hızlı bir eğri denir ve bu durumda $t \in I$ parametresine de eğrinin yay uzunluğu parametresi denir. Genellikle bir eğrinin yay uzunluğu parametresi t yerine s ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörü sıfırdan farklı ise yani her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa (dolayısıyla, $\|\alpha'(t)\| \neq 0$) ise α ya regüler (düzgün) eğri denir.

Tanım 2.1.9. $\alpha: I \to R^3$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer her $t \in I$ için $\alpha(t) \in P$, $(\alpha(I) \subset P)$ olacak şekilde bir $P \subset R^3$ düzlemi mevcut ise α eğrisine düzlemsel eğri denir.

Tanım 2.1.10. I, $I^* \subseteq R$ açık aralıklar olmak üzere $\alpha: I \to R^3$ diferansiyellenebilir bir eğri ve $h: I^* \to I$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\beta = \alpha \circ h: I^* \to R^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonu bir eğri belirtir ve α nın yeniden parametrizasyonu olarak adlandırılır. h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir. α eğrisinin parametresi t ve β eğrisinin parametresi t^* olmak üzere genel olarak $t \neq t^*$ dır. β eğrisinin üzerindeki bir noktayı bulmak için α nın $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ koordinatlarında $t = h(t^*)$ yazmak yeterlidir. Eğer h regüler, yani $\frac{dh}{dt^*} \neq 0$, $(t^* \in I^*)$ ise $h: I^* \to I$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna kabul edilebilir parametre fonksiyonu denir.

α birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde α'' vektörü ya sıfır vektörüdür ya da α' vektörüne dik bir vektördür. Gerçekten, α birim hızlı olduğundan $<\alpha', \alpha'>=1$ dır. Buradan türev alınırsa $<\alpha'', \alpha'> + <\alpha', \alpha''>=0$ dır. Buradan $2<\alpha'', \alpha'>=0$ olur. Böylece $<\alpha'', \alpha'>=0$ dır. Buna göre ya $\alpha''=0$ dır ya da α'', α' vektörleri diktirler.

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \subset R \to R^3$, $s \mapsto \alpha(s)$, s yay-uzunluğu parametresi ile verilen bir eğri olsun. $\alpha^{'}(s) = T(s)$ eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir.

α eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$\kappa : I \subset R \to R,\ s \mapsto \kappa(s) = \left\| T^{'}(s) \right\| = \left\| \alpha^{''}(s) \right\| \tag{2.1.4}$$

olarak tanımlanır.

$\alpha : I \subset R \to R^3$ birim hızlı bir eğri ve $\forall s \in I$ için $\kappa(s) > 0$ olsun. Bu taktirde α eğrisinin asli normal vektörü

$$N(s) = \frac{1}{\kappa}.T^{'}(s) = \frac{T^{'}(s)}{\left\| T^{'}(s) \right\|} \tag{2.1.5}$$

olarak tanımlanır.

α eğrisinin binormal vektörü

$$B(s) = T(s) \times N(s) \tag{2.1.6}$$

Böylece elde edilen $\{T, N, B\}$ pozitif yönlü bir çatıya α eğrisi üzerinde Frenet çatısı denir. α eğrisinin burulması

$$\tau : I \to R,\ \tau(s) = -< B^{'}(s), N(s) > = < B(s), N^{'}(s) > \tag{2.1.7}$$

olarak tanımlanır. $\|T\| = \|N\| = \|B\| = 1$ ve $\langle T, N \rangle = \langle N, B \rangle = \langle B, T \rangle = 0$ olduğu açıktır. α eğrisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{aligned} T^{'} &= \kappa N \\ N^{'} &= -\kappa T + \tau B \\ B^{'} &= -\tau N \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

ile verilir. $\alpha : I \subset R \to R^3$ birim hızlı bir eğri ve $\forall s \in I$ için $\kappa(s) > 0$ olsun. bu taktirde α bir düzlemsel eğridir $\Leftrightarrow \tau = 0$ dır. Bu durumda B binormal vektörü α nın içinde bulunduğu düzleme diktir.

Ayrıca, $\alpha : I \subset R \to R^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha^{''} = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ bir doğru belirtir.}$$

Bu durumda, $\kappa = 0$ olduğundan N asli normal vektörünü tanımlamak mümkün değildir.

Böyle bir durumda, N ve B vektörlerini $\{T, N, B\}$ üçlüsü R^3 de bir ortonormal baz oluşturacak şekilde α eğrisi boyunca keyfi sabit vektörler alarak α eğrisinin τ burulmasını $\tau = 0$ olarak tanımlarız.

Buna göre, $\kappa(s) = \tau(s) = 0$ alırsak, Frenet türev formüllerini sağlanacağı açıktır.

Teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan bir eğriyse bir genel helis adı verilir. Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa} = sabit$ olmasıdır. Ayrıca $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = sabit \neq 0$ ise eğri bir dairesel helistir.

Eğer bir katı cisim, birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket ederse, cismin hareketi α eğrisi boyunca ilerleme ve α eğrisi etrafında dönmeden oluşur. α eğrisi etrafında dönme, $T' = w \times T$, $N' = w \times N$, $B' = w \times B$ eşitliklerini sağlayan bir w vektörü (açısal hız vektörü) ile belirlidir. Frenet üç yüzlüsü w nun belirttiği eksen etrafında her an bir ani dönme yapar. Bu w vektörüne Darboux vektörü denir. w nun T, N, B cinsinden ifadesi

$$w = \tau T + \kappa B \tag{2.1.9}$$

dir[12,13].

Frenet çatısı üç kez türevlenebilen düzgün eğriler için oluşturulmuştur. Fakat eğrinin bazı noktalarında eğriye ait eğrilik sıfırlanabilir. Yani, eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda alternatif bir çatıya ihtiyaç duyulur. Böylece ikinci türevin sıfır olduğu durumda Bishop çatısı olarak isimlendirilen yeni bir çatı oluşturulur.

Tanım 2.1.12. Öklid uzayında Bishop çatısı oluşturulurken bir α eğrisinin Frenet çatısında bulunan teğet vektör değiştirilmeksizin asli normal ve binormali belli bir açıyla döndürülür. Buna göre bir eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere oluşturulan Bishop çatısında $\vec{T}$ vektörü aynen alınır. Bu vektöre dik bir düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ bazını alalım. Bu iki vektörün türevleri sadece $\vec{T}$ vektörüne bağlıdır. Böylece oluşturulan $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ çatısı dik bir çatı olup türev formülleri,

$$T' = k_1 N_1 + k_2 N_2$$
$$N_1' = -k_1 T \qquad (2.1.10)$$
$$N_2' = -k_2 T$$

şeklindedir. Burada k_1 ve k_2 Bishop çatısına göre α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleridir. α eğrisinin eğrilik ve burulması κ ve τ olmak üzere, eğrilikler arasında

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \theta(s) = \arctan\frac{k_2}{k_1}, \quad \tau(s) = -\frac{d\theta(s)}{ds}$$

biçiminde bir ilişki vardır[14].

Bir α eğrisinin Frenet ve Bishop çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T, N_1, N_2\}$ olmak üzere bu iki çatı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$T = T,$$
$$N = \cos\theta N_1 + \sin\theta N_2, \qquad (2.1.11)$$
$$B = -\sin\theta N_1 + \cos\theta N_2.$$

Ayrıca Bishop eğrilikleri

$$k_1 = \kappa\cos\theta, \ k_2 = \kappa\sin\theta$$

eşitliklerini sağlar [15].

Reel uzayda Bishop çatısı α eğrisi etrafında döner. $T' = w \times T, N_1' = w \times N_1, N_2' = w \times N_2$ eşitliklerini sağlayan bir w vektörü (açısal hız vektörü) ile belirlidir. Bishop üç yüzlüsü w nun belirttiği eksen etrafında her an bir ani dönme yapar. Bu w vektörüne Bishop Darboux vektörü denir. w nun T, N_1, N_2 cinsinden ifadesi

$$w = -k_2 N_1 + k_1 N_2 \qquad (2.1.12)$$

dir[14].

2.2. Dual Uzayda Temel Kavramlar

Bu kısımda Dual uzayla ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.2.1. $a,\ a^* \in R$ olmak üzere, (a,a^*) sıralı ikilisini $\bar{a}$ ile gösterelim. Bu şekildeki bütün sıralı ikililerden oluşan $R\times R$ cümlesi D ile gösterilir. Buna göre,

$$D=\left\{\left(a,a^*\right):a,a^*\in R\right\} \tag{2.2.1}$$

dir. D cümlesine dual sayılar sistemi ve her bir $\bar{a}=\left(a,a^*\right)\in D$ elemanına bir dual sayı denir [7]. D cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik aşağıdaki gibi tanımlanır: Her $\bar{a}=\left(a,a^*\right),\ \bar{b}=\left(b,b^*\right)\in D$ için;

Toplama: $\bar{a}\oplus\bar{b}=\left(a+b,\ a^*+b^*\right)$

Çarpma: $\bar{a}\odot\bar{b}=\left(ab,ab^*+a^*b\right)$

Eşitlik: $\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow a=b, a^*=b^*$

dır. Bu işlemlerden yararlanarak;

Çıkarma: $\bar{a}\oplus\bar{x}=\bar{b}\Rightarrow\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}=\left(b-a,b^*-a^*\right)$

Sıfır elemanı: $\bar{a}\oplus\bar{x}=\bar{a}\Rightarrow\bar{x}=\bar{0}=\left(0,0\right)$

Bölme: $\bar{a}\neq\left(0,a^*\right)$ olmak üzere $\bar{a}\odot\bar{x}=\bar{b}\Rightarrow\bar{x}=\left(\dfrac{b}{a},\dfrac{ab^*-a^*b}{a^2}\right)$

dır. Bu işlemler ile D cümlesi bir değişmeli halkadır. Bu halkaya dual sayılar halkası adı verilir[7].

Teorem 2.2.1. D Dual sayılar halkası, R Reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar [7].

Bu teoremin sonucu olarak, bir $\bar{a}=\left(a,a^*\right)\in D$ dual sayısında a reel sayısına $\bar{a}$ dual sayısının reel kısmı ve a^* reel sayısına da $\bar{a}$ nın dual kısmı denir[7].

Tanım 2.2.2. D deki reel birim eleman $\left(1,0\right)$ olduğu gibi dual birim eleman $\left(0,1\right)$ dir ve $\left(0,1\right)=\varepsilon$ ile gösterilir. Burada $\varepsilon^2=0$ olduğu açıktır [7].

Teorem 2.2.2. Bir $\bar{a}$ dual sayısı $\bar{a}=\left(a,a^*\right)=a+\varepsilon a^*$ şeklinde ifade edilebilir [7].

Bundan sonra, $\oplus$ ve $\odot$ sembolleri yerine $+$ ve $\cdot$ sembolleri kullanılacaktır.

Teorem 2.2.3. Bir $\bar{a} \in D$ dual sayısının bir $\lambda \in R$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda \bar{a} = (\lambda, 0).(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*) \tag{2.2.3}$$

dır[7].

Teorem 2.2.4. $a, a^* \in R$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

tipindeki matrislerin cümlesi D ye izomorftur[7].

Tanım 2.2.3. $\bar{a} = (a, a^*)$ dual sayıların tamamına dual düzlem denir ve D ile gösterilir. Her bir (a, a^*) ikilisine dual düzlemin bir dual noktası denir [7].

Tanım 2.2.4. $x, x^* \in R$ ve $f(x)$ in türevi $f'(x)$ olmak üzere, bir f dual değerli diferansiyellenebilir fonksiyonun Maclaurin seri açılımı

$$f(\bar{x}) = f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x) \tag{2.2.5}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 2.2.5. $D^3 = D \times D \times D = \{\hat{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) : \bar{a}_i \in D, 1 \le i \le 3\}$ cümlesi üzerinde aşağıdaki gibi toplama ve skaler çarpma işlemleri tanımlansın.

$$+ : D^3 \times D^3 \to D^3 \ , + : (\hat{a}, \hat{b}) \mapsto \hat{a} + \hat{b} = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3) \tag{2.2.6}$$

ve

$$\cdot : D \times D^3 \to D^3, \ \cdot : (\bar{\lambda}, \hat{a}) \mapsto \bar{\lambda} \cdot \hat{a} = (\bar{\lambda}\bar{a}_1, \bar{\lambda}\bar{a}_2, \bar{\lambda}\bar{a}_3). \tag{2.2.7}$$

Bu işlemlerle birlikte D^3 cümlesi D üzerinde bir Modül yapısına dönüşür. Bu Modül D-Modül olarak adlandırılır[7]:

Tanım 2.2.6. D Modül'ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine dual vektörler denir[7].

Teorem 2.2.5. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^* \in R^3$ olmak üzere D Modülde her bir $\hat{a}$ dual vektörü $\hat{a} = \boldsymbol{a} + \varepsilon \boldsymbol{a}^*$ şeklinde yazılabilir[7].

Teorem 2.2.6. Bir $\hat{a} = \boldsymbol{a} + \varepsilon \boldsymbol{a}^*$ dual vektörünün bir $\bar{\lambda} \in D$ skaleriyle çarpımı $\bar{\lambda}\hat{a} = (\bar{\lambda}\boldsymbol{a}, \bar{\lambda}\boldsymbol{a}^*)$ dır [7].

Teorem 2.2.7. Her $\hat{a},\hat{b} \in D^3$ dual vektörleri için

$$\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{b}^* \tag{2.2.8}$$

dır[7].

Teorem 2.2.8. R^3 vektör uzayı D-Modülün elemanları $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur [7].

Tanım 2.2.7. Sıfır dual vektörü $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) = \hat{0}$ ile gösterilir [7].

Tanım 2.2.8. $\hat{a} = \boldsymbol{a} + \varepsilon \boldsymbol{a}^*$, $\hat{b} = \boldsymbol{b} + \varepsilon \boldsymbol{b}^* \in D^3$ dual vektörleri için iç çarpım

$$<,>: D^3 \times D^3 \to D$$

$$(\hat{a},\hat{b}) \mapsto <\hat{a},\hat{b}> = <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}> + \varepsilon\left(<\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{b}> + <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}^*>\right) \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlıdır. D-Modül iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Yani, her $\hat{a},\hat{b},\hat{c} \in D^3$ vektörleri ve $\bar{\lambda} \in D$ için,

v) $<\hat{a},\hat{b}> = <\hat{b},\hat{a}>$

vi) $<\bar{\lambda}\hat{a},\hat{b}> = \bar{\lambda} <\hat{a},\hat{b}> = <\hat{a},\bar{\lambda}\hat{b}>$

vii) $<\hat{a}+\hat{b},\hat{c}> = <\hat{a},\hat{c}> + <\hat{b},\hat{c}>, <\hat{a},\hat{b}+\hat{c}> = <\hat{a},\hat{b}> + <\hat{a},\hat{c}>$

viii) $<\hat{a},\hat{a}> = 0 \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{0}$

aksiyomları sağlanır[7].

Tanım 2.2.9. $\hat{a},\hat{b} \in D^3$ için vektörel çarpımı,

$$\hat{a}\times\hat{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\varepsilon\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}^{*}+\boldsymbol{a}^{*}\times\boldsymbol{b}\right) \tag{2.2.10}$$

biçiminde tanımlıdır[7]. Burada eşitliğin sağ kısmında kullanılan $\times$ vektörel çarpımı Öklid uzayındaki vektörel çarpımı ifade etmektedir.

Tanım 2.2.10. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ olmak üzere bir $\hat{a}\in D^3$ dual vektörün normu

$$\|\hat{a}\|=\left(<\hat{a},\hat{a}>\right)^{1/2}=\left(\|a\|,\frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{*}>}{\|\boldsymbol{a}\|}\right)=\|a\|+\varepsilon\frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{*}>}{\|\boldsymbol{a}\|} \tag{2.2.11}$$

dual sayısı olarak tanımlanır[7]. Burada eşitliğin sağ kısmında bulunan $<,>$ iç çarpımı Öklid uzayındaki iç çarpımı temsil etmektedir.

Teorem 2.2.9. Bir $\hat{a}\in D^3$ birim dual vektörü için

$$\|\boldsymbol{a}\|=1,\quad <\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{*}>=0 \tag{2.2.12}$$

dır[7].

Teorem 2.2.10. $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})\neq\hat{a}\in D^3$ olmak üzere

$$\boldsymbol{d}=\frac{\hat{a}}{\|\hat{a}\|} \tag{2.2.13}$$

birim dual vektördür[7].

Tanım 2.2.11. $\hat{a}=\boldsymbol{a}+\varepsilon\boldsymbol{a}^{*}\in D^3$ olmak üzere

$$\hat{S}^2=\left\{\hat{a}=\boldsymbol{a}+\varepsilon\boldsymbol{a}^{*}:\|\hat{a}\|=(1,0)\right\} \tag{2.2.14}$$

cümlesine dual birim küre denir[7].

Tanım 2.2.12. (E. Study Dönüşümü): S^2 dual birim kürenin noktaları, R^3 deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir[7].

Tanım 2.2.13. $\hat{a},\hat{b}\in D^3$ iki dual birim vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı θ ve en kısa uzaklık θ^{*} olmak üzere,

$$<\hat{a},\hat{b}>=\cos\overline{\theta}=\cos\left(\theta+\varepsilon\theta^{*}\right) \tag{2.2.15}$$

eşitliği ile verilen $\overline{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ arasındaki dual açı denir[7].

Tanım 2.2.14. D^3 dual uzayında $\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon\alpha^*(t)$ ifadesine bir dual uzay eğrisi denir.

Burada $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ ve $\alpha^*(t) = (\alpha_1^*(t), \alpha_2^*(t), \alpha_3^*(t))$, R^3 Öklid uzayında reel değerli eğridir. Eğer $\alpha_i(t)$ ve $\alpha_i^*(t)$, $1 \le i \le 3$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise,

$$\hat{\alpha} : I \subset R \to D^3, t \mapsto \hat{\alpha}(t) = (\alpha_1(t) + \varepsilon\alpha_1^*(t), \ldots) = \alpha(t) + \varepsilon\alpha^*(t)$$

dual uzay eğrisi de diferansiyellenebilirdir.

$\hat{\alpha}(t)$ dual eğrisinin $\alpha(t)$ reel kısmına gösterge eğrisi denir.

$\hat{\alpha} : I \subset R \to D^3, t \mapsto \hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon\alpha^*(t)$ bir dual eğri olsun. $\hat{\alpha}(t)$ dual uzay eğrisinin t_1 den t ye kadar dual yay uzunluğu

$$\overline{s} = \int_{t_1}^{t} \left\| \hat{\alpha}'(t) \right\| dt = \int_{t_1}^{t} \left\| \vec{\alpha}'(t) \right\| dt + \varepsilon \int_{t_1}^{t} \left\langle T, \alpha^{*'}(t) \right\rangle dt = s + \varepsilon s^* \tag{2.2.16}$$

olarak tanımlanır. Burada T vektörü, $\alpha(t)$ reel gösterge eğrisinin birim teğet vektörüdür[17].

Tanım 2.2.15. $\hat{\alpha} : I \subset R \to D^3$, $s \mapsto \hat{\alpha}(s) = \alpha(s) + \varepsilon\alpha^*(s)$, gösterge eğrisinin s yay-uzunluğu parametresi ile verilen bir C^4-dual eğri olsun. $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin birim dual teğet vektörü

$$\frac{d\hat{\alpha}}{d\overline{s}} = \frac{d\hat{\alpha}}{ds}\frac{ds}{d\overline{s}} = \hat{T} \tag{2.2.17}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca (2.26) eşitliği ile

$$\overline{s} = s + \varepsilon \int_{s_1}^{s} \left\langle T, \alpha^{*'}(s) \right\rangle ds$$

yazılabileceğinden $\frac{d\overline{s}}{ds} = 1 + \varepsilon \left\langle T, \alpha^{*'} \right\rangle$ yazılabilir.

Şimdi $\hat{T}$ birim dual teğet vektörü olduğundan $\hat{T}$ nın $\overline{s}$ dual yay-uzunluğu parametresine göre,

$$\frac{d\hat{T}}{ds}=\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{d\hat{T}}{d\overline{s}}=\frac{d^2\hat{\alpha}}{d\overline{s}^2}=\overline{\kappa}\hat{N}$$

ile verilen türevi D^3 dual uzayında eğrinin dönüş yolunu ölçer.

$\frac{d\hat{T}}{d\overline{s}}$ vektörünün normuna $\hat{\alpha}(s)$ dual eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\overline{\kappa}: I \to D$ fonksiyonu asla sırf(pure) dual vektörü olmadığını, yani reel kısmın sıfırdan farklı olduğunu kabul ediyoruz.

Bu taktirde

$$\hat{N}=\frac{1}{\overline{\kappa}}\frac{d\hat{T}}{d\overline{s}} \tag{2.2.18}$$

birim dual vektörüne $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin dual asli normal vektörü denir.

$$\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}$$

ile tanımlanan dual birim vektörüne $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin dual birim binormal vektörü denir[17].

Böylece oluşturulan $\{\hat{T},\hat{N},\hat{B}\}$ dual çatısına D^3 te $\hat{\alpha}(s)$ dual uzay eğrisi boyunca hareketli dual Frenet çatısı denir.

Dual uzay eğrisi boyunca $\hat{T},\hat{N},\hat{B}$ dual Frenet vektör türevleri matris formunda

$$\frac{d}{d\overline{s}}\begin{bmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \overline{\kappa} & 0\\ -\overline{\kappa} & 0 & \overline{\tau}\\ 0 & -\overline{\tau} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{bmatrix} \tag{2.2.19}$$

verilir. Burada $\overline{\kappa}=\kappa+\varepsilon\kappa^*$ hiçbir yerde pure olmayan dual eğrilik ve $\overline{\tau}=\tau+\varepsilon\tau^*$ hiçbir yerde pure olmayan dual burulmadır. (2.29) formüllerine dual Frenet türev formülleri denir.

Şimdi dual uzayda Bishop çatısını oluşturalım.

Tanım 2.2.16. $\hat{\alpha}: I\subset R\to D^3$, $s\mapsto\hat{\alpha}(s)=\alpha(s)+\varepsilon\alpha^*(s)$, gösterge eğrisinin s yay-uzunluğu parametresi ile verilen bir C^4-dual eğri olsun. Bu taktirde

$$\frac{d\hat{\alpha}}{d\overline{s}}=\frac{d\hat{\alpha}}{ds}\frac{ds}{d\overline{s}}=\hat{T} \tag{2.2.20}$$

dual vektörüne $\hat{\alpha}(s)$ nın birim dual teğet vektörü denir.

$\hat{T}$ sabit 1 uzunluğa sahip olduğundan $\bar{s}$ ye göre türevi,

$$\frac{d\hat{T}}{d\bar{s}} = \frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{d^2\hat{\alpha}}{d\bar{s}^2} = \bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2, \quad \bar{k}_1 = k_1 + \varepsilon \bar{k}_1^*, \bar{k}_2 = k_2 + \varepsilon \bar{k}_2^*$$

D^3 dual uzayında eğrinin dönüş yolunu ölçer.

Burada $\bar{\kappa} : I \to D$ fonksiyonu asla sırf(pure) dual vektörü olmadığını, yani reel kısmın sıfırdan farklı olduğunu kabul ediyoruz.

Böylece oluşturulan $\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\}$ dual çatısına D^3 te $\hat{\alpha}(s)$ dual eğrisi boyunca hareketli dual Bishop çatısı denir. Dual Bishop çatısının, dual Frenet çatısının teğet vektörü sabit tutularak, asli normal ve binormali belli bir açıyla döndürülmesi ile oluştuğunu not edelim.

Dual uzay eğrisi boyunca $\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2$ dual Bishop çatısının dual vektörlerinin türevleri matris formunda

$$\frac{d}{d\bar{s}}\begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N}_1 \\ \hat{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \\ -\bar{k}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{k}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N}_1 \\ \hat{N}_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.21}$$

şeklindedir.

Burada $\bar{k}_1$ ve $\bar{k}_2$ Bishop çatıyla bağlı olan eğrinin birinci ve ikinci dual eğrilikleridir.

$\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ Frenet çatısındaki dual eğrinin dual eğrilik ve dual burulması olmak üzere

$$\bar{\kappa}(s) = \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}, \quad \bar{\theta}(s) = \arctan\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right), \quad \bar{\tau}(s) = -\frac{d\bar{\theta}}{ds}$$

biçimindedir[18].

Bir dual eğrinin Frenet ve Bishop çatıları sırasıyla $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ve $\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\}$ olmak üzere bu iki çatı arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \hat{T} \\ \hat{N} &= \cos\bar{\theta}\,\hat{N}_1 + \sin\bar{\theta}\,\hat{N}_2 \\ \hat{B} &= -\sin\bar{\theta}\,\hat{N}_1 + \cos\bar{\theta}\,\hat{N}_2. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Bishop eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \bar{\kappa}\cos\bar{\theta} \\ \bar{k}_2 &= \bar{\kappa}\sin\bar{\theta} \end{aligned}$$

biçimindedir[18].

Tanım 2.2.17. Dual Bishop çatısının türev formüllerinin reel ve dual kısımları matris formunda aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{bmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}_1' \\ \hat{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \\ -\bar{k}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{k}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N}_1 \\ \hat{N}_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} T^{*'} \\ N_1^{*'} \\ N_2^{*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 + \varepsilon k_1^* & k_2 + \varepsilon k_2^* \\ -k_1 - \varepsilon k_1^* & 0 & 0 \\ -k_2 - \varepsilon k_2^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} T^* \\ N_1^* \\ N_2^* \end{bmatrix} \right)$$

şeklinde yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 N_1 + k_2 N_2 \\ -k_1 T \\ -k_2 T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T^{*'} \\ N_1^{*'} \\ N_2^{*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 N_1^* + k_2 N_2^* + k_1^* N_1 + k_2^* N_2 \\ -k_1 T^* - k_1^* T \\ -k_2 T^* - k_2^* T \end{bmatrix} \qquad (2.2.23)$$

elde edilir[18].

Tanım 2.2.18. Reel uzayda olduğu gibi dual uzayda da Bishop çatısı $\bar{\alpha}$ dual eğrisi etrafında döner. $\hat{T}' = \hat{w} \times \hat{T}, \hat{N}_1' = \hat{w} \times \hat{N}_1, \hat{N}_2' = \hat{w} \times \hat{N}_2$ eşitliklerini sağlayan bir $\hat{w}$ vektörü (açısal hız vektörü) ile belirlidir. Bishop üç yüzlüsü $\hat{w}$ nun belirttiği eksen etrafında her an bir ani dönme yapar. Bu $\hat{w}$ vektörüne dual Bishop Darboux vektörü denir. $\hat{w}$ nun $\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2$ cinsinden ifadesi

$$\hat{w} = -\bar{k}_2 \hat{N}_1 + \bar{k}_1 \hat{N}_2 \qquad (2.2.24)$$

dir[18].

3. REEL BİSHOP ÇATISINA GÖRE BAZI EĞRİLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde Reel uzaydaki bazı eğrileri Bishop çatısına göre inceleyeceğiz.

Tanım 3.1. $\alpha : I \subset R \to R^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin Bishop çatısı $\{T, N_1, N_2\}$ olsun. α eğrisinin N_1 asli normal vektörü sabit bir $\boldsymbol{d}$ birim vektörü ile sabit bir ϕ açısı yapıyorsa α eğrisine bir Bishop slant helis denir. Yani,

$$< N_1, \boldsymbol{d} >= \cos\phi \tag{3.1}$$

dır[3].

Teorem 3.1. $\alpha : I \subset R \to R^3$**,** R^3 uzayında s yay-uzunluklu birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi, $< N_1, \boldsymbol{d} >= \cos\phi$ olacak şekilde ϕ sabit açısıyla bir Bishop slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_1}{k_2} = sabit \tag{3.2}$$

olmasıdır[3].

Teorem 3.2. $\alpha : I \subset R \to R^3$**,** $\alpha = \alpha(s)$**,** R^3 uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde $\det\left(N_1', N_1'', N_1'''\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir Bishop slant helistir[3].

Teorem 3.3. $\alpha : I \subset R \to R^3$**,** $\alpha = \alpha(s)$**,** R^3 uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde $\det\left(N_2', N_2'', N_2'''\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s)$ bir Bishop slant helistir[3].

Teorem 3.4. $\alpha : I \subset R \to R^3$**,** R^3 te birim hızlı bir eğri olsun.

$A = \kappa^2 - \dfrac{k_1''}{k_1}$ α bir Bishop genel slant helistir $\Leftrightarrow N_1''' = -AN_1' - 3k_1'T'$ olmasıdır.

Burada $A = \kappa^2 - \dfrac{k_1''}{k_1}$ ve $k_1^2 + k_2^2 = \kappa^2$ dir[3].

Tanım 3.2. $\alpha : I \subset R \to R^3$ bir birim hızlı eğri olsun. Reel uzayda w Bishop Darboux vektörleri sabit bir $\boldsymbol{d}$ birim vektörü ile sabit bir ϕ açısı yapıyorsa, α eğrisine bir Bishop Darboux helis adı verilir. Bununla birlikte, eğer w_0 birim Bishop Darboux vektörleri sabit bir $\boldsymbol{d}$ birim vektörü ile sabit bir λ açısı yapıyorsa, α eğrisine bir normalleşmiş Bishop Darboux helis adı verilir.

Teorem 3.5. Her slant helis aynı eksenli bir normalleştirilmiş Darboux helistir.

İspat: α , R^3 uzayında bir Bishop slant helis olsun. $\boldsymbol{d}$ vektörü N_1 ve N_2 vektörlerinin gerdiği düzlemde bulunduğundan

$$\boldsymbol{d} = N_1 \cos\phi + N_2 \sin\phi \tag{3.3}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemi

$$\boldsymbol{d} = \cos\phi N_1 - \frac{k_1}{k_2}\cos\phi N_2 \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada ϕ, $\boldsymbol{d}$ ile N_1 vektörleri arasındaki açıdır. Bishop Darboux birim vektörünü w_0 olarak alalım. Bishop Darboux birim vektörünü $\boldsymbol{d}$ vektöründe yerine koyarsak

$$\boldsymbol{d} = -\frac{\cos\phi}{k_2} w_0 \|w\| \tag{3.5}$$

olur. $\boldsymbol{d}$ vektörü ve w_0 birim Bishop Darboux vektörü arasındaki açı λ olsun. $\boldsymbol{d}$ vektörü ile w_0 birim Bishop Darboux vektörünün iç çarpımını alır ve $<\boldsymbol{d}, w_0> = \|\boldsymbol{d}\|\cos\lambda$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{d}\|\cos\lambda = <\boldsymbol{d}, w_0> &= -\frac{\cos\phi}{k_2} < w_0, w_0 > \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ &= -\frac{\cos\phi}{k_2}\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ &= -\frac{\cos\phi}{k_2}\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
\cos\lambda &= -\frac{\cos\phi}{k_2}\frac{1}{\|\boldsymbol{d}\|}\sqrt{k_1^2+k_2^2} \\
&= -\frac{\cos\phi}{k_2}\frac{1}{\left\|\cos\phi N_1 - \frac{k_1}{k_2}\cos\phi N_2\right\|}\sqrt{k_1^2+k_2^2} \\
&= -\frac{\cos\phi}{k_2}\frac{1}{\left\|\cos^2\phi + \frac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\phi\right\|}\sqrt{k_1^2+k_2^2} \qquad (3.7) \\
&= -\frac{\cos\phi}{k_2}\sqrt{k_1^2+k_2^2}\frac{k_2}{\cos\phi\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

■

Tanım 3.3. R^3 Öklid uzayında iki eğri $\gamma_\alpha(s_\alpha)$ ve $\gamma_\beta(s_\beta)$ olsun. Burada s_α ve s_β ile $\gamma_\alpha(s_\alpha)$ ve $\gamma_\beta(s_\beta)$ eğrilerinin yay-uzunlukları parametrelerini gösteriyoruz. $\gamma_\alpha(s_\alpha)$ eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri sırasıyla $\{k_{1\alpha}, k_{2\alpha}\}$ ve Bishop çatısı $\{T^\alpha, N_1^\alpha, N_2^\alpha\}$ ile $\gamma_\beta(s_\beta)$ eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k_{1\beta}, k_{2\beta}\}$ ve Bishop çatısı $\{T^\beta, N_1^\beta, N_2^\beta\}$ olsun. Eğer bu iki eğrinin teğet vektörleri aynı olacak şekilde yay-uzunlukları arasında bir

$$s_\alpha = \int \lambda_\alpha^\beta(s_\beta)ds_\beta \qquad (3.8)$$

değişken dönüşümü varsa; yani λ_α^β değişken dönüşümü altında parametrelerine karşılık gelen bütün değerler için

$$T^\beta = T^\alpha \qquad (3.9)$$

oluyorsa, $\gamma_\alpha(s_\alpha)$ ve $\gamma_\beta(s_\beta)$ eğrilerine λ_α^β değişken dönüşümü altında Bishop benzer (similar) eğrilerdir denir[5].

Teorem 3.6. R^3 Öklid uzayında iki birim hızlı eğri $\gamma_\alpha(s_\alpha)$ ve $\gamma_\beta(s_\beta)$ olsun. $\gamma_\alpha(s_\alpha)$ ve $\gamma_\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bishop çatısına göre değişken dönüşümü ile Bishop benzer eğriler olması için gerek ve yeter şart yay-uzunluklarının

$$\lambda_{\alpha}^{\beta}=\frac{ds_{\beta}}{ds_{\alpha}}=\frac{k_{1\alpha}}{k_{1\beta}} \text{ ve } \lambda_{\alpha}^{\beta}=\frac{ds_{\beta}}{ds_{\alpha}}=\frac{k_{2\alpha}}{k_{2\beta}}$$

özel değişken dönüşümleri ile

$$\begin{aligned} N_1^{\beta}(s_{\beta}) &= N_1^{\alpha}(s_{\alpha}) \\ N_2^{\beta}(s_{\beta}) &= N_2^{\alpha}(s_{\alpha}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

olmasıdır[5].

Teorem 3.7. $\alpha(s)$, s yay-uzunluğu parametresine göre bir eğri olsun. $\theta=\int k_1(s)ds$ olmak üzere, $\alpha=\alpha(\theta)$ bu eğrinin başka bir parametrelendirilmesi olsun. T bu eğrinin birim teğet vektörü olmak üzere,

$$\left[\frac{1}{f'}\left(T''+\left(1+f^2\right)T\right)\right]'+fT=0 \tag{3.11}$$

dır. Burada $f(\theta)=\dfrac{k_2(\theta)}{k_1(\theta)}$ ve $T'=\dfrac{dT}{d\theta}$ dir[5].

Teorem 3.8. R^3 Öklid uzayında iki eğri $\gamma_{\alpha}(s_{\alpha})$ ve $\gamma_{\beta}(s_{\beta})$ olsun. $\gamma_{\alpha}(s_{\alpha})$ ve $\gamma_{\beta}(s_{\beta})$ eğrilerinin Bishop çatısına göre değişken dönüşümü ile Bishop benzer eğriler olması için gerek ve yeter şart toplam eğriliklerin eşit, yani

$$\theta(s_{\beta})=\int k_{1\beta}(s_{\beta})ds_{\beta}=\int k_{1\alpha}(s_{\alpha})ds_{\alpha}=\theta(s_{\alpha}) \tag{3.12}$$

olmak üzere

$$\lambda_{\alpha}^{\beta}=\frac{ds_{\beta}}{ds_{\alpha}}=\frac{k_{1\alpha}}{k_{1\beta}}=\frac{k_{2\alpha}}{k_{2\beta}} \tag{3.13}$$

özel dönüşümleri ile

$$\frac{k_{2\beta}(s_{\beta})}{k_{1\beta}(s_{\beta})}=\frac{k_{2\alpha}(s_{\alpha})}{k_{1\alpha}(s_{\alpha})} \tag{3.14}$$

olmasıdır[5].

Tanım 3.4. $\alpha: I\subset R\to R^3$ birim hızlı bir eğri ve $\{T,N_1,N_2\}$ bu eğrinin Bishop çatısı olsun. α nın teğet bileşeninin normu sabit ise α ya Bishop $T-sabit$

eğri denir. Eğer α nın teğet bileşeninin normu sıfır ise eğriye birinci çeşit Bishop $T-sabit$, diğer durumlarda ikinci çeşit Bishop $T-sabit$ eğrisi denir.

Tanım 3.5. $\alpha : I \subset R \to R^3$ birim hızlı bir eğri ve $\{T, N_1, N_2\}$ bu eğrinin Bishop çatısı olsun. α nın normal bileşeninin normu sabit ise α ya Bishop $N-sabit$ eğri denir. Eğer α nın normal bileşeninin normu sıfır ise eğriye birinci çeşit Bishop $N-sabit$, diğer durumlarda ikinci çeşit Bishop $N-sabit$ eğrisi denir.

Teorem 3.9. $\alpha : I \subset R \to R^3$ birim hızlı eğrisinin $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısına göre yer vektörü $\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N_1(s) + m_2(s)N_2(s)$ olsun. α eğrisinin birinci çeşit $T-sabit$ eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$c_1k_1 + c_2k_2 = 1 \tag{3.15}$$

olmasıdır[19].

4. DUAL BİSHOP ÇATISINA GÖRE BAZI DUAL EĞRİLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde dual genel helisler, dual slant helisler, dual Darboux helisler, dual benzer eğriler için bazı karakterizasyonlar verilecektir. Verilecek ifadelerde dual Bishop çatısı kullanılacaktır.

Tanım 4.1. $\hat{\alpha}(s)$, D^3 dual uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin dual Bishop çatısı $\{\hat{T},\hat{N}_1,\hat{N}_2\}$ olsun. $\overline{\lambda}(s)$ ve $\overline{\mu}(s)$, s yay-uzunluğu parametresine bağlı dual diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\hat{\alpha}(s)$ eğrisi

$$\hat{\alpha}(s)=\overline{\lambda}(s)\hat{N}_1(s)+\overline{\mu}(s)\hat{N}_2(s) \tag{4.1}$$

biçiminde yazılabiliyorsa bu eğriye dual Bishop normal eğri denir.

Teorem 4.1. $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(s)$ bir dual Bishop normal eğri olsun. Bu taktirde $\overline{k}_1(s)$ ve $\overline{k}_2(s)$ dual eğrilikleri arasında aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\frac{\overline{k}_2^{'}}{\left(\dfrac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\right)^{'}\overline{k}_1}+\frac{\overline{k}_1^{'}}{\left(\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)^{'}\overline{k}_2}=1 \tag{4.2}$$

İspat : $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(s)$ nin bir dual Bishop normal eğri olduğunu kabul edelim. Böylece tanım gereği $\hat{\alpha}(s)=\overline{\lambda}(s)\hat{N}_1(s)+\overline{\mu}(s)\hat{N}_2(s)$ olacak şekilde $\overline{\lambda}(s)$ ve $\overline{\mu}(s)$ dual diferansiyellenebilir fonksiyonlar vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\hat{\alpha}^{'}=\overline{\lambda}^{'}\hat{N}_1+\overline{\lambda}\hat{N}_1^{'}+\overline{\mu}^{'}\hat{N}_2+\overline{\mu}\hat{N}_2^{'}$$

olur. Dual Bishop türev formüllerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\hat{T}&=\overline{\lambda}^{'}\hat{N}_1-\overline{k}_1\overline{\lambda}\hat{T}+\overline{\mu}^{'}\hat{N}_2-\overline{k}_2\overline{\mu}\hat{T}\\&=\left(-\overline{k}_1\overline{\lambda}-\overline{k}_2\overline{\mu}\right)\hat{T}+\overline{\lambda}^{'}\hat{N}_1+\overline{\mu}^{'}\hat{N}_2\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}-\overline{k}_1\overline{\lambda}-\overline{k}_2\overline{\mu}&=1\\\overline{\lambda}^{'}&=0\\\overline{\mu}^{'}&=0\end{aligned} \tag{4.4}$$

olur. (4.4) ifadesindeki ilk eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\bar{k}_1'\bar{\lambda}+\bar{k}_1\bar{\lambda}'+\bar{k}_2'\bar{\mu}+\bar{k}_2\bar{\mu}'=0 \tag{4.5}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\bar{k}_1'\bar{\lambda}&=-\bar{k}_2'\bar{\mu}\\ \bar{\lambda}&=\frac{-\bar{k}_2'}{\bar{k}_1'}\bar{\mu}\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Bu değer (4.4) eşitliklerinin ilkinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{k}_1\frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_1'}\bar{\mu}-\bar{k}_2\bar{\mu}&=1\\ \left(\bar{k}_1\frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_1'}-\bar{k}_2\right)\bar{\mu}&=1\\ \left(\frac{\bar{k}_1\bar{k}_2'-\bar{k}_1'\bar{k}_2}{\bar{k}_1'}\right)\bar{\mu}&=1\\ \bar{\mu}&=-\frac{\bar{k}_1'}{\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'\bar{k}_2^2}\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada $\bar{\mu}=-\frac{\bar{k}_1'}{\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'\bar{k}_2^2}$ eşitliği

$$\bar{\mu}=\frac{\bar{k}_1'}{\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\bar{k}_1^2} \tag{4.8}$$

biçiminde de yazılabilir. Elde edilen (4.8) değeri (4.6) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\bar{\lambda}=-\frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_1'}\frac{\bar{k}_1'}{\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\bar{k}_1^2}=-\frac{\bar{k}_2'}{\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\bar{k}_1^2} \tag{4.9}$$

bulunur. (4.7) ve (4.9) dan

$$\hat{\alpha}(s)=-\frac{\bar{k}_2'}{\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\bar{k}_1^2}\hat{N}_1-\frac{\bar{k}_1'}{\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'\bar{k}_2^2}\hat{N}_2 \tag{4.10}$$

dir. Bulunan $\bar{\lambda}$ ve $\bar{\mu}$ değerleri (4.4) eşitliklerinin ilkinde kullanılırsa,

$$\frac{\overline{k}_2'}{\left(\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\right)'\overline{k}_1}+\frac{\overline{k}_1'}{\left(\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)'\overline{k}_2}=1 \tag{4.11}$$

elde edilir.

■

Tanım 4.2. $\hat{\alpha}: I \subset R \to D^3$ bir birim hızlı dual eğri olsun. Bu eğrinin dual Bishop çatısı $\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\}$ olsun. $\hat{\alpha}$ eğrisinin $\hat{N}_1$ dual asli normal vektörü sabit bir $\hat{\boldsymbol{d}}$ dual birim vektörü ile sabit bir $\overline{\phi}$ dual açı yapıyorsa $\hat{\alpha}$ eğrisine bir dual Bishop slant helis denir. Yani,

$$<\hat{N}_1, \hat{\boldsymbol{d}}> = \cos\overline{\phi} \tag{4.12}$$

dır.

Teorem 4.2. $\hat{\alpha}$, D^3 uzayında s yay-uzunluklu bir dual eğri olsun. $\hat{\alpha}$ dual eğrisi, $<\hat{N}_1, \hat{\boldsymbol{d}}> = \cos\overline{\phi}$ olacak şekilde $\overline{\phi}$ dual sabit açısıyla bir dual Bishop slant helistir $\Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2} = sabit \tag{4.13}$$

dir.

İspat: $\hat{\boldsymbol{d}}$**,** $\hat{N}_1$ birim dual normali ile $\overline{\phi}$ sabit dual açı yapan sabit bir dual birim vektör olsun. $<\hat{N}_1, \hat{\boldsymbol{d}}> = \cos\overline{\phi}$ dir. Her iki tarafın türevi alınıp Bishop türev formülleri kullanılarak düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
<\hat{N}_1', \hat{\boldsymbol{d}}> + <\hat{N}_1, \hat{\boldsymbol{d}}'> &= 0 \\
<\hat{N}_1', \hat{\boldsymbol{d}}> &= 0 \\
<-\overline{k}_1\hat{T}, \hat{\boldsymbol{d}}> &= 0 \\
-\overline{k}_1 <\hat{T}, \hat{\boldsymbol{d}}> &= 0
\end{aligned}
$$

$$<\hat{T}, \hat{\boldsymbol{d}}> = 0 \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinin her iki tarafının tekrar türevi alınıp dual Bishop türev formülleri yardımıyla düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
<\hat{T}',\hat{\boldsymbol{d}}>+<\hat{T},\hat{\boldsymbol{d}}'>&=0\\
<\hat{T}',\hat{\boldsymbol{d}}>&=0\\
<\bar{k}_1\hat{N}_1+\bar{k}_2\hat{N}_2,\hat{\boldsymbol{d}}>&=0\\
\bar{k}_1<\hat{N}_1,\hat{\boldsymbol{d}}>+\bar{k}_2<\hat{N}_2,\hat{\boldsymbol{d}}>&=0
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

olur. $<\hat{N}_1,\hat{\boldsymbol{d}}>=\cos\bar{\phi}$ ve $<\hat{N}_2,\hat{\boldsymbol{d}}>=\sin\bar{\phi}$ olduğundan

$$
\bar{k}_1\cos\bar{\phi}+\bar{k}_2\sin\bar{\phi}=0 \tag{4.16}
$$

dir. Buradan

$$
\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}=-\tan\bar{\phi}=sabit \tag{4.17}
$$

olur.

$(\Leftarrow)$: $\dfrac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}=sbt$ olsun. $\dfrac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}=-\tan\bar{\phi}$ şeklinde alınabilir. $\hat{\boldsymbol{d}}$ dual birim vektörü $\hat{T}$ ye dik bir düzlemden alınırsa, $\{\hat{N}_1,\hat{N}_2\}$ bazının gerdiği düzlemde kalır. Yani,

$$
\hat{\boldsymbol{d}}=\hat{N}_1\cos\bar{\phi}+\hat{N}_2\sin\bar{\phi} \tag{4.18}
$$

biçiminde yazılabilir. (4.18) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$
\hat{\boldsymbol{d}}'=\hat{N}_1'\cos\bar{\phi}+\hat{N}_2'\sin\bar{\phi} \tag{4.19}
$$

bulunur. Dual Bishop türev formüllerinden,

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{d}}'&=-\bar{k}_1\hat{T}\cos\bar{\phi}-\bar{k}_2\hat{T}\sin\bar{\phi}\\
&=\left(-\bar{k}_1\cos\bar{\phi}-\bar{k}_2\sin\bar{\phi}\right)\hat{T}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

dir. Buradan $\bar{k}_1=-\bar{k}_2\tan\bar{\phi}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{d}}'&=-\left(-\bar{k}_2\frac{\sin\bar{\phi}}{\cos\bar{\phi}}\cos\bar{\phi}+\bar{k}_2\sin\bar{\phi}\right)\hat{T}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

bulunur. Dolayısıyla $\hat{\boldsymbol{d}}$ dual sabit vektördür. Yani,

$$
<\hat{N}_1,\hat{\boldsymbol{d}}>=\cos\bar{\phi} \tag{4.22}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla $\hat{\alpha}$ dual eğrisi, bir dual Bishop slant helistir.

■

Teorem 4.3. $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(s)$ **,** D^3 dual uzayında birim hızlı bir dual eğri olsun. Bu taktirde

$$\det\left(\hat{N}_1^{'},\hat{N}_1^{''},\hat{N}_1^{'''}\right)=0 \iff \hat{\alpha} \text{ bir dual Bishop slant helistir.}$$

İspat: İlk olarak $\hat{N}_1$ in 1., 2. ve 3. mertebeden türevlerini alalım. Dual Bishop türev formüllerinden

$$\hat{N}_1^{'}=-\overline{k}_1\hat{T}=-k_1T+\varepsilon\left(-k_1T^*-k_1^*T\right) \tag{4.23}$$

olduğu biliyoruz. Buradan

$$\hat{N}_1^{''}=-k_1^{'}T-k_1T^{'}+\varepsilon\left(-k_1^{'}T^*-k_1T^{*'}-k_1^{*'}T-k_1^*T^{'}\right) \tag{4.24}$$

olur. Şimdi (2.2.21) formüllerinden

$$\hat{N}_1^{''}=-\overline{k}_1^{'}\hat{T}-\overline{k}_1^2\hat{N}_1-\overline{k}_1\overline{k}_2\hat{N}_2 \tag{4.25}$$

bulunur. (4.25) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır ve tekrar (2.2.21) formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^{'''}&=-\overline{k}_1^{''}\hat{T}-\overline{k}_1^{'}\hat{T}^{'}-\left(\overline{k}_1^2\right)^{'}\hat{N}_1-\overline{k}_1^2\hat{N}_1^{'}-\overline{k}_1^{'}\overline{k}_2\hat{N}_2-\overline{k}_1\overline{k}_2^{'}\hat{N}_2-\overline{k}_1\overline{k}_2\hat{N}_2^{'}\\&=\left(-\overline{k}_1^{''}+\overline{k}_1^3+\overline{k}_1\overline{k}_2^2\right)\hat{T}-3\overline{k}_1\overline{k}_1^{'}\hat{N}_1-\left(2\overline{k}_1^{'}\overline{k}_2+\overline{k}_1\overline{k}_2^{'}\right)\hat{N}_2\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\det\left(\hat{N}_1^{'},\hat{N}_1^{''},\hat{N}_1^{'''}\right)&=\begin{vmatrix}-\overline{k}_1 & 0 & 0\\ -\overline{k}_1^{'} & -\overline{k}_1^2 & -\overline{k}_1\overline{k}_2\\ -\overline{k}_1^{''}+\overline{k}_1^3+\overline{k}_1\overline{k}_2^2 & -3\overline{k}_1\overline{k}_1^{'} & -2\overline{k}_1^{'}\overline{k}_2-\overline{k}_1\overline{k}_2^{'}\end{vmatrix}\\&=-\overline{k}_1^3\left(2\overline{k}_1^{'}\overline{k}_2+\overline{k}_1\overline{k}_2^{'}-3\overline{k}_2\overline{k}_1^{'}\right)\\&=\overline{k}_1^3\left(\overline{k}_1^{'}\overline{k}_2-\overline{k}_1\overline{k}_2^{'}\right)\\&=\overline{k}_1^3\overline{k}_2^2\left(\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)^{'}\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Hipotezden $\det\left(\hat{N}_1^{'},\hat{N}_1^{''},\hat{N}_1^{'''}\right)=0$ olduğundan $\left(\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)^{'}=0$ bulunur. Dolayısıyla $\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}$ sabittir. Böylece $\hat{\alpha}$ eğrisi bir dual Bishop slant helistir.

$(\Leftarrow)$: $\hat{\alpha}$ dual Bishop slant helis olsun. (4.27) den

$$\det\left(\hat{N}_1^{'},\hat{N}_1^{''},\hat{N}_1^{'''}\right)=\bar{k}_1^{3}\bar{k}_2^{2}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)^{'} \tag{4.28}$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 4.1. den $\dfrac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}=sabit$ olduğundan $\det\left(\hat{N}_1^{'},\hat{N}_1^{''},\hat{N}_1^{'''}\right)=0$ olduğu elde edilir.

■

Teorem 4.4. $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(s)$ **,** D^3 dual uzayında birim hızlı bir dual eğri olsun. Bu taktirde

$$\det\left(\hat{N}_2^{'},\hat{N}_2^{''},\hat{N}_2^{'''}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \hat{\alpha}(s) \text{ bir dual Bishop slant helistir.}$$

İspat: İlk olarak $\hat{N}_2$ in 1., 2. ve 3. mertebeden türevlerini bulalım. Dual Bishop türev formüllerinden

$$\hat{N}_2^{'}=-\bar{k}_2\hat{T}=-k_2T+\varepsilon\left(-k_2T^{*}-k_2^{*}T\right) \tag{4.29}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan türev alır ve (2.2.21) formüllerini tekrar kullanırsak

$$\begin{aligned}\hat{N}_2^{''}&=-k_2^{'}T-k_2T^{'}+\varepsilon\left(-k_2^{'}T^{*}-k_2T^{*'}-k_2^{*'}T-k_2^{*}T^{'}\right)\\&=-\bar{k}_2^{'}\hat{T}-\bar{k}_1\bar{k}_2\hat{N}_1-\bar{k}_2\bar{k}_2\hat{N}_2\end{aligned} \tag{4.30}$$

bulunur. (4.30) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır ve (2.2.21) formülleri kullanılarak

$$\hat{N}_2^{'''}=\left(-\bar{k}_2^{''}+\bar{k}_1^{2}\bar{k}_2+\bar{k}_2^{3}\right)\hat{T}-\left(2\bar{k}_1\bar{k}_2^{'}+\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2\right)\hat{N}_1-3\bar{k}_2\bar{k}_2^{'}\hat{N}_2 \tag{4.31}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\det\left(\hat{N}_2^{'},\hat{N}_2^{''},\hat{N}_2^{'''}\right)&=\begin{vmatrix}-\bar{k}_2 & 0 & 0\\ -\bar{k}_2^{'} & -\bar{k}_1\bar{k}_2 & -\bar{k}_2\bar{k}_2\\ -\bar{k}_2^{''}+\bar{k}_1^{2}\bar{k}_2+\bar{k}_2^{3} & -2\bar{k}_1\bar{k}_2^{'}-\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2 & -3\bar{k}_2\bar{k}_2^{'}\end{vmatrix}\\&=-\bar{k}_2^{3}\left(3\bar{k}_1\bar{k}_2^{'}-2\bar{k}_1\bar{k}_2^{'}-\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2\right)\\&=\bar{k}_2^{3}\left(\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2^{'}\right)\\&=\bar{k}_2^{5}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)^{'}\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. Hipotezden $\det\left(\hat{N}_2', \hat{N}_2'', \hat{N}_2'''\right)=0$ olduğundan $\left(\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)'=0$ dır. Böylece $\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}=sabit$ olacağından $\hat{\alpha}$ eğrisi bir dual Bishop slant helistir.

$(\Leftarrow)$: $\hat{\alpha}$ bir dual Bishop slant helis olsun. (4.32) den

$$\det\left(\hat{N}_2', \hat{N}_2'', \hat{N}_2'''\right)=\overline{k}_2^5\left(\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)' \tag{4.33}$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 4.1 den $\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}=sabit$ olduğundan $\det\left(\hat{N}_2', \hat{N}_2'', \hat{N}_2'''\right)=0$ olduğu elde edilir.

■

Teorem 4.5. $\hat{\alpha}$ **,** D^3 te birim hızlı bir dual eğri olsun.

$\hat{\alpha}$ bir dual Bishop genel slant helistir $\Leftrightarrow$ $\hat{N}_1'''=-A\hat{N}_1'-3\overline{k}_1'\hat{T}'$ olmasıdır.

Burada $A=\overline{\kappa}^2-\dfrac{\overline{k}_1''}{\overline{k}_1}$ ve $\overline{k}_1^2+\overline{k}_2^2=\overline{\kappa}^2$ dir.

İspat: $\hat{\alpha}$ bir dual Bishop genel slant helis olsun. Bu taktirde $\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}=sabit$ dır.

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa $\left(\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)'=0$ olur. Buradan $\overline{k}_1'\overline{k}_2=\overline{k}_1\overline{k}_2'$ elde edilir. Diğer taraftan dual Bishop türev formüllerinden

$$\hat{N}_1'=-\overline{k}_1\hat{T} \tag{4.34}$$

dir. Buradan her iki tarafın ardarda türevi alınırsa,

$$\hat{N}_1''=-\overline{k}_1'\hat{T}-\overline{k}_1\hat{T}' \tag{4.35}$$

ve

$$\hat{N}_1'''=-\left(\overline{k}_1''\hat{T}+\overline{k}_1'\hat{T}'+\overline{k}_1'\hat{T}'+\overline{k}_1\hat{T}''\right) \tag{4.36}$$

bulunur. Benzer şekilde dual Bishop türev formüllerinden

$$\hat{T}'=\overline{k}_1\hat{N}_1+\overline{k}_2\hat{N}_2 \tag{4.37}$$

olduğunu biliyoruz. Eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\hat{T}'' = \bar{k}_1'\hat{N}_1 + \bar{k}_1\hat{N}_1' + \bar{k}_2'\hat{N}_2 + \bar{k}_2\hat{N}_2' \tag{4.38}$$

elde edilir. Buradan (4.38) eşitliğinin her iki tarafı $\bar{k}_1$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{k}_1\hat{T}'' &= \bar{k}_1\bar{k}_1'\hat{N}_1 + \bar{k}_1^2\hat{N}_1' + \bar{k}_2'\bar{k}_1\hat{N}_2 + \bar{k}_2\bar{k}_1\hat{N}_2' \\
&= \bar{k}_1'\hat{T}' + \bar{k}_1^2\hat{N}_1' - \bar{k}_1\bar{k}_2^2\hat{T} \\
&= \bar{k}_1'\hat{T}' + \bar{k}_1^2\hat{N}_1' - \bar{k}_1\bar{k}_2^2\left(-\frac{\hat{N}_1'}{\bar{k}_1}\right) \\
&= \bar{k}_1'\hat{T}' + \bar{k}_1^2\hat{N}_1' + \bar{k}_2^2\hat{N}_1' \\
&= \bar{k}_1'\hat{T}' + \bar{\kappa}^2\hat{N}_1'
\end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\hat{N}_1''' &= -\left(\bar{k}_1''\hat{T} + \bar{k}_1'\hat{T}' + \bar{k}_1'\hat{T}' + \bar{k}_1\hat{T}''\right) \\
&= -\bar{k}_1''\hat{T} - 2\bar{k}_1'\hat{T}' - \bar{k}_1'\hat{T}' - \bar{\kappa}^2\hat{N}_1' \\
&= \bar{k}_1''\frac{\hat{N}_1'}{\bar{k}_1} - \bar{\kappa}^2\hat{N}_1' - 3\bar{k}_1'\hat{T}' \\
&= -\left(\bar{\kappa}^2 - \frac{\bar{k}_1''}{\bar{k}_1}\right)\hat{N}_1' - 3\bar{k}_1'\hat{T}' \\
&= -A\hat{N}_1' - 3\bar{k}_1'\hat{T}'
\end{aligned} \tag{4.40}$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: Şimdi $\hat{N}_1''' = -A\hat{N}_1' - 3\bar{k}_1'\hat{T}'$ olsun. Dual Bishop türev formüllerinden

$$\hat{T} = -\frac{\hat{N}_1'}{\bar{k}_1} \tag{4.41}$$

olduğunu biliyoruz. Eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{T}' &= \left(-\frac{1}{\bar{k}_1}\hat{N}_1'\right)' \\
&= \frac{\bar{k}_1'\hat{N}_1' - \bar{k}_1\hat{N}_1''}{\bar{k}_1^2} \\
&= \frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2}\hat{N}_1' - \frac{1}{\bar{k}_1}\hat{N}_1''
\end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir. Şimdi tekrar her iki tarafın türevi alınıp düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
\hat{T}'' &= \left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)'\hat{N}_1' + \frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\hat{N}_1'' + \frac{-\overline{k}_1\hat{N}_1''' + \overline{k}_1'\hat{N}_1''}{\overline{k}_1^2} \\
&= \left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)'\hat{N}_1' + 2\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\hat{N}_1'' - \frac{1}{\overline{k}_1}\left(-A\hat{N}_1' - 3\overline{k}_1'\hat{T}'\right) \\
&= \left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)'\hat{N}_1' + 2\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\hat{N}_1'' + \frac{A}{\overline{k}_1}\hat{N}_1' + 3\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1}\hat{T}' \\
&= \left(\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)' + \frac{A}{\overline{k}_1}\right)\hat{N}_1' + 2\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\hat{N}_1'' + 3\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1}\hat{T}'
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

olur. Buradan tekrar dual Bishop türev formülleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)' + \frac{A}{\overline{k}_1}\right)\hat{N}_1' + 2\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\left(-\overline{k}_1'\hat{T} - \overline{k}_1\hat{T}'\right) + 3\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1}\left(\overline{k}_1\hat{N}_1 + \overline{k}_2\hat{N}_2\right) \\
&= \left(\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)' + \frac{A}{\overline{k}_1}\right)\hat{N}_1' - 2\frac{\left(\overline{k}_1'\right)^2}{\overline{k}_1^2}\hat{T} - 2\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1}\hat{T}' + 3\overline{k}_1'\hat{N}_1 + 3\frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\hat{N}_2 \\
&= \left(\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)' + \frac{A}{\overline{k}_1}\right)\hat{N}_1' - 2\frac{\left(\overline{k}_1'\right)^2}{\overline{k}_1^2}\hat{T} - 2\overline{k}_1'\hat{N}_1 - 2\frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\hat{N}_2 + 3\overline{k}_1'\hat{N}_1 + 3\frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\hat{N}_2 \\
&= \left(\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)' + \frac{A}{\overline{k}_1}\right)\hat{N}_1' - 2\frac{\left(\overline{k}_1'\right)^2}{\overline{k}_1^2}\left(-\frac{\hat{N}_1'}{\overline{k}_1}\right) + \overline{k}_1'\hat{N}_1 + \frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\hat{N}_2 \\
&= \left(\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2}\right)' + \frac{A}{\overline{k}_1}\right)\hat{N}_1' + 2\frac{\left(\overline{k}_1'\right)^2}{\overline{k}_1^3}\hat{N}_1' + \overline{k}_1'\hat{N}_1 + \frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\hat{N}_2
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, dual Bishop türev formüllerinden

$$\hat{T}' = \overline{k}_1\hat{N}_1 + \overline{k}_2\hat{N}_2 \tag{4.45}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan her iki tarafın türevi alınırsa

$$\hat{T}'' = \overline{k}_1'\hat{N}_1 + \overline{k}_1\hat{N}_1' + \overline{k}_2'\hat{N}_2 + \overline{k}_2\hat{N}_2' \tag{4.46}$$

bulunur. (4.44) ve (4.46) denklemi eşitlenirse

$$\frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2}{\overline{k}_1} = \overline{k}_2' \tag{4.47}$$

olur. Buradan

$$\frac{\overline{k}_1'\overline{k}_2 - \overline{k}_2'\overline{k}_1}{\overline{k}_2^2} = 0 \tag{4.48}$$

yazılabilir. Böylece

$$\left(\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)' = 0 \tag{4.49}$$

dır. Yani

$$\left(\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right) = sabit \tag{4.50}$$

olur. Dolayısıyla $\hat{\alpha}$ bir dual Bishop genel helistir.

■

Tanım 4.3. $\hat{\alpha} : I \subset R \to D^3$ bir birim hızlı dual eğri olsun. Dual uzayda $\hat{w}$ dual Bishop Darboux vektörleri sabit bir $\hat{\boldsymbol{d}}$ dual birim vektörü ile sabit bir $\overline{\phi}$ dual açısı yapıyorsa, $\hat{\alpha}$ dual eğrisine bir dual Bishop Darboux helis adı verilir. Bununla birlikte, eğer $\hat{w}_0$ dual birim Bishop Darboux vektörleri sabit bir $\hat{\boldsymbol{d}}$ dual birim vektörü ile sabit bir $\overline{\lambda}$ dual açısı yapıyorsa, $\hat{\alpha}$ dual eğrisine bir dual normalleşmiş Bishop Darboux helis adı verilir.

Teorem 4.6. Her dual Bishop slant helis aynı dual eksenli bir dual normalleşmiş Bishop Darboux helistir.

İspat: $\hat{\alpha}$, D^3 uzayında bir dual Bishop slant helis olsun. Teorem 4.2 den

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \hat{N}_1 \cos\overline{\phi} + \hat{N}_2 \sin\overline{\phi} \tag{4.51}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemi

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \cos\overline{\phi}\,\hat{N}_1 - \frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\cos\overline{\phi}\,\hat{N}_2 \tag{4.52}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\overline{\phi}$, $\hat{\boldsymbol{d}}$ ile $\hat{N}_1$ dual vektörleri arasındaki dual açıdır. Dual Bishop Darboux birim vektörünü $\hat{w}_0$ olarak alalım. Dual Bishop Darboux birim vektörünü $\hat{\boldsymbol{d}}$ vektöründe yerine koyarsak

$$\hat{\boldsymbol{d}} = -\frac{\cos\overline{\phi}}{\overline{k}_2}\,\hat{w}_0\,\|\hat{w}\| \tag{4.53}$$

olur. $\hat{\boldsymbol{d}}$ vektörü ve $\hat{w}_0$ dual Bishop Darboux birim vektörü arasındaki dual açı $\bar{\lambda}$ olsun. $\hat{\boldsymbol{d}}$ vektörü ile $\hat{w}_0$ dual Bishop Darboux birim vektörünün iç çarpımını alır ve $<\hat{\boldsymbol{d}}, \hat{w}_0> = \|\hat{\boldsymbol{d}}\| \cos\bar{\lambda}$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\|\hat{\boldsymbol{d}}\| \cos\bar{\lambda} &= <\hat{\boldsymbol{d}}, \hat{w}_0> = -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} < \hat{w}_0, \hat{w}_0 > \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \\
&= -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \\
&= -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\cos\bar{\lambda} &= -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{d}}\|} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \\
&= -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} \frac{1}{\left\| \cos\bar{\phi}\, \hat{N}_1 - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \cos\bar{\phi}\, \hat{N}_2 \right\|} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \\
&= -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} \frac{1}{\left\| \cos^2\bar{\phi} + \frac{\bar{k}_1^2}{\bar{k}_2^2} \cos^2\bar{\phi} \right\|} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \\
&= -\frac{\cos\bar{\phi}}{\bar{k}_2} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \frac{\bar{k}_2}{\cos\bar{\phi} \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \\
&= -1
\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\cos\bar{\lambda}$ sabittir ve böylece $<\hat{\boldsymbol{d}}, \hat{w}_0>$ sabittir. Dolayısıyla $\hat{\alpha}$, D^3 uzayında aynı dual eksenli dual normalleşmiş Bishop Darboux helistir.

■

Tanım 4.4. $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$ sıfırdan farklı eğrilikleri sırasıyla $\{\bar{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{2\alpha}\}$ ile $\{\bar{k}_{1\beta}, \bar{k}_{2\beta}\}$ ve Bishop çatıları sırasıyla $\{\hat{T}^\alpha, \hat{N}_1^\alpha, \hat{N}_2^\alpha\}$ ile $\{\hat{T}^\beta, \hat{N}_1^\beta, \hat{N}_2^\beta\}$ olan s_α ve s_β yay-uzunluklarıyla parametrelendirilmiş D^3 dual uzayında iki dual eğri olsun.

Eğer bu iki eğrinin dual teğet vektörleri aynı olacak biçimde yay-uzunluklarının bir

$$s_\alpha = \int \bar{\lambda}_\alpha^\beta(s_\beta) ds_\beta \tag{4.56}$$

değişken dönüşümü varsa; yani $\bar{\lambda}_{\alpha}^{\beta}$ değişken dönüşümü altında parametrelerin karşılık gelen bütün değerleri için

$$\hat{T}^{\beta} = \hat{T}^{\alpha} \tag{4.57}$$

oluyorsa, $\hat{\gamma}_{\alpha}(s_{\alpha})$ ve $\hat{\gamma}_{\beta}(s_{\beta})$ eğrilerine $\bar{\lambda}_{\alpha}^{\beta}$ değişken dönüşümüyle dual Bishop benzer eğrilerdir denir[5].

Teorem 4.7. $\hat{\gamma}_{\alpha}(s_{\alpha})$ ve $\hat{\gamma}_{\beta}(s_{\beta})$ iki dual eğri olsun. $\hat{\gamma}_{\alpha}(s_{\alpha})$ ve $\hat{\gamma}_{\beta}(s_{\beta})$, D^3 te Bishop çatısına göre değişken dönüşümü ile dual Bishop benzer eğriler olması için gerek ve yeter şart yay-uzunluklarının $\bar{\lambda}_{\alpha}^{\beta} = \dfrac{ds_{\beta}}{ds_{\alpha}} = \dfrac{\bar{k}_{1\alpha}}{\bar{k}_{1\beta}}$ ve $\bar{\lambda}_{\alpha}^{\beta} = \dfrac{ds_{\beta}}{ds_{\alpha}} = \dfrac{\bar{k}_{2\alpha}}{\bar{k}_{2\beta}}$ özel değişken dönüşümleri ile

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^{\beta}(s_{\beta}) &= \hat{N}_1^{\alpha}(s_{\alpha}) \\ \hat{N}_2^{\beta}(s_{\beta}) &= \hat{N}_2^{\alpha}(s_{\alpha}) \end{aligned} \tag{4.58}$$

olmasıdır.

İspat: $\hat{\gamma}_{\alpha}(s_{\alpha})$ ve $\hat{\gamma}_{\beta}(s_{\beta})$, D^3 te dual Bishop çatısına göre değişken dönüşümü ile dual Bishop benzer eğriler olsun. Böylece $\hat{T}^{\beta} = \hat{T}^{\alpha}$ dir. Bu eşitliğin s_{β} ya göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}^{\beta}}{ds_{\beta}} &= \frac{d\hat{T}^{\alpha}}{ds_{\beta}} \\ \frac{dT^{\beta}}{ds_{\beta}} + \varepsilon \frac{dT^{*\beta}}{ds_{\beta}} &= \frac{dT^{\alpha}}{ds_{\beta}} + \varepsilon \frac{dT^{*\alpha}}{ds_{\beta}} \\ \frac{dT^{\beta}}{ds_{\beta}} + \frac{dT^{\alpha}}{ds_{\beta}} + \varepsilon \left(\frac{dT^{*\beta}}{ds_{\beta}} + \frac{dT^{*\alpha}}{ds_{\beta}} \right) &= 0 + \varepsilon 0^{*} \end{aligned} \tag{4.59}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dT^{\beta}}{ds_{\beta}} = \frac{dT^{\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.60}$$

ve

$$\frac{dT^{*\beta}}{ds_{\beta}} = \frac{dT^{*\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.61}$$

dir.

(4.60) den

$$\frac{dT^{\beta}}{ds_{\beta}} = \frac{dT^{\alpha}}{ds_{\alpha}}\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.62}$$

olur. Dual Bishop türev formülleri kullanılarak,

$$k_{1\beta}N_1^{\beta} + k_{2\beta}N_2^{\beta} = \left[k_{1\alpha}N_1^{\alpha} + k_{2\alpha}N_2^{\alpha}\right]\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.63}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin doğruluğu için,

$$\begin{aligned} k_{1\beta}N_1^{\beta} &= k_{1\alpha}N_1^{\alpha}\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \\ N_1^{\beta} &= N_1^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} k_{2\beta}N_2^{\beta} &= k_{2\alpha}N_2^{\alpha}\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \\ N_2^{\beta} &= N_2^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.65}$$

olmalıdır.
(4.61) den,

$$\begin{aligned} \frac{dT^{*\beta}}{ds_{\beta}} &= \frac{dT^{*\alpha}}{ds_{\beta}} \\ \frac{dT^{*\beta}}{ds_{\beta}} &= \frac{dT^{*\alpha}}{ds_{\alpha}}\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \end{aligned} \tag{4.66}$$

olur. Dual Bishop türev formüllerinden,

$$k_{1\beta}N_1^{*\beta} + k_{2\beta}N_2^{*\beta} + k_{1\beta}N_1^{\beta} + k_{2\beta}^{*}N_2^{\beta} = \left[k_{1\alpha}N_1^{*\alpha} + k_{2\alpha}N_2^{*\alpha} + k_{1\alpha}^{*}N_1^{\alpha} + k_{2\alpha}^{*}N_2^{\alpha}\right]\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.67}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$$k_{1\beta}N_1^{*\beta} + k_{1\beta}N_1^{\beta} = \left[k_{1\alpha}N_1^{*\alpha} + k_{1\alpha}^{*}N_1^{\alpha}\right]\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.68}$$

ve

$$k_{2\beta}N_2^{*\beta} + k_{2\beta}^{*}N_2^{\beta} = \left[k_{2\alpha}N_2^{*\alpha} + k_{2\alpha}^{*}N_2^{\alpha}\right]\frac{ds_{\alpha}}{ds_{\beta}} \tag{4.69}$$

yazabiliriz. (4.68) den

$$k_{1\beta}N_1^{*\beta}-k_{1\alpha}N_1^{*\alpha}\frac{k_{1\beta}}{k_{1\alpha}}+k_{1\beta}N_1^{\beta}-k_{1\alpha}^{*}N_1^{\alpha}\frac{k_{1\beta}^{*}}{k_{1\alpha}^{*}}=0$$

$$k_{1\beta}\left(N_1^{*\beta}-N_1^{*\alpha}\right)+k_{1\beta}^{*}\left(N_1^{\beta}-N_1^{\alpha}\right)=0 \tag{4.70}$$

$$N_1^{*\beta}=N_1^{*\alpha}$$

bulunur. (4.69) dan

$$k_{2\beta}N_2^{*\beta}-k_{2\alpha}N_2^{*\alpha}\frac{k_{2\beta}}{k_{2\alpha}}+k_{2\beta}^{*}N_2^{\beta}-k_{2\alpha}^{*}N_2^{\alpha}\frac{k_{2\beta}^{*}}{k_{2\alpha}^{*}}=0$$

$$k_{2\beta}\left(N_2^{*\beta}-N_2^{*\alpha}\right)+k_{2\beta}^{*}\left(N_2^{\beta}-N_2^{\alpha}\right)=0 \tag{4.71}$$

$$N_2^{*\beta}=N_2^{*\alpha}$$

bulunur.

Son olarak, (4.64) ve (4.70) eşitliklerinden

$$\hat{N}_1^{\beta}=\hat{N}_1^{\alpha} \tag{4.72}$$

(4.65) ve (4.71) eşitliklerinden

$$\hat{N}_2^{\beta}=\hat{N}_2^{\alpha} \tag{4.73}$$

olur.

$(\Leftarrow)$: $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$, D^3 te dual Bishop çatısına göre $\bar{\lambda}_\alpha^\beta=\dfrac{ds_\beta}{ds_\alpha}=\dfrac{\bar{k}_{1\alpha}}{\bar{k}_{1\beta}}$ ve $\bar{\lambda}_\alpha^\beta=\dfrac{ds_\beta}{ds_\alpha}=\dfrac{\bar{k}_{2\alpha}}{\bar{k}_{2\beta}}$ özel değişken dönüşümleri ile

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^{\beta}(s_\beta)&=\hat{N}_1^{\alpha}(s_\alpha)\\ \hat{N}_2^{\beta}(s_\beta)&=\hat{N}_2^{\alpha}(s_\alpha)\end{aligned} \tag{4.74}$$

eşitliklerinin sağlandığı iki dual eğri olsun. İlk eşitliğin her iki tarafı $\bar{k}_{1\beta}$, ikinci eşitliğin her iki tarafı $\bar{k}_{2\beta}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{k}_{1\beta}\hat{N}_1^{\beta}(s_\beta)&=\bar{k}_{1\beta}\hat{N}_1^{\alpha}(s_\alpha)\\ \bar{k}_{2\beta}\hat{N}_2^{\beta}(s_\beta)&=\bar{k}_{2\beta}\hat{N}_2^{\alpha}(s_\alpha)\end{aligned} \tag{4.75}$$

olur. Her iki eşitliğin sağ kısmında bulunan eğrilikler $\bar{\lambda}_\alpha^\beta$ dönüşümden yararlanılarak düzenlenip her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\int \bar{k}_{1\beta}\hat{N}_1^{\beta}(s_\beta) = \int \bar{k}_{1\alpha}\hat{N}_1^{\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}$$
$$\int \bar{k}_{2\beta}\hat{N}_2^{\beta}(s_\beta) = \int \bar{k}_{2\alpha}\hat{N}_2^{\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.76}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\int \bar{k}_{1\beta}\hat{N}_1^{\beta}(s_\beta) + \bar{k}_{2\beta}\hat{N}_2^{\beta}(s_\beta) = \int \bar{k}_{1\alpha}\hat{N}_1^{\alpha}(s_\alpha) + \bar{k}_{2\alpha}\hat{N}_2^{\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.77}$$

olur. Dual Bishop türev formülleri kullanılarak integral sonuçlandırılırsa

$$\hat{T}^{\beta} = \hat{T}^{\alpha} \tag{4.78}$$

bulunur. Dolayısıyla $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$ dual Bishop benzer eğrilerdir.

■

Teorem 4.8. $\hat{\alpha}(s)$, s yay parametresine göre dual bir eğri olsun. $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\bar{\theta}),\quad \bar{\theta} = \int \bar{k}_1(s)d(s)$ olmak üzere bu eğrinin başka bir parametrelendirilmesi olsun. $\hat{T}$ bu eğrinin dual teğet birim vektörü olmak üzere;

$$\left[\frac{1}{\bar{f}\,'}\left(\hat{T}\,'' + \left(1+\bar{f}^{\,2}\right)\hat{T}\right)\right]' + \bar{f}\hat{T} = 0 \tag{4.79}$$

dır. Burada $\bar{f}(\bar{\theta}) = \dfrac{\bar{k}_2(\bar{\theta})}{\bar{k}_1(\bar{\theta})}$ ve $\hat{T}\,' = \dfrac{d\hat{T}}{d\bar{\theta}}$ dir.

İspat: $\hat{T}$ dual teğet birim vektörünün, s e göre türevinin;

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = k_1N_1 + k_2N_2 + \varepsilon\left(k_1N_1^* + k_2N_2^* + k_1^*N_1 + k_2^*N_2\right) \tag{4.80}$$

olduğunu Dual Bishop türev formüllerinden biliyoruz. Diğer taraftan, zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{d\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{ds} \tag{4.81}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\frac{d\bar{\theta}}{ds} = \bar{k}_1\left(\bar{\theta}\right) \tag{4.82}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{T}}{d\bar{\theta}} &= \frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{d\bar{\theta}} = \frac{k_1}{\bar{k}_1}N_1 + \frac{k_2}{\bar{k}_1}N_2 + \varepsilon\left(\frac{k_1}{\bar{k}_1}N_1^* + \frac{k_2}{\bar{k}_1}N_2^* + \frac{k_1^*}{\bar{k}_1}N_1 + \frac{k_2^*}{\bar{k}_1}N_2\right) \\
&= N_1 - \varepsilon\frac{k_1^*}{k_1}N_1 + \frac{k_2}{k_1}N_2 - \varepsilon\frac{k_2 k_1^*}{k_1^2}N_2 + \varepsilon N_1^* + \varepsilon\frac{k_2}{k_1}N_2^* + \varepsilon\frac{k_1^*}{k_1}N_1 + \varepsilon\frac{k_2^* k_1}{k_1^2}N_2 \\
&= N_1 + \varepsilon N_1^* + \frac{k_2}{k_1}N_2 + \varepsilon\frac{k_2}{k_1}N_2^* + \varepsilon\frac{k_2^* k_1}{k_1^2}N_2 - \varepsilon\frac{k_2 k_1^*}{k_1^2}N_2 \\
&= \hat{N}_1 + \frac{k_2}{k_1}N_2 + \varepsilon\frac{k_2}{k_1}N_2^* + \varepsilon\frac{k_2^* k_1 - k_2 k_1^*}{k_1^2}N_2 \\
&= \hat{N}_1 + \left[\frac{k_2}{k_1} + \varepsilon\left(\frac{k_2^* k_1 - k_2 k_1^*}{k_1^2}\right)\right]\left(N_2 + \varepsilon N_2^*\right) \\
&= \hat{N}_1 + \left[\frac{k_2 k_1 + \varepsilon\left(k_2^* k_1 - k_2 k_1^*\right)}{k_1^2}\right]\hat{N}_2 \\
&= \hat{N}_1 + \left[\frac{k_2 + \varepsilon k_2^*}{k_1 + \varepsilon k_1^*}\right]\hat{N}_2 \\
&= \hat{N}_1 + \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2 \\
&= \hat{N}_1 + \bar{f}\hat{N}_2
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

dir.

$\hat{N}_1$ nin s e göre türevinin;

$$
\frac{d\hat{N}_1}{ds} = -k_1 T + \varepsilon\left(-k_1 T^* - k_1^* T\right) \tag{4.84}
$$

olduğunu dual Bishop türev formüllerinden biliyoruz. Zincir kuralı kullanılarak eşitlik,

$$
\frac{d\hat{N}_1}{d\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{ds} = -k_1 T + \varepsilon\left(-k_1 T^* - k_1^* T\right) \tag{4.85}
$$

şeklinde yazılır.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{N}_1}{d\bar{\theta}} &= -\frac{k_1}{\bar{k}_1}T + \varepsilon\left(-\frac{k_1}{\bar{k}_1}T^* - \frac{k_1^*}{\bar{k}_1}T\right) \\
&= -T + \varepsilon\frac{k_1^*}{k_1}T - \varepsilon T^* - \varepsilon\frac{k_1^*}{k_1}T \\
&= -\hat{T}
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

$\hat{N}_2$ nin s göre türevinin;

$$\frac{d\hat{N}_2}{ds} = -k_2 T + \varepsilon\left(-k_2 T^* - k_2^* T\right) \tag{4.87}$$

olduğunu dual Bishop türev formüllerinden biliyoruz. Zincir kuralı kullanılarak eşitlik,

$$\frac{d\hat{N}_2}{d\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{ds} = -k_2 T + \varepsilon\left(-k_2 T^* - k_2^* T\right) \tag{4.88}$$

şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{N}_2}{d\bar{\theta}} &= -\frac{k_2}{\bar{k}_1}T + \varepsilon\left(-\frac{k_2}{\bar{k}_1}T^* - \frac{k_2^*}{\bar{k}_1}T\right)\\
\frac{d\hat{N}_2}{d\bar{\theta}} &= -\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{T}\\
\frac{d\hat{N}_2}{d\bar{\theta}} &= -\bar{f}\hat{T}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

bulunur. $\frac{d\hat{T}}{d\bar{\theta}} = \hat{N}_1 + \bar{f}.\hat{N}_2$, $\frac{d\hat{N}_1}{d\bar{\theta}} = -\hat{T}$, $\frac{d\hat{N}_2}{d\bar{\theta}} = -\bar{f}.\hat{T}$ eşitliklerinden,

$$\begin{bmatrix} \hat{T}'(\bar{\theta}) \\ \hat{N}_1'(\bar{\theta}) \\ \hat{N}_2'(\bar{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \bar{f}(\bar{\theta}) \\ -1 & 0 & 0 \\ -\bar{f}(\bar{\theta}) & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{T}(\bar{\theta}) \\ \hat{N}_1(\bar{\theta}) \\ \hat{N}_2(\bar{\theta}) \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

matrisi oluşur. $\hat{T}'$ nin $\bar{\theta}$ e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d^2\hat{T}}{d\bar{\theta}^2} = \hat{N}_1' + \bar{f}'\hat{N}_2 + \bar{f}\hat{N}_2' = \bar{f}'\hat{N}_2 - \left(1+\bar{f}^2\right)\hat{T} \tag{4.91}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\bar{f}'}.\left[\hat{T}'' + \left(1+\bar{f}^2\right)\hat{T}\right] = \hat{N}_2 \tag{4.92}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının $\bar{\theta}$ ye göre türevi alınır ve $\hat{N}_2' = \frac{d\hat{N}_2}{d\bar{\theta}} = -\bar{f}\hat{T}$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left[\frac{1}{\bar{f}'}\left(\hat{T}'' + \left(1+\bar{f}^2\right)\hat{T}\right)\right]' + \bar{f}\hat{T} = 0 \tag{4.93}$$

elde edilir.

■

Teorem 4.9. $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$ iki dual eğri olsun. $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$, D^3 te Bishop çatısına göre değişken dönüşümü ile dual Bishop benzer eğriler olması için gerek ve yeter şart toplam eğrilikler eşit, yani

$$\bar{\theta}(s_\beta) = \int \bar{k}_{1\beta}(s_\beta)\,ds_\beta = \int \bar{k}_{1\alpha}(s_\alpha)\,ds_\alpha = \bar{\theta}(s_\alpha) \tag{4.94}$$

olmak üzere

$$\bar{\lambda}_\alpha^\beta = \frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{\bar{k}_{1\alpha}}{\bar{k}_{1\beta}} = \frac{\bar{k}_{2\alpha}}{\bar{k}_{2\beta}} \tag{4.95}$$

özel dönüşümleri ile

$$\frac{\bar{k}_{2\beta}(s_\beta)}{\bar{k}_{1\beta}(s_\beta)} = \frac{\bar{k}_{2\alpha}(s_\alpha)}{\bar{k}_{1\alpha}(s_\alpha)} \tag{4.96}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.7. den $\hat{N}_1^\beta = \hat{N}_1^\alpha$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$N_1^\beta(s_\beta) + \varepsilon N_1^{*\beta}(s_\beta) = N_1^\alpha(s_\alpha) + \varepsilon N_1^{*\alpha}(s_\alpha) \tag{4.97}$$

olur. Bu eşitlikten

$$N_1^\beta(s_\beta) = N_1^\alpha(s_\alpha) \tag{4.98}$$

ve

$$N_1^{*\beta}(s_\beta) = N_1^{*\alpha}(s_\alpha) \tag{4.99}$$

yazılabilir. (4.98) eşitliğinin her iki tarafının s_β ya göre türevi alınırsa,

$$\left(N_1^\beta(s_\beta)\right)' = \left(N_1^\alpha(s_\alpha)\right)' \frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.100}$$

dır. Buradan

$$-k_{1\beta}(s_\beta)T^\beta(s_\beta) = -k_{1\alpha}(s_\alpha)T^\alpha(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.101}$$

olur. Eğriler dual Bishop benzer olduğundan dual teğetlerin reel kısımları eşit olacağından

$$k_{1\beta}(s_\beta) = k_{1\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.102}$$

olur. Böylece

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{k_{1\alpha}}{k_{1\beta}} \tag{4.103}$$

dır. Benzer şekilde (4.99) eşitliğinin her iki tarafının s_β ya göre türevi alınırsa,

$$\left(N_1^{*\beta}\left(s_\beta\right)\right)' = \left(N_1^{*\alpha}\left(s_\alpha\right)\right)' \frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.104}$$

olur. Buradan dual Bishop türev formüllerinden

$$\begin{gathered} -k_{1\beta}\left(s_\beta\right)T^{*\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\beta}^{*}\left(s_\beta\right)T^{\beta}\left(s_\beta\right) = \left[-k_{1\alpha}\left(s_\alpha\right)T^{*\alpha}\left(s_\alpha\right) - k_{1\alpha}^{*}\left(s_\alpha\right)T^{\alpha}\left(s_\alpha\right)\right]\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \\ k_{1\beta}\left(s_\beta\right)T^{*\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}\left(s_\alpha\right)T^{*\alpha}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} + k_{1\beta}^{*}\left(s_\beta\right)T^{\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}^{*}\left(s_\alpha\right)T^{\alpha}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = 0 \end{gathered} \tag{4.105}$$

yazılabilir. Eğri dual Bishop benzer olduğundan

$$\begin{aligned} T^{*\beta} &= T^{*\alpha} \\ T^{\beta} &= T^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.106}$$

dır. Buradan

$$\begin{gathered} k_{1\beta}\left(s_\beta\right)T^{*\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}\left(s_\alpha\right)T^{*\beta}\left(s_\beta\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} + k_{1\beta}^{*}\left(s_\beta\right)T^{\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}^{*}\left(s_\alpha\right)T^{\beta}\left(s_\beta\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = 0 \\ \left[k_{1\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}\right]T^{*\beta}\left(s_\beta\right) + \left[k_{1\beta}^{*}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}^{*}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}\right]T^{\beta}\left(s_\beta\right) = 0 \end{gathered} \tag{4.107}$$

olur. Böylece

$$\begin{gathered} k_{1\beta}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = 0 \\ k_{1\beta}^{*}\left(s_\beta\right) - k_{1\alpha}^{*}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = 0 \end{gathered} \tag{4.108}$$

bulunur. (4.108) den $k_{1\beta}^{*}\left(s_\beta\right) = k_{1\alpha}^{*}\left(s_\alpha\right)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}$ olacağından

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{k_{1\alpha}^{*}}{k_{1\beta}^{*}} \tag{4.109}$$

dir.

Teorem 4.7. den $\hat{N}_2^{\beta} = \hat{N}_2^{\alpha}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten

$$N_2^{\beta}(s_\beta) + \varepsilon N_2^{*\beta}(s_\beta) = N_2^{\alpha}(s_\alpha) + \varepsilon N_2^{*\alpha}(s_\alpha) \tag{4.110}$$

olur. İfadenin reel kısımları ve dual kısımları kendi içinde eşittir. Yani,

$$N_2^{\beta}(s_\beta) = N_2^{\alpha}(s_\alpha) \tag{4.111}$$

ve

$$N_2^{*\beta}(s_\beta) = N_2^{*\alpha}(s_\alpha) \tag{4.112}$$

dir. (4.111) eşitliğinin her iki tarafının s_β ya göre türevi alınırsa,

$$\left(N_2^{\beta}(s_\beta)\right)' = \left(N_2^{\alpha}(s_\alpha)\right)' \frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.113}$$

dual Bishop türev formüllerinden

$$-k_{2\beta}(s_\beta)T^{\beta}(s_\beta) = -k_{2\alpha}(s_\alpha)T^{\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.114}$$

Olur. Eğriler dual Bishop benzer olduğundan $T^{\beta} = T^{\alpha}$ dir. (4.114) eşitliği

$$k_{2\beta}(s_\beta)T^{\beta}(s_\beta) + k_{2\alpha}(s_\alpha)T^{\beta}(s_\beta)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = 0$$

$$\left[k_{2\beta}(s_\beta) + k_{2\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}\right]T^{\beta}(s_\beta) = 0 \tag{4.115}$$

$$k_{2\beta}(s_\beta) + k_{2\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = 0$$

olur. Buradan $k_{2\beta}(s_\beta) = k_{2\alpha}(s_\alpha)\dfrac{ds_\alpha}{ds_\beta}$ olacağından

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{k_{2\alpha}}{k_{2\beta}} \tag{4.116}$$

elde edilir. (4.112) eşitliğinin her iki tarafının s_β ya göre türevi alınırsa,

$$\left(N_2^{*\beta}(s_\beta)\right)' = \left(N_2^{*\alpha}(s_\alpha)\right)' \frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \tag{4.117}$$

bulunur. Dual Bishop türev formüllerinden

$$-k_{2\beta}(s_\beta)T^{*\beta}(s_\beta)-k_{2\beta}^*(s_\beta)T^\beta(s_\beta)=\left[-k_{2\alpha}(s_\alpha)T^{*\alpha}(s_\alpha)-k_{2\alpha}^*(s_\alpha)T^\alpha(s_\alpha)\right]\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} \quad (4.118)$$

olur. Eğriler dual Bishop benzer olduğundan $T^{*\beta}=T^{*\alpha}, T^\beta=T^\alpha$ dır. (4.118) eşitliğinden

$$\begin{aligned}&k_{2\beta}(s_\beta)T^{*\beta}(s_\beta)+k_{2\alpha}(s_\alpha)T^{*\beta}(s_\beta)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}+k_{2\beta}^*(s_\beta)T^\beta(s_\beta)+k_{2\alpha}^*(s_\alpha)T^\beta(s_\beta)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}=0\\&\left[k_{2\beta}(s_\beta)-k_{2\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}\right]T^{*\beta}(s_\beta)+\left[k_{2\beta}^*(s_\beta)-k_{2\alpha}^*(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}\right]T^\beta(s_\beta)=0\end{aligned} \quad (4.119)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}k_{2\beta}(s_\beta)-k_{2\alpha}(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}=0\\k_{2\beta}^*(s_\beta)-k_{2\alpha}^*(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}=0\end{aligned} \quad (4.120)$$

elde edilir. Buradan $k_{2\beta}^*(s_\beta)=k_{2\alpha}^*(s_\alpha)\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}$ olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha}=\frac{k_{2\alpha}^*}{k_{2\beta}^*} \quad (4.121)$$

dir. (4.103),(4.109),(4.116) ve (4.121) eşitliklerinden

$$\frac{k_{1\alpha}}{k_{1\beta}}=\frac{k_{1\alpha}^*}{k_{1\beta}^*}=\frac{ds_\beta}{ds_\alpha}=\frac{k_{2\alpha}}{k_{2\beta}}=\frac{k_{2\alpha}^*}{k_{2\beta}^*} \quad (4.122)$$

olur. Orantı özelliklerinden

$$\frac{k_{1\alpha}+\varepsilon k_{1\alpha}^*}{k_{1\beta}+\varepsilon k_{1\beta}^*}=\frac{ds_\beta}{ds_\alpha}=\frac{k_{2\alpha}+\varepsilon k_{2\alpha}^*}{k_{2\beta}+\varepsilon k_{2\beta}^*} \quad (4.123)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{\bar{k}_{1\alpha}}{\bar{k}_{1\beta}}=\frac{ds_\beta}{ds_\alpha}=\frac{\bar{k}_{2\alpha}}{\bar{k}_{2\beta}} \quad (4.124)$$

olur. Böylece

$$\frac{\bar{k}_{2\beta}(s_\beta)}{\bar{k}_{1\beta}(s_\beta)}=\frac{\bar{k}_{2\alpha}(s_\alpha)}{\bar{k}_{1\alpha}(s_\alpha)} \quad (4.125)$$

olmalıdır.

$(\Leftarrow)$: $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$ eğrileri için

$$\bar{\theta}(s_\beta)=\int \bar{k}_{1\beta}(s_\beta)\,ds_\beta=\int \bar{k}_{1\alpha}(s_\alpha)\,ds_\alpha=\bar{\theta}(s_\alpha) \tag{4.126}$$

dönüşümleri altında

$$\frac{\bar{k}_{2\beta}(s_\beta)}{\bar{k}_{1\beta}(s_\beta)}=\frac{\bar{k}_{2\alpha}(s_\alpha)}{\bar{k}_{1\alpha}(s_\alpha)} \tag{4.127}$$

eşitliği sağlanıyor olsun. Bu iki eğrinin dual teğetleri sırasıyla $\hat{T}^\alpha$ ve $\hat{T}^\beta$ olmak üzere Teorem 4.8. den sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\bar{f}_\alpha^{'}(\bar{\theta}_\alpha)}\left(\hat{T}^\alpha(\bar{\theta}_\alpha)^{''}+\left(1+\bar{f}_\alpha(\bar{\theta}_\alpha)^2\right)\hat{T}^\alpha(\bar{\theta}_\alpha)\right)\right]^{'}+\bar{f}_\alpha\hat{T}^\alpha(\bar{\theta}_\alpha)=0\\
&\left[\frac{1}{\bar{f}_\beta^{'}(\bar{\theta}_\beta)}\left(\hat{T}^\beta(\bar{\theta}_\beta)^{''}+\left(1+\bar{f}_\beta(\bar{\theta}_\beta)^2\right)\hat{T}^\beta(\bar{\theta}_\beta)\right)\right]^{'}+\bar{f}_\beta\hat{T}^\beta(\bar{\theta}_\beta)=0
\end{aligned} \tag{4.128}$$

eşitlikleri vardır.

$\bar{f}_\alpha(\bar{\theta}_\alpha)=\dfrac{\bar{k}_{2\alpha}(s_\alpha)}{\bar{k}_{1\alpha}(s_\alpha)}$ ve $\bar{f}_\beta(\bar{\theta}_\beta)=\dfrac{\bar{k}_{2\beta}(s_\beta)}{\bar{k}_{1\beta}(s_\beta)}$ olduğunu biliyoruz. (4.127) den $\bar{\theta}_\alpha=\bar{\theta}_\beta$ dönüşümü altında

$$\bar{f}_\alpha(\bar{\theta}_\alpha)=\bar{f}_\beta(\bar{\theta}_\beta) \tag{4.129}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.128) eşitlikleri birbirine eşittir. Böylece $\hat{\gamma}_\alpha(s_\alpha)$ ve $\hat{\gamma}_\beta(s_\beta)$ eğrileri dual Bishop benzer eğrilerdir.

∎

5. DUAL BİSHOP ÇATISINA GÖRE DUAL BİRİM KÜRESEL EĞRİLER

Bu bölümde dual birim küre üzerinde bulunan eğrileri dual Bishop çatısına göre inceleyeceğiz.

5.1. Dual Bishop Çatısına Göre Dual Birim Küre Üzerinde Bulunan Bazı Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Bu kısımda D^3 uzayında $\left\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\right\}$ dual Bishop çatısına göre $\hat{T}-sabit$ ve $\hat{N}-sabit$ eğrileri tanımlayarak, dual birim küre üzerinde bu eğrilere ait bazı teoremler verilecektir. Ayrıca bir eğrinin birim dual küre üzerinde bulunma koşulu elde edilecektir.

Tanım 5.1.1. $\hat{\alpha}: I \subset R \to D^3$ birim hızlı bir dual eğri ve $\left\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\right\}$ bu eğrinin dual Bishop çatısı olsun. $\hat{\alpha}$ nın dual teğet bileşeninin normu sabit ise $\hat{\alpha}$ ya Bishop $\hat{T}-sabit$ eğri denir. Eğer $\hat{\alpha}$ nın dual teğet bileşeninin normu sıfır ise eğriye birinci çeşit Bishop $\hat{T}-sabit$, diğer durumlarda ikinci çeşit Bishop $\hat{T}-sabit$ eğrisi denir.

Tanım 5.1.2. $\hat{\alpha}: I \to D^3$ birim hızlı bir dual eğri ve $\left\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\right\}$ bu eğrinin dual Bishop çatısı olsun. $\hat{\alpha}$ nın dual normal bileşeninin normu sabit ise $\hat{\alpha}$ ya Bishop $\hat{N}-sabit$ eğri denir. Eğer $\hat{\alpha}$ nın dual normal bileşeninin normu sıfır ise eğriye birinci çeşit Bishop $\hat{N}-sabit$, diğer durumlarda ikinci çeşit Bishop $\hat{N}-sabit$ eğrisi denir.

$\hat{\alpha}(s) = \overline{\alpha}(s) + \varepsilon\overline{\alpha}^*(s)$, $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde birim hızlı bir dual küresel eğri olsun. $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin D^3 dual uzayında $\left\{\hat{T}, \hat{N}_1, \hat{N}_2\right\}$ dual Bishop çatısına göre yer vektörü

$$\hat{\alpha}(s) = \overline{m}_0(s)\hat{T}(s) + \overline{m}_1(s)\hat{N}_1(s) + \overline{m}_2(s)\hat{N}_2(s) \tag{5.1.1}$$

biçimindedir. (5.1.1) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınıp, dual Bishop türev formülleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}'(s) &= \bar{m}_0'\hat{T} + \bar{m}_0\hat{T}' + \bar{m}_1'\hat{N}_1 + \bar{m}_1\hat{N}_1' + \bar{m}_2'\hat{N}_2 + \bar{m}_2\hat{N}_2' \\ \hat{T} &= \bar{m}_0'\hat{T} + \bar{m}_0\left(\bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2\right) + \bar{m}_1'\hat{N}_1 + \bar{m}_1\left(-\bar{k}_1\hat{T}\right) + \bar{m}_2'\hat{N}_2 + \bar{m}_2\left(-\bar{k}_2\hat{T}\right) \\ &= \left(\bar{m}_0' - \bar{m}_1\bar{k}_1 - \bar{m}_2\bar{k}_2\right)\hat{T} + \left(\bar{m}_0\bar{k}_1 + \bar{m}_1'\right)\hat{N}_1 + \left(\bar{m}_0\bar{k}_2 + \bar{m}_2'\right)\hat{N}_2\end{aligned} \quad (5.1.2)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\bar{m}_0' - \bar{m}_1\bar{k}_1 - \bar{m}_2\bar{k}_2 &= 1 \\ \bar{m}_0\bar{k}_1 + \bar{m}_1' &= 0 \\ \bar{m}_0\bar{k}_2 + \bar{m}_2' &= 0\end{aligned} \quad (5.1.3)$$

bulunur.

$$\langle \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \rangle = 1 \overset{(5.1.1)}{\Rightarrow} \bar{m}_0^2 + \bar{m}_1^2 + \bar{m}_2^2 = 1 \quad (5.1.4)$$

olur. Her iki tarafın s e göre türevinden

$$\begin{aligned}2\bar{m}_0'\bar{m}_0 + 2\bar{m}_1'\bar{m}_1 + 2\bar{m}_2'\bar{m}_2 &= 0 \\ \bar{m}_0'\bar{m}_0 + \bar{m}_1'\bar{m}_1 + \bar{m}_2'\bar{m}_2 &= 0 \\ \overset{(5.1.3)}{\Rightarrow} \left(1 + \bar{m}_1\bar{k}_1 + \bar{m}_2\bar{k}_2\right)\bar{m}_0 - \bar{m}_0\bar{k}_1\bar{m}_1 - \bar{m}_0\bar{k}_2\bar{m}_2 &= 0 \\ \bar{m}_0 + \bar{m}_1\bar{k}_1\bar{m}_0 + \bar{m}_2\bar{k}_2\bar{m}_0 - \bar{m}_0\bar{k}_1\bar{m}_1 - \bar{m}_0\bar{k}_2\bar{m}_2 &= 0\end{aligned}$$

$$\bar{m}_0 = 0 \quad (5.1.5)$$

olur. Buradan

$$\hat{\alpha}(s) = \bar{m}_1\hat{N}_1 + \bar{m}_2\hat{N}_2 \quad (5.1.6)$$

olur. (5.1.3) denklemleri

$$\begin{aligned}\bar{m}_1\bar{k}_1 + \bar{m}_2\bar{k}_2 &= 1 \\ \bar{m}_1' &= 0 \\ \bar{m}_2' &= 0\end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Buradan $\bar{m}_1' = 0 \Rightarrow \bar{m}_1 = \bar{c}_1$ ve $\bar{m}_2' = 0 \Rightarrow \bar{m}_2 = \bar{c}_2$ olur. Yani $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ dual sabitleri vardır. Dolayısıyla

$$\bar{c}_1\bar{k}_1 + \bar{c}_2\bar{k}_2 = 1 \quad (5.1.8)$$

yazılabilir.

Teorem 5.1.1. $\hat{\alpha}(s)=\overline{\alpha}(s)+\varepsilon\overline{\alpha}^{*}(s)$, $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde birim hızlı bir küresel eğri olsun. $\hat{\alpha}(s)$ birinci çeşit $\hat{T}-sabit$ eğrisidir.

İspat : $\hat{\alpha}(s)=\overline{m}_0(s)\hat{T}(s)+\overline{m}_1(s)\hat{N}(s)+\overline{m}_2(s)\hat{n}(s)$ eğrisi, $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde birim hızlı bir küresel eğri olsun. (5.1.5) den dolayı $\overline{m}_0=0$ olduğundan teğet bileşenin normu sıfırdır. Bu durumda eğri birinci çeşit $\hat{T}-sabit$ eğrisidir.

■

Sonuç : $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde ikinci çeşit $\hat{T}-sabit$ eğrisi yoktur.

Teorem 5.1.2. $\hat{\alpha}(s)=\overline{\alpha}(s)+\varepsilon\overline{\alpha}^{*}(s)$, $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde birim hızlı bir küresel eğri olsun. $\hat{\alpha}(s)$ ikinci çeşit $\hat{N}-sabit$ eğrisidir.

İspat : $\hat{\alpha}(s)=\overline{m}_0(s)\hat{T}(s)+\overline{m}_1(s)\hat{N}(s)+\overline{m}_2(s)\hat{n}(s)$ eğrisi, $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde birim hızlı bir küresel eğri olsun. $\langle\hat{\alpha},\hat{\alpha}\rangle=1$ olduğundan, $\overline{m}_1^2+\overline{m}_2^2=1$ dir. Buradan $\overline{m}_1$ ve $\overline{m}_2$ aynı anda 0 olamaz. Dolayısıyla eğri ikinci çeşit $\hat{N}-sabit$ eğrisidir.

■

Sonuç : $\hat{S}^2$ birim küresi üzerinde birinci çeşit $\hat{N}-sabit$ eğrisi yoktur.

Teorem 5.1.3. $\hat{\alpha}(s)$ birim hızlı bir dual eğri olsun. $\hat{\alpha}$ eğrisi $\hat{S}(\overline{r})$ birim dual küresi üzerinde bir eğri ise bu taktirde

$$\left(\frac{\overline{k}_2'}{\overline{k}_1^2\left(\dfrac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}\right)'}\right)^2+\left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_2^2\left(\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\right)'}\right)^2=\overline{r}^2 \tag{5.1.9}$$

dir.

İspat: $\hat{\alpha}$ eğrisi, $\overline{r}$ yarıçaplı ve merkezi O olan $\hat{S}^2$ küresi üzerinde olsun.

$< \hat{\alpha}, \hat{\alpha} >= \bar{r}^2$ dir. Eşitliğin her iki tarafının türevi alınır ve Bishop türev formülleri kullanılırsa $< \hat{\alpha}, \hat{T} >= 0$ elde edilir. Eşitliğin tekrar türevi alınır ve yine Bishop türev formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &< \hat{T}, \hat{T} > + < \hat{\alpha}, \bar{k}_1 \hat{N}_1 + \bar{k}_2 \hat{N}_2 >= 0 \\ &\bar{k}_1 < \hat{\alpha}, \hat{N}_1 > + \bar{k}_2 < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 >= -1 \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Eşitliğin her iki tarafının tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{k}_1' < \hat{\alpha}, \hat{N}_1 > + \bar{k}_1 < \hat{\alpha}', \hat{N}_1 > + \bar{k}_1 < \hat{\alpha}, \hat{N}_1' > + \bar{k}_2' < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 > + \bar{k}_2 < \hat{\alpha}', \hat{N}_2 > + \bar{k}_2 < \hat{\alpha}, \hat{N}_2' > &= 0 \\ \bar{k}_1' < \hat{\alpha}, \hat{N}_1 > - \bar{k}_1^2 < \hat{\alpha}, \hat{T} > + \bar{k}_2' < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 > - \bar{k}_2^2 < \hat{\alpha}, \hat{T} > &= 0 \\ \bar{k}_1' < \hat{\alpha}, \hat{N}_1 > + \bar{k}_2' < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 > &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

elde edilir. (5.1.10) eşitlikliğinden

$$< \hat{\alpha}, \hat{N}_1 >= \frac{-1 - \bar{k}_2 < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 >}{\bar{k}_1} \tag{5.1.12}$$

Olur. Bu eşitlik (5.1.11) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\bar{k}_1' \frac{-1 - \bar{k}_2 < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 >}{\bar{k}_1} + \bar{k}_2' < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 >= 0 \\ &\frac{\bar{k}_2' \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \bar{k}_1'}{\bar{k}_1} < \hat{\alpha}, \hat{N}_2 >= \frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1} \\ &< \hat{\alpha}, \hat{N}_2 >= \frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_2' \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \bar{k}_1'} = \frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2 \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \right)'} \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

olur. (5.1.13) eşitliği (5.1.12) eşitliğinde kullanılırsa,

$$< \hat{\alpha}, \hat{N}_1 >= \frac{-1 - \bar{k}_2 \dfrac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_2' \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \bar{k}_1'}}{\bar{k}_1} = \frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_2^2 \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right)'} \tag{5.1.14}$$

bulunur. Buradan

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_2^2 \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right)'} \hat{N}_1 + \frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2 \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \right)'} \hat{N}_2 \tag{5.1.15}$$

dir. Kürenin yarıçapı ile eğri arasında $\overline{r}^2 = \left\|\hat{\alpha} - 0\right\|$ biçiminde bir bağıntı vardır.

Buradan

$$\left(\frac{\overline{k}_2'}{\overline{k}_2^2 \left(\dfrac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2} \right)'} \right)^2 + \left(\frac{\overline{k}_1'}{\overline{k}_1^2 \left(\dfrac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1} \right)'} \right)^2 = \overline{r}^2 \tag{5.1.16}$$

elde edilir.

■

5.2. Dual Küresel Gösterge Eğrileri Ve Karakterizasyonları

Bu kısımda 3 boyutlu dual uzayda bulunan dual eğrilerin dual Bishop çatısı vektörlerinin dual birim kürenin merkezine taşınmasıyla elde edilen dual küresel gösterge eğrilerini oluşturacağız. Böyle eğrilere dual Bishop küresel gösterge eğrileri denir. Bu yeni eğrilerin dual Frenet çatısı eğrinin dual Bishop bileşenleri yardımı ile oluşturulur.

İlk olarak teğet dual Bishop küresel görüntüsünü kullanarak eğrinin Frenet çatısını oluşturalım.

$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(s)$, D^3 uzayında düzgün bir eğri olsun. bu eğrinin birim dual teğet vektörünü $\hat{S}^2$ birim dual küresinin merkezine taşıyarak $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(s_\varepsilon)$ dual küresel gösterge eğrisini elde ederiz. Bu eğriye $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(s)$ eğrisinin dual Bishop teğet küresel göstergesi ya da bileşeni adı verilir.

$\hat{\varepsilon}$ nın s e göre diferansiyeli,

$$\hat{\varepsilon}' = \frac{d\hat{\varepsilon}}{ds_\varepsilon} \cdot \frac{ds_\varepsilon}{ds} = \overline{k}_1 \hat{N}_1 + \overline{k}_2 \hat{N}_2 \tag{5.2.1}$$

dir. Burada s e göre türevi ' ile, s_ε a göre türevi $\cdot$ ile göstereceğiz. Dual Frenet ve Bishop eğrilikleri arasındaki

$$\overline{\kappa}(s) = \sqrt{\overline{k}_1^2 + \overline{k}_2^2} = \frac{ds_\varepsilon}{ds} \tag{5.2.2}$$

bağıntısından

$$\hat{T}_\varepsilon = \frac{\bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \tag{5.2.3}$$

yazılabilir. Her iki tarafın s_ε a göre türevi alınırsa

$$\dot{\hat{T}}_\varepsilon = \hat{T}'.\frac{ds}{ds_\varepsilon}$$

$$= \frac{\left(\bar{k}_1'\hat{N}_1 + \bar{k}_1\hat{N}_1' + \bar{k}_2'\hat{N}_2 + \bar{k}_2\hat{N}_2'\right)\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} - \frac{1}{2}\left(\bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2\right)\left(2\bar{k}_1'\bar{k}_1 + 2\bar{k}_2'\bar{k}_2\right)\frac{1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}}}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}}$$

$$= \frac{\bar{k}_1'\hat{N}_1 + \bar{k}_1\hat{N}_1' + \bar{k}_2'\hat{N}_2 + \bar{k}_2\hat{N}_2'}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} - \frac{\left(\bar{k}_1'\bar{k}_1 + \bar{k}_2'\bar{k}_2\right)\left(\bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2\right)}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}$$

$$= \frac{\bar{k}_1'\hat{N}_1 - \bar{k}_1^2\hat{T} + \bar{k}_2'\hat{N}_2 - \bar{k}_2^2\hat{T}}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} - \frac{\bar{k}_1'\bar{k}_1^2\hat{N}_1 + \bar{k}_1'\bar{k}_1\bar{k}_2\hat{N}_2 + \bar{k}_2'\bar{k}_2\bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2'\bar{k}_2^2\hat{N}_2}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}$$

$$= -\left(\frac{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}\right)\hat{T} + \left(\frac{\bar{k}_1'}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} - \frac{\bar{k}_1\left(\bar{k}_1'\bar{k}_1 + \bar{k}_2'\bar{k}_2\right)}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\right)\hat{N}_1 + \left(\frac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} - \frac{\bar{k}_2\left(\bar{k}_1'\bar{k}_1 + \bar{k}_2'\bar{k}_2\right)}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\right)\hat{N}_2$$

$$= -\hat{T} + \left(\frac{\bar{k}_1'\bar{k}_1^2 + \bar{k}_1'\bar{k}_2^2 - \bar{k}_1'\bar{k}_1^2 - \bar{k}_2'\bar{k}_2\bar{k}_1}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\right)\hat{N}_1 + \left(\frac{\bar{k}_2'\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2'\bar{k}_2^2 - \bar{k}_2\bar{k}_1'\bar{k}_1 - \bar{k}_2'\bar{k}_2^2}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\right)\hat{N}_2$$

$$= -\hat{T} + \left(\frac{\bar{k}_2\left(\bar{k}_1'\bar{k}_2 - \bar{k}_2'\bar{k}_1\right)_1}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\right)\hat{N}_1 + \left(\frac{\bar{k}_1\left(\bar{k}_2'\bar{k}_1 - \bar{k}_1'\bar{k}_2\right)_1}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\right)\hat{N}_2$$

$$= -\hat{T} + \left(\frac{\bar{k}_2\bar{k}_2^2}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'\right)\hat{N}_1 + \left(\frac{\bar{k}_1\bar{k}_1^2}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\right)\hat{N}_2$$

$$= -\hat{T} + \frac{\bar{k}_2^3}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'\hat{N}_1 + \frac{\bar{k}_1^3}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\hat{N}_2 \tag{5.2.4}$$

elde edilir. Böylece,

$$\bar{\kappa}_\varepsilon = \left\|\dot{\hat{T}}_\varepsilon\right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_2^3}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)'\right)^2 + \left(\frac{\bar{k}_1^3}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2}\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)'\right)^2} \tag{5.2.5}$$

elde edilir. Buradan dual eğrinin dual normali,

$$\hat{N}_{\varepsilon} = \frac{1}{\bar{\kappa}_{\varepsilon}} \hat{T}_{\varepsilon}^{'} = \frac{1}{\bar{\kappa}_{\varepsilon}} \left(-\hat{T} + \frac{\bar{k}_2^3}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2} \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)^{'} \hat{N}_1 + \frac{\bar{k}_1^3}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^2} \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^{'} \hat{N}_2 \right) \tag{5.2.6}$$

bulunur. Son olarak da dual eğrinin dual binormali $\hat{B}_{\varepsilon} = \hat{T}_{\varepsilon} \times \hat{N}_{\varepsilon}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\varepsilon} = \frac{1}{\bar{\kappa}_{\varepsilon}} \Bigg[& \left(\frac{\bar{k}_1^4}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^{'} - \frac{\bar{k}_2^4}{\left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)^{'} \right) \hat{T} \\ & - \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \hat{N}_1 + \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \hat{N}_2 \Bigg] \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

olur. Eğrinin dual burulması

$$\bar{\tau}_{\varepsilon} = \left\langle \hat{B}, \hat{N}^{'} \right\rangle = \frac{\begin{bmatrix} -\bar{k}_1 \left(3\bar{k}_2^{'} \left(\bar{k}_1^{'}\bar{k}_1 + \bar{k}_2^{'}\bar{k}_2 \right) - \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \left(\bar{k}_2^{''} - \bar{k}_2 \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \right) \right) \\ +\bar{k}_2 \left(3\bar{k}_1^{'} \left(\bar{k}_1^{'}\bar{k}_1 + \bar{k}_2^{'}\bar{k}_2 \right) - \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \left(\bar{k}_1^{''} - \bar{k}_1 \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \right) \right) \end{bmatrix}}{\left(\bar{k}_1^2 \left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \right)^{'} \right)^2 + \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right)^3} \tag{5.2.8}$$

dır.

Şimdi $\hat{N}_1$ dual Bishop küresel göstergesini kullanarak eğrinin dual Frenet çatısını oluşturalım.

$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(s)$, D^3 uzayında düzgün bir eğri olsun. Bu dual eğrinin birim dual normal vektörünü $\hat{S}^2$ dual birim küresinin merkezine taşıyarak, $\hat{\delta} = \hat{\delta}(s_{\delta})$ küresel gösterge eğrisini elde ederiz. Bu dual eğri, $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(s)$ eğrisinin $\hat{N}_1$ dual Bishop küresel göstergesi ya da bileşeni olarak adlandırılır.

$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(s)$ dual düzgün eğrisinin normal dual Bishop küresel gösterge $\hat{\delta} = \hat{\delta}(s_{\delta})$ olsun. $\hat{\delta}$ nın s e göre diferansiyeli,

$$\hat{\delta}^{'} = \frac{d\hat{\delta}}{ds_{\delta}} \frac{ds_{\delta}}{ds} = -\bar{k}_1 \hat{T} \tag{5.2.9}$$

eşitliğinden $\hat{T}_{\delta} = \hat{T}$ ve $\dfrac{ds_{\delta}}{ds} = -\bar{k}_1$ olur. İlk eşitlikte iki tarafın s e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\hat{T}_\delta}{ds} = \frac{d\hat{T}_\delta}{ds_\delta}\frac{ds_\delta}{ds} = \frac{d\hat{T}}{ds} = \bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{T}}\left(-\bar{k}_1\right) &= \bar{k}_1\hat{N}_1 + \bar{k}_2\hat{N}_2 \\ &= -\hat{N}_1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

olur. Buradan dual eğrinin dual eğriliği

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_\delta &= \left\|\dot{\hat{T}}_\delta\right\| = \sqrt{\left\langle -\hat{N}_1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2, -\hat{N}_1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2 \right\rangle} \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^2} \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

olur. Dual eğrinin dual normali,

$$\hat{N}_\delta = \frac{\dot{\hat{T}}}{\bar{\kappa}_\delta} = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}\left(-\hat{N}_1 - \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2\right) \tag{5.2.12}$$

olur. Buradan dual eğrinin dual binormali için $\hat{B}_\delta = \hat{T}_\delta \times \hat{N}_\delta$ çarpımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \hat{B}_\delta &= T \times \left(-\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}}\hat{N}_1 - \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}}\hat{N}_2\right) \\ &= \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}}\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_1 - \hat{N}_2\right) \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

bulunur. Eğrinin dual binormalini hesaplamak için $\bar{\tau}_\delta = \left\langle \hat{B}_\delta, \hat{N}_\delta^{'} \right\rangle$ eşitliğini kullacağız. İlk olarak

$$\hat{N}_{\delta}^{'}=\frac{-\bar{k}_1^{'}\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}+\bar{k}_1\dfrac{\bar{k}_1^{'}\bar{k}_1+\bar{k}_2^{'}\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}\left(\hat{N}_1+\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2\right)$$

$$-\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(-\bar{k}_1\hat{T}+\frac{\bar{k}_2^{'}\bar{k}_1-\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2}\hat{N}_2-\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\bar{k}_2\hat{T}\right)$$

$$=\frac{-\bar{k}_1^{'}\left(\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2\right)+\bar{k}_1\bar{k}_1^{'}\bar{k}_1+\bar{k}_2^{'}\bar{k}_2\bar{k}_1}{\left(\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2\right)\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(\hat{N}_1+\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\hat{N}_2\right)$$

$$-\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(-\bar{k}_1\hat{T}+\frac{\bar{k}_2^{'}\bar{k}_1-\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2}\hat{N}_2-\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\bar{k}_2\hat{T}\right)$$

$$=\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}{\bar{k}_1}\right)\hat{T}+\left(-\dfrac{\bar{k}_1^{'}}{\bar{k}_1}+\dfrac{\bar{k}_1^{'}\bar{k}_1+\bar{k}_2^{'}\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}\right)\hat{N}_1\\+\left(-\dfrac{\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2}+\dfrac{\bar{k}_1^{'}\bar{k}_1\bar{k}_1+\bar{k}_2^{'}\bar{k}_2\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}-\dfrac{\bar{k}_2^{'}\bar{k}_1-\bar{k}_1^{'}\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2}\right)\hat{N}_2\end{array}\right] \tag{5.2.14}$$

dir. Buradan

$$\bar{\tau}_{\delta}=\left\langle\hat{B}_{\delta},\hat{N}_{\delta}^{'}\right\rangle=-\frac{\bar{k}_1^2}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}\left(\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\right)^{'} \tag{5.2.15}$$

dır.

Şimdi $\hat{N}_2$ dual Bishop küresel göstergesini kullanarak eğrinin dual Frenet çatısını oluşturalım.

$\hat{\gamma}=\hat{\gamma}(s)$, D^3 uzayındadüzgün bir eğri olsun. Bu dual eğrinin birim dual normal vektörünü $\hat{S}^2$ dual birim küresinin merkezine taşıyarak $\hat{\varphi}=\hat{\varphi}(s_{\varphi})$ dual küresel gösterge eğrisini elde ederiz. Bu dual eğri, $\hat{\gamma}=\hat{\gamma}(s)$ eğrisinin $\hat{N}_2$ dual Bishop küresel göstergesi ya da bileşeni olarak adlandırılır.

$\hat{\gamma}=\hat{\gamma}(s)$ dual düzgün eğrisinin normal dual Bishop küresel göstergesi $\hat{\varphi}=\hat{\varphi}(s_{\varphi})$ olsun. $\hat{\varphi}$ nın s e göre diferansiyeli,

$$\hat{\varphi}^{'}=\frac{d\hat{\varphi}}{ds_{\varphi}}\frac{ds_{\varphi}}{ds}=-\bar{k}_2\hat{T} \tag{5.2.16}$$

eşitliğinden $\hat{T}_{\varphi}=\hat{T},\dfrac{ds_{\varphi}}{ds}=-\bar{k}_2$

olur. İlk eşitlikte iki tarafın s e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\hat{T}_{\varphi}}{ds}=\frac{d\hat{T}_{\varphi}}{ds_{\varphi}}\frac{ds_{\varphi}}{ds}=\frac{d\hat{T}}{ds}=\bar{k}_1\hat{N}_1+\bar{k}_2\hat{N}_2$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{T}}\left(-\bar{k}_2\right)&=\bar{k}_1\hat{N}_1+\bar{k}_2\hat{N}_2\\&=-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_1-\hat{N}_2\end{aligned}\tag{5.2.17}$$

olur. Buradan dual eğrinin dual eğriliği

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_{\varphi}&=\left\|\dot{\hat{T}}_{\varphi}\right\|=\sqrt{\left\langle -\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_1-\hat{N}_2,-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_1-\hat{N}_2\right\rangle}\\&=\sqrt{1+\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)^2}\end{aligned}\tag{5.2.18}$$

olur. Bu dual eğrinin dual normali,

$$\hat{N}_{\varphi}=\frac{\dot{\hat{T}}}{\bar{\kappa}_{\varphi}}=\frac{-\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_1+\hat{N}_2\right)\tag{5.2.19}$$

olur. Buradan dual eğrinin dual binormali için $\hat{B}_{\varphi}=\hat{T}_{\varphi}\times\hat{N}_{\varphi}$ çarpımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\hat{B}_{\varphi}&=T\times\left(-\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\hat{N}_1-\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\hat{N}_2\right)\\&=\frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(\hat{N}_1-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_2\right)\end{aligned}\tag{5.2.20}$$

bulunur. Eğrinin dual binormalini hesaplamak için $\bar{\tau}_{\delta}=\left\langle\hat{B}_{\delta},\hat{N}_{\delta}^{'}\right\rangle$ eşitliğini kullacağız. İlk olarak

$$\hat{N}_\varphi' = \frac{-\bar{k}_2'\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}+\bar{k}_2\dfrac{\bar{k}_1'\bar{k}_1+\bar{k}_2'\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_1+\hat{N}_2\right)$$

$$-\frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(+\frac{\bar{k}_1'\bar{k}_2-\bar{k}_2'\bar{k}_1}{\bar{k}_2^2}\hat{N}_1-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\bar{k}_1\hat{T}-\bar{k}_1\hat{T}\right)$$

$$=\frac{-\bar{k}_2'\left(\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2\right)+\bar{k}_2\bar{k}_1'\bar{k}_1+\bar{k}_2'\bar{k}_2\bar{k}_2}{\left(\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2\right)\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\hat{N}_1+\hat{N}_2\right)$$

$$-\frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left(+\frac{\bar{k}_1'\bar{k}_2-\bar{k}_2'\bar{k}_1}{\bar{k}_2^2}\hat{N}_1-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\bar{k}_1\hat{T}-\bar{k}_2\hat{T}\right)$$

$$=\frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}{\bar{k}_2}\right)\hat{T}+\left(-\dfrac{\bar{k}_2'\bar{k}_1}{\bar{k}_2^2}+\dfrac{\bar{k}_1'\bar{k}_1\bar{k}_1+\bar{k}_2'\bar{k}_2\bar{k}_1}{\left(\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2\right)\bar{k}_2}-\dfrac{\bar{k}_1'\bar{k}_2-\bar{k}_2'\bar{k}_1}{\bar{k}_2^2}\right)\hat{N}_1\\ +\left(-\dfrac{\bar{k}_2'}{\bar{k}_2}+\dfrac{\bar{k}_1'\bar{k}_1+\bar{k}_2'\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}\right)\hat{N}_2\end{array}\right] \qquad (5.2.21)$$

dir. Buradan

$$\bar{\tau}_\varphi=\left\langle \hat{B}_\varphi,\hat{N}_\varphi'\right\rangle=\frac{\bar{k}_2^2}{\bar{k}_1^2+\bar{k}_2^2}\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)' \qquad (5.2.22)$$

dır.

KAYNAKLAR

1. Zıplar, E., Şenol, A., Yaylı, Y. On Darboux Helices in Euclidean 3-Space. Global Journal Of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences. 2012, 13(12), 72-80.
2. Bishop, R. L. There is More Than One Way to Frame a Curve. American Mathematical Monthly. 1975, 82, 246-251.
3. Bukcu, B., Karacan, M. K. The Slant Helices According to Bishop Frame. International Scholarly and Scientific Research & Innovation. 2009, 3(11), 1010-1013.
4. Yılmaz, S., Özyılmaz, E., Turgut, M. New Spherical Indicatrices and Their Characterizations. An. Şt. Univ. Ovidius Constanta. 2010, 18(2), 337-354.
5. Babadağ, F. On Similar Partner Curves in Bishop Frames with Variable Transformations. International Journal of New Technology and Research. 2016, 2(4), 59-64.
6. Clifford, W. K. Preliminary Sketch of Biquaternions. Proceedings of the London Mathematical Society. 1873, 4, 361–395.
7. Hacısalihoğlu, H. H. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Ankara Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları. Ankara, Türkiye, 1983.
8. Lee, J. W., Choi, J. H., Jin, D. H. Slant Dual Mannheim Partner Curves in the Dual Space. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. 2011, 31(6), 1535-1544.
9. Şahiner, B., Önder, M. Slant Helices, Darboux Helices and Similar Curves in Dual Space D^3 . Mathematica Moravica. 2016, 20(1), 89-103.
10. Önder, M., Uğurlu, H. H. Normal and Spherical Curves in Dual Space D^3 . Mediterranean Journal of Mathematics. 2013, 1527-1537.
11. Kisi, İ., Büyükkütük, S., Öztürk, G., Zor, A. A new characterization of curves on dual unit sphere. Journal of Abstract and Computational Mathematics. 2017, 1(2), 71-76.
12. Carmo, M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, New Jersey, ABD, 1976.

13. Gray, A., Abbena E., Salamon S. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Third Edition (Studies in Advanced Mathematics). Chapman &Hall/CRC, 2006.
14. Güven, İ. A. Dual Küresel Eğriler ve Regle Yüzeyler. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 2010, 71 s. (Doktora Tezi)
15. Güven, İ. A. The Relation Among Bishop Spherical Indicatrix Curves. International Mathematical Forum. 2011, 25(6), 1209-1215.
16. Dimentberg, F. M. The Screw Calculus and its Applications in Mechanics, (Clearinghouse for Federal Technical and Scientific Information, İng. Çev.) Izdatel'stvo Nauka, Moskova, Rusya, 1965.
17. Yücesan, A., Ayyıldız, N., Çöken, A. C. On Rectifying Dual Space Curves. Revista Matematica Complutense. 2007, 2(20), 497-506.
18. Karacan, M. K., Bukcu, B., Yüksel, N. On the dual Bishop Darboux Rotation axis of the dual space curve. Applied Sciences. 2008, 10, 115-120.
19. Büyükkütük, S. Öztürk, G. Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space E^3. General Mathematics Notes. 2015, 28(1), 81-91.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Damla GÖKYEŞİL

Doğum Yeri ve Yılı : Üsküdar, 1994

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : damlagokyesil@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Bergama 13 Nisan Anadolu Lisesi, 2011

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015

Mesleki Deneyim

Manisa Özel Sınav Ortaokulu	2016-2017
Manisa Özel Final Lisesi	2017-…(halen)