T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATMEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

GRAFLARDA ORTALAMA ÖRTÜ SAYISI ÜZERİNE

ALİ BAGATARHAN

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi DERYA DURGUN

MANİSA–2018

ALİ BAGATARHAN | GRAFLARDA ORTALAMA ÖRTÜ SAYISI ÜZERİNE | 2018

TEZ ONAYI

Ali BAGATARHAN tarafından hazırlanan **"Graflarda Ortalama Örtü Sayısı Üzerine"** adlı tez çalışması 02/08/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN**
	Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Ali KONURALP**
	Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Şahlar MEHERREM**
	Yaşar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ali BAGATARHAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\lfloor \ \rfloor$	Alt tamsayı değeri
λ(G)	Ayrıt bağlantılılık sayısı
κ'(G)	Ayrıt birleştirilmişlik sayısı
$\kappa(G)$	Bağlantılılık Değeri
γ(G)	Baskın küme
G^k	Bir grafın k-ıncı kuvveti
β_v(G)	Bölgesel örtü sayısı
C_n	Çevre graf
H_n	Dümen graf
$F_{a,b}$	Fan graf
$\overline{k}(G)$	G nin ortalama bağlantılılığı
Q_n	Hiperküp
$G_1 \square G_2$	İki grafın Kartezyen çarpımı
$G+H$	İki grafın toplamı
$K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$	k parçalı tam graf
$\overline{\beta}(G)$	Ortalama örtü sayısı
β(G)	Örtü sayısı
$p_{(a,b)}$	Piramit graf
K_n	Tam graf
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$W_{1,n+1}$	Tekerlek graf
$\lceil \ \rceil$	Üst tamsayı değeri
N(v)	v tepesinin açık komşuluğu
deg(v)	v tepesinin derecesi
P_n	Yol graf

ŞEKİLLER DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN'a, yüksek lisans eğitimim sırasında karşılaştığım zorluklarda bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren hocam Sayın Doç. Dr. Ali KONURALP'e ve öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen, hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Ali BAGATARHAN
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans

Graflarda Ortalama Örtü Sayısı Üzerine

Ali BAGATARHAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN

Bu tezde, Graf Teori de kullanılan ölçümlerden biri olan örtü sayısı üzerine tanımlanmış olan ortalama örtü sayısı üzerine çalışılmıştır. Bazı özel graf sınıfları için ortalama örtü sayıları hesaplanmış, genel sonuçlar elde edilerek, ispatları ile birlikte verilmiştir Çalışmanın tamamında bağlantılı, basit ve yönsüz graflar ele alınmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, Graf Teorinin tarihçesinden bahsedilmiştir. Graf Teorinin temellerini atan ünlü matematikçi Leonhard Euler'in çözmeye çalıştığı Königsberg Köprü problemi ifade edilmiştir. Ardından bu alanda çalışan diğer bilim adamları ve çalışmaları hakkında özet bilgiler verilmiştir. Graf Teori'de kullanılan zedelenebilirlik ölçümlerine de yer verilip, Graf Teori'nin gelişen teknoloji ile birlikte günümüzde nerelerde ve nasıl kullanıldığına yer verilmiştir. İkinci bölümde, graf teorinin temellerini oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İspatlarda kullanılan örtü sayısı, bölgesel örtü sayısı, ortalama örtü sayısı, değişmeli tepe ve benzeri graf teori kavramlarının tanımlarına değinilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde ise sırasıyla, materyal ve yöntemler ile elde edilen sonuçlar teoremlerle ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde ortalama örtü sayısı kavramı bir örnek ile açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ise bu ölçüm ile ilgili elde edilen sonuçlar, teorem olarak ispatları ile birlikte verilmiştir.

Son bölümde, çalışmaya ait sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf Teori, Zedelenebilirlik, Örtü, Ortalama Örtü Sayısı
2018, 36 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

On the Average Covering Numbers of Graphs

Ali BAGATARHAN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Derya DURGUN

In this thesis, average covering number defined on covering number, one of the measures used in Graph Theory, was studied. For some special graf class the average covering numbers were calculated, with the general results being given together with the proofs. All of the study is handled with connection, simple and non-directional graphs.

This thesis consists of five parts. In the first part, the history of Graf Theory is mentioned. The problem of the Königsberg Bridge, which the famous mathematician Leonhard Euler, who laid the foundations of Graf Theory, tried to solve. Then, it has been given short information about other scientists and their works who have worked in that area. The vulnerability measurements used in Graf Theory are also included, and where and how the Graf Theory is used together with the developing technology is given. In the second part, basic definitions and theorems which constitute the bases of the graph theory are given. The definitions of the number of covers used in proofs, local covering number, average covering number, vertex transitive and similar graph theory are mentioned.

In the third and fourth sections, the results obtained by the materials and methods, respectively, are expressed in the theorems. In the third chapter, the concept of average number of covers is explained with an example. In the fourth part, the results obtained with this measurement are given together with proofs as theorem.

In the last chapter, the conclusions and recommendetions of this study are mentioned.

Keywords: Graph Theory, vulnerability, covering, average covering number

2018, 36 pages

1. GİRİŞ

Graf teorinin temelleri ünlü matematikçi Leonhard Euler (1707–1783) tarafından atılmıştır. Euler, Königsberg şehrini iki adaya ve iki kara parçasına ayıran Pregel nehrinin üzerine kurulan yedi köprünün, herhangi bir köprüden yola çıkarak ve her bir köprüden yalnız bir kez geçerek tüm şehri dolaşabilmenin mümkün olmadığını, grafla modelleme yaparak ispatlamıştır. Euler bu problemin çözümüyle uğraşırken belki de matematiğin yeni bir uygulama alanını oluşturduğunu farketmemiştir.

Sonraki yıllarda yapılan çalışmalarla, graf teori günlük hayatta karşılaşılan problemlere uygulanmıştır. Euler' den sonra, 1847 yılında G. R. Kirchoff'un (1824-1887) ağaç teorisinin elektrik devrelerine uygulanması ve A. Cayley (1821-1895) tarafından C_nH_{2n+2} doymuş hidrokarbon izomerlerinin sınıflandırılması çalışması sırasında ağaç kavramını keşfetmesi graf teorinin farklı çalışma alanlarını ortaya çıkarmıştır. 1852' de Thomas Gutherie meşhur dört renk problemini buldu. Bu problem bir harita üzerinde aynı sınırı paylaşan iki ülke farklı renkte boyanmak üzere, haritanın tamamının dört renkle boyanıp boyanamayacağını araştırır. 1857' de İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton, Icosian oyununu ortaya atmış, bunu daha sonra yirmibeş pound karşılığında oyun üreticilerine satmıştır. Oyun düzgün onikiyüzlünün bir tepesinden başlayarak yine aynı tepeye dönmek koşuluyla her tepeden ve her ayrıttan yalnız bir kez geçerek bir Hamilton çevre bulmak şeklinde özetlenebilir.

Gelişen teknoloji ile mühendislikten, askeri alana kadar karşılaşılan birçok problemin modellenmesinde ve çözümünde graf teori yaygın olarak kullanılmaya başlamıştır.

Bir iletişim ağında bazı tepe (ayrıt) veya tepelerde (ayrıtlarda) oluşan hasarlar bu ağın işlevini tam olarak yerine getirmesini engeller. Bu nedenle, iletişim ağları tasarlanırken, ağın bozulmalara göstereceği direnç önemlidir. Direnci fazla olan model, diğerlerine göre tercih edilerek bu tip bir sorunla karşılaşılması halinde, oluşabilecek hasar baştan en aza indirgenebilir. Zedelenebilirlik, bunun gibi durumlarda ağın hasar görmesinden sonra iletişim kesilene kadar geçen sürede ağın dayanma gücü olarak adlandırılır. Örneğin; bir ülkenin su dağıtım sisteminde; barajlardan dağıtım yapıldığını düşünelim. Savaş, doğal afetler gibi acil durumlarda en az kaç tane baraj veya iletişim hattı bozulduğunda ağın dağıtım özelliğini yitireceği önemlidir. Bu ağ yapısı modellenirken, zedelenebilirlik düşünülürse geri dönüşü mümkün olmayan problemler yaşanmaz. Barajları grafın tepeleri, iletişim hatlarını da grafın ayrıtları olarak düşünülürse; bu problem bir grafla modellenmiş olur ve grafın zedelenebirlik değerini belirlemek için çeşitli ölçümlerden yararlanılabilir. Bu ölçümleri yapabilmek için var olan ölçümleri kullanmak ve yeterli olmadığı zaman yeni ölçümler oluşturmak gerekmektedir.

Tepeler ve ayrıtlar arasındaki iletişim ve erişilebilirlik açısından problemin amaç fonksiyonuna uygun olarak; bağlantılılık (connectivity), ayrıt bağlantılılık (edge-connectivity), bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük (edge-integrity) gibi yeni kavramlar tanımlanmıştır.

Bağlantılılık (connectivity), ayrıt bağlantılılık (edge-connectivity), bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük (edge-integrity) kavramları grafın tüm yapısındaki iletişimi incelerken, örtü ve ortalama örtü ölçümlerinde bölgesel yapı irdelenmektedir. Yani; tepelerin etkileşim halinde olduğu bitişik tepeler arasındaki iletişim ölçülmektedir. Bu durumda, komşuluk kavramı önem kazanmaktadır.

Bu çalışmanın tamamında bağlantılı, basit ve yönsüz graflar ele alınmış ve çeşitli graf sınıfları üzerinde ortalama örtü sayıları için genel sonuçlar elde edilerek, ispatları verilmiştir. Günlük hayatta karşılaşılan problemlerinin graflarla modellenerek çözüme ulaştırılması bazı durumlarda klasik çözüm yöntemlerinden daha pratiktir. Böyle durumlarda kullanılacak olan ölçüm probleme göre farklılık göstermektedir. Zamanla ortalama örtü sayısı karşılaşılan probleme göre seçilebilecek ölçümlerden biri haline gelmiştir. Literatürde yeni tanımlanan ortalama örtü sayısı ölçümü üzerine az sayıda çalışma olduğundan, bu çalışma ile bu eksiklik biraz olsun giderilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmanın tamamında kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verildikten sonra farklı graf sınıflarının ortalama örtü sayıları bulunmaya çalışılmıştır. Elde edilen sonuçların genelleştirilmiş olması verilen herhangi bir n (tepe sayısı) değeri için ortalama örtü sayısının kolayca hesaplanmasını sağlamaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Çalışmanın bu bölümünde, graf teoride kullanılan temel graf tanımlar ve grafların genel özelliklerine yer verilmiştir. Bu çalışmada, G grafı bağlantılı, basit ve yönlendirilmemiş bir grafı göstermektedir.

Zedelenebilirlik, bir ağda bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücüdür. Graf Teori'de zedelenebilirlik değeri oldukça önemli yer tutar ve bu değeri hesaplamak için farklı ölçümler mevcuttur. Bu bölümde, farklı ölçümlerin tanımlarıda yer almaktadır.

Tanım 2.1: $G=\left(V\left(G\right),\ E\left(G\right)\right)$ grafı, tepeler denilen boş olmayan bir $V\left(G\right)$ sonlu objeler kümesi ile birlikte, G grafının farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir $E\left(G\right)$ (boş olabilir) ayrıtlar kümesidir [1].

Tanım 2.2: Bir graftaki başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan ayrıta bukle denir [2].

Tanım 2.3: Bir grafta en az bir ayrıt yönlü ise, bu grafa yönlü (directed) aksi halde yönsüz veya yönlendirilmemiş (undirected) graf denir [2].

Tanım 2.4: Bir G grafının herhangi iki tepesi arasında birden fazla ayrıt varsa bu ayrıtlara çok katlı ayrıt, bu tür graflara ise çok katlı (multiple) graf denir [2].

Tanım 2.5: Çok katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara basit (simple) graf denir[2].

Tanım 2.6: Bir G grafında e ayrıtı u ve v tepelerini birleştiriyorsa, $e=\left(u,v\right)$ biçiminde gösterilir. u ve v tepelerine bitişik tepeler (adjacent vertices) denir [1].

Tanım 2.7: Bir G grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa G grafına bağlantılı veya birleştirilmiş (connected) graf denir [1].

Teorem 2.8: n tepeli m ayrıtlı bir G grafının bağlantılı olabilmesi için $m \geq n-1$ olmalıdır [1].

Tanım 2.9: Bir G grafında herhangi bir v tepesinin açık komşuluğu, $N(\text{v})$, bu tepeye bitişik olan tepeler kümesi olarak tanımlanır. Kapalı komşuluğu, $N[\text{v}]$,ise açık komşuluğundaki tepeler kümesine v tepesinin eklenmesiyle elde edilir. $N(\text{v})=\{\text{u}:(\text{u},\text{v})\in \text{E}\}, N[\text{v}]=N(\text{v})\cup\{\text{v}\}$ şeklinde ifade edilir [1].

Tanım 2.10: Bir G grafında v tepeleri için, $e_i=\left(v_{i-1},\ v_i\right)$ ve

$v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ v_2,\ldots,\ v_{n-1},\ e_n,\ v_n$ olmak üzere $v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ v_2,\ldots,\ v_{n-1},\ e_n,\ v_n$ biçiminde oluşan tepe ve ayrıt dizilişine yürüyüş (walk) denir[1].

Tanım 2.11: Tüm ayrıtları birbirinden farklı olan bir yürüyüşe zincir (trail) denir [1].

Tanım 2.12: Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan her tepe bir kez kullanılıyorsa bu yürüyüşe yol (path) denir. n tepeli bir yolda ayrıt sayısı $n-1$ dir [1].

Tanım 2.13: Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan ayrıt sayısına yolun uzunluğu (length of path) denir [1].

Tanım 2.14: Bir G grafında u ve v gibi iki tepe arasındaki yollar içinde minimum uzunluğu olanın uzunluğuna; u ile v tepelerinin uzaklığı (distance) denir ve $d(u,v)$ biçiminde gösterilir [1].

Tanım 2.15: Bir G grafında herhangi bir $v \in V$ derecesi (degree), o tepenin bitişik olduğu tepelerin sayısıdır ve deg(v) ile gösterilir [1].

Tanım 2.16: Bir G grafının tepe derecelerinin en küçüğünü veren tepeye minimum dereceli tepe denir ve $\delta(G)$ grafın minimum tepe derecesini gösterir [1].

Tanım 2.17: Bir G grafının tepe derecelerinin en büyüğünü veren tepeye maksimum dereceli tepe denir ve $\Delta(G)$ grafın maksimum tepe derecesini gösterir[1].

Teorem 2.18: n tepeli m ayrıtlı bir bağlantılı G grafında tepe derecelerinin toplamı ayrıt sayısının iki katıdır[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m.$$

Tanım 2.19:Tüm tepeleri birbirinden farklı ve tepe sayısı $n \geq 3$ olan kapalı bir yürüyüşe çevre (cycle) denir[1].

Tanım 2.20:(P_n)Başlangıç ve bitiş tepeleri birinci dereceden, diğer $n-2$ tepesi ikinci dereceden olan grafa yol(path) graf denir.

Tanım 2.21: Bir G grafının tüm tepelerinin derecesi iki ise bu grafa çevre (cycle) graf denir. n tepeli bir çevre grafı C_n ile gösterilir. n tepeli bir çevre grafın ayrıt sayısı n dir [1].

Tanım 2.22: Bir G grafının u ve v tepelerini birleştiren yol, uç tepeleri dışında ortak bir tepeye sahip değilse bu yola içten ayrık yol (internally disjoint path) denir [1].

Tanım 2.23: Eğer bir G grafı bağlantılı ve hiçbir çevreye sahip değilse bu grafa ağaç (acylic) graf denir[1].

Tanım 2.24: n sayıda tepeye sahip bir G grafının tüm tepeleri birbiri ile bitişik ise bu grafa tam (complete) graf denir ve K_n ile gösterilir. n tepeli bir tam grafın ayrıt sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ dir [1].

Tanım 2.25: Bir G grafında V tepeler kümesi $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ve $V_1 \cap V_2 = V$ olacak şekilde iki kümeye ayrılabiliyorsa bu grafa iki parçalı graf denir. [1].

Tanım 2.26: ($K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$) Bir G grafında V tepeler kümesi, $\bigcap_{i=1}^{k} V_i = \varnothing$, $\bigcap_{i=1}^{k} V_i = V$, olacak şekilde $v_1, v_2, \ldots., v_k$ k ayrık alt kümeye ayrılmak üzere, her bir v_i, $(\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{k})$ alt kümesinde bulunan her tepe kendi kümesindeki tepelere bitişik değil fakat diğer $k-1$ kümedeki her bir tepeye bitişik olacak şekilde oluşturuluyorsa bu grafa k parçalı tam graf denir.[1]

Tanım 2.27: $n+1$ tepeli bir G grafında n tane tepe bir dereceli, bir tane tepe n dereceli ise bu graf yıldız (star) adını alır ve $K_{1,n}$ ile gösterilir. $n+1$ tepeli bir yıldız grafın ayrıt sayısı n dir [1].

Tanım 2.28: $n+1$ tepeli bir G grafında, bir tepe n dereceli, diğer tüm tepeler üç dereceli ise bu graf tekerlek (wheel) adını alır ve W_{n+1} ile gösterilir. $n+1$ tepeli bir tekerlek grafın ayrıt sayısı $2n$ dir[1].

Tanım 2.29: $r \in Z^+$ olmak üzere bir G grafında $\forall\, v \in V$ için $\deg(\mathrm{v}) = \mathrm{r}$ ise G grafına r-düzenli (r-regular) graf denir. n tepeli bir r-düzenli grafın ayrıt sayısı $\frac{nr}{2}$ dir [1].

Tanım 2.30: Bağlantılı bir G grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın bağlantılılığı (connectivity) denir ve $\kappa(\mathrm{G})$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.31: Bir G grafında, her $u-v$ tepe çifti arasında en az k tane içten ayrık yol varsa, G grafı k-bağlantılıdır denir [3].

Tanım 2.32: Bir G grafında, $u-v$ tepeleri arasındaki içten ayrık yolların sayısı $k(u,v)$ ile gösterilir ve $u-v$ nin bağlantılığı olarak tanımlanır. $k_i(u,v)$; uzunluğu i ayrıtlı olan $u-v$ arasındaki içten ayrık yolların sayısı olarak tanımlanır [3].

Tanım 2.33: n tepeli bir G grafında tüm tepe çiftlerinin bağlantılılığının toplamı G grafının toplam bağlantılılığı (total connectivity) olarak tanımlanır ve κ(G) ile gösterilir [3].

Tanım 2.34: n tepeli bir G grafında tüm tepe çiftlerinin bağlantılılıklarının ortalaması, G nin ortalama bağlantılılığı (average connectivity) olarak tanımlanır ve $\overline{\kappa}(G)$ ile gösterilir. Yani,

$$\overline{\kappa}(G)=\frac{\kappa(G)}{\binom{n}{2}}$$

dır [3].

Teorem 2.35: Bağlantılı bir G grafında, $k(u,v)\leq \min\{\deg(u), \deg(v)\}$ [3].

Tanım 2.36: Bir G grafını bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az ayrıt sayısına ayrıt bağlantılılık sayısı (edge connectivity number) denir ve $k'(G)$ ile gösterilir [3].

Teorem 2.37: n tepeli herhangi bir G grafı için, $\delta(G)\geq\kappa'(G)\geq\kappa(G)$ dır [1].

Tanım 2.38: Bir G grafında $S\subseteq V(G)$ olmak üzere, S kümesi grafın bitişik olmayan tepelerinden oluşuyorsa, S ye grafın bağımsız kümesi (independent set) denir. En fazla elemana sahip olan bağımsız kümenin eleman sayısına ise G grafının bağımsızlık sayısı (independence number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.39: Bir G grafında $S\subseteq V(G)$ olmak üzere, grafın her ayrıtının en az bir uç tepesi S kümesinin elemanı ise S kümesine grafın örtü kümesi (vertex cover set) denir. En az elemana sahip olan örtü kümesinin eleman sayısına ise G grafının örtü sayısı (vertex cover number) denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.40: n tepeli bir G grafındaki tepelerin, bitişik tepeler farklı renkte olmak şartıyla boyanmasına tepe boyama (vertex-coloring) denir. Tepelerin boyanması için gerekli en az renk sayısına grafın kromatik sayısı (chromatic number) denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir [2].

Teorem 2.41: n tepeli m ayrıtlı bir G grafında, $(\chi(G)-1)n\leq 2m$ [2].

Teorem 2.42: n tepeli bir G grafında, $\overline{\kappa}(G)\leq\frac{\chi(G)-1}{\chi(G)}n$ [4].

Tanım 2.43: $S \subseteq V$ olmak üzere, eğer V de bulunan her tepe S kümesinde bulunuyor ya da S kümesindeki bir tepeye bitişik oluyor ise, S ye baskın bir kümedir denir. Başka bir deyişle, $S \subseteq V, \bigcup_{v \in S} N[\mathrm{v}] = V$ ise, S baskın bir kümedir.

Minimum elemana sahip baskın bir kümenin eleman sayısı, $\gamma(\mathrm{G})$, G grafının baskınlık sayısı olarak tanımlanır

$$\gamma(\mathrm{G}) = \min\{|S| : \bigcup_{v \in S} N[\mathrm{v}] = V; S \subseteq V\}$$

ile ifade edilir[1].

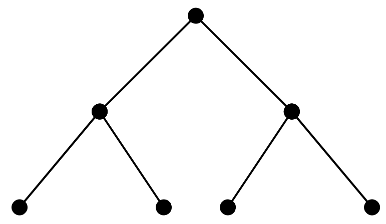
Tanım 2.44: G_1 ve G_2 gibi iki grafın çarpımı $G_1 \square G_2$ ile gösterilir ve G_1in tepeler kümesi V_1 , G_2 nin tepeler kümesi V_2 olsun. $G_1 \square G_2$ grafının tepe kümesi V_1 ve V_2

nin kartezyen çarpımıdır. G_1 ve G_2 nin kartezyen çarpımı,

$V_1 \square V_2 = \{(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_1), (\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2), ..., (\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_m)(\mathrm{u}_2, \mathrm{v}_1)(\mathrm{u}_2, \mathrm{v}_2), ..., (\mathrm{u}_2, \mathrm{v}_m), ..., (\mathrm{u}_n, \mathrm{v}_1)(\mathrm{u}_n, \mathrm{v}_2), ..., (\mathrm{u}_n, \mathrm{v}_m)\}$ dır. $G_1 \square G_2$ grafının ayrıtları için $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_1)$, $\mathrm{v} = (\mathrm{u}_2, \mathrm{v}_2)$ tepelerini ele alalım. Eğer $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2$ ve v_1 bitişik v_2 ya da $v_1 = v_2$ ve u_1 bitişik u_2 ise, u ve v tepeleri $G_1 \square G_2$ grafında bitişiktirler [1].

Tanım 2.45: G ve H herhangi iki graf olmak üzere, $H(V) \subset G(V)$ ve $H(E) \subset G(E)$ ise H grafına G grafının alt grafı (subgraf) denir ve $H \subset G$ biçimde gösterilir [1].

Tanım 2.46: Ağaç grafların en uçta bulunan tepelerine yaprak tepe, başlangıçta bulunan tepesine kök tepe, bir tepenin altında bulunan tepelere çocuk tepe (child) denir. Bir ağacın derinliği, o ağacın kök tepesine en uzak olan yaprağının uzaklığı ile ölçülür. Her tepesinde en fazla iki çocuk tepe bulunan ağaçlara ikili ağaç (binary tree) denir. Tam ikili ağaçta, yaprak tepeler dışındaki tüm tepelerin iki çocuk tepesi bulunmaktadır [1]. Şekil 2.2 de tam ikili bir ağaç görülmektedir.



Şekil 2.1. Tam ikili ağaç

Tanım 2.47: Yönsüz bir grafının k ıncı kuvveti G^k tepelerde aynı kümeye sahip olan ancak G deki uzaklıkları en fazla k olduğundan iki tepenin komşu olduğu bir grafdır.[5]

Tanım 2.48: G grafının bir otomorfizmi komşuları komşulara ve komşu olmayanları komşu olmayanlara götüren bir önerme olmak üzere eğer $V(G)$ değişmeli tepe ise $\varphi : V(G) \to V(G)$ otomorfizmadır ve Aut(φ) ile gösterilir[6].

Tanım 2.49: H_n dümen graf, $n+1$ tekerlek grafı üzerinde çevrenin herbir tepesine birer sarkıt(pendant) ayrıt eklenmesiyle elde eldilen graftır. W_{n+1} tekerlek grafı n tepeli bir çevre ve çevrenin her bir tepesiyle bitişik başka bir tepeyi içerir(bu tepe merkez tepe olarak bilinir) Merkez tepe v_{n+1} çevre tepeleri $v_1, v_2, ..., v_n$ ve grafın uç tepeleri $u_1, \mathrm{u}_2, ..., \mathrm{u}_n$ şeklinde gösterilebilir[7].

Tanım 2.50: P_n, n tepeli bir yol graf ve $\overline{K}_m$, m tepeli boş graf olmak üzere, bir yelpaze(fan) graf $\overline{K}_m + P_n$ graf toplamı ile tanımlanır ve $F_{m,n}$ ile gösterilir[8].

Tanım 2.51: N_k, k ıncı mertebeden boş (null) graf (ayrıt içermeyen, sadece izole tepelerden oluşan graf) olmak üzere $C_n \vee N_k\left(n \geq 3, k \geq 1\right)$ grafına bir k-piramit graf denir ve $kP(n)$ ile gösterilir. 2-piramit $C_n \vee N_2$ bipiramit olarak adlandırılır ve $BP(n)$ ile gösterilir. $C_n \vee N_1$, 1-piramidi W_n tekerlek grafıdır.

Tanım 2.52: $n-$ küp veya $n-$ boyutlu hiperküp Q_n aşağıdaki gibi iki grafın yinelemeli kartezyen çarpımı ile tanımlanır: $Q_1 = K_2$, $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$.

Tanım 2.53: G ve $\mathrm{E}(G+H) = E(\mathrm{G}) \cup E(\mathrm{H}) \cup \{(\mathrm{u},\mathrm{v}) : \mathrm{u} \in \mathrm{V(G)}, \mathrm{v} \in \mathrm{V(H)}\}$ iki graf olmak üzere, bu iki grafın toplamı(join), $G+H$, tepeler kümesi
$V(G+H) = V(\mathrm{G}) \cup \mathrm{V(H)}$ ve ayrıtlar
$\mathrm{E}(G+H) = E(\mathrm{G}) \cup E(\mathrm{H}) \cup \{(\mathrm{u},\mathrm{v}) : \mathrm{u} \in \mathrm{V(G)}, \mathrm{v} \in \mathrm{V(H)}\}$ üzerinden tanımlanır.

Tanım 2.54: Bir G grafının bir tepesi silinmiş alt grafı $G-v$, G grafından v tepesinin ve bu tepeyle ilişkili bütün ayrıtların silinmesi ile elde edilen graftır[1].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

ORTALAMA ÖRTÜ SAYISI

Graf teoride, herhangi bir iletişim ağında elemanlar arasındaki iletişimi güçlendirmek ve sağlamlaştırmak amacıyla çeşitli ölçümlerden yararlanılmaktadır. Bu ölçümler, iletişimin işlevine ve amaca yönelik farklılıklar taşımaktadırlar. Örtü sayısı bu ölçümlerden biri olup, özellikle hizmet problemlerinin modellerinde kullanılarak iletişim ağını bölgesel olarak kuvvetlendirmeye çalışmaktadır. Örtü kavramına göre, herhangi bir tepe bitişik olduğu ayrıtları örtmektedir. Bir başka deyişle, örtü tanımı tepeler ile ayrıtlar arasındaki bitişiklik dolayısıyla iletişimi irdelemektedir.

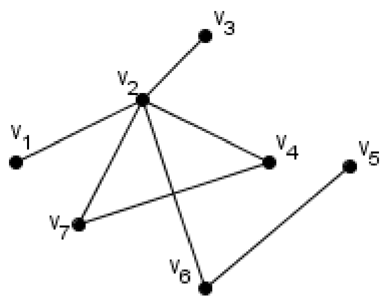
Bu çalışmada, Tanım 2.39 da verilmiş olan örtü sayısı kavramını da içinde barındıran ortalama örtü sayısı üzerine çalışmalar yapılmış ve ortalama örtü sayısı tanımına aşağıda yer verilmiştir.

Tanım 3.1: Bölgesel örtü sayısı $\beta_v(\mathrm{G})$, v yi içeren en küçük örtü kümesinin eleman sayısıdır. Buradan, G grafının ortalama örtü sayısı

$$\frac{1}{|V(G)|}\sum_{v\in V(G)}\beta_v$$

formülüyle hesaplanır [9].

Örnek 3.2: Şekil 3.1 ile verilen G grafının ortalama örtü sayısını hesaplayınız.



Şekil 3.1. G grafı

Çözüm: $V(\mathrm{G})$, G grafının tepeler kümesi olsun. Öncelikle G grafının her bir tepesi için bölgesel örtü sayılarının bulunması gerekmektedir. Bunlar aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Burada önemli olan her tepe için hesaplanan bölgesel örtü sayısında, bulunan minimal bölgesel örtü kümeleri o tepenin kendisini içermelidir ve grafta bulunan bütün ayrıtlar bu minimal küme ile örtülmelidir.

$\beta_{v_1} = |\{v_1, v_2, v_6, v_7\}| = 4,\ \beta_{v_2} = |\{v_2, v_6, v_7\}| = 3,\ \beta_{v_3} = |\{v_3, v_2, v_6, v_4\}| = 4,$

$\beta_{v_4} = |\{v_4, v_2, v_6\}| = 3,\ \beta_{v_5} = |\{v_5, v_2, v_7\}| = 3,\ \beta_{v_6} = |\{v_6, v_2, v_4\}| = 3,$

$\beta_{v_7} = |\{v_7, v_2, v_6\}| = 3$

G grafının ortalama örtü sayısı, elde edilen bölgesel örtü sayılarının toplamının grafın tepe sayısına bölünmesi ile elde edildiğinden,

$$\overline{\beta}(G) = \frac{1}{|V(G)|}\sum_{v \in V(G)} \beta_v$$

$$\overline{\beta}(G) = \frac{4+3+4+3+3+3+3}{7} = \frac{23}{7}$$

dır.

Teorem 3.3: Eğer G bir değişmeli tepe (vertex transitive) ise, bu takdirde,

$$\beta(\mathrm{G}) = \overline{\beta}(\mathrm{G})\ [9].$$

Teorem 3.4: G en az bir ayrıtlı bir graf olsun, bu takdirde,

$$\beta(\mathrm{G}) \leq \overline{\beta}(\mathrm{G}) < \beta(\mathrm{G}) + 1\ [9].$$

Teorem 3.5: G en az bir ayrıtlı bir graf olsun, bu takdirde,

$$\beta_v(\mathrm{G}) = \beta(\mathrm{G} - \mathrm{v}) + 1\ [9].$$

Teorem 3.6 : H G nin herhangi bir alt grafı ise, bu takdirde,

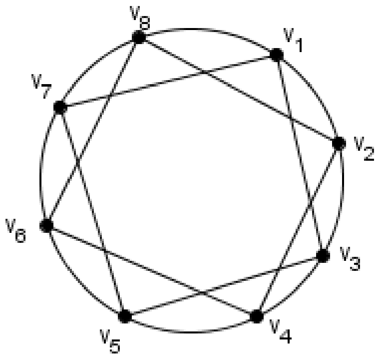
$$\overline{\beta}(\mathrm{H}) < \overline{\beta}(\mathrm{G})\ [9].$$

4.ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

BAZI GRAF SINIFLARININ ORTALAMA ÖRTÜ SAYILARI

Teorem 4.1. $G = C_n^k$ ve $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu takdirde, $\overline{\beta}(C_n^k) = n - \left\lfloor \dfrac{n}{k+1} \right\rfloor$ dır.

İspat: $k = 1$ olsun. Bu durumda, $C_n^1 = C_n$ olduğundan, $\overline{\beta}(C_n^1) = \beta(C_n)$ sonucu aşikardır. Şekil 4.2 de C_8^2 grafının etiketlenmiş hali verilmiştir.



Şekil 4.2. C_8^2 grafı

$k = 2$ durumu için sıralı bir şekilde iki tepe seçip bir tepe atlayarak bölgesel örtü kümelerine ulaşılır. Aynı şekilde, $k = 3$ durumu için sıralı bir şekilde üç tepe seçip bir tepe atlayarak bölgesel örtü kümelerine ulaşılır. Diğer durumlar için bakıldığında bölgesel örtü kümeleri aynı yolla elde edilir. Yani C_n^k nın k kuvveti için sıralı olarak k tepede seçilip $(k+1)$ inci tepe atılarak bölgesel örtü kümelerine ulaşılır. Buradan hareketle C_n^k 'nın her bir tepesi için elde edilen bölgesel örtü kümesinde $\left\lfloor \dfrac{n}{k+1} \right\rfloor$ tane tepenin yer almayacağı sonucuna varılır. Buradan. $n \equiv r \bmod (k+1)$, $u = \left\lfloor \dfrac{n}{k+1} \right\rfloor$

olsun. Bu durumda,

$r = 0$ ise,

$$\beta_{v_1} = \left| \left\{ v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+2}, \ldots, v_{2k+1}, \mathrm{v}_{2k+3}, \ldots, \mathrm{v}_{u(\mathrm{k}+1)-1} \right\} \right| = n - \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$$

$r = 1$ ise,

$$\beta_{v_1} = \left|\left\{ v_1,\ v_2, \ldots, v_k, v_{k+2}, \ldots, v_{2k+1}, \mathrm{v}_{2k+3}, \ldots, \mathrm{v}_{u(\mathrm{k}+1)-1}, v_{u(\mathrm{k}+1)+1} \right\}\right| = n - \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$$

$\vdots$

$r = k$ ise,

$$\beta_{v_k} = \left|\left\{ v_1,\ v_2, \ldots, v_k, v_{k+2}, \ldots, v_{2k+1}, \mathrm{v}_{2k+3}, \ldots, \mathrm{v}_{u(\mathrm{k}+1)-1}, v_{u(\mathrm{k}+1)+1}, \ldots, v_{u(\mathrm{k}+1)+k} \right\}\right| = n - \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$$

elde edilir, bu küme tek değildir, bölgesel örtü sayısını veren kümelerden birisi rastgele seçilmiştir. Graf regüler olduğundan seçilen her tepe için bölgesel örtü sayısı aynıdır. Dolayısıyla, $\beta_v = \overline{\beta}(C_n^k) \le n - \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ dır.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G nin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v', v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v', v'') \in E(G-u)$ ve (v', v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi değildir. Dolayısıyla, $\beta_v = \overline{\beta}(C_n^k) \ge n - \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ dır.

Buradan, C_n^k ' nın ortalama örtü sayısı,

$$\overline{\beta}(\mathrm{C}_n^k) = n - \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$$

olur.

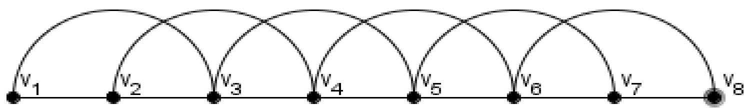
□

Teorem 4.2. Her $n, k \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{n-1}{k+1} = t \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde, P_n^k nın ortalama örtü sayısı

$$\overline{\beta}(P_n^k) = \frac{(\mathrm{n}-1)^2 k^2 + (\mathrm{nk}+1)(\mathrm{n}+k)}{n(\mathrm{k}+1)^2}$$

dır.

İspat: $V(\mathrm{P}_n^k) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tepe kümesi, aşağıdaki şekilde P_8^2 grafında görüldüğü gibi sıralı bir şekilde etiketlenmiş olsun.



Şekil 4.1. P_8^2 grafı

$\frac{n-1}{k+1} = t \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde, $r = t(k+1)+1$, $n \geq 1$,

$r \in \{1, (k+1)+1, 2(k+1)+1, ..., t(k+1)+1\} = A, s(A) = t+1$. Grafın her bir v_r tepesi için bölgesel örtü kümeleri elde edilir. Elde edilen bölgesel örtü kümelerinin eleman sayıları (cardinality) aynı olduğundan elde edilen bölgesel örtü sayıları da aynıdır.

$$\beta_{v_r} = \left|\left\{v_r, v_2, ..., v_{k+1},\ v_{k+3}, \ldots,\ v_{t(k+1)-1},\ v_{t(k+1)}\right\}\right| = n-t$$

Böylece, $t+1$ tepenin her biri için bölgesel örtü sayıları $n-t$ gelir.

$$v_i \in \left\{v_2, ..., v_{k+1},\ v_{k+3}, \ldots,\ v_{t(k+1)-1},\ v_{t(k+1)}\right\} = A,\ s(A) = n-t-1$$

Diğer tepeler için bölgesel örtü sayısı;

$$\beta_{v_i} = \left|\left\{v_2, ..., v_{k+1},\ v_{k+3}, \ldots,\ v_{t(k+1)-1},\ v_{t(k+1)}\right\}\right| = n-t-1$$

şeklinde elde edilir. Buradan $n-t-1$ tane tepenin bölgesel örtü sayısının $n-t-1$ olduğu açıktır. Bundan dolayı, $\beta_v \leq \frac{(n-1)^2 k^2 + (nk+1)(n+k)}{n(k+1)^2}$ olur.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise, bu takdirde $(v', v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v', v'') \in E(G-u)$ ve (v', v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_v \geq \frac{(n-1)^2 k^2 + (nk+1)(n+k)}{n(k+1)^2}$ dır.

Bu nedenle,

$$\bar{\beta}(P_n^k) = \frac{(n-1)^2 k^2 + (nk+1)(n+k)}{n(k+1)^2}$$

olur. ##

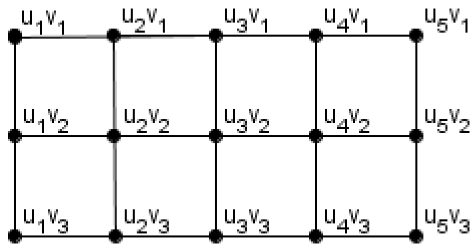
$\square$

Teorem 4.3. P_n ve P_m sırasıyla n,m tepeli yol graflar ve $\forall n,m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu takdirde,

$$\overline{\beta}(P_n \square P_m) = \begin{cases} \dfrac{mn}{2}, & mn \text{ çift} \\ \dfrac{(mn)^2+1}{2mn}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

dır.

İspat: P_n ve P_m sırasıyla n,m tepeli yol graflar ve $V(P_n)=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ ve $V(P_m)=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ olsun. P_n ve P_m graflarının kartezyen çarpımından olan $G = P_n \square P_m$ grafının tepeler kümesi $V(\mathrm{G}) = \mathrm{V}(P_n)\times \mathrm{V}(P_m)$ ve $|\mathrm{V(G)}| = nm$ dir. $\mathrm{V(G)} = \{u_1v_1, u_2v_1,...,u_nv_1, u_1v_2, u_2v_2,...,u_nv_2,..., u_1v_m, u_2v_m,..., u_nv_m\}$ olsun. nm nin tek ve çift olmasına bağlı olarak iki durum göz önüne alınır. Şekil 4.3 te $P_5 \square P_3$ grafının etiketlenmiş hali verilmiştir.



Şekil 4.3. $P_5 \square P_3$ grafı

İspat iki durumda incelenir.

Durum 1: nm çift olsun. $u_iv_j\ (i = 1,...,n, j = 1,...,m)$ ve $d(u_iv_j, u_i'v_j') = 2$ olacak şekilde bölgesel örtü kümeleri elde edilir.

Eğer n tek ise bu takdirde $u_iv_j \in V(P_n \square P_m)$ nin bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_iv_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, u_5v_1,...,u_nv_1, u_2v_2, u_4v_2,...,u_{n-1}v_2, u_1v_3, u_3v_3,..., \\ u_nv_3, u_2v_4, u_4v_4,...,u_{n-1}v_4,...\}| = \frac{nm}{2}$$

ya da

$$\beta_{u_iv_j} = |\{u_2v_1, u_4v_1, u_6v_1,...,u_{n-1}v_1, u_1v_2, u_3v_2,...,u_nv_2, u_2v_3, u_4v_3,..., \\ u_{n-1}v_3, u_1v_4, u_3v_4,...,u_nv_4,...\}| = \frac{nm}{2}$$

dır. Bundan dolayı, $\beta_{u_iv_j} \le \dfrac{nm}{2}$ dır.

Eğer n çift ise bu takdirde, $u_iv_j \in V(G)$ nin bölgesel örtü sayısı,

$$\beta_{u_iv_j} = |\{u_2v_1, u_4v_1, u_6v_1, ..., u_nv_1, u_1v_2, u_3v_2, ..., u_{n-1}v_2, u_2v_3, u_4v_3, ..., u_nv_3, u_1v_4, u_3v_4, ..., u_{n-1}v_4, ...\}| = \frac{nm}{2}$$

ya da

$$\beta_{u_iv_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, u_5v_1, ..., u_{n-1}v_1, u_2v_2, u_4v_2, ..., u_nv_2, u_1v_3, u_3v_3, ..., u_{n-1}v_3, u_2v_4, u_4v_4, ..., u_nv_4, ...\}| = \frac{nm}{2}$$

dır. Bundan dolayı, $\beta_{u_iv_j} \leq \frac{nm}{2}$ dır.

S_v , v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G nin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v , v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v', v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v', v'') \in E(G-u)$ ve (v', v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{u_iv_j} \geq \frac{nm}{2}$ dır.

Bu nedenle,

$$\beta_{u_iv_j} = \frac{nm}{2}$$

olur.

Buradan ortalama örtü sayısı,

$$\overline{\beta}(P_n \square P_m) = \frac{nm}{2}$$

olarak elde edilir.

Durum 2: nm tek olsun. $u_iv_j\,(i = 1,...,n, j = 1,...,m)$ ve $d(u_iv_j, u_i'v_j') = 2$ olacak şekilde bölgesel örtü kümeleri elde edilir. $u_iv_j \in V(P_n \square P_m)$ nin bölgesel örtü kümesi $i+j$ çift ise $\frac{nm+1}{2}$ eleman için bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_iv_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, u_5v_1, ..., u_nv_1, u_2v_2, u_4v_2, ..., u_{n-1}v_2, u_1v_3, u_3v_3, ..., u_nv_3, u_2v_4, u_4v_4, ..., u_{n-1}v_4, ...\}| = \frac{nm+1}{2}$$

Buradan, $\beta_{u_iv_j} \leq \frac{nm+1}{2}$.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G nin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v',v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v'') \in E(G-u)$ ve (v',v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{u_iv_j} \geq \frac{nm+1}{2}$ dır. Bu nedenle,

$$\beta_{u_iv_j} = \frac{nm+1}{2}$$

olur.

$u_iv_j \in V(P_n \Box P_m)$ nin bölgesel örtü kümesi $i+j$ tek ise $\frac{nm-1}{2}$ eleman için bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_iv_j} = |\{u_2v_1, u_4v_1, u_6v_1, \ldots, u_{n-1}v_1, u_1v_2, u_3v_2, \ldots, u_nv_2, u_2v_3, u_4v_3, \ldots,$$
$$u_{n-1}v_3, u_1v_4, u_3v_4, \ldots, u_nv_4, \ldots\}| = \frac{nm-1}{2}$$

Buradan, $\beta_{u_iv_j} \leq \frac{nm-1}{2}$.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v',v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v'') \in E(G-u)$ ve (v',v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{u_iv_j} \geq \frac{nm-1}{2}$ dır. Bu nedenle,

$$\beta_{u_iv_j} = \frac{nm-1}{2}$$

olur.Bundan dolayı, ortalama örtü sayısı

$$\bar{\beta}(G) = \frac{\left(\frac{mn+1}{2}\right)\left(\frac{mn+1}{2}\right) + \left(\frac{mn-1}{2}\right)\left(\frac{mn-1}{2}\right)}{mn}$$

$$\bar{\beta}(G) = \frac{2(mn)^2+4}{4mn}$$

$$\bar{\beta}(G) = \frac{(mn)^2+1}{2mn}.$$

$P_n \square P_m$ grafının ortalama örtü sayısı yukarıdaki iki durumdan dolayı,

$$\bar{\beta}(P_n \square P_m) = \begin{cases} \dfrac{mn}{2}, & mn \ \text{çift} \\ \dfrac{(mn)^2+1}{2mn}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

□

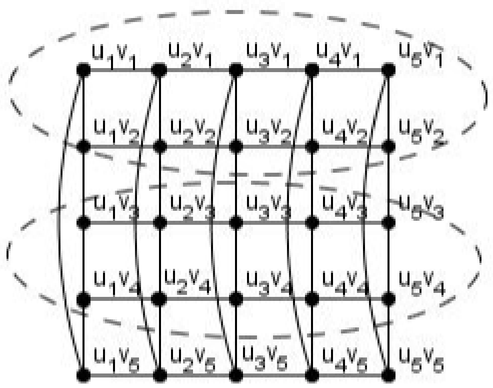
Teorem 4.4. P_n , n tepeli yol graf, C_m m tepeli çevre graf ve $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu takdirde,

$$\bar{\beta}(P_n \square C_m) = n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

dır.

İspat: P_n , n tepeli yol graflar, C_m m tepeli çevre graflar ve $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $V(P_m) = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ olsun. P_n ve C_m graflarının kartezyen çarpımından olan $G = P_n \square C_m$ grafının tepeler kümesi $V(G) = V(P_n) \times V(C_m)$ ve $|V(G)| = nm$ dir.

$V(G) = \{u_1v_1, u_2v_1, ..., u_nv_1, ..., u_1v_2, u_2v_2, ..., u_nv_2, ..., u_1v_m, u_2v_m, ..., u_nv_m\}$ olsun. Şekil 4.4 te $P_5 \square C_5$ grafının etiketlenmiş hali verilmiştir.



Şekil 4.4. $P_5 \square C_5$ grafı

n ve m nin tek ve çift olmasına bağlı olarak dört durum göz önüne alınır.

Durum 1: n ve m çift olsun. u_iv_j $(i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., m)$ tepesi için bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, ..., u_{n-1}v_1, u_2v_2,\ u_4v_2, ..., u_nv_2, ...,$$
$$u_1v_{m-1}, u_3v_{m-1}, ..., u_nv_{m-1}, u_2v_m,\ u_4v_m, ..., u_nv_m\}|$$

ya da

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_2v_1, u_4v_1, ..., u_nv_1, u_1v_2,\ u_3v_2, ..., u_{n-1}v_2, ...,$$
$$u_2v_{m-1}, u_4v_{m-1}, ..., u_{n-1}v_{m-1}, u_1v_m,\ u_3v_m, ..., u_{n-1}v_m\}|$$

dır.

Bundan dolayı, $\beta_{u_i v_j} \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil n$.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G nin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v',v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v'') \in E(G-u)$ ve (v',v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{u_i v_j} \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil n$ dır.

Buradan,

$$\bar{\beta}(P_n \square C_m) = \frac{nm.n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{nm} = n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

Durum 2: n ve m tek olsun. $u_iv_j\ (i=1,...,n,\ j=1,...,m)$ tepesi için bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, ..., u_nv_1, u_2v_2,\ u_4v_2, ..., u_{n-1}v_2, ..., u_1v_{m-2}, u_3v_{m-2}, ...,$$
$$u_nv_{m-2}, u_2v_{m-1}, u_4v_{m-1}, ..., u_{n-1}v_{m-1}, u_1v_m,\ u_2v_m, u_3v_m ..., u_nv_m\}|$$

ya da

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_1v_1, u_2v_1\ u_3v_1, ..., u_nv_1, u_2v_2,\ u_4v_2, ..., u_{n-1}v_2, ..., u_1v_{m-2}, u_3v_{m-2}, ...,$$
$$u_nv_{m-2}, u_2v_{m-1}, u_4v_{m-1}, ..., u_{n-1}v_{m-1}, u_1v_m, u_3v_m, ..., u_nv_m\}|.$$

Bu kümenin eleman sayısı herbir $u_iv_j\ (i=1,...,n,\ j=1,...,m)$ için aynıdır. Şekil 4.4 te görüldüğü gibi $P_n \square C_m$ grafının işaretlenmiş her bir bölümü n tepe ile örtülür ve bunlar $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ kadardır.Geriye kalan örtülmemiş ayrıtlar için n tane daha tepe bölgesel örtü kümesine alınmalıdır. Böylece her bir tepe için

$$\beta_{u_i v_j} \le n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor n = n(1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor) = n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil .$$

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G nin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v',v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v'') \in E(G-u)$ ve (v',v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{u_i v_j} \ge n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dır.

Böylece,

$$\overline{\beta}(P_n \,\square\, C_m) = \frac{nm.n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{nm} = n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil .$$

Durum 3: n çift, m tek olsun. $u_i v_j$ $(i=1,...,n,\ j=1,...,m)$ tepesi için bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, ..., u_{n-1}v_1, u_2v_2,\ u_4v_2, ..., u_nv_2, ..., u_1v_{m-2}, u_3v_{m-2}, ...,$$
$$u_{n-1}v_{m-2}, u_2v_{m-1}, u_4v_{m-1}, ..., u_nv_{m-1}, u_1v_m,\ u_2v_m, u_3v_m ..., u_nv_m\}|$$

ya da

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_1v_1, u_2v_1\ u_3v_1, ..., u_nv_1, u_2v_2,\ u_4v_2, ..., u_nv_2, ..., u_1v_{m-2}, u_3v_{m-2}, ...,$$
$$u_{n-1}v_{m-2}, u_2v_{m-1}, u_4v_{m-1}, ..., u_nv_{m-1}, u_1v_m, u_3v_m, ..., u_{n-1}v_m\}| .$$

Böylece her bir tepe için

$$n + (m-1)\frac{n}{2} = n\left(\frac{1+m}{2}\right) = n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil .$$

Bundan dolayı, $\beta_{u_i v_j} \le n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dır.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G nin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya

v'' ne eşit ise bu takdirde $(v',v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v'') \in E(G-u)$ ve (v',v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi değildir. Bu nedenle, $\beta_{u_i v_j} \geq n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dır.

Böylece,

$$\overline{\beta}(P_n \square C_m) = \frac{nm.n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{nm} = n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

Durum 4: n tek, m çift olsun. $u_i v_j \ (i=1,...,n,\ j=1,...,m)$ tepesi için bölgesel örtü sayısı

$$\beta_{u_i v_j} = |\{u_1v_1, u_3v_1, ..., u_nv_1, u_2v_2,\ u_4v_2, ..., u_{n-1}v_2, ..., u_2v_{m-2}, u_4v_{m-2}, ..., \\ u_{n-1}v_{m-2}, u_1v_{m-1}, u_3v_{m-1}, ..., u_nv_{m-1}, u_2v_m,\ u_4v_m, u_6v_m ..., u_{n-1}v_m\}|$$

ya da

$$\beta_{u_i v_j} = |\{\ u_2v_1, u_4v_1\ u_6v_1, ..., u_{n-1}v_1, u_1v_2,\ u_3v_2, ..., u_nv_2, ..., u_1v_{m-2}, u_3v_{m-2}, ..., \\ u_nv_{m-2}, u_2v_{m-1}, u_4v_{m-1}, ..., u_{n-1}v_{m-1}, u_1v_m, u_3v_m, ..., u_nv_m\}|.$$

Böylece her bir tepe için

$$\beta_{u_i v_j} \leq n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, Gnin v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v',v'') \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v'') \in E(G-u)$ ve (v',v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi değildir. Bu nedenle, $\beta_{u_i v_j} \geq n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dır.

Bundan dolayı,

$$\bar{\beta}(P_n \square C_m) = \frac{nm.n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{nm} = n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

Tüm durumlardan aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\bar{\beta}(P_n \square C_m) = \frac{nm.n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil}{nm} = n\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

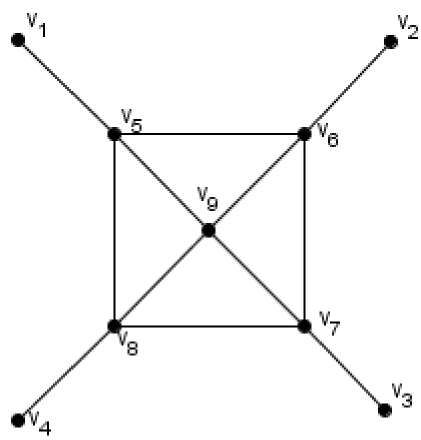
□ #

Teorem 4.5. G, dümen graf ve $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 4$ olsun. Bu takdirde,

$$\bar{\beta}(\mathrm{H}_n) = n + \frac{n+1}{2n+1}$$

dır.

İspat: H_n grafının tepe kümesi $V(\mathrm{H}_n) = \{v_1, v_2, ..., v_{2n+1}\}$ olsun. Dümen graftaki uç tepelerin ve merkez tepenin kümesi $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{2n+1}\}$ diğer tepelerin kümesi $\{v_{n+1}, v_{n+2}, ..., v_{2n}\}$ olsun. Dümen graf için iki farklı durumda bölgesel örtü sayısı elde edilir. Şekil 4.5 te H_4 grafının etiketlenmiş hali verilmiştir.



Şekil 4.5. H_4 grafı

Durum 1:Eğer $v_i \in \{v_1, v_2, ..., v_n, v_{2n+1}\}$ alınırsa bu takdirde H_n grafının bölgesel örtü sayısı $\beta_{v_i} = \left|\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{2n+1}\}\right| = n+1$ dır. Bu bölgesel örtü kümesi tek değildir.

Benzer şekilde elde edilen diğer bölgesel örtü kümelerinin bölgesel örtü sayıları aynı gelir. Bu durumda, bölgesel örtü sayısı $n+1$ tepe için bölgesel örtü kümesinin eleman sayısı olan $n+1$ olarak bulunur. Böylece, $\beta_{v_i}(\mathrm{H}_n) \leq n+1$ dir.

S_v, v yi içeren minimal bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v, v' veya $v"$ ne eşit ise bu takdirde $(v',v") \notin E(G-u)$ dır. Aksi halde, $(v',v") \in E(G-u)$ ve $(v',v")$ ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{v_i}(\mathrm{H}_n) \geq n+1$ dır.

Bu nedenle,

$$\beta_{v_i}(\mathrm{H}_n) = n+1$$

olur.

Durum 2: Eğer $v_i \in \{v_{n+1}, v_{n+2}, ..., v_{2n}\}$ ise bu takdirde H_n grafının bölgesel örtü sayısı $\beta_{v_i}(\mathrm{H}_n) = \left|\{v_{n+1}, v_{n+2}, ..., v_{2n}\}\right| = n$ dir. Bu bölgesel örtü kümeleri tek değildir. Benzer şekilde elde edilen diğer bölgesel örtü kümelerinin eleman sayıları aynı geli. $\beta_{v_i} \leq n$ bulunur.

S_v, v yi içeren minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v v' veya $v"$ ne eşit ise bu takdirde $(v',v") \notin E(G-u)$. Aksi halde, $(v',v") \in E(G-u)$ ve $(v',v")$ ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{v_i} \geq n$ dır.

Bu nedenle,

$$\beta_{v_i} = n$$

olur.

Bu durumda, ortalama örtü sayısı;

$$\overline{\beta}(\mathrm{H}_n) = \frac{(n+1)(n+1)+nn}{2n+1} = n + \frac{n+1}{2n+1}$$

dır.

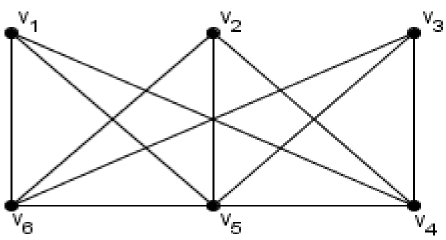
□

Teorem 4.6. $F_{a,b}$ bir yelpaze(fan) graf ve a,b pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde,

$$\bar{\beta}(F_{a,b})=\begin{cases} a+\left\lfloor \dfrac{b}{2} \right\rfloor, & \text{b çift ve } \dfrac{b+1}{2}>a \\ \dfrac{2a^2+b^2+3ab-a+1}{2(a+b)}, & \text{b tek ve } \dfrac{b+1}{2}\geq a \\ \dfrac{a(b+1)+b^2}{a+b}, & \dfrac{b+1}{2}<a \end{cases}$$

dır.

İspat: $F_{a,b}=\bar{K}_a+P_b$ ve yelpaze grafın tepe kümesi $V(F_{a,b})=\{v_1,v_2,....,v_a,v_{a+1},...,v_{a+b}\}$ olsun. Şekil 4.6 da $F_{3,3}$ grafının etiketlenmiş hali görülmektedir.



Şekil 4.6. $F_{3,3}$ grafı

Durum 1: b çift ve $\frac{b+1}{2}>a$ olsun. Bu durumda ilk olarak bölgesel örtü kümelerini elde edilir. b çift olduğundan P_b grafının örtü kümeleri $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$ elemanlıdır. Bu durumda P_b örtülmüş olacaktır. Geriye yelpaze grafın tanımında, tam grafın tümleyeninden gelen $\{v_1,v_2,....,v_a\}$ ayrıtlar kalır. $\frac{b}{2}\geq a$ koşulu kullanılırsa eğer $\{v_1,v_2,....,v_a\}$ tepeleri yani a tane tepe daha örtü kümesine dahil edilmelidir. Buradaki her tepe için örtü kümeleri benzer geldiğinden dolayısyla bölgesel örtü kümelerinin eleman sayıları da eşit olacaktır. Bundan dolayı,

$$\beta_v \leq a+\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

dır.

S_v**,** v yi içeren minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v v' veya $v"$ ne eşit ise bu takdirde $(v',v")\notin E(G-u)$. Aksi halde, $(v',v")\in E(G-u)$ ve $(v',v")$ ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_v \geq a+\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$ dır.

Bu nedenle,

$$\overline{\beta}(F_{a,b}) = a+\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

olur.

Durum 2: b tek, $\frac{b+1}{2} \geq a$ ve $V(P_b)=\{v_{a+1},v_{a+2},...,v_{a+b}\}$ olsun. Burada, 1.duruma benzer bir yaklaşımda bulunulur. Bölgesel örtü kümelerini elde etmek için iki koşul incelenir.

i) $v_k \in \{v_{a+2},v_{a+4},...,v_{a+b-1}\}$ ise $\beta_{v_k} = \left|\{v_1,v_2,...,v_a,v_{a+2},v_{a+4},...,v_{a+b-1}\}\right| = a+\frac{b-1}{2}$ dir.

Buradaki her tepe için bölgesel örtü kümeleri benzer şekilde geleceğinden bölgesel örtü sayısı $\beta_{v_k} \leq a+\frac{b-1}{2}$ olur.

S_v, v yi içeren minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v v' veya $v"$ ne eşit ise bu takdirde $(v',v")\notin E(G-u)$. Aksi halde, $(v',v")\in E(G-u)$ ve $(v',v")$ ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{v_k} \geq a+\frac{b-1}{2}$ dır.

Bu nedenle,

$$\beta_{v_k} = a+\frac{b-1}{2}$$

olur.

ii) $v_k \in \{v_{a+1}, v_{a+3}, ..., v_{a+b}\}$ ise $\beta_{v_k} = \left|\{v_1, v_2, ..., v_a, v_{a+1}, v_{a+3}, ..., v_{a+b}\}\right| = a + \frac{b+1}{2}$ dir. Buradaki her tepe için bölgesel örtü kümeleri benzer şekilde geleceğinden bölgesel örtü sayısı $\beta_{v_k} \leq a + \frac{b+1}{2}$ olur.

S_v, v yi içeren minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde, $(v', v'') \notin E(G-u)$. Aksi halde, $(v', v'') \in E(G-u)$ ve (v', v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_{v_k} \geq a + \frac{b+1}{2}$ dır.

Bu nedenle,

$$\beta_{v_k} = a + \frac{b+1}{2}$$

olur.

O halde ortalama örtü sayısı;

$$\bar{\beta}(F_{a,b}) = \frac{(a+\frac{b-1}{2})^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)\left(a+\frac{b+1}{2}\right)}{a+b} = \frac{2a^2+b^2+3ab-a+1}{2(a+b)}$$

dır.

Durum 3: $\frac{b+1}{2} < a$ olsun. Seçilen tepenin P_b grafının elemanı olup olmamasına göre iki farklı durum ile karşılaşılır.

i) $v \in V(P_b) = \{v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}$ olsun. $\beta_v = \left|\{v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}\right| = b$ olduğundan bölgesel örtü sayısı $\beta_v \leq b$ olur.

S_v, v yi içeren minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v **,** v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v', v'') \notin E(G-u)$. Aksi halde, $(v', v'') \in E(G-u)$ ve (v', v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_v \geq b$ dır. Bu nedenle,

$$\beta_v = b$$

olur.

ii) $v \in \{v_1, v_2, ..., v_a\}$ olsun. $\beta_v = \left|\{v, v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}\right| = b+1$ dir. Buradan bölgesel örtü sayısı $\beta_v \leq b+1$ elde edilir.

S_v, v yi içeren minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. v tepesi G grafından çıkarılsın. Bununla birlikte, G grafının v ile ilişkili ayrıtları da silinir. Eğer v **,** v' veya v'' ne eşit ise bu takdirde $(v', v'') \notin E(G-u)$. Aksi halde, $(v', v'') \in E(G-u)$ ve (v', v'') ayrıtını S_v kümesinde örten bir tepe olmalıdır. S_v minimal olduğundan bu kümeden bir eleman silinmesinin ardından elde edilen küme bir bölgesel örtü kümesi olmadığından, $\beta_v \geq b+1$ dır.

Bu nedenle,

$$\beta_v = b+1$$

olur.

Buradan ortalama örtü sayısı,

$$\bar{\beta}(F_{a,b}) = \frac{a(b+1)+b^2}{a+b}$$

dır.

Böylece, yelpaze(fan) grafın ortalama örtü sayısı:

$$\bar{\beta}(F_{a,b}) = \begin{cases} a + \left\lfloor \dfrac{b}{2} \right\rfloor, & \text{b çift ve } \dfrac{b+1}{2} > a \\ \dfrac{2a^2+b^2+3ab-a+1}{2(a+b)}, & \text{b tek ve } \dfrac{b+1}{2} \geq a \\ \dfrac{a(b+1)+b^2}{a+b}, & \dfrac{b+1}{2} < a \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

□

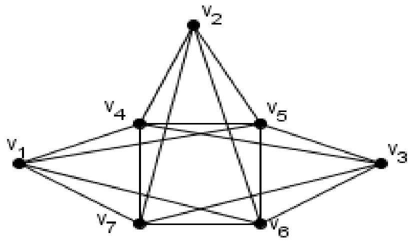
Teorem 4.7. $G = P_{(a,b)}$ bir piramit graf ve a, b pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde,

$$\bar{\beta}(P_{(a,b)}) = \begin{cases} a + \left\lceil \dfrac{b}{2} \right\rceil, & \dfrac{b}{2} \geq a \text{ ise} \\ \dfrac{b^2 + a\,(\mathrm{b}+1)}{a+b}, & \dfrac{b}{2} < a \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

İspat: İspat iki durum ile ele alınır.

$P_{(a,b)} = aK_1 + C_b$ ve $V\left(P_{(a,b)}\right) = \{v_1, v_2, ..., v_a, v_{a+1}, ..., v_{a+b}\}$ olsun. Şekil 4.7 de $P_{(3,4)}$ grafının etiketlenmesi gösterilmiştir.



Şekil 4.7. $P_{(3,4)}$ grafı

Durum 1: $\frac{b}{2} \geq a$ olsun. Bu durumda ilk olarak bölgesel örtü kümeleri bulunur. C_b grafının örtü kümesi eleman sayısı $\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$ dır. Bu durumda, seçilen tepeler C_b grafının ayrıtlarını örter. Geriye $\{v_1, v_2, ..., v_a\}$ tepeleri ile C_b arasındaki ayrıtlar kalacaktır. $\frac{b}{2} \geq a$ koşulu kullanırsa $\{v_1, v_2, ..., v_a\}$ tepe kümesi bölgesel örtü kümesine dahil edilmelidir. Buradaki her tepe için bölgesel örtü kümeleri aynı gelir. Buradan bölgesel örtü sayısı, $\beta_v \leq a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$ dır.

S_v minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. Eğer minimal örtü kümesinden bir eleman çıkarırsak yeni oluşan küme bölgesel örtü kümesi olmayacaktır. Bu nedenle,

$$\beta_v \geq a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil \text{ olur.}$$

Bu durum için ortalama örtü sayısı,

$$\bar{\beta}(P_{(a,b)}) = a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$$

şeklinde elde edilir.

Durum 2: $\frac{b}{2} < a$ ve $V(C_b) = \{v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}$ olsun. Seçilen tepenin C_b grafının tepesi olup olmamasına göre iki alt durum söz konusudur.

i) $v \in \{v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}$ olsun. Bundan dolayı, $\beta_v = \left|\{v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}\right| = b$ olur.

ii) $v \in \{v_1, v_2, ..., v_a\}$ olsun. Buradan bölgesel örtü sayısı $\beta_v = \left|\{v, v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_{a+b}\}\right| = b+1$

olur. Bu iki altdurumdan bölgesel örtü sayısı, $\beta_v \leq \dfrac{a(b+1)+b^2}{a+b}$ şeklinde elde edilir.

S_v, minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. Eğer minimal örtü kümesinden bir eleman çıkarırsak yeni oluşan küme bölgesel örtü kümesi olmayacaktır. Bu nedenle,

$$\beta_v \geq \frac{a(b+1)+b^2}{a+b} \quad \text{olur.}$$

Böylece,

$$\overline{\beta}(P_{(a,b)}) = \frac{a(b+1)+b^2}{a+b}$$

dır.

Buradan, piramit grafın ortalama örtü sayısı,

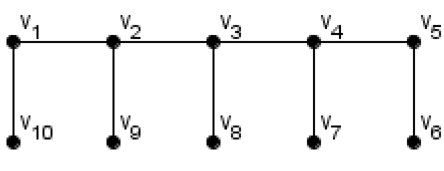
$$\overline{\beta}(P_{(a,b)}) = \begin{cases} a+\left\lceil \dfrac{b}{2} \right\rceil, & \dfrac{b}{2} \geq a \text{ ise} \\ \dfrac{b^2+a\,(b+1)}{a+b}, & \dfrac{b}{2} < a \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

□

Teorem 4.8. G tarak(comb) graf ve $n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde, $\overline{\beta}(P_n^+) = n$ dir.

İspat: P_n^+ $V(P_n^+) = \{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$ grafının tepe kümesi olsun. $|V(P_n^+)| = 2n$ dır. Şekil 4.8 de P_5^+ grafının etiketlenmiş halini gösterilmektedir.



Şekil 4.8. P_5^+ grafı

$u, v \in V(P_n^+)$ olsun. Bölgesel örtü kümelerini oluştururken $d(u,v) = 2$ uzunluklu tepeler seçilir, yani $\beta_v = |\{v_1, v_3, ..., v_{2n-1}\}| = n$ ya da $\beta_v = |\{v_2, v_4, ..., v_{2n}\}| = n$ olur. Buradan, bölgesel örtü sayısı $\beta_v \leq n$ elde olarak edilir.

S_v, minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. Eğer minimal örtü kümesinden bir eleman çıkarırsak yeni oluşan küme bölgesel örtü kümesi olmayacaktır. Bu nedenle,

$$\beta_v \geq n$$

olur.

Bu durum için ortalama örtü sayısı;

$$\overline{\beta}(P_n^+) = n$$

olarak elde edilir.

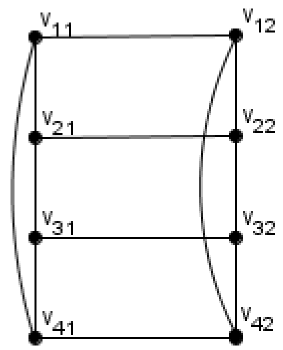
□

Teorem 4.9. G dairesel merdiven(circular ladder) graf ve $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde,

$$\overline{\beta}(CL_n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ tek ise} \\ n \quad , & n \text{ çift ise} \end{cases} = 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \overline{\beta}(P_2 \square C_m)$$

dır.

İspat: Grafın tepeleri $V(CL_n) = \{v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}, ..., v_{n1}, v_{n2}\}$ şeklinde etiketli olsun. İspat iki durumda incelenir. Şekil 4.9 da CL_4 grafının etiketlenmiş hali verilmiştir.



Şekil 4.9. CL_4 grafı

Durum 1: n çift olsun. Bu durumda, aşağıdaki iki farklı kümenin eleman sayısından elde edilir:

$$\beta_{v_{11}}(CL_n) = \left|\{v_{11}, v_{22}, v_{31}, v_{42}, ..., v_{(n-1)1}, v_{n2}\}\right| = n$$

$$\beta_{v_{12}}(CL_n) = \left|\{v_{12}, v_{21}, v_{32}, v_{41}, ..., v_{(n-1)2}, v_{n1}\}\right| = n$$

Her tepe için elde edilen bölgesel örtü kümelerinin eleman sayıları eşittir. Buradan, bölgesel örtü sayısı $\beta_{u_i v_j} \leq n$ dır.

S_v, minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. Eğer minimal örtü kümesinden bir eleman çıkarırsak yeni oluşan küme bölgesel örtü kümesi olmayacaktır. Bu nedenle

$$\beta_{u_i v_j} \geq n$$

olur. Bundan dolayı ortalama örtü sayısı,

$$\overline{\beta}(CL_n) = n$$

dır.

Durum 2: n tek olsun. Benzer şekilde iki farklı bölgesel örtü kümesi ile bölgesel örtü sayıları bulunabilir.

$$\beta_{v_{11}}(CL_n) = \left|\left\{v_{11}, v_{22}, v_{31}, v_{42}, ..., v_{(n-1)2}, v_{n1}, v_{n2}\right\}\right| = n+1$$

$$\beta_{v_{12}}(CL_n) = \left|\left\{v_{12}, v_{21}, v_{32}, v_{41}, ..., v_{(n-1)1}, v_{n1}, v_{n2}\right\}\right| = n+1$$

Her tepe için elde edilen bölgesel örtü kümelerinin eleman sayıları eşittir. Buradan, bölgesel örtü sayısı $\beta_{u_i v_j} \leq n+1$ dır.

S_v, minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. Eğer minimal örtü kümesinden bir eleman çıkarırsak yeni oluşan küme bölgesel örtü kümesi olmayacaktır. Bu nedenle,

$$\beta_{u_i v_j} \geq n+1$$

olur.Bu durum için ortalama örtü sayısı,

$$\overline{\beta}(CL_n) = n+1$$

dır.

Buradan dairesel merdiven grafın ortalama örtü sayısı,

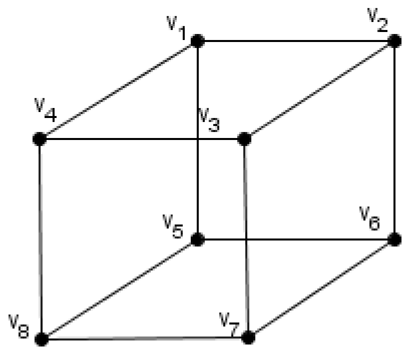
$$\overline{\beta}(CL_n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ tek ise} \\ n \quad , & n \text{ çift ise} \end{cases} = 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

dır.

□

Theorem 4.10. Q_n, $\forall n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olan bir hiperküp graf olsun. Bu takdirde, $\overline{\beta}(Q_n) = 2^{n-1}$ dir.

İspat: Hiperküp grafının tepeleri $V(Q_n) = \{v_1, v_2, ..., v_{2^n}\}$ şeklinde etiketlenmiş olsun. Q_3 grafının etiketlenmiş hali Şekil 4.10 ile göstermektedir.



Şekil 4.10. Q_3 grafı

İlk olarak Q_n için bölgesel örtü kümeleri bulunur. Q_n grafının tepe sayısı $|V(Q_n)| = 2^n$ dır. Aralarındaki uzaklık $d(u,v) = 2$ olacak şekilde tepeler seçilerek bölgesel örtü kümesine dahil edilir ve elde edilen küme ile tüm ayrıtlar örtülür. Burada, seçilen tepe sayısı grafın tepe sayısının yarısı olduğundan $\beta_v \leq \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ elde edilir. Her tepe için elde edilen bölgesel örtü sayıları eşittir. Dolayısıyla, $\overline{\beta}(Q_n) \leq 2^{n-1}$ olur.

S_v minimal bir bölgesel örtü kümesi olsun. Eğer minimal örtü kümesinden bir eleman çıkarırsak yeni oluşan küme bölgesel örtü kümesi olmayacaktır. Bu nedenle, $\beta_v \geq 2^{n-1}$ olur. Dolayısıyla $\overline{\beta}(Q_n) \geq 2^{n-1}$ elde edilir.

Buradan Q_n grafının ortalama örtü sayısı,

$$\overline{\beta}(Q_n) = 2^{n-1}$$

dır.

□

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı özel graflar üzerinde zedelenebilirliğin bir ölçümü olan ortalama örtü sayısı hesaplanmıştır. Bunlar çevre grafın kuvveti, yol grafın kuvveti, grid graflar ($P_n \square P_m$, $P_n \square C_m$), piramit graf, yelpaze graf, dümen graf, tarak graf, dairesel merdiven graf, hiperküp graftır. Burada, elde edilen sonuçlar grafın her tepesi için ayrı ayrı bölgesel örtü sayılarının hesaplanmasıyla bulunmuştur. Elde edilen bölgesel örtü sayılarının toplamı grafın tepe sayılarına bölünerek her bir graf için ortalama örtü sayısı bulunmuştur. 2013 yılında Dogan ve Dündar'ın makalesinde de bahsedildiği üzere aynı tepe ve ayrıt sayısına sahip iki graftan ortalama örtü sayısı büyük olan graf daha dayanıklıdır[7]. Bu çalışmada graf teorinin önemli noktalarından biri olan daha dayanıklı grafın seçilmesinde kullanılabilecek farklı bir ölçüm olan ortalama örtü sayısı üzerinde durulmuştur. Burada, ele alınan graf sınıfları uygulamada önemli yer tutan ağ modellerinde seçilmiştir. Ortalama örtü sayısı ölçümü literatürde fazla çalışma yapılmamış bir ölçüm olduğundan bu çalışma ile literatürdeki eksiklikler giderilmeye çalışılmıştır. Daha sonra yapılacak olan çalışmalara ışık tutması amacıyla ortaya koyulan teoremler ve ispatlar bunun sonucunda ortaya çıkmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Buckley F., Harary F. Distance in Graphs. Addison-Wesley Publishing Company, California, USA, 1990, 335.

[2] Hartsfield N., Ringel G. Pearls in Graph Theory : A Comprehensive Introduction. Academic Press, London, 1990, 255.

[3] Beineke L. W., Oellermann O. R., Pippert R. E. The Average Connectivity of a Graph. Discrete Mathematics. 2002, 252(1–3), 31-45.

[4] Dankelmann P., Oellermann O. R. Bounds on the Average Connectivity of a Graph. Discrete Applied Mathematics. 2003, 129(2-3), 305-318.

[5] Xinhui A., Baoyindureng W., The Winner İndex of the kth Power of a Graph. Applied Mathematics Letters. 2008, 21(5), 436-440.

[6] Moazzami D. Tenacity of a Graph with Maximum Connectivity. Discrete Applied Mathematics. 2011, 159(6), 367-380.

[7] Dogan Durgun D., Nihan Altundağ F., 2-rainbow Domination Number of Some Graphs, CBU Journal of Science. 2016, 12(3), 363-366.

[8] Dogan D., Dundar P. The Average Covering Number of a Graph. Journal of Applied Mathematics. 2013, article ID 849817.

[9] Intaja S., Sitthiwirattham T. Some Parameters of Fan Graph. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012, 80(2), 217-223.

[10] Henning M. A. and Oellermann O. R. The average connectivity of regular multipartite tournaments. The Australasian Journal of Combinatorics. 2001, 23, 101–113.

[11] Henning M. A. Trees with equal average domination and independent domination numbers Ars Combinatoria. 2004, 71, 305–318.

[12] Blidia M., Chellali M. and Maffray F. On average lower independence and domination numbers in graphs. Discrete Mathematics. 2005, 295(1–3), 1–11.

[13] Chung F. R. K. The average distance and the independence number. Journal of Graph Theory. 1988, 12(2), 229–235.

[14] Dogan Durgun D., Dundar P. The average covering number on graph operations. Journal of Logic, Mathematics and Linguistics in Applied Sciences. 2016, 1(1).

[15] Vizing V.G., The Cartesian product of Graphs, Vycisl. Systemy. 1963, 9, 30-43.

[16] Woess W., Thomassen C., Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1993, 58, 248-268.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali BAGATARHAN

Doğum Yeri ve Yılı : Manisa, 1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : alibagatarhan1245@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Turgutlu Lisesi, 2005

Lisans : Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015

Yayınları

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, Average covering number for some graphs, Rairo Operations Research (Accepted, 21 May 2018)

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali,# On The Average Covering Number Of Pyramid And Circular Ladder Graphs, Advanced Mathematical Models & Applications, Submitted(2018).

Konferanslar ve Sempozyumlar

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, On the Average Covering Number of Pyramid and Circular Ladder Graphs, International Science Conference, 29 June-1 July 2018 , Sliven, BULGARIA

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, 16 th International Geometry Symposium, 4-7 July 2018, Manisa, TURKEY

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, ACN on Graphs, 2. International Students Science Congress, 4-5 May 2018, İzmir, TURKEY

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, Average Covering Number for Some Graphs, International Workshop on Mathematical Methods in Engineering, April 27-29, 2017, Ankara, TURKEY

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, Average Covering Number for Some Graphs, For particition in the International Students Science Conference, 5-6 May 2017, Abstract Book, 74, IZMIR, TURKEY

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, Power of a path and an n-cycle, 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energy, November 23-25, 2017, Istanbul Gelişim University, Istanbul-TURKEY

DOGAN DURGUN Derya, BAGATARHAN Ali, Average Covering Numbers for Grid Graphs, 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energy, November 23-25, 2017, Istanbul Gelişim University, Istanbul-TURKEY