

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MEKANİK BİLİM DALI**

**EULER-BERNOULLİ KİRİŞ TİTREŞİM DENKLEMLERİNİN
TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜLMESİ**

Özer TATAR

**Danışman
Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK**



MANİSA-2018

**Özer
TATAR**

**EULER-BERNOULLI KIRIŞ TITREŞİM DENKLEMLERİNİN TAYLOR MATRİS
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜLMESİ**

2018

Tez Sırtı Örneği

TEZ ONAYI

Özer TATAR tarafından hazırlanan "**EULER-BERNOULLİ KİRİŞ TİTREŞİM DENKLEMLERİNİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜLMESİ**" adlı tez çalışması xx/xx/xxxx tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendiliği Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK**

İzmir Katip Çelebi Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Adı SOYADI**

xxxxxxx Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Adı SOYADI**

xxxxxxx Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Adı SOYADI**

xxxxxxx Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Adı SOYADI**

xxxxxxx Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Özer TATAR



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Titreşim Teorisi	1
1.2. Tanımlar	2
1.2.1.Serbest Titreşim	3
1.2.2.Zorlanmış Titreşim	3
1.2.3.Rezonans	3
1.2.4.Sönümlü ve Sönümsüz Titreşimler	3
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Giriş Teorilerine Genel Bir Bakış	4
2.2. Euler-Bernoulli Giriş Teorisi.....	5
2.3. Euler-Bernoulli Girişinin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi.....	6
3. TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ	8
3.1. Taylor Matris Yöntemi Hakkında Genel Bilgi.....	8
3.2. Taylor Matrisin Elde Edilmesi	8
3.3. Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrislerinin Elde Edilmesi	13
3.3.1. Basit-Basit Mesnet için Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrisleri	13
3.3.2. Ankastre-Serbest Mesnet için Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrisleri.....	21
3.3.3. Ankastre-Ankastre Mesnet için Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrisleri.....	28
3.4. Sistemin Genel Matris Denkleminin Oluşturulması	32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1. Taylor Matris Yöntemi ile Çözüm	33
4.1.1. Basit-Basit Mesnet için Taylor Matris Yöntemi ile Sayısal Uygulama	33
4.1.2. Ankastre-Serbest Mesnet için Taylor Matris Yöntemi ile Sayısal Uygulama.....	44
4.1.3. Ankastre-Ankastre Mesnet için Taylor Matris Yöntemi ile Sayısal Uygulama	50
4.2. Yöntemin Doğrulanması	54
4.2.1. Homojen Çözüm	55
4.2.2. Özel Çözüm	59
4.2.3. Genel Çözüm	59
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	64

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Kiriş kesit alanı
$C_{p,q}$	Taylor katsayısı
C	Sabit katsayılı Taylor matrisi
dt	Diferansiyel boyutta zaman
dx	Diferansiyel boyuttaki elemana ait uzunluklar
E	Elastisite modülü
F	Harmonik zorlama kuvvetinin genliği
$F(t)$	Zorlama kuvveti
$F(x, t)$	Kuvvet fonksiyonu
ρ	Kirişin kütleli yoğunluğu
I	Kirişin atalet momenti
L	Kirişin boyu
M	Moment
N_0	Eksenel Yük
t	Bağımsız değişken olarak zaman
x	Bağımsız değişken olarak mekân
U	Eksenel yer değiştirme
V	Hız

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için basit-basit mesnetli kiriş	14
Şekil 3.2. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için ankastre-serbest mesnetli kiriş.....	21
Şekil 3.3. Euler-Bernoulli kiriş teorisi için ankastre-ankastre mesnetli kiriş.....	28
Şekil 4.1. Basit-Basit Mesnet için Taylor matris metodu ile genel çözüm	43
Şekil 4.2. Ankastre-Serbest Mesnet için Taylor matris metodu ile genel çözüm	49
.....	49
Şekil 4.3. Ankastre-Ankastre Mesnet için Taylor matris metodu ile genel çözüm	54
Şekil 4.4. Basit-Basit Mesnet için Taylor metodu ile gerçek çözümün karşılaştırması	61
.....	61



TEŞEKKÜR

Bu alıŐma boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve beni s¼rekli y¼nlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK' e ve tez çalıŐmam boyunca benden desteğini esirgemeyip s¼rekli yardımcı olmaya alıŐan Dr. Öğretim Üyesi Saim Kural'a teŐekk¼rlerimi bir borç bilirim.

Özer TATAR
Manisa, 2018



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Euler-Bernoulli Kiriş Titreşim Denklemlerinin Taylor Matris Yöntemi ile Çözülmesi

Özer TATAR

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet ÇEVİK

Bu çalışmada eksenel yükleme altındaki Euler-Bernoulli kirişinin enine titreşim denklemi olan yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemin Taylor matris yöntemiyle çözümü sunulmuştur. Çalışmada öncelikle titreşimle ilgili genel bilgiler verilmiştir. Titreşim çeşitleri ve titreşen mekanik sistem elemanları incelendikten sonra Euler-Bernoulli kiriş denklemine ait hareket denklemi çıkarılmıştır. Hareket denklemi konuma ve zamana bağlı dördüncü mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemdir. Hareket denklemi basit-basit, ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartları için verilen başlangıç şartları altında ele alınmıştır. Bu çalışma enine titreşen kirişlerin çözümü için yeni ve basit bir çözüm yöntemi olan Taylor polinom matris yöntemini içerir. Önerilen metod kısmi diferansiyel denklem; içinde bilinmeyen Taylor katsayısı bulunan matris formuna dönüştürür. Sınır şartları ve başlangıç koşulları da matris denkleme eklendikten sonra, bu denklemler kullanılarak kolay bir çözüm elde edilir. Çalışmada, eksenel yük altındaki Euler-Bernoulli kirişinin serbest ve zorlamalı titreşimleri çalışılmış olup genel ve özel çözümler belirlenmiştir. Metod, sayısal bir örnek problem çözülerek açıklanmış ve elde edilen sonuçlar, tam çözümün sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların birbirleri ile uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Taylor Matris Yöntemi, Euler-Bernoulli kiriş titreşimleri, Taylor Polinomları

2018, 64 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

**Euler-Bernoulli Kiriş Titreşim Denklemlerinin Taylor Matris Yöntemi ile
Çözülmesi**

**The Solution of Euler-Bernoulli Beam Vibration Equations by Taylor Matrix
Method**

Özer TATAR

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mechanical Engineering**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ÇEVİK

In this study, the solution of the high order variable coefficient linear differential equation of the transverse vibration of the Euler-Bernoulli beam subjected to axial loading is presented. Some general information about vibrations is given at the beginning. After reviewing the types of vibration and elements of vibrating mechanical systems, governing equation of the Euler-Bernoulli beam is derived. This equation of motion is a fourth order partial linear differential equation depending on position and time. This equation is solved for the given initial conditions under simple-simple, clamped-clamped and clamped-free boundary conditions. This study presents a new and simple Taylor polynomial matrix method for solving transverse vibration of beams. This method transforms the partial differential equation into a matrix form containing unknown Taylor coefficients. The initial and boundary conditions are imposed into this matrix equation, and then the equation is solved practically. In the study free and forced vibrations of axially loaded Euler-Bernoulli beam are considered, and general and special solutions are obtained. The method is explained with a numerical example and the results are compared with those of the exact solution. The results are shown to be compatible with each other.

Keywords: Taylor Matrix Method, Euler-Bernoulli Beam, Taylor Polynomials

2018, 64 pages

1. GİRİŞ

Bu bölümde titreşim hakkında genel bilgiler verilecek olup tarihsel gelişimi anlatılacaktır. Euler-Bernoulli kiriş titreşim denklemi ele alınıp uygulamalı örneklerle çözüm metodolojileri karşılaştırılacaktır.

1.1. Titreşim Teorisi

Titreşim bir denge noktası etrafındaki mekanik salınımdır. Bu salınımlar bir sarkacın hareketi gibi periyodik olabileceği gibi çakıllı bir yolda tekerleğin hareketi gibi rastgele de olabilir. Titreşim, bir başka ifade ile salınım, belirli bir zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket olarak tanımlanır. Titreşim genellikle istenmeyen bir harekettir. Çünkü boşa enerji harcar ve istenmeyen ses ve gürültü oluşturur. Örneğin, motorların elektrik motorlarının ya da herhangi bir mekanik aracın çalışma esnasındaki hareketi istenmeyen titreşimler üretir. Böyle titreşimler motorlardaki dönen parçaların balanssızlığından, düzensiz sürtünmeden, dişli çarkların hareketinden kaynaklanabilir. Tabiatın örnek vermek gerekirse bir kuşun kanat çırpmaları veya deprem sarsıntısı titreşim hadisesine örneklerdir. İnsanın vücudundan bir örnek vermek gerekirse; kalbin bir ritimle çarpması bir titreşim hareketidir ve yaşamın devamı sağlanır. Kulak zarının titreşimi sayesinde sesleri duyarız. Gırtlaktaki ses tellerinin titreşimi ile konuşma meydana gelir. Dikkatli tasarımlar genellikle istenmeyen titreşimleri minimize ederler. Sadece mekanik sistemler değil, akışkanlı, ısı, elektriksel sistemler vb. de titreşime sahip olabilirler. Örneğin, ağır bir vasıta geçerken demir bir köprüde görülen hareketler, çalışan bir otomobilin kaputuna elinizi dayadığınızda hissettiğiniz sarsıntı, bir otomobilin vites kutusundan gelen uğultu, şehir şebekesi gerilimindeki dalgalanmalar sonucu evinizdeki elektrik ampulünün parlaklığının değişmesi, ya da bir şeker hastasının kanındaki şeker miktarının dalgalanması bir titreşim problemi olarak ele alınabilir. Bu problemlerin hepsi birbirini andıran yöntemler kullanılarak analiz edilebilir.

Birçok makine parçası periyodik hareket yapacak şekilde tasarlanır. Bu hareketler sırasında makinenin çeşitli elemanlarına zamana göre değişen kuvvet ve momentler uygulanır. Bunun sonucunda titreşimler ortaya çıkar. Titreşimlerin ve bununla birlikte genel kuvvet ve moment değişikliklerinin tasarımlarda dikkate alınması gerekir. Zira titreşimler, makine elemanlarında statik kuvvetlere ek olarak,

zamana göre değişen kuvvetlerin oluşmasına da sebep olurlar. Bu kuvvetlerin genliklerinin büyük olması ise, bazı parçaların mukavemet sınırları ötesinde yüklenmesine ve kalıcı deformasyonlara yol açabilir.

İnsanların titreşim konusu ile ilgilenmesi ve anlamaya çalışması ilk olarak müzik aletlerinin keşfiyle başlamıştır diyebiliriz [1]. Titreşim konusu genelde ses ve titreşim başlığı altında ele alınır. Özellikle titreşim ve gürültü problemleri modern çağda teknolojinin gelişimine paralel olarak ortaya çıkan ve insanların çözmeye çalıştığı problemlerdir.

Robert Hooke (1635–1703) titreşen sicimlerle ilgili deneysel çalışmalar yapmıştır. "Akustik" kelimesini literatürde ilk defa kullanan kişi ise yine titreşen sicimlere ait çalışmalar yapan Joseph Sauveur' dur. Sauveur (1653–1716) ve John Vallis (1616–1703) aynı zamanlarda birbirlerinden bağımsız olarak mod yapıları kavramını ele almışlardır. Titreşen sicimlere ait hareket denklemleri çıkarılırken ele alınan en önemli kanun bilindiği üzere Newton' un 2. kanunudur. Bu noktada Isaac Newton' un (1642–1727) evrensel çekim kanununu ve harekete ait üç önemli kanunu ortaya koyduğu "Naturalis Principia Mathematica" adlı 1686 tarihli çok önemli çalışmasını anmak gerekir.

Titreşen sicimlere ait teorik çalışmalar ilk olarak Brook Taylor (1685–1731) tarafından yapılmıştır. Taylor'un teorik olarak bulduğu titreşime ait tabii frekans değerleri Galileo ve Mersenne' nin deneysel sonuçları ile uyumludur. Daniel Bernoulli (1700–1782), Jean D' Alembert (1717–1783) ve Leonard-Euler (1707–1783), Taylor'un çalışmasını, hareket denklemine kısmi türev terimleri koyarak geliştirmişlerdir. Değişik şekillerde mesnetlenmiş ince kırıslara ait titreşimlerin modellenmesi ilk olarak Euler (1744) ve Bernoulli (1751) tarafından yapılmıştır. Bu sebeple bu teoriye Euler-Bernoulli kiriş teorisi denilmektedir.

1.2. Tanımlar

Titreşim hareketi, içerdiği birçok özelliğın ele alınmasına göre çeşitli gruplara ayrılır. Aşağıda temel bazı sınıflamalar sıralanmıştır [1].

1.2.1. Serbest Titreşim

Titreşimde bulunan bir sisteme hareketi sırasında dış kuvvetler ve momentler uygulanabilir ya da uygulanmayabilir. Sistem verilen bir ilk deplasman ile titreşirse, başka bir deyişle dış kuvvetin etkisi olmazsa buna serbest titreşimli sistem denir. Sistemin serbest titreşiminin frekansına bu sistemin doğal (tabii) frekansı denir. Serbest titreşim sırasında sistemin üzerinde hiçbir dış etki olmadığından, serbest titreşim frekansı yani sistemin doğal frekansı tamamen sistemin kendi parametreleri tarafından belirlenir.

1.2.2. Zorlanmış Titreşim

Dış kuvvetlerin etkisi altında olan titreşime zorlanmış titreşim denir. Sistemi zorlayan kuvvet harmonik biçimde değişiyorsa buna harmonik zorlama denir. Zorlama frekansı zorlanan sistemin frekansı ile aynı ise bu duruma rezonans denir.

1.2.3. Rezonans

Rezonans, en genel tanımı ile sistemin tabii frekansının sisteme etkileyen zorlama kuvvetinin frekansına çok yakın olmasıdır.

Rezonans, fizikte bir sistemin (genellikle doğrusal bir sistemin) bazı frekanslarda diğerlerine nazaran daha büyük genliklerde salınması eğilimidir. Bunlar, o sistemin rezonans frekansları olarak adlandırılırlar. Bu frekanslarda küçük periyodik kuvvetler bile çok büyük genlikler üretebilir.

1.2.4. Sönümlü ve Sönümsüz Titreşimler

Titreşim süresince sistemde herhangi bir enerji kaybı meydana gelmiyorsa bu tarz titreşimlere sönümsüz titreşimli sistemler denir. Eğer titreşim esnasında sürtünme vs. nedenlerle bir enerji kaybı oluyorsa böyle sistemlere sönümlü titreşimli sistemler denir. Sönüm, titreşim frekansını etkileyen bir parametredir. Ancak sönüm küçükse tabii frekansa etkisi çok azdır ve tabii frekans sönümsüz sistemdeki gibi değerlendirilebilir.

Bu tezde, eksenel yükleme altındaki kirişlerin enine titreşim problemi üç farklı mesnet durumu için sayısal olarak çözülebildiği gibi, birbiri ile uyumlu sonuçların elde edildiği Taylor matris yöntemi ile daha pratik bir çözüm elde edildiği gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kiriş Teorilerine Genel Bir Bakış

Mühendislikte kolon, kiriş gibi çubuk elemanların analizinde kullanılan dört kiriş teorisi vardır. Bu teoriler tarihi gelişim sırasına göre, en temel kiriş teorisi olan Euler-Bernoulli kiriş teorisi, kayma şekil değişimlerini dikkate alan Timoshenko teorisi ile Shear ve Rayleigh teorileridir. Kiriş teorileri 1921 yılından bu yana kullanılmaktadır. Bu teoriler kiriş enine titreşim problemlerinde kısmi diferansiyel hareket denklemi açısından zorlama kuvveti altında ve serbest titreşim olarak başlangıç koşulları ve sınır şartları açısından formüle edilmişlerdir. Geçmişte homojen olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerin çözümünün anlaşılabilmesi ve elde edilmesi için çok çabalar sarf edilmiştir. Bu konuda en kapsamlı çalışma Traill Nash ve Collar tarafından yapılmıştır [2]. Fakat onlar sadece dört kiriş modeli için çeşitli koşullara göre frekans denklemleri oluşturmuşlardır. Tam formülasyonlu kiriş problemi ilk olarak genel elastikiyet denklemleri olarak Pochhammer (1876) ve Chree (1889) tarafından araştırılmıştır [3]. Onlar titreşimli bir katı silindiri tanımlayan denklemler elde etmişlerdir. Ancak bu denklemler problemi tam çözmek için pratik değildir. Çünkü genellikle uygulamada ihtiyaç duyulan bilgilerden daha fazlasını verir. Bu nedenle enine yer değiştirme için yaklaşık çözümler yeterlidir.

Enine kiriş titreşimlerinde en önemli faktörün eğilme etkisi olduğu araştırmacılar tarafından kabul edilmiştir. Euler-Bernoulli modeli eğilme ve kinetik enerji ile enine yer değiştirme sebeplerinden dolayı gerilme enerjisini içerir. Euler-Bernoulli modeli 18.yy' a kadar uzanır. İlk olarak elastik kirişin herhangi bir noktasındaki eğriliğin o noktadaki eğilme momenti ile doğru orantılı olduğunu Jacob Bernoulli (1654–1705) keşfetmiştir. Kiriş titreşim hareketine dair diferansiyel denklemi ise Jacob' un yeğeni olan Daniel Bernoulli (1700–1782) ilk olarak formüle etmiştir. Daha sonra Jacob Bernoulli' nin teorisi çeşitli yükleme koşulları altında elastik kirişlerin şekil değiştirmesini inceleyen Leonhard Euler (1707–1783) tarafından kabul edilmiştir. Euler tarafından elastik eğriler üzerinde birçok gelişmeler yapılmıştır [4]. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, klasik kiriş teorisi, Euler kiriş teorisi, Bernoulli kiriş teorisi veya Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak da adlandırılır. Ancak Euler-Bernoulli modeli doğal frekansları biraz abartma eğilimindedir. Bu sorun

yüksek mod yapılarının doğal frekansı için daha da şiddetlenir. Ayrıca ince kirişler için tahmin ince olmayan kirişlere nazaran daha iyidir.

Rayleigh kiriş teorisi (1877), Euler-Bernoulli teorisi üzerinde sıra dışı bir gelişme sağlamıştır. Sonuç olarak Euler-Bernoulli modelindeki doğal frekansları kısmen düzeltmiştir. Ancak doğal frekanslar hala hesaplanandan fazladır.

Kayma modeli ise Euler-Bernoulli modeline kayma gerilmelerini ekler. Bu ekleme sayesinde Euler-Bernoulli kirişine ait doğal frekansların tahmini önemli ölçüde gelişmiştir.

Timoshenko, Euler-Bernoulli kirişine kayma etkisinin yanı sıra dönme etkisini de içine alan bir kiriş teorisi önermiştir [5, 6]. Timoshenko modeli kayma ve dönme etkilerinin önemsiz sayılmayacağı ince olmayan kirişlerde ve yüksek frekanslı sistemlerde önemli gelişmeler göstermiştir. Timoshenko ve birçok yazar çeşitli sınır şartları altındaki mod şekilleri için frekans denklemleri elde etmişlerdir. Onlardan bazıları Kruszewski (1949) [7], Traill-Nash ve Collar (1953) [8], Dolph (1954) [9] ve Huang (1961) [10]' dir. Kruszewski basit-basit kirişi için simetrik ve anti simetrik mod yapılarını incelemiştir.

Traill-Nash ve Collar düzgün bir kirişin durumu için deneysel sonuçlar kadar iyi tam bir teorik çözüm elde etmişlerdir. Dolph dış kuvvet etkisi olmaksızın kiriş için başlangıç ve sınır değerleri problemini çözmüştür. Tüm bu çalışmaların nihayetinde günümüzde hala en sıklıkla kullanılan kiriş teorileri Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorileridir.

2.2. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Euler-Bernoulli kiriş teorisi, düzgün izotropik bir kirişin elastikliğinin basitleştirilmiş bir ifadesidir. Bu teori ile kirişlerin yük taşıma ve çökme karakteristikleri hesaplanır. Bernoulli kirişi adını önemli buluşlara imza atan Jacob Bernoulli' den sonra almıştır. Leonhard Euler ve Daniel Bernoulli bu kullanışlı teoriyi ortaya koyan ilk kişilerdir.

Euler-Bernoulli kirişinin enine titreşimi birçok araştırmacı tarafından yaygın olarak çalışılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş modelinin ayrıntılı derivasyonlarını çeşitli yazarların kitaplarında bulmak mümkündür [11, 12, 1]. Ayrıca birçok araştırmacı tarafından farklı koşullar altındaki ve durumlardaki Euler-Bernoulli kirişlerinin titreşim analizleri çeşitli matematiksel yöntemlerle yapılmıştır. Everitt, farklı koşullar altındaki düzgün olmayan kesitli Euler-Bernoulli kirişinin serbest titreşim problemi için modifiye edilmiş Adomian-decomposition yöntemini kullanmıştır [13].

2.3. Euler-Bernoulli Kirişinin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Sabit kesitli düzgün kirişlerin enine titreşimleri esneklik ve kütle ile dağılan diğer vibrasyon problemlerindedir. Bu problemlerdeki çeşitli faktörlerden en önemlileri dönen mil ve rotorların kritik hızlarıdır. Ayrıca transmisyon hatlarında kullanılan kablolardaki sarkma problemleri de enine titreşime örnek gösterilebilir. Euler-Bernoulli kiriş denkleminde eğilme esnasında kirişin atalet kuvveti göz ardı edilir ve toplam moment;

$$\sum M = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (2.1)' i açarsak ;

$$V \cdot dx = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (2.2)$$

Elemanda dönme ile ilgili Newton yasası yazılırsa;

$$\left[M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) + \left[V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + u(x, t) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\left[\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] + V(x, t) dx + \left[\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx^2 \right] + \frac{u(x, t)}{2} dx^2 = 0 \quad (2.4)$$

Kuvvetlerin değerleri ve buna bağlı olarak etkileri moment değerlerine göre çok küçük olduğundan ve dx gibi küçük bir sayının 2. derece kuvveti ile çarpıldığında dx^2 ifadeler çok küçük olacağından sıfır olarak kabul edilebilir.

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + V(x, t) = 0 \quad (2.5)$$

Kiriş için düşey doğrultuda kuvvetler eşitliğini yazarsak;

$$\left[V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right] - V(x, t) + u(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx + u(x, t) dx = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + u(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Denklem (2.5) ile (2.8) birlikte yazıldığında Euler-Bernoulli hareket denkleminin son hali aşağıdaki gibi bulunur.

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (2.9)$$

Denklem (2.9)' da sırasıyla; E Elastite modülü, A kesit alan, ρ kirişin kütlesel yoğunluğu, I kirişin atalet momenti; $u(x, t)$ enine yer değiştirme ve $f(x, t)$ ise zorlama kuvveti fonksiyonudur.

N_0 aksenal yük terimini de denkleme ilave edersek;

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (2.10)$$

3. TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

3.1. Taylor Matris Yöntemi Hakkında Genel Bilgi

Bu yöntem çeşitli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan ve bu denklemleri Taylor polinomları ile matris formuna dönüştüren bir yöntemdir. Özel ve genel çözümlere ait diferansiyel denklemler bu yöntem aracılığı ile belirlenebilir. Taylor serisi birçok araştırmacı tarafından diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Yalçınbaş ve Sezer, yüksek mertebeden lineer Fredholm ve Volterra-Fredholm integral diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümü için Taylor seri açılımını kullanmışlardır [14]. Gülsu ve Sezer [15] ile Sezer ve Daşçioğlu [16] değişken katsayılı belirsiz koşullar altındaki herhangi bir nokta hakkında m . mertebeden ve yüksek mertebeden lineer diferansiyel fark denklemlerinin çözümünü Taylor seri yaklaşımı ile incelemiştirlerdir. Tüm bu çalışmalarda bu metod bilinen diğer tekniklerle karşılaştırılmış ve mevcut yaklaşımın diğerlerine nispeten kolay ve son derece hassas olduğu gösterilmiştir. Yöntemin ilk aşamasında verilen denklemler matris denkleme dönüştürülür, ardından Taylor sıralama noktaları yardımıyla bilinmeyen sadece Taylor katsayılar matrisi olan yeni bir matris denklemi oluşturulur. Buradan Taylor katsayıları bulunarak sonlu Taylor seri yaklaşımları elde edilir.

3.2. Taylor Matrisin Elde Edilmesi

Genel olarak t_0 orjininde ve t ' ye bağlı olarak açılan n . dereceden bir Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$F(t) = f^0 \frac{(t - t_0)^0}{0!} + f' \frac{(t - t_0)^1}{1!} + f'' \frac{(t - t_0)^2}{2!} + f''' \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots + f^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} \quad (3.1)$$

Denklem (3.1)' de;

$$\frac{f^n}{n!} = F_n \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlarsak;

$$F_0 = \frac{f^0}{0!}, F_1 = \frac{f'}{1!}, F_2 = \frac{f''}{2!}, F_3 = \frac{f'''}{3!} \quad (3.3)$$

Bu tanımlamaya bağlı olarak denklem (3.2), denklem (3.1)' de yerine konularak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$F(t) = F_0(t - t_0)^0 + F_1(t - t_0)^1 + F_2(t - t_0)^2 + F_3(t - t_0)^3 + \dots + F_n(t - t_0)^n \quad (3.4)$$

Denklem (3.4)' de zaman ve kuvvet ifadelerini matris şeklinde yazarsak;

$$\mathbf{T}(t) = [1 \quad (t - t_0)^1 \quad (t - t_0)^2 \quad (t - t_0)^3 \quad \dots \quad (t - t_0)^n] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F} = [F_0 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \dots \quad F_n]^T \quad (3.6)$$

ifadeleri elde edilir. Denklem (3.4), denklem (3.5) ve denklem (3.6) ifadelerine göre yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$F(t) = \mathbf{F}\mathbf{T}(t) \quad (3.7)$$

Benzer şekilde zamana ve mekâna bağlı olan yer değiştirme fonksiyonumuz $u(x, t)$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$u(x, t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N c_{p,q} (x - x_0)^p (t - t_0)^q \quad (3.8)$$

$$c_{p,q} = \frac{1}{p! q!} u^{(p,q)}(x_0, t_0)$$

n . dereceden zamana ve mekana bağlı olan bu Taylor serisi bilinmeyen Taylor katsayısı $c_{p,q}$ ' nun belirlenmesiyle elde edilir. Yer değiştirme fonksiyonu olan $u(x, t)$ matris formunda yazmak gerekirse aşağıdaki gibi yazılır.

$$u(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{T}(t) \quad (3.9)$$

Denklem (3.9)' da;

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad (x - x_0) \quad (x - x_0)^2 \quad \dots \quad (x - x_0)^N] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{T}(t) = [1 \quad (t - t_0) \quad (t - t_0)^2 \quad \dots \quad (t - t_0)^N]^T \quad (3.11)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

mekana bağlı 1. dereceden türev aldığımızda;

$$\mathbf{X}'(x) = [0 \quad 1(x - x_0)^0 \quad 2(x - x_0)^1 \quad \dots \quad N(x - x_0)^{N-1}] \quad (3.13)$$

Denklem (3.13), $\mathbf{X}(x)$ cinsinden yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D} \quad (3.14)$$

burada \mathbf{D} matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Dolayısıyla n . dereceden türev aldığımızda aşağıdaki sonucu elde etmiş oluruz.

$$\mathbf{X}^{(n)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}^n \quad (3.16)$$

Aynı şekilde denklem (3.11)' in zamana göre türevini de alırsak;

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = [0 \quad 1 \quad 2(t - t_0) \quad \dots \quad N(t - t_0)^{N-1}]^T \quad (3.17)$$

Denklem (3.17), $\mathbf{T}(t)$ cinsinden belirtilirse:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{D}^T \mathbf{T}(t) \quad (3.18)$$

Dolayısıyla n . dereceden türev aldığımızda aşağıdaki sonucu elde etmiş oluruz.

$$\mathbf{T}^{(n)}(t) = (\mathbf{D}^T)^n \mathbf{T}(t) \quad (3.19)$$

Yer değiştirme fonksiyonu denklem (3.9)' un mekana bağlı türevi şu şekilde gösterilebilir:

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}^n \mathbf{C} \mathbf{T}(t) \quad (3.20)$$

Yer değiştirme fonksiyonu denklem (3.9)' un zamana bağlı türevi ise şu şekilde gösterilebilir:

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} = \mathbf{X}(x) \mathbf{C} (\mathbf{D}^T)^n \mathbf{T}(t) \quad (3.21)$$

Denklem (2.10)'da ki kuvvet fonksiyonu olan $f(x, t)$ Taylor açılımına göre aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$f(x, t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N g_{p,q} (x - x_0)^p (t - t_0)^q \quad (3.22)$$

Denklem (3.22) matris formunda yazılırsa;

$$f(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{G} \mathbf{T}(t) \quad (3.23)$$

Burada \mathbf{G} matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0N} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N0} & g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Denklem (2.10)'da ki bütün ifadeleri yerine yazıp kuvvet fonksiyonuna eşitlediğimizde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \mathbf{X}(x) \mathbf{G} \mathbf{T}(t) \quad (3.25)$$

Denklem (3.20) ve (3.21) , denklem (3.25)' de yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$EI \mathbf{X}(x) \mathbf{D}^4 \mathbf{C} \mathbf{T}(t) + N_0 \mathbf{X}(x) \mathbf{D}^2 \mathbf{C} \mathbf{T}(t) + \rho A \mathbf{X}(x) \mathbf{C} (\mathbf{D}^T)^2 \mathbf{T}(t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{G} \mathbf{T}(t) \quad (3.26)$$

Denklem (3.26) sadeleştirilirse;

$$EI \mathbf{D}^4 \mathbf{C} + N_0 \mathbf{D}^2 \mathbf{C} + \rho A \mathbf{C} (\mathbf{D}^T)^2 = \mathbf{G} \quad (3.27)$$

Denklem (3.27)' de;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0N} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N0} & g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix}$$

olduğuna göre denklem (3.27)' nin sol ve sağ tarafları $(N + 1) \times (N + 1)$ büyüklüğünde matrislerdir. Denklem sol tarafındaki bilinmeyen \mathbf{C} sabit katsayılı Taylor matrisini bulmak için yeni bir $\mathbf{S}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$ matrisi tanımlanarak \mathbf{C} ve \mathbf{G}

matrisleri $(N + 1)^2 \times 1$ sütun matris formuna dönüştürülür. Bu durumda denklem (3.27) şu şekilde gösterilebilir:

$$\mathbf{S}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} = \bar{\mathbf{G}}_{(N+1)^2 \times 1} \quad (3.28)$$

Sütun matris formuna dönüştürülen matrisler ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{01} \\ \vdots \\ c_{0N} \\ c_{10} \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{1N} \\ \vdots \\ c_{N0} \\ c_{N1} \\ \vdots \\ c_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{01} \\ \vdots \\ g_{0N} \\ g_{10} \\ g_{11} \\ \vdots \\ g_{1N} \\ \vdots \\ g_{N0} \\ g_{N1} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

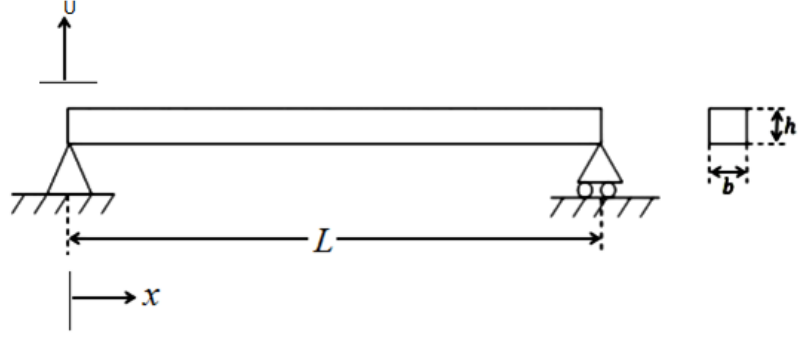
Denklem (3.28)' de $\bar{\mathbf{C}}$ matrisini bulmak için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\bar{\mathbf{C}} = \text{inv}(\mathbf{S})\bar{\mathbf{G}} \quad (3.29)$$

3.3. Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrislerinin Elde Edilmesi

Bu bölümde Euler-Bernoulli kirişinin basit-basit, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre mesnet durumları için sınır ve başlangıç koşullarının matris denklemleri elde edilecektir.

3.3.1. Basit-Basit Mesnet için Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrisleri



Şekil 3.1. Basit-basit mesnetli kiriş

Basit-Basit Mesnet için sınır şartları ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir:

Sınır şartları;

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 \\
 u''(0, t) &= 0 \\
 u(L, t) &= 0 \\
 u''(L, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Başlangıç şartları ise şöyle olsun;

$$\begin{aligned}
 u\left(\frac{L}{2}, 0\right) &= u_0 \\
 \dot{u}\left(\frac{L}{2}, 0\right) &= v_0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Denklem (3.30)' da belirtilen sınır şartları denklem (3.9)' da yerine konularak sınır şartı denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0)\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(0)\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{X}(0)\mathbf{D}^2\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(0)\mathbf{D}^2\mathbf{C} \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{X}(L)\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(L)\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{X}(L)\mathbf{D}^2\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(L)\mathbf{D}^2\mathbf{C} \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 0]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Denklem (3.32)' de ki ifadeler birer birer ele alınarak her bir sınır şartı için sınır şartı matrisleri elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0)\mathbf{C} &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 0]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{X}(0)\mathbf{C} = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ \dots \ c_{0N}] = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \tag{3.34}$$

Denklem (3.34), denklem (3.28)' e göre yazılırsa genişletilmiş \mathbf{S} matris aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\
&= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Denklem (3.35)' de eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 1 matrisi olan **SS11** matrisidir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0)\mathbf{D}^2\mathbf{C} &= \\
[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} (N-1)N \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.36) \\
&= [2c_{20} \ 2c_{21} \ 2c_{22} \ \dots \ 2c_{2N}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0)\mathbf{D}^2\mathbf{C} &= [2c_{20} \ 2c_{21} \ 2c_{22} \ \dots \ 2c_{2N}] \\
&= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Denklem (3.37), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş **S** matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \quad (3.38) \\
&= \mathbf{0}_{(N+1)^2 \times 1}
\end{aligned}$$

Denklem (3.38)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 2 matrisi **SS12** matrisidir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(L)\mathbf{C} &= [1 \ L \ L^2 \ \dots \ L^N] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.39) \\
&= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(L)\mathbf{C} &= [c_{00} + Lc_{10} + \dots + L^N c_{N0} \ \dots \ c_{0N} + Lc_{1N} + \dots + L^N c_{NN}] \quad (3.40) \\
&= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]
\end{aligned}$$

Denklem (3.40), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş **S** matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & L & 0 & \cdots & 0 & L^2 & 0 & \cdots & 0 & L^N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & L & \cdots & 0 & 0 & L^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & L^N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & L & 0 & 0 & \cdots & L^2 & 0 & 0 & \cdots & L^N \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \quad (3.41) \\
&= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}
\end{aligned}$$

Denklem (3.41)' de eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 3 matrisi olan **SS13** matrisidir.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{X}(L) \mathbf{D}^2 \mathbf{C} \\
&= [1 \quad L \quad \cdots \quad L^N] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.42) \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{X}(L) \mathbf{D}^2 \mathbf{C} = \\
& [2c_{20} + 6Lc_{30} + \cdots + N(N-1)L^{N-2}c_{N0} \quad \cdots \quad 2c_{2N} + 6Lc_{3N} + \cdots + N(N-1)L^{N-2}c_{NN}] \quad (3.43) \\
& = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]
\end{aligned}$$

Denklem (3.43), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş **S** matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\mathbf{BB11}; \mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CT}(0) = u_0 \quad (3.45)$$

$$\mathbf{BB12}; \mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CD}^T \mathbf{T}(0) = v_0$$

Denklem (3.45)' deki ifadeler birer birer ele alınarak her bir başlangıç koşulu için başlangıç koşulu matrisleri elde edilecektir.

$$\mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CT}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & \left(\frac{L}{2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{L}{2}\right)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$= u_0$$

$$\mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CT}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & \left(\frac{L}{2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{L}{2}\right)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ c_{N0} \end{bmatrix} = u_0 \quad (3.47)$$

$$\mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CT}(0) = c_{00} + \frac{L}{2} c_{10} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 c_{20} + \dots + \left(\frac{L}{2}\right)^N c_{N0} = u_0 \quad (3.48)$$

Denklem (3.48), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş \mathbf{S} matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\mathbf{S}_{1 \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{L}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots & \left(\frac{L}{2}\right)^N & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \quad (3.49)$$

$$= u_0$$

Denklem (3.49)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris başlangıç koşulu 1 matrisi olan $\mathbf{BB11}$ matrisidir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{T}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{L}{2} \\ \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ \dots \\ \left(\frac{L}{2}\right)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ \vdots \\ c_{N0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{L}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \left(\frac{L}{2}\right)^N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{N1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{N1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_{0N} \\ c_{1N} \\ \vdots \\ c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= v_0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

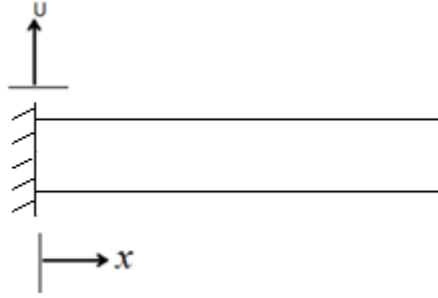
$$\mathbf{x} \left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{T}(0) = c_{01} + \frac{L}{2} c_{11} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 c_{21} + \dots + \left(\frac{L}{2}\right)^N c_{N1} = v_0 \tag{3.51}$$

Denklem (3.51), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş \mathbf{S} matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s}_{1 \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{c}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \left(\frac{L}{2}\right)^N & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \tag{3.52} \\
&= v_0
\end{aligned}$$

Denklem (3.52)' de eşitliğin sol tarafındaki ilk matris başlangıç koşulu 2 matrisi olan **BB12** matrisidir.

3.3.2. Ankastre-Serbest Mesnet için Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrisleri



Şekil 3.2. Ankastre-serbest mesnetli kiriş

Ankastre-Serbest Mesnet için sınır şartları ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir: Sınır şartları;

$$\begin{aligned}u(0, t) &= 0 \\u'(0, t) &= 0 \\u''(L, t) &= 0 \\u'''(L, t) &= 0\end{aligned}\tag{3.53}$$

Başlangıç şartları şöyle olsun;

$$\begin{aligned}u(L, 0) &= u_0 \\ \dot{u}(L, 0) &= v_0\end{aligned}\tag{3.54}$$

Denklem (3.53)' de belirtilen sınır şartları denklem (3.9)' da yerine konularak sınır şartı denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0)\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(0)\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{X}(0)\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(0)\mathbf{D}\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{X}(L)\mathbf{D}^2\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(L)\mathbf{D}^2\mathbf{C} \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
\mathbf{X}(L)\mathbf{D}^3\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(L)\mathbf{D}^3\mathbf{C} \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 0]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\
&= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Denklem (3.56)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 1 matrisi olan **SS21** matrisidir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0)\mathbf{D}\mathbf{C} &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \\
&= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\mathbf{X}(0)\mathbf{D}\mathbf{C} = [c_{10} \ c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1N}] = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \tag{3.58}$$

Denklem (3.58), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş **S** matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\
&= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Denklem (3.60)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 3 matrisi olan **SS23** matrisidir.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(L)\mathbf{D}^3\mathbf{C} &= [1 \quad L \quad \dots \quad L^N] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} \\
 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]
 \end{aligned} \tag{3.61}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(L)\mathbf{D}^3\mathbf{C} &= [6c_{30} + 24Lc_{40} + \dots + (N-2)(N-1)NL^{N-3}c_{N0} \quad \dots \quad 6c_{3N} + 24Lc_{4N} + \dots + (N-2)(N-1)NL^{N-3}c_{NN}] \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]
\end{aligned}
\tag{3.62}$$

Denklem (3.62), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş \mathbf{S} matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

Denklem (3.63)'de eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 4 matrisi olan **SS24** matrisidir.

Denklem (3.54)' de belirtilen başlangıç koşulları denklem (3.9)' da yerine konularak başlangıç koşulları denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{BB21}; \mathbf{X}(L)\mathbf{CT}(0) &= u_0 \\ \mathbf{BB22}; \mathbf{X}(L)\mathbf{CD}^T\mathbf{T}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Denklem (3.64)' deki ifadeler birer birer ele alınarak her bir başlangıç koşulu için başlangıç koşulu matrisleri elde edilecektir.

$$\mathbf{X}(L)\mathbf{CT}(0) = [1 \quad L \quad L^2 \quad \dots \quad L^N] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = u_0 \quad (3.65)$$

$$\mathbf{X}(L)\mathbf{CT}(0) = [1 \quad L \quad L^2 \quad \dots \quad L^N] \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ c_{N0} \end{bmatrix} = u_0 \quad (3.66)$$

$$\mathbf{X}(L)\mathbf{CT}(0) = c_{00} + Lc_{10} + L^2c_{20} + \dots + L^Nc_{N0} = u_0 \quad (3.67)$$

Denklem (3.67), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş **S** matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1 \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\ = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad L \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad L^N \quad 0 \quad \dots \quad 0] \bar{\mathbf{C}} = u_0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Denklem (3.68)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris başlangıç koşulu 1 matrisi olan **BB21** matrisidir.

$$\mathbf{X}(L)\mathbf{C}\mathbf{D}^T\mathbf{T}(0)$$

$$= [1 \quad L \quad L^2 \quad \dots \quad L^N] \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0N} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N0} & c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$= v_0$$

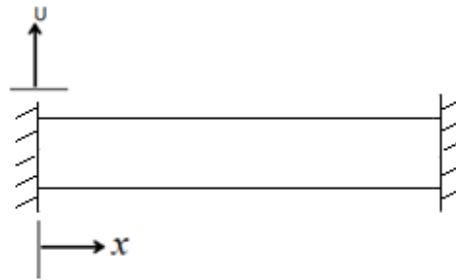
$$\mathbf{X}(L)\mathbf{C}\mathbf{D}^T\mathbf{T}(0) = c_{01} + Lc_{11} + L^2c_{21} + \dots + L^Nc_{N1} = v_0 \quad (3.70)$$

Denklem (3.70), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş \mathbf{S} matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{1 \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\ & = [0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad L \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad L^N \quad 0 \quad \dots \quad 0] \bar{\mathbf{C}} \quad (3.71) \\ & = v_0 \end{aligned}$$

Denklem (3.71)' de eşitliğin sol tarafındaki ilk matris başlangıç koşulu 2 matrisi olan **BB22** matrisidir.

3.3.3. Ankastre-Ankastre Mesnet için Sınır Şartları ve Başlangıç Koşulları Matrisleri



Şekil 3.3. Ankastre-ankastre mesnetli kiriş

Ankastre-Ankastre Mesnet için sınır şartları ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir:

Sınır şartları;

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 \\
 u'(0, t) &= 0 \\
 u(L, t) &= 0 \\
 u'(L, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Başlangıç şartları şöyle olsun;

$$\begin{aligned}
 u\left(\frac{L}{2}, 0\right) &= u_0 \\
 \dot{u}\left(\frac{L}{2}, 0\right) &= v_0
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Denklem (3.72)' de belirtilen sınır şartları denklem (3.9)' da yerine konularak sınır şartı denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(0)\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(0)\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
 \mathbf{X}(0)\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(0)\mathbf{D}\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
 \mathbf{X}(L)\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(L)\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \\
 \mathbf{X}(L)\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{T}(t) &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{T}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(L)\mathbf{D}\mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\
 &= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Denklem (3.75)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 1 matrisi olan **SS31** matrisidir.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \quad (3.76) \\
&= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}
\end{aligned}$$

Denklem (3.76)' da eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 2 matrisi olan **SS32** matrisidir.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_{(N+1) \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} = \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & L & 0 & \cdots & 0 & L^2 & 0 & \cdots & 0 & L^N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & L & \cdots & 0 & 0 & L^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & L^N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & L & 0 & 0 & \cdots & L^2 & 0 & 0 & \cdots & L^N \end{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \quad (3.77) \\
&= \mathbf{0}_{(N+1) \times 1}
\end{aligned}$$

Denklem (3.77)' de eşitliğin sol tarafındaki ilk matris sınır şartı 3 matrisi olan **SS33** matrisidir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(L)\mathbf{DC} &= [1 \quad L \quad \cdots \quad L^N] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]
\end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(L)\mathbf{DC} &= \\
& [1c_{10} + 2Lc_{20} + \cdots + NL^{N-1}c_{N0} \quad \cdots \quad 1c_{1N} + 2Lc_{2N} + \cdots + NL^{N-1}c_{NN}] \quad (3.79) \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]
\end{aligned}$$

Denklem (3.79), denklem (3.28)'e göre yazılırsa genişletilmiş **S** matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} \mathbf{BB31}; \mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CT}(0) &= u_0 \\ \mathbf{BB32}; \mathbf{X}\left(\frac{L}{2}\right) \mathbf{CD}^T \mathbf{T}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Denklem (3.81)' den elde edilecek başlangıç koşulu matrisleri **BB11** ve **BB12** basit-basit mesnet durumunda elde edilen denklem (3.49) ve denklem (3.52) ile aynıdır.

3.4. Sistemin Genel Matris Denklemine Oluşturulması

Böylece Euler-Bernoulli kirişinin hareket denklemi matris formu hazırlanmış oldu. Bölüm (3.3) de elde edilen sınır şartları ve başlangıç koşullarına ait matris formları (3.36) denkleminin 30 satırı silinerek bunların yerine konulur. Bu sayede hem hareket denklemi hem de başlangıç şartları ile sınır koşullarını sağlayacak artırılmış matris denklemi elde edilmiş olur. Bu matris Taylor matris yöntemi ile çözülerek bulmaya çalıştığımız **S** matrisi elde edilir. Elde edilen bu **S** matrisinin tersi alınıp **G** matrisiyle çarpılarak bilinmeyen $c_{p,q}$ Taylor katsayıları bulunacaktır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde her üç mesnet durumu için de Euler-Bernoulli kirişinin eksenal yük altında enine zorlamalı titreşimleri incelenmiştir. Kiriş için alınan geometrik ve fiziksel parametreler aşağıdaki gibidir:

$$L = 5m, A = 0,01m^2, E = 20 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}, \rho = 8 \times 10^3 \frac{kg}{m^3},$$
$$I = 8,33 \times 10^{-6}, f(x, t) = 10^{-4} \cos 3t, N_0 = 100N$$

Burada kullanılan malzeme lineer elastik özelliklere sahip çeliktir.

4.1. Taylor Matris Yöntemi ile Çözüm

4.1.1. Basit-Basit Mesnet için Taylor Matris Yöntemi ile Sayısal Uygulama

Başlangıç koşulları $u_0 = 0.01m$ ve $\dot{u}_0 = 0$ olarak $N = 6$ için $(x_0, t_0) = (0,0)$ orjininde açılan matris serisinde bilinmeyen Taylor katsayıları denklem (3.29)' a göre bulunarak denklem (3.9)' da yerine konulup enine zorlamalı titreşim denkleminin çözümü elde edilecektir. Basit-basit mesnet sınır şartları ve başlangıç koşulları için matrisler aşağıdaki şekildedir.

Denklem (3.35)' de ki **SS11** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 49} \quad (4.1)$$

Denklem (3.38)' da ki **SS12** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 49} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{X} \left(\frac{5}{2} \right) \mathbf{C} \mathbf{T}(0) = 0,01 \quad (4.5)$$

Denklem (3.49)' de ki **BB11** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} & \mathbf{BB11} \\ & = \left[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \left(\frac{5}{2} \right)^6 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]_{1 \times 49} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{X} \left(\frac{5}{2} \right) \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{T}(0) = 0 \quad (4.7)$$

Denklem (3.52)' de ki **BB12** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} & \mathbf{BB12} \\ & = \left[0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \left(\frac{5}{2} \right)^6 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]_{1 \times 49} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Eksenel yük altındaki Euler-Bernoulli kiriş hareket denklemimiz olan denklem (3.27) nin $N = 6$ için aşağıdaki gibi çözümlenir. $(E I \mathbf{D}^4 \mathbf{C} + N_0 \mathbf{D}^2 \mathbf{C} + \rho A \mathbf{C} (\mathbf{D}^T)^2 = \mathbf{G})$

$$\begin{aligned}
& 1,67 \times 10^{16} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{06} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{60} & c_{61} & \dots & c_{66} \end{bmatrix} \\
& + 100 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{06} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{60} & c_{61} & \dots & c_{66} \end{bmatrix} \\
& + 80 \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{06} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{60} & c_{61} & \dots & c_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \right)^2 = \mathbf{G}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Denklem (4.9), denklem (3.28)' de ki eşitliğin sol tarafında olduğu şekilde yazılmak istenirse $\mathbf{S}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \bar{\mathbf{C}}_{(N+1)^2 \times 1} = \bar{\mathbf{G}}_{(N+1)^2 \times 1}$ denkleminde $\bar{\mathbf{C}}_{49 \times 1}$ ve $\bar{\mathbf{G}}_{49 \times 1}$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{01} \\ \vdots \\ c_{06} \\ c_{10} \\ c_{11} \\ \vdots \\ c_{16} \\ \vdots \\ c_{60} \\ c_{61} \\ \vdots \\ c_{66} \end{bmatrix}_{49 \times 1}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{01} \\ \vdots \\ g_{06} \\ g_{10} \\ g_{11} \\ \vdots \\ g_{16} \\ \vdots \\ g_{60} \\ g_{61} \\ \vdots \\ g_{66} \end{bmatrix}_{49 \times 1} \tag{4.10}$$

Yukarıdaki sütun matrislerini denklem (4.9)' da yerine yazıp \mathbf{S} matrisini çektiğimizde aşağıdaki şekilde 49×49 boyutlarındaki \mathbf{S} matrisinin i . satır j . sütun elemanını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$s_{i,j} = \begin{cases} (i \bmod (N+1)) \times ((i \bmod (N+1)) + 1) \times 8 \times 10^3 \times 0,01 & ; \quad \text{mod}(i, N+1) < N \text{ ve } j = i+2 \\ (((i-1) \operatorname{div} (N+1)) + 1) \times (((i-1) \operatorname{div} (N+1)) + 2) \times 100 & ; \quad j > 2(N+1) \text{ ve } j = i+2(N+1) \\ \frac{(((i-1) \operatorname{div} (N+1)) + 4)!}{(((i-1) \operatorname{div} (N+1))!)} \times 20 \times 10^{10} \times 8,33 \times 10^{-6} & ; \quad j > 4(N+1) \text{ ve } j = i + (N+1) \\ & \text{diğer} \end{cases}$$

(4.11)

Burada $a \bmod b$, a tam sayısının b tam sayısına bölümünden kalan ve $a \operatorname{div} b$ ise a tam sayısının b tam sayısına bölümünden elde edilen bölümü verir.

Denklem (4.13)' den \mathbf{G} ifadesi çekilirse;

$$\mathbf{G} = \sum_{p=0}^6 \sum_{q=0}^6 \frac{1}{p! q!} f^{(p,q)}(x_p, t_q) \quad (4.14)$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{G} = & f(x_0)\cos 3t_0 - 3f(x_0)\sin 3t_1 - \frac{9}{2}f(x_0)\cos 3t_2 + \frac{9}{2}f(x_0)\sin 3t_3 + \frac{27}{8}f(x_0)\cos 3t_4 - \frac{81}{40}f(x_0)\sin 3t_5 - \frac{81}{80}f(x_0)\cos 3t_6 \\
& + f'(x_1)\cos 3t_0 - 3f'(x_1)\sin 3t_1 - \frac{9}{2}f'(x_1)\cos 3t_2 + \frac{9}{2}f'(x_1)\sin 3t_3 + \frac{27}{8}f'(x_1)\cos 3t_4 - \frac{81}{40}f'(x_1)\sin 3t_5 \\
& - \frac{81}{80}f'(x_1)\cos 3t_6 + \frac{1}{2}f''(x_2)\cos 3t_0 - \frac{3}{2}f''(x_2)\sin 3t_1 - \frac{9}{4}f''(x_2)\cos 3t_2 + \frac{9}{4}f''(x_2)\sin 3t_3 + \frac{27}{16}f''(x_2)\cos 3t_4 \\
& - \frac{81}{80}f''(x_2)\sin 3t_5 - \frac{81}{160}f''(x_2)\cos 3t_6 + \frac{1}{6}f'''(x_3)\cos 3t_0 - \frac{1}{2}f'''(x_3)\sin 3t_1 - \frac{3}{4}f'''(x_3)\cos 3t_2 + \frac{3}{4}f'''(x_3)\sin 3t_3 \\
& + \frac{9}{16}f'''(x_3)\cos 3t_4 - \frac{27}{80}f'''(x_3)\sin 3t_5 - \frac{27}{160}f'''(x_3)\cos 3t_6 + \frac{1}{24}f^{(iv)}(x_4)\cos 3t_0 - \frac{1}{8}f^{(iv)}(x_4)\sin 3t_1 \\
& - \frac{3}{16}f^{(iv)}(x_4)\cos 3t_2 + \frac{3}{16}f^{(iv)}(x_4)\sin 3t_3 + \frac{9}{16}f^{(iv)}(x_4)\cos 3t_4 - \frac{27}{320}f^{(iv)}(x_4)\sin 3t_5 - \frac{27}{320}f^{(iv)}(x_4)\cos 3t_6 \\
& + \frac{1}{120}f^{(v)}(x_5)\cos 3t_0 - \frac{1}{40}f^{(v)}(x_5)\sin 3t_1 - \frac{3}{80}f^{(v)}(x_5)\cos 3t_2 + \frac{3}{80}f^{(v)}(x_5)\sin 3t_3 + \frac{9}{320}f^{(v)}(x_5)\cos 3t_4 \\
& - \frac{27}{1600}f^{(v)}(x_5)\sin 3t_5 - \frac{27}{3200}f^{(v)}(x_5)\cos 3t_6 + \frac{1}{720}f^{(vi)}(x_6)\cos 3t_0 - \frac{1}{240}f^{(vi)}(x_6)\sin 3t_1 - \frac{1}{160}f^{(vi)}(x_6)\cos 3t_2 \\
& + \frac{1}{160}f^{(vi)}(x_6)\sin 3t_3 + \frac{3}{640}f^{(vi)}(x_6)\cos 3t_4 - \frac{9}{3200}f^{(vi)}(x_6)\sin 3t_5 - \frac{9}{6400}f^{(vi)}(x_6)\cos 3t_6
\end{aligned}$$

(4.15)

$$f(x, t) = 10^{-4} \cos 3t \quad (4.16)$$

olduğuna göre $f(x)$ türevi olan tüm ifadeler sıfır olur. Dolayısıyla denklem (4.15)' i sütun matrisi şeklinde ifade etmek gerekirse ilk 7 satırı sıfırdan farklı sayısal ifadeler içeriyor olup kalan 42 satır sıfıra eşit olacaktır.

$f(x, t) = 10^{-4}$ ve $t = 0$ için $\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} f(x_0) \cos 3t_0 \\ -3f(x_0) \sin 3t_1 \\ \frac{9}{2} f(x_0) \cos 3t_2 \\ \frac{9}{2} f(x_0) \sin 3t_3 \\ \frac{27}{8} f(x_0) \cos 3t_4 \\ -\frac{81}{40} f(x_0) \sin 3t_5 \\ \frac{81}{80} f(x_0) \cos 3t_6 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{49 \times 1} = \begin{bmatrix} 10^{-4} \\ 0 \\ -\frac{9}{2} 10^{-4} \\ 0 \\ \frac{27}{8} 10^{-4} \\ 0 \\ -\frac{81}{80} 10^{-4} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{49 \times 1} \quad (4.17)$$

Taylor katsayısı olan \bar{c}_{pq} değerleri denklem (3.29)' a göre bulunur. Sınır şartları ve başlangıç koşulları ile değiştirilmiş olan denklem (4.12)' deki $\bar{\mathbf{S}}$ matrisinin tersi alınarak denklem (4.17) deki $\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisi ile çarpılmasıyla elde edilir. $\bar{\mathbf{G}}$ matrisinde başlangıç koşullarımız en üst 2 satır ile yer değiştirildiği için bu satırların karşılıkları olan 0,01 ve 0 değerleri aynı şekilde $\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisinde de en üst 2 satırdaki yerine yazılır.

$$\bar{\mathbf{C}}_{pq} = \text{inv}(\bar{\mathbf{S}}) \bar{\mathbf{G}}$$

işlemi yapıldığında bilinmeyen Taylor katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} c_{00} = 0 \\ c_{01} = 0 \\ c_{02} = 0 \\ c_{03} = 0 \\ c_{04} = 0 \\ c_{05} = 0 \\ c_{06} = 0 \\ c_{10} = 0,0064 \\ c_{11} = 0 \\ c_{12} = 1,4 \cdot 10^{-9} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} c_{13} = 0 \\ c_{14} = 1,05 \cdot 10^{-9} \\ c_{15} = 0 \\ c_{16} = -3,16 \cdot 10^{-10} \\ c_{20} = 0 \\ c_{21} = 0 \\ c_{22} = 0 \\ c_{23} = 0 \\ c_{24} = 0 \\ c_{25} = 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} c_{26} = 0 \\ c_{30} = 5 \cdot 10^{-4} \\ c_{31} = 0 \\ c_{32} = 1,13 \cdot 10^{-10} \\ c_{33} = 0 \\ c_{34} = -8,44 \cdot 10^{-11} \\ c_{35} = 0 \\ c_{36} = 2,53 \cdot 10^{-11} \\ c_{40} = 5 \cdot 10^{-5} \\ c_{41} = 0 \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{l} c_{42} = 1,13 \cdot 10^{-11} \\ c_{43} = 0 \\ c_{44} = 8,44 \cdot 10^{-12} \\ c_{45} = 0 \\ c_{46} = -2,53 \cdot 10^{-12} \\ c_{50} = 1,54 \cdot 10^{-9} \\ c_{51} = 0 \\ c_{52} = -3,38 \cdot 10^{-16} \\ c_{53} = 0 \\ c_{54} = 2,53 \cdot 10^{-16} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} c_{55} = 0 \\ c_{56} = -7,60 \cdot 10^{-17} \\ c_{60} = -1,02 \cdot 10^{-10} \\ c_{61} = 0 \\ c_{62} = 2,25 \cdot 10^{-17} \\ c_{63} = 0 \\ c_{64} = -1,69 \cdot 10^{-17} \\ c_{65} = 0 \\ c_{66} = 5,06 \cdot 10^{-18} \end{array} \right] \quad (4.18)
\end{aligned}$$

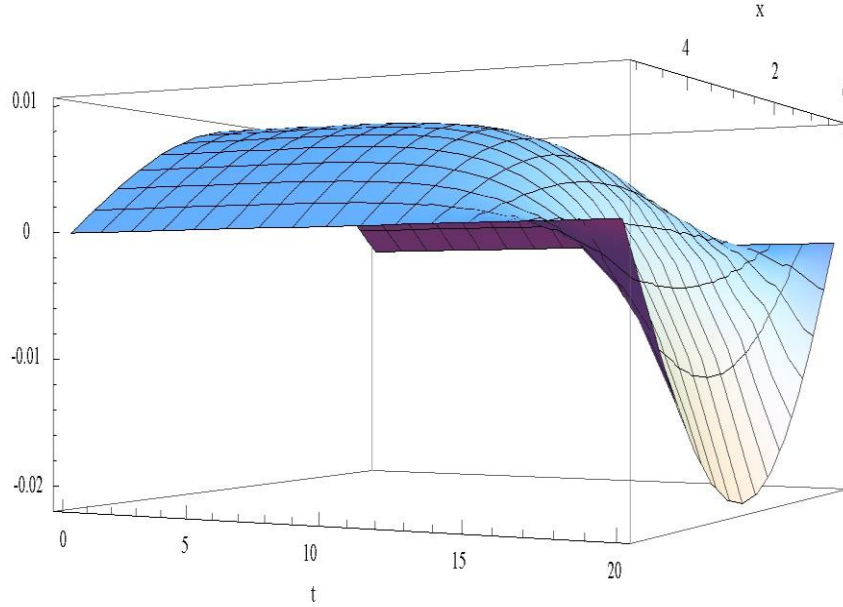
Denklem (4.18)' deki Taylor katsayıları denklem (3.9)' da yerine konularak zamana ve mekâna bağlı değişen yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$[u(x, t)] = \mathbf{X}(x)\mathbf{CT}(t) = \sum_{p=0}^6 \sum_{q=0}^6 c_{pq}(x-0)^p(t-0)^q \quad (4.19)$$

Denklem (4.19)' dan;

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & 0,0064 - 1,406.10^{-9}xt^2 + 1,055.10^{-9}xt^4 \\
& - 3,164.10^{-10}xt^6 - 5.10^{-4}x^3 \\
& + 1,125.10^{-10}x^3t^2 - 8,438.10^{-11}x^3t^4 \\
& + 2,531.10^{-11}x^3t^6 + 5.10^{-5}x^4 \\
& - 1,125.10^{-11}x^4t^2 + 8,438.10^{-12}x^4t^4 \\
& - 2,531.10^{-12}x^4t^6 + 1,536.10^{-9}x^5 \\
& - 3,375.10^{-16}x^5t^2 + 2,531.10^{-16}x^5t^4 \\
& - 7,595.10^{-17}x^5t^6 - 1,024.10^{-10}x^6 \\
& + 2,25.10^{-17}x^6t^2 - 1,688.10^{-17}x^6t^4 \\
& + 5,062.10^{-18}x^6t^6
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Denklem (4.20)'de bulunan çözüm fonksiyonu $L = 5$ ve $t = 0 - 20s$ aralığında çizdirildiğinde Şekil 4.1'deki grafik elde edilir.



Şekil 4.1. Basit-Basit Mesnet için Taylor matris metodu ile genel çözüm

4.1.2. Ankastre-Serbest Mesnet için Taylor Matris Yöntemi ile Sayısal Uygulama

Başlangıç koşulları $u_0 = 0.01m$ ve $u_0 = 0$ olarak $N = 6$ için $(x_0, t_0) = (0,0)$ orijininde açılan matris serisinde bilinmeyen Taylor katsayıları denklem (3.29)' a göre bulunarak denklem (3.9)' da yerine konulup enine zorlamalı titreşim denklemini elde edilecektir.

Ankastre-Serbest mesnet sınır şartları ve başlangıç koşulları için matrisler aşağıdaki şekildedir.

Denklem (3.56)' de ki **SS21** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 49} \quad (4.21)$$

Denklem (3.59)' da ki **SS22** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 49} \quad (4.22)$$

Denklem (3.60)' da ki **SS23** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

Denklem (4.11)' de sınır şartlarından gelen 28 satır (**SS21**, **SS22**, **SS23**, **SS24**) ve başlangıç şartlarından gelen 2 satır (**BB21**, **BB22**) olmak üzere toplamda 30 satır değiştirilerek aşağıdaki $\bar{\mathbf{S}}1$ matrisi elde edilir. Matrisin i . satır j . sütun elemanını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} s_{i,j} \\ bb21_{1,j} \\ bb22_{1,j} \\ ss21_{(i \bmod (N+1))+1,j} \\ ss22_{(i \bmod (N+1))+1,j} \\ ss23_{(i \bmod (N+1))+1,j} \\ ss24_{(i \bmod (N+1))+1,j} \end{array} \right. = \begin{cases} i < (N+1) \times (N-3) - 1 \\ i = (N+1) \times (N-3) - 1 \\ i = (N+1) \times (N-3) \\ (N+1) \times (N-3) < i \leq (N+1) \times (N-2) \\ (N+1) \times (N-2) < i \leq (N+1) \times (N-1) \\ (N+1) \times (N-1) < i \leq (N+1) \times N \\ (N+1) \times N < i \leq (N+1)^2 \end{cases} \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisi denklem (4.12) ile aynı olup c_{pq} bilinmeyen Taylor katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır. Taylor katsayısı olan \bar{c}_{pq} değerleri denklem (3.29)' a göre bulunur. Sınır şartları ve başlangıç koşulları ile değiştirilmiş olan denklem (4.27)' de ki $\bar{\mathbf{S}}1$ matrisinin tersi alınarak denklem (4.12)' de ki $\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisi ile çarpılmasıyla elde edilir.

$$\bar{\mathbf{C}}_{pq} = \text{inv}(\bar{\mathbf{S}}1)\bar{\mathbf{G}}$$

işlemi yapıldığında bilinmeyen Taylor katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{00} = 0 \\ c_{01} = 0 \\ c_{02} = 0 \\ c_{03} = 0 \\ c_{04} = 0 \\ c_{05} = 0 \\ c_{06} = 0 \\ c_{10} = 0 \\ c_{11} = 0 \\ c_{12} = 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} = 0 \\ c_{14} = 0 \\ c_{15} = 0 \\ c_{16} = 0 \\ c_{20} = 0 \\ c_{21} = 0 \\ c_{22} = -1,69 \cdot 10^{-9} \\ c_{23} = 0 \\ c_{24} = 1,69 \cdot 10^{-9} \\ c_{25} = 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{26} = -3,8 \cdot 10^{-10} \\ c_{30} = 0 \\ c_{31} = 0 \\ c_{32} = 2,25 \cdot 10^{-10} \\ c_{33} = 0 \\ c_{34} = -1,69 \cdot 10^{-10} \\ c_{35} = 0 \\ c_{36} = 5,06 \cdot 10^{-11} \\ c_{40} = 0 \\ c_{41} = 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} c_{42} = -1,12 \cdot 10^{-11} \\ c_{43} = 0 \\ c_{44} = 8,43 \cdot 10^{-12} \\ c_{45} = 0 \\ c_{46} = -2,53 \cdot 10^{-12} \\ c_{50} = 3,2 \cdot 10^{-10} \\ c_{51} = 0 \\ c_{52} = -6,75 \cdot 10^{-16} \\ c_{53} = 0 \\ c_{54} = 5,06 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{55} = 0 \\ c_{56} = -1,52 \cdot 10^{-16} \\ c_{60} = -1,07 \cdot 10^{-11} \\ c_{61} = 0 \\ c_{62} = 2,25 \cdot 10^{-17} \\ c_{63} = 0 \\ c_{64} = -1,69 \cdot 10^{-17} \\ c_{65} = 0 \\ c_{66} = 5,06 \cdot 10^{-18} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

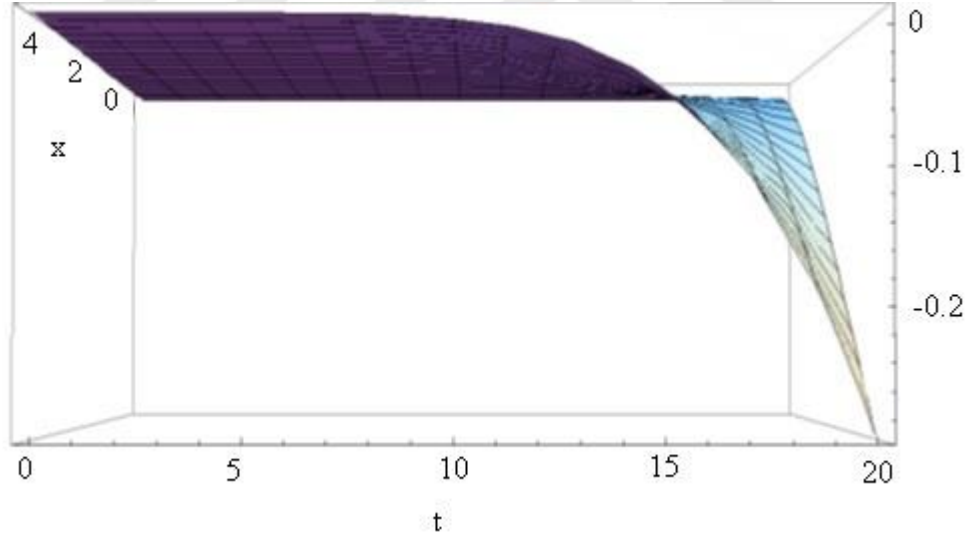
Denklem (4.28)' deki Taylor katsayıları, denklem (3.9)' da yerine konularak zamana ve mekana bağlı değişen yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$[u(x, t)] = \mathbf{X}(x)\mathbf{CT}(t) = \sum_{p=0}^6 \sum_{q=0}^6 c_{pq}(x-0)^p(t-0)^q \quad (4.29)$$

Denklem (4.29)' dan;

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & 0,0008x^2 - 1,687 \cdot 10^{-9}x^2t^2 + 1,266 \cdot 10^{-9}x^2t^4 \\
& - 3,796 \cdot 10^{-10}x^2t^6 - 0,0001x^3 \\
& + 2,25 \cdot 10^{-10}x^3t^2 - 1,687 \cdot 10^{-10}x^3t^4 \\
& + 5,061 \cdot 10^{-11}x^3t^6 + 5,33 \cdot 10^{-6}x^4 \\
& - 1,12 \cdot 10^{-11}x^4t^2 + 8,43 \cdot 10^{-12}x^4t^4 \\
& - 2,53 \cdot 10^{-12}x^4t^6 + 3,2 \cdot 10^{-10}x^5 \\
& - 6,748 \cdot 10^{-16}x^5t^2 + 5,061 \cdot 10^{-16}x^5t^4 \\
& - 1,518 \cdot 10^{-17}x^5t^6 - 1,066 \cdot 10^{-11}x^6 \\
& + 2,248 \cdot 10^{-17}x^6t^2 - 1,686 \cdot 10^{-9}x^6t^4 \\
& + 5,059 \cdot 10^{-18}x^6t^6
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Denklem (4.30), $L = 5m$ ve $t = 0 - 20s$ aralığında çizdirildiğinde Şekil 4.2' deki grafik elde edilir.



Şekil 4.2. Ankastre-Serbest Mesnet için Taylor matris metodu ile genel çözüm

4.1.3. Ankastre-Ankastre Mesnet için Taylor Matris Yöntemi ile Sayısal Uygulama

Başlangıç koşulları $u_0 = 0.01m$ ve $u_0 = 0$ olarak $N = 6$ için $(x_0, t_0) = (0,0)$ orijininde açılan matris serisinde bilinmeyen Taylor katsayıları denklem (3.29)' a göre bulunarak denklem (3.9)' da yerine konulup enine zorlamalı titreşim denklemini elde edilecektir.

Ankastre-Ankastre mesnet sınır şartları ve başlangıç koşulları için matrisler aşağıdaki şekildedir.

Denklem (3.56)' da ki **SS31** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 49} \quad (4.31)$$

Denklem (3.76)' da ki **SS32** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 49} \quad (4.32)$$

Denklem (3.77)' de ki **SS33** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{SS33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 5^2 & 0 & \dots & 0 & 5^6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 5 & \dots & 0 & 0 & 5^2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 5^6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 & 0 & \dots & 5^2 & 0 & 0 & \dots & 5^6 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Denklem (3.80)' de ki **SS34** matrisi $N = 6$ için şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} s_{i,j} \\ bb11_{1,j} \\ bb12_{1,j} \\ ss31_{(i \bmod (N+1))+1,j} \\ ss32_{(i \bmod (N+1))+1,j} \\ ss33_{(i \bmod (N+1))+1,j} \\ ss34_{(i \bmod (N+1))+1,j} \end{array} \right\} \bar{S}2_{i,j} = \begin{array}{l} ; \\ ; \\ ; \\ ; \\ ; \\ ; \\ ; \end{array} \\
& \begin{array}{l} i < (N+1) \times (N-3) - 1 \\ i = (N+1) \times (N-3) - 1 \\ i = (N+1) \times (N-3) \\ (N+1) \times (N-3) < i \leq (N+1) \times (N-2) \\ (N+1) \times (N-2) < i \leq (N+1) \times (N-1) \\ (N+1) \times (N-1) < i \leq (N+1) \times N \\ (N+1) \times N < i \leq (N+1)^2 \end{array}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisi denklem (4.12) ile aynı olup c_{pq} bilinmeyen Taylor katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır. Taylor katsayısı olan \bar{c}_{pq} değerleri denklem (3.29)' a göre bulunur. Sınır şartları ve başlangıç koşulları ile değiştirilmiş olan denklem (4.35) deki $\bar{\mathbf{S}}2$ matrisinin tersi alınarak denklem (4.12) deki $\bar{\mathbf{G}}$ sütun matrisi ile çarpılmasıyla elde edilir.

$$\bar{\mathbf{C}}_{pq} = \text{inv}(\bar{\mathbf{S}}2)\bar{\mathbf{G}}$$

İşlemi yapıldığında bilinmeyen Taylor katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_{00} = 0 \\ c_{01} = 0 \\ c_{02} = 0 \\ c_{03} = 0 \\ c_{04} = 0 \\ c_{05} = 0 \\ c_{06} = 0 \\ c_{10} = 0 \\ c_{11} = 0 \\ c_{12} = 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} = 0 \\ c_{14} = 0 \\ c_{15} = 0 \\ c_{16} = 0 \\ c_{20} = 0,006 \\ c_{21} = 0 \\ c_{22} = -2,81 \cdot 10^{-10} \\ c_{23} = 0 \\ c_{24} = 2,1 \cdot 10^{-10} \\ c_{25} = 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{26} = -6,33 \cdot 10^{-11} \\ c_{30} = -0,003 \\ c_{31} = 0 \\ c_{32} = 1,13 \cdot 10^{-10} \\ c_{33} = 0 \\ c_{34} = 8,44 \cdot 10^{-11} \\ c_{35} = 0 \\ c_{36} = 2,53 \cdot 10^{-11} \\ c_{40} = 0 \\ c_{41} = 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} c_{42} = -1,13 \cdot 10^{-11} \\ c_{43} = 0 \\ c_{44} = 8,44 \cdot 10^{-12} \\ c_{45} = 0 \\ c_{46} = -2,53 \cdot 10^{-12} \\ c_{50} = 7,68 \cdot 10^{-9} \\ c_{51} = 0 \\ c_{52} = -3,38 \cdot 10^{-16} \\ c_{53} = 0 \\ c_{54} = 2,53 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{55} = 0 \\ c_{56} = -7,59 \cdot 10^{-17} \\ c_{60} = -5,12 \cdot 10^{-10} \\ c_{61} = 0 \\ c_{62} = 2,25 \cdot 10^{-17} \\ c_{63} = 0 \\ c_{64} = -1,69 \cdot 10^{-17} \\ c_{65} = 0 \\ c_{66} = 5,06 \cdot 10^{-18} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

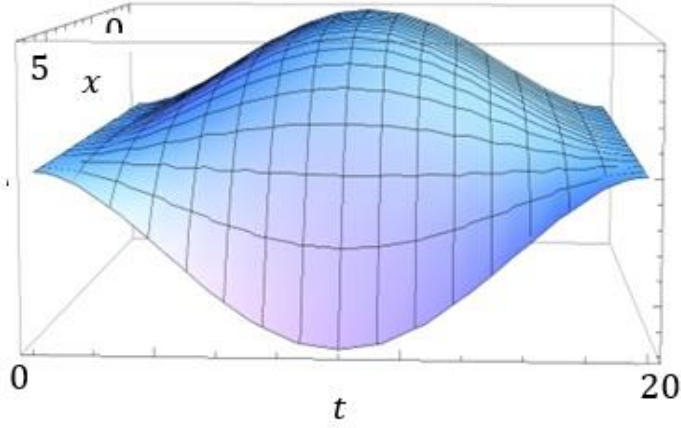
Denklem (4.36) da ki Taylor katsayıları, denklem (3.9)' da yerine konularak zamana ve mekana bağlı değişen yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$[u(x, t)] = \mathbf{X}(x)\mathbf{CT}(t) = \sum_{p=0}^6 \sum_{q=0}^6 c_{pq}(x-0)^p(t-0)^q \tag{4.37}$$

Denklem (4.37)' den;

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & 0,0064x^2 - 2,813 \cdot 10^{-10}x^2t^2 + 2,11 \cdot 10^{-10}x^2t^4 \\
& - 6,328 \cdot 10^{-11}x^2t^6 - 0,0026x^3 \\
& + 1,125 \cdot 10^{-10}x^3t^2 - 8,437 \cdot 10^{-11}x^3t^4 \\
& + 2,531 \cdot 10^{-11}x^3t^6 + 0,00026x^4 \\
& - 1,125 \cdot 10^{-11}x^4t^2 + 8,436 \cdot 10^{-12}x^4t^4 \\
& - 2,531 \cdot 10^{-12}x^4t^6 + 7,697 \cdot 10^{-9}x^5 \\
& - 3,375 \cdot 10^{-16}x^5t^2 + 2,531 \cdot 10^{-16}x^5t^4 \\
& - 7,593 \cdot 10^{-17}x^5t^6 - 5,12 \cdot 10^{-10}x^6 \\
& + 2,25 \cdot 10^{-17}x^6t^2 - 1,687 \cdot 10^{-17}x^6t^4 \\
& + 5,062 \cdot 10^{-18}x^6t^6
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Denklem (4.38), $L = 5m$ ve $t = 0 - 20s$ aralığında çizdirildiğinde Şekil 4.3' deki grafik elde edilir.



Şekil 4.3. Ankastre-Ankastre Mesnet için Taylor matris metodu ile genel çözüm

4.2. Yöntemin Doğrulanması

Bu bölümde değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak, basit-basit mesnet durumu için tam çözüm elde edilecek, daha sonra Taylor matris yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırma yapılacaktır.

4.2.1. Homojen Çözüm

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.39)$$

$$\ddot{u}(x, t) = X(x)\ddot{T}(t) \quad (4.40)$$

$$u''(x, t) = X''(x)T(t) \quad (4.41)$$

$$u^{(w)}(x, t) = X^{(w)}(x)T(t) \quad (4.42)$$

Yer değiştirme ve zaman fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad (4.43)$$

$$X(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad (4.44)$$

Eksenel yük altındaki enine zorlamalı hareket denklemimiz (2.10) yazılarak burada (4.39) ve (4.42) yerlerine konur ve zorlama olarak başta belirtilen fonksiyonda yerleştirilirse;

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 10^{-4} \cos(3t) \quad (4.45)$$

elde edilir. Bu denkleme denklem (3.38) da ki sınır şartları ve başlangıç koşulları uygulanırsa;

Sınır şartı 1 için;

$$u(0, t) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow B = 0 \quad (4.46)$$

Sınır şartı 2 için;

$$u''(0, t) = 0 \rightarrow X''(0) = 0$$

ve

$$X''(x) = -\beta^2 A \sin \beta x - \beta^2 B \cos \beta x \quad (4.47)$$

Denklem (4.47)' den;

$$X''(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

Sınır şartı 3 için;

$$u(L, t) = 0 \rightarrow X(L) = 0$$

$$u(L, t) = A \sin \beta L = 0 \rightarrow \beta L = n\pi \rightarrow \beta = \frac{n\pi}{L} \quad (4.48)$$

Sınır şartı 4 için;

$$u''(L, t) = 0 \rightarrow X''(L) = 0 \quad (4.49)$$

Denklem (4.47)' den;

$$X''(L) = -\beta^2 A \sin \beta L \quad (4.50)$$

Denklem (4.50)' den aşağıdaki ifade elde edilir.

$$-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A \sin n\pi = 0 \quad (4.51)$$

Aynı şekilde denklem (3.39) da ki başlangıç koşulları uygulanırsa;

$$\begin{aligned}u\left(\frac{L}{2}, 0\right) &= 0,01 \\ \dot{u}\left(\frac{L}{2}, 0\right) &= 0\end{aligned}\tag{4.51}$$

Başlangıç koşulu 1 için;

$$u\left(\frac{L}{2}, 0\right) = 0,01 \rightarrow X\left(\frac{L}{2}\right)T(0) = 0,01\tag{4.52}$$

$$A \sin\left(\frac{n\pi L}{L} \frac{L}{2}\right) (c_1 + c_2) = 0,01$$

$$c_1 + c_2 = -\frac{0,01}{A}\tag{4.53}$$

Başlangıç koşulu 2 için;

$$\dot{u}\left(\frac{L}{2}, 0\right) = 0 \rightarrow X\left(\frac{L}{2}\right)\dot{T}(0) = 0\tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}\dot{T}(t) &= i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega c_2 e^{-i\omega t} = i\omega (c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t}) \\ \rightarrow \dot{T}(0) &= i\omega (c_1 - c_2)\end{aligned}\tag{4.55}$$

$$A \sin\left(\frac{n\pi L}{L} \frac{L}{2}\right) i\omega (c_1 - c_2) = 0\tag{4.56}$$

$$A i\omega (c_1 - c_2) = 0$$

$$c_1 = c_2$$

Denklem (4.56)' da bulunan eşitlik denklem (4.53)' de yerine konulursa;

$$A c_1 = -0,005\tag{4.57}$$

$$u_h(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) c_1 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (4.58)$$

Denklem (4.57), denklem (4.58)' de yerine konularak homojen çözüm elde edilir.

$$u_h(x, t) = -0.005 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (4.59)$$

Doğal frekansın elde edilmesi için denklem (4.45) sıfıra eşitlenir.

$$EIX^{(iv)}T + N_0 X''T + \rho AX\ddot{T} = 0 \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T} &= -\omega^2 T \\ X'' &= -A\beta^2 \sin\beta x \\ X^{(iv)} &= A\beta^4 \sin\beta x \end{aligned} \quad (4.61)$$

Denklem (4.61)' de ki ifadeler (4.60)' da yerine konulursa;

$$EIX^{(iv)}T - \rho AX\omega^2 T + N_0 X''T = 0 \quad (4.62)$$

$$X^{(iv)} - \frac{\rho A}{EI} X\omega^2 + \frac{N_0}{EI} X'' = 0 \quad (4.63)$$

Denklem (4.61) , denklem (4.63) de yerine konulursa;

$$\begin{aligned} -A\beta^4 \sin\beta x - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 A \sin\beta x - \frac{N_0}{EI} A\beta^2 \sin\beta x &= 0 \\ \beta^4 - \frac{\rho A}{EI} \omega^2 - \frac{N_0}{EI} \beta^2 &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{\beta^2(\beta^2 EI - N_0)}{\rho A} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Denklem (4.48) , denklem (4.64)' de yerine konulursa;

$$\omega^2 = \frac{\beta^2(\beta^2 EI - N_0)}{\rho A} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2 \rho A} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI - N_0 \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2 \rho A} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI - N_0 \right)}$$
(4.65)

4.2.2. Özel Çözüm

$$u_{\ddot{o}} = D \cos(3t)$$
(4.66)

Denklem (4.66) , denklem (4.45)' de yerine konulursa mekana bağlı türev olan u'' ve $u^{(iv)}$ ifadeleri sıfıra eşit olacak olup zamana bağlı fonksiyon türevi ise aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\ddot{u}(x, t) = -9D \cos(3t)$$
(4.67)

Denklem (4.45)' de denklem (4.67) yerine konulursa;

$$-9\rho A D \cos(3t) = 10^{-4} \cos(3t)$$

$$D = -\frac{10^{-4}}{9\rho A}$$
(4.68)

Buradan

$$u_{\ddot{o}} = -\frac{10^{-4}}{9\rho A} \cos(3t)$$
(4.69)

olur.

4.2.3. Genel Çözüm

Kiriş enine zorlamalı hareket denkleminin genel çözümü, homojen ve özel çözümlerin toplanması ile elde edilir. Bu durumda genel çözüm;

$$u_g(x, t) = u_h(x, t) + u_0(x, t) \quad (4.70)$$

$$u_g(x, t) = -0.005 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \frac{10^{-4}}{9\rho A} \cos(3t) \quad (4.71)$$

Denklem (4.65)' de bulduğumuz doğal frekans değeri denklem (4.71)' de yerine konularak genel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u_g(x, t) = -0.005 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(e^{i \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2\rho A}(\frac{n^2\pi^2}{L^2}EI - N_0)}t} + e^{-i \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2\rho A}(\frac{n^2\pi^2}{L^2}EI - N_0)}t} \right) - \frac{10^{-4}}{9\rho A} \cos(3t) \quad (4.72)$$

Denklem (4.72) aşağıdaki sayısal verilere göre hesaplanır:

$$n = 1$$

$$\rho A = 80$$

$$EI = 1,6710^6$$

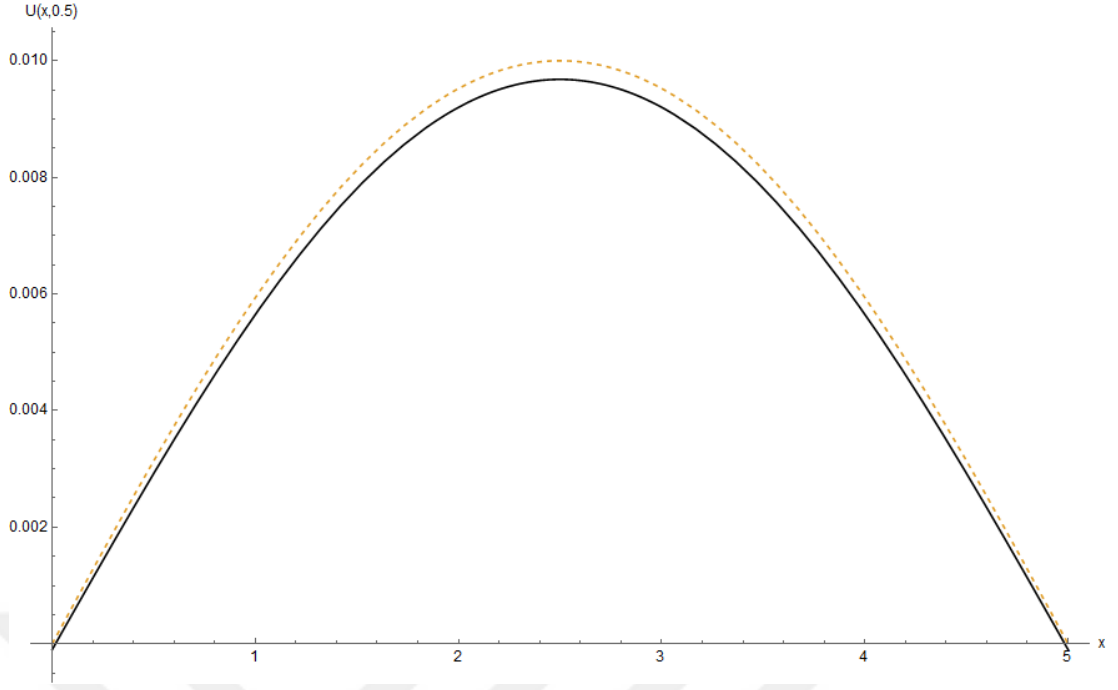
$$N_0 = 100$$

$$L = 5$$

Bu durumda denklemin en son hali aşağıdaki şekilde bulunur:

$$u_g(x, t) = -0.005 \sin(0,6283x) (e^{56,97it} + e^{-56,97it}) - 0,001410^{-4} \cos(3t) \quad (4.73)$$

Denklem (4.73) de elde ettiğimiz tam çözüm ile Taylor matris yöntemi ile elde ettiğimiz çözüm $t = 0,5$ için çizilerek Şekil 4.4' de gösterilmiştir. Denklem (4.73) ile denklem (4.20)' nin grafikleri üst üste çizdirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir. Her iki çözüm arasında oldukça küçük bir fark gözlemlenir.



Şekil 4.4. Basit-Basit Mesnet için Taylor metodu ile gerçek çözümün karşılaştırması
(- - - Taylor Matris Yöntemi, — Tam Çözüm)

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eksenel yükleme altındaki kirişin enine titreşim denklemi olan yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemin Taylor matris yöntemiyle çözümü sunulmuştur. Bu çalışma enine titreşen kirişlerin çözümü için yeni ve basit bir çözüm yöntemi olan Taylor matris yöntemini içerir. Önerilen metod konuma ve zamana bağlı 4. mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklem olan Euler-Bernoulli kiriş denklemini içinde bilinmeyen Taylor katsayıları bulunan matris formuna dönüştürür. Daha sonra bu matris denklemleri kullanılarak oldukça kolay bir çözüm elde edilir. Bu çalışmada eksenel yük altındaki Euler-Bernoulli kirişinin serbest ve zorlamalı titreşimleri çalışılmış olup genel ve özel çözümler belirlenmiştir. Metod, sayısal bir örnek problem çözülerek açıklanmış ve elde edilen sonuçlar, tam çözümün sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışma içerisinde elde edilen sayısal çözüm ile gerçek çözüm karşılaştırması oldukça iyidir.

KAYNAKLAR

1. Rao, S. S., Mechanical Vibration. New Jersey, Prentice Hall, 2004, 1105.
2. Traill-Nash, R. W., A. R. Collar. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1953, 6.2, 186-222.
3. Love, A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York, Dover Publications, 1927, 369.
4. Timoshenko, S. P. History of Strength of Materials. New York, Dover Publications, 1953, 452.
5. Timoshenko, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-sections. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 41.245, 1921, 744-746.
6. Timoshenko, S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 413.253, 1922, 125-131.
7. Kruszewski, E. T. Effects of transverse shear and rotary inertia on the natural frequencies of a uniform beam. National Advisory Committee for Aeronautics, 1909.
8. Traill, R. W. ve Collar, A. R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 6, 1953, 186-213.
9. Dolph, C. L. On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations. Quarterly of Applied Mathematics, 1954, 12.1, 175-187.
10. Huang, T. C. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. Journal of Applied Mechanics, 1961, 579-584.
11. Inman, D. J. Engineering Vibration. New Jersey, Prentice Hall, 2001, 621.
12. Meirovitch, L. Elements of Vibration Analysis. New York, McGraw-Hill, 1975, 560.
13. Everitt, W. N., Kwon, K. H., Littlejohn, L. L., Wellman, R. Orthogonal polynomial solutions of linear ordinary differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 133(1-2), 2001, 85-109.
14. Yalçınbaş, S., Sezer, M. A collocation method to solve high order linear complex differential equations in rectangular domains. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 26(3), 2010, 596-611.
15. Gülsu, M., Sezer, M. A Taylor polynomial approach for solving differential difference equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 186(2), 2006, 349-364.
16. Sezer, M. ve Daşcıoğlu, A. A. Taylor polynomial solutions of general linear differential difference equations with variable coefficients. Applied Mathematics and Computation 174, 2006, 1526-1538.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özer TATAR
Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1978
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ozer.tatar@bmc.com.tr

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Atatürk Lisesi, 1994
Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 1998

Mesleki Deneyim

Habaş Demir Çelik A. Ş.-Bakım Mühendisi	1998-2002
Akdemir Çelik A. Ş.-Bakım ve Atölye Şefi	2002-2004
Vestel Beyaz Eşya A. Ş.-Bakım ve Yardımcı Tesisler Şefi	2004-2012
Süperpar Otomotiv A. Ş.-Bakım Müdürü	2012-2015
BMC Otomotiv A. Ş. -Tesis Müdürü	2015-2017
BMC Otomotiv A. Ş. -Tesis Direktörü	2017-...