T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

FARKLI TİPTEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YARI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN OPTİMAL PERTURBASYON İTERASYON YÖNTEMİ

Sinan DENİZ

Danışman
Prof. Dr. Necdet BİLDİK

MANİSA-2018

TEZ ONAYI

Sinan DENİZ tarafından hazırlanan **"Farklı Tipten Diferansiyel Denklemlerin Yarı Analitik Çözümleri İçin Optimal Perturbasyon İterasyon Yöntemi"** adlı tez çalışması 18.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Necdet BİLDİK** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ** Ege Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Urfat NURİYEV** Ege Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç.Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Sinan DENİZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ADM	Adomian Ayrışım Metodu
DTM	Diferansiyel Değişim Metodu
OPIA	Optimal Perturbasyon İterasyon Algoritması
OPIM	Optimal Perturbasyon İterasyon Metodu
PIA	Perturbasyon İterasyon Algoritması
PIM	Perturbasyon İterasyon Metodu
VIM	Varyasyonel İterasyon Metodu
ε	Perturbasyon parametresi
u_0	Verilen şartları sağlayan başlangıç fonksiyonu
u_c	Düzeltme terimi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLO DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübesiyle her zaman destek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca doktora çalışmam boyunca beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK ile manevi desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olan canım aileme ve sevgili eşime teşekkür etmeyi borç bilirim.

Sinan DENİZ
Manisa, 2018

ÖZET

Doktora Tezi

Farklı Tipten Diferansiyel Denklemlerin Yarı Analitik Çözümleri İçin Optimal Perturbasyon İterasyon Yöntemi

Sinan DENİZ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necdet BİLDİK

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bilim dünyasındaki yeri ve öneminden bahsedilmiştir. Ayrıca bu denklemleri çözmek için önerilen metotlar hakkında genel bilgiler ile bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, perturbasyon iterasyon metodu yeniden ele alınarak optimal perturbasyon iterasyon algoritmalarının inşası için temel hazırlanmıştır.

Üçüncü bölümde, optimal perturbasyon iterasyon metodu tanıtılarak adi ve kısmi diferansiyel denklemler için yeni algoritmalar oluşturulmuştur.

Dördüncü bölümde, literatürde sıklıkla karşılaşılan diferansiyel denklemler bir önceki bölümde elde edilen algoritmalarla çözülerek bu denklemlere yeni yaklaşımlar bulunmuştur. Bulunan bu çözümler diğer metotlar ile karşılaştırılarak, optimal perturbasyon iterasyon metodunun etkinliği ve güvenilirliği test edilmiştir.

Beşinci bölümde ise yeni oluşturulan optimal perturbasyon iterasyon metodunun diğer metotlara nazaran üstün ve eksik yanları tartışılarak yeni keşfedilebilecek olan yöntemler için bazı öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Optimal perturbasyon iterasyon metodu, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, yakınsaklık, rezidü.

2018, 98 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Optimal Perturbation Iteration Method for Semi Analytical Solutions of Different Types of Differential Equations

Sinan DENİZ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Necdet BİLDİK

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is introduction chapter. In this chapter, the place and importance of non-linear differential equations in scientific world is mentioned. In addition, general information about the proposed methods for solving these equations and some basic definitions and theorems are given.

In the second chapter, the perturbation iteration method is re-examined and the basis for the construction of the optimal perturbation iteration algorithms is prepared.

In the third chapter, the optimal perturbation iteration method is introduced and new algorithms are developed for both ordinary and partial differential equations.

In the fourth chapter, the differential equations frequently encountered in the literature are solved with the algorithms obtained in the previous section and new approaches to these equations are found. By comparing these solutions with other methods, the effectiveness and reliability of the optimal perturbation iteration method are tested.

In the fifth chapter, some suggestions are given for the methods that can be discovered by discussing the superior and missing aspects of the newly discovered optimal perturbation iteration method compared to other methods.

Keywords: Optimal perturbation iteration method, ordinary and partial differential equations, convergence, residual.

2018, 98 pages

1. GİRİŞ

Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler bilim dünyasının en önemli kilometre taşlarından birisidir. Fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi birçok alanda ortaya çıkan olayların modellenmesi de yine diferansiyel denklemler yardımıyla mümkün olmaktadır. Bu tür olaylar modellenirken ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin bazıları lineer iken birçoğu ise lineer değildir. Lineer ya da diğer bir deyişle doğrusal denklemlerin çözümleri için birçok analitik metot geliştirilmiştir ve bu metotlar yardımıyla lineer diferansiyel denklemlerin büyük bir kısmının çözümüne kolaylıkla ulaşılabilmektedir. Fakat bu durum lineer olmayan diferansiyel denklemler için geçerli değildir. Tam tersi olarak lineer olmayan diferansiyel denklemlerin büyük bir kısmı için genel bir çözüm öneren yöntem bulunmamaktadır. İşte bu tür durumlarda, nümerik ve yarı-analitik metotlar bu tipteki denklemlerin çözümüne hiç değilse yaklaşık olarak ulaşabilmek için literatüre girmiştir. Günümüze kadar bilimsel olarak oldukça önem arz eden diferansiyel denklemlerin çoğu farklı tipteki nümerik ve yarı analitik yöntemler ile çözülmüştür. Son yüzyılda ortaya çıkan bu metotlardan bazıları Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Diferansiyel Değişim Metodu (DTM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM), Homotopi Analiz Metodu (HAM) ve Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM) olarak verilebilir. Bu metotlar yardımıyla çözümleri analitik olarak bulunamayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir [1–6].

Yukarıda sözü edilen metotların birbirlerine karşı kesin bir üstünlüğünün olduğunu söylemek mümkün değildir. Çünkü problem çeşidi değiştikçe herhangi bir metodun çözüme yakınsama hızı ve bölgesi de değişebilmektedir. Diğer bir deyişle, bir problemin yaklaşık çözümü için bir metot daha iyi sonuç verirken başka bir problemde bu metot daha etkisiz kalabilmektedir. Bu durumun literatürde birçok örneği olduğu gibi bazı yazarlar arasında tartışma konusu bile olmuştur. Ji Huan He, 2004 yılında yayınladığı makalesinde Homotopi Perturbasyon Metodunun (HPM), Homotopi Analiz Metoduna göre daha üstün olduğunu gösteren örnekler vermiştir [7]. Buna karşın Shijun Liao, 2005 yılında aynı dergide basılan bir araştırmasında Homotopi Analiz Metodunun daha iyi sonuçlar vereceğini yine örnekler vererek ileri sürmüştür [8]. Aynı yazar [9] referansında yukarıda sözü edilen nümerik metotların aslında Homotopi Analiz metodunun birer örneği olduğunu söylemektedir.

Literatürde var olan diferansiyel denklemlerin dışında her geçen gün farklı tipte yeni diferansiyel denklemler türetilmekte ve bu denklemlere de yeni yaklaşımlar aranmaktadır. Bunun yanısıra uygulamalı matematik alanında sıkça kullanılan ve çözümleri araştırılan farklı tipteki diferansiyel denklemler için daha büyük bölgede geçerli çözüm verebilecek yeni metotlar da elde edilmeye çalışılmaktadır. Yukarıda bahsi geçen klasik metotların modifiye edilmesi ya da farklı metotların özelliklerini bir araya getirmek suretiyle daha etkilli yöntemler de elde edilebilmektedir. Örneğin Modifiye Adomian Ayrışım Metodu (MADM) ve Modifiye Varyasyonel İterasyon Metodu (MVIM) ile daha önce çözülen problemlere daha kısa sürede daha hassas çözümler veren farklı yaklaşımlarla yeni çözümler önerilmektedir [10, 11]. Benzer şekilde Homotopi Analiz metodunun geliştirilmişi olan Optimal Homotopi Analiz Metodunun ve bunun yanında son yıllarda ortaya çıkan Perturbasyon İterasyon Metodunun (PIM) farklı tipteki diferansiyel denklemlere uygulanması özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için büyük yenilikleri beraberinde getirmektedir [12, 13].

Bu tez çalışmasında Perturbasyon İterasyon Metodunun (PIM) iyileştirilmesiyle özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlere daha iyi yaklaşımlar öneren ve literatürde ilk defa yer alacak olan Optimal Perturbasyon İterasyon Metodu (OPIM) tanıtılacaktır. Bu amaçla öncelikle 1. bölümde temel tanım ve teoremler verilerek perturbasyon kavramına değinilecek, 2. ve 3. bölümlerde ise sırasıyla adi ve kısmi diferansiyel denklemler için perturbasyon iterasyon ve Optimal Perturbasyon İterasyon Algoritmaları (OPIA) sunulacaktır. Ele alınan problemlerin çözüm aralıklarını genişletecek ve böylelikle yaklaşımlardaki hatayı da en aza indirgeyecek olan yardımcı parametrelerin bulunma yöntemlerinden bahsedilecektir. 4. bölümde ise farklı birçok bilimsel olayları temsil eden diferansiyel denklemler OPIM ile çözülerek elde edilen sonuçların kapsamlı değerlendirmeleri ve diğer metotlar ile karşılaştırmaları yapılacaktır.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda ilerleyen bölümlerde gerekli olacak bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1. (**Metrik Uzay**)

X boştan farklı bir cümle olsun. $d : X \times X \to R$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını (aksiyomlarını) sağlıyor ise d ye X üzerinde bir **metrik** ve d ile birlikte X'e **metrik uzay** denir ve genel olarak (X,d) veya X_d notasyonlarıyla gösterilir [14].

Tanım 1.1.2. (**Normlu Uzay**)

X bir vektör uzayı olsun. $N : X \to R$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

1) $N(x) \geq 0$ ve $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$

3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme **norm** denir. Üzerinde bir norm tanımlanmış X uzayı ise **normlu uzay** olarak adlandırılır [14]. N norm dönüşümü yerine sıklıkla $\|.\|$ sembolü kullanılır.

Tanım 1.1.3. (**Yakınsak Dizi**)

(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$varsa (x_n) dizisine X de **yakınsak dizi** ve x'e ise bu **dizinin limiti** denir [14].

Tanım 1.1.4. (**Cauchy Dizisi**)

(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** (esas dizi) denir [14].

NOT: Bir metrik uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisi olduğu halde her Cauchy dizisinin bu uzaya ait bir limitinin olduğunu söylenemez. Eğer her Cauchy dizisinin limiti uzaya aitse bu uzaya **tam metrik uzay** adı verilir [14].

Tanım 1.1.5. (**Banach Uzayı**)

Üzerinde bir norm tanımlanmış ve bütün Cauchy dizilerinin yakınsadığı vektör uzayına **Banach Uzayı** denir. Banach uzayı, tam normlu uzay olarak da bilinir.

Tanım 1.1.6. (X,d) bir metrik uzay olsun. $r > 0$ bir reel sayı ve $x_0 \in X$ olmak üzere

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar**,

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı yuvar**,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir [14].

Tanım 1.1.7. (**Sabit Nokta**)

X boş olmayan bir cümle ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan x elemanına T'nin bir **sabit noktası** denir. Bir fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olabilir ya da bir sabit noktası olmayabilir veya birden çok sabit noktası bulunabilirdir [14].

Tanım 1.1.8. (**Daralma Fonksiyonu**)

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 < a < 1$ varsa, T'ye bir **daralma (büzülme)** fonksiyonu adı verilir [14].

Teorem 1.1.1. (**Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Teoremi**)

$f \in C[a, b]$ fonksiyonu için $f, f', \cdots, f^{(n)}$ türevleri $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f^{(n+1)}$, $[a, b]$'de mevcut olsun. Her $t_0, t \in [a, b]$ için t_0 ve t arasında

$$P_n(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$$

ve

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}$$

olmak üzere

$$f(t) = P_n(t) + R_n(t)$$

eşitliğini sağlayan bir ξ sayısı vardır. Burada $P_n(t)$, f fonksiyonunun t_0 civarındaki n. **Taylor polinomu** ve $R_n(t)$ ise $P_n(t)$'ye bağlı olarak ortaya çıkan **kalan terim**dir.

Her $t \in [a, b]$ için $n \to \infty$ iken $R_n(t) \to 0$ ise, t_0 civarında tanımlanan **Taylor serisi** bu aralıkta f'e yakınsar denir ve

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$$

şeklinde yazılır [15, 16] .

Teorem 1.1.2. (**İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Teoremi**)

$f = f(x,t)$ fonksiyonu ve $f, f', \cdots, f^{(n+1)}$ kısmi türevleri merkezi (x_0, t_0) noktasında olan dikdörtgensel açık bir R bölgesinde sürekli olsunlar. Bu durumda $f = f(x,t)$ fonksiyonunun R bölgesi için (x_0, t_0) noktası civarındaki Taylor açılımı

$$\begin{aligned}
&f(x_0 + h, t_0 + k) = f(x_0, t_0) + (hf_x + kf_t)\big|_{(x_0,t_0)} + \\
&\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xt} + k^2 f_{tt}\right)\Big|_{(x_0,t_0)} + \\
&\frac{1}{3!}\left(h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxt} + 3hk^2 f_{xtt} + k^3 f_{ttt}\right)\Big|_{(x_0,t_0)} + \cdots + \\
&\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial t}\right)^n f\Bigg|_{(x_0,t_0)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(x_0+ch,t_0+ck)}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

olarak verilir [16]. Burada ilk n terimdeki türevler (x_0, t_0)'da hesaplanırken son terim (x_0, t_0) ile $(x_0 + h, t_0 + k)$'yı birleştiren doğru parçası üzerindeki bir $(x_0 + ch, t_0 + ck)$ noktasında hesap edilir.

1.2. Perturbasyon Kavramı ve İterasyon Algoritması

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözmenin oldukça zor, hatta çoğu zaman imkansız olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte birçok önemli bilimsel olayın modellenmesi sonucu ortaya çıkan denklemlerin lineer olmadığı da büyük bir gerçektir. İşte bu tür denklemlere bağlı olan daha basit problemlerin çözümleriyle, karmaşık yapıdaki problemin çözümlerini elde etme ya da bunları anlama gayreti içerisinde olma sonucunda perturbasyon metotları ortaya çıkmıştır. Bu metotlarda ana fikir, yaklaşık çözümlerin tam çözümlerden sapma miktarını tayin eden yapay bir parametrenin modellenen problemin içerisine gömülmesi ve bu şekilde ortaya çıkan yeni denklemin çözülmesi prensibidir. Buradaki yapay parametre genellikle ε ile temsil edilmekte ve perturbasyon parametresi olarak adlandırılmaktadır. Perturbasyon parametresi ε yardımıyla yaklaşık çözümleri elde etmek için

$$u = u_0 + \varepsilon (u_c)_1 + \varepsilon^2 (u_c)_2 + \cdots \tag{1.2}$$

kuvvet serisi oluşturulur. Burada u problemin tam çözümü, u_0 başlangıç şartlarını sağlayan problemin O(1) mertebeden çözümü ve $(u_c)_1, (u_c)_2, \ldots$ ler ise düzeltme terimleridir. (1.2) pertürbasyon seri açılımı ifadesine **yaya açılımı** ya da **direkt açılım** da denmektedir. Yaya açılımındaki ilk iki terimden sonraki ifadeler kesilere (ihmal edilerek) metot uygulanırsa tek düzeltme terimli ilk yaklaşık perturbasyon çözümüne ulaşılmaktadır.

Örnek 1.2.1.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \tag{1.3}$$

Duffing denkleminin [17]

$$u(0) = 1, u'(0) = 0 \tag{1.4}$$

başlangıç şartları altında (1.2) direkt açılım yöntemi ile çözümünü inceleyelim.

$\varepsilon = 0$ için (1.3) denklemi

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \tag{1.5}$$

lineer denklemine dönüşür ve klasik metotlar yardımıyla bu denklemin çözümü

$$u_0 = \cos t \tag{1.6}$$

olarak elde edilir. Bu çözüme sıfırıncı mertebe çözüm de denir. ε'nun çok küçük fakat sıfırdan farklı olduğu durumlar içinse tek düzeltme terimli

$$u = u_0 + \varepsilon (u_c)_1 + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{1.7}$$

seri açılımı (1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&[u_0 + \varepsilon (u_c)_1 + O\left(\varepsilon^2\right)]'' + \\ &u_0 + \varepsilon (u_c)_1 + O\left(\varepsilon^2\right) + \varepsilon\left[u_0 + \varepsilon (u_c)_1 + O\left(\varepsilon^2\right)\right]^3 = 0\end{aligned} \tag{1.8}$$

bulunur. Bu ifade ε'nun kuvvetlerine göre uygun olarak düzenlenirse

$$u_0'' + u_0 + \varepsilon\left((u_c)_1'' + (u_c)_1 + u_0^3\right) + O\left(\varepsilon^2\right) = 0 \tag{1.9}$$

denklemine ulaşılır. u_0 'ın (1.9) denkleminde yerine konulmasıyla ortaya çıkan ifade düzenlenerek iterasyona devam edilebileceği gibi (1.9) denkleminde ε'nun derecelerini karşılıklı olarak eşitlenmesiyle de $(u_c)_1$ elde edilebilecektir. ε^1 katsayına sahip terimler göz önüne alınırsa

$$(u_c)_1'' + (u_c)_1 + \cos^3 t = 0 \tag{1.10}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin verilen başlangıç şartları altındaki çözümü

$$(u_c)_1 = \frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32}\cos t - \frac{1}{32}\cos 3t \tag{1.11}$$

dir. Sonuç olarak (1.3) denkleminin verilen direkt açılım metodu ile 1. mertebe perturbasyon çözümü

$$u = u_0 + \varepsilon(u_c)_1 = \cos t + \varepsilon\left(\frac{3}{8}t\sin t + \frac{1}{32}\cos t - \frac{1}{32}\cos 3t\right) \tag{1.12}$$

biçimindedir. 2. mertebe çözümler için (1.2) açılımdan 2 düzeltme terimi alınarak da çözüme devam edilebilirdir. Burada unutulmaması gereken bu çözümlerin ε'nun çok küçük değerleri için geçerli olduğudur. Bunun yanında literatürde Lindstedt-Poincare metodu, çoklu ölçekler metodu gibi perturbasyon metotları kullanılarak farklı çözümlerin de yer aldığı görülür [17].

2. PERTURBASYON İTERASYON METODU

2010 yılının başlarında Pakdemirli ve arkadaşları bilinen klasik perturbasyon metodunu modifiye ederek yeni bir yöntem olan perturbasyon iterasyon metodunu (PIM) inşa etmişlerdir. Bu metot son zamanlarda etkin bir biçimde güçlü nonlineer sistemlere uygulanmış ve tam çözümler ile oldukça uyumlu olan yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir [13, 18–20]. Perturbasyon iterasyon metodu, düzeltme terimlerinin sayısı (n) ve Taylor açılımındaki türevlerin derecelerine (m) göre oluşturulan algoritmalar ile sınıflandırılmakta ve bu algoritmalar kısaca PIA (n, m) olarak adlandırılmaktadır. Burada unutulmaması gereken önemli bir nokta ise $n \leq m$ eşitsizliğinin gerekliliğidir. Aksi halde elde edilen algoritmalar bir çözüm öneremeyeceklerdir. Bu tez çalışmasında tüm algoritmalarda tek düzeltme terimli açılımlar kullanılacak ve dolayısı ile $n = 1$ alınacaktır.

Bu bölümde PIM hakkında temel bilgiler verilerek bu metodun birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlere uygulanması gözden geçirilecektir. Daha sonra ise bu metodun kısmi diferansiyel denklemlere uyarlanması için bazı modifikasyonlar önerilecektir.

2.1. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler İçin Perturbasyon İterasyon Algoritmaları

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin kapalı formdaki temsili

$$F(u', u, \varepsilon) = 0 \tag{2.1}$$

olarak verilir. Burada $u = u(t)$ verilen denklemin tam çözümü ve ε ise denklemde yer alan ya da yapay olarak yerleştirilen pertürbasyon parametresidir. Pertürbasyon iterasyon metodunun tek düzeltme terimli algoritmalarını oluşturmak için klasik perturbasyon açılımdan yalnızca bir düzeltme terimi

$$u = u_n + \varepsilon(u_c)_n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

şeklinde alınır. (2.2) denkleminin (2.1)'de yerine yazılması ile

$$F(u_n{}' + \varepsilon(u_c')_n, u_n + \varepsilon(u_c)_n, \varepsilon) = 0 \tag{2.3}$$

ifadesi elde edilir. Bu adımdan sonra, tek düzeltme terimli m. dereceden perturbasyon iterasyon algoritmalarını ya da kısaca PIA(1,m)' leri elde etmek için verilen problemdeki bağımlı değişken ve onların türevleri farklı birer değişken olarak değerlendirilecektir. (2.3) denkleminin $\varepsilon = 0$ civarında sadece birinci mertebe türevlere kadar seriye açılmasıyla:

$$F + F_u(u_c)_n\varepsilon + F_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + F_\varepsilon\varepsilon = 0 \tag{2.4}$$

ve ikinci mertebe türevlere kadar seriye açılmasıyla:

$$\begin{aligned} &F + F_u(u_c)_n\varepsilon + F_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + F_\varepsilon\varepsilon + F_{u'u}(u'_c)_n(u_c)_n\varepsilon^2 + \frac{F_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2}{2} + \\ &\frac{F_{u'u'}(u'_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + \frac{F_{uu}(u_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + F_{u'\varepsilon}(u'_c)_n\varepsilon^2 + F_{u\varepsilon}(u_c)_n\varepsilon^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

denklemleri elde edilir. (2.4) ve (2.5) ifadeleri sırasıyla birinci mertebeden diferansiyel denklemler için **PIA(1,1)** ve **PIA(1,2)** dir. Burada

$$\begin{aligned} F &= F\left(u'_n, u_n, 0\right), & F_{uu'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}\left(u'_n, u_n, 0\right), \\ F_u &= \frac{\partial F}{\partial u}\left(u'_n, u_n, 0\right), & F_{u\varepsilon} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \varepsilon}\left(u'_n, u_n, 0\right), \\ F_{u'} &= \frac{\partial F}{\partial u'}\left(u'_n, u_n, 0\right), & F_{u'\varepsilon} &= \frac{\partial F}{\partial u' \partial \varepsilon}\left(u'_n, u_n, 0\right), \\ F_\varepsilon &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\left(u'_n, u_n, 0\right), & F_{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^2}\left(u'_n, u_n, 0\right), \\ F_{uu} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(u'_n, u_n, 0\right), & F_{u'u'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}\left(u'_n, u_n, 0\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

olmak üzere tüm türevlerin ve fonksiyonların $\varepsilon = 0$ noktasındaki değerlerinin hesaplandığı unutulmamalıdır. Dikkat edileceği üzere, (2.4) ve (2.5) denklemleri $(u_c)_n$' ye göre birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Başlangıç değerleri yardımıyla seçilen u_0 başlangıç fonksiyonunun ve klasik metotların yardımıyla ilk düzeltme terimi $(u_c)_0$, PIA(1,1) ve PIA(1,2) denklemlerinden elde edilir. Bu düzeltme teriminin u_0'a eklenmesiyle tam çözüme daha yakın olan u_1 bulunur. Bu durum kısaca

$$u_1 = u_0 + \varepsilon(u_c)_0 \tag{2.7}$$

olarak gösterilir. Burada u_1 tek düzeltme terimli birinci mertebeden PIA yaklaşık çözümü, $(u_c)_0$ ise ilk düzeltme terimini ifade etmektedir. u_1' in denklem (2.4) de başlangıç ya da deneme fonksiyonu olan u_0'ın yerine kullanılmasıyla yapılan yaklaşım daha da iyileşecektir. Bu işlemlerden genel bir iterasyonu şu şekilde çıkarabiliriz:

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n. \tag{2.8}$$

Burada $n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere iterasyon sayısını ve aynı zamanda da yaklaşımın derecesini göstermektedir. n yeterince büyük alınırsa istenilen derecede yaklaşık sonuçlar elde etmek mümkün olacaktır.

2.2. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler İçin Perturbasyon İterasyon Algoritmaları

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin kapalı formda genel formu

$$F(u'', u', u, \varepsilon) = 0 \tag{2.9}$$

biçiminde gösterilir.Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi (2.2) ifadesi (2.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$F(u_n{}'' + \varepsilon(u_c'')_n, u_n{}' + \varepsilon(u_c')_n, u_n + \varepsilon(u_c)_n, \varepsilon) = 0 \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.10) fonksiyonunun $\varepsilon = 0$ civarında sadece birinci mertebeden türevleri içeren Taylor seri açılımı ile PIA(1,1) aşağıdaki formda

$$F + F_u(u_c)_n\varepsilon + F_{u'}(u_c')_n\varepsilon + F_{u''}(u_c'')_n\varepsilon + F_\varepsilon\varepsilon = 0 \tag{2.11}$$

ve ikinci mertebeden türevleri barındıran Taylor açılımı ile de PIA(1,2) yine benzer şekilde

$$\begin{aligned} &F + F_u(u_c)_n\varepsilon + F_{u'}(u_c')_n\varepsilon + F_{u''}(u_c'')_n\varepsilon + F_\varepsilon\varepsilon + F_{u'u}(u_c')_n(u_c)_n\varepsilon^2 + \\ &F_{u''u}(u_c'')_n(u_c)_n\varepsilon^2 + F_{u''u'}(u_c'')_n(u_c')_n\varepsilon^2 + F_{u''\varepsilon}(u_c'')_n\varepsilon^2 + \frac{F_{u''u''}(u_c'')_n^2\varepsilon^2}{2} \\ &+\frac{F_{u'u'}(u_c')_n^2\varepsilon^2}{2} + \frac{F_{uu}(u_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + F_{u'\varepsilon}(u_c')_n\varepsilon^2 + F_{u\varepsilon}(u_c)_n\varepsilon^2 + \frac{F_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2}{2} = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

biçiminde elde edilir. Burada (2.6) terimlerine ek olarak

$$\begin{aligned} F_{u''} &= \frac{\partial F}{\partial u''}\left(u_n'', u_n', u_n, 0\right), \\ F_{u''\varepsilon} &= \frac{\partial F}{\partial u''\partial\varepsilon}\left(u_n'', u_n', u_n, 0\right), \\ F_{u''u''} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u''^2}\left(u_n'', u_n', u_n, 0\right), \\ F_{u''u} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u''\partial u}\left(u_n'', u_n', u_n, 0\right), \\ F_{u''u'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u''\partial u'}\left(u_n'', u_n', u_n, 0\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

olmak üzere yeni eklenen türevlerin ve fonksiyonların $\varepsilon = 0$ da hesap edildiği unutulmamalıdır.

2.3. Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Perturbasyon İterasyon Algoritması

Perturbasyon iterasyon algoritmalarının adi diferansiyel denklemlere uygulanma prosedürü aynı şekilde kısmi diferansiyel denklemlere de taşınabilirdir. İşlemlerin çok yoğun olmaması adına bu kısımda sadece PIA(1,1) metodunun bazı türden kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması gösterilecektir. Burada ortaya konulan yöntem aynı mantıkla farklı türden istenilen mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere de genişletilebilirdir.

Genel hali

$$F\left(u_{xxt}, u_{xx}, u_{tt}, u_x, u_t, u, \varepsilon\right) = 0 \tag{2.14}$$

biçiminde kapalı formunda olan kısmi diferansiyel denklemleri ele alalım. Burada $u = u(x,t)$ tam çözüm ve ε perturbasyon parametresidir. PIA(1,1)'i elde etmek için adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi tek düzeltme terimli

$$u = u_n + \varepsilon(u_c)_n \tag{2.15}$$

yaklaşımını (2.14) denkleminde yerine yazar ve (2.14) ile gösterilen fonksiyon $\varepsilon = 0$ civarında birinci mertebeden türevlere kadar seriye açılırsa

$$\begin{aligned} &F + F_u\left(u_c\right)_n\varepsilon + F_{u_t}\left(\left(u_c\right)_n\right)_t\varepsilon + F_{u_x}\left(\left(u_c\right)_n\right)_x\varepsilon + \\ &F_{u_{tt}}\left(\left(u_c\right)_n\right)_{tt}\varepsilon + F_{u_{xx}}\left(\left(u_c\right)_n\right)_{xx}\varepsilon + F_{u_{xxt}}\left(\left(u_c\right)_n\right)_{xxt}\varepsilon + F_\varepsilon\varepsilon = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

algoritması bulunur. Burada

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, F_\varepsilon = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}, F_{u_t} = \frac{\partial F}{\partial u_t}, F_{u_x} = \frac{\partial F}{\partial u_x}, F_{u_{tt}} = \frac{\partial F}{\partial u_{tt}}, F_{u_{xx}} = \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}, F_{u_{xxt}} = \frac{\partial F}{\partial u_{xxt}}$$

olmak üzere tüm türevlerin $\varepsilon = 0$'daki değerleri alınmaktadır. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n \tag{2.17}$$

iterasyonu ile istenilen hassaslıkta çözümlere ulaşılabilirdir.

3. OPTİMAL PERTURBASYON İTERASYON METODU

Perturbasyon iterasyon metodunun en önemli eksikliklerinden birisi elde edilen algoritmalarının çok karmaşık olmasıdır. En basit denklemler için bile uzun süren işlemler yapmak zorunda kalınabilmektedir. PIA(1,1) metodu PIA(1,2) metoduna göre nispeten daha az işlem içerse de ortaya çıkan sonuçlara bakıldığında PIA(1,2) metodu daha iyi yaklaşım vermektedir. Diğer yandan bazı durumlarda PIA(1,2) metodu ile elde edilen denklemin çözülmesi esas denklemin çözülmesi kadar uğraştırıcı olabilmekte ve metodun avantajı da ortadan kalkabilmektedir. Bu bölümde perturbasyon iterasyon metodunun bu tür eksikliklerinin giderilmesi için yeni bir metot olan optimal perturbasyon iterasyon metodu (OPIM) tanıtılacaktır. Sonuç olarak bu metodun kullanımı ile hem işlem kolaylığı hem de daha etkili sonuçların elde edildiği görülecektir.

Optimal perturbasyon iterasyon metodunun (OPIM) temel kavramlarını vermeden önce kapalı formda ifade edilen (2.1), (2.9) ve (2.14) denklemlerini tekrar ele alalım. Perturbasyon iterasyon metodu, klasik perturbasyon açılımından alınan tek düzeltme terimli (2.2) denkleminin kapalı formdaki denklemlerde yerine yazılması ve daha sonra da ortaya çıkan fonksiyonların seriye açılması esasına dayanır. Kapalı formda verilen ifadelerin içerisinde birçok lineer, değişken katsayılı ve lineer olmayan terimler mevcuttur. Esasen lineer olan terimlerin seriye açılması ortaya farklı bir denklem çıkarmamaktadır. Bu yüzden de ele alınan denklemin sadece lineer olmayan ya da daha karmaşık yapıdaki terimlerini seriye açma işleminde kullanmak yeterli olacaktır. Böylelikle lineer terimlerden kaynaklanan zaman kaybının da önüne geçilmiş olunacaktır. Göz önüne alınan problemlerin sadece karmaşık yapıdaki terimleri ile uğraşmak perturbasyon iterasyon metoduna, optimal perturbasyon iterasyon metodunun önerdiği ilk modifikasyondur. Elde edilen sonuçlar bu modifikasyonla değişmeyecektir fakat kullanılan algoritmalardaki işlem sayısı oldukça azalacaktır. Ortaya çıkan sonuçların iyileştirilmesi için ise homotopi analiz metodu ile Marinca ve arkadaşları tarafından önerilen optimal homotopi asimtotik metodunun temel mantığından faydalanılacaktır [21–28].

3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Optimal Perturbasyon Iterasyon Algoritmaları

Optimal perturbasyon iterasyon algoritmalarını oluşturmak için PIM algoritmalarında yapıldığı gibi kapalı formdaki denklemin içerisine tek düzeltme terimli (2.2) yaklaşımı yerleştirilir. Dolayısıyla bu algoritmalar sınıflandırılırken, sadece seri açılımındaki türev mertebesi dikkate alınacaktır. Yalnızca birinci mertebe türevleri içeren optimal perturbasyon iterasyon algoritması için OPIA-1, ikinci mertebeden türevleri de içeren algoritma için OPIA-2 kısaltması kullanılacaktır. OPIM için farklı anlatımlar yapılabileceği gibi (2.1) ve (2.9) adi diferansiyel denklemleri için bir formülasyon ise aşağıdaki biçimde verilir:

(**a**) L, çözümü kolay olan lineer terimleri, N ise uğraşması zor olan değişken katsayılı ya da lineer olmayan yapıdaki terimleri içeren fonksiyonlar olmak üzere verilen denklem aşağıdaki şekilde parçalanır:

$$F = L + N. \tag{3.1}$$

Burada L ve N terimlerinin istenildiği gibi seçme özgürlüğünün olduğu unutulmamalıdır. Verilen problemin yapısına göre ortaya birçok seçenek çıkabilir. Ancak unutulmamalıdır ki, N fonksiyonu ne kadar sade olursa işlem kolaylığı o kadar artacaktır.

(**b**) Çözümü aranan denklem parçalandıktan sonra (2.2) ifadesi L ve N fonksiyonlarında yerine yazılır ve sadece seçilen N kısmı PIM algoritmalarında olduğu gibi $\varepsilon = 0$ civarında seriye açılır. Böylece (2.1) ve (2.9) denklemleri için OPIA-1'ler sırasıyla

$$N + N_u(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + N_\varepsilon\varepsilon = -L \tag{3.2}$$

$$N + N_u(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + N_{u''}(u''_c)_n\varepsilon + N_\varepsilon\varepsilon = -L \tag{3.3}$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde (2.1) ve (2.9) için OPIA-2'ler de sırasıyla

$$\begin{aligned} N + N_u(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + N_\varepsilon\varepsilon + N_{u'u}(u'_c)_n(u_c)_n\varepsilon^2 + \frac{N_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2}{2} + \\ \frac{N_{u'u'}(u'_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + \frac{N_{uu}(u_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + N_{u'\varepsilon}(u'_c)_n\varepsilon^2 + N_{u\varepsilon}(u_c)_n\varepsilon^2 = -L \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$N + N_u(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + N_{u''}(u''_c)_n\varepsilon + N_\varepsilon\varepsilon + N_{u'u}(u'_c)_n(u_c)_n\varepsilon^2 +$$

$$N_{u''u}(u''_c)_n(u_c)_n\varepsilon^2 + N_{u''u'}(u''_c)_n(u'_c)_n\varepsilon^2 + N_{u''\varepsilon}(u''_c)_n\varepsilon^2 + \frac{N_{u''u''}(u''_c)_n^2\varepsilon^2}{2}$$

$$+\frac{N_{u'u'}(u'_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + \frac{N_{uu}(u_c)_n^2\varepsilon^2}{2} + N_{u'\varepsilon}(u'_c)_n\varepsilon^2 + N_{u\varepsilon}(u_c)_n\varepsilon^2 + \frac{N_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2}{2} = -L \quad (3.5)$$

şeklinde bulunur. Burada yine tüm fonksiyonların ve türevlerin $\varepsilon = 0$'da hesaplandığı unutulmamalıdır. Her ne kadar ortaya konulan algoritmalar PIA'lara benzermiş gibi gözükse de, N'nin doğru seçimi ile bu denklemler oldukça basit hale gelecektir. Uygulamalar bölümünde görüleceği üzere birçok problemin içerdiği lineer terim sayısı oldukça fazladır. Bu durum ise esas öneme sahip N'nin oldukça basit bir hale gelmesine sebep olmakta ve yeni algoritmalar için gereken işlem sayısı oldukça azalmaktadır.

(**c**) Başlangıç ya da sınır şartlarını sağlayan bir u_0 deneme fonsiyonu ile (3.2) - (3.5) denklemlerinden ilk düzeltme terimi $(u_c)_0$ çıkarılır. Bu adımdan sonra elde edilen sonuçların doğruluğunu artırmak ve optimum yaklaşımlar elde etmek amacıyla

$$u_{n+1} = u_n + P_n(u_c)_n \quad (3.6)$$

formulü kullanılır. Burada $n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $P_0, P_1, P_2, \ldots$'ler daha sonra bulunacak olan yardımcı sabitlerdir. Yeni çözümler ise, m yaklaşımın mertebesini belirtmek üzere

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(t; P_0) = u_0 + P_0(u_c)_0, \\ u_2 &= u_2(t; P_0, P_1) = u_1 + P_1(u_c)_1, \\ &\vdots \\ u_m &= u_m(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}) = u_{m-1} + P_{m-1}(u_c)_{m-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde olacaktır.

(**d**) Bilinmeyen $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sabitlerini bulmak için öncelikle, m. mertebeden yaklaşık OPIM çözümünleri (3.1) denkleminde yerine yazarak

$$\begin{aligned} &Re\,(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}) = F\left(u_m\left(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}\right)\right) = \\ &L\left(u_m\left(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}\right)\right) + N\left(u_m\left(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

biçimindeki rezidüsü (kalıntı) elde edilir. Eğer $Re\,(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}) = 0$ ise u_m çözümlerinin aranılan tam sonuç olduğu açıktır. Fakat bu durum genellikle mümkün olmamaktadır. Dolayısıyla, a ve b ele alınan problemin çözüm aralığından seçilen iki değer olmak üzere, $P_0, P_1, P_2, \ldots$ bilinmeyenleri

$$J(P_0, \ldots, P_{m-1}) = \int_a^b \left[Re\left(t; P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}\right)\right]^2 dt \tag{3.9}$$

ve

$$\frac{\partial J}{\partial P_0} = \frac{\partial J}{\partial P_1} = \ldots = \frac{\partial J}{\partial P_{m-1}} = 0 \tag{3.10}$$

denklem ikilisi çözülerek elde edilebilir. Integral almada güçlük çekilmesi durumunda ise $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ ve $t_i \in (a, b)$ olmak üzere

$$Re(t_0, P_i) = Re(t_1, P_i) = \cdots = Re(t_{m-1}, P_i) = 0 \tag{3.11}$$

eşitliği çözülerek de bu parametreler bulunabilirdir.

(**e**) İşlemlerin çok karmaşık olduğu durumlarda bu sabitleri tek bir parametreye indirgeyerek

$$u_{n+1} = u_n + p(u_c)_n \tag{3.12}$$

biçimindeki denklem de kullanılabilir. Burada p parametresi yakınsaklık kontrol parametresi olarak adlandırılır. Bu durumda iterasyon adımları

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(t; p) = u_0 + p(u_c)_0, \\ u_2 &= u_2(t; p) = u_1 + p(u_c)_1, \\ &\vdots \\ u_m &= u_m(t; p) = u_{m-1} + p(u_c)_{m-1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

olacaktır. Yakınsaklık kontrol parametresi p yi bulmak için (d) şıkkındaki metot kullanılabileceği gibi homotopi analiz metodundaki sabit seviye eğrileri (constant level curves) fikrinden de yararlanılabilirdir.

3.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Optimal Perturbasyon Iterasyon Algoritması

Bir önceki bölümde adi diferansiyel denklemler için verilen formülasyonun bir benzeri (2.14) kısmi diferansiyel denklemleri için de verilebilirdir.

(**a**) Verilen denklemin önce L ve N kısımları belirlenir:

$$F = L + N. \tag{3.14}$$

(**b**) (2.2) denklemi L ve N içinde yerine yazılır ve N kısmı $\varepsilon = 0$ civarında seriye açılarak (2.14) denklemi için

$$\begin{aligned} &N + N_u \left(u_c\right)_n \varepsilon + N_{u_t} \left(\left(u_c\right)_n\right)_t \varepsilon + N_{u_x} \left(\left(u_c\right)_n\right)_x \varepsilon + \\ &N_{u_{tt}} \left(\left(u_c\right)_n\right)_{tt} \varepsilon + N_{u_{xx}} \left(\left(u_c\right)_n\right)_{xx} \varepsilon + N_{u_{xxt}} \left(\left(u_c\right)_n\right)_{xxt} \varepsilon + N_\varepsilon \varepsilon = -L \end{aligned} \tag{3.15}$$

OPIA-1 denklemi bulunur.

(**c**) u_0, (3.15) ifadesi ve başlangıç şartları yardımıyla ilk düzeltme terimi $\left(u_c\right)_0$ bulunur ve

$$u_{n+1} = u_n + P_n(u_c)_n \tag{3.16}$$

formulü ile

$$\begin{aligned} &u_1 = u_1(x,t;P_0) = u_0 + P_0(u_c)_0, \\ &u_2 = u_2(x,t;P_0,P_1) = u_1 + P_1(u_c)_1, \\ &\vdots \\ &u_m = u_m(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}) = u_{m-1} + P_{m-1}(u_c)_{m-1} \end{aligned} \tag{3.17}$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

(**d**) $u_m = u_m(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1})$ yaklaşımı denklem (3.14)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} &Re\left(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}\right) = F\left(u_m\left(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}\right)\right) = \\ &L\left(u_m\left(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}\right)\right) + N\left(u_m\left(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

rezidüsü bulunur. $Re\left(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}\right) = 0$ ise u_m tam çözümdür. Aksi halde $t \in [a,b]$ ve $x \in \Omega$ olmak üzere

$$J(P_0,\ldots,P_{m-1}) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left[Re\left(x,t;P_0,P_1,\ldots,P_{m-1}\right)\right]^2 dxdt \tag{3.19}$$

ifadesi minimize edilerek

$$\frac{\partial J}{\partial P_0} = \frac{\partial J}{\partial P_1} = \ldots = \frac{\partial J}{\partial P_{m-1}} = 0 \tag{3.20}$$

eşitliğinden $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sabitleri elde edilir. Diğer yandan sabit bir t zamanı için $i = 0,1,2,\ldots,m-1$ ve $x_i \in \Omega$ olmak üzere

$$Re(x_0,P_i) = Re(x_1,P_i) = \cdots = Re(x_{m-1},P_i) = 0 \tag{3.21}$$

eşitliğinden de bilinmeyen parametreler tespit edilebilir. Hesaplamaların yüksek mertebeden çözümler için karmaşık bir hale gelmesi durumunda ise adi diferansiyel denklemler için OPIM formülasyonunun (e) şıkkındaki fikir kullanılarak parametre sayısı teke indirilebilirdir.

3.3. Yakınsaklık Analizi ve Hata Tahmini

Bu kısımda optimal perturbasyon iterasyon metoduna farklı bir bakış açısıyla yaklaşarak, onun yakınsaklığı hakkında temel bilgiler verilmesi amaçlanmıştır. Öncelikle bilinen önemli teoremler vasıtası ile bu metoda uygun olacak şekilde yeni teoremler verilerek bunların geliştirilmesine çalışılacaktır. Burada temel amaç, bu yöntemin sağladığı sonuçların hangi şartlar altında yakınsak olduğunun gösterilmesidir. Bunun için öncelikle

$$\begin{aligned} &u_0 = H_0, \\ &P_n\left(u_c\right)_n = H_{n+1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

olduğu kabul edilir. Bu durumda yeni OPIM yaklaşımları

$$\begin{aligned} &u_0 = H_0 \\ &u_1 = u(x,t;P_0) = u_0 + P_0(u_c)_0 = H_0 + H_1 \\ &u_2 = u(x,t;P_0,P_1) = u_1 + P_1(u_c)_1 = H_0 + H_1 + H_2 \\ &\quad\vdots \\ &u_n = u(x,t;P_0,\ldots,P_{n-1}) = H_0 + H_1 + \ldots + H_n \end{aligned} \tag{3.23}$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla $n.$ mertebeden yaklaşık çözüm

$$u_n(x,t;P_0,\ldots,P_{n-1}) = H_0\left(x,t\right) + \sum_{j=1}^{n} H_j(x,t;P_0,\ldots P_{j-1}) \tag{3.24}$$

olarak gösterilebilirdir.

Teorem 3.3.1. B, üzerinde (3.24) serisinin tanımlandığı uygun bir $\|.\|$ normuyla temsil edilen bir Banach uzayı olsun. Ek olarak $u_0 = H_0$ biçimindeki başlangıç tahmin fonksiyonu da çözüm yuvarı içerisinde bulunsun. Eğer

$$\|H_{n+1}\| \leq \beta\left\|H_n\right\| \tag{3.25}$$

olacak şekilde bir $0 < \beta < 1$ varsa, bu takdirde (3.24) seri çözümü yakınsaktır.

İspat: İlk olarak

$$\begin{aligned} &A_0 = H_0 \\ &A_1 = H_0 + H_1 \\ &A_2 = H_0 + H_1 + H_2 \\ &\quad\vdots \\ &A_n = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots + H_n \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde kısmi toplamlar dizisi tanımlansın. Bu takdirde $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ nin B uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlamak gerekir. Bunu göstermek için önce

$$\|A_{n+1} - A_n\| = \|H_{n+1}\| \leq \beta\left\|H_n\right\| \leq \beta^2\left\|H_{n-1}\right\| \leq \cdots \leq \beta^{n+1}\left\|H_0\right\| \tag{3.27}$$

olduğu kabul edilir. Her $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k$ için

$$\begin{aligned}\|A_n - A_k\| &= \|(A_n - A_{n-1}) + (A_{n-1} - A_{n-2}) + \cdots + (A_{k+1} - A_k)\| \\ &\leq \|A_n - A_{n-1}\| + \|A_{n-1} - A_{n-2}\| + \cdots + \|A_{k+1} - A_k\| \\ &\leq \beta^n \|H_0\| + \beta^{n-1} \|H_0\| + \cdots + \beta^{k+1} \|H_0\| = \tfrac{1-\beta^{n-k}}{1-\beta} \beta^{k+1} \|H_0\|\end{aligned} \tag{3.28}$$

dir. Bunun yanında $0 < \beta < 1$ olduğundan (3.28) ifadesinden

$$\lim_{n,k \to \infty} \|A_n - A_k\| = 0 \tag{3.29}$$

elde edilir. O halde $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, B uzayında bir Cauchy dizisidir ve (3.24) OPIM çözüm serisi yakınsaktır.

Teorem 3.3.2. $\sum_{i=0}^{\infty} H_i$ serisinin $u = u(x, t)$ çözümüne yakınsak olduğu varsayılsın. Eğer kesilmiş $\sum_{i=0}^{k} H_i$ serisi ana problemin tam çözümüne bir yaklaşım olarak kullanılırsa maksimum hata

$$E_k \leq \frac{\beta^{k+1}}{1-\beta} \|H_0\| \tag{3.30}$$

olarak verilir.

İspat: $n \geq k$ için, denklem (3.28)'den

$$\|A_n - A_k\| \leq \frac{1-\beta^{n-k}}{1-\beta} \beta^{k+1} \|H_0\| \tag{3.31}$$

olduğu görülebilir ve bununla beraber

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} A_n(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i \tag{3.32}$$

olduğundan

$$\left\| u(x, t) - \sum_{i=0}^{k} H_i \right\| \leq \frac{1-\beta^{n-k}}{1-\beta} \beta^{k+1} \|H_0\| \tag{3.33}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $1 - \beta^{n-k} < 1$ olduğundan

$$E_k = \left\| u(x, t) - \sum_{i=0}^{k} H_i \right\| \leq \frac{\beta^{k+1}}{1-\beta} \|H_0\| \tag{3.34}$$

yazılabilir. Burada

$$\beta_i = \frac{\|H_{n+1}\|}{\|H_n\|} \tag{3.35}$$

olmak üzere $\beta = \max\{\beta_i, i = 0, 1, \ldots, n\}$ olarak seçilmektedir.

NOT: u_0 başlangıç ya da deneme fonksiyonunun seçiminin, elde edilecek olan yaklaşık çözümün yakınsaklığına doğrudan etki edeceği unutulmamalıdır. Deneme fonksiyonu olarak denklemi sağlayan herhangi bir fonksiyon alınabileceği gibi başlangıç şartlarına ve denklemin yapısına uygun bir fonksiyon seçmek yakınsaklığı daha hızlı hale getirebilecektir. Bununla beraber, bu fonksiyonun seçimi için bugüne kadar önerilmiş genel bir teorem bulunmamaktadır.

4. KARŞILAŞTIRMALI UYGULAMALAR

Bu bölümde literatürde oldukça sık karşılaşılan problemler OPIM metodu ile detaylı bir şekilde yeniden ele alınarak çözülmeye çalışılacaktır. Ortaya çıkan yaklaşık çözümler diğer metotlardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak yeni metodun önemi yanında verimliliği de ortaya konulacaktır.

Örnek 4.0.1.

$$u' + u^2 = 0, \quad u(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{4.1}$$

problemini ele alalım.

Şimdi, önce denklem (4.1)'e ε perturbasyon parametresi

$$u' + \varepsilon u^2 = 0 \tag{4.2}$$

olarak gömülmek sureti ile kapalı formda

$$F(u', u, \varepsilon) = u' + \varepsilon u^2 = 0 \tag{4.3}$$

biçiminde yazılır.Daha sonra F fonksiyonu $L = u'$ ve $N = \varepsilon u^2$ olacak şekilde

$$F(u', u, \varepsilon) = L(u') + N(u, \varepsilon) \tag{4.4}$$

şeklinde bölünür. Görüldüğü üzere OPIM algoritmaları için temel öneme sahip olan nonlineer kısım N sadece u ve ε'a bağlıdır. Bu şekilde parçalamanın ne derece işlem kolaylığı sağladığı sırasıyla OPIA-1 ve OPIA-2 çözümlerinde açıkça görülecektir.

<u>OPIA-1 Çözümü</u>

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklem olan (4.1) problemi için OPIA-1 algoritması

$$N + N_u (u_c)_n \varepsilon + N_{u'} (u_c')_n \varepsilon + N_\varepsilon \varepsilon = -L \tag{4.5}$$

şeklinde iken N kısmı u' terimini içermediğinden bu algoritma

$$N + N_u (u_c)_n \varepsilon + N_\varepsilon \varepsilon = -L \tag{4.6}$$

ifadesine dönecektir. Burada $L = u'$ lineer bir terim olduğundan seriye açmaya gerek yoktur. (2.2) ifadesi L içine yerleştirilirse:

$$L = L\left({u_n}'\right) = {u_n}' + \varepsilon (u_c')_n \tag{4.7}$$

bulunur. $N = \varepsilon u^2$ olduğundan

$$N = N(u_n, \varepsilon) = \varepsilon (u_n)^2,$$

$$N_u = \frac{\partial N}{\partial u}(u_n, \varepsilon) = 2\varepsilon (u_n), \tag{4.8}$$

$$N_\varepsilon = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon}(u_n, \varepsilon) = (u_n)^2$$

olmak üzere seri açılımındaki tüm hesaplamalar $\varepsilon = 0$ için gerçekleştirilirse

$$N = N(u_n, 0) = 0$$

$$N_u = \frac{\partial N}{\partial u}(u_n, 0) = 0, \tag{4.9}$$

$$N_\varepsilon = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon}(u_n, 0) = (u_n)^2$$

olacaktır. (4.7) ve (4.9) eşitlikleri denklem (4.6)'de yerine konulursa bu denklem

$$(u_n)^2 \varepsilon = -\left(u_n{}' + \varepsilon (u_c')_n\right) \tag{4.10}$$

haline gelir. Orijinal denklemden ötürü $\varepsilon = 1$ alınırsa (4.1) için OPIA-1 elde edilir:

$$(u_c')_n = -u_n{}' - (u_n)^2. \tag{4.11}$$

$n = 0$ için iterasyona başlarken deneme fonksiyonu olarak başlangıç şartlarını sağlayan

$$u_0 = 1 \tag{4.12}$$

fonksiyonu alınabilir. (4.12) denklemi (4.11) içine yerleştirilirse sıfırıncı mertebeden

$$(u_c')_0 = -u_0{}' - (u_0)^2 = -1 \tag{4.13}$$

problemi ortaya çıkar. Başlangıç şartları göz önüne alınırak (4.13) çözülürse birinci mertebeden OPIA-1 çözümü

$$u_1 = 1 - P_0 t \tag{4.14}$$

bulunur. $n = 1, 2, 3$ için (3.7),(4.11) denklemleri kullanılarak iterasyona devam edilirse şu OPIA-1 yaklaşımlarına ulaşılır:

$$u_2 = 1 - tP_0 + \left(-t + tP_0 + t^2 P_0 - \frac{1}{3} t^3 P_0^2\right) P_1 \tag{4.15}$$

$$u_3 = u_2 + P_2 \begin{bmatrix} t^2 P_0 - \frac{1}{3} t^3 P_0^2 + tP_1 + t^2 P_1 - tP_0 P_1 - 2t^2 P_0 P_1 + \\ t^3 P_0^2 P_1 + \frac{2}{3} t^4 P_0^2 P_1 - \frac{2}{15} t^5 P_0^3 P_1 - \frac{1}{3} t^3 P_1^2 + \frac{2}{3} t^3 P_0 P_1^2 \\ + \frac{1}{2} t^4 P_0 P_1^2 - \frac{1}{3} t^3 P_0^2 P_1^2 - \frac{1}{2} t^4 P_0^2 P_1^2 - \frac{1}{3} t^5 P_0^2 P_1^2 + tP_0 \\ + \frac{2}{15} t^5 P_0^3 P_1^2 + \frac{1}{9} t^6 P_0^3 P_1^2 - \frac{1}{63} t^7 P_0^4 P_1^2 - \frac{4}{3} t^3 P_0 P_1 - t \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$
u_4 = u_3 + P_3 \begin{bmatrix}
-t + tP_0 + t^2P_0 - \frac{1}{3}t^3P_0^2 + tP_1 + t^2P_1 - tP_0P_1 - \\
\frac{4}{3}t^3P_0P_1 + t^3P_0^2P_1 + \frac{2}{3}t^4P_0^2P_1 - \frac{2}{15}t^5P_0^3P_1 - \frac{1}{3}t^3P_1^2 \\
+\frac{2}{3}t^3P_0P_1^2 + \frac{1}{2}t^4P_0P_1^2 - \frac{1}{3}t^3P_0^2P_1^2 - \frac{1}{2}t^4P_0^2P_1^2 - \\
\frac{1}{3}t^5P_0^2P_1^2 + \frac{2}{15}t^5P_0^3P_1^2 + \frac{1}{9}t^6P_0^3P_1^2 - \frac{1}{63}t^7P_0^4P_1^2 + tP_2 \\
+t^2P_2 - tP_0P_2 - 2t^2P_0P_2 - \frac{4}{3}t^3P_0P_2 + t^3P_0^2P_2 \\
-tP_1P_2 - 2t^2P_1P_2 - \frac{4}{3}t^3P_1P_2 + tP_0P_1P_2 \\
+\frac{13}{6}t^4P_0P_1P_2 - \frac{7}{3}t^3P_0^2P_1P_2 - \frac{19}{6}t^4P_0^2P_1P_2 - \\
\frac{22}{15}t^5P_0^2P_1P_2 + \frac{4}{5}t^5P_0^3P_1P_2 + \frac{22}{45}t^6P_0^3P_1P_2 - \\
\frac{22}{315}t^7P_0^4P_1P_2 + t^3P_1^2P_2 + \frac{2}{3}t^4P_1^2P_2 - 2t^3P_0P_1^2P_2 \\
-\frac{17}{6}t^4P_0P_1^2P_2 - \frac{19}{15}t^5P_0P_1^2P_2 + t^3P_0^2P_1^2P_2 + \\
\frac{13}{6}t^4P_0^2P_1^2P_2 + \frac{8}{3}t^5P_0^2P_1^2P_2 + \frac{19}{18}t^6P_0^2P_1^2P_2 \\
-\frac{4}{5}t^5P_0^3P_1^2P_2 - \frac{11}{10}t^6P_0^3P_1^2P_2 - \frac{152}{315}t^7P_0^3P_1^2P_2 \\
+\frac{59}{315}t^7P_0^4P_1^2P_2 + \frac{38}{315}t^8P_0^4P_1^2P_2 - \frac{38t^9P_0^5P_1^2P_2}{2835} \\
-\frac{2}{15}t^5P_1^3P_2 + \frac{2}{5}t^5P_0P_1^3P_2 + \frac{5}{18}t^6P_0P_1^3P_2 \\
-\frac{5}{9}t^6P_0^2P_1^3P_2 - \frac{17}{63}t^7P_0^2P_1^3P_2 + \frac{2}{15}t^5P_0^3P_1^3P_2 \\
+\frac{5}{18}t^6P_0^3P_1^3P_2 + \frac{107}{315}t^7P_0^3P_1^3P_2 + \frac{11}{72}t^8P_0^3P_1^3P_2 \\
-\frac{22}{315}t^7P_0^4P_1^3P_2 - \frac{37}{360}t^8P_0^4P_1^3P_2 - \frac{10}{189}t^9P_0^4P_1^3P_2 + \\
\frac{38t^9P_0^5P_1^3P_2}{2835} + \frac{2}{189}t^{10}P_0^5P_1^3P_2 - \frac{2t^{11}P_0^6P_1^3P_2}{2079} \\
-\frac{1}{3}t^3P_2^2 + \frac{2}{3}t^3P_0P_2^2 + \frac{1}{2}t^4P_0P_2^2 - \frac{1}{3}t^3P_0^2P_2^2 - \\
\frac{1}{2}t^4P_0^2P_2^2 - \frac{1}{3}t^5P_0^2P_2^2 + \frac{2}{15}t^5P_0^3P_2^2 + \frac{1}{9}t^6P_0^3P_2^2 \\
-\frac{1}{63}t^7P_0^4P_2^2 + \frac{2}{3}t^3P_1P_2^2 + \frac{1}{2}t^4P_1P_2^2 - \frac{4}{3}t^3P_0P_1P_2^2 - \\
2t^4P_0P_1P_2^2 - \frac{14}{15}t^5P_0P_1P_2^2 + \frac{2}{3}t^3P_0^2P_1P_2^2 \\
+\frac{28}{15}t^5P_0^2P_1P_2^2 + \frac{7}{9}t^6P_0^2P_1P_2^2 - \frac{8}{15}t^5P_0^3P_1P_2^2 \\
+\frac{2}{3}t^4P_0^2P_2 - 2t^2P_0P_1 + \frac{14}{3}t^3P_0P_1P_2 - \frac{7}{9}t^6P_0^3P_1P_2^2 \\
+3t^2P_0P_1P_2 - \frac{2}{5}t^5P_0^2P_1^3P_2 + \frac{3}{2}t^4P_0^2P_1P_2^2 + \\
\frac{17P_0^5P_1^4P_2^2P_3t^{12}}{2268} + \frac{19}{945}P_0^5P_1^4P_2^2P_3t^{11} + \frac{14}{675}P_0^5P_1^4P_2^2P_3t^{10} \\
-\frac{43P_0^6P_1^4P_2^2P_3t^{12}}{11340} - \frac{134P_0^6P_1^4P_2^2P_3t^{11}}{51975} + \cdots
\end{bmatrix}. \tag{4.17}
$$

Benzer şekilde yüksek mertebeden diğer çözümler de elde edilebilir. Görüldüğü gibi hesaplamaların yoğunluğundan dolayı yaklaşımlar hesaplanırken sembolik bir bilgisayar programına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tez boyunca OPIM algoritmaları ve işlemleri için Mathematica 9.0 programından faydalanılmıştır.

Elde edilen yaklaşımlardaki bilinmeyen $P_0, P_1, \ldots$ sabitlerine ulaşmak için 3. bölümde anlatılan metotlar kullanılacaktır. Örneğin 2. mertebeden u_2 yaklaşımındaki P_0 ve P_1 bilinmeyenlerini bulmak için öncelikle (3.8) denkleminden rezidü hesaplanır:

$$\begin{aligned} &Re\left(t; P_0, P_1\right) = F\left(u_2\left(t; P_0, P_1\right)\right) = \\ &(u_2)' + (u_2)^2 = -P_0 + \left(-1 + P_0 + 2tP_0 - t^2P_0^2\right)P_1 + \\ &\left(1 - tP_0 + \left(-t + tP_0 + t^2P_0 - \tfrac{1}{3}t^3P_0^2\right)P_1\right)^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

$a = 0$ ve $b = 0.9$ problemin çözüm kümesi olarak verilen $0 \leq t \leq 1$ aralığından seçilen iki değer olmak üzere (3.9) ifadesinden

$$\begin{aligned} &J(P_0, P_1) = \int_0^{0.9} \left[Re\left(t; P_0, P_1\right)\right]^2 dt = \\ &0.9 - 3.42P_0 + 3.978P_0^2 - 1.1421P_0^3 + 0.118098P_0^4 - 3.42P_1 + 13.968P_0P_1 \\ &-18.5913P_0^2P_1 + 8.46126P_0^3P_1 - 1.57464P_0^4P_1 + 0.0911042P_0^5P_1 + \\ &3.978P_1^2 - 17.8866P_0P_1^2 + 28.3282P_0^2P_1^2 - 18.7358P_0^3P_1^2 + 5.48762P_0^4P_1^2 \\ &-0.666579P_0^5P_1^2 + 0.0286978P_0^6P_1^2 - 1.1421P_1^3 + 6.62807P_0P_1^3 - \\ &14.3569P_0^2P_1^3 + 14.1303P_0^3P_1^3 - 6.26284P_0^4P_1^3 + 1.26445P_0^5P_1^3 - \\ &0.118618P_0^6P_1^3 + 0.00422641P_0^7P_1^3 + 0.118098P_1^4 - 0.826686P_0P_1^4 \\ &+2.27254P_0^2P_1^4 - 3.05899P_0^3P_1^4 + 2.04531P_0^4P_1^4 - 0.628901P_0^5P_1^4 \\ &+0.0984335P_0^6P_1^4 - 0.00771319P_0^7P_1^4 + 0.000241393P_0^8P_1^4 \end{aligned} \tag{4.19}$$

integrali hesap edilerek ve (3.10) denkleminden

$$\frac{\partial J}{\partial P_0} = \frac{\partial J}{\partial P_1} = 0 \tag{4.20}$$

eşitliği çözülerek

$$P_0 = 0.897994 \qquad P_1 = 0.756153 \tag{4.21}$$

olarak bulunur. Bu değerler u_2 de yerine konulursa

$$u_2 \approx 1 - 0.975126t + 0.679021t^2 - 0.203252t^3 \tag{4.22}$$

ikinci mertebeden u_2 çözümü elde edilir. Denklemin tam çözümü

$$u(t) = \frac{1}{1+t} \tag{4.23}$$

olmak üzere 2. mertebeden PIA-1 çözümü ise

$$u \approx 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{3} \tag{4.24}$$

olarak bulunmuştur [29]. Dikkat edilirse her iki çözüm de tam çözümün Taylor açılımı olan

$$u = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8 + O\left(t^9\right) \tag{4.25}$$

serisinden farklıdır. Sonuçları karşılaştırma açısından tablo 4.1 ve 4.2'e bakıldığında 2. yaklaşımlar için bile yeni OPIA-1 değerlerinin diğer metotlardan daha iyi sonuçlar verdiği görülecektir. Şekil 4.1 ve 4.2'de bu yaklaşımların farklı aralıklardaki karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. Elde edilen mutlak hatalar ise 4.3 ve 4.4 grafiklerinden görülebilir.

u_2 için L^2 hatası, rezidünün hesaplandığı bölge olan $t \in [0, 0.9]$ için

$$E_{OPIA-1} = \left[\int_0^{0.9} \left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.00633159 \tag{4.26}$$

iken problemin tanım kümesi olan $t \in [0, 1]$ için

$$E_{OPIA-1} = \left[\int_0^{1} \left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.00634008 \tag{4.27}$$

dir. OPIA çözümleri her ne kadar belli bir bölge için elde edilmiş olsa da diğer bölgelerde de olumlu sonuçlar vermektedir. Örneğin u_2 için $t \in [0, 2]$ aralığında L^2 hatası

$$E_{OPIA-1} = \left[\int_0^{2} \left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.0725819 \tag{4.28}$$

olarak bulunur. Aynı hatalar ikinci mertebe PIA-1 yaklaşımları için

$$E_{PIA-1} = \left[\int_0^{0.9} \left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.0602604 \tag{4.29}$$

$$E_{PIA-1} = \left[\int_0^{1} \left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.0774785 \tag{4.30}$$

$$E_{PIA-1} = \left[\int_0^{2} \left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.202478 \tag{4.31}$$

dir. Bunun yanı sıra kolokasyon yöntemi ile de bilinmeyen sabitler elde edilebilir. Denklem (3.11) için $t \in [0,1]$ aralığından $t_0 = 0.4$ ve $t = 0.9$ kolokasyon noktaları seçilerek

$$Re(0.4; P_0, P_1) = Re(0.9; P_0, P_1) = 0 \tag{4.32}$$

eşitliği elde edilir. (4.32)'nin çözülmesiyle

$$P_0 = 1.16947 \qquad P_1 = 0.760547 \tag{4.33}$$

değerleri elde edilir. Bu değerler u_2 de yerine konulursa

$$u_2 = 1 - 1.04058t + 0.889437t^2 - 0.346724t^3 \tag{4.34}$$

olduğu görülür. Bu durumda ikinci mertebe (4.34) yaklaşımı için L^2 hatası

$$E_{Kolokasyon} = \left[\int_0^{0.9} \left[\frac{1}{1+t} - u_2 \right]^2 dt \right]^{(1/2)} = 0.00651194 \tag{4.35}$$

olarak hesaplanır. Farklı kolokasyon noktalarının seçilmesiyle farklı yaklaşımlar ve dolayısıyla da farklı hatalar elde edileceği unutulmamalıdır. Hangi kolokasyon noktalarının daha az hataya yol açacağı kesin olarak bilinemeyeceğinden $P_0, P_1, \ldots$ bilinmeyenleri ilk bahsedilen metotla bulunmaya çalışılır. Ancak integral hesabının güç olması durumunda kolokasyon yöntemine başvurulacaktır.

Buraya kadar elde edilen hataların sadece 2. mertebeden yaklaşımlar için hesaplandığı unutulmamalıdır.Yaklaşımların doğruluğunu artırmak için aynı prosedürler u_3, u_4 veya daha yüksek mertebeden OPIA-1 çözümlerine uygulanabilir. Şekil 4 den daha yüksek mertebe için yaklaşımın ne derece iyileştiği gözlemlenebilir. Daha yüksek mertebeden çözümlere ulaşmak için sembolik bir program kullanırken bile gereken CPU zamanının oldukça artacağını unutmamak gerekir. Hesaplamalar için gereken CPU zamanının bir nebze azaltılabilmesi için 3 bölümde anlatılan tek parametreye dayalı işlemler yapılabilir.

Tablo 4.1. Örnek (4.0.1) için farklı metotlarla elde edilen 2. mertebe sonuçların karşılaştırılması

t	Taylor	PIA-1	OPIA-1	Tam Sonuç
0.	1.	1.	1.	1.
0.1	0.91	0.909667	0.909074	0.909091
0.2	0.84	0.837333	0.83051	0.833333
0.3	0.79	0.781	0.763086	0.769231
0.4	0.76	0.738667	0.705585	0.714286
0.5	0.75	0.708333	0.656786	0.666667
0.6	0.76	0.688	0.615469	0.625
0.7	0.79	0.675667	0.580417	0.588235
0.8	0.84	0.669333	0.550407	0.555556
0.9	0.91	0.667	0.524223	0.526316
1.	1.	0.666667	0.500643	0.5

Tablo 4.2. Örnek (4.0.1) için farklı metotlarla elde edilen 2. mertebe yaklaşımların mutlak hataları

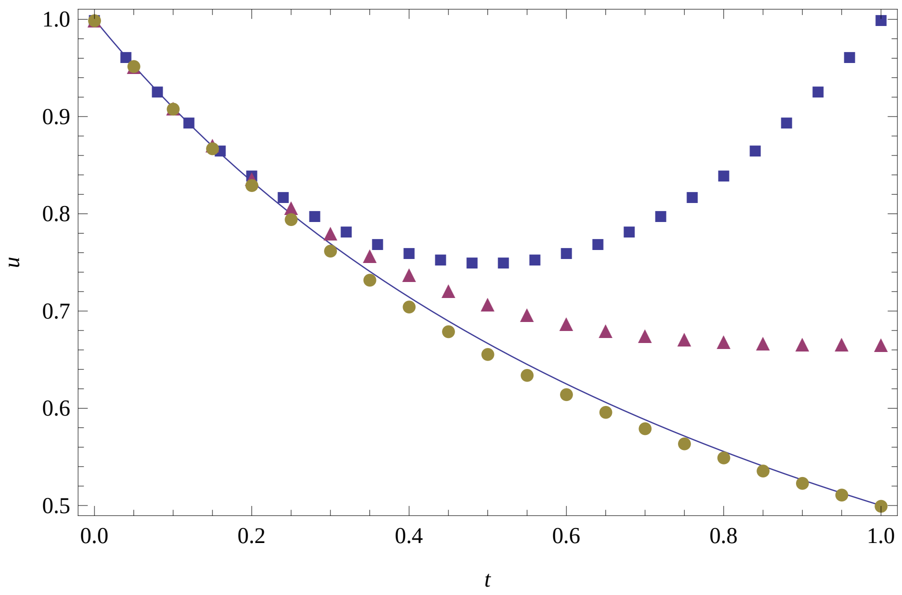
t	Taylor	PIA-1	OPIA-1
0.1	0.0000909091	0.000575758	0.0000165596
0.2	0.00133333	0.004	0.00282373
0.3	0.00623077	0.0117692	0.00614452
0.4	0.0182857	0.024381	0.00870094
0.5	0.0416667	0.0416667	0.009881
0.6	0.081	0.063	0.00953058
0.7	0.141235	0.0874314	0.00781879
0.8	0.227556	0.113778	0.00514813
0.9	0.345316	0.140684	0.00209313
1.	0.5	0.166667	0.000642696

Tablo 4.3. Örnek (4.0.1) için farklı metotlarla elde edilen 4. mertebe sonuçların karşılaştırılması

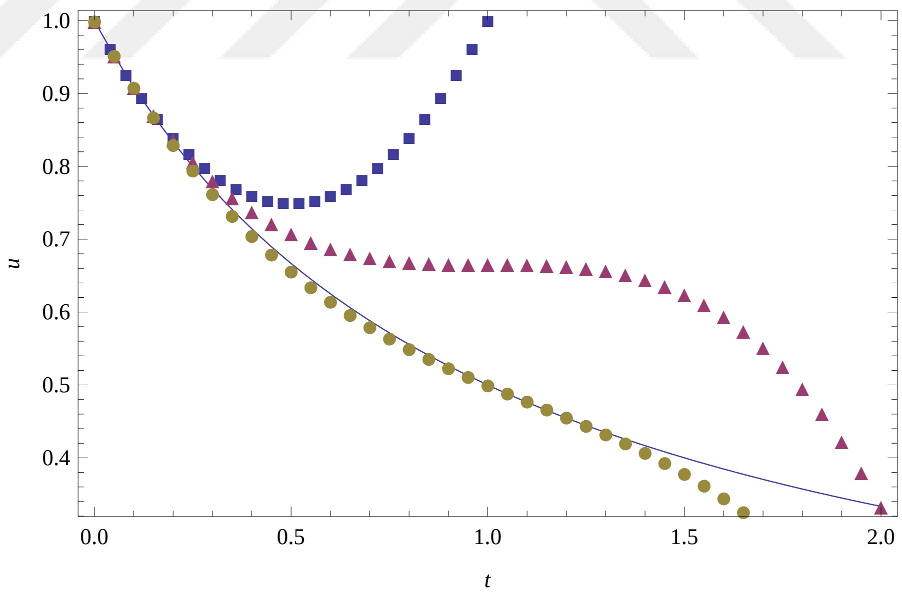
t	Taylor	PIA-1	OPIA-1	Tam Sonuç
0.	1.	1.	1.	1.
0.1	0.9091	0.909092	0.909087	0.909091
0.2	0.8336	0.83336	0.833338	0.833333
0.3	0.7711	0.769395	0.76925	0.769231
0.4	0.7216	0.714853	0.714295	0.714286
0.5	0.6875	0.668098	0.666624	0.666667
0.6	0.6736	0.627971	0.624873	0.625
0.7	0.6871	0.593628	0.588025	0.588235
0.8	0.7376	0.564435	0.555314	0.555556
0.9	0.8371	0.539885	0.526158	0.526316
1.	1.	0.519547	0.500106	0.5

Tablo 4.4. Örnek (4.0.1) için farklı metotlarla elde edilen 4. mertebe yaklaşımların mutlak hataları

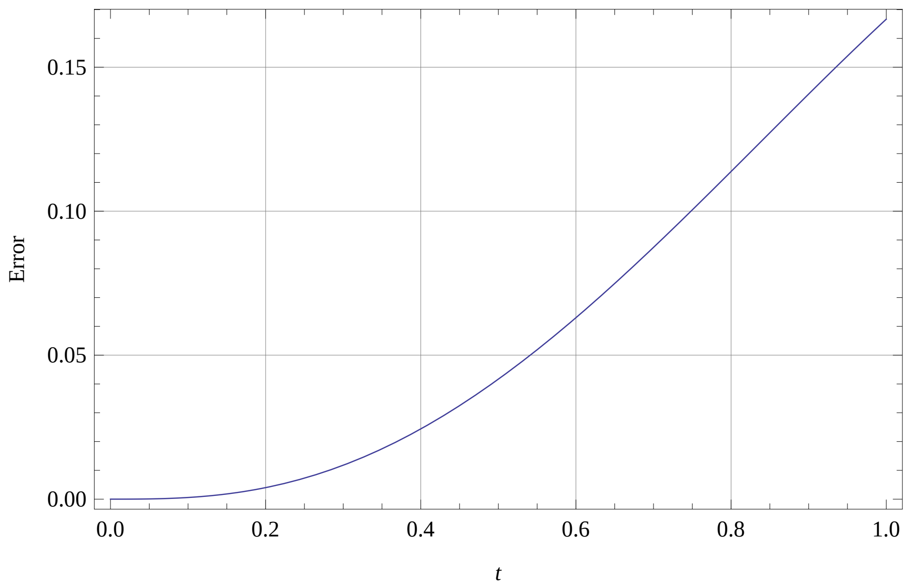
t	Taylor	PIA-1	OPIA-1
0.	0.	0.	0.
0.1	9.090909090 $\times 10^{-6}$	1.047549857 $\times 10^{-6}$	4.004343374 $\times 10^{-6}$
0.2	0.000266667	0.0000267582	4.325123707 $\times 10^{-6}$
0.3	0.00186923	0.000164429	0.0000197156
0.4	0.00731429	0.000567322	$9.47442885 \times 10^{-6}$
0.5	0.0208333	0.00143179	0.000042861
0.6	0.0486	0.00297126	0.000127481
0.7	0.0988647	0.00539316	0.000210743
0.8	0.182044	0.00887941	0.000241492
0.9	0.310784	0.0135697	0.000157964
1.	0.5	0.0195473	0.000105838



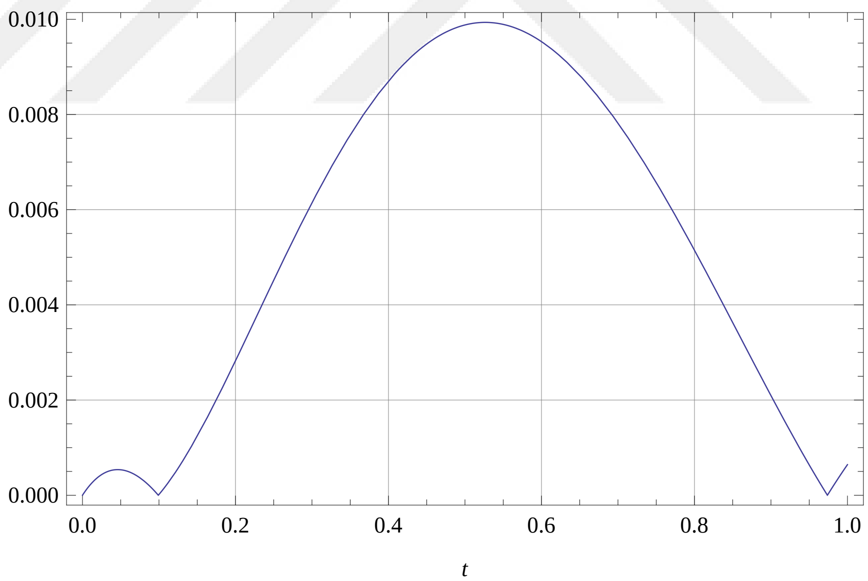
Şekil 4.1. Örnek (4.0.1) için $t \in [0,1]$ aralığındaki 2.mertebe Taylor (■), PIA-1 (▲) ve OPIA-1 (●) yaklaşımları ve tam çözüm (–)



Şekil 4.2. Örnek (4.0.1) için $t \in [0,2]$ aralığındaki 2.mertebe Taylor (■), PIA-1 (▲) ve OPIA-1 (●) yaklaşımları ve tam çözüm (–)



Şekil 4.3. Örnek (4.0.1) için PIA-1 u_2 yaklaşımının mutlak hatası



Şekil 4.4. Örnek (4.0.1) için OPIA-1 u_2 yaklaşımının mutlak hatası

Tek Parametreli OPIA-1 Çözümü

(4.15) denklemi ve sonraki iterasyonlarda $P_0, P_1, ...$ parametrelerinin yerine yalnızca p parametresi konulup aynı adımlar takip edilirse

$$u_1 = 1 - pt \tag{4.36}$$

$$u_2 = u_1 + p\left(-\frac{1}{3}p^2t^3 + pt^2 + pt - t\right) \tag{4.37}$$

$$u_3 = u_2 + p\begin{bmatrix} -t + 2pt - p^2t + 2pt^2 - 2p^2t^2 - 2p^2t^3 + \frac{5p^3t^3}{3} \\ -\frac{p^4t^3}{3} + \frac{7p^3t^4}{6} - \frac{p^4t^4}{2} - \frac{7p^4t^5}{15} + \frac{2p^5t^5}{15} + \frac{p^5t^6}{9} - \frac{p^6t^7}{63} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

$$u_4 = u_3 + p\begin{bmatrix} -t + 3pt - 3p^2t + p^3t + 3pt^2 - 6p^2t^2 + 3p^3t^2 \\ -\frac{20p^4t^3}{3} + \frac{7p^5t^3}{3} - \frac{p^6t^3}{3} + \frac{17p^3t^4}{3} - \frac{19p^4t^4}{2} \\ +\frac{31p^5t^4}{6} - p^6t^4 - \frac{76p^4t^5}{15} + \frac{118p^5t^5}{15} - \frac{64p^6t^5}{15} + \\ \frac{16p^7t^5}{15} - \frac{2p^8t^5}{15} + \frac{329p^5t^6}{90} - \frac{227p^6t^6}{45} + \frac{7p^7t^6}{3} \\ -\frac{7p^8t^6}{18} - \frac{232p^6t^7}{105} + \frac{862p^7t^7}{315} - \frac{121p^8t^7}{105} + \frac{62p^9t^7}{315} \\ -\frac{p^{10}t^7}{63} + \frac{313p^7t^8}{280} - \frac{43p^8t^8}{36} + \frac{2p^9t^8}{5} - \frac{p^{10}t^8}{24} - \\ \frac{5419p^8t^9}{11340} + \frac{2447p^9t^9}{5670} - \frac{1307p^{10}t^9}{11340} + \frac{4p^{11}t^9}{405} - 5p^2t^3 \\ +\frac{1609p^9t^{10}}{9450} - \frac{229p^{10}t^{10}}{1890} + \frac{14p^{11}t^{10}}{675} - \frac{124p^{10}t^{11}}{2475} \\ +\frac{1363p^{11}t^{11}}{51975} - \frac{134p^{12}t^{11}}{51975} + \frac{19p^{11}t^{12}}{1620} - \frac{43p^{12}t^{12}}{11340} \\ -\frac{11p^{12}t^{13}}{5265} + \frac{4p^{13}t^{13}}{12285} + \frac{p^{13}t^{14}}{3969} - \frac{p^{14}t^{15}}{59535} + \frac{29p^3t^3}{3} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

yaklaşımları elde edilir. Karşılaştırma bakımından öncelikle 2. mertebeden u_2 çözümü için optimal p parametresini elde edelim. Bunun için

$$\begin{aligned} J(p) &= \int_0^{0.9} \left[Re\,(t;p)\right]^2 dt = \int_0^{0.9} \left[{u_2}' + (u_2)^2\right]^2 dt = 0.9 - 6.84p \\ &+21.924p^2 - 38.7621p^3 + 43.6537p^4 - 35.494p^5 + 21.9815p^6 - 9.98841p^7 \\ &+3.33845p^8 - 0.747519p^9 + 0.10266p^{10} - 0.00771319p^{11} + 0.000241393p^{12} \end{aligned} \tag{4.40}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial J}{\partial p} = 0 \tag{4.41}$$

ifadesinden (4.40) denklemi p'ye göre 12. dereceden olduğundan (4.41) eşitliğinden 11 adet p elde edilecektir. Ancak tek reel kök

$$p = 0.787554 \tag{4.42}$$

olarak bulunur. Bu değer ikinci mertebeden tek parametreli OPIA-1 çözümü içine yerleştirilirse

$$u_2 = 1. - 0.954866t + 0.620241t^2 - 0.162824t^3 \tag{4.43}$$

yaklaşık çözümü elde edilir. Daha iyi sonuçlar elde etmek için ise u_4 yaklaşımı için aynı işlemler yapılabilir.

$$Re(t;p) = F\left(u_4\left(t;p\right)\right) = \left(u_4\right)' + \left(u_4\right)^2 \tag{4.44}$$

ve

$$J(p) = \int\limits_0^{0.9} \left[Re\left(t;p\right)\right]^2 dt \tag{4.45}$$

olmak üzere $J_p = 0$ eşitliğinden

$$p = 0.811158 \tag{4.46}$$

$$p = 0.848746 \tag{4.47}$$

$$p = 0.888349 \tag{4.48}$$

3 adet reel kök çıkar. Hangi değerin en az hataya yol açacağından emin olmak için Şekil 4.5'e bakarız. Açıkca görülmektedir ki en az hata $p = 0.88$ civarında oluşmaktadır. O halde optimum değer $p = 0.888349$'dur. Bu optimum p değeri 4.mertebeden u_4 yaklaşımı (4.39)'de yerine konulursa:

$$\begin{aligned}
u_4 &= 1. - 0.999845t + 0.994899t^2 - 0.954364t^3 + 0.825892t^4 - 0.624554t^5 \\
&+0.419814t^6 - 0.25137t^7 + 0.133123t^8 - 0.061507t^9 + 0.0241794t^{10} - \\
&0.00784167t^{11} + 0.00201932t^{12} - 0.000386249t^{13} + 0.0000480278t^{14} - \\
&2.844363896395211 \times 10^{-6} t^{15}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

fonksiyonu elde edilir. (4.49) yaklaşımındaki hata ise

$$\left[\int\limits_0^{0.9} \left[\frac{1}{1+t} - u_4\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.0001176 \tag{4.50}$$

dır. PIA-1 ile 4. mertebeden yaklaşım ise

$$\begin{aligned}
(u_4)_{PIA-1} &= 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \frac{13t^5}{15} + \frac{2t^6}{3} - \frac{29t^7}{63} + \\
&\frac{71t^8}{252} - \frac{86t^9}{567} + \frac{22t^{10}}{315} - \frac{5t^{11}}{189} + \frac{t^{12}}{126} - \frac{t^{13}}{567} + \frac{t^{14}}{3969} - \frac{t^{15}}{59535}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak bulunur. Hata ise

$$\left[\int_{0}^{0.9}\left[\frac{1}{1+t}-u_4\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.00446365 \tag{4.52}$$

olarak hesaplanır. 4. mertebeden PIA-1, OPIA-1 ve Taylor seri çözümlerinin karşılaştırılması ve mutlak hatalar için tablolar 4.3, 4.4 ile şekiller 4.6,4.7,4.8,4.9 'a bakınız.

OPIA-2 Çözümü

(4.1) denklemi için OPIA-2 algoritması (3.4)'den hatırlanacağı üzere

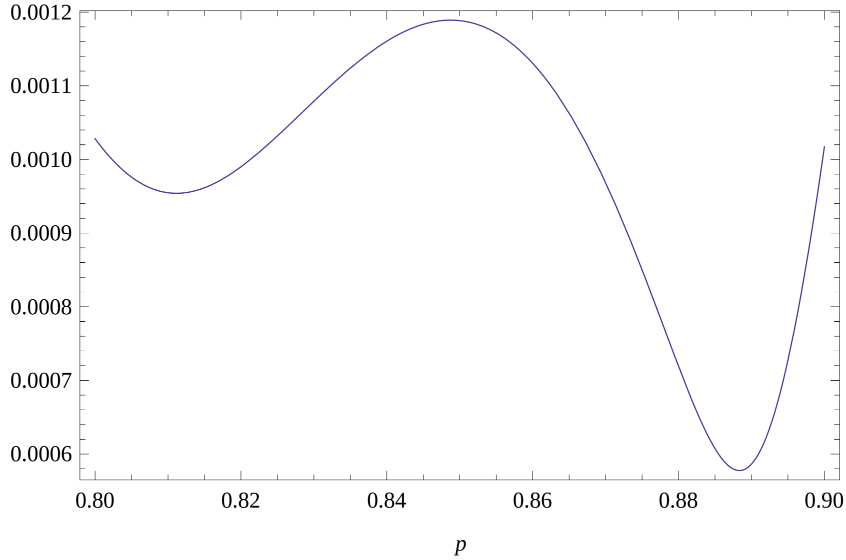
$$N+N_u(u_c)_n\varepsilon+N_{u'}(u_c')_n\varepsilon+N_\varepsilon\varepsilon+N_{u'u}(u_c')_n(u_c)_n\varepsilon^2+\frac{N_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2}{2}+ \\ \frac{N_{u'u'}(u_c')_n^2\varepsilon^2}{2}+\frac{N_{uu}(u_c)_n^2\varepsilon^2}{2}+N_{u'\varepsilon}(u_c')_n\varepsilon^2+N_{u\varepsilon}(u_c)_n\varepsilon^2=-L \tag{4.53}$$

idi. Bu ifadeden u' terimlerini çıkarırsak

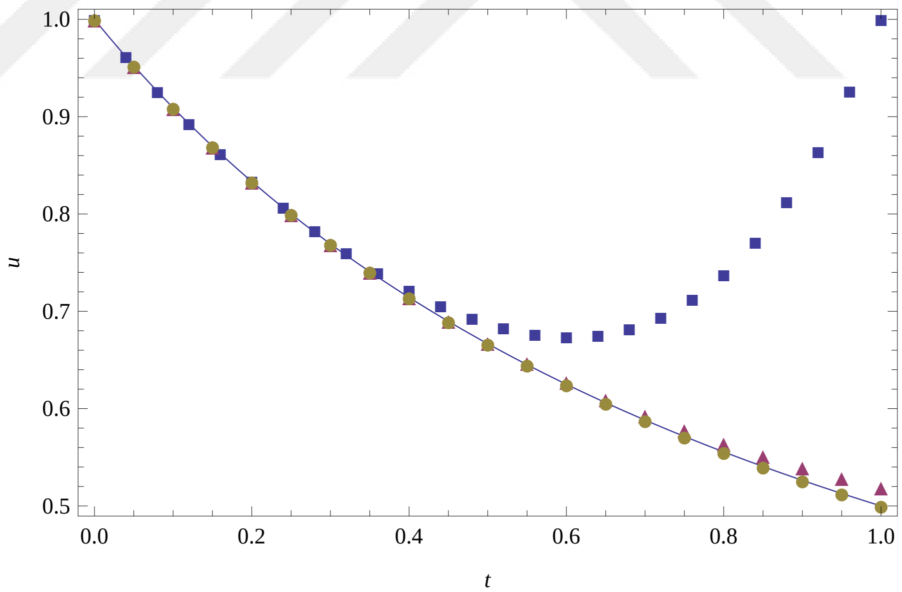
$$N+N_u(u_c)_n\varepsilon+N_\varepsilon\varepsilon+\frac{N_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2}{2}+\frac{N_{uu}(u_c)_n^2\varepsilon^2}{2}+N_{u\varepsilon}(u_c)_n\varepsilon^2=-L \tag{4.54}$$

ifadesine dönecektir. Burada

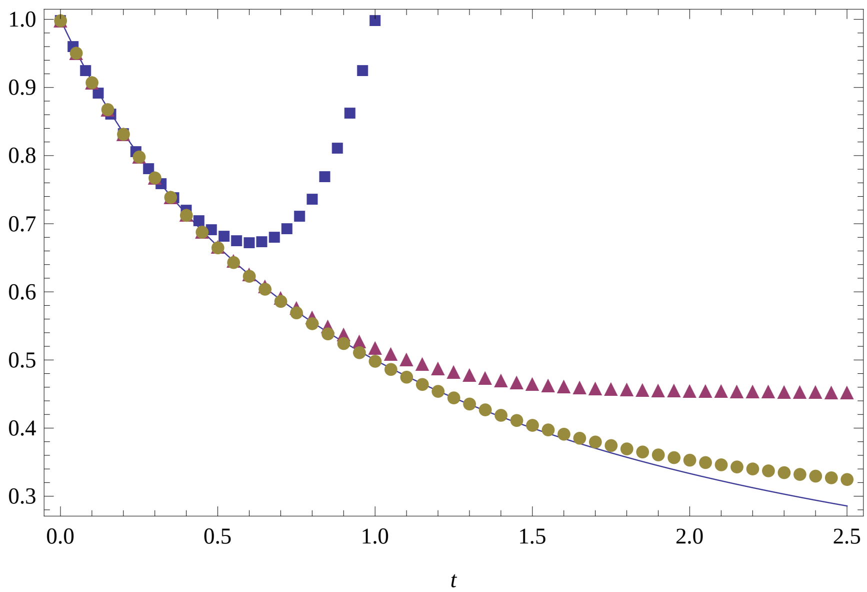
$$\begin{aligned}
N &= N(u_n,\varepsilon)=\varepsilon(u_n)^2,\\
N_u &= \frac{\partial N}{\partial u}(u_n,\varepsilon)=2\varepsilon(u_n),\\
N_\varepsilon &= \frac{\partial N}{\partial \varepsilon}(u_n,\varepsilon)=(u_n)^2,\\
N_{uu} &= \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}(u_n,\varepsilon)=2\varepsilon,\\
N_{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{\partial N}{\partial \varepsilon^2}(u_n,\varepsilon)=0,\\
N_{u\varepsilon} &= \frac{\partial^2 N}{\partial u\partial \varepsilon}(u_n,\varepsilon)=2(u_n)
\end{aligned} \tag{4.55}$$



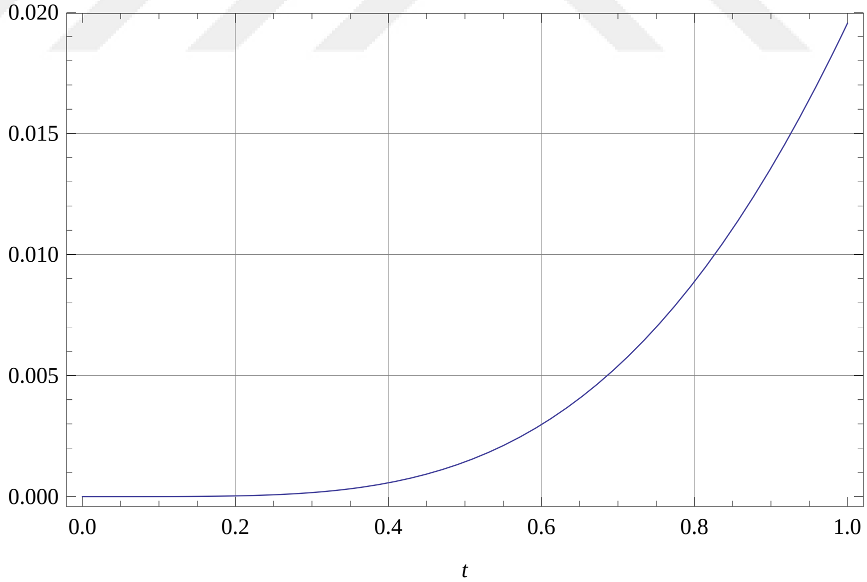
Şekil 4.5. Örnek (4.0.1) için tek parametreli OPIA-1 yaklaşımındaki p parametrelerinin hataları



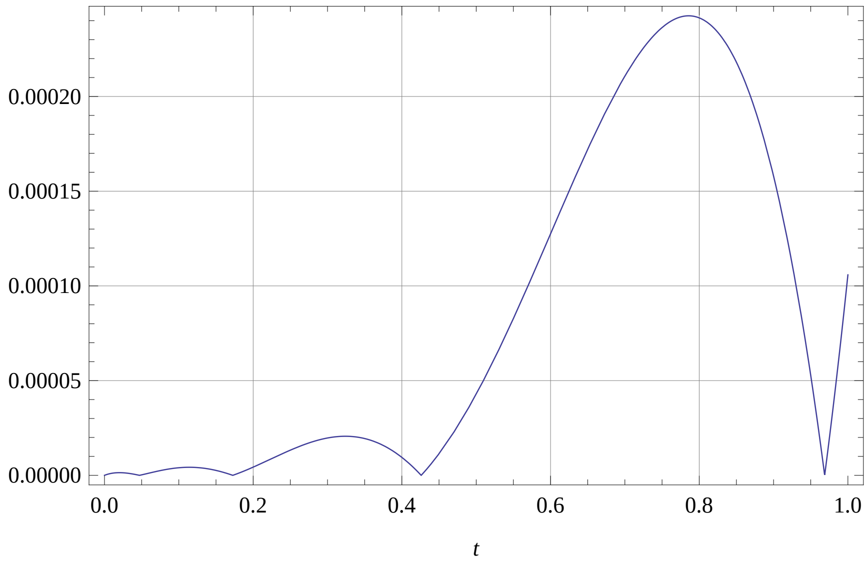
Şekil 4.6. Örnek (4.0.1) için $t \in [0, 1]$ aralığındaki 4.mertebe Taylor (■), PIA-1 (▲) ve OPIA-1 (●) yaklaşımları ve tam çözüm (–)



Şekil 4.7. Örnek (4.0.1) için $t \in [0,2]$ aralığındaki 4.mertebe Taylor (■), PIA-1 (▲) ve OPIA-1 (•) yaklaşımları ve tam çözüm (–)



Şekil 4.8. Örnek (4.0.1) için PIA-1 u_4 yaklaşımının mutlak hatası



Şekil 4.9. Örnek (4.0.1) için OPIA-1 u_4 yaklaşımının mutlak hatası

ifadeleri $\varepsilon = 0$'da hesap edilirse:

$$\begin{aligned} N &= N(u_n, 0) = 0, \\ N_u &= \frac{\partial N}{\partial u}(u_n, 0) = 0, \\ N_\varepsilon &= \frac{\partial N}{\partial \varepsilon}(u_n, 0) = (u_n)^2, \\ N_{uu} &= \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}(u_n, \varepsilon) = 0, \\ N_{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{\partial N}{\partial \varepsilon^2}(u_n, 0) = 0, \\ N_{u\varepsilon} &= \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial \varepsilon}(u_n, 0) = 2(u_n) \end{aligned} \tag{4.56}$$

olacaktır. (4.7) ve (4.56) eşitlikleri denklem (4.54)'de yerine konulursa bu ifade

$$(u_n)^2 \varepsilon + 2(u_n)(u_c)_n \varepsilon^2 = -\left(u_n{}' + \varepsilon (u_c')_n\right) \tag{4.57}$$

şekline dönüşür. $\varepsilon = 1$ yazılarak (4.1) problemi için OPIA-2:

$$(u_c')_n + 2(u_n)(u_c)_n = -u_n{}' - (u_n)^2 \tag{4.58}$$

olarak bulunur. Başlangıç fonksiyonu olarak yine $u_0 = 1$ seçilerek (4.58) denklemi içine yerleştirilirse

$$(u_c')_0 + 2(u_c)_0 = -1 \tag{4.59}$$

sıfırıncı mertebeden OPIA-2 problemi bulunur. Başlangıç şartları göz önüne alınarak (4.59) denklemi çözülürse birinci mertebeden OPIA-2 çözümü

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}P_0 e^{-2t}\left(e^{2t} - 1\right) \tag{4.60}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (4.60) denklemi (4.58) içine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} &\left(u_c'\right)_n + 2\left(1 - \tfrac{1}{2}P_0 e^{-2t}\left(e^{2t} - 1\right)\right)\left(u_c\right)_n = \\ &P_0 - e^{-2t}\left(-1 + e^{2t}\right)P_0 - \left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-2t}\left(-1 + e^{2t}\right)P_0\right)^2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

problemi açığa çıkar. 1. iterasyondan sonraki problemlerde değişken katsayılı diferansiyel denklemlerle karşılaşmamak adına (4.58) algoritmasının ikinci terimindeki u_n yerine u_0 fonksiyonu kullanılarak (4.1) problemi için OPIA-2:

$$\left(u_c'\right)_n + 2\left(u_c\right)_n = -{u_n}' - \left(u_n\right)^2 \tag{4.62}$$

şeklinde yeniden ele alınabilir. Bu durumda (3.7),(4.60),(4.62) denklemleri kullanılarak ikinci mertebe OPIA-2 çözümü

$$u_2 = u_1 - \frac{e^{-4t}P_1}{8}\left[\begin{array}{l} -4e^{2t} + 4e^{4t} + 4e^{2t}P_0 - 4e^{4t}P_0 \\ -P_0^2 + e^{4t}P_0^2 - 4e^{2t}tP_0^2 \end{array}\right] \tag{4.63}$$

olarak bulunur. Bilinmeyen sabitleri bulmak için OPIA-1 çözümlerinde uygulanan işlemler tekrarlanır. Karşılaştırma yapılabilmesi için aynı mertebeden çözümler için aynı aralıkta rezidüler hesap edilir.

$$Re\left(t; P_0, P_1\right) = F\left(u_2\left(t; P_0, P_1\right)\right) = \left(u_2\right)' + \left(u_2\right)^2 \tag{4.64}$$

ve

$$\begin{aligned} J(P_0, P_1) = &\int_0^{0.9} \left[Re\left(t; P_0, P_1\right)\right]^2 dt = 0.9 - 1.8P_1 + 1.05423P_1^2 - 0.154234P_1^3 \\ &+P_0^7\left(0.0000244971 - 0.0000244971P_1\right)P_1^3 + 5.8575651 \times 10^{-7}P_0^8P_1^4 \\ &+P_0^6P_1^2\left(0.000397643 - 0.000927833P_1 + 0.00042214P_1^2\right) + 0.00942895P_1^4 \\ &+P_0^5P_1\left(0.00302321 - 0.0129887P_1 + 0.013784P_1^2 - 0.0038185P_1^3\right) + \\ &P_0^3\left(-0.154234 + 0.676354P_1 - 0.832906P_1^2 + 0.357571P_1^3 - 0.0467854P_1^4\right) \\ &+P_0\left(-1.8 + 3.90847P_1 - 2.57117P_1^2 + 0.500418P_1^3 - 0.0377158P_1^4\right) + \\ &P_0^4\left(0.009428 - 0.07827P_1 + 0.15708P_1^2 - 0.1003P_1^3 + 0.018896P_1^4\right) \\ &+P_0^2\left(1.05423 - 2.7254P_1 + 2.21215P_1^2 - 0.61641P_1^3 + 0.0595969P_1^4\right) \end{aligned} \tag{4.65}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial J}{\partial P_0} = \frac{\partial J}{\partial P_1} = 0 \tag{4.66}$$

eşitliği çözülerek

$$P_0 = -1.11985 \qquad P_1 = 0.996716 \tag{4.67}$$

değerleri elde edilir. Bu değerler (4.63) denkleminde yerine konularak

$$u_2 = e^{-4t}\left(e^{2t}(0.624968t + 0.49652) + 0.347238e^{4t} + 0.156242\right) \tag{4.68}$$

ikinci mertebeden OPIA-2 yaklaşık çözümü bulunur. Buradaki hata ise

$$E_{OPIA-2} = \left[\int_0^{0.9}\left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.000681617 \tag{4.69}$$

dir. (4.62) algoritması ile PIA-2 metodundan elde edilen ikinci mertebe çözüm ise

$$(u_2)_{PIA-2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-2t}\left(-1 + e^{2t}\right) - \frac{1}{8}e^{-4t}\left(-1 + e^{4t} - 4e^{2t}t\right) \tag{4.70}$$

olarak elde edilmiştir [29]. PIA-2'nin hatası ise

$$E_{PIA-2} = \left[\int_0^{0.9}\left[\frac{1}{1+t} - (u_2)_{PIA-2}\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.00313912 \tag{4.71}$$

olarak hesap edilir. Dikkat edilirse PIA-2 ve OPIA-2 sonuçları PIA-1 ve OPIA-1 ile elde edilenlere göre daha tatmin edicidir.

Tek Parametreli OPIA-2 Çözümü

OPIA-2 iterasyonlarında aynı deneme fonksiyonu kullanılarak $P_0, P_1, \ldots$ parametrelerinin yerine yalnızca p parametresi kullanılırsa

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}pe^{-2t}\left(e^{2t} - 1\right) \tag{4.72}$$

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{8}e^{-4t}\left(p^2e^{4t} - 4p^2e^{2t}t - p^2 + 4pe^{2t} - 4pe^{4t} - 4e^{2t} + 4e^{4t}\right) \tag{4.73}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{pe^{-8t}}{384}\begin{bmatrix} 192e^{6t} - 192e^{8t} - 384e^{6t}p + 384e^{8t}p + 192e^{4t}p^2 \\ +192e^{6t}p^2 - 384e^{8t}p^2 - 240e^{4t}p^3 + 240e^{8t}p^3 + \\ 24e^{2t}p^4 + 96e^{4t}p^4 - 24e^{6t}p^4 - 96e^{8t}p^4 - 12e^{2t}p^5 \\ -24e^{4t}p^5 + 12e^{6t}p^5 + 24e^{8t}p^5 + p^6 + 3e^{2t}p^6 + \\ 18e^{4t}p^6 - 19e^{6t}p^6 - 3e^{8t}p^6 + 768e^{6t}p^2t \\ +192e^{4t}p^4t + 288e^{6t}p^4t - 96e^{4t}p^5t - 48e^{6t}p^5t + \\ 12e^{2t}p^6t + 48e^{4t}p^6t + 192e^{6t}p^4t^2 - 96e^{6t}p^5t^2 + \\ 48e^{4t}p^6t^2 + 24e^{6t}p^6t^2 - 960e^{6t}p^3t \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

yaklaşımlarına ulaşılır. Yakınsaklık kontrol parametresi p nin 2. mertebeden u_2 çözümü için optimal değerini elde etmek için

$$\begin{aligned} J(p) &= \int_0^{0.9} \left[Re\,(t;p)\right]^2 dt = \int_0^{0.9} \left[u_2{}' + (u_2)^2\right]^2 dt = \\ &0.9 - 3.6p + 6.01694p^2 - 5.60504p^3 + 3.40778p^4 - 1.56531p^5 + 0.57728p^6 \\ &-0.160108p^7 + 0.0330779p^8 - 0.00474633p^9 + 0.000446637p^{10} \\ &-0.0000244971p^{11} + 5.857565182 \times 10^{-7}p^{12} \end{aligned} \tag{4.75}$$

olmak üzere $J_p = 0$ denklemi çözülmelidir. p'ye göre 11. dereceden olan $J_p = 0$ denkleminin tek reel kökü

$$p = 1.07534 \tag{4.76}$$

tür. Bu değer ikinci mertebeden tek parametreli OPIA-2 çözümü içine yerleştirilirse

$$u_2 = e^{-4t}\left(e^{2t}(0.621742t + 0.497162) + 0.347403e^{4t} + 0.155436\right) \tag{4.77}$$

yaklaşık çözümü elde edilir. 2. mertebeden tek paramatreli OPIA-2 (TOPIA-2) için ise hata

$$\left[\int_0^{0.9}\left[\frac{1}{1+t} - u_2\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.000818891 \tag{4.78}$$

dir. Daha iyi sonuçlar elde etmek için ise u_3 yaklaşımı için aynı işlemler yapılabilir.

$$Re(t;p) = F\left(u_4\left(t;p\right)\right) = \left(u_3\right)' + \left(u_3\right)^2 \tag{4.79}$$

ve

$$\begin{aligned}
J(p) &= \int_0^{0.9} \left[u_3' + \left(u_3\right)^2\right]^2 dt = \\
&0.9 - 5.4p + 14.8881p^2 - 25.7117p^3 + 32.4804p^4 - 33.3386p^5 + \\
&29.5031p^6 - 22.8875p^7 + 15.5755p^8 - 9.34038p^9 + 4.97057p^{10} - \\
&2.36039p^{11} + 1.00459p^{12} - 0.383943p^{13} + 0.131769p^{14} - 0.0405368p^{15} \\
&+0.0111334p^{16} - 0.00271337p^{17} + 0.000581801p^{18} - 0.000108501p^{19} \\
&+0.0000173462p^{20} - \\
&2.3332115435314306 \times 10^{-6}p^{21} + 2.580455852480903 \times 10^{-7}p^{22} \\
&-2.2841720661691283 \times 10^{-8}p^{23} + 1.5652991656617332 \times 10^{-9}p^{24} \\
&-7.852192901378919 \times 10^{-11}p^{25} + 2.0598932367788527 \times 10^{-12}p^{26} \\
&+1.7420848607124714 \times 10^{-13}p^{27} - 4.0038535490747205 \times 10^{-14}p^{28}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

olmak üzere $J_p = 0$ eşitliğinden

$$p = -18.1517 \tag{4.81}$$

$$p = 1.05469 \tag{4.82}$$

$$p = 3.83318 \tag{4.83}$$

3 adet reel kök çıkar. Hangi değerin en az hataya yol açacağından emin olmak için Şekil 4.5'e bakarız. Açıkca görülmektedir ki en az hata $p = 1$ civarında oluşmaktadır. O halde optimum değer $p = 1.05469$'dur. Bu optimum p değeri 3.mertebeden yaklaşım olan u_3'de yerine konulursa:

$$u_3 = e^{-8t}\begin{bmatrix} 0.00378041 + 0.288445e^{8t} + e^{2t}(0.0498932 + 0.0453649t) + \\ e^{4t}\left(0.26818 + 0.489875t + 0.18146t^2\right) \\ +e^{6t}\left(0.389702 + 0.646322t + 0.399145t^2\right) \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

fonksiyonu elde edilir. (4.84) yaklaşımındaki hata ise

$$\left[\int_0^{0.9}\left[\frac{1}{1+t} - u_3\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.00004968 \tag{4.85}$$

dir. PIA-1 ile 3. mertebeden yaklaşım ise

$$\left(u_3\right)_{PIA-2} = \frac{e^{-8t}}{384}\begin{pmatrix} 6e^{4t}\left(8t^2 + 24t + 15\right) + e^{6t}\left(120t^2 + 240t + 161\right) \\ +3e^{2t}(4t + 5) + 117e^{8t} + 1 \end{pmatrix} \tag{4.86}$$

Tablo 4.5. Örnek 4.0.1 için farklı metotlarla elde edilen 2. mertebe yaklaşımların mutlak hataları

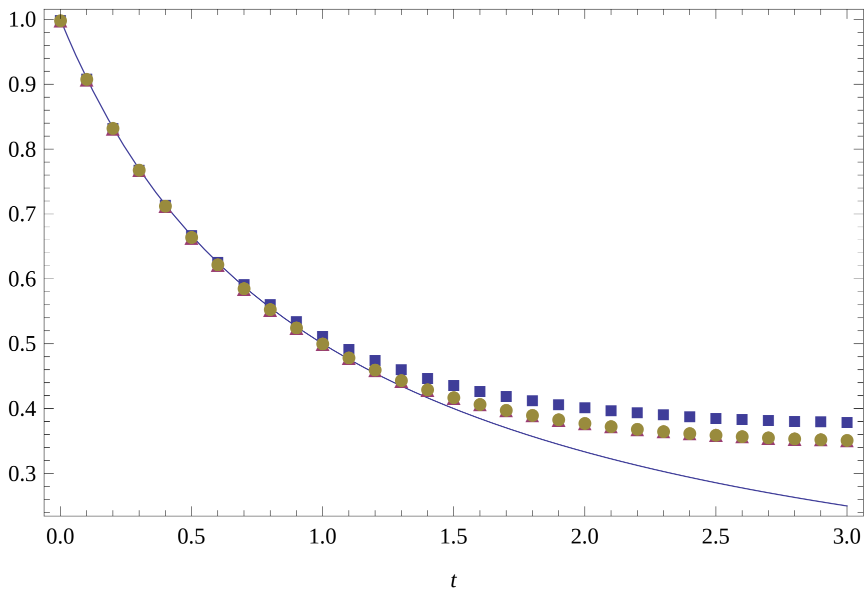
t	PIA-2	TOPIA-2	OPIA-2
0.1	1.010856435×10^{-6}	0.000448913	0.000563536
0.2	0.0000248148	0.000521796	0.000721848
0.3	0.000146071	0.000202173	0.000459423
0.4	0.000481625	0.000365238	0.000075519
0.5	0.00115982	0.000969385	0.00066747
0.6	0.00229511	0.00139518	0.00109682
0.7	0.00397338	0.00145816	0.00117499
0.8	0.00624659	0.00101967	0.000759768
0.9	0.00913362	0.0000102373	0.000241679
1.	0.0126247	0.00167679	0.00187687

olmak üzere hata

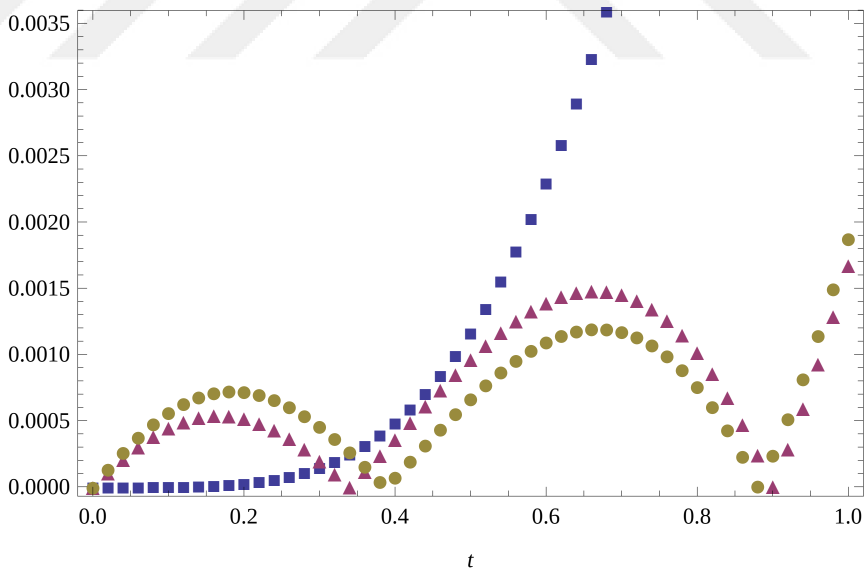
$$E_{PIA-2} = \left[\int_0^{0.9}\left[\frac{1}{1+t} - (u_2)_{PIA-2}\right]^2 dt\right]^{(1/2)} = 0.000348461 \tag{4.87}$$

dir. Görüldüğü üzere tek parametreli OPIA-2 metodunun hatası daha azdır.

OPIA-2 yaklaşımı için 3. mertebeden sonraki adımlar için bile gereken CPU zamanı oldukça fazla iken bu durum tek parametreli OPIA-2 (TOPIA-2) için geçerli değildir. OPIA-2 her ne kadar TOPIA-2 ye göre daha iyi sonuçlar verse de süre açısından bakıldığında en azından bu örnek için TOPIA-2'nin kullanılması daha avantajlıdır denilebilir. Tablo 4.5'de PIA-2, TOPIA-2 ve OPIA-2 metotları ile elde edilen 2. mertebeden yaklaşımların mutlak hataları görülebilir. Şekil 4.10 ve 4.11'den de bu metotlar için genel bir karşılaştırma yapılabilir.



Şekil 4.10. Örnek (4.0.1) için $t \in [0, 1]$ aralığındaki 2.mertebe PIA-2 (■), TOPIA-2 (▲) ve OPIA-2 (•) yaklaşımları ve tam çözüm (–)



Şekil 4.11. Örnek (4.0.1) için $t \in [0, 1]$ aralığındaki 2.mertebe PIA-2 (■), TOPIA-2 (▲) ve OPIA-2 (•) yaklaşımlarının mutlak hataları

4.1. Lane-Emden Tipi Denklemler

Son yüzyılda birçok araştırmacının çalışma konusu olan Emden-Fowler denklemi matematiksel fizik alanının en önemli denklemlerinden birisidir [30, 31]. Birçok önemli olayın modellenmesi sonucu ortaya çıkan bu denklemin genel hali

$$u(0) = A, u'(0) = B$$

şartları altında

$$u'' + \alpha(t)u' + \beta(t)\gamma(u) = 0 \tag{4.88}$$

olarak tanımlanır. Burada A, B sabitler ve $\alpha(t), \beta(t), \gamma(u)$'lar keyfi fonksiyonlardır. Farklı $\gamma(u)$ fonksiyonları için (4.88) denklemi yıldızların yapı teorisi,termiyonik akımlar ve izotermal gaz küreleri gibi birçok farklı olayın matematiksel karşılığına dönüşmektedir [32]. k, β_0, s ve r ler reel sabitler olmak üzere $\alpha(t) = \frac{k}{t}, \beta(t) = \beta_0 t^r, \gamma(u) = u^s$ olduğunda, (4.88) genel denklemi klasik Emden-Fowler denklemi halini alır:

$$u'' + \frac{k}{t}u' + \beta_0 t^r u^s = 0; \quad u(0) = A, u'(0) = B. \tag{4.89}$$

Klasik Emden-Fowler denklemi özel olarak moleküllerinin karşılıklı çekimi altında hareket eden küresel bir bulutun ısıl davranışını modellemek için kullanılır [33]. Ek olarak

$$y(0) = A, y'(0) = 0$$

sınır şartları ile beraber (4.89) denkleminde $r = 0$ ve $k = 2$ seçilecek olursa astrofizikte sıkça karşılaşılan standard Lane-Emden denklemi

$$u'' + \frac{2}{t}u' + \beta_0 u^s = 0 \tag{4.90}$$

elde edilir. Bu denkleme yaklaşık çözümler önerebilmek için birçok farklı yöntem kullanılmıştır [34–37]. Bu bölümde ise farklı $\beta(t), \gamma(u)$ seçimleriyle elde edilen yine Lane-Emden türü olan

$$u'' + \frac{2}{t}u' + \beta(t)\gamma(u) = 0; \quad u(0) = A, u'(0) = 0 \tag{4.91}$$

denklemi OPIM metodu ile ele alınacaktır.

Örnek 4.1.1. Yıldız yapı teorisinin temel denklemi olan birinci çeşit Lane-Emden tipi

$$u'' + \frac{2}{t}u' + u^5 = 0, \;\; u(0) = 1, u'(0) = 0, \;\; t \geq 0 \tag{4.92}$$

denklemini ele alalım [38, 39]. Bu denklemin tam çözümü

$$u(t) = \left(1 + \frac{t^2}{3}\right)^{-1/2} \tag{4.93}$$

olarak verilmiştir [40].

Perturbasyon parametresi ε, (4.92) denklemine

$$F(u'', u', u, \varepsilon) = u'' + \frac{2\varepsilon}{t}u' + \varepsilon u^5 = L + N = 0 \tag{4.94}$$

şeklinde yerleştirilir ve

$$L = u'', N = \varepsilon\left(\frac{2}{t}u' + u^5\right) \tag{4.95}$$

olmak üzere parçalanırsa (2.9) algoritması

$$N + N_u(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}(u_c{}')_n\varepsilon + N_\varepsilon\varepsilon = -L \tag{4.96}$$

halini alacaktır. (4.96) denkleminden (4.92) için

$$(u_c)''_n = -(u_n)'' - \frac{2}{t}(u_n)' - (u_n)^5 \tag{4.97}$$

algoritması elde edilir. Başlangıç şartlarını sağlayan $u_0 = 1$, başlama fonksiyonu olarak seçilebilir. Bu fonksiyonun (4.97) algoritmasına yerleştirilmesiyle

$$(u_c)''_n = -1, \quad u(0) = u'(0) = 0 \tag{4.98}$$

birinci mertebe problemi ortaya çıkar. Bu problemin çözülmesiyle

$$(u_c)_0 = -\frac{t^2}{2} \tag{4.99}$$

ilk düzeltme terimi bulunur. Bu terimin başına yardımcı P_0 parametresi konularak başlangıç fonksiyonuna eklenmesiyle

$$u_1 = 1 - \frac{P_0 t^2}{2} \tag{4.100}$$

birinci mertebe OPIA-1 çözümü elde edilir. İterasyonlara devam edilerek daha yüksek mertebe çözümlere aşağıdaki şekilde ulaşılabilir:

$$u_2 = 1 - \frac{P_0 t^2}{2} + \frac{P_1}{88704}\left[\begin{array}{l} 21P_0^5 t^{12} - 308P_0^4 t^{10} + 1980P_0^3 t^8 - 7392P_0^2 t^6 + \\ 18480P_0 t^4 + 133056P_0 t^2 - 44352t^2 \end{array}\right] \tag{4.101}$$

$$
\begin{aligned}
u_3 = 1 - \frac{P_0 t^2}{2} + \frac{P_1}{88704}&\begin{bmatrix} 21P_0^5t^{12} - 308P_0^4t^{10} + 1980P_0^3t^8 - 7392P_0^2t^6 + \\ 18480P_0t^4 + 133056P_0t^2 - 44352t^2 \end{bmatrix} \\
+P_2 \times &\begin{bmatrix} \frac{P_0^5t^{12}}{4224} + \frac{1}{288}P_0^4t^{10} + \frac{5}{224}P_0^3t^8 + \frac{1}{12}P_0^2t^6 + \frac{5P_0t^4}{24} + \\
\frac{5P_1t^4}{24} + \frac{9}{2}P_0P_1t^2 - \frac{3P_0t^2}{2} - \frac{3P_1t^2}{2} + \frac{29}{144}P_0P_1t^6 + \\
\frac{25}{224}P_0^2P_1t^8 - \frac{45}{196}P_0^3P_1t^8 + \frac{505P_0^3P_1t^{10}}{12096} - \frac{119P_0^4P_1t^{10}}{2592} - \\
\frac{17P_0^8P_1t^{20}}{3852288} + \frac{6185P_0^7P_1t^{18}}{108573696} + \frac{163P_0^6P_1t^{16}}{354816} + \frac{21145P_0^5P_1t^{14}}{8072064} \\
+\frac{89P_0^5P_1t^{12}}{23232} - \frac{1262395P_0^7P_1^4t^{22}}{1529966592} + \frac{26869P_0^6P_1^3t^{20}}{34320384} \\
-\frac{171505P_0^7P_1^3t^{20}}{125841408} + \frac{515P_0^7P_1^3t^{18}}{251328} + \frac{3275P_0^6P_1^3t^{18}}{565488} + \\
\frac{295P_0^7P_1^4t^{18}}{91392} + \frac{63575P_0^8P_1^5t^{24}}{304668672} + \frac{52316665P_0^7P_1^4t^{24}}{592275898368} - \\
\frac{1262395P_0^7P_1^4t^{22}}{1529966592} + \frac{8123P_0^7P_1^4t^{20}}{2996224} + \frac{2145139P_0^8P_1^4t^{26}}{79705866240} - \\
\frac{37445P_0^8P_1^4t^{24}}{171376128} + \ldots + \frac{3755P_0^{23}P_1^5t^{58}}{636517384898518764 7488} + \\
\frac{P_0^{25}P_1^5t^{62}}{508558681119430331 5968} + \frac{P_0^{24}P_1^5t^{60}}{6491146090919126 6304}
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.102}
$$

Bilinmeyen P_0, P_1, P_2 katsayılarını bulmak için 2. bölümde verilen metotlar kullanılabilir. 3. mertebe çözüm için

$$
Re(t, P_0, P_1, P_2) = L\left(u_3(t, P_0, P_1, P_2)\right) + N\left(u_3(t, P_0, P_1, P_2)\right) \tag{4.103}
$$

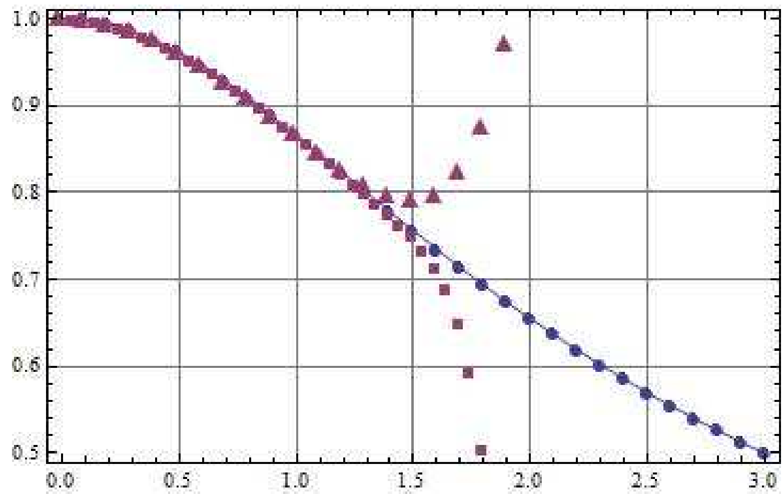
rezidüsü elde edilerek $t = 1, 2, 3$ için kolokasyon yöntemi kullanılırsa yardımcı parametreler

$$
P_0 = 1.53406577, P_1 = 0.98031243, P_2 = -0.10588147 \tag{4.104}
$$

olarak bulunur.Bu değerler (4.102) denkleminde yerine konulursa üçüncü mertebe OPIA-1 çözümü şu şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
u_3(t) &= 1 - 0.166667t^2 + 0.0416667t^4 - 0.0115741t^6 + 0.00337t^8 \\
&-0.00101275t^{10} + 0.000309553t^{12} - 0.000096t^{14} + 0.0000305t^{16} \\
&-7.757926108 \times 10^{-6}t^{18} - 8.210571 \times 10^{-6}t^{20} + 0.000025t^{22} \\
&-0.00002895t^{24} - 3.58870844 \times 10^{-7}t^{26} + 0.00003022t^{28} \\
&-7.8660523 \times 10^{-6}t^{30} - 0.00003015t^{32} + 4.4502399 \times 10^{-6}t^{34} \\
&+0.0000t^{36} + 6.54662 \times 10^{-6}t^{38} - 0.00002t^{40} - 0.000020t^{42} \\
&+0.0000186t^{44} + 0.0000313t^{46} + 2.7243163660 \times 10^{-6}t^{48} \\
&-0.0000345t^{50} - 0.00001t^{52} + 0.000034t^{54} + 0.00001t^{56} \\
&-0.00004760t^{58} + 0.000026t^{60} - 4.9899390 \times 10^{-6}t^{62}.
\end{aligned} \tag{4.105}
$$

Daha yüksek mertebeden yaklaşık çözümler sembolik bir hesaplama aracı ile elde edilebilir. Dehghan, varyasyonel iterasyon metodunu [41] ve Singh homotopi analiz metotlarını kullarak [42] bu problem için yaklaşık çözümler elde etmeye çalışmışlardır. Şekil (4.12) VIM, HAM ve OPIM metotları ile elde edilen yaklaşık çözüleri göstermektedir. Bu şekilden de anlaşılacağı üzere OPIM çözümleri VIM ve HAM metotları ile elde edilen yaklaşımlardan daha iyi sonuç vermektedir.



Şekil 4.12. Örnek (4.1.1): 4. mertebe OPIM(•),5.mertebe HAM-VIM (▲), 9.mertebe HAM-VIM (■) yaklaşık çözümlerinin tam çözümle (–) karşılaştırılması

Örnek 4.1.2. Isının sabit kaldığı durumlardaki izotermal gaz kürelerini temsil eden

$$u'' + \frac{2}{t}u' + e^{u} = 0, \quad u(0) = u'(0) = 0 \tag{4.106}$$

denklemini inceleyelim [36, 41, 43].

(4.106) denklemini $L = u''$ ve $N = (\frac{2\varepsilon}{t}u' + e^{\varepsilon u})$ olmak üzere

$$u'' + (\frac{2\varepsilon}{t}u' + e^{\varepsilon u}) = L + N = 0 \tag{4.107}$$

şeklinde yeniden ele alabiliriz. N kısmında u'' terimi bulunmadığından (2.9) algoritması

$$N + N_{u}(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}({u_c}')_n\varepsilon + N_{\varepsilon}\varepsilon = -L \tag{4.108}$$

haline indirgenir. (4.108) denklemi kullanılarak (4.106) için

$$(u_c)''_n = -(u_n)'' - \frac{2}{t}(u_n)' - u_n - 1 \tag{4.109}$$

problemi ortaya çıkar. Deneme fonksiyonu olarak $u_0 = 0$ seçilerek

$$(u_c)''_0 = -(u_0)'' - \frac{2}{t}(u_n)' - u_n - 1, \quad u(0) = u'(0) = 0 \tag{4.110}$$

problemi elde edilir. Bu problem çözülerek

$$u_1 = -\frac{1}{2}P_0 t^2 \tag{4.111}$$

ilk metrebe OPIM çözümü elde edilir. Bu şekilde ilerlenerek aşağıdaki yaklaşımlar elde edilecektir:

$$u_2 = -\frac{1}{2}P_0 t^2 + \frac{1}{24}P_1 t^2\left(P_0 t^2 + 36P_0 - 12\right) \tag{4.112}$$

$$u_3 = -\frac{t^2}{720}\left[\begin{array}{l} P_0\left[\begin{array}{l} P_1\left(P_2\left(t^4 + 140t^2 + 3240\right) - 30\left(t^2 + 36\right)\right) - \\ 30\left(P_2\left(t^2 + 36\right) - 12\right) \end{array}\right] \\ -30\left(P_1\left(P_2\left(t^2 + 36\right) - 12\right) - 12P_2\right) \end{array}\right] \tag{4.113}$$

$$u_4 = \frac{t^2}{604800}\left[\begin{array}{l} P_0\left(\begin{array}{l} -840\left(\begin{array}{l} P_2\left(P_3\left(t^4 + 140t^2 + 3240\right) - 30\left(t^2 + 36\right)\right) \\ -30\left(P_3\left(t^2 + 36\right) - 12\right) \end{array}\right) \\ P_1\left[\begin{array}{l} -840\left(P_3\left(t^4 + 140t^2 + 3240\right) - 30\left(t^2 + 36\right)\right) \\ +P_2\left(\begin{array}{l} P_3\left(\begin{array}{l} 15t^6 + 5096t^4 + \\ 422800t^2 + 8164800 \end{array}\right) \\ -840\left(t^4 + 140t^2 + 3240\right) \end{array}\right) \end{array}\right] \end{array}\right) \\ -840\left(\begin{array}{l} P_1\left(\begin{array}{l} P_2\left(P_3(t^4 + 140t^2 + 3240) - 30(t^2 + 36)\right) \\ -30\left(P_3(t^2 + 36) - 12\right) \end{array}\right) \\ -30\left(P_2(P_3(t^2 + 36) - 12) - 12P_3\right) \end{array}\right) \end{array}\right]. \tag{4.114}$$

Yardımcı parametreler için

$$Re(t, P_0, P_1, P_2, P_3) = L\left(u_4(t, P_0, P_1, P_2, P_3)\right) + N\left(u_4(t, P_0, P_1, P_2, P_3)\right) \tag{4.115}$$

rezidüsü hesap edilerek (3.11) denkleminin kullanılmasıyla

$$P_0 = 2.0203622, P_1 = -1.0201147, P_2 = -0.9963202, P_3 = 0.02078999 \tag{4.116}$$

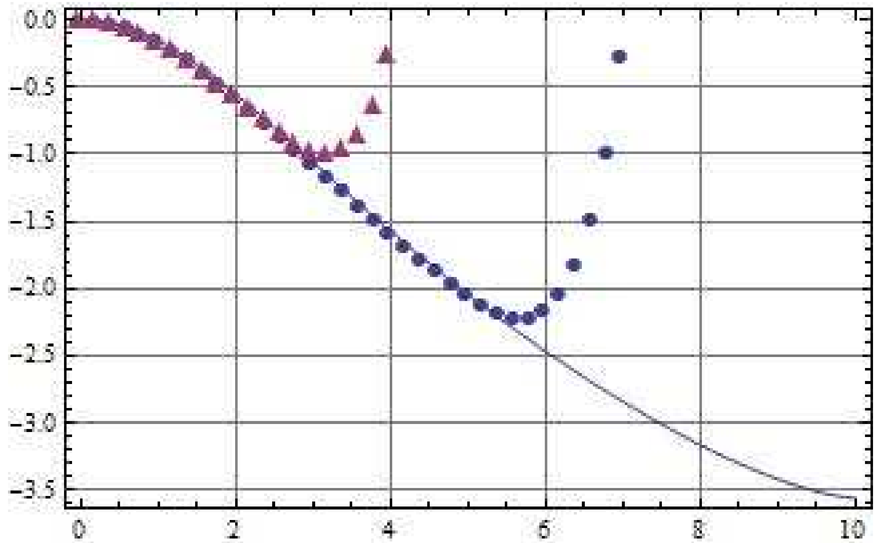
sabitleri elde edilir. (4.116) nin (4.114) içine yerleştirilmesiyle dördüncü mertebe OPIM çözümü

$$\begin{aligned} u_4(t) = -0.15989962328t^2 + 0.007920058473t^4 - \\ 0.005608897215631t^6 + 0.000039055217456t^8 \end{aligned} \tag{4.117}$$

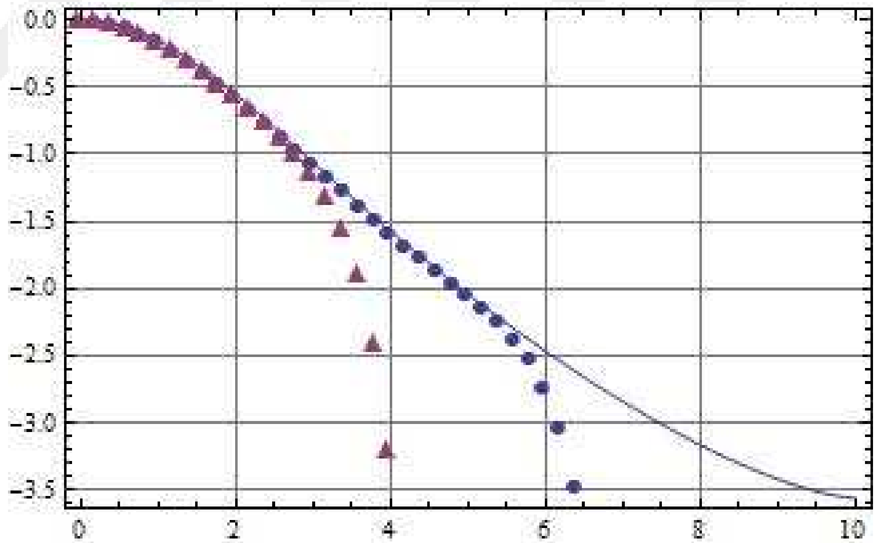
şeklinde elde edilir. Bu problem [38, 43] nolu çalışmalarda diferansiyel transform metodu (DTM) ve Adomian ayrışım metodu (ADM) yardımıyla çözülmüş ve

$$u(t) = -\frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \frac{8}{3 \times 7!}t^6 + \frac{122}{9 \times 9!}t^8 - \frac{5032}{45 \times 11!}t^{10} + \cdots \tag{4.118}$$

yaklaşımı elde edilmiştir. (4.13) ve (4.14) nolu grafiklerde 4. ve 5. mertebeden OPIM ve ADM-DTM çözümleri verilmiştir. Bu grafiklerden de açıkca görüldüğü üzere OPIM çözümleri nümerik çözümlerle, diğer metotlara nazaran daha geniş bir aralıkta uyum göstermekterdir.



Şekil 4.13. Örnek (4.1.2): 4. mertebe OPIM(•), ADM-DTM (▲) yaklaşık çözümlerinin nümerik çözümle (–) karşılaştırılması



Şekil 4.14. Örnek (4.1.2): 5. mertebe OPIM(•), ADM-DTM (▲) yaklaşık çözümlerinin nümerik çözümle (–) karşılaştırılması

Örnek 4.1.3. Homojen Lane-Emden tipi

$$u'' + \frac{2}{t}u' - (4t^2+6)u = 0, u(0) = 1, u'(0) = 0, 0 \le t \le 1 \tag{4.119}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin tam çözümü

$$u(t) = e^{t^2} \tag{4.120}$$

olarak verilmiştir [44].

(4.119)) denklemi $L = u''$ ve $N = \varepsilon\left(\frac{2}{t}u' - (4t^2+6)u\right)$ olmak üzere

$$u'' + \varepsilon\left(\frac{2}{t}u' - (4t^2+6)u\right) = L + N = 0 \tag{4.121}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (2.9) ifadesi kullanılarak (4.119) problemi için OPIA

$$(u_c)''_n = -(u_n)'' - \frac{2}{t}(u_n)' + (4t^2+6)u_n \tag{4.122}$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç şartlarından ötürü deneme fonksiyonu olarak $u_0 = 1$ seçilebilir. u_0 (4.122) içine yerleştirilerek

$$(u_c)''_0 = (4t^2+6), \quad u(0) = u'(0) = 0 \tag{4.123}$$

problemi ortaya çıkar. Bu problemden ilk düzeltme teriminin bulunarak başlangıç fonksiyonuna eklenmesiyle

$$u_1 = 1 + \frac{1}{3}P_0\left(t^4 + 9t^2\right) \tag{4.124}$$

birinci mertebe OPIM çözümü elde edilir. Aynı adımlar takip edilerek u_2 ve u_3 aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_2 = 1 + \frac{1}{3}P_0\left(t^4+9t^2\right) + \frac{1}{630}P_1t^2\left[\begin{array}{c} 15P_0t^6 + 294P_0t^4 + 595P_0t^2 \\ -5670P_0 + 210t^2 + 1890 \end{array}\right] \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned} u_3 = 1 + \tfrac{1}{3}P_0\left(t^4+9t^2\right) + \tfrac{1}{630}P_1t^2&\left[\begin{array}{c} 15P_0t^6 + 294P_0t^4 + 595P_0t^2 \\ -5670P_0 + 210t^2 + 1890 \end{array}\right] + \\ \tfrac{P_2}{727650} \times &\left[\begin{array}{l} 2182950t^2 + 242550t^4 - 6548850P_0t^2 + 687225P_0t^4 \\ +17325P_0t^8 + 687225P_1t^4 + 339570P_1t^6 + 525P_0P_1t^{12} \\ +16247P_0P_1t^{10} + 63195P_0P_1t^8 - 1211133P_0P_1t^6 - \\ 4419800P_0P_1t^4 + 19646550P_0P_1t^2 - 6548850P_1t^2 \\ +339570P_0t^6 + 17325P_1t^8 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{4.126}$$

Bilinmeyen P_0, P_1, P_2 değerleri için

$$Re(t, P_0, P_1, P_2) = L\left(u_3(t, P_0, P_1, P_2)\right) + N\left(u_3(t, P_0, P_1, P_2)\right) \tag{4.127}$$

Tablo 4.6. Örnek (4.1.3) için farklı mertebeden yaklaşımların mutlak hataları

t	OPIA için hatalar		VIM-HPM için hatalar	
	$\lvert u_{tam} - u_5 \rvert$	$\lvert u_{tam} - u_6 \rvert$	$\lvert u_{tam} - u_5 \rvert$	$\lvert u_{tam} - u_6 \rvert$
0.1	$3.08426{\times}10^{-13}$	$2.22045{\times}10^{-16}$	$1.11022{\times}10^{-15}$	$1.00128{\times}10^{-16}$
0.2	$3.85914{\times}10^{-13}$	$2.22045{\times}10^{-16}$	$5.72165{\times}10^{-12}$	$3.26406{\times}10^{-14}$
0.3	$5.62883{\times}10^{-13}$	$1.00025{\times}10^{-17}$	$7.47710{\times}10^{-10}$	$9.59788{\times}10^{-12}$
0.4	$9.64347{\times}10^{-13}$	$2.44249{\times}10^{-15}$	$2.38451{\times}10^{-8}$	$5.43454{\times}10^{-10}$
0.5	$1.95532{\times}10^{-12}$	$1.50998{\times}10^{-14}$	$3.51584{\times}10^{-7}$	$1.24994{\times}10^{-8}$
0.6	$4.77649{\times}10^{-12}$	$1.01037{\times}10^{-13}$	$3.18608{\times}10^{-6}$	$1.62772{\times}10^{-7}$
0.7	$5.45375{\times}10^{-11}$	$5.02709{\times}10^{-13}$	0.0000206568	$1.43282{\times}10^{-6}$
0.8	$2.78031{\times}10^{-11}$	$2.05902{\times}10^{-12}$	0.000104921	$9.47740{\times}10^{-6}$
0.9	$3.08426{\times}10^{-10}$	$6.38223{\times}10^{-12}$	0.000442699	0.000050436
1	$2.10201{\times}10^{-9}$	$2.90235{\times}10^{-12}$	0.00161516	0.000226273

rezidüsü hesap edilerek $t = 0.3, 0.6, 0.9$ değerleri için (3.11) denkleminden

$$P_0 = 0.33423439, P_1 = 0.31859877, P_2 = 0.20764389 \tag{4.128}$$

değerlerine ulaşılır.(4.128) nin (4.126) içine yerleştirilmesiyle

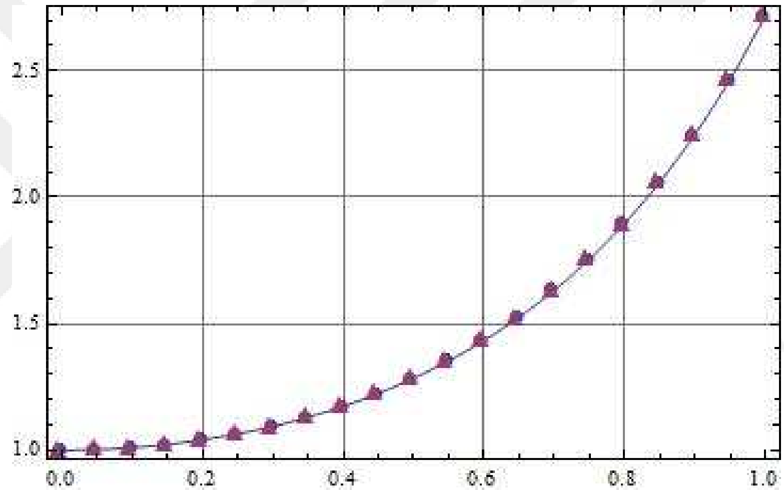
$$\begin{aligned} u_3(t) &= 1 + 1.0041t^2 + 0.483647t^4 + 0.185681t^6 \\ &+0.041724t^8 + 0.00419221t^{10} + 0.000135466t^{12}. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Aynı prosedürler benzer şekilde uygulanarak aşağıdaki yaklaşık çözümlere ulaşılır:

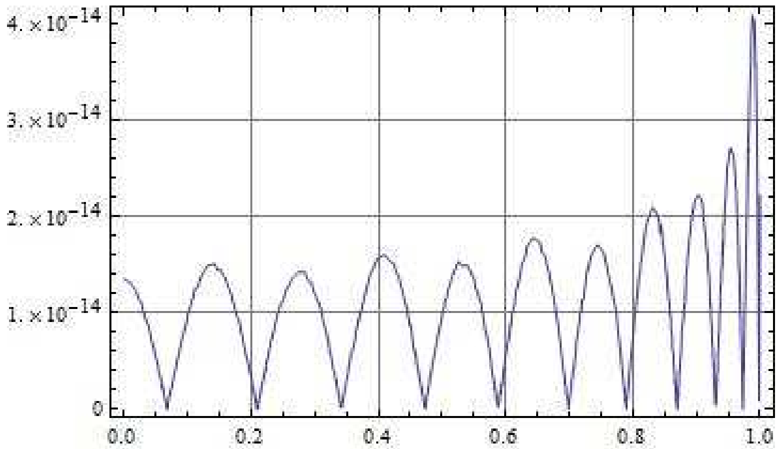
$$\begin{aligned} &u_4(t) = 1 + t^2 + 0.5t^4 + 0.166665t^6 + 0.0416732t^8+ \\ &0.00831423t^{10} + 0.00142143t^{12} + 0.000166717t^{14} + 0.0000407289t^{16} \end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned} &u_5(t) = 1 + t^2 + 0.5t^4 + 0.166667t^6 + 0.0416667t^8 + 0.00833324t^{10}+ \\ &0.00138916t^{12} + 0.000197899t^{14} + 0.0000254168t^{16} \\ &+2.306750146551 \times 10^{-6}t^{18} + 4.52928540125 \times 10^{-7}t^{20} \end{aligned} \tag{4.131}$$

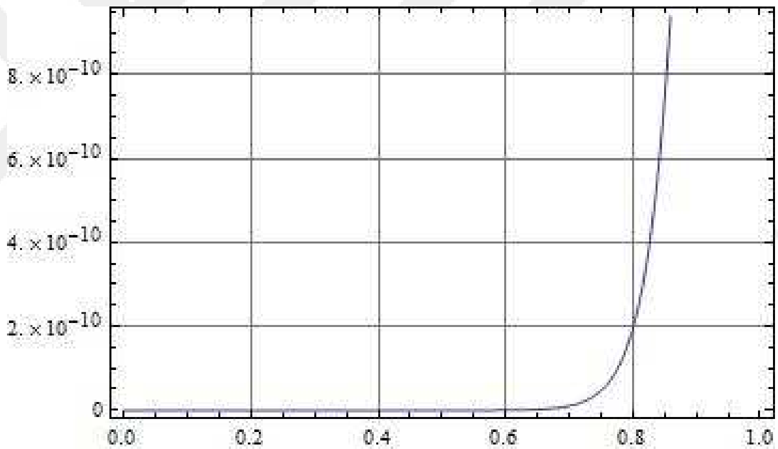
Bu problem Öziş tarafından varyasyonel iterasyon metodu ve homotopi perturbasyon metodu kullanılarak incelenmiştir [44, 45]. Şekiller (4.15) , (4.16),(4.17) ve tablo (4.6) OPIM ve literatürdeki diğer yaklaşımların mutlak hatalarını göstermekte ve yakınsaklıkları hakkında önemli bilgiler vermektedir. Elde edilen sonuçlar, OPIM metodu ile elde edilen yaklaşımların [44, 45] nolu makalelerdeki sonuçlardan daha iyi olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.15. Örnek (4.1.3): 5. mertebe OPIA(●) ve VIM-HPM(▲) yaklaşık çözümleri



Şekil 4.16. Örnek (4.1.3): 7. mertebe OPIA çözümlerinin mutlak hatası



Şekil 4.17. Örnek (4.1.3): 7. mertebe VIM çözümlerinin mutlak hatası

4.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

Gecikmeli diferansiyel denklemler dışında kalan tüm diferansiyel denklemler ile modellenen olaylar, geçmişteki durumlarından bağımsız olarak tanımlanmaktadırlar. Fiziksel, kimyasal vb. birçok olayın gelecekteki durumlarını daha gerçekçi olarak ortaya koyabilmek için geçmiş hallerini de hesaba katma fikri ortaya gecikmeli diferansiyel denklemleri çıkarmıştır. Nüfus dinamiği, haberleşme ağ modelleri, ekonomik sistemler gibi olayların modellenmesi için kullanılan bu denklemler birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır [46–49].

İkinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin en genel hali kapalı formda

$$F(u'', u', u, u_\alpha) = N + L + g(t) = 0 \tag{4.132}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g(t)$ bilinen bir fonksiyon, α bir sabit olmak üzere, $u_\alpha = u(\alpha t)$ ve $u = u(t)$ dir. Bu tür gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık ve tam çözümlerini bulabilmek için çeşitli metotlar kullanılmıştır [50–55]. Dikkat edileceği üzere (4.132) denkleminin 2. bölümde verilen (2.9) denkleminden tek farkı gecikme terimidir. Dolayısıyla (4.132) için optimal perturbasyon iterasyon algoritması

$$N + N_u(u_c)_n\varepsilon + N_{u'}(u'_c)_n\varepsilon + N_{u_\alpha}((u_\alpha)_c)_n\varepsilon + N_{u''}(u''_c)_n\varepsilon + N_\varepsilon\varepsilon = -L - g(t) \tag{4.133}$$

şeklinde olacaktır. Bu kısımda (4.133) algoritmasından faydalanarak literatürde sıkça karşılaşılan iki gecikmeli diferansiyel denklem ele alınacaktır.

Örnek 4.2.1.

$$u''(t) + u(\frac{t}{2}) + u^2(t) = \sin^4(t) + \sin^2(\frac{t}{2}) + 8; u(0) = 2, u'(0) = 0; t \geq 0. \tag{4.134}$$

denklemini ele alalım [56]. Bu denklemin tam çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$u(t) = \frac{5 - \cos 2t}{2}. \tag{4.135}$$

(4.134) denklemine perturbasyon parametresi yerleştirilirek

$$u''(t) + \varepsilon\left(u(\frac{t}{2}) + u^2(t)\right) = \sin^4(t) + \sin^2(\frac{t}{2}) + 8 \tag{4.136}$$

şeklini alır. Gereksiz hesaplamalardan kaçınmak için (4.136) denklemini

$$L + N + g(t) = 0 \tag{4.137}$$

şeklinde parçalara ayırabiliriz. Burada

$$L = u''(t), \quad N = \varepsilon\left(u(\frac{t}{2}) + u^2(t)\right) \text{ and } g(t) = -\left(\sin^4(t) + \sin^2(\frac{t}{2}) + 8\right) \tag{4.138}$$

dir. (4.133) kullanılarak

$$(u_c'')_n(t) = -(u_n)''(t) - u_n(\frac{t}{2}) - {u_n}^2(t) + \sin^4(t) + \sin^2(\frac{t}{2}) + 8 \tag{4.139}$$

OPIA-1 algoritması elde edilir. $u_0 = 2$ başlangıç fonksiyonu olarak seçilerek (4.139) denklemine yerleştirilirse

$$(u_c)''_n = \sin^4(t) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + 2, \quad u(0) = u'(0) = 0 \tag{4.140}$$

birinci mertebe problemi ortaya çıkar. Bu problemden ilk düzeltme terimi elde edilerek başlangıç fonksiyonuyla toplanırsa

$$u_1 = 2 + \frac{P_0}{128}\left(184t^2 + 64\cos(t) + 16\cos(2t) - \cos(4t) - 79\right) \tag{4.141}$$

birinci mertebe OPIA-1 çözümü elde edilir. 2. bölümdeki prosedürler yinelenerek

$$\begin{gathered} u_2 = 2 + \tfrac{P_0}{128}\left(184t^2 + 64\cos(t) + 16\cos(2t) - \cos(4t) - 79\right) + \left(\tfrac{P_1}{471859200}\right) \times \\ \left[\begin{array}{l} -291225600 + 678297600t^2 + 235929600\cos(t) \\ -3686400\cos(4t) + 49766400P_0t^2 - 240230400P_0t^4 + \\ 943718400P_0\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) + 766771200P_0\cos(t) \\ -921600P_0\cos(2t) + 2764800P_0\cos(4t) + 4394932703P_0^2 \\ -121212000P_0^2t^2 + 69772800P_0^2t^4 - 32501760P_0^2t^6 \\ +678297600P_0^2t^2\cos(t) - 67161600P_0^2\cos(2t) \\ +3072000P_0^2\cos(3t) + 763200P_0^2\cos(4t) - 1712332800P_0 + \\ 662400P_0^2t^2\cos(4t) - 2713190400P_0^2t\sin(t) + 662400P_0^2t\sin(4t) \\ -73728P_0^2\cos(5t) - 12800P_0^2\cos(6t) + 225P_0^2\cos(8t) - \\ 169574400P_0^2t\sin(t)\cos(t) - 4331520000P_0^2\cos(t) \\ +58982400\cos(2t) + 42393600P_0^2t^2\cos(2t) \end{array}\right] \end{gathered} \tag{4.142}$$

yaklaşık çözümü elde edilir. Aynı işlemler tekrarlanarak daha yüksek mertebe çözümlere ulaşılabilir. Birinci mertebe OPIA-1 çözümü için

$$\begin{aligned} Re(t, P_0) &= L(u_1) + N(u_1) + g(t) \\ &= {u_1}''(t; P_0) + u_1(\frac{t}{2}; P_0) + {u_1}^2(t, P_0) - \sin^4(t) - \sin^2(\frac{t}{2}) - 8 \end{aligned} \tag{4.143}$$

rezidüsü hesap edilerek

$$J(P_0) = \int_0^3 Re^2(t, P_0)dt \tag{4.144}$$

denkleminde yerine konulursa $[0,3]$ aralığı için $P_0 = 0.0827198$ olarak hesap edilir. Bu değer (4.141)'de yerine konulursa

$$u_1 = 2 + 0.0012925\left(-32 + 92t^2 + 32\cos(t) - 16\sin^2(t) + \sin^2(2t)\right) \tag{4.145}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde 2. ve 3. mertebe yaklaşımlar

$$\begin{aligned}
&u_2(t) = -493.684t^6 + 1102.56t^4 - 1971.3t^2 + 643.936t^2\cos(2t)\\
&-1030.53\cos(2t) + 46.662\cos(3t) + 11.7599\cos(4t) + 67115.4\\
&+ (10303.t^2 - 2575.74t\sin(t) - 65972.1)\cos(t) - 41211.9t\sin(t)\\
&+10.0615t\sin(4t) - 1.11989\cos(5t) - 0.194425\cos(6t)+\\
&0.00341763\cos(8t) - 167.921\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) + 10.0615t^2\cos(4t)
\end{aligned} \tag{4.146}$$

$$\begin{aligned}
&u_3(t) = 84753 - 1863.85t^2 + 1009.92t^4 - 324.451t^6 + 142.476\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\\
&+963.959\cos(2t) + 596.948t^2\cos(2t) + 38.9874\cos(3t) + 15.94\cos(4t)\\
&-18.0595t^2\cos(4t) - 2.738377741\cos(5t) + 4.39203001445\cos(6t)\\
&-5.46736\times10^6t^8\cos(10t) - 1.82906\times10^6t^6\cos(12t)-\\
&1.6751\times10^6t^2\cos(10t) - 50009.4t\sin(t) + 0.00848737\cos(8t)+\\
&(10106.t^2 - 2865.95t\sin(t) - 58984.9)\cos(t) + 1.50166\times10^7t^6\sin(6t)\\
&-4.05453\times10^6t^2\sin(7t) - 864109.t^2\sin(10t) + 9.90938t\sin(4t)+\\
&2.6728\times10^6t\sin(5t) - 4.67333\times10^6t\sin(6t) - 619643t\cos(9t)\\
&+2.64757\times10^6t\sin(8t).
\end{aligned} \tag{4.147}$$

olarak bulunacaktır. Bu örnek [50] nolu makalede perturbasyon iterasyon metoduyla ve [56] nolu makalede varyasyonel iterasyon metodu ile çözülmüştür. Şekil (4.18) OPIM ve diğer metotlar ile bazı karşılaştırmaları sunmaktadır. Bu şekilden görüleceği üzere OPIM sonuçları tam çözümle daha geniş bir aralık boyunca uyum içerisinde olmakla beraber [50, 56] makalelerindeki yaklaşımlardan daha iyi sonuçlar vermektedir. Şekil (4.19) ve (4.20) 3. ve 4. mertebe OPIM çözümleri için mutlak hataları $(|u_{exact} - u_{OPIM}|)$ göstermektedir.

Örnek 4.2.2.

$$u'(t) + 2u^2(\frac{t}{2}) - 1 = 0, u(0) = 0, t \geq 0 \tag{4.148}$$

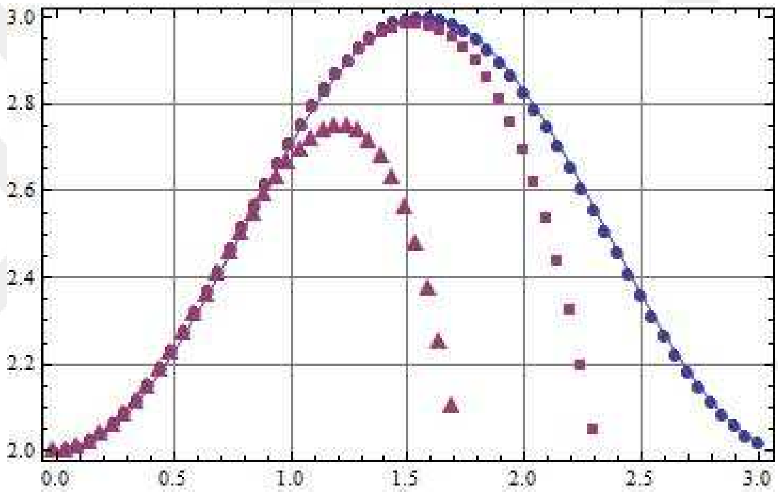
denklemini inceleyelim. Bu denklemin tam çözümü $u(t) = \sin t$ olarak verilmiştir [55,57].

Denklem (4.148), yapay $\varepsilon = 2$ parametresi eklenerek

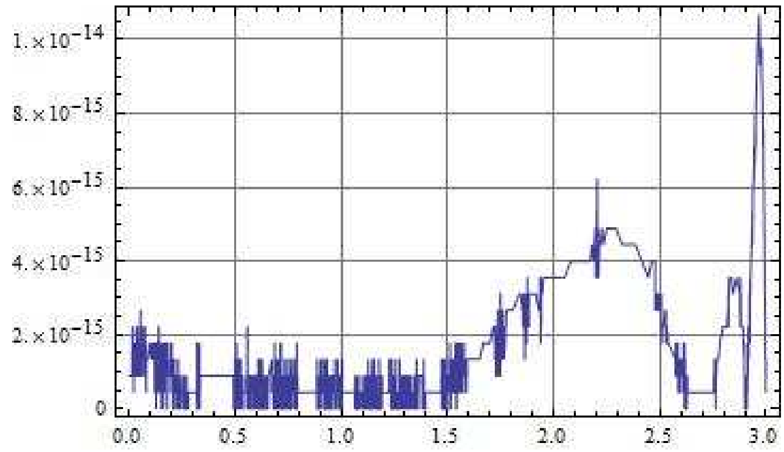
$$u'(t) + \varepsilon u^2(\frac{t}{2}) - 1 = L + N + g(t) = 0 \tag{4.149}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada

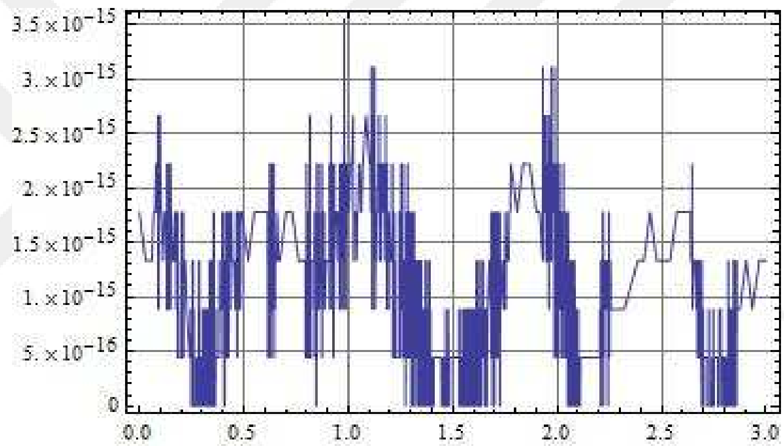
$$L = u'(t), N = \varepsilon u^2(\frac{t}{2}) \text{ ve } g(t) = -1 \tag{4.150}$$



Şekil 4.18. Örnek (4.2.1): 3.mertebeden OPIM(●), VIM(▲), PIM(■) yaklaşımları ve tam çözüm (–)



Şekil 4.19. Örnek (4.2.1) : 3.mertebeden OPIM için mutlak hatalar



Şekil 4.20. Örnek (4.2.1) : 4.mertebeden OPIM için mutlak hatalar

olarak alınırsa (4.133) ifadesinden

$$(u_c)'_n(t) = -(u_n)'(t) - 2{u_n}^2(\frac{t}{2}) + 1 \tag{4.151}$$

algoritması elde edilir. Deneme fonksiyonu olarak $u_0 = t$ seçilip (4.151) denklemi içine konulursa

$$(u_c)'_n = -\frac{t^2}{2}, \;\; u(0) = 0 \tag{4.152}$$

birinci mertebe problemi ortaya çıkar ve bu problemin çözümü ilk düzeltme terimini verir. Gerekli işlemler yapılarak

$$u_1 = t - \frac{P_0 t^3}{6} \tag{4.153}$$

$$u_2 = t - \frac{P_0 t^3}{6} - \left(\frac{P_1 t^3}{40320}\right)\left(5P_0^2 t^4 - 336P_0 t^2 - 6720P_0 + 6720\right) \tag{4.154}$$

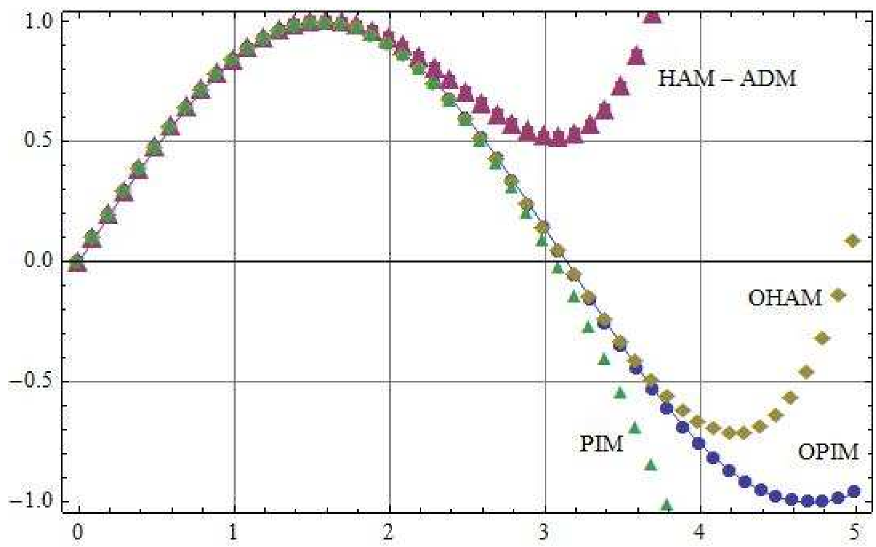
$$u_3 = u_2 + \tfrac{P_2}{5713316492083200}\times$$

$$\left[\begin{array}{l} -952219415347t^3 + 9522194153472P_0t^3 + 47610970767360P_0t^5 - \\ 70849658880P_0^2t^7 + 95221941534720P_1t^3 + 212548976640P_0^2P_1t^7 \\ -18420911308P_0P_1t^7 + 476109707673P_1t^5 - 952219415347P_0P_1t^3 \\ +15006351360P_0^2P_1t^9 - 1377632256P_0P_1^2t^9 - 70849658880P_0^2P_1^2t^7 \\ +1416993177600P_0P_1^2t^7 + 708496588800P_1^2t^7 - 715P_0^4P_1^2t^{15} + \\ 443520P_0^3P_1^2t^{13} + 41932800P_0^3P_1^2t^{11} - 112379904P_0^2P_1^2t^{11} \\ -1377632256P_0^2P_1^2t^9 - 9522194153472P_0P_1t^5 - 4193280P_0^3P_1t^{11} \end{array}\right]. \tag{4.155}$$

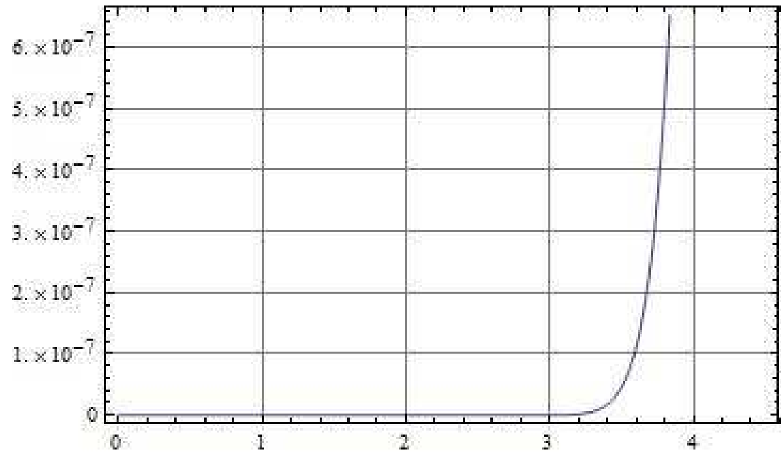
yaklaşımlarına ulaşılır. Yardımcı parametrelerin diğer örneklerdeki gibi elde edilip yerlerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} u_3(t) &= 1.t - 0.166667t^3 + 0.00833333t^5 - 0.000198413t^7 + \\ &2.7556782518571276 \times 10^{-6}t^9 - 2.5040357365602213 \times 10^{-8}t^{11} \\ &+1.5912260484733409 \times 10^{-10}t^{13} + 6.665938894983069 \times 10^{-13}t^{15} \end{aligned} \tag{4.156}$$

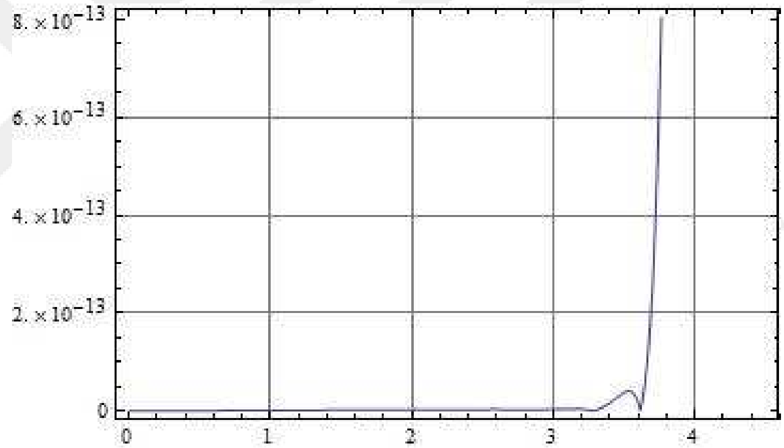
üçüncü mertebe OPIM yaklaşık çözümü bulunur. Bu problem önceli yıllarda birçok araştırmacı tarafından farklı metotlarla irdelenmiştir [50, 51, 55, 57]. Şekil (4.21)'de farklı metotlar ile elde edilen üçüncü mertebe çözümlerin bir karşılaştırılması verilmiştir ve bu şekilden OPIM sonuçlarının diğer çözümlere göre daha geniş bir aralıkta geçerli olduğu görülmektedir. (4.22) ve (4.23) grafiklerinden 3. ve 4. mertebe OPIM çözümlerinin mutlak hataları görülmektedir.



Şekil 4.21. Örnek (4.2.2): 3.mertebeden yaklaşık çözümlerin tam çözümle karşılaştırılması



Şekil 4.22. Örnek (4.2.2): 3.mertebeden OPIM çözümlerin mutlak hataları



Şekil 4.23. Örnek (4.2.2): 4.mertebeden OPIM çözümlerin mutlak hataları

4.3. Klein-Gordon Denklemleri

Klein-Gordon denklemleri uygulamalı matematik ve fizik alanlarında sıkça karşılaşılan en önemli doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden birisidir. Oskar Klein ve Walter Gordon tarafından ortaya atılan bu denklem esasen yörüngesiz, kendi ekseni etrafında dönmeyen parçacıkları temsil eden Schrödinger denkleminin relativistik (göreceli) dalga denklemi formudur. Schrödinger'in bulduğu denklemde zamana göre birinci mertebe (u_t) ve yer değiştirmeye göre ikinci mertebeden türevler (u_{xx}) yer almaktaydı. Ne var ki, özel relativite teorisine göre bu denklem, her iki değişkene göre de ikinci mertebeden türevleri içermeliydi. Nitekim, Klein-Gordon denklemleri için bu simetrik özellikler oluşturularak, zamana göre de ikinci mertebeden türevler alınmış ve denklem bugünkü şeklini almıştır [58, 59]. Bu kısımda

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u + \beta u^{\gamma} = h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = [a,b] \times (0,T] \tag{4.157}$$

şeklindeki Klein-Gordon denklemlerini

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \tag{4.158}$$

başlangıç şartları altında inceleyeceğiz. Burada α, β' lar sabit; $h(x,t), f(x),\ g(x)$'ler bilinen ve $u(x,t)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. Bu denklem optik, katı hal fiziği, kuantum alan teorisi gibi birçok farklı alanda ortaya çıkmaktadır. Klein-Gordon denklemine yaklaşık çözüm önermek için birçok yöntem önerilmiştir. Bunlardan bazıları yardımcı denklem metodu [60], pseudo - spectra metodu [61], Jacobi eliptik fonksiyonları [62] ve tanh - sech metodu [63] olarak verilebilir. Bu çalışmada ise bu denklemlere OPIA-1 metodu ile yaklaşımda bulunulacaktır.

Örnek 4.3.1.

$$u(x,0) = x, u_t(x,0) = 0 \tag{4.159}$$

başlangıç şartları altında, $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, h(x,t) = -x\cos t + x^2\cos^2 t$ için

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x\cos t + x^2\cos^2 t; \quad 0 \le x, t \le 1 \tag{4.160}$$

haline dönüşen (4.157) denklemini inceleyelim. Bu denklemin çözümü

$$u(x,t) = x\cos t \tag{4.161}$$

olarak verilmiştir [64]. (4.160) denklemine yapay parametre yerleştirilerek kapalı formda

$$u_{tt} + \varepsilon\left(-u_{xx} + u^2 + x\cos t - x^2\cos^2 t\right) = 0 \tag{4.162}$$

şeklinde yazılır. (4.162) denklemi (3.15) içerisine yerleştirilerek

$$\left((u_c)_n\right)_{tt} = (u_n)_{xx} - (u_n)_{tt} - (u_n)^2 - x\cos t + x^2\cos^2 t \tag{4.163}$$

algoritması elde edilir. Başlangıç fonksiyonu olarak

$$u_0 = x \tag{4.164}$$

alınmak suretiyle (4.163) denklemiyle beraber birinci mertebeden

$$\left((u_c)_0\right)_{tt} = x^2\cos^2(t) - x\cos(t) - x^2; \quad u_c(x,0) = (u_c)_t(x,0) = 0. \tag{4.165}$$

problemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise

$$(u_c)_0 = -\frac{1}{4}x\left(4 + t^2x - 4\cos(t) - x\sin^2(t)\right) \tag{4.166}$$

dir.

PIM Çözümleri:

İlk düzeltme terimi $(u_c)_0$' ın bulunmasıyla birinci ve ikinci mertebeden PIM çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(u_1)_{PIM} = u_0 + (u_c)_0 = x - \frac{1}{4}x\left(4 + t^2x - 4\cos(t) - x\sin^2(t)\right) \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}(u_2)_{PIM} &= u_1 + (u_c)_1 = -\frac{1}{16} + \frac{t^2}{8} - \frac{t^4}{24} - \frac{28x^3}{9} - \frac{1}{72}x^3\cos(3t) + \\ &\frac{63x^4}{2048} - \frac{3t^2x^4}{256} + \frac{t^4x^4}{192} - \frac{t^6x^4}{480} + \left(x - \frac{1}{8}\left(-25 + 4t^2\right)x^3\right)\cos(t) + \\ &\frac{1}{64}\left(4 + \left(-2 + t^2\right)x^4\right)\cos(2t) + \frac{x^4\cos(4t)}{2048} + 2tx^3\sin(t) - \frac{1}{32}tx^4\sin(2t)\end{aligned} \tag{4.168}$$

Daha yüksek mertebeden çözümlere aynı prosedürler tekrarlanarak ulaşılabilir.

OPIM Çözümleri:

(3.17), (4.164) ve (4.163) denklemleri yardımıyla OPIA-1 çözümleri

$$(u_1)_{OPIM} = u_0 + P_0(u_c)_0 = x - \frac{P_0}{4}x\left(4 + t^2x - 4\cos(t) - x\sin^2(t)\right) \tag{4.169}$$

$$
\begin{aligned}
&(u_2)_{OPIM} = u_1 + P_1 \times \\
&\left[
\begin{array}{l}
-x - \dfrac{t^2x^2}{4} + x\cos(t) + \dfrac{1}{4}x^2\sin^2(t) + \dfrac{t^2P_0}{8} - \dfrac{t^4P_0}{24} + xP_0 - 2x^2P_0 - \\
\dfrac{1}{8}t^2x^3P_0 + \dfrac{1}{24}t^4x^3P_0 - x\cos(t)P_0 + 2x^2\cos(t)P_0 - \dfrac{1}{8}\sin^2(t)P_0 \\
+\dfrac{1}{8}x^3\sin^2(t)P_0 + \dfrac{15}{8}x^2P_0^2 - \dfrac{3}{4}t^2x^2P_0^2 - \dfrac{457}{144}x^3P_0^2 + \dfrac{1}{8}t^2x^3P_0^2 - \\
\dfrac{3}{256}t^2x^4P_0^2 + \dfrac{1}{192}t^4x^4P_0^2 - \dfrac{1}{480}t^6x^4P_0^2 - 2x^2\cos(t)P_0^2 + \\
\dfrac{1}{8}x^2\cos(2t)P_0^2 + \dfrac{1}{16}x^3\cos(2t)P_0^2 - \dfrac{1}{32}x^4\cos(2t)P_0^2 \\
+\dfrac{x^4\cos(4t)P_0^2}{2048} + 2tx^3\sin(t)P_0^2 - \dfrac{1}{32}tx^4\sin(2t)P_0^2 \\
+\dfrac{63x^4P_0^2}{2048} - \dfrac{1}{2}t^2x^3\cos(t)P_0^2 + \dfrac{5}{4}t^2x^2P_0 - \dfrac{1}{4}x^2\sin^2(t)P_0 \\
-\dfrac{1}{24}t^4x^3P_0^2 + \dfrac{25}{8}x^3\cos(t)P_0^2 + \dfrac{1}{64}t^2x^4\cos(2t)P_0^2 - \dfrac{1}{72}x^3\cos(3t)P_0^2
\end{array}
\right]
\end{aligned}
\tag{4.170}
$$

şeklinde elde edilir. P_0 ve P_1' in ortaya çıkması için 3. bölümdeki yöntemler kullanılabilir. Birinci mertebe OPIA-1 çözümü olan (4.169) denklemi için rezidü

$$
Re(x,t;P_0) = (u_1)_{tt} - (u_1)_{xx} + (u_1)^2 + x\cos t - x^2\cos^2 t \tag{4.171}
$$

şeklinde ortaya çıkacaktır. En küçük kareler yöntemi kullanılarak $P_0 = 0.94300146$ değerine ulaşılır. Bu değer denklem (4.169)'de yerine konulursa

$$
(u_1)_{OPIM} = x - 0.23575x\left(t^2x - x\sin^2(t) - 4\cos(t) + 4\right) \tag{4.172}
$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde (4.170) için

$$
P_0 = 0.99999999981 \quad P_1 = 1.0005094152
$$

parametreleri elde edilerek

$$(u_2)_{OPIM} = \begin{bmatrix} 0.125064t^2 - 0.0416879t^4 - 9.59911 \times 10^{-14}x - 0.125064x^2 + \\ 0.000127t^2x^2 - 3.175x^3 - 2.356 \times^{-11} t^2x^3 + 7.8554 \times 10^{-12}t^4x^3 \\ +0.03077x^4 - 0.0117247t^2x^4 + 0.00521099t^4x^4 - 0.00208439t^6x^4 \\ +x\cos(t) + 3.77059 \times 10^{-10}x^2\cos(t) + 3.12659x^3\cos(t) - \\ 0.500255t^2x^3\cos(t) + 0.125064x^2\cos(2t) + 0.0625318x^3\cos(2t) - \\ 0.0312659x^4\cos(2t) + 0.015633t^2x^4\cos(2t) - 0.013896x^3\cos(3t) \\ +0.00048853x^4\cos(4t) + 2.00102tx^3\sin(t) - 0.125064\sin^2(t) \\ +0.25x^2\sin^2(t) + 0.125064x^3\sin^2(t) - 0.0312659tx^4\sin(2t) \end{bmatrix} \tag{4.173}$$

çözümüne ulaşılabilir. Bu problem birçok araştırmacı tarafından DTM [64] and ADM [65] gibi farklı metotlarla ele alınmıştır. [64] nolu makalede, Kanth vd. DTM metodunu uygulayarak

$$u \approx x - 0.5t^2x + 0.0416667t^4x - 0.00138889t^6x + \cdots \tag{4.174}$$

sonucunu elde etmiştir ki bu sonuç klasik ADM metodu ile elde edilen sonuçtur.

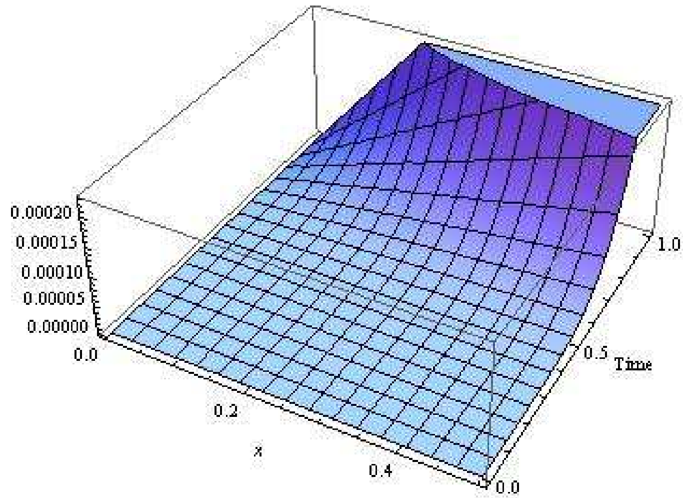
4.9 ve 4.10 tablolarında PIM,OPIM,ADM-DTM çözümleri ile tam çözüm arasındaki mutlak hatalar verilmiştir. Bu tablolardan da anlaşılacağı üzere $n = 1$ ve $n = 2$ için bile OPIA-1 çözümleri daha iyi sonuçlar vermektedir. İlaveten 4.7 ve 4.8 tablolarından görüleceği gibi düşük mertebe OPIM çözümleri dahi tam çözümle oldukça uyumludur. Daha iyi yaklaşımlar için bir sembolik hesaplama programı ile iterasyona devam edilmesi gerektiği de aşikardır. ADM-DTM, PIM ve OPIM hataları (4.24)-(4.27) şekilleri ile de gösterilmiştir.

Tablo 4.7. Örnek (4.3.1): 2. mertebeden OPIM çözümlerinin mutlak hataları

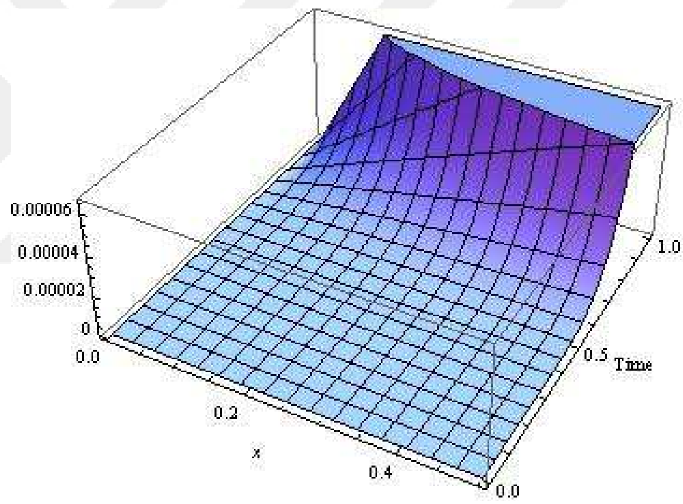
x	$t = 0.1$	$t = 0.2$	$t = 0.3$	$t = 0.4$	$t = 0.5$
0.1	5.506×10^{-9}	3.537×10^{-7}	4.019×10^{-6}	2.248×10^{-5}	8.521×10^{-5}
0.2	5.341×10^{-9}	3.492×10^{-7}	3.981×10^{-6}	2.229×10^{-5}	8.458×10^{-5}
0.3	5.023×10^{-9}	3.392×10^{-7}	3.889×10^{-6}	2.183×10^{-5}	8.293×10^{-5}
0.4	4.522×10^{-9}	3.215×10^{-7}	3.72×10^{-6}	2.096×10^{-5}	7.981×10^{-5}
0.5	3.802×10^{-9}	2.94×10^{-7}	3.45×10^{-6}	1.955×10^{-5}	7.472×10^{-5}
0.6	2.832×10^{-9}	2.546×10^{-7}	3.055×10^{-6}	1.747×10^{-5}	6.719×10^{-5}
0.7	1.577×10^{-9}	2.012×10^{-7}	2.512×10^{-6}	1.46×10^{-5}	5.674×10^{-5}
0.8	4.911×10^{-12}	1.318×10^{-7}	1.797×10^{-6}	1.08×10^{-5}	4.29×10^{-5}
0.9	1.918×10^{-9}	4.417×10^{-8}	8.865×10^{-7}	5.939×10^{-6}	2.519×10^{-5}
1.	4.225×10^{-9}	6.376×10^{-8}	2.428×10^{-7}	1.01×10^{-7}	3.129×10^{-6}

Tablo 4.8. Örnek (4.3.1): 3. mertebeden OPIM çözümlerinin mutlak hataları

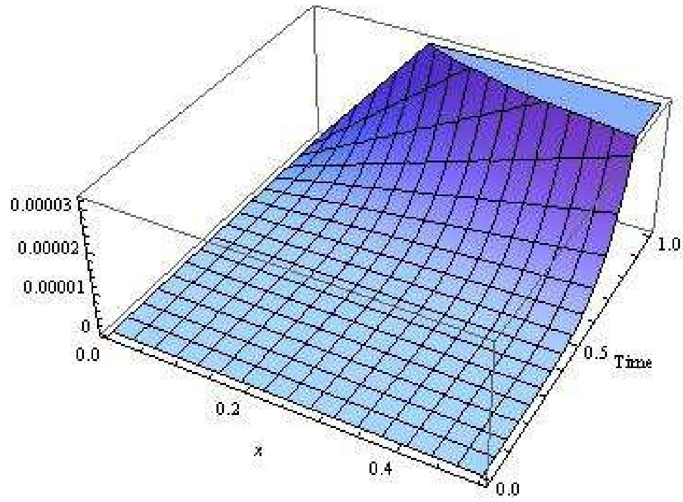
x	$t = 0.1$	$t = 0.2$	$t = 0.3$	$t = 0.4$	$t = 0.5$
0.1	8.322×10^{-14}	1.326×10^{-12}	6.67×10^{-12}	2.088×10^{-11}	5.038×10^{-11}
0.2	3.329×10^{-13}	5.305×10^{-12}	2.668×10^{-11}	8.353×10^{-11}	2.015×10^{-10}
0.3	7.49×10^{-13}	1.194×10^{-11}	6.003×10^{-11}	1.88×10^{-10}	4.534×10^{-10}
0.4	1.332×10^{-12}	2.122×10^{-11}	1.067×10^{-10}	3.341×10^{-10}	8.06×10^{-10}
0.5	2.081×10^{-12}	3.316×10^{-11}	1.667×10^{-10}	5.221×10^{-10}	1.259×10^{-9}
0.6	2.996×10^{-12}	4.774×10^{-11}	2.401×10^{-10}	7.518×10^{-10}	1.814×10^{-9}
0.7	4.078×10^{-12}	6.499×10^{-11}	3.268×10^{-10}	1.023×10^{-9}	2.469×10^{-9}
0.8	5.326×10^{-12}	8.488×10^{-11}	4.268×10^{-10}	1.337×10^{-9}	3.224×10^{-9}
0.9	6.741×10^{-12}	1.074×10^{-10}	5.402×10^{-10}	1.692×10^{-9}	4.081×10^{-9}
1.	8.322×10^{-12}	1.326×10^{-10}	6.67×10^{-10}	2.088×10^{-9}	5.038×10^{-9}



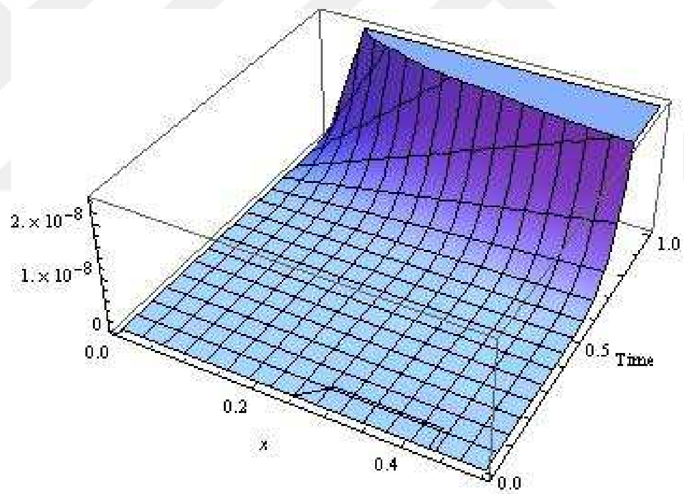
Şekil 4.24. Örnek (4.3.1) için 3. mertebe ADM-DTM çözümlerinin mutlak hatası



Şekil 4.25. Örnek (4.3.1) için 3. mertebe PIM çözümünün mutlak hatası



Şekil 4.26. Örnek (4.3.1) için 2. mertebe OPIA-1 çözümünün mutlak hatası



Şekil 4.27. Örnek (4.3.1) için 3. mertebe OPIA-1 çözümünün mutlak hatası

Tablo 4.9. Örnek (4.3.1): $x = 0.5$ için 2. mertebeden ADM-DTM, PIM, OPIM çözümlerinin mutlak hataları

t	ADM-DTM	PIM	OPIM
0.1	2.083×10^{-6}	4.859×10^{-9}	3.802×10^{-9}
0.2	3.329×10^{-5}	3.107×10^{-7}	2.94×10^{-7}
0.3	1.682×10^{-4}	3.533×10^{-6}	3.45×10^{-6}
0.4	5.305×10^{-4}	1.98×10^{-5}	1.955×10^{-5}
0.5	1.291×10^{-3}	7.532×10^{-5}	7.472×10^{-5}
0.6	2.668×10^{-3}	2.241×10^{-4}	2.229×10^{-4}
0.7	4.921×10^{-3}	5.625×10^{-4}	5.604×10^{-4}
0.8	8.353×10^{-3}	1.247×10^{-3}	1.243×10^{-3}
0.9	1.33×10^{-2}	2.512×10^{-3}	2.507×10^{-3}
1.	2.015×10^{-2}	4.696×10^{-3}	4.689×10^{-3}

Tablo 4.10. Örnek (4.3.1): $x = 0.5$ için 3. mertebeden ADM-DTM, PIM, OPIM çözümlerinin mutlak hataları

t	ADM-DTM	PIM	OPIM
0.1	6.943×10^{-10}	3.831×10^{-12}	2.081×10^{-12}
0.2	4.441×10^{-8}	9.748×10^{-10}	3.316×10^{-11}
0.3	5.054×10^{-7}	2.468×10^{-8}	1.667×10^{-10}
0.4	2.836×10^{-6}	2.424×10^{-7}	5.221×10^{-10}
0.5	1.08×10^{-5}	1.413×10^{-6}	1.259×10^{-9}
0.6	3.219×10^{-5}	5.914×10^{-6}	2.574×10^{-9}
0.7	8.099×10^{-5}	1.965×10^{-5}	4.686×10^{-9}
0.8	1.8×10^{-4}	5.501×10^{-5}	7.838×10^{-9}
0.9	3.638×10^{-4}	1.35×10^{-4}	1.227×10^{-8}
1.	6.822×10^{-4}	2.979×10^{-4}	1.825×10^{-8}

Örnek 4.3.2.

$$u(x,0) = -\operatorname{sech}(x), u_t(x,0) = \frac{1}{2}\operatorname{sech}(x)\tanh x \tag{4.175}$$

başlangıç şartları altında, $\alpha = 3/4, \beta = -3/2, \gamma = 3, h(x,t) = 0$ için

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{3}{4}u - \frac{3}{2}u^3 = 0; \quad x \geq 0, 0 \leq t \leq 1 \tag{4.176}$$

haline dönüşen Klein-Gordon denklemini inceleyelim. Bu denklemin çözümü [24, 66] makalelerinde

$$u(x,t) = -\operatorname{sech}\left(x + \frac{t}{2}\right) \tag{4.177}$$

olarak verilmiştir. (4.176) denklemine yapay parametre yerleştirilerek kapalı formda

$$u_{tt} + \varepsilon\left(-u_{xx} + \frac{3}{4}u - \frac{3}{2}u^3\right) = 0 \tag{4.178}$$

şeklinde yazılır. (4.178) denklemi (3.15) içerisine yerleştirilerek

$$((u_c)_n)_{tt} = (u_n)_{xx} - (u_n)_{tt} - \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}(u_n)^3 \tag{4.179}$$

algoritması elde edilir. PIM ve OPIM için başlangıç fonksiyonu olarak

$$u_0 = -\text{sech}(x) \tag{4.180}$$

seçilebilir.

<u>PIM Çözümleri:</u>

(4.175) şartları göz önünde bulundurularak (4.3.1) örneğindeki gibi ilerlenecek olursa aşağıdaki PIM çözümlerine ulaşılır:

$$(u_1)_{PIM} = -\text{sech}(x) + \frac{1}{16}\left[\begin{array}{l} 3t^2\text{sech}^3(x) - t^2\cosh(2x)\text{sech}^3(x) \\ +8t\text{sech}(x)\tanh(x) \end{array}\right] \tag{4.181}$$

$$(u_2)_{PIM} = u_1 + \left[\begin{array}{l} -\frac{129t^4\text{sech}^9(x)}{16384} - \frac{57t^6\text{sech}^9(x)}{20480} + \frac{27t^8\text{sech}^9(x)}{131072} \\ -\frac{49t^4\cosh(2x)\text{sech}^9(x)}{6144} - \frac{39t^6\cosh(2x)\text{sech}^9(x)}{40960} \\ -\frac{333t^8\cosh(2x)\text{sech}^9(x)}{1835008} + \frac{17t^4\cosh(4x)\text{sech}^9(x)}{12288} \\ +\frac{27t^8\cosh(4x)\text{sech}^9(x)}{917504} + \frac{33t^6\cosh(4x)\text{sech}^9(x)}{20480} \\ +\frac{3t^4\cosh(6x)\text{sech}^9(x)}{2048} + \cdots \end{array}\right] \tag{4.182}$$

$$(u_3)_{PIM} = u_2 + \left[\begin{array}{l} \dfrac{243t^{10}\cosh(4x)\tanh^2(x)\text{sech}^9(x)}{9175040} + \\ \dfrac{81t^6\cosh(6x)\tanh^2(x)\text{sech}^9(x)}{20480} \\ +\dfrac{t^6\sinh(8x)\tanh(x)\text{sech}^9(x)}{10240} \\ -\dfrac{1}{2}t^2\tanh^2(x)\text{sech}(x) \\ +\dfrac{9t^9\cosh(4x)\tanh(x)\text{sech}^9(x)}{28672} + \\ \dfrac{27t^7\cosh(4x)\tanh(x)\text{sech}^9(x)}{4480} \\ -\dfrac{1}{128}t^4\cosh(2x)\text{sech}^5(x) - \\ \dfrac{27t^6\text{sech}^7(x)}{5120} - \dfrac{1}{16}(7)t^2\text{sech}^3(x) + \\ \dfrac{27t^9\sinh(6x)\tanh^2(x)\text{sech}^9(x)}{917504} + \\ \dfrac{81t^7\sinh(6x)\tanh^2(x)\text{sech}^9(x)}{35840} \\ +\dfrac{159t^5\sinh(2x)\text{sech}^{11}(x)}{20480} + \cdots \end{array} \right]. \tag{4.183}$$

<u>OPIM Çözümleri:</u>

3. bölümdeki prosedürler (4.175), (4.179) denklemleri ile beraber uygulanacak olursa

$$(u_1)_{OPIM} = -\text{sech}(x) + \frac{P_0}{16}\left[\begin{array}{l} 3t^2\text{sech}^3(x) - t^2\cosh(2x)\text{sech}^3(x) \\ +8t\text{sech}(x)\tanh(x) \end{array} \right] \tag{4.184}$$

$$(u_2)_{OPIM} = u_1 + P_1 \times$$
$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{16}P_0t^2\text{sech}^3(x) - \dfrac{1}{4}t^2\text{sech}^3(x) + \dfrac{3}{8}t^2\text{sech}(x) \\ -\dfrac{1}{128}P_0t^4\cosh(2x)\text{sech}^5(x) + \dfrac{3}{16}P_0t^3\sinh(2x)\text{sech}^5(x) \\ +\dfrac{111P_0^3t^7\sinh(2x)\text{sech}^9(x)}{114688} - \dfrac{9P_0^3t^7\sinh(4x)\text{sech}^9(x)}{28672} \\ +\dfrac{3P_0^3t^7\sinh(6x)\text{sech}^9(x)}{114688} + \dfrac{3P_0^3t^5\sinh(6x)\text{sech}^9(x)}{10240} \\ -\dfrac{3}{64}P_0t^4\cosh(2x)\tanh^2(x)\text{sech}^3(x) - \dfrac{3}{256}P_0t^4\text{sech}^3(x) + \cdots \end{array} \right] \tag{4.185}$$

$$
(u_3)_{OPIM} = u_2 + P_2 \times \left[\begin{array}{l} \frac{27P_0^3 t^8 \sinh(9x)}{256(\sinh(2x)+\cosh(2x)+1)^9} + \\ \frac{3P_0^3 t^7 \sinh(x)\sinh(8x)\cosh^2(2x)}{56(\sinh(2x)+\cosh(2x)+1)^8} \\ + \frac{9P_1 t^4 e^{5x}}{4\left(e^{2x}+1\right)^5} - \frac{3P_1 t^4 e^{5x}\cosh(2x)}{4\left(e^{2x}+1\right)^5} \\ - \frac{7P_0 P_1 t^6 \cosh(2x)\mathrm{sech}^7(x)}{3840} \\ + \frac{91P_0 P_1 t^6 \sinh(7x)\cosh(2x)}{40(\sinh(2x)+\cosh(2x)+1)^7} - \\ \frac{13P_0 P_1 t^6 \sinh(7x)\cosh(4x)}{160(\sinh(2x)+\cosh(2x)+1)^7} \\ + \frac{249P_0^2 P_1 t^8 \sinh(13x)}{2240(\sinh(2x)+\cosh(2x)+1)^9} + \cdots \end{array} \right] \tag{4.186}
$$

çözümleri elde edilir. 3. mertebe OPIA-1 çözümü için P_0, P_1 ve P_2 parametreleri ise

$$
P_0 = 1.1224051, P_1 = -1.0077802, P_2 = 0.0928211 \tag{4.187}
$$

şeklinde ortaya çıkar. Bu parametreler (4.186) denklemine yerleştirilerek 3. mertebeden OPIA-1 yaklaşımı elde edilir.

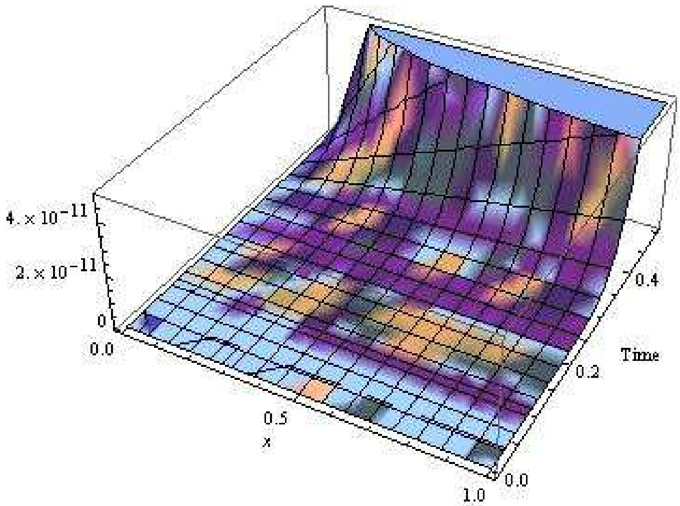
Bu örnek ADM [67],VIM [68] ve OHAM [69] metotları ile de incelenmiştir. OPIM metodunun etkinliğini ve güvenilirliğini ispat amacıyla diğer metotlar ve OPIM çözümlerinin farklı x ve t ler için mutlak hataları 4.11 ve 4.12 tablolarında verilmiştir. 3. mertebe OPIM yaklaşımı 3.mertebeden VIM çözümü [68] ve 4. mertebe ADM [67] çözümü ile karşılaştırıldığında daha tatmin edici sonuçlar vermektedir. Şekiller (4.28) ve (4.29) de PIM ve OPIM ile elde edilen 3. mertebe çözümlerin mutlak hataları verilmiştir. Yaklaşımın mertebesi arttığı sürece doğruluğun da arttığı görülmektedir. $x = 1$ ve $x = 3$ durumlarında analitik fonksiyonun ve yaklaşık metotlatın durumları şekiller (4.30) ve (4.31) de gösterilmiştir. Buradan da yeni yaklaşımların daha geniş bölgeler için geçerli olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 4.11. Örnek (4.3.2): $t = 0.1$ için 3. mertebe OPIM,VIM ve 4. mertebe ADM çözümlerinin mutlak hataları

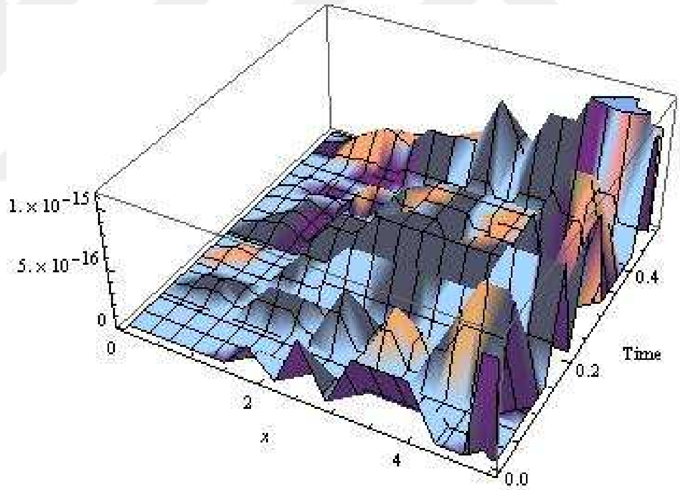
x	(ADM)	(VIM)	(OPIM)
1	5.201×10^{-11}	4.809×10^{-12}	3.334×10^{-19}
2	3.362×10^{-11}	2.607×10^{-13}	3.108×10^{-19}
3	2.379×10^{-11}	4.985×10^{-14}	5.274×10^{-20}
4	1.509×10^{-11}	2.774×10^{-15}	6.118×10^{-21}
5	1.496×10^{-11}	1.292×10^{-16}	8.936×10^{-20}
6	2.471×10^{-12}	2.315×10^{-18}	4.014×10^{-21}
7	2.250×10^{-12}	1.403×10^{-18}	1.124×10^{-21}
8	1.613×10^{-13}	6.288×10^{-19}	7.052×10^{-21}
9	1.541×10^{-13}	2.369×10^{-19}	8.017×10^{-20}
10	1.108×10^{-14}	8.743×10^{-20}	1.055×10^{-20}

Tablo 4.12. Örnek (4.3.2): $t = 0.3$ için 3. mertebe OPIM,VIM ve 4. mertebe ADM çözümlerinin mutlak hataları

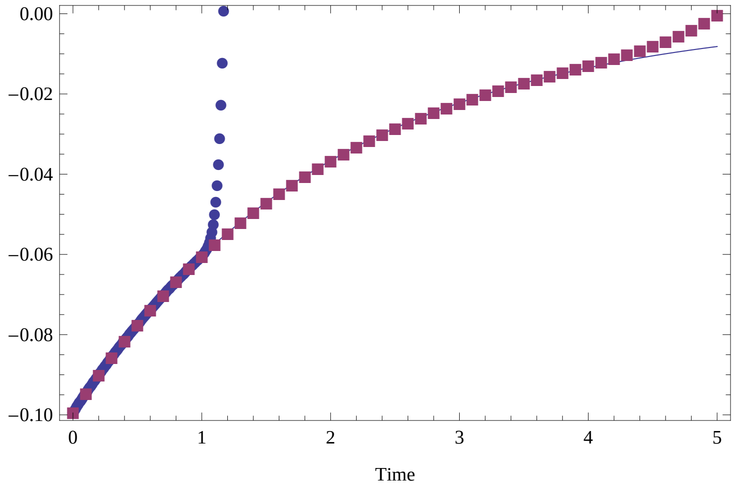
x	(ADM)	(VIM)	(OPIM)
1	4.427×10^{-8}	3.177×10^{-8}	5.036×10^{-17}
2	6.142×10^{-9}	1.651×10^{-9}	6.018×10^{-17}
3	3.528×10^{-10}	3.211×10^{-10}	3.305×10^{-16}
4	2.774×10^{-11}	1.788×10^{-11}	9.012×10^{-15}
5	8.682×10^{-12}	8.318×10^{-13}	7.047×10^{-15}
6	1.430×10^{-13}	1.741×10^{-14}	2.512×10^{-16}
7	5.498×10^{-13}	9.126×10^{-15}	6.369×10^{-16}
8	1.514×10^{-13}	4.081×10^{-15}	8.169×10^{-17}
9	4.975×10^{-14}	1.537×10^{-15}	9.142×10^{-16}
10	4.353×10^{-14}	5.674×10^{-16}	8.777×10^{-16}



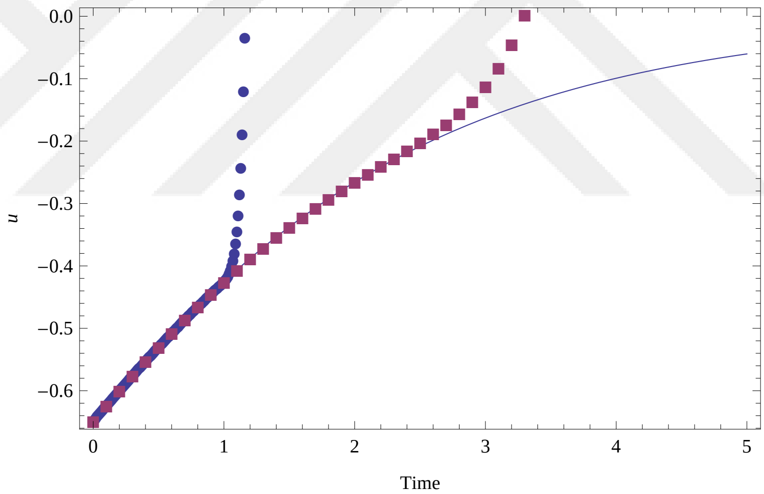
Şekil 4.28. Örnek (4.3.2): $|u_{Tam} - (u_3)_{PIM}|$



Şekil 4.29. Örnek (4.3.2): $|u_{Tam} - (u_3)_{OPIM}|$



Şekil 4.30. Örnek (4.3.2) : $x = 1$ için 3. mertebe OPIM(■), VIM(•) , tam çözüm (–)



Şekil 4.31. Örnek (4.3.2) : $x = 3$ için 3. mertebe OPIM(■), VIM(•) , tam çözüm (–)

4.4. Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga Denklemleri

Herhangi bir akışkanın yatay ivmesine göre düşey ivmesinin önemsiz sayılabildiği ve sıvı derinliğinin dalga boyuna göre küçük olduğu akımlar **uzun dalga** olarak nitelendirilir. Denizlerde sıkça görülen gel-git dalgalarının yanısıra, deprem dalgaları ve bazı elektromagnetik dalgalar uzun dalgalara örnek olarak verilebilir. Bu dalgaları modellemek için birçok denklem ortaya atılmıştır [70]. α, β pozitif sabitler ve p pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$u_t + u_x + \alpha(u^p)_x - \beta u_{xxt} = 0, \quad (x,t) \in (a,b) \times (0,T) \tag{4.188}$$

ile verilen genelleştirilmiş düzenli uzun dalga (GRLW) denklemi en meşhur kısmi diferansiyel denklemlerden birisidir. GRLW denklemi ilk olarak Peregrine tarafından bir kanaldaki su yüzeyi üzerindeki küçük genlikli uzun dalgaları modellemek için kullanılmıştır [71]. Buna ilaveten (4.188) denklemi, elastik çubuklardaki boylamasına dağılan dalgaları, sıvı - gaz kabarcık karışımlarındaki basınç dalgaları ve bir tüpün altındaki döner akış gibi çeşitli fiziksel fenomenleri tahmin etmek için matematiksel modeller sunmaktadır. (4.188) denklemindeki doğrusal olmayan $\alpha(u^p)_x$ terimi dalga formunun sertleşmesine neden olur. Son terim olan βu_{xxt} , dağılma etkisi terimi olarak adlandırılır ve bu terim dalga formunu yayar. Gökyüzünden laboratuara kadar birçok sistemde bulunan solitonlar, dağılma ve nonlineerlik arasındaki bu dengeden dolayı ortaya çıkmaktadır [72, 73]. Yine birçok fiziksel sistemde GRLW denklemi, KdV denklemi yerine de kullanılabilir [74].

GRLW denklemi, $p = 1, 2$ için sırasıyla düzenli uzun dalga (RLW) denklemine ve modifiye edilmiş düzenli uzun dalga (MRLW) denklemine indirgenir. RLW ve MRLW denklemleri, düzensiz bir dalgalı deliğin gelişimini tanımlar. Bu dalgalı deliğin davranışı (4.188) denklemindeki α, β sabitleri ile karakterize edilir. Bu denklemler, plazmada manyeto - hidrodinamik dalgalar, plazmada iyon-akustik dalgalar, elastik çubuklardaki boylamasına dağılma dalgaları, sıvı - gaz kabarcıklarındaki basınç dalgaları gibi fen ve mühendisliğin birçok sahasında modelleme yapmak için kullanılmıştır [75–78].

Literatürde özel GRLW denklem türleri için analitik çözümler öneren metotlar yok denecek kadar azdır. Bu nedenle, bu denklemlerin sayısal çözümleri bir çok çalışmaya konu olmuştur. Petrov-Galerkin methodu [79], sonlu farklar metodu [80], sonlu elemanlar metodu [81–83], radyal taban fonksiyonlu kolokasyon yöntemi [84] ve kübik B-spline sonlu elemanlar yöntemi [85] bu denklemlere yaklaşık çözümler önermek için inşa edilmişlerdir.

Bu kısımda özel GRLW denklemlerine PIM ve OPIM metodları ile yaklaşımda bulunulmuş,bunlar için yeni çözümler önerilmiş ve diğer metotların sonuçları ile karşılaştırmaya çalışılmıştır.

Örnek 4.4.1. İlk olarak (4.188) denklemini $p = 2, \alpha = \beta = 1$ için ele alalım. Bu durumda tek dalga çözümü

$$u_t + u_x + \left(u^2\right)_x - u_{xxt} = 0; \quad x \geq 0, \;\; 0 \leq t \leq 1 \tag{4.189}$$

denklemi için

$$u(x,0) = \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) \tag{4.190}$$

şartları altında hesaplanabilir. Bu problemin tam çözümü

$$u(x,t) = \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x+1-2t}{2\sqrt{2}}\right) \tag{4.191}$$

olarak verilmiştir [87, 88].

Öncelikle deneme fonksiyonu u_0, şartlara uygun olarak

$$u_0 = \frac{3}{2}\text{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) \tag{4.192}$$

şeklinde seçilebilir. (2.16) algoritması ve (4.192) kullanılarak

$$\begin{aligned} &((u_c)_0)_t = \frac{3\text{sech}^2\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{9\text{sech}^4\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}; \\ &(u_c)_0(x,0) = 0 \end{aligned} \tag{4.193}$$

birinci mertebe problemi elde edilir. Bu problemin çözülmesiyle

$$(u_c)_0 = t\left[\frac{3\text{sech}^2\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{9\text{sech}^4\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}\right] \tag{4.194}$$

birinci düzeltme terimi elde edilir.

<u>PIM Çözümleri:</u>

İlk düzeltme terimi $(u_c)_0$ elde edildikten sonra 1. mertebe yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} &(u_1)_{PIM} = u_0 + (u_c)_0 = \\ &\tfrac{3}{2}\text{sech}^2\left(\tfrac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + t\left[\frac{3\text{sech}^2\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{9\text{sech}^4\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}\right] \end{aligned} \tag{4.195}$$

olacaktır. (2.16) ve u_1 ' in yardımıyla 2. merteben yaklaşık çözüm

$$(u_2)_{PIM} = u_1 + (u_c)_1 =$$
$$\frac{3}{2}\text{sech}^2\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{16}t^2\text{sech}^4\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{27}{16}t^2\text{sech}^8\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$-\frac{3t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} - \frac{3t^3\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^6\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}}$$
$$-\frac{9t^3\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^8\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{4\sqrt{2}} - \frac{27t^3\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^{10}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}}+ \tag{4.196}$$
$$\frac{3}{8}t^2\tanh^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{81}{8}t^2\tanh^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^6\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$-\frac{63t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^6\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}} - \frac{9}{8}t^2\text{sech}^6\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right) + \cdots$$

şeklinde hesap edilir.

<u>OPIM Çözümleri:</u>

(2.16),(3.7) ve (4.194) denklemleri kullanılarak 1. ve 2. mertebe OPIM yaklaşımları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$(u_1)_{OPIM} = u_0 + P_0(u_c)_0 =$$
$$\frac{3}{2}\text{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + P_0 t\left[\frac{3\text{sech}^2\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{9\text{sech}^4\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{1+x}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}\right] \tag{4.197}$$

$$(u_2)_{OPIM} = u_1 + P_1\times$$
$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{16}27P_0t^2\text{sech}^8\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{9}{8}P_0t^2\text{sech}^6\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{16}P_0t^2\text{sech}^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) \\ +\frac{9t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} + \frac{3t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}} \\ -3\sqrt{2}P_0t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{63P_0t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^6\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}} \\ -\frac{27P_0^2t^3\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^{10}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}} + \frac{3}{8}P_0t^2\tanh^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) \\ +\frac{3P_0^2t^3\tanh^3\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{4\sqrt{2}} + \frac{9P_0t\tanh^3\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{sech}^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + \cdots \end{array}\right]. \tag{4.198}$$

3. bölümdeki bilgiler ışığında yardımcı parametreler elde edilebilir. Birinci mertebe yaklaşık çözümde P_0 parametresini elde etmek için

$$Re(x,t;P_0) = (u_1)_t + (u_1)_x + \left((u_1)^2\right)_x - (u_1)_{xxt} \tag{4.199}$$

rezidüsü hesap edilir. $x_0 = 25, t_0 = 0.25$ noktalarının kullanılmasıyla (3.11) kolokasyon denklemi

$$\begin{aligned} &Re(25,0.25;P_0) = \\ &-4.39773833\times10^{-8} + 1.4214507\times10^{-8}P_0 - 1.70943984\times10^{-16}P_0^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.200}$$

halini alır. (4.200)'in çözülmesiyle $P_0 = 3.09384$ ve $P_0 = 8.3153\times10^7$ değerleri elde edilir. $P_0 = 3.09384$ değerinin (4.197) ifadesi içine yerleştirilmesiyle

$$(u_1)_{OPIM} = \text{sech}^2\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\left[\begin{array}{l} 1.5 + 3.28151t\tanh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + \\ 78.7563t\sinh^4\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\text{csch}^3\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right] \tag{4.201}$$

birinci mertebe OPIM çözümü elde edilir. Benzer şekilde ikinci mertebe OPIM çözümü

$$\begin{aligned} &(u_2)_{OPIM} = -0.00180923\text{sech}^{11}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right)\times \\ &\left[\begin{array}{l} 12580.3t^3\sinh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) - 1918.02t^3\sinh\left(\frac{3(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) - 344.2t^3\sinh\left(\frac{5(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) \\ -9.836t^3\sinh\left(\frac{7(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) + 1044t^2\cosh\left(\frac{5(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) + 102t^2\cosh\left(\frac{7(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) \\ +(-5064.t^2 - 408.06)\cosh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + (-180t^2 - 272.04)\cosh\left(\frac{3(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) \\ +3442.5t\sinh\left(\frac{3(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) - 1266.3t\sinh\left(\frac{5(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) - 71.65t\sinh\left(\frac{7(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) \\ -116.59\cosh\left(\frac{5(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) - 29.1474\cosh\left(\frac{7(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) - 3.23\cosh\left(\frac{9(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) \\ -7.34419t\sinh\left(\frac{9(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) - 2240.53t\sinh\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + 2.t^2\cosh\left(\frac{9(x+1)}{2\sqrt{2}}\right) \end{array}\right] \end{aligned} \tag{4.202}$$

şeklinde bulunur. Benzer prosedürler takip edilerek yüksek mertebe çözümlere sembolik bir program yardımıyla ulaşılabilir. PIM ve OPIM çözümlerinin farklı x değerleri için mutlak hataları 4.13 ve 4.14 tablolarında verilmiştir. Bu tablolardan her iki metodun da analitik çözümlerle uyum içerisinde olduğu açıkca görülmektedir. Bunun yanında OPIM çözümlerinin az da olsa PIM çözümlerine göre daha yaklaşık olduğu da söylenebilir. Bulunan tüm yaklaşımların ve tam çözüm (4.32) - (4.36) şekillerinde resmedilmiştir.

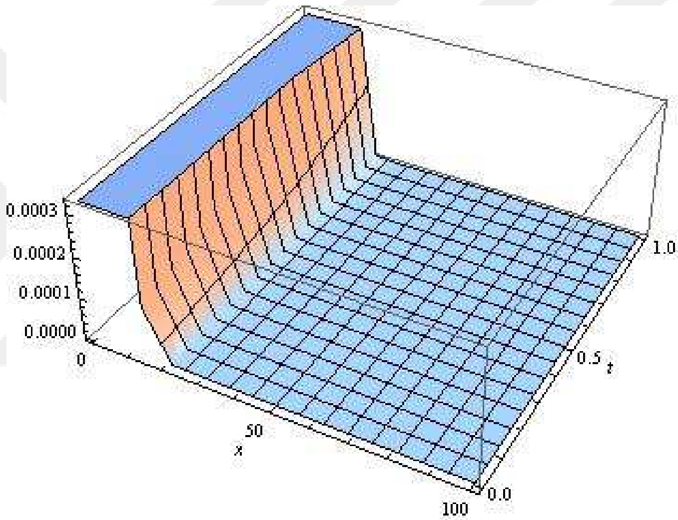
Bu problem birçok yazar tarafından ADM, VIM gibi metotlar ile de irdelenmiştir [86–88]. Özellikle küçük zaman aralıkları ve büyük genlikler için bulunan yeni OPIM çözümlerinin, [86–88] nolu makalelerdeki çözümlerden daha etkili sonuçlar verdiği görülmektedir. Ayrıca daha yüksek mertebe OPIM çözümleri için bu yaklaşımların daha da iyileşeceği unutulmamalıdır.

Tablo 4.13. Örnek (4.4.1): $x = 25$ için 1. ve 2. mertebe PIM ve OPIM yaklaşımları için mutlak hatalar

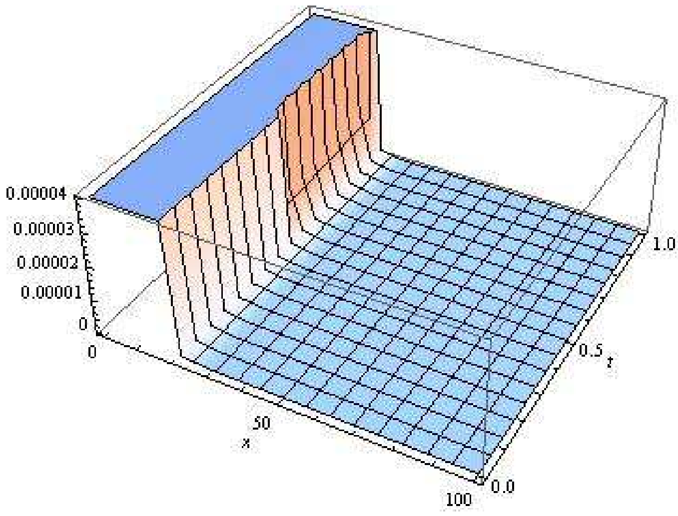
t	PIM-1.	PIM-2.	OPIM-1.	OPIM-2.
0.1	5.05×10^{-9}	2.6957×10^{-9}	4.1581×10^{-9}	4.2717×10^{-10}
0.2	1.1535×10^{-8}	6.5156×10^{-9}	6.881×10^{-9}	6.3401×10^{-9}
0.3	1.9673×10^{-8}	1.1677×10^{-8}	7.9506×10^{-9}	5.9871×10^{-10}
0.4	2.9716×10^{-8}	1.8433×10^{-8}	7.1159×10^{-9}	2.9616×10^{-9}
0.5	4.1953×10^{-8}	2.7072×10^{-8}	4.0875×10^{-9}	3.0257×10^{-10}
0.6	5.6717×10^{-8}	3.7926×10^{-8}	1.4678×10^{-9}	1.2308×10^{-9}
0.7	7.4391×10^{-8}	5.138×10^{-8}	9.934×10^{-9}	2.5269×10^{-10}
0.8	9.5418×10^{-8}	6.7876×10^{-8}	2.1753×10^{-8}	4.2352×10^{-10}
0.9	1.203×10^{-7}	8.7924×10^{-8}	3.7434×10^{-8}	6.4065×10^{-9}
1.	1.4964×10^{-7}	1.121×10^{-7}	5.7565×10^{-8}	9.0995×10^{-9}

Tablo 4.14. Örnek (4.4.1): $x = 100$ için 1. ve 2. mertebe PIM ve OPIM yaklaşımları için mutlak hatalar

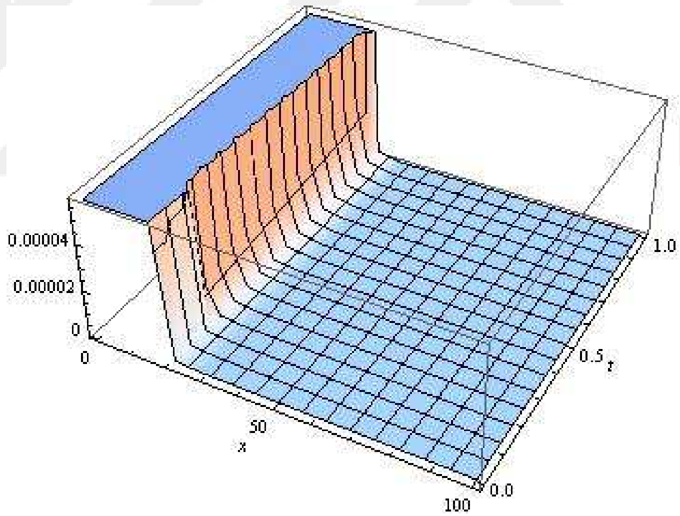
t	PIM-1.	PIM-2.	OPIM-1.	OPIM-2.
0.1	4.6919×10^{-32}	2.5045×10^{-32}	3.8632×10^{-32}	3.9688×10^{-33}
0.2	1.0717×10^{-31}	6.0536×10^{-32}	6.393×10^{-32}	5.8905×10^{-33}
0.3	1.8278×10^{-31}	1.0849×10^{-31}	7.3868×10^{-32}	5.5626×10^{-33}
0.4	2.7609×10^{-31}	1.7126×10^{-31}	6.6113×10^{-32}	2.7515×10^{-32}
0.5	3.8978×10^{-31}	2.5152×10^{-31}	3.7976×10^{-32}	2.8112×10^{-32}
0.6	5.2695×10^{-31}	3.5236×10^{-31}	1.3637×10^{-32}	1.1435×10^{-32}
0.7	6.9116×10^{-31}	4.7737×10^{-31}	9.2295×10^{-32}	2.3477×10^{-32}
0.8	8.8652×10^{-31}	6.3063×10^{-31}	2.021×10^{-31}	3.9349×10^{-31}
0.9	1.1177×10^{-30}	8.1689×10^{-31}	3.478×10^{-31}	5.9522×10^{-32}
1.	1.3903×10^{-30}	1.0416×10^{-30}	5.3483×10^{-31}	8.4543×10^{-32}



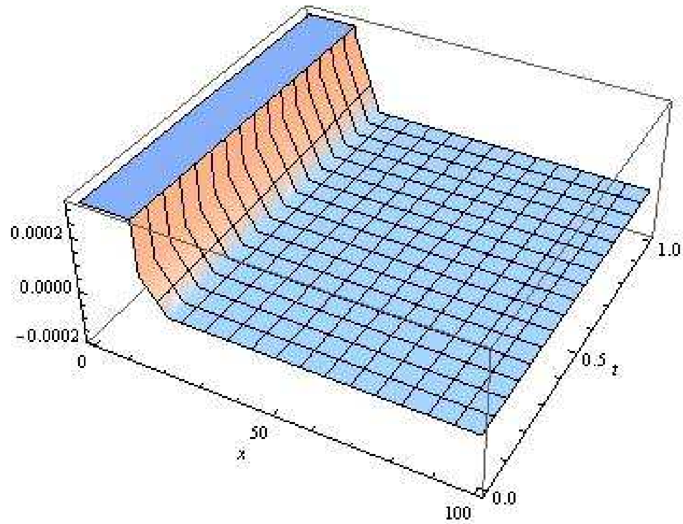
Şekil 4.32. Örnek (4.4.1) için tam çözüm.



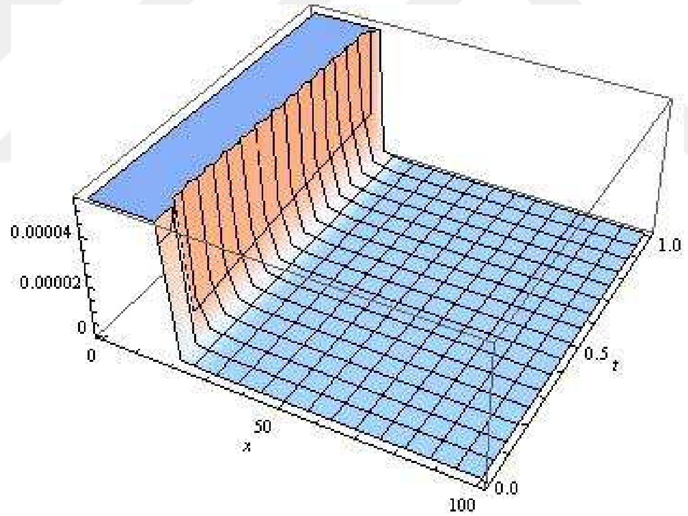
Şekil 4.33. Örnek (4.4.1): $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq t \leq 1$ için 1. mertebe PIM çözümü



Şekil 4.34. Örnek (4.4.1): $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq t \leq 1$ için 1. mertebe OPIM çözümü



Şekil 4.35. Örnek (4.4.1): $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq t \leq 1$ için 2. mertebe PIM çözümü



Şekil 4.36. Örnek (4.4.1): $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq t \leq 1$ için 2. mertebe OPIM çözümü

Örnek 4.4.2. (4.188) denklemini $p = 8, \alpha = \beta = 1$ için ele alalım. Bu durumda

$$u_t + u_x + \left(u^8\right)_x - u_{xxt} = 0 \tag{4.203}$$

denklemini

$$u(x,0) = \sqrt[7]{18}\,\mathrm{sech}^{\frac{2}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right) \tag{4.204}$$

şartı altında ele alacağız. Bu problemin tam çözümü

$$u(x,t) = \sqrt[7]{18}\,\mathrm{sech}^{\frac{2}{7}}\left(\frac{7(x+1-5t)}{\sqrt{5}}\right) \tag{4.205}$$

olarak verilmiştir.

PIM Çözümleri:

İterasyonlara başlamak için,(4.204) şartı u_0 deneme fonksiyonu olarak alınabilir. Bir önceki örnekteki adımlar tekrarlanarak aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$(u_1)_{PIM} = u_0 + t\left[\begin{array}{c} \dfrac{2\sqrt[7]{2}3^{2/7}\sinh\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\mathrm{sech}^{\frac{9}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}+ \\ \dfrac{288\sqrt[7]{2}3^{2/7}\sinh\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\mathrm{sech}^{\frac{23}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}} \end{array}\right] \tag{4.206}$$

$$\begin{aligned}
&(u_2)_{PIM} = u_1- \\
&\tfrac{7}{5}\sqrt[7]{2}3^{2/7}t^2\mathrm{sech}^{\frac{2}{7}}\left(\tfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right) - \tfrac{1008}{5}\sqrt[7]{2}3^{2/7}t^2\mathrm{sech}^{\frac{16}{7}}\left(\tfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)+ \\
&\left[\begin{array}{l}
-12694\cosh\left(\frac{28(x+1)}{\sqrt{5}}\right) + 4313\cosh\left(\frac{42(x+1)}{\sqrt{5}}\right) + 4\cosh\left(\frac{56(x+1)}{\sqrt{5}}\right) \\
-28850\cosh\left(\frac{28(x+1)}{\sqrt{5}}\right) + 8331\cosh\left(\frac{42(x+1)}{\sqrt{5}}\right) + 4\cosh\left(\frac{56(x+1)}{\sqrt{5}}\right) \\
-4316\sqrt[7]{2}3^{2/7}\sqrt{5}\cosh\left(\dfrac{28(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\mathrm{sech}^{\frac{2}{7}}\left(\dfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)+\cdots
\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{4.207}$$

OPIM Çözümleri:

(2.16), (3.7) ve (4.204) denklemleri yardımıyla

$$(u_1)_{OPIM}=u_0+tP_0\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\sqrt[7]{2}3^{2/7}\sinh\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{9}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}+\\ \dfrac{288\sqrt[7]{2}3^{2/7}\sinh\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{23}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}\end{array}\right] \tag{4.208}$$

$$(u_2)_{OPIM}=u_1+P_2\times$$
$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\sqrt[7]{2}3^{2/7}t\sinh\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{9}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}-\dfrac{7}{5}\sqrt[7]{2}3^{2/7}P_0t^2\operatorname{sech}^{\frac{2}{7}}\left(\dfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\\ -\dfrac{58\sqrt[7]{2}3^{2/7}P_0t\sinh\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{9}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}\\ +\dfrac{3312}{5}\sqrt[7]{2}3^{2/7}P_0t^2\sinh^2\left(\dfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{30}{7}}\left(\dfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\\ \dfrac{9}{5}\sqrt[7]{2}3^{2/7}P_0t^2\sinh^2\left(\dfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{16}{7}}\left(\dfrac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\\ +\dfrac{288\sqrt[7]{2}3^{2/7}P_0t\sinh^3\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)\operatorname{sech}^{\frac{23}{7}}\left(\frac{7(x+1)}{\sqrt{5}}\right)}{5\sqrt{5}}\end{array}\right]. \tag{4.209}$$

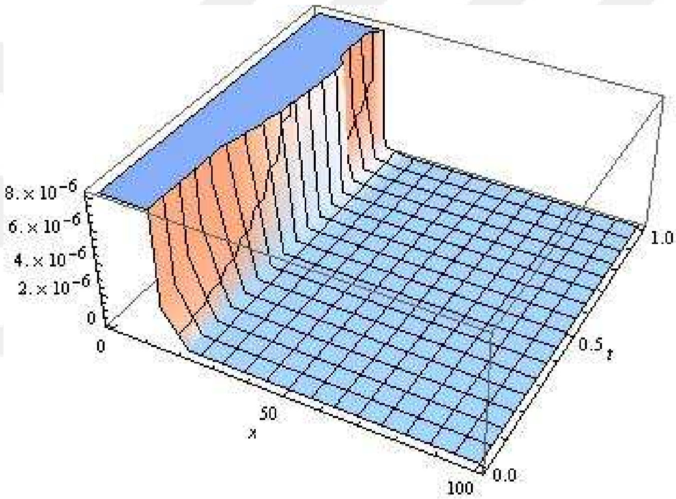
P_0, P_1 parametreleri için 3. bölümdeki kolokasyon metodu kullanılırsa $(u_1)_{OPIM}$ ve $(u_2)_{OPIM}$ yaklaşımları için sırasıyla $P_0 = 9.04508$ ve $P_0 = 1.71562, P_1 = -0.61424$ değerleri elde edilir. Bulunan bu değerlerin (4.208) ve (4.209) denklemlerinde yerine konulmasıyla Örnek (4.4.2) için 1. ve 2. mertebe OPIM çözümleri elde edilir. PIM ve OPIM çözümlerinin sabit genlikteki tam çözümle olan mutlak hataları tablo (4.15) ve tablo (4.16)' de görülebilir. (4.37) - (4.41) şekilleri Mathematica 9.0. yardımı ile PIM ve OPIM yaklaşımlarını göstermektedir.

Tablo 4.15. Örnek (4.4.2): $x = 30$ için 1. ve 2. mertebe PIM ve OPIM yaklaşımları için mutlak hatalar

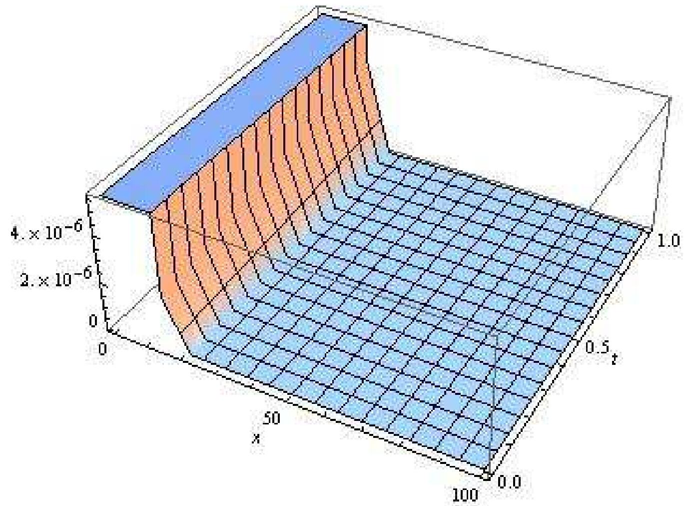
t	PIM-1.	PIM-2.	OPIM-1.	OPIM-2.
0.1	7.9394×10^{-13}	6.6752×10^{-13}	4.1004×10^{-13}	4.6839×10^{-15}
0.2	2.12×10^{-12}	1.8538×10^{-12}	2.8795×10^{-13}	3.2893×10^{-15}
0.3	4.2783×10^{-12}	3.8589×10^{-12}	6.6637×10^{-13}	7.6119×10^{-15}
0.4	7.7382×10^{-12}	7.1522×10^{-12}	2.9222×10^{-12}	3.338×10^{-14}
0.5	1.3233×10^{-11}	1.2467×10^{-11}	7.2138×10^{-12}	8.2402×10^{-14}
0.6	2.1912×10^{-11}	2.0953×10^{-11}	1.4688×10^{-11}	1.6778×10^{-13}
0.7	3.557×10^{-11}	3.4404×10^{-11}	2.7142×10^{-11}	3.1005×10^{-13}
0.8	5.7015×10^{-11}	5.5629×10^{-11}	4.7383×10^{-11}	5.4126×10^{-13}
0.9	9.0638×10^{-11}	8.9019×10^{-11}	7.9802×10^{-11}	9.1158×10^{-13}
1.	1.433×10^{-10}	1.4144×10^{-10}	1.3126×10^{-10}	1.4994×10^{-12}

Tablo 4.16. Örnek (4.4.2): $x = 80$ için 1. ve 2. mertebe PIM ve OPIM yaklaşımları için mutlak hatalar

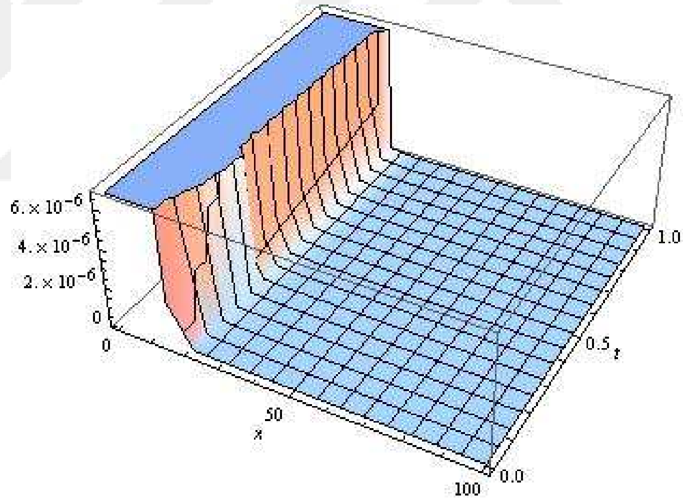
t	PIM-1.	PIM-2.	OPIM-1.	OPIM-2.
0.1	3.0029×10^{-32}	2.5248×10^{-32}	1.5509×10^{-32}	1.7716×10^{-34}
0.2	8.0186×10^{-32}	7.0117×10^{-32}	1.0891×10^{-32}	1.2441×10^{-34}
0.3	1.6182×10^{-31}	1.4595×10^{-31}	2.5204×10^{-32}	2.879×10^{-34}
0.4	2.9268×10^{-31}	2.7052×10^{-31}	1.1053×10^{-31}	1.2625×10^{-33}
0.5	5.0054×10^{-31}	4.7157×10^{-31}	2.7285×10^{-31}	3.1167×10^{-33}
0.6	8.2881×10^{-31}	7.9253×10^{-31}	5.5558×10^{-31}	6.3463×10^{-33}
0.7	1.3454×10^{-30}	1.3013×10^{-30}	1.0266×10^{-30}	1.1727×10^{-32}
0.8	2.1565×10^{-30}	2.1041×10^{-30}	1.7922×10^{-30}	2.0472×10^{-32}
0.9	3.4282×10^{-30}	3.367×10^{-30}	3.0184×10^{-30}	3.4479×10^{-32}
1.	5.4203×10^{-30}	5.3497×10^{-30}	4.965×10^{-30}	5.6714×10^{-32}



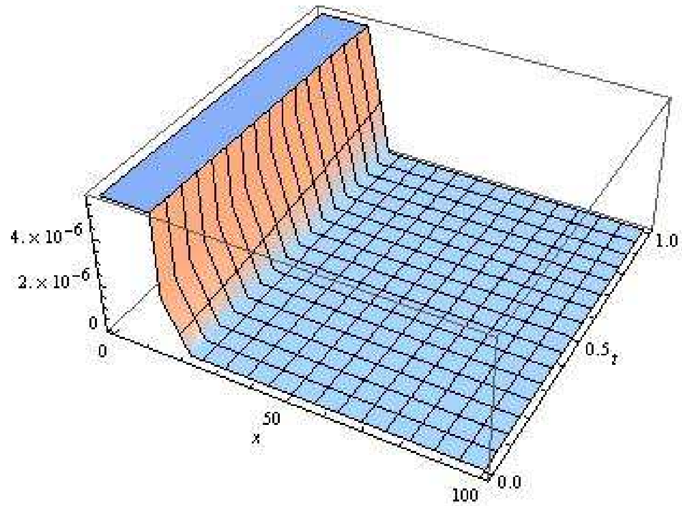
Şekil 4.37. Örnek (4.4.2) için tam çözüm



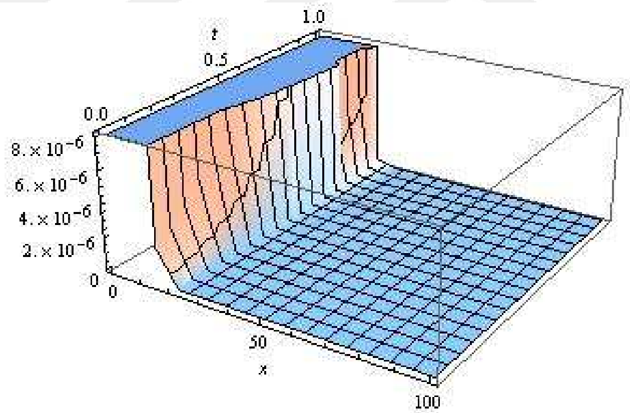
Şekil 4.38. Örnek (4.4.2): $0 \le x \le 100$, $0 \le t \le 1$ için 1. mertebe PIM çözümleri



Şekil 4.39. Örnek (4.4.2): $0 \le x \le 100$, $0 \le t \le 1$ için 1. mertebe OPIM çözümleri



Şekil 4.40. Örnek (4.4.2): $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq t \leq 1$ için 2. mertebe PIM çözümleri



Şekil 4.41. Örnek (4.4.2): $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq t \leq 1$ için 2. mertebe OPIM çözümleri

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez boyunca perturbasyon iterasyon metodu temel alınarak oluşturulan optimal perturbasyon iterasyon metodu tanıtılmış ve bu metodun genel bir incelemesi yapılmıştır. Öncelikle perturbasyon iterasyon metodunun eksikliklerinden bahsedilerek bunları gidermeye yönelik bazı çözümler önerilmiş ve metot üzerinden bazı modifikasyonlar yapılmıştır. Bu modifikasyonlar sonucu PIM algoritmalarının oluşturulma sürelerinin oldukça kısaldığı görülmüştür. Bunun yanında elde edilen sonuçların iyileştirilmesi amacıyla, perturbasyon iterasyon algoritmalarında açığa çıkan düzeltme terimlerinin katsayılarına farklı parametreler eklenmiştir. Daha sonra bu parametrelerin optimal değerlerinin bulunup yerlerine konmasıyla daha etkin sonuçların elde edildiği saptanmıştır. Literatürde yer alan bazı meşhur diferansiyel denklemler OPIM algoritmaları ile çözülerek, elde edilen yaklaşımlar diğer metotların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar sonucu OPIM sonuçlarının diğer metotlara nazaran tam çözüme daha yaklaşık değerler verdiği görülmüştür.

Optimal perturbasyon iterasyon metodu ile elde edilen sonuçlar oldukça tatmin edici olmakla beraber işlemlerin karmaşıklığı nedeniyle sembolik bir hesaplama aracına ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun yanında problemlerin yüksek mertebeden çözümlerine daha hızlı ulaşabilmek için kullanılan bilgisayarın işlemci, RAM, anakart vs gibi donanım özeliklerinin de iyi olması beklenmektedir. Örneğin bu tezde yer verilen adi diferansiyel denklemler olan gecikmeli diferansiyel denklemler ve Lane-Emden tipi denklemler OPIM ile irdelenirken, özellikle 4. ve 5. iterasyondan itibaren gereken CPU zamanında oldukça büyük bir artış gözlemlenmiştir. Bunu azaltabilmek için daha donanımlı bir bilgisayarın yanında yakınsaklık parametrelerinin bulunuş yöntemini de değiştirmek etkili olabilmektedir. Bu tez boyunca tüm karmaşık işlemler Mathematica 9.0. programı ile yapılmıştır.

Sonuç olarak, bu tezde tanıtılmış olan optimal perturbasyon iterasyon metodu ile literatürde yer alan birçok önemli denkleme yeni yarı-analtik çözümler önerilmiştir. Ayrıca daha önce ele alınmayan kısmi diferansiyel denklemler için de perturbasyon iterasyon algoritmaları elde edilmiş ve buna dayalı olarak da optimal perturbasyon iterasyon metodu ile bu denklemler de incelenmiştir. Bulunan sonuçların tatmin edici olmasına rağmen hala daha geliştirilebileceği açıktır. Örneğin kısmi diferansiyel denklemler için oldukça sorun olan CPU zamanına bilgisayar becerileri ile bir çözüm önerilebilir. Ayrıca metodun güvenilirliği ve etkinliğini test etmek amacıyla kesirli diferansiyel denklemler, integro denklemler, integral-diferansiyel denklemler gibi birçok farklı türden denklem OPIM ile ele alınabilir ve sonuçlar diğer metotlar ile karşılaştırılarak metodun eksik veya üstün yanları gün yüzüne çıkartılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Bildik, N., Konuralp, A. The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2006, 7(1), 65-70.

[2] Bildik, N., Konuralp, A., Bek, F. O., Küçükarslan, S. Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method. Applied Mathematics and Computation. 2006, 172(1), 551-567.

[3] Bildik, N., İnç, M. Modified decomposition method for nonlinear Volterra - Fredholm integral equations. Chaos, Solitons & Fractals. 2007, 33(1), 308-313.

[4] Abbasbandy, S., Zakaria, F. S. Soliton solutions for the fifth - order KdV equation with the homotopy analysis method. Nonlinear Dynamics. 200, 51(1), 83-87.

[5] Odibat, Z. M., Momani,S. Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2006, 7(1), 27-34.

[6] Bildik, N., Deniz, S. Comparison of solutions of systems of delay differential equations using Taylor collocation method, Lambert W function and variational iteration method. Scientia Iranica, Transaction D, Computer Science & Engineering, Electrical. 2015, 22(3), 1052-1060.

[7] He, J.H. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. Applied Mathematics and Computation. 2004, 156(2), 527-539.

[8] Liao, S. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method. Applied Mathematics and Computation. 2005, 169(2), 1186-1194.

[9] Liao, S. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method. CRC press, 2003.

[10] Abbasbandy, S. Improving Newton - Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method. Applied Mathematics and Computation. 2003, 145(2) 887-893.

[11] Tari, H. Modified variational iteration method. Physics Letters A. 2007, 369(4), 290-293.

[12] Liao, S. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010, 15(8) 2003-2016.

[13] Yiğit, A., Pakdemirli, M. New perturbation iteration solutions for Bratu-type equations. Computers & Mathematics with Applications. 2010, 59(8), 2802-2808.

[14] Kreyszig, E. Introductory functional analysis with applications. New York: wiley. 1989.

[15] Richard L. B., Faires, J. D. Numerical Analysis. 2010.

[16] Thomas, G.B. Thomas' Calculus Early Transcendentals. Pearson. 2010.

[17] Nayfeh, A. H. Introduction to perturbation techniques. John Wiley & Sons. 2011.

[18] Yiğit, A., Pakdemirli, M., Abbasbandy, S., Boyacı, H. New perturbation-iteration solutions for nonlinear heat transfer equations. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2012, 22(7), 814-828.

[19] Şenol, M., Dolapçı, T., İ., Yiğit, A., Pakdemirli, M. Perturbation-iteration method for first-order differential equations and systems. Abstract and Applied Analysis. Hindawi Publishing Corporation. 2013.

[20] Dolapçı, T., İ., Şenol, M., Pakdemirli, M. New perturbation iteration solutions for Fredholm and Volterra integral equations. Journal of Applied Mathematics. 2013

[21] Vasile, M., Herişanu, N. Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer. International Communications in Heat and Mass Transfer. 2008, 35 (6), 710-715.

[22] Bildik, N., Deniz, S. Comparative study between Optimal Homotopy Asymptotic Method and Perturbation-Iteration Technique for different types of nonlinear equations. Iranian Journal of Science and Technology Transactions A: Science, doi: 10.1007/s40995-016-0039-2

[23] Gupta, A. K., Ray,S.S. Comparison between homotopy perturbation method and optimal homotopy asymptotic method for the soliton solutions of Boussinesq-Burger equations. Computers & Fluids. 2017, 103, 34-41.

[24] Herisanu, N., Marinca, V. Accurate analytical solutions to oscillators with discontinuities and fractional-power restoring force by means of the optimal homotopy asymptotic method. Computers & Mathematics with Applications. 2010, 60(6), 1607-1615.

[25] Marinca, V., Herisanu, N. The optimal homotopy asymptotic method for solving Blasius equation. Applied Mathematics and Computation. 2014, 231, 134-139.

[26] Liao, S. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. Applied Mathematics and Computation. 2004, 147 (2), 499-513.

[27] Chun, W., Wu,Y., Wu, W. Solving the nonlinear periodic wave problems with the homotopy analysis method. Wave Motion. 2005, 41(4), 329-337.

[28] Elyas, S., Abbasbandy,S. Predictor homotopy analysis method: Two points second order boundary value problems. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2014, 15, 89-99.

[29] Aksoy, Yiğit. Yeni Bir Perturbasyon İterasyon Metodu ve Mühendislik Problemlerine Uygulamaları. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Manisa, 2013, 98 s. (Doktora Tezi)

[30] Bataineh, A.S., Noorani, M.S., Hashim, I. Homotopy analysis method for singular ivps of Emden - Fowler type. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009, 14(4), 1121 - 1131.

[31] Parand,K., Rezaei, A., Taghavi,A. Lagrangian method for solving Lane - Emden type equation arising in astrophysics on semi-infinite domains. Acta Astronautica. 2010, 67(7), 673 - 680.

[32] Aslanov, A. Determination of convergence intervals of the series solutions of Emden - Fowler equations using polytropes and isothermal spheres. Physics Letters A. 2008, 372(20), 3555 - 3561.

[33] Marzban, H. R., Tabrizidooz, H.R., Razzaghi, M. Hybrid functions for nonlinear initial - value problems with applications to Lane-Emden type equations. Physics Letters A.2008, 372 (37), 5883-5886.

[34] Liao, S. A new analytic algorithm of Lane -Emden type equations. Applied Mathematics and Computation. 2003, 142(1), 1-16.

[35] He, J.H. Variational approach to the Lane-Emden equation. Applied Mathematics and Computation. 2003, 143(2), 539-541.

[36] Parand, K., Dehghan, M., Rezaei, A.R., Ghaderi, S.M. An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane - Emden type equations arising in astrophysics using hermite functions collocation method. Computer Physics Communications. 2010, 181(6), 1096-1108.

[37] Wong, J. On the generalized Emden-Fowler equation. Siam Review. 1975, 17(2), 339-360.

[38] Wazwaz,A.M., Rach,R. Comparison of the adomian decomposition method and the variational iteration method for solving the Lane-Emden equations of the first and second kinds. Kybernetes. 2011, 40(9/10), 1305-1318.

[39] Chandrasekhar, S. An introduction to the study of stellar structure. Courier Corporation. 1958.

[40] Davis, H.T. Introduction to nonlinear differential and integral equations. Courier Corporation. 1962.

[41] Dehghan, M., Shakeri, F. Approximate solution of a differential equation arising in astrophysics using the variational iteration method. New Astronomy. 2008, 13(1), 53-59.

[42] Singh, O.M., Pandey,R.K., Singh,V.K. An analytic algorithm of Lane-Emden type equations arising in astrophysics using modified homotopy analysis method. Computer Physics Communications. 2009, 180(7), 1116-1124.

[43] Khan, Y. Svoboda, Z., Smarda, Z. Solving certain classes of Lane-Emden type equations using the differential transformation method. Advances in Difference Equations. 2012, 1, 1-11.

[44] Yıldırım, A., Öziş, T. Solutions of singular ivps of Lane - Emden type by the variational iteration method. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2009, 70(6), 2480 - 2484.

[45] Yıldırım, A., Öziş, T. Solutions of singular ivps of Lane-Emden type by homotopy perturbation method. Physics Letters A. 2007, 369(1), 70 - 76.

[46] Kuang, Y. Delay differential equations: with applications in population dynamics, Academic Press, 191, 1993.

[47] Liu, M., Li, D. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. Applied Mathematics and Computation. 2004, 155(3), 853-871.

[48] Li,D.S., Liu, M.Z. Exact solution properties of a multi-pantograph delay differential equation. J. Harbin Inst. Technology. 2000, 32(3), 1-3.

[49] Niculescu, S.I. Delay effects on stability: a robust control approach, 269. Springer Science & Business Media. 2001.

[50] Bahşi, M. Çevik, M. Numerical solution of pantograph-type delay differential equations using perturbation-iteration algorithms. Journal of Applied Mathematics. 2015.

[51] Anakira,N.R., Alomari, A.K., Hashim, I. Optimal homotopy asymptotic method for solving delay differential equations. Mathematical Problems in Engineering. 2013.

[52] Shakeri,F., Dehghan, M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. Mathematical and computer Modelling. 2008, 48(3), 486-498.

[53] Karakoç, F. Bereketoğlu, H. Solutions of delay differential equations by using differential transform method. International Journal of Computer Mathematics. 2009, 86(5), 914 - 923.

[54] Sedaghat,S., Ordokhani,Y., Dehghan, M. Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via chebyshev polynomials. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012, 17(12), 4815 - 4830.

[55] Evans,D.J., Raslan, K.R. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. International Journal of Computer Mathematics. 2005, 82(1), 49-54.

[56] Liu, H., Xiao, A., Su,L. Convergence of variational iteration method for second-order delay differential equations. Journal of Applied Mathematics. 2013.

[57] Alomari,A.K., Noorani,M.S., Nazar,R. Solution of delay differential equation by means of homotopy analysis method. Acta Applicandae Mathematicae, 2009, 108(2), 395-412.

[58] Sakurai, J.J. Advanced Quantum Mechanics. AddisonWesley, New York. 1967.

[59] Shakeri, F., Dehghan, M. Numerical solution of the Klein - Gordon equation via He's variational iteration method. Nonlinear Dynamics. 2008, 51 (1), 89-97.

[60] Sun,J. Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations. Physics Letters A. 2003, 309(5), 387-396.

[61] Kong,L. Semi-explicit symplectic partitioned Runge-Kutta Fourier pseudo-spectral scheme for Klein - Gordon - Schrödinger equations. Computer Physics Communications. 2010, 181(8), 1369-1377.

[62] Zuntao,F., New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations. Physics Letters A. 2001, 290(1), 72-76.

[63] Willy,M., Hereman,W. The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. Physica Scripta. 1996, 54(6), 563-576.

[64] Kanth, A.R., Aruna,K. Differential transform method for solving the linear and nonlinear Klein-Gordon equation. Computer Physics Communications. 2009, 180(5), 708-711.

[65] Wazwaz, A.M. The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations. Applied Mathematics and Computation. 2006, 173(1), 165-176.

[66] Xueqin, Z. A new Riccati equation expansion method with symbolic computation to construct new travelling wave solution of nonlinear differential equations. Applied mathematics and computation. 2006, 172(1), 24-39.

[67] Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method Kluwer. Boston, MA. 1994.

[68] Yusufoglu, E. The variational iteration method for studying the Klein-Gordon equation. Applied Mathematics Letters. 2008, 21(7), 669-674.

[69] Iqbal, S. Some solutions of the linear and nonlinear Klein-Gordon equations using the optimal homotopy asymptotic method. Applied Mathematics and Computation. 2010, 216(10), 2898-2909.

[70] Peregrine,D.H. Calculations of the development of an undular bore. J. Fluid Mech. 1996, 25, 321-330.

[71] Peregrine,D.H. Long waves on a beach. J. Fluid Mech. 1967, 27, 815-827.

[72] Maryam,M., Mokhtari, R. Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2011, 235 (14), 4003-4014.

[73] Bhardwaj, D., Shankar, R. A computational method for regularized long wave equation. Computers & Mathematics with Applications. 2000, 40 (12), 1397-1404.

[74] Bona,J.L. , Pritchard, W.G. Scott, L.R. A comparison of solutions of two model equations for long waves, in: N.R. Lebovitz (Ed.), Fluid Dynamics in Astrophysics and Geophysics. Lectures in Appl. Math. 1983, 235-267.

[75] Lin,J., Xie,Z., Zhou, J. High-order compact difference scheme for the regularized long wave equation. Comm. Numer. Methods Engrg. 2007, 23, 135-156.

[76] Mirzaei,D., Dehghan, M. MLPG method for transient heat conduction problem with MLS as trial approximation in both time and space domains. Computer Modeling in Engineering and Sciences. 2011, CMES 72, 185-210.

[77] Dehghan, M., Salehi,R. The solitary wave solution of the two-dimensional regularized long-wave equation in fluids and plasmas. Computer Physics Communications. 2011, 182(12), 2540-2549.

[78] Saka,B., Dag,I. A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines. Comm. Numer. Methods Engrg. 2008, 24, 1339 - 1361.

[79] Dogan,A. Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method. Commun. Numer. Methods Eng. 2001, 17, 485-494.

[80] Jain,P.C., Iskandar, L. Numerical solution of the RLW equation. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1979, 20, 195-200.

[81] Dag,I., Ozer, M.N. Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method. Appl. Math. Model. 2001, 25, 221 - 231.

[82] Gardner, L.R.T. , Gardner,G.A., Dag, I. A B-spline finite element method for the regularized long wave equation. Commun. Numer. Methods Eng. 1995, 11, 59-68.

[83] Dogan, A. Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method. Appl. Math. Model. 2002, 26, 771-783.

[84] Dehghan, M. Shokri, A. A meshless method using the radial basis functions for numerical solution of the regularized long wave equation. Numer. Methods Partial Differential Equations. 2010, 26(4), 807-825.

[85] Saka, B., Dag,I. A Collocation method for the numerical solution of the RLW equation using cubic B - spline basis. Arab. J. Sci. Eng. 2005, 30, 39-50.

[86] Soliman, A. A. Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method. Mathematics and Computers in Simulation. 2005, 70(2), 119-124.

[87] Kaya, D. A numerical simulation of solitary - wave solutions of the generalized regularized long - wave equation. Applied Mathematics and Computation. 2004, 149(3), 833-841.

[88] Bona, J. L., William R. M., Restrepo, J.M. Stable and unstable solitary - wave solutions of the generalized regularized long- wave equation. Journal of Nonlinear Science. 2000, 10(6), 603-638.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Sinan DENİZ
Doğum Yeri ve Yılı	:	Uşak, 1989
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	sinandeniz01@gmail.com

Eğitim Durumu

Lisans	:	Fatih Üniversitesi, Matematik Bölümü (İng), 2012
Yüksek Lisans	:	Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, 2014
Doktora	:	Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, 2018

Mesleki Deneyim

Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 2012 - . . . (halen)

Yayınları

Bildik, N., **Deniz, S.**, Applications of Taylor collocation method and Lambert W function to the systems of delay differential equations, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Sciences*, Volume 1(1): pp. 1-13, 2013. Article ID 20130033.

Deniz, S., Bildik, N., Comparison of Adomian decomposition method and Taylor matrix method in solving different kinds of partial differential equations, *International Journal of Modelling and Optimization*, Volume 4(4): pp.292-298, 2014.

Bildik, N., **Deniz, S.**, Implementation of Taylor collocation and Adomian decomposition method for systems of ordinary differential equations, *AIP Conf. Proc.*, 1648, 370002 (2015).

Bildik, N., **Deniz, S.**, Comparison of solutions of systems of delay differential equations using Taylor collocation method, Lambert W function and variational iteration method, *Scientia Iranica. Transaction D, Computer Science & Engineering and Electrical*

Engineering, Volume 22(3): pp.1052-1058, (2015).

Bildik, N., **Deniz, S.**, Modified Adomian decomposition method for solving Riccati differential equations, *Review of the Air Force Academy*, Volume 3(30): pp. 21-26, 2015.

Bildik, N., **Deniz, S.**, On the asymptotic stability of some particular differential equations, *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, Volume 5(4): pp. 252-258, 2015.

Deniz, S., Bildik, N., Application of Adomian decomposition method for singularly perturbed fourth order boundary value problems, *AIP Conf. Proc.*, 1738, 290017 (2016).

Bildik, N., **Deniz, S.**, The use of Sumudu decomposition method for solving Predator-Prey Systems, *Mathematical Sciences Letters*, Volume 5(3): pp. 285-289, (2016).

Bildik, N., **Deniz, S.**, Modification of perturbation-iteration method to solve different types of nonlinear differential equations, *AIP Conf. Proc.*, 1798, 020027 (2017).

Deniz, S., Bildik, N., Applications of optimal perturbation iteration method for solving nonlinear differential equations, *AIP Conf. Proc.*, 1798, 020046 (2017).

Bildik,N., Tosun,M., **Deniz, S.**, Euler matrix method for solving complex differential equations with variable coefficients in rectangular domains, *International Journal of Applied Physics and Mathematics* Volume 7(1): pp. 69-78, 2017.

Deniz, S., Bildik, N., Sezer, M., A note on stability analysis of Taylor collocation method, *Celal Bayar University Journal of Science*, Volume 13 (1), pp. 149-153, 2017.

Bildik, N., **Deniz, S.**, A new efficient method for solving delay differential equations and a comparison with other methods, *The European Physical Journal Plus*, Volume 132: 51, (2017).

Deniz, S., Optimal perturbation iteration method for solving nonlinear heat transfer equations, *Journal of Heat Transfer-ASME*, Volume 139:37,074503-1, (2017).

Deniz, S., Bildik, N., A new analytical technique for solving Lane - Emden type equations arising in astrophysics, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin*, Volume: 24(2), 305-320, 2017.

Bildik, N., **Deniz, S.**, A practical method for analytical evaluation of approximate solutions of Fisher's equations, *ITM Web of Conferences*, Volume 13, Article Number: 01001, 2017.

Deniz, S., Bildik, N., Optimal perturbation iteration method for Bratu-type problems, *Journal of King Saud University-Science*,Volume 30(1), 91-99, (2018).

Bildik, N., **Deniz, S.**, Solving the Burgers' and regularized long wave equations using

the new perturbation iteration technique, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (In Press), 2017.

Bildik, N., **Deniz, S.**, Comparative Study between Optimal Homotopy Asymptotic Method and Perturbation-Iteration Technique for Different Types of Nonlinear Equations, *Iranian Journal of Science and Technology Transactions A: Science*, Volume 42, No. 2, pp. 647-654, (2018).

Bildik, N., Açık., A, **Deniz, S.**, A New Approach to Fuzzy Differential Equations using Logarithmic Mean, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, Volume 2018, No. 1, pp. 10-21, (2018).

Bildik, N., **Deniz, S.**, New approximate solutions to electrostatic differential equations obtained by using numerical and analytical methods, *Georgian Mathematical Journal*, (In Press), (2018).

Bildik, N., **Deniz, S.**, New analytic approximate solutions to the generalized regularized long wave equations, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, Volume 55, No. 3, pp. 749-762, (2018).

Bildik, N., **Deniz, S.**, New approximate solutions to the nonlinear Klein-Gordon equations using perturbation iteration techniques and a comparison with other methods, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, (In Press), (2018).