T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

BERNOULLI VE EULER POLİNOMLARININ MATRİS ÖZELLİKLERİ VE GECİKMELİ İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI

Ezgi ŞAŞMAZ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER

MANİSA–2018

Ezgi
ŞAŞMAZ

BERNOULLI VE EULER POLİNOMLARININ MATRİS ÖZELLİKLERİ VE GECİKMELİ İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI

2018

<u>Tez Sırtı</u>

TEZ ONAYI

Ezgi ŞAŞMAZ tarafından hazırlanan **"Bernoulli ve Euler Polinomlarının Matris Özellikleri ve Gecikmeli İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları"**adlı tez çalışması21/09/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak savunulmuş ve ~~**oyçokluğu**~~ / **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL** Dokuz Eylül Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğretim Üyesi Kübra ERDEMBİÇER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ezgi ŞAŞMAZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B_n(x)$	Bernoulli Polinomları
$E_n(x)$	Euler Polinomları
$R_N(x)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$y(x)$	Tam Çözüm
x_i	Sıralama Noktaları
$\lvert e_N(x) \rvert$	Gerçek Mutlak Hata Fonksiyonu
b_n	Bernoulli Sayıları
ε_n	Euler Sayıları

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLO DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan ve her zaman yol gösteren, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, kendisini tanımaktan büyük gurur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e, hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli arkadaşlarıma yürekten teşekkür ederim.

Ezgi ŞAŞMAZ
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bernoulli ve Euler Polinomlarının Matris Özellikleri ve Gecikmeli İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Ezgi ŞAŞMAZ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Gecikmeli diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemler; kuantum mekaniği, elektrodinamik, popülasyon dinamiği, kimyasal kinetik, kontrol problemleri, elektronik sistemler, olasılık, sayılar teorisi, mekanik, astronomi, biyoloji, ekonomi, potansiyel teorisi, elektrostatik ve endüstri gibi birçok uygulamalı matematiksel bilimlerde önemli bir rol oynarlar. Genellikle bu tip denklemlerin analitik çözümünü bulmak zordur; dolayısıyla bunların yaklaşık çözümlerini bulmak için sayısal yöntemlere gerek duyulur.

Bu tezde, yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır koşulları altında yaklaşık çözümlerini bulmak için, standart sıralama noktaları ile beraber diferansiyel ve integrasyonun işlemsel matrislerine dayalı bir matris yöntemi sunulur. Bu amaç için, önce Bernoulli ve Euler polinomlarının matris formları hesaplanılır. Sonra, bu matris formlarını kullanarak, gecikmeli integro-diferansiyel denklem, uygun sayısal yöntemlerle çözülebilen, bilinmeyen Bernoulli ve Euler katsayılı iki farklı lineer cebirsel denklemler sistemine indirgenilir; böylece problemin yaklaşık çözümü, "Matris-Sıralama Yöntemi" ni kullanarak, yaklaşık çözüm Bernoulli ve Euler polinomları cinsinden elde edilir.

Ayrıca, elde edilen yaklaşık çözümlerin hata üst sınırlarını tahmin etmek için rezidüel(kalan) fonksiyona dayalı hata analizi yapılır. Bununla birlikte, sunulan yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini tasdik etmek için herbir problem tipine ait bazı sayısal örnekler ele alınmış; sonuçlar, mutlak hatalar ve hata tahminleri ile beraber tablolar ve grafiklerle gösterilmiştir. Son olarak da tartışmalar ve öneriler verilir.

Anahtar Kelimeler: Bernoulli polinomları ve serileri, Euler polinomları ve serileri Gecikmeli integro diferansiyel denklemler,Matris ve sıralama yöntemleri, Rezidüel (kalan) hata analizi

2018, 79 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Matrix Properties of Bernoulli and Euler Polynomials and Applications to Delay Integro Differential Equations

Ezgi ŞAŞMAZ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Delay differential, integral and integro differential equations play an important role in many applied mathematical sciences such as quantum mechanics, electrodynamics, population dynamic, chemical kinetics, control problems, electronic systems, probability, number theory, mechanics, astronomy, biology, economics, potential theory, electrostatics and industrial applications. In general, it is difficult to find the analitical solution of these type equations. So it is necessary to obtain their approximate solutions to numerical methods.

In this thesis, a matrix method based on operational matrices of differentiation and integration together with standard collocation points is presented to find the approximate solution of high order linear delay integro-differential equations with variable coefficients under the initial and boundary conditions. For this aim, first the matrix forms of Bernoulli and Euler polynomials are computed. Then by using these matrix forms, delay integro-differential equation is reduced to two different systems of linear algebraic equations with unknown Bernoulli and Euler cofficients which can be solved by means of suitable numerical methods; thereby, the approximate solution of the problem is obtained in terms of Bernoulli and Euler polynomials by using “ Matrix-Collocation method”.

In addition, an error analysis based on residual function is performed to estimate the error upper bounds of the obtained approximate solutions. Moreover, some numerival examples for each kind of the problem are provided to confirm the accuracy and efficiency of the presented method; the results are shown in tables and figures along with absolute errors and error estimations. Finally,discussions and recommentaries are given.

Keywords: Bernoulli polynomials and series, Euler polynomials and series, Delay integro diffrerential equations, Matrix and collocation methods, Residual error analysis.

2018, 79 pages

1. GİRİŞ

Fonksiyonel denklemler; diferansiyel, integral, gecikmeli diferansiyel, gecikmeli integro-diferansiyel, diferansiyel-fark, neutral gecikmeli, genelleştirilmiş pantograph ve multi pantograph gibi denklemlerin bir kombinasyonu olarak bilinirler. Bu tip denklemler, ekonomi, biyoloji, astrofizik, kontrol ve elektrodinamik, elastisite, salınım teorisi gibi birçok uygulamalı alanlarda önemli bir rol oynarlar [1-9]. Bu çalışmada ele alınan gecikmeli integro-diferansiyel denklemler, fonksiyonel denklemlerin bir alt sınıfıdır; bunların analitik ve numerik çözümlerinin özellikleri birçok yazarlar tarafında araştırılmıştır [10-15]. Son yıllarda da fonksiyonel diferansiyel ve integral denklemlerin nümerik çözümleri için artan bir ilgi bulunmaktadır. Bu tip denklemlerin nümerik çözümleri için; Taylor, Chebyshev, Laguerre, Hermite, Bernstein Bessel, Exponential, Chelyshkov, Dickson, Müntz-Legendre ve Legendre polinomlarına dayalı matris-sıralama yöntemleri kullanılmıştır [1,13-24]. Bu çalışmada kullanılan Bernoulli ve Euler polinomları en sık kullanılan polinomlardan birisidir ve uygulama alanı ise matematiksel fizik fen, mühendislik ve bilgisayar bilimleri olup, matematiğin de aktif bir araştırma alanıdır [25-30]. Bu polinomların mucitleri ile ilgili tarihi gelişim aşağıda sunulmuştur.

Bernoulli polinomlarından ilk olarak “Ars Conjectandi” adlı çalışmasında İsviçreli matematikçi olan Jacob Bernoulli tarafından bahsedilmiştir; bu polinomlara Bernoulli adını Bernoulli’nin ölümünden sonra Euler vermiştir. Jacob Bernoulli, 27 Aralık 1654’te Basel’de doğmuş, ilahiyat okuyup papazlık eğitimi almış ve daha sonra asıl ilgi alanı olan matematiğe yönelmiştir. 1676 ve 1682 yılları arasında Hudde, Robert Boyle ve Robert Hooke’un da bulunduğu o zamanın ileri gelen isimlerinden matematik ve bilim alanındaki en son gelişmeleri öğrenmiş ve kuyruklu yıldızlar için bir kuram üretmiştir. Daha sonra 1683’ten itibaren Basel Üniversitesi’nde mekanik dersleri vererek çok verimli bir araştırma kariyerine başlamıştır. Ayrıca, Jacob Bernoulli olasılık kuramı ile iilgilenmiş; yazdığı kitabında, Huygens’in şans oyunlarıyla ilgili broşürünü yeniden basmış, permütasyonları ve kombinasyonları inceleyerek binom dağılımlarıyla ilgili Bernoulli Teoremi’ni geliştirmiştir. 1682 yılında bir deneysel fizik semineri olan "Collegium Experimentale Psychmeconicum"u kurmuş; 1687'de Basel Üniversitesi matematik profesörüolmuştur. Ayrıca Bernoulli denklemi adlı diferansiyel denklemin çözümünü ve logaritmik spiralin özelliklerini bularak, ilk kez "integral" terimini kullanmıştır. Frederick the Great of Prussia Berlin Akademisi'nin öncü yapıtı Ars Conjectandi (Tahmin Sanatı) onun ortaya koyduğu en önemli kavramlardan çoğunu içerir. Permütasyonlar ve kombinasyonlar kuramı, üstel serileri türettiği Bernoulli sayıları, matematiksel ve inançlara bağlı kestirilebilirliğe ilişkin incelemesi ve çağdaş örnekleme kuramının temelini oluşturan ve yine onun adıyla anılan Bernoulli büyük sayılar yasasını içeren olasılık konusu, bunlar arasında sayılabilir. Tüm yapıtları 1744'te "Baselli Jakob Bernoulli'nin yapıtları" adı altında Lozan'da basılmıştır.

Jacob Bernoulli(1654-1705)

18.yy'ın en büyük matematikçisi olarak kabul edilen **Leonhard Euler**, 15 Nisan 1707'de İsviçre'nin Basel şehrinde doğmuştur. Euler, Johann Bernoulli'den matematik eğitimini ve Basel Üniversitesi'nden de İlahiyat, İbranice ve Yunanca eğitimini almış; aldığı eğitim sonucunda papaz olacakken Bernoulli'nin sayesinde matematikle ilgilenmeye devam etmiş, felsefe dalında yüksek lisans öğrenimini tamamlamış, ilk makalesini 19 yaşında yayımlamış ve 20 yaşındayken Paris Bilimler Akademisi'nin açtığı bir yarışmada gemi direklerinin dengeli düzenlenmesine ilişkin bir incelemesiyle derece almıştır. Euler, Basel Üniversitesi'nden 1726 yılında mezun olmuş ve eğitimi boyunca Varignon, Descartes, Newton, Galileo, Hermann, Taylor, Wallis ve Bernoulli gibi matematikçilerin çalışmalarıyla ilgilenmiş ve bazılarını yeniden yapılandırmıştır. Euler'in 1728 yılında St. Petersburg'da fizik profesörü olduğu ve 1733 yılında Basel Üniversitesi matematik kürsüsünde kıdemli akademisyen olarak görev aldığı; daha sonraları, 25 yıl boyunca Frederick the Great of Prussia Berlin Akademisinde 380 tane makale yayımladığı ve 1773 yılında da hayatını kaybettiği bilinmektedir.

Euler, matematiğin hemen hemen tüm alanlarında, özellikle uzay zaman sürekli mekaniği, ay teorisi gibi alanlarda da çalışmalar ortaya koymuş; aynı zamanda kimya ve botanik alanlarında da çalışmalar yapmıştır. Euler, "e " sabiti ile formüller yazılabileceğini ve bir sayının sanal üssü alınırken nasıl kullanılabileceğini " Euler Formülü" adı verilen formülü ile tanımlamıştır. İkinci dereceden evrikliği keşfeden Euler, mükemmel sayıların dâhi Euclid formunda olması gerekliliğini ispatlamış; yeni büyük asal sayılar bulmuş ve ilkel kökleri araştırmış, harmonik serilerin ıraksamasından yola çıkarak sonsuz tane asal sayı olduğunu bulmuştur. 2000 yılda bu alanda yapılan en büyük buluş olarak kabul edilen bu keşif analitik sayı teorisinin yaratıcısıdır. Euler'in kompleks düzlem üzerindeki tüm sayıların çarpanlarına ayrılması üzerine yaptığı çalışması, Cebirsel sayı teorisinin başlangıcı olarak da kabul edilir. Euler'den 2000 yıl öncesinde de bilinen 3 çift arkadaş sayılara Euler 59 çift daha eklemiştir. Bernoulli ile beraber ışınlardaki gerilimi hesaplayarak kiriş denklemini geliştirmişlerdir. Euler denklemini verdiği akışkanların dinamiğindeki bir dizi devinim kanunu ortaya koymuştur. Ayrıca Bernoulli sayıları, Fourier serileri, Venn diyagramı, Euler sayıları, e ve pi sabitleri, sürekli kesirler ve integrallerin pek çok uygulamasını tanımlamıştır.

Euler, matematiğin hemen her dalıyla ilgilenmişse de, ölümünden sonra 29 ciltte toplanan matematik yapıtlarının yarısından çoğunun analize ayrılmış olmasından anlaşılacağı gibi, ilgisini daha çok analiz üzerine yoğunlaştırmıştır. Kendisinden önceki matematikçilerin çalışmalarını sistemli bir yapıya kavuşturan, kanıtları bugünün ölçüleriyle istenilen kesinlikle olmasa da matematiğin birçok dalına yeni yöntem ve kavramlar getiren Euler, 18.yy bilim düşüncesinin boyutlarını çağın ötesine götürmeyi başarmıştır.

Leonhard Euler (1707-1773)

Bu tezin amacı, yukarıda bahsedilen Euler ve Bernoulli polinomlarının ve serilerinin matris özelliklerini ve standart sıralama noktalarını kullanarak, gecikmeli tip lineer sabit veya değişken katsayılı diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin başlangıç, sınır veya karışık koşullar altında yaklaşık çözümlerini bulmaktır. Ayrıca, elde edilen sonuçların doğruluğunu kontrol etmek ve yöntemin etkinliğini göstermek için kalan(residual) fonksiyona dayalı bir hata analiz tekniği geliştirmektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kaynak Özetleri

Fonksiyonel denklemlerin önemli bir sınıfını oluşturan gecikmeli diferansiyel ve integro diferansiyel denklemler, fen ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarda önemli bir rol oynamaktadırlar; neutral ve pantograph tip denklemler de bu grupta yer alırlar[31-37]. Özellikle bu tip denklemler kuantum mekaniği, elektrodinamik, popülasyon dinamiği, elektronik sistemler, fizyolojik ve kimyasal kinetik, sayılar teorisi, olasılık, astronomi, mekanik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarındaki uygulamalarda matematik model olarak kullanılırlar[18-40]. Genellikle bu denklemlerin analitik çözümlerini bulmak zordur ya da mümkün değildir. Dolayısyla yaklaşık çözümleri için laşağıdaki gibi sayısal yöntemlere gerek duyulmaktadır: Lagrange ve Chebyshev interpolasyon yaklaşımı[31], backward yerine koyma yöntemi[32,33], Legendre-Gauss sıralama yöntemi[34], one-leg Q-yöntemleri[37], Laguerre sıralama [12,13], Chelyshkov sıralama yöntemi [11], Jacobian elliptic fonksiyon yöntemi[38], diferansiyel transform yöntemi[39], Bessel sıralama yöntemi[16], Variational iterasyon yöntemi [7], Bernstein seri yöntemi[41], Hybrid Taylor and block-pulse fonksionlar yaklaşımı[40], Taylor seri açılım yöntemi[20,21], He homotopi perturbasyon yöntemi[4], Adomian decomposition yöntemi [6,9], Chebyshev sıralama yöntemi[14], Lagrange interpolasyon yöntemi [42], Legendre sıralama yöntemi[19,22], B-spline yöntemi[43], Runge-Kutta yöntemi[44], Üstel yaklaşım yöntemi[45,46], Taylor sıralama yöntemi[1,20,21], Bernoulli polinom yaklaşımı[15,25,27,28], Hibrit Euler-Taylor yöntemi [47] and Dickson matris yöntemi[18], Lucas matris-sıralama yöntemi[48] gibi.

2.2.Bernoulli ve Euler Polinomlarının Temel Özellikleri

Polinom dizileri, teorik ve uygulamalı matematiksel bilimlerin birçok problemlerinde önemli bir rol oynarlar; örneğin, yaklaşım teorisi, istatistik, kombinasyonlar hesabı ve analizde oluşan problemler gibi[30]. $\{B_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ Bernoulli polinom dizisi ve $\{E_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ Euler polinom dizisi de polinom dizilerinin en önemlilerindendir. Bu polinomlar aşağıdaki üstel üreten fonksiyonlara sahiptirler[30,49,50]:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n \quad ve \quad \frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(x)}{n!}t^n. \tag{2.1}$$

Bu durumda, her iki polinoma ait ilk dört polinom, sırasıyla, şu şekilde olur:

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-\frac{1}{2},\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\ B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

$$E_0(x)=1,\ E_1(x)=x-\frac{1}{2},\ E_2(x)=x^2-x,\qquad E_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}.$$

Ayrıca, Bernoulli sayıları b_n ve Euler sayıları ε_n , sırasıyla,

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}t^n \quad ve \quad \frac{2}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}t^n$$

bağıntılarından hesaplanmaktadırlar. Buradan, n=0,1,…,10 için Bernoulli ve Euler sayıları

$$b_0=1,\ b_1=-\frac{1}{2},\ b_2=\frac{1}{6},\ b_3=0,\ b_4=-\frac{1}{30},\ b_5=0,\ b_6=\frac{1}{42},\ b_7=0,\ b_8=-\frac{1}{30},\ b_9=0,\ b_{10}=\frac{5}{66},$$
$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-1,\ \varepsilon_3=0,\ \varepsilon_4=5,\ \varepsilon_5=0,\ \varepsilon_6=-61,\ \varepsilon_7=0,\ \varepsilon_8=1385,\ \varepsilon_9=0,\ \varepsilon_{10}=\frac{1}{42},$$

olarak hesaplanabilir. Bernoulli ve Euler polinomlarının açık formüleri (rekürans bağıntıları) , $b_k=B_k(0),\ k=0,1,\ldots,n$, Bernoulli sayıları olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır[49,50]:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k\,x^{n-k}$$

ve

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{(2-2^{k+1})\ b_k}{(n+1)}\,x^{n+1-k} \tag{2.2}$$

veya

$$E_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon_k}{2^k}(x-\frac{1}{2})^{n-k}.$$

Diğer yandan, bu iki polinom birçok benzer özelliklere sahiptir; bunlardan birisi

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1} \quad ve \quad E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n$$

olarak bilinmektedir[49]. Bu özellikleri kullanarak, herhangi $n\geq 0$ tamsayısı için Bernoulli ve Euler polinomlarının diğer açık formülleri elde edilir[49,50]:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(x)=(n+1)x^n .$$
$$ve \tag{2.3}$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)+E_n(x)=2x^n .$$

Ayrıca, (2.1), (2.2) ve (2.3) bağıntılarını kullanarak, Bernoulli polinomları Euler polinomları cinsinden

$$B_n(x)=\sum_{\substack{n=0\\k\neq 1}}^{n}\binom{n}{k}b_k E_{n-k}(x) \tag{2.4}$$

olarak ifade edilebilir[49] ve bunların türevleri ile ilgili rekürans bağıntıları , $B_0^{'}(x)=E_0^{'}(x)=0$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}B_m(x)=mB_{m-1}(x) \quad ve \quad \frac{d}{dx}E_m(x)=mE_{m-1}(x),\ \ m\geq 1,\ \ n\geq 1, \tag{2.5}$$

olarak elde edilebilir[50].

2.3. Bernoulli ve Euler Polinomlarının Grafikleri

Burada, (2.1)-(2.5) formülleri ile verilen Bernoulli ve Euler polinomlarına ait rekürans bağıntıları kullanılarak, n=1,2,3,4 için polinomlar tanımlanıp, grafikleri Şekil 2.1 ve Şekil 2.2' de gösterilmiştir.

Bernoulli polinomlarının ilk beş tanesi açık formda aşağıda verilmiştir:

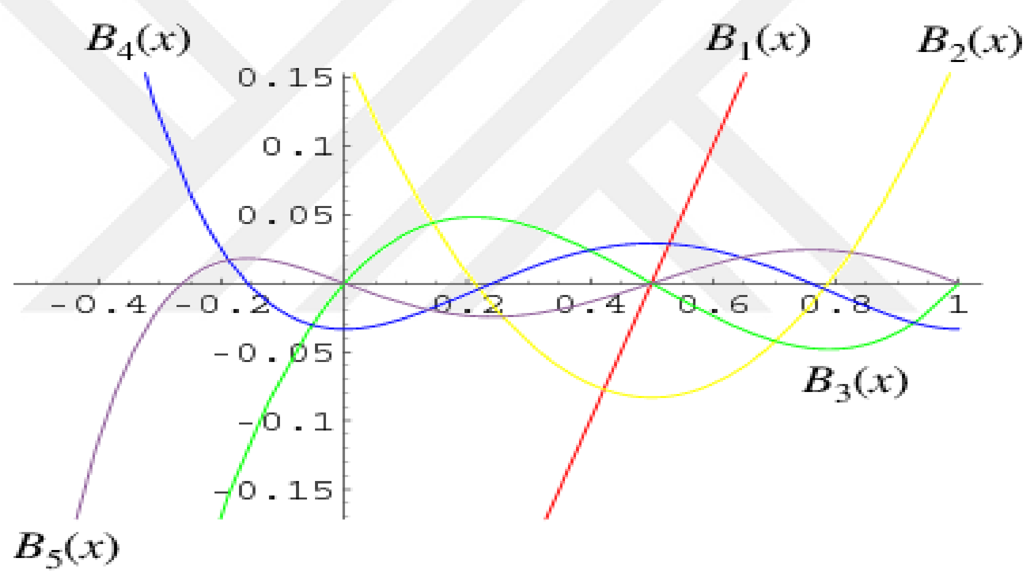
$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$



Şekil 2.1 Bernoulli Polinomlarının Grafiği

Euler polinomlarının ilk beş tanesi açık formda aşağıda verilmiştir:

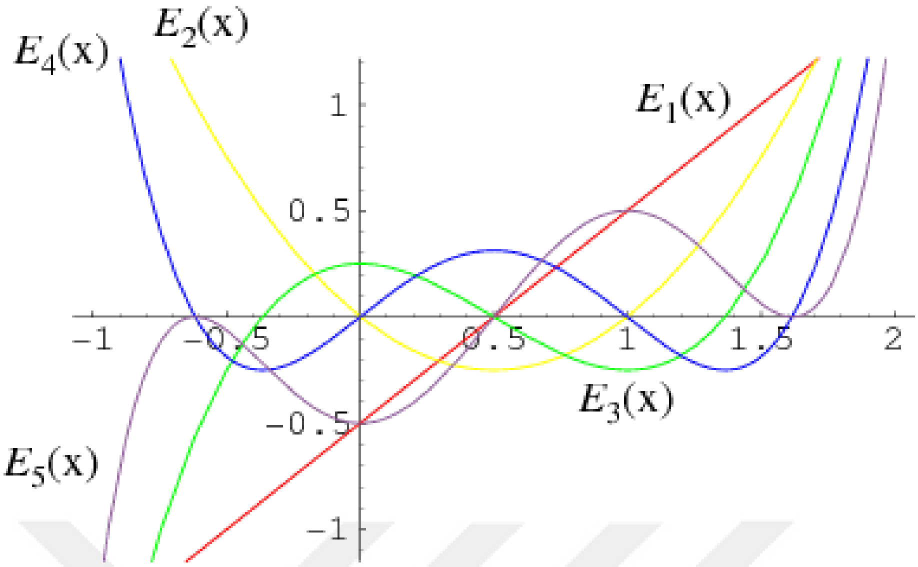
$$E_0(x) = 1,$$

$$E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x^2 - x,$$

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4},$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x$$



Şekil 2.2 Euler Polinomlarının Grafiği

2.4. Problemin Tanıtılması

Bu tez çalışmasında, yüksek mertebeden değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)y^{(k)}(x)+\sum_{j=0}^{m_2} Q_j(x)y^{(j)}(\alpha x+\beta)= f(x)+\lambda_1\int_a^b K(x,t)y(t)dt$$
$$+\lambda_2\int_a^x R(x,t)y(t)dt, \tag{2.6}$$

tipindeki gecikmeli lineer integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1}(a_{jk}y^{(k)}(a)+b_{jk}y^{(k)}(b))=\theta_j,\;\; j=0,1,...,m-1,\; m=\max\{m_1,m_2\} \tag{2.7}$$

karışık koşullarına göre,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n B_n(x) \qquad \text{(kesilmiş Bernoulli serisi)} \quad (2.8)$$

ve

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n E_n(x) \qquad \text{(kesilmiş Euler serisi)} \quad (2.9)$$

formlarında yaklaşık çözümleri araştırılmaktadır.

Burada $P_k(x),\ Q_j(x),\ f(x), K_1(x,t)\ \ ve\ \ K_2(x,t)$ verilen $a \le x,t \le b$ aralığında sürekli fonksiyonlar; $P_k(x),\ \alpha,\ \beta,\ a_{jk},\ b_{jk}\ ve\ \ \mu_{jk} \le x,t \le b$ ifadeleri uygun sabitler; $a_n\ ve\ c_n$ bulunması gereken Bernoulli ve Euler katsayılardır. (2.6) denkleminde $Q_j(x) = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ise denklem adi diferansiyel denklem; $\lambda_1, = \lambda_2 = 0$ ise denklem gecikmeli diferansiyel denklem; $P_k(x) = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ise denklem gecikmeli(veya fark) denklemi; $Q_j(x) = 0,$ $k = 1,2,3,...\ için\ P_k(x) = 0, P_0(x) \ne 0,\ \lambda_1 \ne \lambda_2 \ne 0$ ise denklem Fredholm–Volterra integral denklem $k = 1,2,3,...\ için\ P_k(x) = 0, P_0(x) \ne 0, \lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0, Q_j(x) = 0$ ise denklem Fredholm integral denklem ve $k = 1,2,3,...\ için\ P_k(x) = 0,\ Q_j(x) = 0,$ $P_0(x) \ne 0, \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_1 = 0$ ise denklem Volterra ingral denklem olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Materyal

Bu bölümde temel materyal olarak, ikinci bölümde tanıtılan Bernoulli ve Euler polinomları ile birlikte diferansiyel denklem, gecikmeli diferansiyel denklem, Fredholm integral denklemi ve Volterra integral denklemi ele alınmakta; ayrıca, (2.6)-(2.7) problemini oluşturan diferansiyel, gecikmeli diferansiyel ve integral ifadelerinin matris formları kullanılmaktadır. Diğer yandan, literatürde bahsedilen tipdeki integro diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili işlemsel matris ve sıralama yöntemleri de materyal olarak kullanılıp, verilen (2.6)-(2.7) probleminin, (2.3) ve (2.4) ile tanımlanılan kesilmiş Bernoulli ve kesilmiş Euler serisi formlarında çözümlerinin bulunmsını sağlayan "Matris-Sıralama Yöntemi" kurulmaktadır. Bununla birlikte, elde edilen yaklaşık çözümlerin doğruluğu ve tutarlılığı, rezidüel(kalan) hata fonksiyonlarına dayalı hata tahmin tekniği ile açıklanabilmektedir.

3.2. Gecikmeli Lineer İntegro Diferansiyel Denklemler için Bernoulli Matris-Sıralama Yöntemi

Bu kesimde, (2.6) ile tanımlanılan gecikmeli integro diferansiyel denklemine ve (2.7) koşullarına karşı gelen temel matris denklemleri,

$$x_s = a + \frac{b-a}{N}s, \quad s = 0,1,\ldots,N, \qquad a \le s \le b \tag{3.1}$$

ile tanımlı standart sıralama noktaları yardımıyla, oluşturulacak ve "Matris-Sıralama yöntemi" kurulacaktır. Bu amaç için, önce (2.6) denkleminin (2.8) ile tanımlanan

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n B_n(x), \quad 0 \le x \le b$$

kesilmiş Bernoulli serisi formunda yaklaşık çözümünün olduğu kabul edilir; burada $B_n(x),\ n = 0,1,...,N$ Bernoulli polinomlarını ve a_n , $n = 0,1,2,...,N$ bilinmeyen Bernoulli katsayılarını ifade etmektedir. Bu durumda, $y(x)$ çözüm fonksiyonu ve bunun $y^{(k)}(x)$ türevinin matris formları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y(x) = \boldsymbol{B}(x)\mathbf{A} \quad \text{ve} \quad y^{(k)}(x) = \boldsymbol{B}^{(k)}(x)\mathbf{A},\ k = 0,1,... \tag{3.2}$$

burada

$$\boldsymbol{B}(x)=\left[B_0(x)\ \ B_1(x)\ \ ...\ \ B_N(x)\right]\ , \qquad \mathbf{A}=\left[a_0\ \ a_1\ \ ...\ \ a_N\right]^T ,$$

$$\boldsymbol{B}^{(k)}(x)=\left[B_0^{(k)}(x)\ \ B_1^{(k)}(x)\ \ ...\ \ B_N^{(k)}(x)\right] .$$

Kesim 2.2. de tanımlanan Bernoulli polinomlarının (2.2) veya (2.3) rekürans bağıntıları kullanılarak, $\boldsymbol{B}(x)=\left[B_0(x)\ \ B_1(x)\ \ ...\ \ B_N(x)\right]$ taban fonksiyonu ve $\mathbf{X}(x)=\left[1\ \ x\ \ ...\ x^N\right]$ standart taban fonksiyonu arasındaki matris bağıntısı

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{B}_0(\mathrm{x}) \\ \mathrm{B}_1(\mathrm{x}) \\ \mathrm{B}_2(\mathrm{x}) \\ \mathrm{B}_3(\mathrm{x}) \\ \mathrm{B}_4(\mathrm{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{B}_N(\mathrm{x}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}(x)^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} \binom{0}{0}b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0}b_1 & \binom{1}{1}b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0}b_2 & \binom{2}{1}b_1 & \binom{2}{2}b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{0}b_3 & \binom{3}{1}b_2 & \binom{3}{2}b_1 & \binom{3}{3}b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{4}{0}b_4 & \binom{4}{1}b_3 & \binom{4}{2}b_2 & \binom{4}{3}b_1 & \binom{4}{4}b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{N}{0}b_N & \binom{N}{1}b_{N-1} & \binom{N}{2}b_{N-2} & \binom{N}{3}b_{N-3} & \binom{N}{4}b_{N-4} & \cdots & \binom{N}{N}b_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}(x)^T}$$

olarak elde edilir ki bu, kısaca

$$\left(\boldsymbol{B}(x)\right)^T=\boldsymbol{G}^T\left(\mathbf{X}(x)\right)^T \Rightarrow \boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{G} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı zamanda, $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ matrisi ve $\mathbf{X}(x)$ matrisi arasında

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)}(x) &= \mathbf{X}(x)\boldsymbol{M} \\ \mathbf{X}^{(2)}(x) &= \mathbf{X}^{(1)}(x)\boldsymbol{M} = \mathbf{X}(x)\boldsymbol{M}^2 \\ \mathbf{X}^{(3)}(x) &= \mathbf{X}^{(2)}(x)\boldsymbol{M} = \mathbf{X}(x)\boldsymbol{M}^3 \\ &\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(k)}(x) &= \mathbf{X}^{(k-1)}(x)\boldsymbol{M} = \mathbf{X}(x)\boldsymbol{M}^k \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde bir rekürans bağıntısının olduğu bilinmektedir [1,18,19,48]. Bu ifadelerde $\boldsymbol{M}$ matrisi,

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&N\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{M}^0=\begin{bmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece, (3.3) ve (3.4) bağıntılarını (3.2) de yerine koyarak $y^{(k)}(x)$ çözüm fonksiyonunun matris formu, k=0,1,2,… için,

$$y^{(k)}(x)=\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{GA} \tag{3.5}$$

olur.

Verilen (2.6) denkleminin gecikmeli diferansiyel parçasındaki $y^{(j)}(\alpha x+\beta)$ türev ifadesinin matris formunu elde etmek için, (3.5) de $x\rightarrow\alpha x+\beta$ konulur ve

$$y^{(j)}(\alpha x+\beta)=\boldsymbol{X}(\alpha x+\beta)\boldsymbol{M}^j\boldsymbol{GA}=\boldsymbol{X}(x)\mathbf{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j\boldsymbol{GA} \tag{3.6}$$

elde edilir; burada $\boldsymbol{X}(\alpha x+\beta)=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$ eşitliğinin mevcut olduğu ve $\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$ matrisinin

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}\binom{0}{0}\alpha^0\beta^0 & \binom{1}{0}\alpha^0\beta^1 & \binom{2}{0}\alpha^0\beta^2 & \binom{3}{0}\alpha^0\beta^3 & \binom{4}{0}\alpha^0\beta^4 & \cdots & \binom{N}{0}\alpha^0\beta^N\\ 0 & \binom{1}{1}\alpha^1\beta^0 & \binom{2}{1}\alpha^1\beta^1 & \binom{3}{1}\alpha^1\beta^2 & \binom{4}{1}\alpha^1\beta^3 & \cdots & \binom{N}{1}\alpha^1\beta^{N-1}\\ 0 & 0 & \binom{2}{2}\alpha^2\beta^0 & \binom{3}{2}\alpha^2\beta^1 & \binom{4}{2}\alpha^2\beta^2 & \cdots & \binom{N}{2}\alpha^2\beta^{N-2}\\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3}\alpha^3\beta^0 & \binom{4}{3}\alpha^3\beta^1 & \cdots & \binom{N}{3}\alpha^3\beta^{N-3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4}\alpha^4\beta^0 & \ldots & \binom{N}{4}\alpha^4\beta^{N-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{N}{N}\alpha^N\beta^0\end{bmatrix}$$

ile tanımlandığı bilinmektedir [11,13,18,24,48].

Şimdi, Kesim 2.4 de tanımlanan (2.6) gecikmeli integro diferansiyel denkleminin Fredholm integral parçasındaki K(x,t) çekirdek fonksiyonu ve y(t) çözüm fonksiyonunun matris formları ile sonuç matris formu aşağıdaki yol izlenerek bulunabilir.

K(x,t) çekirdek fonksiyonunun Maclaurin açılımından matrix form [13,18,19,24]

$$K(x,t)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}k_{pq}x^{p}t^{q}\Rightarrow K(x,t)=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}(t)^{T}; \tag{3.7}$$

burada

$$\boldsymbol{K}=[k_{pq}]=\begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & \cdots & k_{0N} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N0} & k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix},$$

$$k_{pq}=\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^{p}\partial t^{q}}K(0,0)\ \ ,\ \ p,q=01,...,N$$

ve y(t) çözüm fonksiyonunun matris formu (3.5) den

$$y(t)=\mathbf{X}(t)\mathbf{GA} \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla, (3.7) ve (3.8) ifadeleri Fredholm integral parçasında yerine konularak ve düzenlenerek aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$\int_{a}^{b}K(x,t)y(t)dt=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{KQGA};$$

$$\boldsymbol{Q}=\left[q_{ij}\right]=\int_{a}^{b}\boldsymbol{X}^{T}(t)\boldsymbol{X}(t)\ dt,\ \ q_{ij}=\frac{b^{i+j+1}-a^{i+j+1}}{i+j+1};\ i,j=0,1,...,N. \tag{3.9}$$

Volterra integral parçasının matris formu, Fredholm integral parçasının (3.9) matris bağıntısının elde ediliş yolu izlenerek, aşaıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_{a}^{x}R(x,t)y(t)dt=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{RS}(x)\boldsymbol{GA};$$

$$\boldsymbol{S}(x)=\left[s_{ij}(x)\right]=\int_{a}^{x}\boldsymbol{X}^{T}(t)\boldsymbol{X}(t)\ dt,\ \ s_{ij}(x)=\frac{x^{i+j+1}-a^{i+j+1}}{i+j+1};\ i,j=0,1,...,N. \tag{3.10}$$

Bu kısımda $\boldsymbol{R}$ matrisi R(x,t) nin Maclaurin açılımındaki katsaylar matrisidir ve

$$\boldsymbol{R} = [r_{pq}] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{bmatrix}, \; r_{pq} = \frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} R(0,0) \;\; , \;\; p,q = 01,...,N\,.$$

Buraya kadar elde edilen (3.5), (3.6), (3.9) ve (3.10) matris bağıntıları (2.6)'da yerine konulursa, (2.6) gecikmeli integro diferansiyel denklemi

$$\{\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{(}x\boldsymbol{)X}(x)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{KQGA}\text{ - }\lambda_2\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{RS}(x)\}\mathbf{GA} = f(x)$$

matris denklemine indirgenir.Bu denklemde, (3.1) ile tanımlanılan $x_s,\; s = 0,1,\ldots,N,$ sıralama noktaları kullanılarak,

$$\{\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x_s)\mathbf{X}(x_s)\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{(}x_s\boldsymbol{)X}(x_s)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1\boldsymbol{X}(x_s)\boldsymbol{KQ}\text{ - }\lambda_2\boldsymbol{X}(x_s)\boldsymbol{RS}(x_s)\}\mathbf{GA} = f(x_s)$$

matris denklemler sistemi elde edilir ve kısaca (2.6)' denklemine karşıgelen temel matris denklemi, kompakt formda,

$$\{\sum_{k=0}^{m_1} \boldsymbol{P}_k\mathbf{X}\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{X}\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1\boldsymbol{XKQ} - \lambda_2\overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\}\mathbf{GA} = \boldsymbol{F} \qquad (3.11)$$

olarak kurulur. Bu denklemdeki matrisler aşağıda tanımlanmaktadır:

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}, \;\; \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}(x_0) \\ \boldsymbol{X}(x_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0^1 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_N^1 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}(x_0) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}(x_1) & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & ... & \boldsymbol{X}(x_N) \end{bmatrix}, \;\; \overline{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R} & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & ... & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}, \;\; \overline{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}(x_0) \\ \boldsymbol{S}(x_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{S}(x_N) \end{bmatrix}.$$

Aynı zamanda, (3.11) temel matris denklemi, kısaca,

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W};\mathbf{F}] \qquad (3.12)$$

şeklinde ifade edilebilir; burada

$$\boldsymbol{W} = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^{m_1} \boldsymbol{P}_k \mathbf{X}\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j \boldsymbol{X}\mathbf{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1 \boldsymbol{XKQ} - \lambda_2 \overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\,\overline{\boldsymbol{S}}\}\mathbf{G};\ p,q = 0,1,2,...,N.$$

Diğer taraftan (2.7) ile tanımlanan

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \theta_j,\ \ j = 0,1,...,m-1;\ m = \max\{m_1, m_2\}$$

karışık koşullara karşı gelen temel matris fdenklemi, (3.5) bağıntısını kullanarak,

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}\boldsymbol{X}(a) + b_{jk}\boldsymbol{X}(b))\boldsymbol{M}^k \boldsymbol{GA} = \theta_j;\ \ j = 0,1,...,m-1,$$

şeklinde bulunur veya

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}\boldsymbol{X}(a) + b_{jk}\boldsymbol{X}(b))\boldsymbol{M}^k \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & u_{j2} & \cdots & u_{jN} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, kısaca

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = [\theta_j] \ \ \Leftrightarrow \ \ [\mathbf{U}_j;\theta_j],\ \ j = 0,1,2,...,m-1 \qquad (3.13)$$

biçiminde yazılabilir.

Sonuç olarak, (2.6)-(2.7) probleminin çözümünü (2.8) kesilmiş Bernoulli serisi formunda bulmak için, (3.12) arttırılmış matrisinin son (veya herhangi) m satırının silinip yerine koşullara karşılık gelen (3.13) satır matrisleri konulur ve istenilen

$$[\tilde{\mathbf{W}};\mathbf{F}]$$

arttırılmış matrisi elde edilir; açık olarak

$$[\tilde{\mathbf{W}};\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & . & . & . & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & . & . & . & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \cdots & \cdots & & & & \cdots & ; & \cdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & . & . & . & w_{N-m,N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & . & . & . & u_{0N} & ; & \theta_0 \\ u_{10} & u_{11} & . & . & . & u_{1N} & ; & \theta_1 \\ \cdots & \cdots & & & & \cdots & ; & \cdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & . & . & . & u_{m-1,N} & ; & \theta_{m-1} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Bu matris, bilinmeyenleri $a_0, a_1, ..., a_N$ şeklindeki Bernoulli katsayıları olan $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ tane denklemden oluşan cebirsel bir denklem sistemine karşılık gelir [48]. Eğer $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin tersi varsa, $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\mathbf{F}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi, yani $a_0, a_1, \ldots, a_N$ katsayıları, tek olarak elde edilir. Dolayısıyla, (2.6) gecikmeli integro diferansiyel denklemi denklemi de (2.7) koşulları altında (2.8) kesilmiş Bernoulli serisi formunda tek bir çözüme sahip olur ,

3.3. Gecikmeli Lineer İntegro Diferansiyel Denklemler için Euler Matris-Sıralama Yöntemi

Bu kesimde , (2.6) gecikmeli integro diferansiyel denkleminin (2.7) koşulları altında (2.9) ile tanımlanılan

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n E_n(x), \quad a \le x \le b$$

kesilmiş Euler serisi formunda yaklaşık çözümlerini bulmak için, Kesim 3.2 de sunulan Matris-Sıralama tekniği geliştirilecektir. Burada $c_0, c_1, ..., c_N$ katsayıları bulunması gereken sabitlerdir. Bu amaç için, önce $y(x)$ çözüm fonsiyonu ve bunun $y^{(k)}(x)$ türevinin matris formları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y(x) = \boldsymbol{E}(x)\boldsymbol{C} \quad \text{ve} \quad y^{(k)}(x) = E^{(k)}(x)C,\ k = 0,1,... \tag{3.15}$$

burada

$$\boldsymbol{E}(x) = \begin{bmatrix} E_0(x) & E_1(x) & \ldots & E_N(x) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_N \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{E}^{(k)}(x) = \begin{bmatrix} E_0^{(k)}(x) & E_1^{(k)}(x) & \ldots & E_N^{(k)}(x) \end{bmatrix}.$$

Kesim 2.2. de tanımlanan Euler polinomlarının (2.2) veya (2.3) rekürans bağıntıları kullanılarak, $\boldsymbol{E}(x) = \begin{bmatrix} E_0(x) & E_1(x) & \ldots & E_N(x) \end{bmatrix}$ taban fonksiyonu ve $\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^N \end{bmatrix}$ standart taban fonksiyonu arasındaki matris bağıntısı

$$\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}^{-1}; \tag{3.16}$$

şeklinde kurulabilir; burada $\mathbf{D}$ matrisi

$$
\boldsymbol{D}^{T}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\frac{1}{2}\binom{1}{0} & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\frac{1}{2}\binom{2}{0} & \frac{1}{2}\binom{2}{1} & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots\\
\frac{1}{2}\binom{N}{0} & \frac{1}{2}\binom{N}{1} & \frac{1}{2}\binom{N}{2} & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.16) ve (3.4) bağıntılarını hesaba katarak, (3.15) ifadesi

$$
y(x)=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{TC} \quad \text{ve} \quad y^{(k)}(x)=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{M}^{k}\boldsymbol{TC},\ k=0,1,... \tag{3.17}
$$

matris formuna dönüşür; gecikmeli diferansiyel parçasındaki $y^{(j)}(\alpha x+\beta)$ türevinin matris formu da

$$
y^{(j)}(\alpha x+\beta)=\boldsymbol{X}(\alpha x+\beta)\boldsymbol{M}^{j}\boldsymbol{TC}=\boldsymbol{X}(x)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^{j}\boldsymbol{TC} \tag{3.18}
$$

olarak elde edilir.

Şimdi, Kesim 2.4 de tanımlanan (2.6) gecikmeli integro diferansiyel denkleminin Fredholm integral parçasındaki ve Volterra integral parçasına ait matris bağıntıları, Kesim 3.2 deki yol izlenerek aşağıdaki gbi bulunmuştur.

Fredholm parçasının matris formu:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b K(x,t)y(t)dt=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{KQTC};\\
&\boldsymbol{Q}=\left[q_{ij}\right]=\int_a^b \boldsymbol{X}^{T}(t)\boldsymbol{X}(t)\,dt,\ \ q_{ij}=\frac{b^{i+j+1}-a^{i+j+1}}{i+j+1}\ ;\ i,j=0,1,...,N.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Volterra integral parçasının matris formu:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x R(x,t)y(t)dt=\boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{RS}(x)\boldsymbol{TC};\\
&\boldsymbol{S}(x)=\left[s_{ij}(x)\right]=\int_a^x \boldsymbol{X}^{T}(t)\boldsymbol{X}(t)\,dt,\ \ s_{ij}(x)=\frac{x^{i+j+1}-a^{i+j+1}}{i+j+1}\ ;\ i,j=0,1,...,N.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Matris – Sıralama Yönteminin Kuruluşu

Buraya kadar elde edilen (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) matris bağıntıları (2.6)'da yerine konulursa, (2.6) gecikmeli integro diferansiyel denklemi

$$\{\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j(x)\boldsymbol{X}(x)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1 \boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{KQTC} - \lambda_2 \boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{RS}(x)\}\mathbf{TC} = f(x)$$

matris denklemine indirgenir.Bu denklemde, (3.1) ile tanımlanılan $x_s,\ s = 0,1,\ldots,N,$ sıralama noktaları kullanılarak,

$$\{\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x_s)\mathbf{X}(x_s)\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j(x_s)\boldsymbol{X}(x_s)\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1 \boldsymbol{X}(x_s)\boldsymbol{KQ} - \lambda_2 \boldsymbol{X}(x_s)\boldsymbol{RS}(x_s)\}\mathbf{TC} = f(x_s)$$

matris denklemler sistemi elde edilir ve kısaca (2.6)' denklemine karşıgelen temel matris denklemi, kompakt formda,

$$\{\sum_{k=0}^{m_1} \boldsymbol{P}_k\mathbf{X}\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{X}\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1 \boldsymbol{XKQ} - \lambda_2 \overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\overline{\boldsymbol{S}}\}\mathbf{TC} = \boldsymbol{F} \tag{3.21}$$

şeklinde olur. Aynı zanmanda, (3.21) temel matris denklemi, kısaca,

$$\mathbf{WC} = \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{W};\mathbf{F}] \tag{3.22}$$

şeklinde yazılabilir; burada

$$\boldsymbol{W} = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^{m_1} \boldsymbol{P}_k\mathbf{X}\mathbf{M}^k + \sum_{j=0}^{m_2} \boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{X}\mathrm{B}(\alpha,\beta)\boldsymbol{M}^j - \lambda_1 \boldsymbol{XKQ} - \lambda_2 \overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{R}}\overline{\boldsymbol{S}}\}\mathbf{T};\ p,q = 0,1,2,\ldots,N.$$

Diğer taraftan (2.7) ile tanımlanan karışık koşullara karşıgelen temel matris denklemi, Kesim 3.2 deki gibi işlem yaparak,

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}\boldsymbol{X}(a) + b_{jk}\boldsymbol{X}(b))\boldsymbol{M}^k\boldsymbol{TC} = \theta_j;\ \ j = 0,1,\ldots,m-1,$$

şeklinde bulunur veya

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}\boldsymbol{X}(a) + b_{jk}\boldsymbol{X}(b))\boldsymbol{M}^k\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & u_{j2} & \ldots & u_{jN} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, kısaca

$$\mathbf{U}_j\mathbf{C} = [\theta_j] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{U}_j;\theta_j],\ \ j = 0,1,2,\ldots,m-1 \tag{3.23}$$

biçiminde yazılabilir.

Sonuç olarak, (2.6)-(2.7) probleminin çözümünü (2.9) kesilmiş Euler serisi formunda bulmak için, (3.22) arttırılmış matrisinin son (veya herhangi) m satırının silinip yerine koşullara karşılık gelen (3.23) satır matrisleri konulur ve istenilen

$$[\tilde{\mathbf{W}};\mathbf{F}] \tag{3.24}$$

arttırılmış matrisi elde edilir; açık olarak

$$[\tilde{\mathbf{W}};\mathbf{F}]=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & . & . & . & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & . & . & . & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \ldots & \ldots & & & & \ldots & ; & \ldots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & . & . & . & w_{N-m,N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & . & . & . & u_{0N} & ; & \theta_0 \\ u_{10} & u_{11} & . & . & . & u_{1N} & ; & \theta_1 \\ \ldots & \ldots & & & & \ldots & ; & \ldots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & . & . & . & u_{m-1,N} & ; & \theta_{m-1} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Bu matris, bilinmeyenleri $c_0,c_1,...,c_N$ şeklindeki Euler katsayıları olan $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ tane denklemden oluşan cebirsel bir denklem sistemine karşılık gelir [48]. Eğer $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin tersi varsa, $\mathbf{C}=(\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\mathbf{F}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{C}$ matrisi, yani $c_0,c_1,\ldots,c_N$ katsayıları, tek olarak elde edilir. Dolayısıyla, (2.6) gecikmeli lineer integro diferansiyel denklemi denklemi de (2.7) koşulları altında (2.9) kesilmiş Euler serisi formunda tek bir çözüme sahip olur.

3.4 Rezidüel (Kalan) Fonksiyona Dayalı Hata Analizi [18,24,47,48,51]

Bulduğumuz çözümlerin doğruluğunu aşağıdaki yolu izleyerek kolayca kontrol edebiliriz. $\sum_{n=0}^{N} a_n B_n(x)$ ve $\sum_{n=0}^{N} c_n E_n(x)$, Bernoulli ve Euler serileri $\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x)+\sum_{j=0}^{J} Q_j(x)y^{(j)}(\alpha x+\beta)= f(x)$, $J\le m$ denkleminin yaklaşık çözümü olduğu için $y_N(x)$ fonksiyonu ve türevleri aynı denklemde yerine koyulduğunda çözülen denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır;

yani $x = x_r \in [a,b]$, $r = 0,1,2,...,N$ için

$$R_N(x_r)=\sum_{k=0}^{m} P_k(x_r)y^{(k)}(x_r)+\sum_{j=0}^{J} Q_j(x_r)y^{(j)}(\alpha x_r+\beta)- f(x_r)\cong 0$$

veya

$$R_N(x_r)\le 10^{-k_r} \text{ ,((}k_r\text{) } \textit{herhangi bir pozitif tamsayı}).$$

Eğer $\max 10^{-k_r} = 10^{-k}$ (k *pozitif tamsayı*) önceden belirlenirse N kesme sınırı noktaların her birinde $R_N(x_r)$ farkı önceden belirlenen 10^{-k} daha küçük oluncaya kadar arttırılır. Bununla birlikte, eğer N yeterli bir şekilde büyük alındığı zaman $R_N(x) \to 0$ ise, o zaman hata azalır. Başka bir deyişle, $R_N(x_r)$ ile tanımlanan residüel fonksiyon ve [a,b] aralığında $|R_N(x)|$ fonksiyonunun ortalama değeri yardımıyla çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve hata tahmin edilebilir [24,47].

Ayrıca, ortalama hatanın üst sınırı $\overline{R_N}$ aşağıdaki gibi tahmin edilebilir [24,47]:

$$\left|\int_a^b R_N(x)\,dx\right| \le \int_a^b |R_N(x)|\,dx$$

ve

$$\int_a^b R_N(x)\,dx = (b-a)R_N(c)\,, \quad \mathrm{a \le c \le b}$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b R_N(x)\,dx\right| = (b-a)|R_N(c)|$$

$$\Rightarrow (b-a)|R_N(c)| \le \int_a^b |R_N(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow |R_N(c)| \le \frac{\int_a^b |R_N(x)|\,dx}{b-a} = \overline{R}_N$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde Bernoulli ve Euler Sıralama Yöntemi'nin doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek amacıyla örnekler yapılmıştır. Daha sonra çözümün doğruluğunu bulmak için Rezidüel Hata ve Ortalama Değer Teoremine dayalı hata analizi yapılmış ve tablo ve grafiklerle yorumlanmıştır**.**

4.1.Gecikmeli Diferansiyel ve Diferansiyel Fark Denklemler ile İlgili Örnekler

Örnek 4.1.1 Tam çözümü $y(x) = x^2 + 2$ olan değişken katsayılı $y''(x) + y'(x) - 2y(x) - xy'(x-1) = -2x^2 + 2x - 2$ adi diferansiyel denkleminin $0 \le x \le 1$ aralığında , $y(0) = 2$ *ve* $y'(0) = 0$ koşulları altında N=2 için Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim.

Çözümü,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{2} a_n B_n(x)$$

formunda bulmak için N=2 için sıralama noktaları; $\{x_0 = 0 \ , \ x_1 = \frac{1}{2} \ , \ x_2 = 1\}$ değerlerini yerlerine yazıp temel matris denkleminde yerine yazalım.

$$P_0(x) = -2, P_1(x) = x, P_2(x) = 1, Q_0(x) = 0, Q_1(x) = -x, F(x) = -2x^2 + 2x - 2$$

$$W = \left\{ \sum_{k=0}^{2} P_k X (M)^k + \sum_{j=0}^{1} Q_j X \mathrm{B}(\alpha, \beta)(M)^j \right\} G$$

$$P_0=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Q_0=0\ ,\ Q_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\ M^1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix},\ M^2=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-6\end{bmatrix},\ \mathrm{B}(1,-1)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Denklemde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılınca W matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W=\begin{bmatrix}-2&1&\frac{5}{3}\\-2&-1&\frac{11}{3}\\-2&-3&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

Koşulların matris formu:

$$y(0)=X(0)GA$$
$$2=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}GA \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix}U_0,\theta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1/2&1/6&;&2\end{bmatrix}$$
$$2=\begin{bmatrix}1&-1/2&1/6\end{bmatrix}A$$

$$y'(0)=X(0)\,\mathrm{M}\,GA$$
$$0=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}MGA \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix}U_1,\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1&;&0\end{bmatrix}$$
$$0=\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}A$$

Bulduğumuz koşulların matrisini , bulduğumuz W matrisinin herhangi iki satırını silip yerine yazarsak arttırılmış matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\tilde{W};\tilde{\mathrm{F}}\right]=\begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{5}{3} & ; & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 2 \\ 0 & 1 & -1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem çözümü yapılırsa $y(x)=x^2+2$ tam çözümü elde edilir.

Örnek 4.1.2 Şimdi de tam çözümü $y(x)=x^2+2$ olan değişken katsayılı $y''(x)+y'(x)-2y(x)-xy'(x-1)=-2x^2+2x-2$ adi diferansiyel denkleminin $0\le x\le 1$ aralığında , $y(0)=2$ *ve* $y'(0)=0$ koşulları altında N=2 için Euler sıralama yöntemi ile çözelim.

Çözümü,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}c_n E_n(x)$$

formunda bulmak için N=2 için sıralama noktaları; $\{x_0=0\ ,\ x_1=\frac{1}{2}\ ,\ x_2=1\}$ değerlerini yerlerine yazıp temel matris denkleminde yerine yazalım.

$$W=\left\{\sum_{k=0}^{2}P_k X(M)^k+\sum_{j=0}^{1}Q_j X\mathrm{B}(\alpha,\beta)(M)^j\right\}T$$

$$P_0=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Q_0=0\ ,\ Q_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\ M^1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix},\ M^2=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-6\end{bmatrix},\ \mathrm{B}(1,-1)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix}-2&1&\frac{5}{3}\\-2&-1&\frac{11}{3}\\-2&-3&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

Koşulların matris formu:

$$y(0)=X(0)TC$$
$$2=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}TC \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix}U_0,\theta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\tfrac{1}{2}&\tfrac{1}{6}&;&2\end{bmatrix}$$
$$2=\begin{bmatrix}1&-\tfrac{1}{2}&\tfrac{1}{6}\end{bmatrix}A$$

$$y'(0)=X(0)\mathrm{M}TC$$
$$0=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}MTC \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix}U_1,\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1&;&0\end{bmatrix}$$
$$0=\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}C$$

Bulduğumuz koşulların matrisini, bulduğumuz W matrisinin herhangi iki satırını silip yerine yazarsak elde ettiğimiz matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\tilde{W};\tilde{F}\right]=\begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{5}{3} & ; & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 2 \\ 0 & 1 & -1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem çözümü yapılırsa $y(x)=x^2+2$ tam çözümü elde edilir.

Örnek 4.1.3 $y(x)=e^x$ tam çözümü ile verilen

$$y'(x)-xy(x)-\frac{1}{2}e^{-x}y(x-1)=e^x-xe^x-\frac{1}{2}e^{-1}$$

denkleminin , $0\le x\le 1$ aralığında ve $y(0)=1$

koşulu altındaki çözümünü bulalım.

Katsayıları;

$$P_0(x)=-x,\ P_1(x)=1, P_2(x)=0, Q_0(x)=-1/2e^{(-x)}, F(x)=e^x-xe^x-1/2e^{(-1)}$$

olan denklemde Bernoulli polinomunu

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}a_n B_n(x)$$

formunda , N=2 için $\{x_0=0\ ,\ x_1=1/2\ ,\ x_2=1\}$ sıralama noktalarıyla

çözmeliyiz.

$$\left\{\sum_{k=0}^{1}P_k X(M)^k G+\sum_{j=0}^{0}Q_j X\mathrm{B}(\alpha,\beta)(M)^j G\right\}A=F$$

$$\left\{P_0 X M^0 G + P_1 X M^1 G + Q_0 X \mathrm{B}(1,-1) M^0 G\right\} A = F$$

denkleminde aşağıdaki matrisleri yerlerine yazarsak;

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3032653299 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1839397206 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B}(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0.8160602794 \\ 0.6404209148 \\ -0.1839397206 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{W};F] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & ; & \frac{1189}{1457} \\ -\frac{984}{1225} & \frac{2209}{1225} & 4 & ; & \frac{1765}{2756} \\ -\frac{1725}{1457} & 0 & \frac{2001}{386} & ; & -\frac{268}{1457} \end{bmatrix}.$$

arttırılmış matrisini elde ederiz.

$$[\mathrm{u}_0;\theta_0] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

Koşulların matrisini, bulduğumuz arttırılmış matristeki herhangi bir satırın yerine koyarsak;

$$[\tilde{W};\tilde{F}]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & ; & \frac{1189}{1457} \\ -\frac{984}{1225} & \frac{2209}{1225} & 4 & ; & \frac{1765}{2756} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris sistemini çözersek de katsayılar matrisi olan A matrisini elde ederiz.

$$A=\begin{bmatrix} 1.735404532 \\ 1.668620914 \\ 0.5934355456 \end{bmatrix}$$

Buradan sonuç,

$$y_2(x) \cong 0.999999999 + 1.075185368x + 0.5934355456x^2$$

şeklinde bulunur. Diğer çözümleride benzer şekilde çözersek sonuçları aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$y_3(x) \cong 1 + 0.980577490x + 0.5175003628x^2 + 0.2078878895x^3$$

$$y_4(x) \cong 1 + 1.002187118x + 0.4911597182x^2 + 0.1702295581x^3 + 0.053510636x^4$$

$$y_5(x) \cong 1 + 1.000248766x + 0.5011972524x^2 + 0.1639661467x^3 + 0.042248965x^4 + 0.000854324x^5$$

N=2, 3,4 ve 5 için rezidüel hata:

$$\overline{R_2} = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|\,dx}{|1-0|} = 0.109784$$

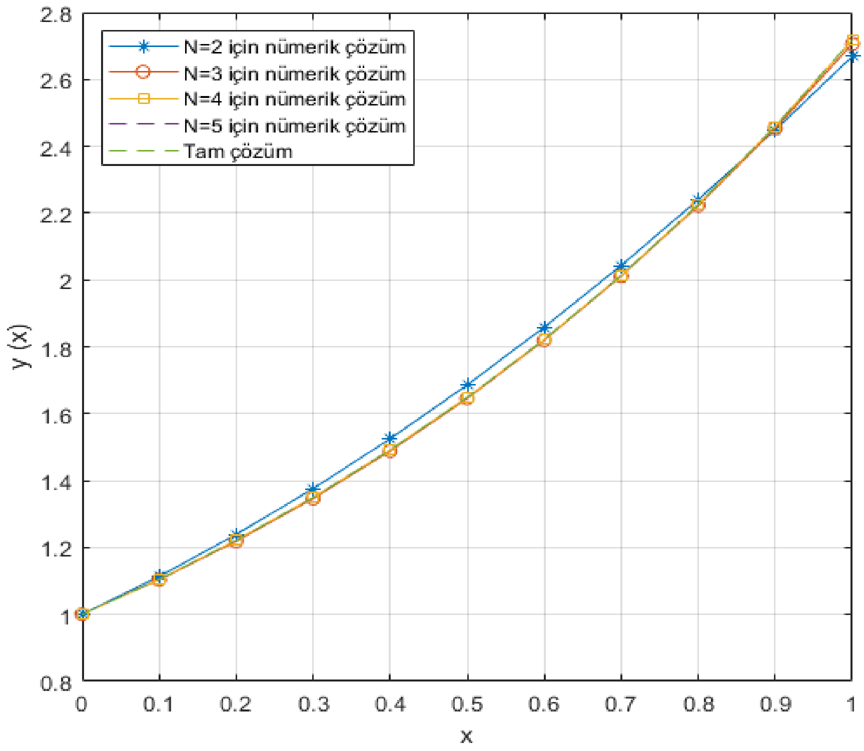
$$\overline{R_3} = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|\,dx}{|1-0|} = 1.0831x10^{-2}$$

$$\overline{R_4} = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|\,dx}{|1-0|} = 8.5863x10^{-4}$$

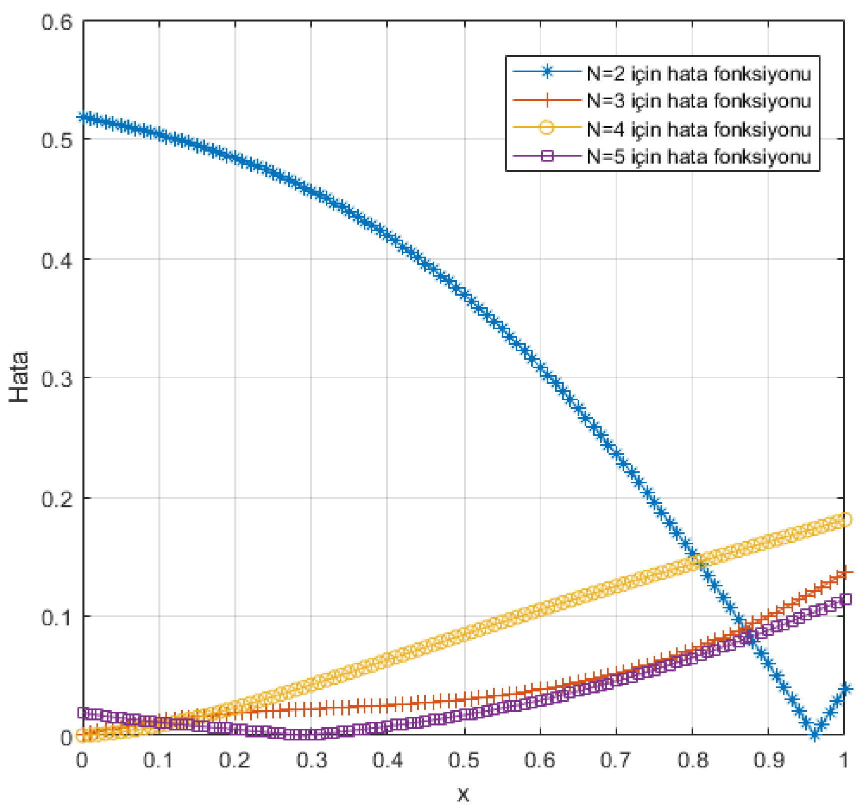
$$\overline{R_5} = \int_0^1 \frac{|R_5(x)|\,dx}{|1-0|} = 8.4342x10^{-5}$$

Tablo 4.1: Örnek4.1.3'ün N=2, 3,4 ve 5 için hata fonksiyonlarının nümerik sonuçları

x_i	Tam Çözüm	$\lvert e_2(x_i)\rvert$	$\lvert e_3(x_i)\rvert$	$\lvert e_4(x_i)\rvert$	$\lvert e_5(x_i)\rvert$
0.0	1	0	0	0	0
0.1	1.10517	0.00828	0.00173	0.00013	0.00003
0.2	1.22140	0.01737	0.0029	0.00013	0.00007
0.3	1.34986	0.0261	0.00349	0.0041	0.0001
0.4	1.49182	0.0332	0.0035	0.00009	0.00014
0.5	1.64872	0.03723	0.00305	0.00002	0.00016
0.6	1.82212	0.0366	0.0026	0.00002	0.00018
0.7	2.01375	0.02965	0.00244	0.00002	0.00021
0.8	2.22554	0.0144	0.0034	0.00035	0.00025
0.9	2.45960	0.01127	0.00632	0.00057	0.00029
1.0	2.71828	0.0497	0.0123	0.00118	0.00032



Şekil 4.1: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.3’ün tam ve nümerik çözümleri



Şekil 4.2: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.3’ün rezidüel hata fonksiyonu

Örnek 4.1.4 $y(x)=e^{x}$ tam çözümü ile verilen

$$y'(x)-xy(x)-\frac{1}{2}e^{-x}y(x-1)=e^{x}-xe^{x}-\frac{1}{2}e^{-1}$$

denkleminin , $0\le x\le 1$ aralığında ve $y(0)=1$

koşulu altındaki çözümünü bulalım.

Katsayıları;

$$P_0(x)=-x, P_1(x)=1, P_2(x)=0,\ Q_0(x)=-1/2e^{(-x)}, F(x)=e^{x}-xe^{x}-1/2e^{(-1)}$$

olan denklemde Euler polinomunu

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}c_nE_n(x)$$

formunda , N=2 için $\{x_0=0\ ,\ x_1=1/2\ ,\ x_2=1\}$ sıralama noktalarıyla çözmeliyiz.

$$\left\{\sum_{k=0}^{1}P_kX(M)^{k}T+\sum_{j=0}^{0}Q_jX\mathrm{B}(\alpha,\beta)(M)^{j}T\right\}C=F$$

$$\left\{P_0XM^{0}T+P_1XM^{1}T+Q_0X\mathrm{B}(1,-1)M^{0}T\right\}C=F$$

denkleminde aşağıdaki matrisleri yerlerine yazarsak;

$$P_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-0.5&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Q_0=\begin{bmatrix}-0.5&0&0\\0&-0.3032653299&0\\0&0&-0.1839397206\end{bmatrix},\ \mathrm{B}(1,-1)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1/2&1/4\\1&1&1\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}1&-1/2&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0.8160602794\\0.6404209148\\-0.1839397206\end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{W};F]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{7}{4}&-2&;&\frac{1189}{1457}\\-\frac{989}{1225}&\frac{3203}{2450}&-\frac{517}{4900}&;&\frac{1765}{2756}\\-\frac{1725}{1457}&\frac{1725}{2914}&1&;&-\frac{268}{1457}\end{bmatrix}.$$

arttırılmış matrisini elde ederiz.

$$[\mathrm{u}_0;\lambda_0]=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&;&1\end{bmatrix}$$

Koşulların matrisini, bulduğumuz arttırılmış matristeki herhangi bir satıeın yerine koyarsak;

$$[\tilde{\mathrm{W}};\tilde{\mathrm{F}}]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&3&-\frac{3}{2}&;&\frac{1189}{1457}\\-\frac{984}{1225}&\frac{2209}{1225}&4&;&\frac{1765}{2756}\\1&-\frac{1}{2}&0&;&1\end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris sistemini çözersek de katsayılar matrisi olan Y matrisini elde ederiz.

$$C=\begin{bmatrix}1.834310456\\1.668620914\\0.593435545\end{bmatrix}$$

Buradan sonuç,

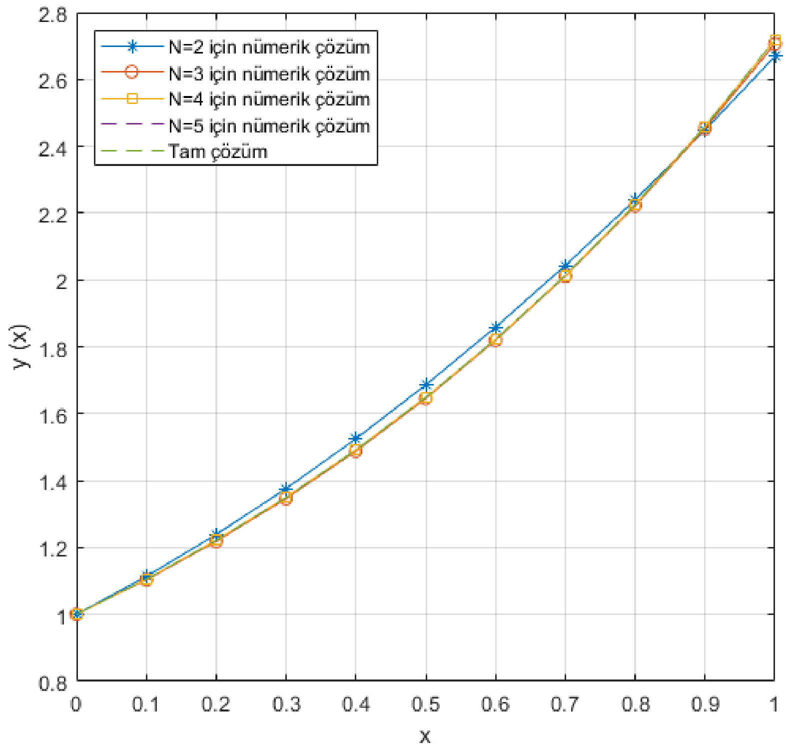
$$y_2(x)\cong 0.999999999+1.075185369x+0.5934355455x^2$$

Şeklinde bulunur. Diğer çözümleride benzer şekilde çözersek sonuçları aşağıdaki gibi elde ederiz.

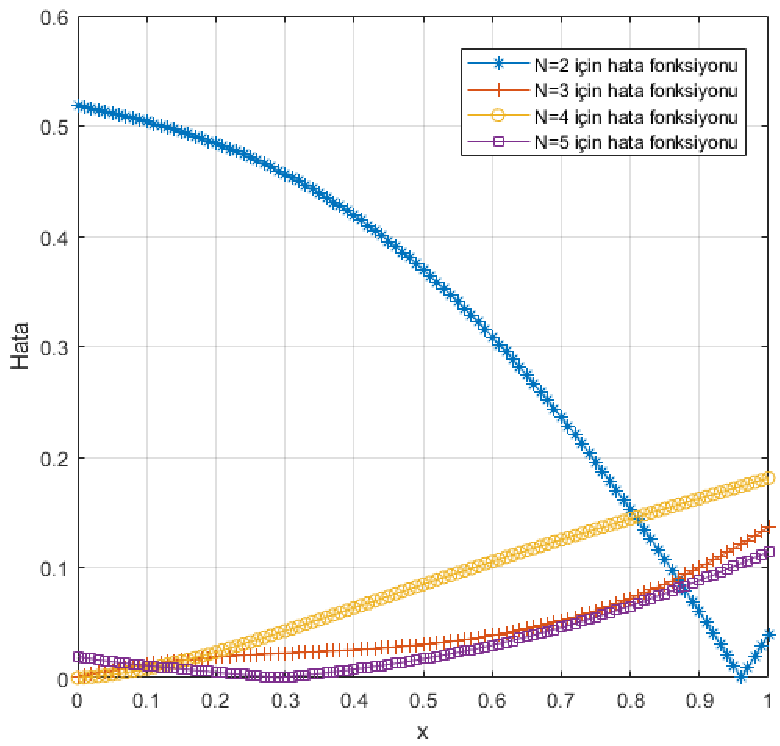
$$y_3(x)\cong 1+0.980577490x+0.5175003627x^2+0.2078878896x^3$$
$$y_4(x)\cong 1+1.002187118x+0.4911597178x^2+0.1702295592x^3+0.053510635x^4$$
$$y_5(x)\cong 1+1.000248766x+0.5011972524x^2+0.1639661467x^3+0.042248965x^4+0.000854324x^5$$

N=2, 3,4 ve 5 için rezidüel hata:

$$\overline{R_2}=\int_0^1\frac{|R_2(x)|\,dx}{|1-0|}=0.10963$$
$$\overline{R_3}=\int_0^1\frac{|R_3(x)|\,dx}{|1-0|}=1.0831x10^{-2}$$
$$\overline{R_4}=\int_0^1\frac{|R_4(x)|\,dx}{|1-0|}=4.8608x10^{-2}$$
$$\overline{R_5}=\int_0^1\frac{|R_5(x)|\,dx}{|1-0|}=3.3449x10^{-2}$$



Şekil 4.3: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.4’ün tam ve nümerik çözümleri



Şekil 4.4: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.4’ün rezidüel hata fonksiyonu

Örnek 4.1.5 $y(0)=0$ koşulu altında, $0 \le x \le 2$ aralığında, $y(x)=\sin x$ tam çözüm olmak üzere

$$y'(x)-y(x)-\cos(0.25x)y(0.2x)+\sin(0.2x)y'(0.25x)=\cos x-\sin x$$

denklemini Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim.

$$P_0(x)=-1, P_1(x)=1,\ Q_0(x)=-\cos(0.25x), Q_1(x)=\sin(0.2x)$$
$$\alpha_1=\frac{1}{5}, \beta_1=0,\ \alpha_2=\frac{1}{4}, \beta_2=0,\ F(x)=\cos x-\sin x$$

olmak üzere,

N=2 için sıralama noktaları $\{x_0=0\ ,\ x_1=1\ ,\ x_2=2\ \}$ iken

$$\left\{P_0XM^0G+P_1XM^1G+Q_0XB(1,-1)M^0G\right\}A=F$$

$$P_0=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\ ,\ P_1=I\ ,\ M=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$Q_0=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-0.99220&0\\0&0&-0.96891\end{bmatrix}\ ,\ Q_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0.09983&0\\0&0&0.19867\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}(1/5,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/5&0\\0&0&1/25\end{bmatrix}\ ,\ \mathrm{B}(1/4,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/16\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1/2&1/4\\1&1&1\end{bmatrix}\ ,\ F=\begin{bmatrix}1\\0.39816\\-0.30117\end{bmatrix}\ ,\ G=\begin{bmatrix}1&-1/2&1/6\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

matrisleri denklemde yerine yazılıp çözülürse

$$[W;F]=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1.33333 & ; & 1 \\ -1.9922 & 1.49671 & 0.06760 & ; & 0.39816 \\ -1.96891 & 0.98934 & 0.72753 & ; & -0.30117 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve $y(0)=0$ için koşul matrisi bulunur.

$$[U_0;\theta_0]=[1 \quad -0.5 \quad 0.16667 \quad ; \quad 0]$$

Bulunan koşul matrisi $[W;F]$ arttırılmış matriste yerine konulursa A katsayılar matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$A=\begin{bmatrix} 0.45536 \\ 0.86608 \\ -0.13391 \end{bmatrix}$$

Daha sonra çözüm bulunur.

$$y_2(x)\cong -1.166666667\times 10^{-10}+x-0.1339153543x^2$$

Benzer şekilde diğer N'ler için çözüm bulunur:

$$\begin{aligned} &y_3(x)\cong 0.83\times 10^{-10}+x-0.0050429728x^2-0.155530447x^3 \\ &y_4(x)\cong -0.84\times 10^{-10}+x+0.001991673x^2-0.1760802276x^3+0.015342368x^4 \\ &y_5(x)\cong -0.67\times 10^{-10} \\ &+x+0.004407080x^2-0.1926962771x^3+0.052373822x^4-0.0262654029x^5 \end{aligned}$$

N=2, 3,4 ve 5 için hata analizi:

$$\overline{R_2}=\int_0^1 \frac{|R_2(x)|\,dx}{|1-0|}=0.10963$$

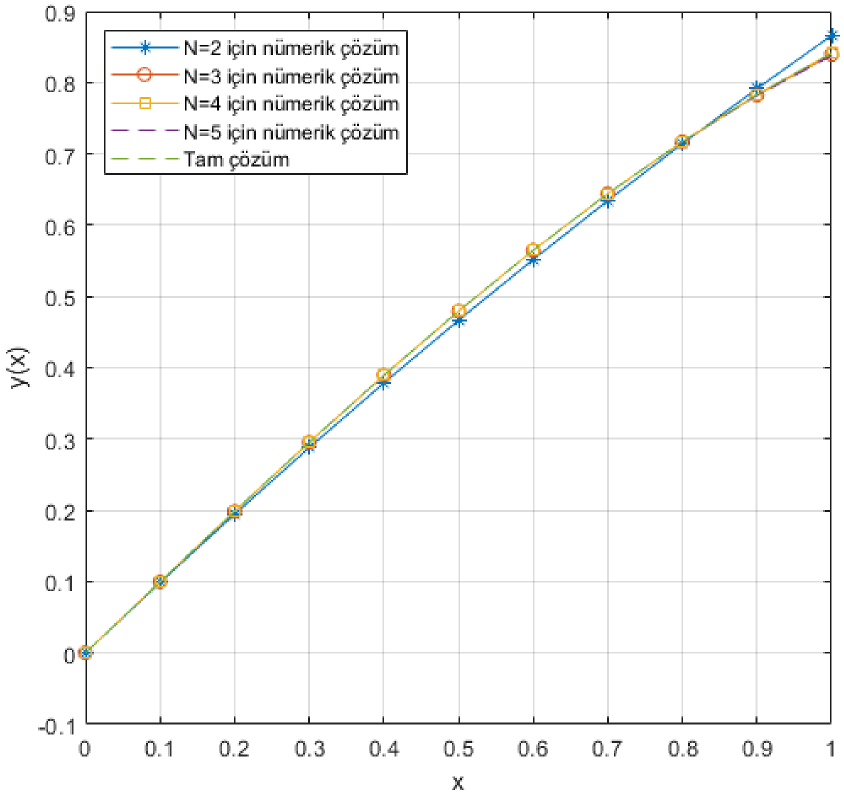
$$\overline{R_3}=\int_0^1 \frac{|R_3(x)|\,dx}{|1-0|}=1.0831x10^{-2}$$

$$\overline{R_4}=\int_0^1 \frac{|R_4(x)|\,dx}{|1-0|}=4.8608x10^{-2}$$

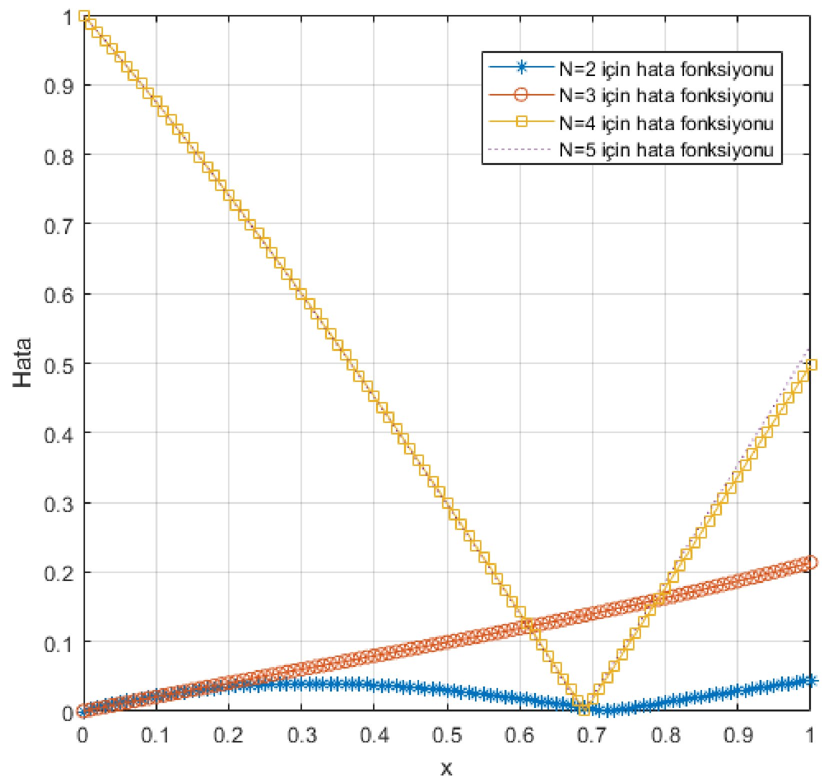
$$\overline{R_5}=\int_0^1 \frac{|R_5(x)|\,dx}{|1-0|}=3.3449x10^{-2}$$

Tablo 4.2: Örnek 4.1.5 in N=2, 3,4 ve 5 için hata fonksiyonunun nümerik sonuçları

x_i	Tam Çözüm	$\lvert e_2(x_i)\rvert$	$\lvert e_3(x_i)\rvert$	$\lvert e_4(x_i)\rvert$	$\lvert e_5(x_i)\rvert$
0.0	0	$1.16x10^{-10}$	$8.33x10^{-11}$	$8.4x10^{-11}$	$6.73x10^{-11}$
0.1	$9.98x10^{-2}$	$1.17x10^{-3}$	$3.93x10^{-5}$	$1.19x10^{-5}$	$2.29x10^{-5}$
0.2	$1.98x10^{-1}$	$4.02x10^{-3}$	$8.80x10^{-4}$	$2.62x10^{-5}$	$4.07x10^{-5}$
0.3	$2.95x10^{-1}$	$7.57x10^{-3}$	$1.73x10^{-4}$	$2.91x10^{-5}$	$3.40x10^{-5}$
0.4	$3.89x10^{-1}$	$1.08x10^{-2}$	$1.79x10^{-4}$	$2.39x10^{-5}$	$2.60x10^{-5}$
0.5	$4.79x10^{-1}$	$1.29x10^{-2}$	$1.28x10^{-4}$	$2.12x10^{-5}$	$4.17x10^{-5}$
0.6	$5.64x10^{-1}$	$1.28x10^{-2}$	$5.25x10^{-5}$	$2.95x10^{-5}$	$6.69x10^{-5}$
0.7	$6.44x10^{-1}$	$9.83x10^{-2}$	$3.56x10^{-5}$	$4.64x10^{-5}$	$7.49x10^{-6}$
0.8	$7.17x10^{-1}$	$3.05x10^{-2}$	$2.15x10^{-4}$	$4.97x10^{-5}$	$3.50x10^{-4}$
0.9	$7.83x10^{-1}$	$8.20x10^{-2}$	$7.93x10^{-4}$	$1.00x10^{-5}$	$1.37x10^{-3}$
1.0	$8.41x10^{-1}$	$2.46x10^{-2}$	$2.04x10^{-3}$	$2.17x10^{-4}$	$3.65x10^{-3}$



Şekil 4.5: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.5’in tam çözümü ve mümerik sonuçları



Şekil 4.6: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.5’ün rezidüel hata fonksiyonu

Örnek 4.1.6. $y(0)=0$ koşulu altında, $0 \le x \le 2$ aralığında, $y(x)=\sin x$ tam çözüm olmak üzere

$$y'(x)-y(x)-\cos(0.25x)\,y(0.2x)+\sin(0.2x)\,y'(0.25x)=\cos x-\sin x$$

denklemini Euler sıralama yöntemi ile çözelim.

$$P_0(x)=-1, P_1(x)=1,\ Q_0(x)=-\cos(0.25x), Q_1(x)=\sin(0.2x)$$
$$\alpha_1=\frac{1}{5}, \beta_1=0,\ \alpha_2=\frac{1}{4}, \beta_2=0,\ F(x)=\cos x-\sin x$$

olmak üzere,

N=2 için sıralama noktaları $\{x_0=0\ ,\ x_1=1\ ,\ x_2=2\}$ iken

$$\left\{P_0XM^0T+P_1XM^1T+Q_0XB(1,-1)M^0T\right\}C=F$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ P_1 = I\ ,\ M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.99220 & 0 \\ 0 & 0 & -0.96891 \end{bmatrix},\ Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09983 & 0 \\ 0 & 0 & 0.19867 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}(1/5, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/25 \end{bmatrix},\ \mathrm{B}(1/4, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.39816 \\ -0.30117 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri denklemde yerine yazılıp çözülürse

$$\left[W;F\right] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & ; & 1 \\ -1.9922 & 1.49671 & 0.06760 & ; & 0.39816 \\ -1.96891 & 0.98934 & 1.05569 & ; & -0.30117 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve $y(0) = 0$ için koşul matrisi bulunur.

$$\left[U_0;\lambda_0\right] = \left[1 \quad -0.5 \quad 0 \quad ; \quad 0\right]$$

Bulunan koşul matrisi $\left[W;F\right]$ arttırılmış matriste yerine konulursa C katsayılar matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$C = \begin{bmatrix} 0.433042 \\ 0.866084 \\ -0.133915 \end{bmatrix}$$

Daha sonra çözüm bulunur.

$$y_2(x) \cong x - 0.1339153542x^2$$

Benzer şekilde diğer N'ler için çözüm bulunur:

$$y_3(x) \cong 2.75\times10^{-10} + x - 0.0050429728x^2 - 0.155530447x^3$$
$$y_4(x) \cong 0.75\times10^{-10} + x + 0.001991673x^2 - 0.1760802276x^3 + 0.015342368x^4$$
$$y_5(x) \cong -0.16\times10^{-10} + x + 0.004407080x^2 - 0.1926962813x^3 + 0.052373820x^4 - 0.0262654029x^5$$

Tablo 4.3: Örnek 4.1.6 nın N=2, 3,4 ve 5 için hata fonksiyonunun nümerik sonuçları

x_i	Tam Çözüm	$\lvert e_2(x_i)\rvert$	$\lvert e_3(x_i)\rvert$	$\lvert e_4(x_i)\rvert$	$\lvert e_5(x_i)\rvert$
0.0	0	0	$2.75x10^{-10}$	$-8.4x10^{-11}$	$-6.73x10^{-11}$
0.1	$9.98x10^{-2}$	$9.86x10^{-2}$	$9.97x10^{-2}$	$9.98x10^{-2}$	$9.98x10^{-2}$
0.2	$1.98x10^{-1}$	$1.94x10^{-1}$	$1.99x10^{-1}$	$1.98x10^{-1}$	$1.98x10^{-1}$
0.3	$2.95x10^{-1}$	$2.87x10^{-1}$	$2.95x10^{-1}$	$2.95x10^{-1}$	$2.95x10^{-1}$
0.4	$3.89x10^{-1}$	$3.78x10^{-1}$	$3.89x10^{-1}$	$3.89x10^{-1}$	$3.89x10^{-1}$
0.5	$4.79x10^{-1}$	$4.66x10^{-1}$	$4.79x10^{-1}$	$4.79x10^{-1}$	$4.79x10^{-1}$
0.6	$5.64x10^{-1}$	$5.51x10^{-1}$	$5.64x10^{-1}$	$5.64x10^{-1}$	$5.64x10^{-1}$
0.7	$6.44x10^{-1}$	$6.34x10^{-1}$	$6.44x10^{-1}$	$6.44x10^{-1}$	$6.44x10^{-1}$
0.8	$7.17x10^{-1}$	$7.14x10^{-1}$	$7.17x10^{-1}$	$7.17x10^{-1}$	$7.17x10^{-1}$
0.9	$7.83x10^{-1}$	$7.91x10^{-1}$	$7.82x10^{-1}$	$7.83x10^{-1}$	$7.81x10^{-1}$
1.0	$8.41x10^{-1}$	$8.66x10^{-1}$	$8.39x10^{-1}$	$8.41x10^{-1}$	$8.37x10^{-1}$

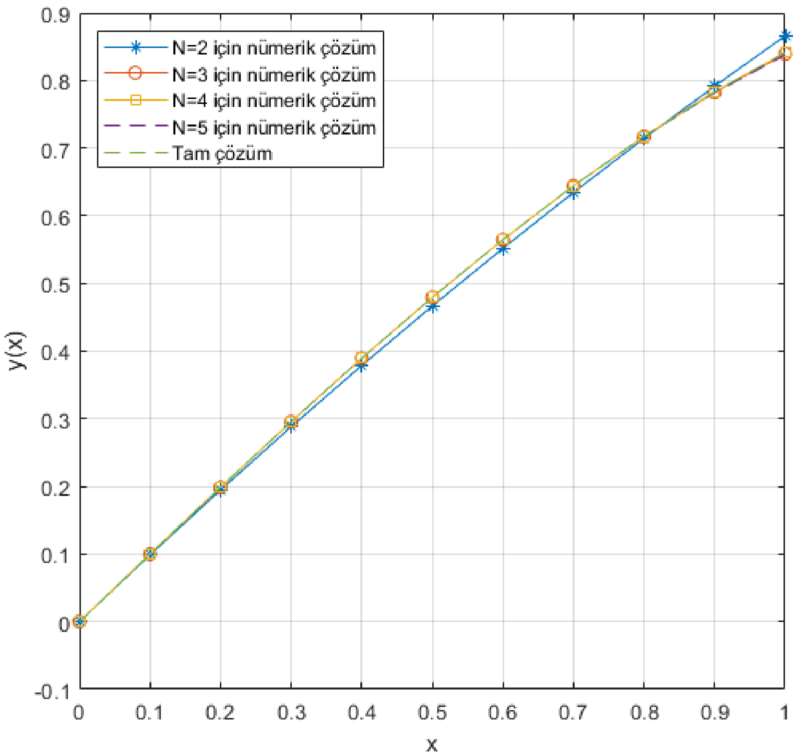
N=2, 3,4 ve 5 için hata analizi:

$$\overline{R_2} = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|\,dx}{|1-0|} = 5.461685\,\mathrm{x}\,10^{-2}$$

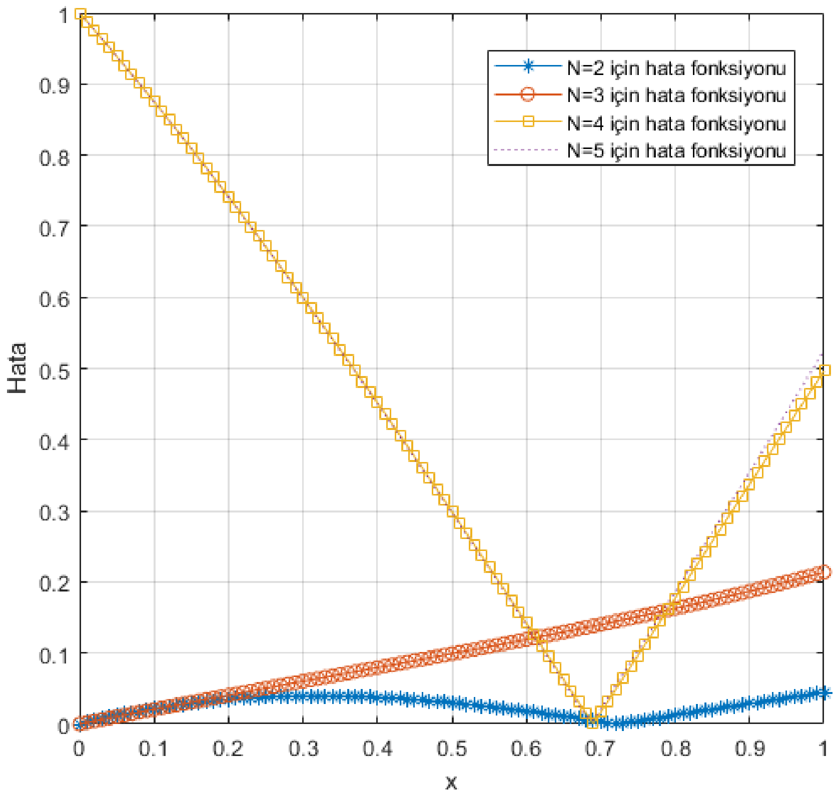
$$\overline{R_3} = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|\,dx}{|1-0|} = 2.171862\,\mathrm{x}\,10^{-3}$$

$$\overline{R_4} = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|\,dx}{|1-0|} = 8.176045\,\mathrm{x}\,10^{-4}$$

$$\overline{R_5} = \int_0^1 \frac{|R_5(x)|\,dx}{|1-0|} = 3.682374\,\mathrm{x}\,10^{-5}$$



Şekil 4.7: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.6’nin tam çözümü ve nümerik sonuçları



Şekil 4.8: N=2, 3,4 ve 5 için Örnek 4.1.6 nın rezidüel hata fonksiyonu

Örnek 4.1.7 $y'''(x)+y(x)+y(x-0,3)=e^{0,3-x}$, $0\le x\le 1$

Sabit katsayılı üçüncü mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denkleminin $y(0)=1,\ \ y'(0)=-1, y''(0)=1$ koşulları altında tam çözümü $y(x)=e^{-x}$ olsun.

Burada katsayılar;

$$P_0=1\,,P_3=1\,,Q_0=1\,,\alpha=1\,,\beta=-0,3\,,F=e^{0,3-x}$$

olmak üzere, N=3 için Bernoulli polinomu

$$y_N(x)=\sum_{n=o}^{3}a_nB_n(x)$$

gibidir. $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$ sıralama noktalarını matris denkleminde yerine yazarsak $y(x)$ çözümünü elde ederiz.

$$\left\{ P_0 X M^0 G + P_3 X M^3 G + Q_0 X \mathrm{B}(1,-0,3) M^0 G \right\} A = F$$

$$W = P_0 X M^0 G + P_3 X M^3 G + Q_0 X \mathrm{B}(1,-0,3) M^0 G$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}(1,-0,3) = \begin{bmatrix} 1 & -0,3 & 0,09 & -0,027 \\ 0 & 1 & -0,6 & 0,27 \\ 0 & 0 & 1 & -0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1,34985 \\ 0,96721 \\ 0,69304 \\ 0,49658 \end{bmatrix}$$

Değerler yerineyazıldığında W matrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$W = \begin{bmatrix} 2 & -1,3 & 0,723333 & 5,688 \\ 1 & -0,5 & 0,16666 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{U}_0;\theta_0] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,16666 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$
$$[\mathrm{U}_1;\theta_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0,5 & ; & -1 \end{bmatrix}$$
$$[\mathrm{U}_2;\theta_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

Koşullar W matrisinin herhangi 3 satırı silinip yerine yazıldığında ve sistem çözüldüğünde aranan çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} 0,625015 \\ -0,66606 \\ 0,25009 \\ -0,166606 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisi elde edildikten sonra yaklaşık çözümler elde edilir.

$$y_3(x) = 1 - x + 0,5x^2 - 0,166606x^3$$
$$y_4(x) = 1 - x + 0,5x^2 - 0,166606x^3 + 0,036858x^4$$
$$y_5(x) = 1 - x + 0,5x^2 - 0,166606x^3 + 0,03884x^4 - 0,002166x^5$$

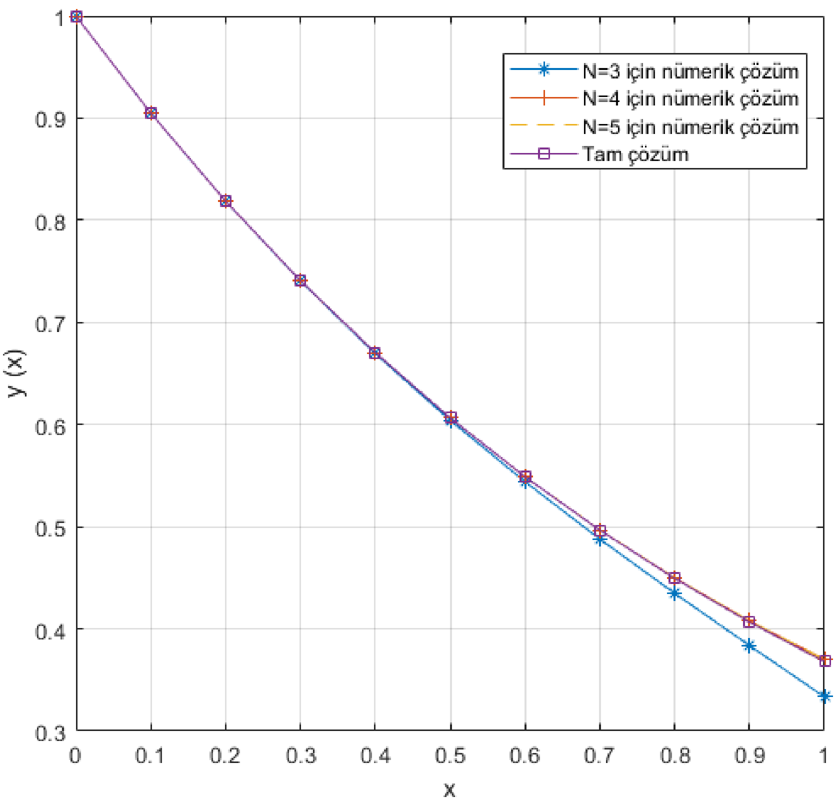
Tablo 4.4: Örnek 4.1.7 nin N=3,4 ve 5 için hata fonksiyonunun nümerik sonuçları

x_i	Tam Çözüm	$\|e_3(x_i)\|$	$\|e_4(x_i)\|$	$\|e_5(x_i)\|$
0.0	1	$2x10^{-5}$	0	0
0.1	$9.04x10^{-1}$	$2.19x10^{-5}$	$7.54x10^{-5}$	$2.16x10^{-2}$
0.2	$8.18x10^{-1}$	$7.92x10^{-5}$	$6.05x10^{-4}$	$2.58x10^{-6}$
0.3	$7.40x10^{-1}$	$3.29x10^{-4}$	$2.04x10^{-3}$	$8.70x10^{-6}$
0.4	$6.70x10^{-1}$	$9.93x10^{-4}$	$4.83x10^{-3}$	$1.41x10^{-5}$
0.5	$6.06x10^{-1}$	$2.36x10^{-3}$	$9.41x10^{-3}$	$3.43x10^{-6}$
0.6	$5.48x10^{-1}$	$4.80x10^{-3}$	$1.61x10^{-2}$	$5.49x10^{-5}$
0.7	$4.96x10^{-1}$	$8.73x10^{-3}$	$2.55x10^{-2}$	$2.11x10^{-4}$
0.8	$4.49x10^{-1}$	$1.46x10^{-2}$	$3.78x10^{-2}$	$5.40x10^{-4}$
0.9	$4.06x10^{-1}$	$2.30x10^{-2}$	$5.32x10^{-2}$	$1.13x10^{-4}$
1.0	$3.67x10^{-1}$	$3.44x10^{-2}$	$7.22x10^{-2}$	$2.13x10^{-3}$

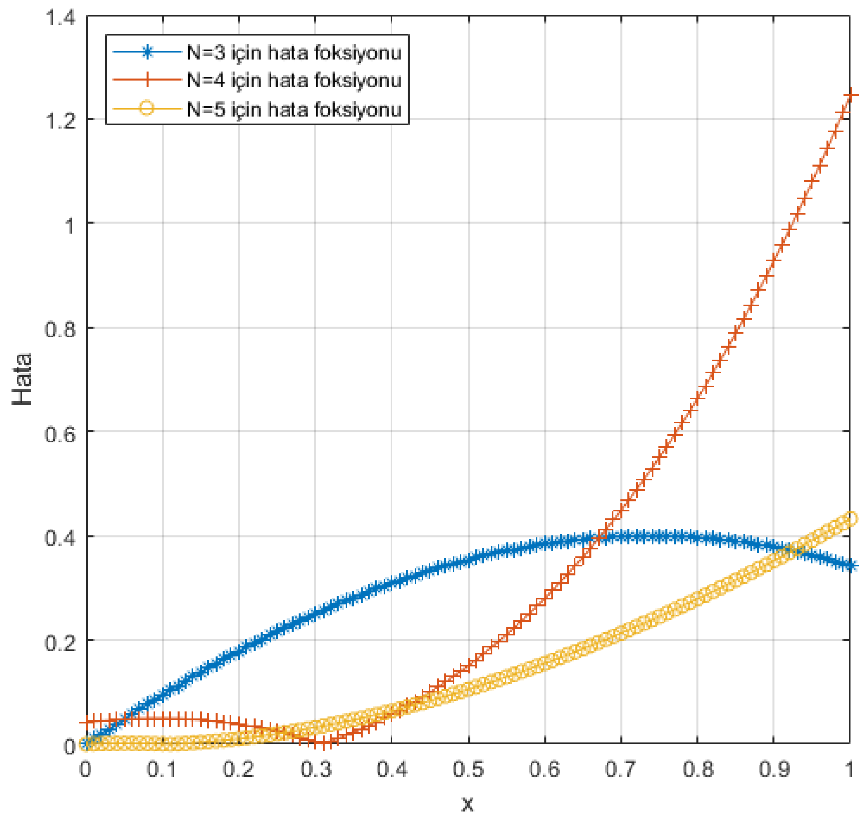
N=3, 4 ve 5 için hatalar;

$$\overline{R_3} = 0.29263$$
$$\overline{R_4} = 0.32447$$
$$\overline{R_5} = 0.14216$$

şeklinde bulunur.



Şekil 4.9: N=3,4 ve 5 için Örnek 4.1.7’nin tam çözümü ve nümerik sonuçları



Şekil 4.10: N=3,4 ve 5 için Örnek 4.1.7'nin rezidüel hata fonksiyonu

Örnek 4.1.8 $y'''(x)+y(x)+y(x-0,3)=e^{0,3-x}$, $0\le x\le 1$

Sabit katsayılı üçüncü mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denkleminin $y(0)=1,\ y'(0)=-1, y''(0)=1$ koşulları altında tam çözümü $y(x)=e^{-x}$ olsun.

Burada katsayılar;

$$P_0=1\,,P_3=1\,,Q_0=1\,,\alpha=1\,,\beta=-0,3\,,F=e^{0,3-x}$$

olmak üzere, N=3 için Euler polinomu

$$y_3(x)=\sum_{n=o}^{3}c_nE_n(x)$$

gibidir. $x_0=0\ ,\ x_1=\dfrac{1}{3},\ x_2=\dfrac{2}{3}, x_3=1$ sıralama noktalarını matris denkleminde yerine yazarsak $y(x)$ çözümünü elde ederiz.

$$\left\{P_0XM^0T+P_3XM^3T+Q_0X\mathrm{B}(1,-0,3)M^0T\right\}C=F$$

$$W=P_0XM^0T+P_3XM^3T+Q_0XB(1,-0,3)M^0T$$

$$P_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathrm{B}(1,-0,3)=\begin{bmatrix}1&-0,3&0,09&-0,027\\0&1&-0,6&0,27\\0&0&1&-0,9\\0&0&0&1\end{bmatrix},Q_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{27}\\1&\frac{2}{3}&\frac{4}{9}&\frac{8}{27}\\1&1&1&1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}1,34985\\0,96721\\0,69304\\0,49658\end{bmatrix},T=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\0&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Değerler yerine yazıldığında W matrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$W=\begin{bmatrix}2&-1,3&0,39&6,338\\2&-0,63333&-0,25444&6,36874\\2&0,03333&-0,45444&5,97725\\2&0,7&-0,21&5,608\end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{U}_0;\theta_0]=\begin{bmatrix}1&-0,5&0&0,25&;&1\end{bmatrix}$$
$$[\mathrm{U}_1;\theta_1]=\begin{bmatrix}0&1&-1&0&;&-1\end{bmatrix}$$
$$[\mathrm{U}_2;\theta_2]=\begin{bmatrix}0&0&2&-3&;&1\end{bmatrix}$$

Koşullar W matrisinin herhangi 3 satırı silinip yerine yazıldığında ve sistem çözüldüğünde aranan çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$C=\begin{bmatrix}0,66669\\-0,74990\\0,25009\\-0,166606\end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisi elde edildikten sonra yaklaşık çözümler edlde edilir.

$$y_3(x) = 1 - x + 0,5x^2 - 0,166606x^3$$
$$y_4(x) = 1 - x + 0,5x^2 - 0,166656x^3 + 0,036858x^4$$
$$y_5(x) = 1 - x + 0,5x^2 - 0,166606x^3 + 0,03884x^4 - 0,002166x^5$$

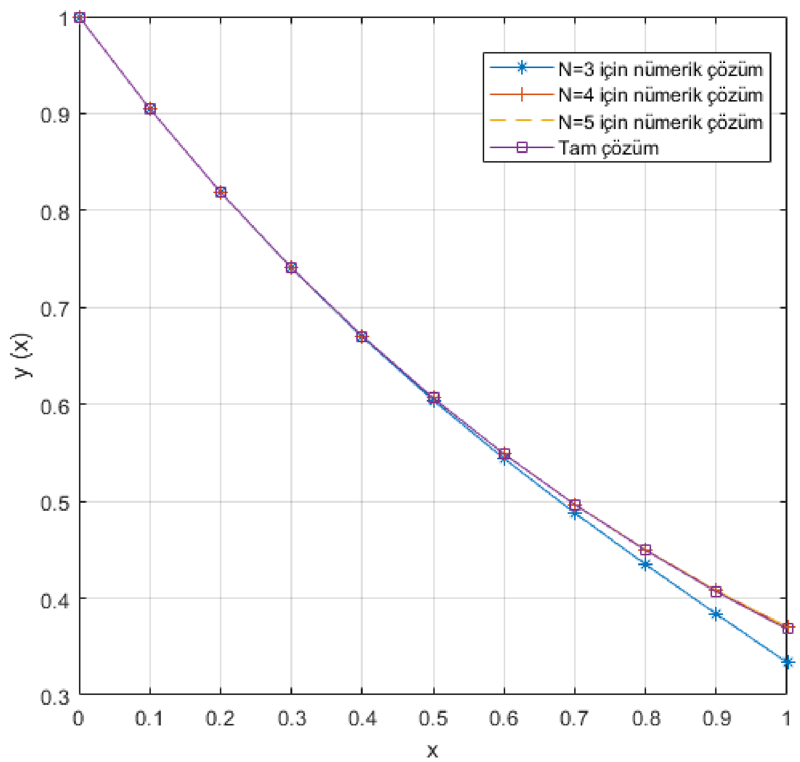
N=3, 5 ve 5 için hatalar;

$$\overline{R_3} = 0.29263$$
$$\overline{R_4} = 0.32447$$
$$\overline{R_5} = 0.14216$$

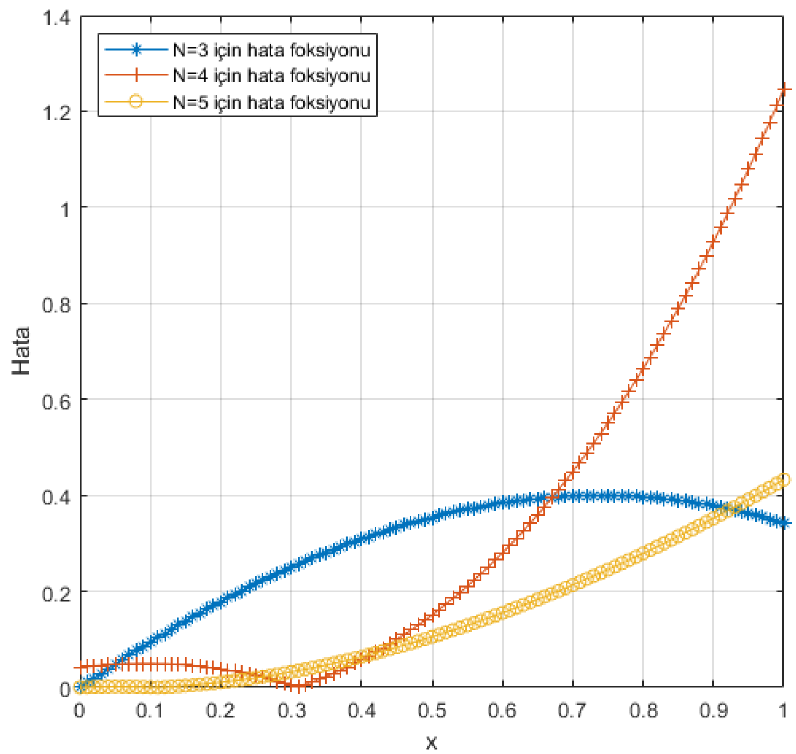
şeklinde bulunur.

Tablo 4.5: Örnek 4.1.8 in N= 3,4 ve 5 için hata fonksiyonunun nümerik sonuçları

x_i	Tam Çözüm	$\lvert e_3(x_i)\rvert$	$\lvert e_4(x_i)\rvert$	$\lvert e_5(x_i)\rvert$
0.0	1	$2x10^{-5}$	0	0
0.1	$9.04x10^{-1}$	$2.19x10^{-5}$	$7.54x10^{-5}$	$2.16x10^{-2}$
0.2	$8.18x10^{-1}$	$7.92x10^{-5}$	$6.05x10^{-4}$	$2.58x10^{-6}$
0.3	$7.40x10^{-1}$	$3.29x10^{-4}$	$2.04x10^{-3}$	$8.70x10^{-6}$
0.4	$6.70x10^{-1}$	$9.93x10^{-4}$	$4.83x10^{-3}$	$1.41x10^{-5}$
0.5	$6.06x10^{-1}$	$2.36x10^{-3}$	$9.41x10^{-3}$	$3.43x10^{-6}$
0.6	$5.48x10^{-1}$	$4.80x10^{-3}$	$1.61x10^{-2}$	$5.49x10^{-5}$
0.7	$4.96x10^{-1}$	$8.73x10^{-3}$	$2.55x10^{-2}$	$2.11x10^{-4}$
0.8	$4.49x10^{-1}$	$1.46x10^{-2}$	$3.78x10^{-2}$	$5.40x10^{-4}$
0.9	$4.06x10^{-1}$	$2.30x10^{-2}$	$5.32x10^{-2}$	$1.13x10^{-4}$
1.0	$3.67x10^{-1}$	$3.44x10^{-2}$	$7.22x10^{-2}$	$2.13x10^{-3}$



Şekil 4.11: N=3,4 ve 5 için Örnek 4.4.2’in tam çözümü ve nümerik sonuçları



Şekil 4.12: N=3,4 ve 5 için Örnek 4.4.2’in rezidüel hata fonksiyonu

Örnek 4.1.9. Tam çözümü $y(x)=x$ olan

$$y''(x)+y'(x-1)+2xy(x-2)=2x^2-4x+1$$

lineer fonksiyonel denklemini $0\le x\le 2$ aralığında , $y(0)=0$, $y'(0)=1$ koşullarıyla Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim.

N=2 seçersek sıralama noktaları $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$ olur. Burada katsayılar;

$$Q_0(x)=2x \Rightarrow \alpha_0=1, \beta_0=-2$$
$$Q_1(x)=1 \quad \Rightarrow \alpha_1=1, \beta_1=-1$$
$$Q_2(x)=1 \quad \Rightarrow \alpha_2=1, \beta_2=0$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{2} Q_k X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^k G A = F$$
$$\left\{Q_0 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^0 G + Q_1 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^1 G + Q_2 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^2 G\right\} A = F$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix},\ M^0=I\ ,\ M^1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ M^2=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$Q_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\ ,\ \mathrm{B}(1,-2)=\begin{bmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Q_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ \mathrm{B}(1,-1)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ \mathrm{B}(1,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ F=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix}0&1&-1\\2&-2&\frac{16}{3}\\4&-1&\frac{11}{3}\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$U_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$U_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[U_0;\theta_0]=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 0\end{bmatrix}$$

$$[U_1;\theta_1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & ; & 1\end{bmatrix}$$

Koşulları W matrisinin herhangi iki satırı silinip yerine yazılıp matris çözülürse $y(x)=x$ tam çözümüne ulaşılır.

Örnek 4.1.10 Şimdi de tam çözümü $y(x)=x$ olan

$$y''(x)+y'(x-1)+2xy(x-2)=2x^2-4x+1$$

lineer fonksiyonel denklemini $0\le x\le 2$ aralığında , $y(0)=0$, $y'(0)=1$ koşullarıyla Euler sıralama yöntemi ile çözelim.

N=2 seçersek sıralama noktaları $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$ olur. Burada katsayılar ;

$$Q_0(x)=2x \Rightarrow \alpha_0=1,\beta_0=-2$$
$$Q_1(x)=1 \quad \Rightarrow \alpha_1=1,\beta_1=-1$$
$$Q_2(x)=1 \quad \Rightarrow \alpha_2=1,\beta_2=0$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{2} Q_k X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^k T C = F$$

$$\left\{ Q_0 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^0 T + Q_1 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^1 T + Q_2 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^2 T \right\} C = F$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \; M^0 = I \;, \; M^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; \mathrm{B}(1,-2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathrm{B}(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathrm{B}(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$U_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$U_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$[U_0;\theta_0]=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & ; & 0\end{bmatrix}$$

$$[U_1;\theta_1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & ; & 1\end{bmatrix}$$

Koşulları W matrisinin herhangi iki satırı silinip yerine yazılıp matris çözülürse $y(x)=x$ tam çözümüne Euler Polinomuyla da ulaşılır.

4.2. Gecikmeli Lineer Fredholm ve Volterra tip İntegro-Diferansiyel Denklemlerle ilgili Örnekler

Örnek 4.2.1 Tam çözümü $y(x)=x^2-2x+1$ olan

$$y''(x)+y''(x-1)-2xy'(x-2)=-5x^2+12x+4+30\int_0^1 x^2t^2y(t)dt$$

denklemini $0\le x\le 1$ aralığında , $y(0)=0$, $y(1)=0$ koşullarıyla Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim.

N=3 seçersek sıralama noktaları

$$x_0=0\ ,\ x_1=\frac{1}{3}\ ,\ x_2=\frac{2}{3}\ ,\ x_3=1$$

olur. Burada katsayılar ;

$$P_0(x)=0$$
$$P_1(x)=0$$
$$P_2(x)=1$$
$$Q_0(x)=0$$
$$Q_1(x)=-2x \quad \Rightarrow \alpha_1=1, \beta_1=-2$$
$$Q_2(x)=1 \quad \Rightarrow \alpha_2=1, \beta_2=-1$$

olmak üzere

$$\left\{P_0 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^0 G + P_1 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^1 G + P_2 X \mathrm{B}(\alpha,\beta) M^2 G - \lambda XKQG\right\} A = F$$

denkleminde

$$Q_1(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B}_1(1,-2)=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2(x)=\mathrm{I}, \quad \mathrm{B}_2(1,-1)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(x)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \lambda=30$$

yukarıdaki kasayılar yerlerine yazılırsa

$$W=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & -12\\ -\frac{10}{9} & -\frac{17}{18} & \frac{371}{54} & -\frac{619}{36}\\ -\frac{40}{9} & -\frac{22}{9} & \frac{238}{27} & -17\\ -10 & -\frac{9}{2} & \frac{59}{6} & -\frac{51}{4}\end{bmatrix}$$

matrisi bulunur.

Koşulların matris formu:

$$[U_0,\theta_0]=\left[1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{6} \quad 0\ ;\ 1\right]$$
$$[U_1,\theta_1]=\left[0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad 0\ ;\ 0\right]$$

şeklindedir.

Bulduğumuz koşulların matrisini, bulduğumuz W matrisinin herhangi iki satırını silip yerine yazarsak elde ettiğimiz matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\left[\tilde{W};\tilde{F}\right]=\begin{bmatrix}
\frac{619}{3432} & -\frac{18}{143} & \frac{89}{286} & \frac{157}{286} & ; & 4\\
0 & 0 & 1 & -1 & ; & \frac{67}{9}\\
-\frac{619}{572} & \frac{108}{143} & \frac{162}{143} & -\frac{42}{143} & ; & 0\\
-\frac{127}{286} & \frac{36}{143} & \frac{54}{143} & -\frac{14}{143} & ; & 1
\end{bmatrix}
$$

Sistem çözümü yapılırsa $y(x)=x^2-2x+1$ tam çözümü elde edilir.

Örnek 4.2.2 Şimdi de tam çözümü $y(x)=x^2-2x+1$ olan

$$
y''(x)+y''(x-1)-2xy'(x-2)=-5x^2+12x+4+30\int_0^1 x^2t^2y(t)dt
$$

denklemini $0\le x\le 1$ aralığında , $y(0)=0$, $y(1)=0$ koşullarıyla Euler sıralama yöntemi ile çözelim.

N=3 seçersek sıralama noktaları $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$, $x_3=1$

olur. Burada katsayılar;

$$
\begin{aligned}
&P_0(x)=0\\
&P_1(x)=0\\
&P_2(x)=1\\
&Q_0(x)=0\\
&Q_1(x)=-2x \quad \Rightarrow \alpha_1=1,\beta_1=-2\\
&Q_2(x)=1 \qquad \Rightarrow \alpha_2=1,\beta_2=-1
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$\left\{P_0 X\mathrm{B}(\alpha,\beta)M^0T + P_1 X\mathrm{B}(\alpha,\beta)M^1T + P_2 X\mathrm{B}(\alpha,\beta)M^2T - \lambda XKQT\right\}C = F$$

denkleminde

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \mathrm{B}_1(1,-2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2(x) = \mathrm{I} \ , \ \mathrm{B}_2(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \ , \ K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \lambda = 30$$

yukarıdaki kasayılar yerlerine yazılırsa

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{127}{572} & \frac{18}{143} & \frac{170}{143} & -\frac{150}{143} \\ -\frac{619}{572} & \frac{108}{143} & \frac{162}{143} & -\frac{42}{143} \\ -\frac{127}{286} & \frac{36}{143} & \frac{54}{143} & -\frac{14}{143} \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur.

Koşulların matris formu:

$$[U_0,\theta_0]=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U_1,\theta_1]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Bulduğumuz koşulların matrisini, bulduğumuz W matrisinin herhangi iki satırını silip yerine yazarsak elde ettiğimiz matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[\tilde{W};\tilde{F}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & ; & 4 \\ -\frac{127}{572} & -\frac{18}{572} & \frac{170}{143} & -\frac{150}{143} & ; & \frac{67}{9} \\ -\frac{619}{572} & \frac{108}{143} & \frac{162}{143} & -\frac{42}{143} & ; & 0 \\ -\frac{127}{286} & \frac{36}{143} & \frac{54}{143} & -\frac{14}{143} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

Sistem çözümü yapılırsa $y(x)=x^2-2x+1$ tam çözümü elde edilir.

Örnek 4.2.3 Tam çözümü $y(x)=\ln(x+4)$ olan

$$(x+4)^2y''(x)-(x+4)y'(x)+y(x-1)-y'(x-1)=\ln(x+3)-\frac{1}{x+3}+3\ln 3-5\ln 5+\int_{-1}^{1}y(t)dt$$

denklemini $-1\le x\le 1$ aralığında , $y(0)=\ln 4$, $y'(0)=\frac{1}{4}$ koşullarıyla Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim.

Katsayıları;

$$P_0(x)=0$$
$$P_1(x)=-(\mathrm{x}+4)$$
$$P_2(x)=(x+4)^2$$
$$Q_0(x)=1 \quad \Rightarrow \mathrm{B}(1,-1)$$
$$Q_1(x)=-1 \quad \Rightarrow \mathrm{B}(1,-1)$$

olan denklemde Bernoulli polinomunu

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}a_nB_n(x)$$

formunda , N=2 için $\{x_0=-1\ ,\ x_1=0\ ,\ x_2=1\}$ sıralama noktalarıyla çözmeliyiz.

$$\left\{\sum_{k=0}^{1}P_kX(M)^kG+\sum_{j=0}^{0}Q_jX\mathrm{B}(\alpha,\beta)(M)^jG-\lambda XKQG\right\}A=F$$

$$\left\{\begin{matrix}P_1XMG+P_2XM^2G+Q_0XB(1,-1)M^0G+Q_1XB(1,-1)M^1G\\ -\lambda XKQG\end{matrix}\right\}A=F$$

denkleminde aşağıdaki matrisleri yerlerine yazarsak;

$$P_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = I \;,\; Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; \mathrm{B}(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} -4.5582 \\ -3.9861 \\ -3.6151 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{W}; F] = \begin{bmatrix} 0.010638 & 1.0106 & 0.56383 & ; & -4.5582 \\ 0.031915 & 0.031915 & 1.1915 & ; & -3.9861 \\ 0.031915 & 0.031915 & 0.19149 & ; & -3.6151 \end{bmatrix}.$$

arttırılmış matrisini elde ederiz.

$$[\mathrm{u}_0; \theta_0] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 1.38629 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{u}_1; \theta_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & ; & 0.25 \end{bmatrix}$$

Koşulların matrisini, bulduğumuz arttırılmış matristeki herhangi bir satırın yerine koyarsak;

$$[\tilde{W};\tilde{F}]=\begin{bmatrix} 0.010638 & 1.0106 & 0.56383 & ; & -4.5582 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 1.38629 \\ 0 & 1 & -1 & ; & 0.25 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris sistemini çözersek de katsayılar matrisi olan A matrisini elde ederiz.

$$A=\begin{bmatrix} 1.4935 \\ 0.19664 \\ -5.3359\times10^{-2} \end{bmatrix}$$

Buradan sonuç,

$$y_2(x)\cong 0.25\text{x-}5.\ 3359\times10^{-2}x^2+1.3863$$

şeklinde bulunur. Diğer çözümleride benzer şekilde çözersek sonuçları aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$y_4(x)\cong 0.25x-3.1315\times10^{-2}x^2+5.2265\times10^{-3}x^3-8.134\times10^{-4}x^4+1.3863$$

$$y_6(x)\cong 0.25x-0.13842x^2-8.3330\times10^{-3}x^3-2.0236\times10^{-3}x^4$$

$$+1.0562\times10^{-4}x^5-2.7162\times10^{-5}x^6+1.3863$$

N=2, 4 ve 6 için rezidüel hata:

$$\overline{R_2}=\int_0^1\frac{|R_2(x)|\,dx}{|1-0|}=1.0392$$

$$\overline{R_4}=\int_0^1\frac{|R_4(x)|\,dx}{|1-0|}=4.2625\times10^{-3}$$

$$\overline{R_6}=\int_0^1\frac{|R_6(x)|\,dx}{|1-0|}=3.2367\times10^{-3}$$

Örnek 4.2.4 Şimdi de tam çözümü $y(x)=\ln(x+4)$ olan

$$(x+4)^2 y''(x)-(x+4)y'(x)+y(x-1)-y'(x-1)=\ln(x+3)-\frac{1}{x+3}+3\ln 3-5\ln 5+\int_{-1}^{1} y(t)dt$$

denklemini $-1\le x\le 1$ aralığında , $y(0)=\ln 4$, $y'(0)=\frac{1}{4}$ koşullarıyla Euler sıralama yöntemi ile çözelim.

Katsayıları;

$$\begin{aligned}
&P_0(x)=0\\
&P_1(x)=-(\mathrm{x}+4)\\
&P_2(x)=(x+4)^2\\
&Q_0(x)=1 \quad \Rightarrow \mathrm{B}(1,-1)\\
&Q_1(x)=-1 \quad \Rightarrow \mathrm{B}(1,-1)
\end{aligned}$$

olan denklemde Euler polinomunu

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2} c_n E_n(x)$$

formunda , N=2 için $\{x_0=-1\ ,\ x_1=0\ ,\ x_2=1\}$ sıralama noktalarıyla çözmeliyiz.

$$\left\{\sum_{k=0}^{1} P_k X(M)^k T+\sum_{j=0}^{0} Q_j X\mathrm{B}(\alpha,\beta)(M)^j T-\lambda XKQT\right\}C=F$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_1XMT+P_2XM^2T+Q_0XB(1,-1)M^0T+Q_1XB(1,-1)M^1T \\ -\lambda XKQT \end{array}\right\}C=F$$

denkleminde aşağıdaki matrisleri yerlerine yazarsak;

$$P_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = I, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B}(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -4.5582 \\ -3.9861 \\ -3.6151 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{W}; F] = \begin{bmatrix} 0.015957 & 1.0106 & 0.59574 & ; & -4.5582 \\ 0.031915 & 0.031915 & 1.1915 & ; & -3.9861 \\ 0.031915 & 0.031915 & 0.19149 & ; & -3.6151 \end{bmatrix}.$$

arttırılmış matrisini elde ederiz.

$$[\mathrm{u}_0; \theta_0] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & ; & 1.38629 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{u}_1; \theta_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & ; & 0.25 \end{bmatrix}$$

Koşulların matrisini, bulduğumuz arttırılmış matristeki herhangi bir satırın yerine koyarsak;

$$[\tilde{W};\tilde{F}]=\begin{bmatrix} 0.015957 & 1.0106 & 0.59574 & ; & -4.5582 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 1.38629 \\ 0 & 1 & -1 & ; & 0.25 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris sistemini çözersek de katsayılar matrisi olan C matrisini elde ederiz.

$$C=\begin{bmatrix} 1.4846 \\ 0.19664 \\ -5.3359\times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Buradan sonuç,

$$y_2(x)\cong 0.25\text{x-5. }3359\times 10^{-2}x^2+1.3863$$

şeklinde bulunur. Diğer çözümleride benzer şekilde çözersek sonuçları aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$y_4(x)\cong 0.25x-3.1315\times 10^{-2}x^2+5.2265\times 10^{-3}x^3-8.134\times 10^{-4}x^4+1.3862$$

$$y_6(x)\cong 0.24976x-0.13826x^2-8.4267\times 10^{-3}x^3-2.0116\times 10^{-3}x^4$$

$$+1.1720\times 10^{-4}x^5-3.1503\times 10^{-5}x^6+1.3863$$

$$\overline{R_2}=\int_0^1 \frac{|R_2(x)|\,dx}{|1-0|}=1.0392$$

$$\overline{R_4}=\int_0^1 \frac{|R_4(x)|\,dx}{|1-0|}=4.2625\times 10^{-3}$$

$$\overline{R_6}=\int_0^1 \frac{|R_6(x)|\,dx}{|1-0|}=3.2367\times 10^{-3}$$

Örnek 4.2.5 Tam çözümü $y(x)=x-x^2+1$ olan

$$xy''(x)-xy'(x)+2y(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{15}(x+1)x^3-\frac{1}{10}(x-1)x^2-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}+\int_0^3(x+t)y(t)dt+\frac{1}{5}\int_0^x(x-t)y(t)dt$$

Fredholm-Volterra integro diferansiyel denklemini $0\le x,t\le 3$ aralığında ve $y(1)=1$, $y'(1)=1$ koşullarıyla Bernoulli sıralama yöntemi ile çözelim.

Denklemdeki fonksiyonlar;

$$P_0(x)=2\;,P_1(x)=-x\;,P_2(x)=0\;,\;P_3(x)=x$$

$$f(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{15}(x+1)x^3-\frac{1}{10}(x-1)x^2-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}$$

gibi olup, denklemdeki çekirdek fonksiyonları:

$$K(x,t)=x+t\;\;,\;\lambda_1=1$$

$$R(x,t)=x-t\;\;,\lambda_2=\frac{1}{5}$$

şeklindedir.

Burada N=2 için Bernoulli çözümü;

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}a_nB_n(x)$$

formunda bulmak sıralama noktaları; $\{x_0=0\;,\;x_1=\frac{3}{2},\;x_2=3\}$ değerlerini yerlerine yazıp temel matris denkleminde yerine yazalım.

$$\left\{\sum_{k=0}^{3}P_kX(M)^kG-\lambda_1XKQG-\lambda_2\overline{X}\overline{R}\overline{S}G\right\}A=F$$

$$\left\{P_0XM^0G+P_1XM^1G+P_3XM^3G-\lambda_1XKQG-\lambda_2\overline{X}\overline{R}\overline{S}G\right\}A=F$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&\frac{3}{2}&\frac{9}{4}\\1&1&1\end{bmatrix},\ P_0=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&-3\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

$$K=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}3&\frac{9}{2}&9\\\frac{9}{2}&9&\frac{81}{4}\\9&\frac{81}{4}&\frac{243}{5}\end{bmatrix},\ \lambda_1=1,\ G=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\bar{R}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ \bar{S}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\\frac{3}{2}&\frac{9}{8}&\frac{9}{8}\\\frac{9}{8}&\frac{9}{8}&\frac{81}{64}\\\frac{9}{8}&\frac{81}{64}&\frac{243}{160}\\3&\frac{9}{2}&9\\\frac{9}{2}&9&\frac{81}{4}\\9&\frac{81}{4}&\frac{243}{5}\end{bmatrix}$$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\frac{3}{2}&\frac{9}{4}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&3&9\end{bmatrix}$$

matrisler yerlerine koyulup çözüm yapılırsa W matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W=\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{31}{4} & -\frac{35}{3} \\ -\frac{289}{40} & \frac{-43}{4} & \frac{-19849}{960} \\ -\frac{62}{5} & -\frac{71}{5} & -\frac{454}{15} \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{u}_0;\theta_0]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & ; & 1\end{bmatrix}$$
$$[\mathrm{u}_1;\theta_1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & ; & 1\end{bmatrix}$$

Koşulların matrisini, bulduğumuz arttırılmış matristeki herhangi bir satırın yerine koyarsak ve matris sistemini çözersek de katsayılar matrisi olan A matrisini elde ederiz:

$$A=\begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Katsayılar,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2} a_n B_n(x)$$

de yerine yazılırsa $y(x)=x-x^2+1$ tam çözümü elde edilir.

Örnek 4.2.6 Şimdi,

$$xy''(x)-xy'(x)+2y(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{15}(x+1)x^3-\frac{1}{10}(x-1)x^2-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}+\int_0^3 (x+t)y(t)dt+\frac{1}{5}\int_0^x (x-t)y(t)dt$$

Fredholm-Volterra integro diferansiyel denkleminin $0 \le x,t \le 3$ aralığında ve $y(1)=1$, $y'(1)=1$ koşullarıyla tam çözümünün $y(x)=x-x^2+1$ olduğunu Euler sıralama yöntemi ile gösterelim.

Denklemdeki fonksiyonlar;

$$P_0(x)=2\ ,P_1(x)=-x\ ,P_2(x)=0\ ,\ P_3(x)=x$$

$$f(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{15}(x+1)x^3-\frac{1}{10}(x-1)x^2-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}$$

gibi olup, denklemdeki çekirdek fonksiyonları:

$$K(x,t)=x+t\ \ ,\ \lambda_1=1$$

$$R(x,t)=x-t\ \ ,\lambda_2=\frac{1}{5}$$

şeklindedir.

Burada N=2 için Euler çözümü;

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}c_nE_n(x)$$

formunda bulmak sıralama noktaları; $\{x_0=0\ ,\ x_1=\frac{3}{2},\ x_2=3\}$ değerlerini yerlerine yazıp temel matris denkleminde yerine yazalım.

$$\left\{\sum_{k=0}^{3}P_kX\left(M\right)^kT-\lambda_1XKQT-\lambda_2\bar{X}\bar{R}\bar{S}T\right\}C=F$$

$$\left\{P_0XM^0T+P_1XM^1T+P_3XM^3T-\lambda_1XKQT-\lambda_2\bar{X}\bar{R}\bar{S}T\right\}C=F$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&\frac{3}{2}&\frac{9}{4}\\1&1&1\end{bmatrix},\ P_0=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&-3\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

$$K=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}3&\frac{9}{2}&9\\\frac{9}{2}&9&\frac{81}{4}\\9&\frac{81}{4}&\frac{243}{5}\end{bmatrix},\ \lambda_1=1,\ T=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\bar{R}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ \bar{S}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\\frac{3}{2}&\frac{9}{8}&\frac{9}{8}\\\frac{9}{8}&\frac{9}{8}&\frac{81}{64}\\\frac{9}{8}&\frac{81}{64}&\frac{243}{160}\\3&\frac{9}{2}&9\\\frac{9}{2}&9&\frac{81}{4}\\9&\frac{81}{4}&\frac{243}{5}\end{bmatrix}$$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\frac{3}{2}&\frac{9}{4}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&3&9\end{bmatrix}$$

matrisler yerlerine koyulup çözüm yapılırsa W matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&-\frac{31}{4}&-\frac{45}{4}\\-\frac{289}{40}&\frac{-43}{4}&\frac{-6231}{320}\\-\frac{62}{5}&-\frac{71}{5}&-\frac{141}{5}\end{bmatrix}$$

$$[u_0;\theta_0]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0 & ; & 1\end{bmatrix}$$

$$[u_1;\theta_1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & ; & 1\end{bmatrix}$$

Koşulların matrisini, bulduğumuz arttırılmış matristeki herhangi bir satırın yerine koyarsak ve matris sistemini çözersek de katsayılar matrisi olan C matrisini elde ederiz:

$$C=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Katsayılar,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{2}c_n E_n(x)$$

de yerine yazılırsa $y(x)=x-x^2+1$ tam çözümü elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kullanılan Bernoulli ve Euler polinomlarına dayalı Matris –Sıralama yöntemleri, diferansiyel, gecikmeli diferansiyel, diferansiyel fark ve Volterra-Fredholm tipindeki integro-diferansiyel denklemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar, lineer olması halinde , bu sonuçların hem hızlı bir ¸sekilde elde edilebilmesi, hem de benzer yöntemlere göre genel olarak daha iyi sonuçlar vermesi bakımından oldukça kullanılışlıdır. Ayrıca, tam çözümün polinom olması durumunda, yöntemin bu çözümü bulması, önemli sayılabilecek bir özelliktir; bu durum Örnek 4.1.1 , Örnek 4.1.2, Örnek 4.1.9, Örnek 4.1.10, Örnek 4.2.1, Örnek 4.2.2 , Örnek 4.2.5 ve Örnek 4.2.6 de görülmektedir.

Diğer yandan, üstel, trigonometrik ve logaritmik problemlerde, özellikle gecikmeli Volterra ve Fredholm türü problemlerde, hem çözüme ulasılma süresi çok uzamakta, hem de yaklaşık çözümün rezidüel değerlerinin bulunması, N'nin küçük değerleri için dahi hatanın hesaplanması ve dolayısıyla yaklaşık çözümün bulunması zorlaşmaktadır. Daha büyük N değerleri için ise, hem yöntemin sonuç vermesi uzun sürmekte hem de elde edilen rezidüel fonksiyonu her zaman daha iyi olmamaktadır; bu durum Örnek 4.1.5 , Örnek 4.1.6, ve Örnek 4.1.7 nin sonuçları ile beraber tablo ve grafiklerden görülmektedir. Bahsedilen bazı bu dezavantajların yanında, Bernoulli ve Euler matris –sıralama yöntemleriyle, genellikle N kesme sınırının artması halinde, elde edilen çözümlerin tam çözüme oldukça yakın olduğu da gözlenmiştir(Örnek 4.1.3, Örnek 4.1.4, Örnek 4.2.3 ve Örnek 4.2.4). Aynı zamanda Bölüm 4 de verilen örneklerde, sunulan matris-sıralama yöntemlerinin uygulanabilirliğini ve sonuçların doğruluğunu göstermek için kullanılan "rezidüel(kalan) fonksiyon ve Ortalama Değer Teoremine" dayalı hata tekniği yardımı ile, problemin tam çözümü bilinmediği durumlarda bile, elde edilen yaklaşık çözümlerde yapılan hataların üst sınırları tahmin edilebilmektedir. Bu da yöntemin ve dolayısıyla çalışmanın önemli sonuçlarından birisidir.

Bu yorumlara ve sonuçlara göre, bahsedilen matris-sıralama yöntemleri geliştirilerek, lineer olmayan gecikmeli, adi ve kısmi türevleri içeren problemlere, aynı zaman sistemlere de uygulanabilir olduğu düşünülebilir.

KAYNAKLAR

[1] Gülsu, M., Sezer, M., A Taylor Collocation Method for Solving High-Order Linear Pantograph Equations with Linear Functional Argument, Number. Methods Partial Differential Eq. 27 (2011) 1628–1638.

[2] Evans, D. J., Raslan, K. R., The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, Int. J. Comput. Math. 82 (2005) 49–54.

[3] El-Safty, A., Salim, M. S., El-Khatib, M. A., Convergence of the spline function for delay dynamic system, Int. J. Comput. Math. 80 (2003) 509–518.

[4] Biazar, J., . Ghanbari, B., The homotopy perturbation method for solving neutral functional–differential equations with proportional delays, J. King Saud Univ. Sci. 24 (1) (2012) 33-37.

[5] Bellen, A., Zennaro, M., Numerical methods for delay differential equations, Numerical Mathematics and Scientific Computation, The Clarendon Press Oxford University Press, NewYork, 2003.

[6] Dehghan, M., Shakeri, F., The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, Phys. Scr. 78 (2008) 11 pages (Article No. 065004).

[7] Chen, X., Wang, L., The variational iteration method for solving a neutral functional–differential equation with proportional delays, Comput. Math. Appl. 59 (8) (2010) 2696–2702.

[8] Adomian, G., Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994.

[9] Adomian, G., A review of the decomposition method in applied mathematics, J. Math. Anal. Appl. 135 (1988) 501–544.

[10] Wang, X., Wildman, R. A., Weile, D. S., Monk ,P., A finite difference delay modeling approach to the discretization of the time domain integral equations of electromagnetics, Ieee Transactions on Antennas and Propagatıon. 56 (8) (2008) 2442-2452.

[11] Oğuz, C.,Sezer, M., Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 259 (2015) 943-954.

[12] Yüzbaşı, Ş., Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 232 (2014) 1183–1199.

[13] Gürbüz, B., Sezer, M., Güler, C., Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments, J. Appl. Math. 2014 (2014), Article ID 682398, 12 pages.

[14] Gülsu, M., Öztürk, Y., Sezer, M., A new Chebyshev polynomial approximation for solving delay differential equations, J. Differ. Equ. Appl. 18 (6) (2012) 1043-1065.

[15] Erdem, K., Yalçınbaş, S., Sezer, M., A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations, J. Differ. Equ. Appl. 19 (10) (2013) 1619-1631.

[16] Şahin, N., Yüzbaşı, Ş., Sezer, M., A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro- differential–difference equations, Int. J. Comput. Math. 88 (14) (2011) 3093-3111.

[17] Çelik, İ., Collacation method and residual correction using Chebyshev series, Appl. Math. Comput. 174 (2006) 910–920.

[18] Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., Sezer, M., A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential–difference equations using Dickson polynomials, Appl. Math. Comput. 276 (2016) 324–339.

[19] Yalcınbas, S. ¸ Sezer, M., Sorkun, H.H., Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 210 (2009), pp. 334–349.

[20] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Sezer, M., A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations in the most general form, Int. J. Comput. Math. 84 (4) (2007) 527–539.

[21] Sezer, M., Taylor polynomial solution of Volterra integral equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 25 (1994) 625–633.

[22] Gök, E. Gecikmeli Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri İçin Müntz-Legendre Sıralama Yöntemi. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2016, 127 s. (Doktora Tezi).

[23] Gürbüz, B., Sezer, M., Güler, C., Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments, J. Appl. Math. 2014 Article ID 682398, 12 pages.

[24] Kürkçü ,Ö.K., Aslan, E., Sezer, M., İlhan, Ö., A numerical approach technique for solving generalized delay integro-differential equations with functional bounds by means of Dickson Polynomials, Inter.J.Comput. Methods, 15(5) 2018, 24 pages.

[25] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Sezer, M. , Bernoulli collocation method for high-order generalized pantograph equations,New Trends in Math.Sciences,3(2)(2015)96-109.

[26] Tohidi, E., Soleymani, F., Kilicman, A., Robustness of operational matrices of differentiation for solving state-space analysis and optimal control problems. Abstr. Appl. Anal. 2013, 535979 (2013)

[27] Toutounian, F., Tohidi, E., Shateyi, S., A collocation method based on Bernoulli operational matrix for solving high order linear complex differential equations in a rectangular domain. Abstr. Appl. Anal., Article ID 823098 (2013)

[28] Toutounian, F., Tohidi, E., A new Bernoulli matrix method for solving second order linear partial differential equations with the convergence analysis. Appl. Math. Comput. 223, 298–310 (2013)

[29] Djordjevic, G. B. Milovanovic, G. V., Special classes of polynomias, University of Nis. Faculty of Technology, Leskovac –order, 2014, 211 s.

[30] Mirzaee, F., Bimes, L. Tohidi,E., A numerical framework for solving high order pantograph delay Volterra integro-differential equations, Kuwait Sci. 43(1) (2016) 69-83.

[31] Rashed,M.T., Numerical solution of functional differential, integral and integro- differential equations, Appl. Math. Comput.156 (2004) 485-492.

[32] Reutskiy ,S.Yu., The backward substitution method for multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type, Journal of Computational and Applied Mathematics, 296, (2016), 724–738.

[33] Reutskiy, S.Yu., A new collocation method for approximate solution of the pantograph functional differential equations with proportional delay, Appl.Math.Comput., 266 (2015), 642–655.

[34] Bhrawy, A.H., Assas, L.M., Tohidi, E., Alghamdi, M.A., A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional differential equations with proportional delays,Advances in Difference Equations,2013,2013:63

[35] Heydari, M., Loghmani, G.B., Hosseini ,S.M., Operational matrices of Chebyshev cardinal functions and their aplication for solving delay differential equations arising in elektrodynamics with error estimation,Appi.Math.Model.37 (2013) 7789-7809

[36] Sedaghat ,S., Ordokhani ,Y., Dehghan ,M., Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials,Common Nonlinear Sci Numer Simulat,17 (2012) 4815-4830.

[37] Wang ,W.S., Li ,S.F., On the one-leg Q-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations,Appl.Math.Comput.193 (1) (2007) 285-301

[38] Dai ,C., Zhang ,J., Jacobian elliptic function method for nonlinear differential difference equations, Caos,Soliton Frac. 27 (2006) 1042-1047.

[39] Arıkoğlu ,A., Özkal, I., Solution of differential equations by using differential transform method, Appl.Math.Comput. 174 (2006) 1216-1228

[40] Maleknejad ,K., Mahmoidi, Y., Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions, Appl. Math. Comput. 149 (2004) 799–806.

[41] Işık ,O. R., Güney, Z., Sezer ,M., Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, J. Difference Equations and Applications 18(3) (2012) 357-374.

[42] Rashed, M.T., Numerical solutions of functional integral equations, Applied Mathematics and Computation 156 (2004) 507–512,

[43] Firouzdora ,R., Khoob ,A. H., Mollaramezani, Z., Numerical solution of functional integral equations by using B-splines, Journal of Linear and Topological Algebra Vol. 01, No. 01, 2012, 45- 53.

[44] Li ,D., Liu, M. Z., Runge-Kutta methods for the multi-pantograph delay equation, Appl. Math. Comput. 163(1) (2005) 383-395.

[45] Balcı ,M.A., Sezer, M., Numerical approach based on exponential polinomials for solving of Fredholm Integro-Differential-Difference equations, New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI 3, No. 2, 44-54 (2015).

[46] Bahşı ,M.M., Çevik ,M., Sezer, M., Orthoexponential polynomial solutions of delay pantograph differentialequations with residual error estimation, Applied Mathematics and Computation,271(2015) 11-21.

[47] Balcı ,M.A., Sezer ,M., Hybrid Euler-Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations, Applied Mathematics and Computation, vol. 273, pp. 33–41, 2016.

[48] Baykuş Savaşaneril ,N., Sezer, M., "Hybrid Taylor–Lucas Collocation ethod for Numerical Solutional of High-Order,Pantograph Type Delay Differential Equations with Variables Delays," *Appl.Math. Inf. Sci.*, vol. 11, no. 6, pp. 1795–1801, 2017.

[49] Cheon,G-S., A note on the Bernoulli and Euler Polynomials, Appl. Math.Letters 16(2003) 365-368.

[50] Chu, W.,Shou, R.R., Convolutions of Bernoulli and Eule polynomials, Sarajevo Journal of Mathematics, 6(18), (2010) 147-163.

[51] Şahin,M., Sezer,M., Pell-Lucas Collocation Method for Solving High-Order Functional Differential Equations with Hybrid Delays, Celal Bayar University Journal of Science, 2018, 14(2), 141-149.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ezgi Şaşmaz

Doğum Yeri ve Yılı : İZMİR / 1989

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ezgisasmaz1989@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : İnönü Lisesi / Açıköğretim Lisesi ; 2007

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü (devam ediyor)