

**T.C**  
**MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**KUVVETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV TANIMI İLE BİRİNCİ**  
**MERTEBEDEN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN FUZZY**  
**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

**Asuman AÇIK**

**Danışman**  
**Prof. Dr. Necdet BİLDİK**



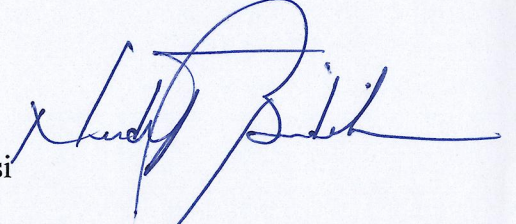
**MANİSA-2018**

## TEZ ONAYI

Asuman AÇIK tarafından hazırlanan "**Kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımı ile birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri**" adlı tez çalışması 30/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

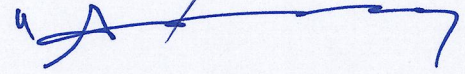
**Danışman**

**Prof. Dr. Necdet BİLDİK**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Ömer AKIN**  
TOBB Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



T.C  
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞ FORMU

Referans No	10207960
Yazar Adı / Soyadı	ASUMAN AÇIK
T.C.Kimlik No	23069157126
Telefon	5077812436
E-Posta	asumanack@hotmail.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	Kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımı ile birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri
Tezin Tercümesi	Numerical solution of first order linear and nonlinear fuzzy differential equations under strongly generalized differentiability
Konu	Matematik = Mathematics
Üniversite	Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı	Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2018
Sayfa	66
Tez Danışmanları	PROF. DR. NECDET BİLDİK
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	

17.08.2018

İmza: A. Ak.....

## TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Asuman AÇIK



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER .....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TABLO DİZİNİ .....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT .....	VII
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Tezin Amacı .....	2
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....	3
2.1. Fuzzy Küme .....	3
2.2. Zadeh Genişleme Prensibi .....	8
3. FUZZY SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLENEBİLİRLİĞİ	11
3.1. Hukuhara Türevlenebilirlik .....	11
3.2. Kuvvetli Genelleştirilmiş Türevlenebilirlik .....	13
4. BİRİNCİ MERTEBEDEN FUZZY DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	16
4.1. Hukuhara Türevlenebilirliği Altında Fuzzy Diferansiyel Denklemler....	16
4.2. Hukuhara Türevlenebilirliği ile Çeşitli Çözümlerin Varlığı .....	19
4.3. Kuvvetli Genelleştirilmiş Türev Altında Çözümlerin Varlığı.....	23
5. FUZZY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	30
5.1. Fuzzy Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri ile İlgili Bazı Uygulamalar .....	32
6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	61
KAYNAKLAR .....	62
ÖZGEÇMİŞ .....	66

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Fuzzy sayı aralıkları kümesi
G.O.	Geometrik Ortalama
$\ominus$	Hukuhara farkı
H.O.	Harmonik Ortalama
L.O.	Logaritmik Ortalama
T.H.O.	Ters Harmonik Ortalama
$\mu_A$	Üyelik fonksiyonu
Y.M.	Yamuk Metodu



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. “Genç” bir kişi için üyelik fonksiyonu grafiği .....	4
Şekil 2.2. Konveks fuzzy küme grafiği .....	6
Şekil 2.3. Konveks olmayan fuzzy küme grafiği .....	6
Şekil 2.4. Üçgen fuzzy sayısı grafiği .....	8
Şekil 4.1. (4.1) fuzzy başlangıç değer probleminin grafiği.....	20
Şekil 4.2. (4.2) fuzzy başlangıç değer probleminin grafiği.....	22
Şekil 4.3. (4.4) fuzzy başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	23
Şekil 4.4. (4.6) fuzzy başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	26
Şekil 4.6. (4.7) fuzzy başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	27
Şekil 4.6. (4.7) fuzzy başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	27
Şekil 4.7. (4.9) fuzzy başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	28
Şekil 4.8. (4.9) fuzzy başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	28
Şekil 5.1. (5.4) fuzzy başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	35
Şekil 5.2. (5.4) fuzzy başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre çözüm grafiği .....	37
Şekil 5.3. Örnek 5.3' ün (i)-türev şartı altında bulunan çözüm grafiği.....	44
Şekil 5.4. Örnek 5.3' ün (ii)-türev şartı altında bulunan çözüm grafiği.....	45
Şekil 5.5. Örnek 5.4' ün $\alpha = 0$ için fuzzy çözümü .....	51
Şekil 5.6. Örnek 5.4' ün $\alpha = 0.5$ için fuzzy çözümü .....	52
Şekil 5.7. Örnek 5.4' ün $\alpha = 1$ için fuzzy çözümü .....	52
Şekil 5.8. Örnek 5.5' in (i)-türev tanımına göre $\alpha = 0$ için fuzzy çözümü.....	57
Şekil 5.9. Örnek 5.5' in (i)-türev tanımına göre $\alpha = 0.5$ için fuzzy çözümü....	57
Şekil 5.10. Örnek 5.5' in (i)-türev tanımına göre $\alpha = 1$ için fuzzy çözümü.....	57
Şekil 5.11. Örnek 5.5' in (ii)-türev tanımına göre $\alpha = 0$ için fuzzy çözümü....	59
Şekil 5.12. Örnek 5.5' in (ii)-türev tanımına göre $\alpha = 0.5$ için fuzzy çözümü	59
Şekil 5.13. Örnek 5.5' in (ii)-türev tanımına göre $\alpha = 1$ için fuzzy çözümü ....	60

## TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 5.1. (5.4) fuzzy başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre yamuk metodu sonuçları .....	34
Tablo 5.2. (5.4) fuzzy başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu sonuçları .....	36
Tablo 5.3. Örnek 5.2' nin (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ çözümleri	40
Tablo 5.4. Örnek 5.2' nin (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\bar{y}$ çözümleri .....	40
Tablo 5.5. Örnek 5.2' nin (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	41
Tablo 5.6. Örnek 5.2' nin (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\bar{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	41
Tablo 5.7. Örnek 5.2' nin (ii)-türev tanımına göre yaklaşık $\underline{y}$ çözümleri.....	42
Tablo 5.8. Örnek 5.2' nin (ii)-türev tanımına göre yaklaşık $\bar{y}$ çözümleri.....	42
Tablo 5.9. Örnek 5.2' nin (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	43
Tablo 5.10. Örnek 5.2' nin (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\bar{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	43
Tablo 5.11. Örnek 5.3' ün (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ çözümleri.....	46
Tablo 5.12. Örnek 5.3' ün (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\bar{y}$ çözümleri.....	46
Tablo 5.13. Örnek 5.3' ün (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	47
Tablo 5.14. Örnek 5.3' ün (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\bar{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	47
Tablo 5.15. Örnek 5.4' ün (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ çözümleri ve mutlak hataları .....	49
Tablo 5.16. Örnek 5.4' ün (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\bar{y}$ çözümleri ve mutlak hataları .....	50
Tablo 5.17. Örnek 5.4' ün (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ , $\bar{y}$ çözümleri .....	50
Tablo 5.18. Örnek 5.4' ün (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ , $\bar{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	51
Tablo 5.19. Örnek 5.5' in (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ , $\bar{y}$ çözümleri.....	55
Tablo 5.20. Örnek 5.5' in (i)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ , $\bar{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	56
Tablo 5.21. Örnek 5.5' in (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ , $\bar{y}$ çözümleri.....	58
Tablo 5.22. Örnek 5.5' in (ii)-türev tanımına göre yaklaşık olarak $\underline{y}$ , $\bar{y}$ çözümlerinin mutlak hata tablosu .....	58



## TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamın her aőamasında kıymetli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gősterici ve destek olan, ğrencisi olduğum için büyük onur duyduğum, tüm meslek hayatım boyunca verdiği bilgilerden yararlanacağım ve örnek alacağım değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Necdet BİLDİK' e, yüksek lisans eğitimim sırasında yardımını hiçbir zaman esirgemeyen, çalıőmalarım konusunda her türlü imkan ve desteği sağlayan hocam sayın Arő. Gör. Dr. Sinan DENİZ' e, tezimin son aőamasında çalıőmamı tekrar gözden geçirme imkanı tanıyıp kıymetli bilgilerini paylaőan Prof. Dr. Ömer AKIN' a ve ekibindeki tüm hocalarıma ve son olarak hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyip hep yanımda olan aileme, özellikle beni cesaretlendirip her zaman inanan anneme yrektek ten eőekkr ederim.

Asuman AÇIK  
Manisa, 2018



## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

**Kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımı ile birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri**

**Asuman AÇIK**

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Necdet BİLDİK**

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş kısmına yer ayrılmıştır.

İkinci bölümde gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Burada ayrıca fuzzy küme, fuzzy sayıları ve fuzzy sayıları ile yapılan aritmetik işlemler tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde fuzzy sayı değerli fonksiyonlar için tanımlanan Hukuhara türev ve kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımları yapılmıştır.

Dördüncü bölümde bu türev tanımları uygulanarak aynı fuzzy diferansiyel denklemlerden elde edilen farklı denklem sistemleri ve çözümleri örneklendirilerek sunulmuştur.

Beşinci bölümde birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklemler için örnekler verilmiş, her biri farklı fuzzy sayı başlangıç şartı altında nümerik metotlar kullanılarak çözümler incelenmiş, elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

Altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fuzzy Diferansiyel Denklemler, Üçgen Fuzzy Sayısı, Lineer Olmayan Fuzzy Diferansiyel Denklemler, Yaklaşık Çözümler, Yamuk Metodu, Logaritmik Ortalama Metodu

**2018, 66 sayfa**

## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

**Numerical solution of first order linear and nonlinear fuzzy differential equations under strongly generalized differentiability**

**Asuman AÇIK**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Necdet BİLDİK**

This thesis consist of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the basic definitions and theorems are given. Additionally fuzzy sets, fuzzy numbers and arithmetic operations with fuzzy numbers are defined.

In the third chapter, the definitions of Hukuhara derivative and strongly generalized derivative are given for the fuzzy number functions.

In the fourth chapter, these differentiation definitions are applied and different systems of equations obtained from the same fuzzy differential equations and their solutions are presented by supporting with the examples.

In the fifth chapter, examples are given for first order linear and nonlinear fuzzy differential equations. The solutions are investigated by using numerical methods with the initial conditions for each different fuzzy numbers and also obtaining results are demonstrated with tables and graphs.

In the sixth chapter, the conclusions and assumptions are placed.

**Keywords:** Fuzzy Differential Equations, Triangle Fuzzy Number, Nonlinear Fuzzy Differential Equations, Numerical Methods, Trapezoid Methods, Logarithmic Mean Methods

**2018, 66 page**

## 1.GİRİŞ

Birçok dinamik gerçek hayat problemi matematiksel bir model olarak formüle edilebilir. Ancak çoğu durumda, dinamik bir sistemin davranışı hakkında bilgi belirsizdir. Daha gerçekçi bir model elde edebilmek için bu belirsizliklerin hesaba katılması zorunlu olmaktadır.

1965 yılında Lutfi A. Zadeh tarafından literatüre kazandırılan fuzzy (bulanık) küme teorisi [1] belirsizliği modellemek, muğlak ve öznel bilgi işlemek konusunda güçlü bir araç olmuştur. Son yıllarda hızlı bir şekilde gelişmekte olan bu alan, pek çok uygulama sahasına sahiptir. Bilhassa bunlara ilişkin popölasyon modelleri [2, 15], matematiksel fizik [4], tıp [5, 6], biyoinformatik ve işlemsel biyoloji [7, 8], yapay zekâ ve robotik [9, 10], kaotik sistemler [11, 12, 13] ve mühendislik problemleri [14] örnek olarak verilebilir.

Daha sonra 1978 yılında Kandel ve Byatt [3] tarafından ortaya konulan “Fuzzy diferansiyel denklemler” terimi ise bu belirsizlik altında dinamik sistemleri modellemenin doğal bir yolu olarak ortaya çıkmıştır. Fuzzy diferansiyel denklemler ve fuzzy başlangıç değer problemleri özellikle Kaleva [18] ve Seikkala [25] tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Fuzzy diferansiyel denklemlerin esas dayanağı ise fuzzy küme ve fuzzy türev kavramlarıdır. Fuzzy türev tanımı için birçok öneride bulunulmuştur. En eski önerilerden birisi ise; küme değerli fonksiyonun Hukuhara türevinin genelleştirilmesi tarzıdır. Fuzzy türev kavramı ilk olarak Zadeh ve Chang [16] tarafından geliştirilmiş. Puri ve Ralescu [17] ve Kaleva [18] tarafından da ele alınarak detaylı bir biçimde çalışılmıştır. Ancak, Hukuhara türeviyle yorumlanan denklemin çözümünde,  $t$  zamanı arttıça çözümün desteğinin artan uzunluklu dezavantajını da ortaya çıkarmıştır. Yani, zaman arttıça çözüm daha da bulanıklaşmıştır. Bunun sonucu olarak fuzzy çözümü, net çözümünden oldukça farklı davranış sergilemiştir. Bu eksiklik, fuzzy diferansiyel denklemlerin, farklı diferansiyel kapsamalar ailesi biçiminde yorumlanarak özölmesine sebep olmuştur [19]. Bu yönteminin başlıca eksikliği ise fuzzy sayı değerli bir fonksiyonun türevi için yeterli bir tanımın olmaması ve bu sebeple onun nümerik çözümlerinin elde edilmesinin zor olmasıdır.

Hukuhara türevinin bu tarzda belirsizliğini ortadan kaldırmak için, bir diğer yaklaşım Zadeh'in Genişleme Prensibi olmuştur. Genişleme prensibinin temel yapısında fuzzy diferansiyel denklem bir deterministik diferansiyel denklem olarak düşünülür ve daha sonra deterministik denklem ele alınarak çözülür. Deterministik zm elde edildikten sonra, çözüme genişleme prensibi uygulanarak fuzzy çözümü bulunur. Bu metot ile, bir fuzzy başlangıç değer probleminin çözümünün nümerik olarak hesaplanmasında çeşitli ve birçok fuzzy parametrelerinin bulunması nedeni ile elde edilecek sonuca ulaşmada zaman kaybının olması dezavantaj olarak görülmektedir.

İlk olarak Bede ve Gal tarafından [20]'de tanıtılan kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımı yukarıda bahsedilen eksikliklerin giderilmesini sağlamış ve bununla ilgili çalışmalar [21, 22, 23, 24]'de incelenmiştir. Aslında, kuvvetli genelleştirilmiş türev, fuzzy değerli fonksiyonların daha büyük bir sınıfı için Hukuhara türevine göre tanımlanmıştır. Uygun koşullar sağlandığında, bu tanım altında ele alınan fuzzy başlangıç değer problemleri için yerel olarak iki çözüm bulunmaktadır.

### **1.1. Tezin Amacı**

Bu tez çalışmasında uygun fuzzy başlangıç koşulları altında fuzzy diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri, farklı türev tanımları kullanılarak hesaplanacaktır. Tam zm bulunabilen denklemler için hata analizi incelenecek ve bulunan sonuçlar tablo ve Şekiller ile gösterilecektir.

## 2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

### 2.1. Fuzzy Küme

Küme tanımı matematiğin temel taşıdır ve sezgisel olarak özelliklerle de bağlantılı nesnelerin bir koleksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Klasik küme tanımı belirgin sınırlara sahiptir, yani, diğer durumları hariç tutmak sureti ile  $x \in A$  veya  $x \notin A$  şeklinde ifade edilir.

$X$  bir küme ve  $A$ ,  $X$ 'in alt kümesi olmak üzere,

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in A \\ 0 & \text{eğer } x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı  $X_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$  fonksiyonuna,  $X$ 'in  $A$  alt kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Karakteristik fonksiyonun alabileceği iki değer vardır. Bu tanım, elemanların aldığı değerlerin  $[0,1]$  kapalı aralığına genişletilmesi ile genelleştirilmiştir. Bu fonksiyona ise üyelik fonksiyonu denir. Klasik küme bir fuzzy kümesinin özel bir örneğidir ve bu nedenle fuzzy küme, klasik küme tanımına ters düşmemekle birlikte bunları genellemektedir. Bunu yanında fuzzy küme, üyelik değerleri sürekli olan nesnelerin bir kümesidir ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilmektedir. Üyelik fonksiyonu yardımıyla kümenin her bir elemanına 0 ile 1 arasında değişen üyelik değerleri atanmaktadır.

Bir  $A$  fuzzy kümesi sıralı ikililerden oluşan bir küme olarak

$$A = \{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$$

şeklinde ifade edilir [1].  $\mu_A = X \rightarrow [0,1]$  olmak üzere,  $\mu_A$  fonksiyonuna üyelik fonksiyonu denir ve  $\mu_A(x)$  değeri,  $\mu_A$  üyelik fonksiyonun  $x$  değerini aldığı buna karşılık gelen üyelik derecesini gösterir. Bir fuzzy kavramı için farklı üyelik fonksiyonları oluşturulabilir. Önerilecek üyelik fonksiyonu öznel ve göz önünde bulundurulmuş konuya göre değişiklik gösterebilmektedir. Üyelik fonksiyonları, bir sınıf kavramının dilbilimsel (dilsel-değişkenli) olarak sıkça karşılaşılan net sınırları olmayan bilgilerin kategorilere genişletilmesini sağlar. Yani, bir fuzzy küme tanımı,

belirsiz insan dili kavramlarının modellenmesine de neden olur. Özellikle, sözlü ifadelerin değerlendirilmesi (küçük, çok büyük, az ya da çok, orta, yaklaşık olarak beş, genç, yaşlı vb.) fuzzy kümeler tarafından başarıyla modellenebilmektedir.

Ayrıca eğer evrensel bir sonlu küme  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olarak tanımlanırsa bu takdirde, bir  $A : X \rightarrow [0,1]$  fuzzy kümesi

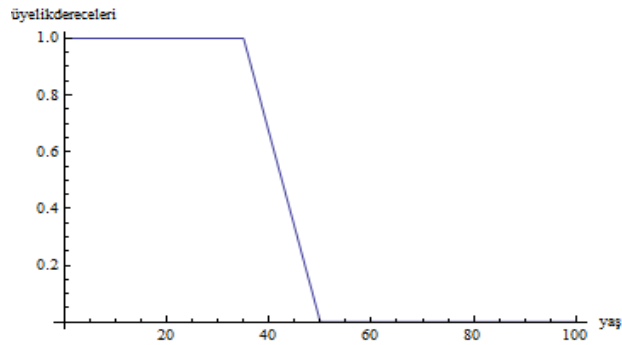
$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

biçiminde temsil edilir.

**Örnek 2.2.** Yukarıda bahsedildiği gibi “Genç” kavramı ele alınır, bu kavram için herkes farklı yaş aralıklarını hemen tahmin edebilir. Bu öznel ifade farklı şekillerde üyelik fonksiyonu ile

$$\mu_A^G(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \leq 35 \\ \frac{50-x}{15} & \text{eğer } 35 < x < 50 \\ 0 & \text{eğer } 50 \leq x \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve buna ilişkin grafik ise,



**Şekil 2.1.** “Genç” bir kişi için önerilen üyelik fonksiyonu

olarak gösterilir. Sıcak, soğuk, sıfıra yakın sayılar, vb. ifadeler için de örnekler çoğaltılabilir.

**Tanım 2.3.** Fuzzy küme teorisinde kapsama, kesişim, birleşim ve tümleme işlemleri fuzzy kümeleri temsil eden üyelik işlevleri üzerinde gerçekleştirilir. Bu ifadeler için ilk tanımlar Zadeh tarafından [1] ortaya konulmuş olup, bu tanımların doğrudan maksimum ve minimum işlemlerine dayandığı açıkça görülmektedir.

$X$  boş kümeden farklı herhangi bir küme ve  $A, B$  ise fuzzy kümeler olsun:

i. Her  $x \in X$  için  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  ise  $B$  fuzzy kümesi,  $A$  fuzzy kümesini kapsıyor denir ve  $A \leq B$  ile gösterilir.

ii. 
$$A \vee B = \{(x, \mu_{A \vee B}(x)) : \forall x \in X \text{ için } \mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$$

şeklinde tanımlanan küme  $A$  ve  $B$  kümelerinin birleşimi denir ve  $A \vee B$  şeklinde ifade edilir.

iii. 
$$A \wedge B = \{(x, \mu_{A \wedge B}(x)) : \forall x \in X \text{ için } \mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$$

şeklinde tanımlanan küme  $A$  ve  $B$  kümelerinin kesişimi denir ve  $A \wedge B$  biçiminde temsil edilir.

iv. 
$$A' = \{(x, \mu_{A'}(x)) : \forall x \in X \text{ için } \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)\}$$

şeklinde tanımlanan  $A'$  fuzzy kümesi ise  $A$  kümesinin tümleyenidir.

**Tanım 2.4.** Bir  $A$  fuzzy kümesinin,  $\alpha \in [0,1]$  olmak üzere,  $\alpha$ -kesim veya  $\alpha$ -seviye kümesi

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

biçiminde tanımlanır.

Bir seviyeye bağlı küme gösterimi için  $A'$ 'nin dayanağı (support) üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir. Yani

$$\text{destek}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

dır.



$A$  'nın çekirdeği ise;

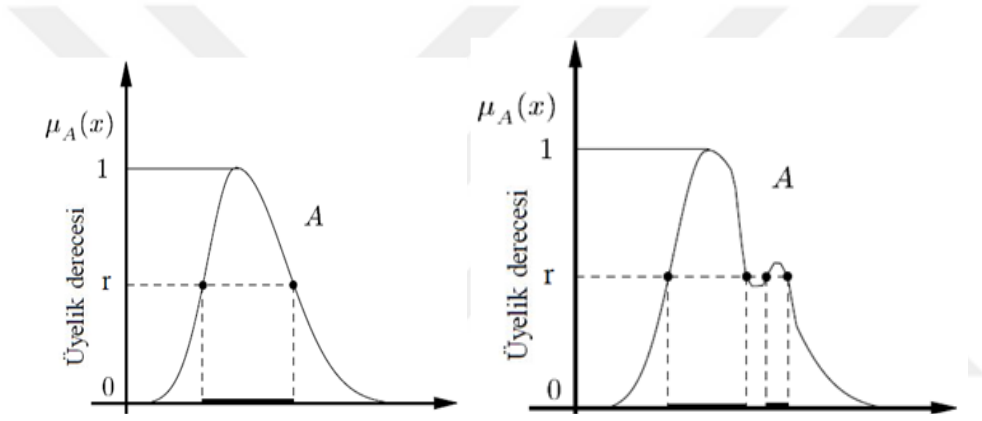
$$\text{çekirdek}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.5.** Her  $\lambda \in [0,1]$  ve  $x_1, x_2 \in X$  için üyelik derecesi

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

eşitsizliğini sağlayan  $A$  fuzzy kümesine konvekstir denir.



Şekil 2.2. Konveks fuzzy küme

Şekil 2.3. Konveks olmayan fuzzy küme

$A$  fuzzy kümesinin konveks olabilmesi için tüm  $\alpha$  -kesitlerine göre oluşan  $A_\alpha$  kümelerinin konveks olması gerekmektedir.

**Tanım 2.6.** [26] Fuzzy sayıların aralığı  $\mathbb{R}_F$  ile gösterilir.  $\mathbb{R}$  'nin bir fuzzy alt kümesi  $A$  ve  $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  ise üyelik fonksiyonu olmak üzere;

- i.  $A$  normaldir, yani  $\mu_A(x_0) = 1$  olacak şekilde bir  $x_0 \in \mathbb{R}$  vardır,
- ii.  $A$  kümesi fuzzy konvekstir, yani  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  için
$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\},$$
- iii.  $\forall \mu_A \in \mathbb{R}_F$  için,  $\mu_A, \mathbb{R}$  üzerinde üst yarı süreklidir,

iv.  $\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$  ifadesinin kapanışı kompaktır,

özellikleri sağlanıyorsa  $A$  'ya fuzzy sayısı adı verilir. Burada  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  olduğu açıkça görülmektedir.

**Tanım 2.7.** Yukarıda belirtilen (i)-(iv) özelliklerini sağlayan bir  $u$  fuzzy sayısının  $\alpha$  -seviye kümeleri olan  $[u]^\alpha$ , tüm  $0 \leq \alpha \leq 1$  için boş olmayan kompakt bir aralıktır. Böylece

$$[u]^\alpha = [\underline{u}^\alpha, \bar{u}^\alpha]$$

biçiminde ifade edilen gösterim açık bir şekilde  $u$  'nun  $\alpha$  -seviye kümelerini ifade etmektedir.

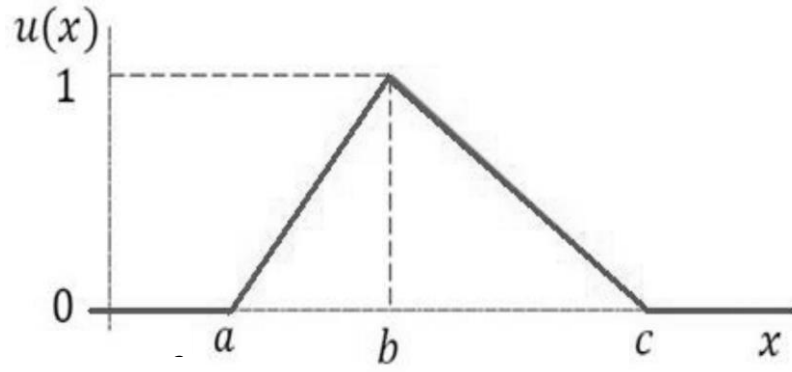
**Teorem 2.8.** [38] Bir  $u$  fuzzy sayısının  $[\underline{u}^\alpha, \bar{u}^\alpha]$  parametrik formu aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

1.  $\underline{u}^\alpha$ ,  $[0,1]$  aralığı üzerinde sınırlı sol-sürekli azalmayan bir fonksiyondur,
2.  $\bar{u}^\alpha$ ,  $[0,1]$  aralığı üzerinde sınırlı sol-sürekli artmayan bir fonksiyondur,
3.  $\underline{u}^\alpha \leq \bar{u}^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Tanım 2.9.** Bir  $u$  üçgensel fuzzy sayısı,  $a \leq b \leq c$  olmak üzere  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  sıralı üçlüsü ile tanımlanır ve üçgen fuzzy sayısı için üyelik fonksiyonu ise

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ veya } x > c \\ \frac{x-a}{b-c}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{c-b}, & b \leq x \leq c \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir.



**Şekil 2.4.** Üçgen Fuzzy Sayısı

Verilen her üçgen fuzzy sayısı  $\alpha$  -seviye kümeleri olarak

$$[u]^\alpha = [a + (b - a)\alpha, c - (c - b)\alpha], \quad \alpha \in [0, 1]$$

şeklinde gösterilir.

## 2.2. Zadeh Genişleme Prensibi

Belirsiz parametreler ile işlem yapılması gerektiği durumlarda, reel sayılar arasındaki klasik işlemlerin fuzzy karşılıklarını tanımlamak gerekir. Pratik uygulamaların birçoğunda temel fuzzy fonksiyonları, gerçek değerli ifadelerin fuzzy karşılığı olarak görülmektedir.

$f: \mathbb{R}_F^n \rightarrow \mathbb{R}_F$  fuzzy fonksiyonu, fuzzy sayılarını, fuzzy sayılara eşleştirilen bir fonksiyonu ve benzer şekilde  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$  fuzzy sayı değerli fonksiyon aracılığıyla göz önüne alınan fonksiyon ise reel sayıları, fuzzy sayılarına karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülür.

Zadeh'in Genişleme Prensibi ise reel değerli bir fonksiyonu fuzzy sayılara genişletmek için kullanılır.  $X$  ve  $Y$  alışılmış (crisp) kümeler olmak üzere (Fuzzy küme teorisinde klasik kümeler crisp olarak adlandırılır) verilen bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu,  $v = F(u)$  ve

$$v(y) = \begin{cases} \sup \{u(x) : x \in X, f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde bir  $F: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  fuzzy fonksiyonuna genişletilebilir. Burada  $F$  fonksiyonu  $f$  'in Zadeh Genişlemesi olarak adlandırılır [27].  $f$  sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $\nu$  seviye kümeleri ile  $[\nu]^\alpha = [\underline{\nu}^\alpha, \bar{\nu}^\alpha]$  olarak tanımlanır.

Burada

$$\begin{aligned}\underline{\nu}^\alpha &= \min \{ f(x) : x \in [u]^\alpha \} \\ \bar{\nu}^\alpha &= \max \{ f(x) : x \in [u]^\alpha \}.\end{aligned}$$

$u$  ve  $\nu$  keyfi iki fuzzy sayısı olmak üzere,  $[u]^\alpha = [\underline{u}^\alpha, \bar{u}^\alpha]$  ve  $[\nu]^\alpha = [\underline{\nu}^\alpha, \bar{\nu}^\alpha]$  eşitlikleri için aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

- $[u]^\alpha + [\nu]^\alpha = [\underline{u}^\alpha + \underline{\nu}^\alpha, \bar{u}^\alpha + \bar{\nu}^\alpha]$ .
- $[u]^\alpha - [\nu]^\alpha = [u]^\alpha + (-1)[\nu]^\alpha = [\underline{u}^\alpha - \bar{\nu}^\alpha, \bar{u}^\alpha - \underline{\nu}^\alpha]$ .
- $k \in \mathbb{R}$  herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$k[u]^\alpha = \begin{cases} [k\underline{u}^\alpha, k\bar{u}^\alpha], & k \geq 0 \\ [k\bar{u}^\alpha, k\underline{u}^\alpha], & k < 0 \end{cases}.$$

- $[u]^\alpha \cdot [\nu]^\alpha = [\min(\underline{u}\underline{\nu}, \underline{u}\bar{\nu}, \bar{u}\underline{\nu}, \bar{u}\bar{\nu}), \max(\underline{u}\underline{\nu}, \underline{u}\bar{\nu}, \bar{u}\underline{\nu}, \bar{u}\bar{\nu})]^\alpha$
- $[u]^\alpha / [\nu]^\alpha = [\underline{u}, \bar{u}]^\alpha \cdot \left[ \frac{1}{\bar{\nu}}, \frac{1}{\underline{\nu}} \right]^\alpha, (0 \notin [\underline{\nu}, \bar{\nu}])$

Ayrıca özel durumlar için iki fuzzy sayısının çarpımı,

- Eğer  $u \geq 0$  ve  $\nu \geq 0$  ise  $(\underline{u}\underline{\nu})^\alpha = \underline{u}^\alpha \underline{\nu}^\alpha$  ve  $(\bar{u}\bar{\nu})^\alpha = \bar{u}^\alpha \bar{\nu}^\alpha$
- Eğer  $u \leq 0$  ve  $\nu \leq 0$  ise  $(\underline{u}\underline{\nu})^\alpha = \bar{u}^\alpha \bar{\nu}^\alpha$  ve  $(\bar{u}\bar{\nu})^\alpha = \underline{u}^\alpha \underline{\nu}^\alpha$
- Eğer  $u \geq 0$  ve  $\nu \leq 0$  ise  $(\underline{u}\underline{\nu})^\alpha = \bar{u}^\alpha \underline{\nu}^\alpha$  ve  $(\bar{u}\bar{\nu})^\alpha = \underline{u}^\alpha \bar{\nu}^\alpha$
- Eğer  $u \leq 0$  ve  $\nu \geq 0$  ise  $(\underline{u}\underline{\nu})^\alpha = \underline{u}^\alpha \bar{\nu}^\alpha$  ve  $(\bar{u}\bar{\nu})^\alpha = \bar{u}^\alpha \underline{\nu}^\alpha$

şeklinde tanımlanır.

Zadeh Genişleme Prensiğini kullanarak fuzzy aralıkları üzerinde aritmetik işlemler tüm  $c \in \mathbb{R}$  için  $(U * V)(c) = \sup_{c=U*V} \min\{U(u), V(v)\}$  olarak tanımlanır. Burada

\* sembolü yukarıda verilen dört temel işlemin herhangi birisini gösterir. Metrik yapı ise Hausdorff uzaklığı ile verilir ve

$$D: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\},$$

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha \right|, \left| \bar{u}^\alpha - \bar{v}^\alpha \right| \right\}$$

biçiminde ifade edilir.

Burada  $D$  bir metrik olmak üzere

$$D(u + w, v + w) = D(u, v), \forall u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

$$D(ku, kv) = |k|D(u, v), \forall k \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

$$D(u + v, w + t) \leq D(u, w) + D(v, t), \forall u, v, w, t \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

denklemleri sağlandığında  $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$  nin bir tam metrik uzay olduğu görülmektedir.

### 3. FUZZY SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLENEBİLİRLİĞİ

Fuzzy sayı değerli bir fonksiyonun türevi Puri ve Ralescu [17] tarafından ilk defa ortaya konulmuş ve daha sonra yine ilk defa çok değerli fonksiyonların Hukuhara türevinin kullanımına da vesile olmuştur. Böylece Hukuhara türevine dayanan yaklaşımın, türevlenebilir bir fonksiyonun destek aralığının artan uzunluğa sahip olduğu dezavantajını da ortaya çıkarmıştır [28]. Bu gerçek, bulanık bir dinamik sistemin gelecekteki davranışının zaman içerisinde giderek belirsiz olduğuna işaret etmektedir. Bu olgu periyodik çözümlerin veya asimptotik olayların varlığına izin vermemektedir. Bulanık diferansiyel denklemlerin çözümünde farklı fikir ve yöntemlerin geliştirilmesinin nedeni ise budur [30]. Dinamik sistemlerin belirsizlik modellerinde Hukuhara türevi veya onun geliştirilmesi olan Seikkala türevi kullanılmıştır. Ancak Hukuhara türevinin dezavantajının aksine Bede ve Gal tarafından [21]'de tanımlanan kuvvetli geliştirilmiş türevlenebilirlik tanımına göre, türevlenebilir bir fonksiyonun artan destek uzunluğu azaltılabilir olduğu, fakat bu durumda ise tekliliğin ortadan kalktığı gözlemlenmiştir. İlk bakışta tekliliğin kaybolması bir sorun gibi görünebilir ancak, [31]'de belirtildiği gibi H-türevlenebilirlik kavramı altında bile, aynı klasik denklemin farklı formları bulanıklaştırıldığında eşit olmayan fuzzy diferansiyel denklemler elde edildiğinden dolayı bu teklilik de ortadan kalkmaktadır. Bu tez çalışmasında, Hukuhara türevlenebilirlik ve kuvvetli geliştirilmiş türevlenebilirlik kavramlarına dayanan problemler ele alınacak ve bunların çözümleri yapılacaktır.

#### 3.1. Hukuhara Türevlenebilirlik

**Tanım 3.1.1.**  $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  olsun.  $x = y + z$  olacak şekilde bir  $z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  varsa  $z$ 'ye  $x$  ve  $y$ 'nin Hukuhara farkı denir ve  $x \ominus y$  sembolü ile gösterilir.

**Tanım 3.1.2.**  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  bir fonksiyon ve yeterince küçük  $h > 0$  için  $f(x+h) \ominus f(x)$  ve  $f(x) \ominus f(x-h)$  H-farkları mevcut ise

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \ominus f(x-h)}{h} = f'(x)$$

olacak şekilde bir  $f'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  vardır.  $f'(x)$  fuzzy sayısına,  $f$ 'in  $x$  noktasındaki Hukuhara türevi denir [17].

**Tanım 3.1.3.**  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  fuzzy sayı değerli bir fonksiyonun Seikkala türevi  $[f'(x)]^\alpha = \left[ (f_{-}^\alpha(x))', (\bar{f}^\alpha(x))' \right]$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  bir fuzzy sayısının mevcut olması şartıyla tanımlanır.

**Lemma 3.1.4.** Bir  $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$  üçgen sayı değerli fonksiyonu,  $u' = (x', y', z')$  biçiminde bir üçgen fuzzy sayı oluyorsa, bu durumda  $u$  Seikkala türevlenebilirdir denir.

Diğer yandan fuzzy integralleri için Leibnitz -Newton formülü ise [37]'de verilmiştir.

**Teorem 3.1.5.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  olsun. Bu takdirde

- i.  $f$  türevlenebilir ise  $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(s) ds$ ,
- ii.  $F(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds$  fonksiyonu Hukuhara türevlenebilir ve  $F'(t) = f(t)$ .

Ayrıca burada dikkat edilmesi gereken önemli noktalar vardır. Bunun için  $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  alalım ve  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonu bir  $x_0 \in (a, b)$  için türevlenebilir olsun. Ayrıca  $\forall x \in (a, b)$  için  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ,  $f(x) = c.g(x)$  ile tanımlansın. Eğer  $g'(x_0) > 0$  ise, bu durumda yeteri derecede küçük  $h > 0$  için  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$  dir. Burada  $g(x_0 + h) - g(x_0) = w(x_0, h) > 0$ . Son eşitliğin her iki tarafı  $c$  ile çarpılırsa  $cg(x_0 + h) = cg(x_0) + cw(x_0, h)$  elde edilir. Burada  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ , H-farkı olarak ifade edilir. Yukarıda yapılanlar tekrar edilirse, benzer şekilde  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) - g(x_0 - h)}{h}$  ile  $f(x_0) - f(x_0 - h)$  H-farkının olduğu görülür. Ayrıca burada  $f'(x_0) = c.g'(x_0)$  olduğu da açıktır. Şimdi  $g'(x_0) < 0$  olduğunu varsayalım. Böylece yukarıda yapılan işlem adımları ile  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  ve  $f(x_0) - f(x_0 - h)$

H-farklarının ve  $f'(x_0)$  türevinin olmadığını kanıtlamak oldukça kolaydır. Sonuç olarak Tanım 3.1.3'e göre  $f'(x_0)$  türevinin her zaman var olduğu söylenemezdir.

Örneğin;  $f(t) = (-e^t, 0, e^t)$  alındığında  $f'(t) = (-e^t, 0, e^t)$  olur ve bu durumda hem  $f'(t) = f(t)$  ve hem de  $f'(t) = -f(t)$  bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Ya da  $f(t) = (1, 2, 3)e^{-t}$  alındığında  $f'(t) = (-e^{-t}, -2e^{-t}, -3e^{-t})$  olur ve dolayısıyla bu ifade bir fuzzy sayısı değildir.

### 3.2. Kuvvetli Genelleştirilmiş Türevlenebilirlik

**Tanım 3.2.1.** Kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilirlik tanımı ilk olarak [21]' de verilmiştir. Buna göre

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ ve } x_0 \in (a, b) \text{ olsun.}$$

- i. Yeteri derecede küçük tüm  $h > 0$  için,  $\exists f(x_0 + h) \ominus f(x_0), f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$  farkları mevcut ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

limitleri varsa ya da,

- ii. Yeteri derecede küçük tüm  $h > 0$  için,  $\exists f(x_0) \ominus f(x_0 + h), f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$  farkları mevcut

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0)$$

limitleri varsa ya da,

- iii. Yeteri derecede küçük tüm  $h > 0$  için,  $\exists f(x_0 + h) \ominus f(x_0), f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$  farkları mevcut

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0)$$



ve limitleri varsa ya da

- iv. Yeteri derecede küçük tüm  $h > 0$  için,  $\exists f(x_0) \ominus f(x_0 + h), f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$  farkları mevcut

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

limitleri varsa, bu durumda  $f'(x) \in \mathbb{R}_f$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilirdir denir.

**Önerme 3.2.2.** [29]  $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$  bir üçgen fuzzy sayısı olmak üzere;

- (a) Eğer  $u$ , (i)-türevlenebilir (Hukuhara türevlenebilir) ise  $u' = (x', y', z')$ .  
(b) Eğer  $u$ , (ii)- türevlenebilir ise  $u' = (z', y', x')$ .

**İspat:** (a) 'da belirtilen türev açıkça bilinen Hukuhara türevi tanımıdır. (b)'nin ispatı ise aşağıdaki gibidir:

$u(t) \ominus u(t+h)$  H-farkı mevcut olsun. Böylece doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t) \ominus u(t+h)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t) \ominus x(t+h), y(t) \ominus y(t+h), z(t) \ominus z(t+h),)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{z(t) \ominus z(t+h)}{-h}, \frac{y(t) \ominus y(t+h)}{-h}, \frac{x(t) \ominus x(t+h)}{-h} \right) \\ &= (z', y', x') \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t-h) \ominus u(t)}{-h} = (z', y', x')$$

olduğu açıkça görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

**Önerme 3.2.3.**  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$  fonksiyonları,  $x \in (a, b)$  aralığında aynı türevlenebilirlik şartı altında kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilir olsun. Bu durumda  $f + g$ ,  $x$ 'de kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilirdir ve  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  olur ( Burada iki fonksiyonun toplamı noktasal olarak tanımlanmıştır). Daha sonra iki fonksiyonun H-farkının kuvvetle genelleştirilmiş türevi hesaplanırken, yine H-farkı noktasal alınır. Bu durumda  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$  kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilir,  $(a, b)$  aralığı üzerinde f, (i)- türevlenebilir ve g de, (ii)- türevlenebilir ya da tam tersi olduğunda her  $x \in (a, b)$  için  $f(x) \ominus g(x)$  biçiminde H-farkı mevcut ise  $f \ominus g$  kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilirdir ve buradan  $(f \ominus g)'(x) = f'(x) + (-1)g'(x)$  yazılır [29].

#### 4) BİRİNCİ MERTEBEDEN FUZZY DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Fuzzy diferansiyel denklemler, olasılık belirsizliği altında dinamik sistemleri modellemede doğal bir yol olarak görülür. Ayrıca, gerçek dünyadaki olayları modellemede fuzzy başlangıç değer problemleri (FIVP) Diamond'un çalışmalarında olduğu gibi doğal olarak ortaya çıkmaktadır ( Örneğin sürtünme denklemi [28] gibi ). Literatürde çalışılmış çoğu fuzzy diferansiyel denklemler klasik olarak birbirinin benzeri gibi görülmektedir ancak her zaman fuzzy diferansiyel denklemler klasik (crisp) problemlerin bulanıklaştırılmış bir versiyonu değildir. Bu nedenle bazen de bazı gerçek dünya fenomenleri için uygun bir fuzzy model oluşturulabilmektedir [28, 29]. Bu bölümde verilen herhangi bir fuzzy diferansiyel denklemin Hukuhara türevi ve bununla birlikte kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımları altında oluşan problemlerin çözümleri incelenecektir.

##### 4.1. Hukuhara Türevlenebilirliği Altında Fuzzy Diferansiyel Denklemler

Burada Hukuhara türevi altında  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  biçiminde başlangıç değer problemi ele alınsın ve buna ilaveten  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  fonksiyonunun da sürekli olduğu varsayılınsın. Bu durumda aşağıdaki Lemma ile bir fuzzy diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülür.

**Lemma 4.1.1.**  $t_0 \in \mathbb{R}$  için,  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  fuzzy diferansiyel denklemi  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  sürekli olmak üzere,  $[t_0, t_1] \in \mathbb{R}$  aralığında

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

integral denkleme denktir [30].

**İspat:**  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  diferansiyel denkleminin bir çözümü  $x$  olsun. Diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

olup, buradan

$$x(t) \ominus x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

ve böylece

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

yazılır. Diğer yandan

$$x(t+h) = x_0 + \int_{t_0}^{t+h} f(s, x(s)) ds$$

ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) \ominus x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds$$

olduğu açıktır.

Burada  $w(f(t, x(t)), h)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  olmak üzere sürekli bir  $f(t, x(t))$  fonksiyonu süreklilik modülünü belirtmek üzere

$$\begin{aligned} & D \left[ \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds, h.f(t, x(t)) \right] \\ &= D \left[ \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds, \int_t^{t+h} f(t, x(t)) ds \right] \\ &\leq \int_t^{t+h} D(f(s, x(s)), f(t, x(t))) ds \\ &\leq \int_t^{t+h} w(f(t, x(t)), h) ds = h.w(f(t, x(t)), h) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Dolayısı ile buradan

$$\lim_{h \rightarrow 0} D \left( \frac{x(t+h) \ominus x(t)}{h}, f(t, x(t)) \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} w(f(t, x(t)), h) = 0$$

ifade edilir. Bu ise  $x$ 'in  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  fuzzy başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğu anlamına gelir. ■

**Lemma 4.1.2.**  $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times B(x_0, q)$  olmak üzere  $f : R_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  fonksiyonunun sürekli bir fonksiyon olduğunu ve

$$D(f(t, x), f(t, y)) \leq L.D(x, y), \quad \forall (t, x), (t, y) \in R_0$$

biçiminde Lipschitz koşulunun da, sağlandığını varsayalım. Bu durumda  $f$  fonksiyonu sınırlıdır, yani

$$D(f(t, x), 0) \leq M$$

olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı vardır [33].

**Teorem 4.1.3.** Aşağıdaki özellikler sağlansın:

(a)  $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times B(y_0, q)$ ,  $p, q > 0$ ,  $B(y_0, q) = \{y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} : D(y, y_0) \leq q\}$ ,  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  de kapalı bir yuvarı göstermek üzere  $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  olsun ve tüm  $(t, y) \in R_0$  için

$$D(\tilde{0}, f(t, y)) = \|f(t, y)\|_{\mathcal{F}} \leq M \text{ olacak şekilde daima sürekli bir } f : R_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

fonksiyonu mevcut olsun.

(b)  $g(t, 0) \equiv 0$  ve  $0 \leq g(t, u) \leq M_1$  olacak şekilde  $g : [t_0, t_0 + p] \times [0, q] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu tanımlansın. Bu durumda  $\forall t \in [t_0, t_0 + p]$ ,  $0 \leq u \leq q$  olacak şekilde  $g(t, u)$ ,  $u$ 'da azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca  $g$  fonksiyonu,  $u'(t) = g(t, u(t))$   $u(t_0) = 0$  biçiminde tanımlanan başlangıç değer probleminin  $[t_0, t_0 + p]$  aralığındaki yegâne yani bir tek çözümüdür.

(c)  $\forall (t, y), (t, z) \in R_0$  için  $D(f(t, y), f(t, z)) \leq g(t, D(y, z))$  olup böylece  $D(y, z) \leq q$  dir.

Bu durumda

$$y' = f(t, y),$$
$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_f$$

fuzzy başlangıç teoremi  $r = \min \left\{ p, \frac{q}{M}, \frac{q}{M_1} \right\}$  olmak üzere  $y: [t_0, t_0 + r] \rightarrow B(y_0, q)$

olacak şekilde tek bir çözüme sahiptir ve aşağıda verilen

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_f$$
$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

ardışık tekrarlar ile çözüme yakınsadığı görülür [29, 32, 33, 34].

#### 4.2. Hukuhara Türevlenebilirliği Altında Çeşitli Çözümlerin Varlığı

Herhangi bir fuzzy diferansiyel denklemin çözümü için yapılan araştırmalarda [31]'deki çalışma burada önemli bir ışık tutmaktadır ve [31]'de aşağıdaki gibi eş değer klasik diferansiyel denklemler ele alınmaktadır:

$$u' = -u \text{ ve } u' + u = 0, u(0) = u_0.$$

Bu denklemler bulanıklaştırıldığında sonuçta iki farklı fuzzy diferansiyel denklem elde edilmektedir. İkinci denklemin herhangi bir fuzzy çözümü yoktur. Bu nedenle [31]'de yapılan çalışmada denkleme zorlayıcı (forcing) bir terimin eklenmesi gerektiği sonucu ortaya çıkmıştır. Bu durumda denklem

$$u' + u = \sigma(t), u(0) = u_0$$

olur ve eklenen bu zorlayıcı terimin çözümün davranışını değiştirdiği görülmüştür. [31]'de iddia edildiği gibi fuzzy çözümünün doğası, zorlayıcı terimin seçimine kuvvetli bir şekilde bağlıdır. Aşağıda verilen klasik başlangıç değer problemleri,

$$u' = -u + \sigma(t)$$

$$u' - \sigma(t) = -u$$

$$u' + u = \sigma(t) \quad , \quad u(0) = u_0$$

birbirine eşdeğerdir ve bunlara karşılık gelen

$$u' = -u + \sigma(t) \quad , \quad u(0) = u_0 \quad , \quad u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad , \quad \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

$$u' - \sigma(t) = -u \quad , \quad u(0) = u_0 \quad , \quad u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad , \quad \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

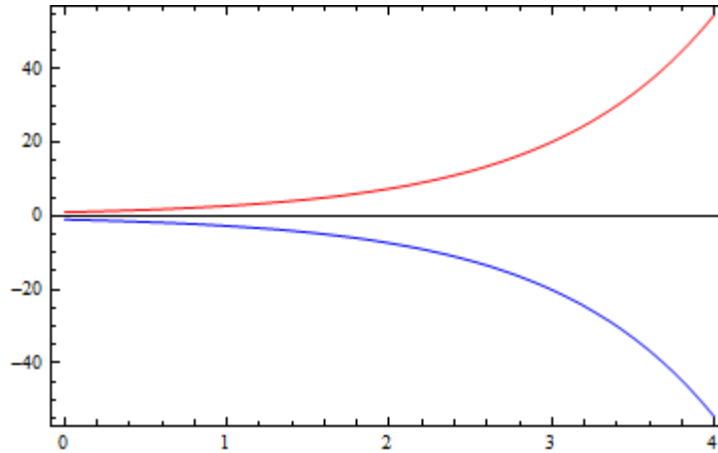
$$u' + u = \sigma(t) \quad , \quad u(0) = u_0 \quad , \quad u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad , \quad \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

ilgili fuzzy başlangıç değer problemlerinin çözümleri çok farklı davranışlar sergilemektedir. Bu bölümde sırasıyla Hukuhara ve kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımları kullanılarak ortaya çıkan farklı çözümler incelenecektir.

İlk olarak oldukça popüler olan

$$u' = -u \quad , \quad u(0) = (-1, 0, 1) \quad (4.1)$$

fuzzy başlangıç değer problemini ele alalım. Bu problemin çözümü  $u(t) = (-e^t, 0, e^t)$  dir ve bu çözüm Şekil 4.1' de grafik ile gösterilmektedir.



**ŞEKİL 4.1.**  $t \in [0, 4]$  için (4.1) fuzzy başlangıç değer probleminin grafiği

Buna karşın (4.1) denkleme karşılık gelen homojen olmayan fuzzy başlangıç değer problemi göz önüne alındığında, farklı davranışı olan bir çözümün elde edildiği görülür. Bunun için denklem

$$u' + u = 2e^{-t}(-1, 0, 1), \quad u(0) = (-1, 0, 1) \quad (4.2)$$

olarak yeniden alınır. Bu denklemin çözümü ise

$$\begin{aligned} u(t) &= (-1, 0, 1)e^{-t}(1 + 2t) \\ &= ((-1 - 2t)e^{-t}, 0, (1 + 2t)e^{-t}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

biçimindedir. Bu durumda,

$$u(t + h) = (-1, 0, 1)e^{-t-h}(1 + 2t + 2h)$$

olurken H-farkı ise

$$\begin{aligned} u(t + h) \ominus u(t) &= [(-1, 0, 1)e^{-t-h}(1 + 2t + 2h)] - [(-1, 0, 1)e^{-t}(1 + 2t)] \\ &= [2he^{-t} - h + (2t + 1)e^{-t}(e^{-h} - 1)](-1, 0, 1) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde (  $u(t) \ominus u(t - h)$  ) farkı da mevcuttur. Şimdi ise fuzzy başlangıç değer probleminin farklı formülasyonu ile oluşacak çözümlerin davranışını inceleyelim. Bunun için önce

$$u' = -u + 2e^{-t}(-1, 0, 1), \quad u(0) = (-1, 0, 1) \quad (4.4)$$

denkleminin  $u = (x, y, z)$  şeklindeki üçgen fuzzy sayısı çözümü aranır. (4.4)

denklemini Lemma 3.1.4'e göre,

$$\begin{cases} x' = -z - 2e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -x + 2e^{-t} \end{cases}$$

sistemine dönüştürülür ve bu sistemin çözümünden de

$$u(t) = (e^{-t} - 2e^t, 0, 2e^t - e^{-t}), \quad t \in (0, \infty) \quad (4.5)$$

bulunur.



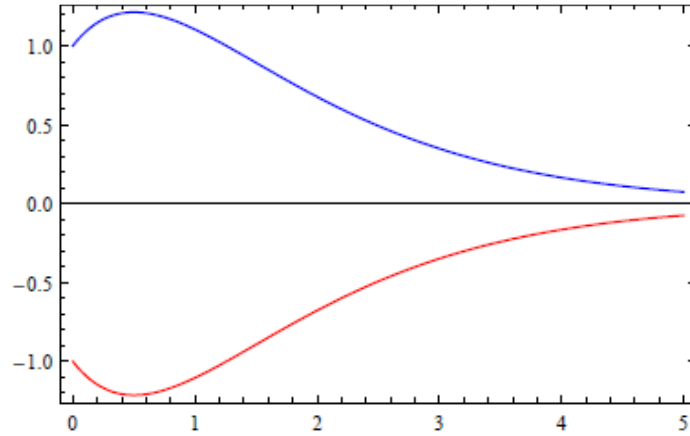
Son olarak ise eşdeğer klasik adi diferansiyel denklemlerden elde edilen eşit olmayan fuzzy başlangıç değer problemi

$$u' - 2e^{-t}(-1,0,1) = -u, \quad u(0) = (-1,0,1)$$

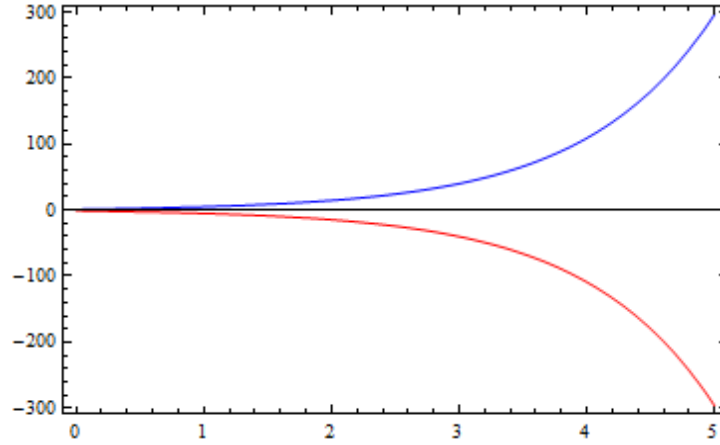
biçiminde ele alınır.

$$\begin{cases} x' - 2e^{-t} = -z \\ y' = y \\ z' + 2e^{-t} = -x \end{cases}$$

şeklinde sisteme dönüştürülür ve çözümü yapılırsa  $u(t) = (-e^{-t}, 0, e^{-t})$  bulunur. Fakat burada bulunan çözüm için  $u(t+h) \ominus u(t)$  ve  $u(t) \ominus u(t-h)$  H-farkları mevcut olmadığından,  $u$ , H-türevlenebilir değildir. (4.2) ve (4.4) diferansiyel denklemlerinin çözümleri olan (4.3) ve (4.5) çözümlerinin Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'teki grafiklerinde de görüleceği gibi davranışları oldukça farklıdır, ancak bu denklemler eşdeğer klasik adi başlangıç değer problemlerinin farklı bulanıklaştırmalarıdır. Aynı örnek kuvvetli genelleştirilmiş türev altında çözümün varlığı kısmında tekrar ele alınarak yeniden incelenecektir.



Şekil 4.2. (4.2) başlangıç değer problemi çözümünün grafiği



Şekil 4.3. (4.4) başlangıç değer problemi çözümünün grafiği

### 4.3. Kuvvetli Genelleştirilmiş Türev Altında Çözümlerin Varlığı

Aşağıda verilen Lemma, fuzzy başlangıç değer problemlerini integral denklemlere dönüştürür.

**Lemma 4.3.1.**  $t_0 \in \mathbb{R}$  için,  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  fuzzy diferansiyel denklemi  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  fonksiyonu sürekli olmak üzere,  $(t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$  aralığında sırasıyla (i) ya da (ii) kuvvetli türevlenebilirliğe bağlı olarak

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

veya

$$y_0 = y(t) + (-1) \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

integral denklemlerinden birisine denktir. İki denklem arasındaki denklik bir denklemin herhangi bir çözümünün diğeri için de çözüm olduğunu ifade eder.

Kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilirlik durumunda  $y' = f(t, y)$  fuzzy diferansiyel denklemi iki farklı integral denkleme karşılık getirebiliyorken, Tanım 3.1.3'e göre türevlenebilirlik tanımı altında bu yalnızca bir denkleme karşılık gelir. Lemma 4.3.1'e göre ikinci integral denklem

$$y(t) = y_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

biçiminde yazılabilir.

Diğer yandan Teorem 4.1.3, kuvvetli genelleştirilmiş türevlenebilirlik altında tanımlanan fuzzy diferansiyel denklemler için ise aşağıdaki gibi genişletilebilir.

**Teorem 4.3.2.** Aşağıdaki özellikler sağlansın:

(a)  $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times B(y_0, q)$ ,  $p, q > 0$ ,  $B(y_0, q) = \{y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} : D(y, y_0) \leq q\}$ ,  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  de kapalı bir yuvar olmak üzere  $y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  olsun ve tüm  $(t, y) \in R_0$  için

$$D\left(\tilde{0}, f(t, y)\right) = \|f(t, y)\|_{\mathcal{F}} \leq M \text{ olacak şekilde sürekli bir } f : R_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

fonksiyonu tanımlansın.

(b)  $g : [t_0, t_0 + p] \times [0, q] \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $0 \leq u \leq q$  iken,  $\forall t \in [t_0, t_0 + p]$  için  $g(t, 0) \equiv 0$  olsun. Bu takdirde  $g(t, u)$ ,  $0 \leq g(t, u) \leq M_1$  olacak şekilde,  $u$  'da azalmayandır ve böylece  $u'(t) = g(t, u(t))$ ,  $u(t_0) = 0$  başlangıç değer problemi,  $[t_0, t_0 + p]$  aralığında  $u(t_0) = 0$  olacak şekilde bir tek çözüme sahiptir.

(c)  $\forall (t, y), (t, z) \in R_0$  için  $D(f(t, y), f(t, z)) \leq g(t, D(y, z))$  olup,  $D(y, z) \leq q$ .

(d)  $t \in [t_0, t_0 + d]$  aralığındaki herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  dizisi için  $\bar{y}_0(t) = y_0$ ,

$$\bar{y}_{n+1}(t) = y_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, \bar{y}_n(s)) ds \text{ ve } \bar{y}_n : [t_0, t_0 + d] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ olacak şekilde bir } d > 0$$

vardır. Bu şartlar sağlandığında,

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

fuzzy başlangıç değer problemi,  $r = \min\left\{p, \frac{q}{M}, \frac{q}{M_1}, d\right\}$  olmak üzere biri

Tanım 3.2.1 ‘deki (i)-türevine göre bir diğeri ise (ii)-türevine göre tanımlı olan  $y$  ve  $\bar{y} : [t_0, t_0 + r] \rightarrow B(y_0, q)$  olan iki çözüme sahip olur. Böylece

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds, \quad y_0(t) = y_0$$

ve

$$\bar{y}_{n+1}(t) = y_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^t f(s, \bar{y}_n(s)) ds, \quad \bar{y}_0(t) = y_0$$

biçimindeki ardışık tekrarlar uygulanarak sırasıyla iki çözüme yakınsandığı görülür.

Diğer taraftan üçgen fuzzy sayıların kümesi  $\mathbb{R}_T$  ile gösterilmek üzere aşağıdaki

Lemma iki üçgen fuzzy sayısı arasında H-farkının olması için yeterli şartı verir.

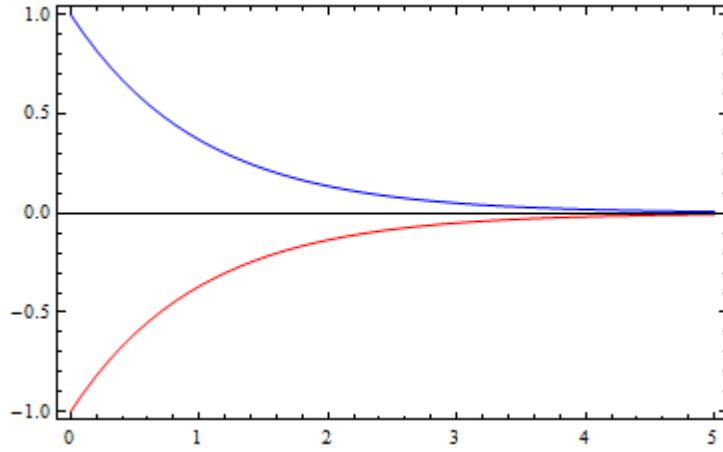
**Lemma 4.3.3**  $u, v \in \mathbb{R}_T$  olmak üzere  $u^1 - \underline{u}^0 > 0$ ,  $\bar{u}^0 - u^1 > 0$  ve  $\text{uzunluk}(v) = (\bar{v}^0 - \underline{v}^0) \leq \min\{u^1 - \underline{u}^0, \bar{u}^0 - u^1\}$  biçiminde tanımlansın. Bu durumda  $u \ominus v$  biçiminde bir H-farkı vardır.

Şimdi Bölüm (4.2) de verilen problemi burada tekrar ele alarak bunu genelleştirilmiş türev tanımı ile tekrar çözmeye çalışalım. Bunun için önce

$$u' = -u, \quad u(0) = (-1, 0, 1) \tag{4.6}$$

Biçimindeki başlangıç değer problemini ele alalım.

Genel olarak (i)-türevlenebilirlik tanımı Hukuhara türevi olduğundan Şekil 1’de gösterilen kararsız çözüm doğrudan elde edilir. Diğer yandan (ii)-türevlenebilirlik tanımı ile de  $u(t) = e^{-t}(-1, 0, 1)$  çözümü bulunur. Burada (4.6) denkleminin (ii)-türevlenebilirlik tanımı altındaki çözümünün grafiği  $t \in [0, 5]$  için Şekil 4.4’te gösterilmiştir.



**Şekil 4.4.** (4.6) başlangıç değer probleminin (ii)-türevlenebilir çözümü

Daha önce incelendiği gibi denkleme bir zorlayıcı terim ekleyerek, eşit olmayan üç tane farklı fuzzy diferansiyel denklem elde edilir. Böylece [31]'de de öngörüldüğü gibi denklemler aşağıdaki gibi tekrar yazılır:

$$u' = -u + e^t (-1, 0, 1), \quad u_0 = (-1, 0, 1) \quad (4.7)$$

$$u' + u = e^{-t} (-1, 0, 1), \quad u_0 = (-1, 0, 1) \quad (4.8)$$

$$u' - e^{-t} (-1, 0, 1) = -u, \quad u_0 = (-1, 0, 1) \quad (4.9)$$

(4.7) denklemi (i)-türevlenebilirliği tanımı ve Lemma 3.1.4 kullanılarak

$$\begin{cases} x' = -z - e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -x + e^{-t} \end{cases}$$

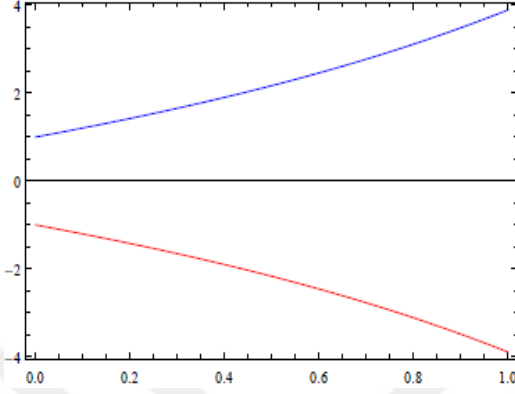
biçiminde bir sistemle ifade edilir ve bunun çözümü ise

$u(t) = \left( \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t, 0, \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \right)$  biçimindedir. Öte yandan  $u(t)$ , (i)-türevlenebilir

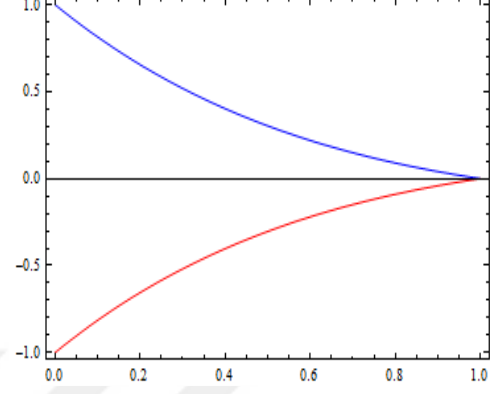
olup, böylece bu (4.7) denkleminin bir çözümüdür. (ii)-türevlenebilirlik tanımı ile (4.7) denklemi,

$$\begin{cases} z' = -z - e^{-t} \\ y' = -y \\ x' = -x + e^{-t} \end{cases}$$

şeklinde yazılır ve  $t \in [0,1]$  aralığı üzerinde (4.7) denklemi (ii)-türevlenebilir olup, buradan  $u(t) = e^{-t}(1-t)(-1,0,1)$  çözümü elde edilir. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 da (i) ve (ii) türevlenebilir çözümler sırasıyla gösterilmiştir.



**Şekil 4.5.** (4.7) denkleminin (i)-türevi çözümünün grafiği



**Şekil 4.6.** (4.7) denkleminin (ii)-türevi çözümünün grafiği

Şimdi de (4.8) denklemini ele alalım. Eğer  $u$ , (i)-türevlenebilir ise [16]' da gösterildiği gibi  $t > 0$  için çözüm elde edilemez. Aynı durum (ii)-türevlenebilirlik için de geçerlidir. Böylece (4.8) denklemi (i)-türevlenebilirlik şartı altında

$$\begin{cases} x' = -z + e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -x - e^{-t} \end{cases} \quad (4.10)$$

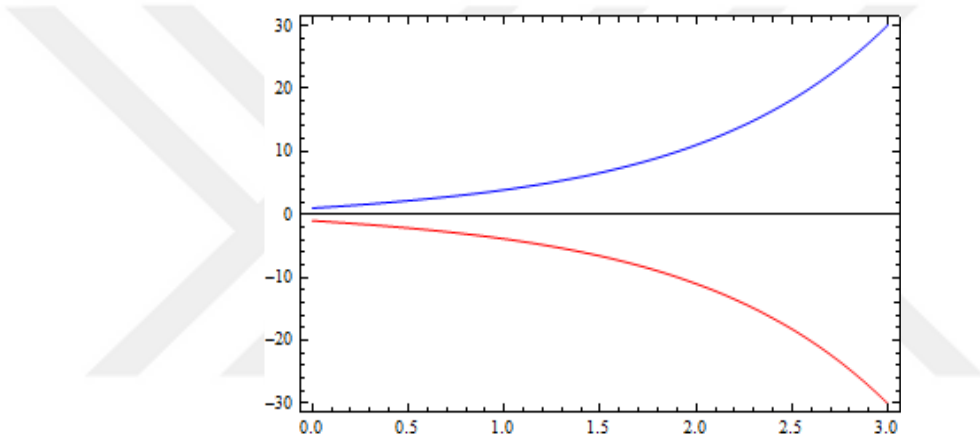
sistemine dönüşür ve buradan  $u(t) = (-\cosh t, 0, \cosh t) = (-1, 0, 1)\cosh t$  çözümü bulunur. Bu durumda  $u(t+h) = (-1, 0, 1)\cosh(t+h)$  olur ve  $\cosh t$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında artan olduğundan dolayı  $u(t) - u(t+h)$  farkı mevcut değildir. Bu durum (ii)-türevlenebilirlik tanımı ile de çelişmektedir. Dolayısıyla (4.8) denklemi için hiçbir çözüm bulunamaz.

En son olarak (4.9) denklemi ele alınırsa ve bunun için (i)-türevlenebilirlik şartı altında yukarıdaki gibi  $[0, \infty)$  aralığında ki çözümü  $u(t) = (-\cosh t, 0, \cosh t)$

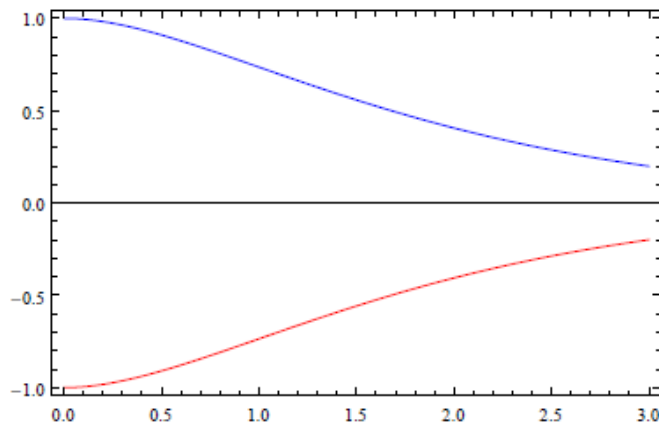
biçimindedir. Diğer yandan (ii)-türevlenebilirlik şartı altında Lemma 3.1.4' e göre denklem

$$\begin{cases} x' = -x - e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -z + e^{-t} \end{cases} \quad (4.11)$$

biçiminde sisteme dönüştürülür ve bu sistem çözümlerse  $u(t) = e^{-t}(1+t)(-1,0,1)$  elde edilir. Sonuçta (4.9) denkleminin (i) ve (ii)-türevlenebilir çözümleri aşağıda Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 ile ayrı ayrı gösterilmiştir.



**Şekil 4.7.** (4.9) başlangıç değer probleminin (i)-türevlenebilir çözümü



**Şekil 4.8.** (4.9) başlangıç değer probleminin (ii)-türevlenebilir çözümü

Böylece, genelleştirilmiş türev tanımı altında eşit olan klasik (crisp) adi başlangıç değer probleminin, eşit olmayan fuzzy başlangıç değer problemi versiyonları olan (4.7), (4.8), (4.9) denklemleri için, bir tanesi asimptotik kararlı olan, dört çözüm elde edilmiştir. Ayrıca fuzzy diferansiyel denkleme bir zorlayıcı (forcing) terim eklemek sureti ile bu çözümlerin davranışlarının hem Hukuhara türevi hem de kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımı altında nasıl etkilendiği gösterilmiştir [29, 31].





## 5. FUZZY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Bu tez çalışmasında  $y' = f(t, y)$  nin birinci mertebeden bir fuzzy diferansiyel denklemi olduğu,  $y$ ,  $t$ ' nin fuzzy fonksiyonu ve  $f(t, y)$ ' nin ise yine  $t$  klasik (crisp) değişkeninin fuzzy fonksiyonu olarak tanımlandığı, buna ilaveten  $y$ ' nin fuzzy değişkeni ve  $y'$  gösteriminin de  $y$  nin Hukuhara türevi olduğu bilinmektedir. Böylece başlangıç değeri  $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$  olan birinci mertebeden Cauchy problemi

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

olarak tanımlanır ve (5.1) başlangıç değer probleminin tek bir çözümünün olabilmesi için yeterli koşul  $f$  fonksiyonunun sürekli olması ve Lipschitz koşulunu sağlamasıdır. Ayrıca her  $t \in [t_0, T]$  ve  $\alpha \in [0, 1]$  için  $y(t)$  ve  $f(t, y)$  nin  $\alpha$ -seviye kümeleri,

$$[y(t)]^\alpha = [\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$$

ve

$$[f(t, y)]^\alpha = [\underline{f}(t, y(t); \alpha), \bar{f}(t, y(t); \alpha)]$$

biçiminde yazılır. Bu durumda

$$\underline{f}(t, y(t); \alpha) = F[t, \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$$

$$\bar{f}(t, y(t); \alpha) = G[t, \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$$

olup, Zadeh'in genişleme prensibi  $y = y(t)$  bir fuzzy sayısı olduğunda  $f(t, y)$  nin aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(t, y)(s) = \sup \{y(\tau) \mid s = f(t, \tau)\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Yani,

$$\underline{f}(t, y(t); \alpha) = \min \left\{ f(t, y) \mid y \in [y(t)]^\alpha \right\}$$

$$\bar{f}(t, y(t); \alpha) = \max \left\{ f(t, y) \mid y \in [y(t)]^\alpha \right\}$$

ile ifade edilir. Ayrıca [18]'deki Teorem 5.2'den (5.1) denklemini aşağıdaki denklem sistemine denktir:

$$\underline{y}'(t) = \underline{f}(t, y) = F(t, \underline{y}, \bar{y}), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$$

$$\bar{y}'(t) = \bar{f}(t, y) = G(t, \underline{y}, \bar{y}), \quad \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0.$$
(5.2)

Bunun yanında her bir  $t$  için bulunan  $[y(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$  sayı çifti bir fuzzy sayıdır. (5.1) başlangıç değer probleminin parametrik biçimi ise her  $\alpha \in [0, 1]$  için,

$$\underline{y}'(t; \alpha) = F[t, \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)], \quad \underline{y}(t_0; \alpha) = \underline{y}_0(\alpha)$$

$$\bar{y}'(t; \alpha) = G[t, \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)], \quad \bar{y}(t_0; \alpha) = \bar{y}_0(\alpha)$$
(5.3)

şeklinde. Burada herhangi bir fuzzy diferansiyel denklem için tam çözümler  $(\underline{Y}(t; \alpha), \bar{Y}(t; \alpha))$  olarak ve yaklaşık çözümler ise  $(\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha))$  ile gösterilebilir. Diğer yandan ayırık noktalar  $t_n = t_0 + nh$ ,  $h = \frac{T - t_0}{N}$ ,  $0 \leq n \leq N$  ile hesaplanırken  $[t_0, T]$  aralığında bir dizi  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$  biçiminde tanımlanır.

Şimdi daha önce literatürde çalışılan fuzzy başlangıç değer problemini ele alıp, bunu yamuk metodu ile yaklaşık olarak çözüp elde edilen sonuçları tam çözümleri ile karşılaştıralım.

## 5.1 Fuzzy Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri ile İlgili Bazı Uygulamalar

**Örnek 5.1.** Fuzzy başlangıç değer problemi

$$y'(t) = -y(t) + t + 1, \quad t \in [0, 0.1] \quad (5.4)$$

$$y(0) = [0.96 + 0.04\alpha, 1.01 - 0.01\alpha]$$

olarak verilsin [39].  $y(t) = (\underline{y}(t), \bar{y}(t))$  fuzzy sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun  $\alpha$ -seviyeleri  $y(t; \alpha) = [\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$  olup buradan  $f(t, y(t; \alpha)) = -y(t; \alpha) + t + 1$  yazılır. Ayrıca ele alınan diferansiyel denklemin Önerme 3.2.2 de verilen (i)-türevlenebilme ve (ii)-türevlenebilme tanımlarına göre parametrik formları aşağıdaki gibidir:

- (i)-türevlenebilme şartı altında parametrik gösterimi

$$\begin{cases} \underline{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = -\bar{y}(t; \alpha) + t + 1 \\ \bar{y}'(t; \alpha) = \bar{f}(t, y(t; \alpha)) = -\underline{y}(t; \alpha) + t + 1 \\ \underline{y}(0; \alpha) = 0.96 + 0.04\alpha \\ \bar{y}(0; \alpha) = 1.01 - 0.01\alpha \end{cases} \quad (5.5)$$

şeklindedir. Benzer şekilde

- (ii)-türevlenebilme şartına göre parametrik gösterimi ise

$$\begin{cases} \bar{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = -\bar{y}(t; \alpha) + t + 1 \\ \underline{y}'(t; \alpha) = \bar{f}(t, y(t; \alpha)) = -\underline{y}(t; \alpha) + t + 1 \\ \underline{y}(0; \alpha) = 0.96 + 0.04\alpha \\ \bar{y}(0; \alpha) = 1.01 - 0.01\alpha \end{cases} \quad (5.6)$$

biçimindedir.

Buna göre (5.5) denkleminin tam çözümü,  $0 \leq \alpha \leq 1$  olmak üzere

$$\underline{Y}(t; \alpha) = (0.985 + 0.015\alpha) e^{-t} - (1 - \alpha)0.025 e^t + t \quad (5.7)$$

$$\bar{Y}(t; \alpha) = (0.985 + 0.015\alpha) e^{-t} + (1 - \alpha)0.025 e^t + t$$

dir. Diğer yandan yamuk kuralına göre bu denklemler,  $N=10$  alındığında,  $0 \leq n < N$  için aşağıdaki gibidir:

$$\underline{y}_{n+1}^\alpha = \underline{y}_n^\alpha + \frac{h}{2} \left[ \underline{f}^\alpha(t_n, y_n) + \underline{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1}) \right] \quad (5.7)$$

$$\bar{y}_{n+1}^\alpha = \bar{y}_n^\alpha + \frac{h}{2} \left[ \bar{f}^\alpha(t_n, y_n) + \bar{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1}) \right].$$

Şimdi (5.4) denkleminin yamuk metodu ile yaklaşık çözümünü, (i)-türevlenebilme tanımı ile hesaplayalım. Buna göre (5.5) denklemlerindeki parametrik yapı sayesinde denklemler

$$\underline{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = -\bar{y}(t; \alpha) + t + 1$$

$$\bar{y}'(t; \alpha) = \bar{f}(t, y(t; \alpha)) = -\underline{y}(t; \alpha) + t + 1$$

$$\underline{y}(0; \alpha) = \underline{Y}(0; \alpha) = 0.96 + 0.04\alpha$$

$$\bar{y}(0; \alpha) = \bar{Y}(0; \alpha) = 1.01 - 0.01\alpha$$

biçiminde olacaktır. Yamuk metodunun kapalı yapısından dolayı hesaplamaların her bir adımda lineer sistemin ayrı ayrı çözülmesi gerekmektedir. Bu durumda yamuk metodu iterasyon formülü aşağıdaki gibidir:

Ardışık tekrarın ilk adımında  $\alpha = 0$  olmak üzere  $t \in [0, 0.1]$  ve adım aralığı  $h = 0.01$  alınırsa,

$$\underline{y}_1^0 = \underline{y}_0^0 + \frac{h}{2} \left[ \underline{f}^0(t_0, y_0) + \underline{f}^0(t_1, y_1) \right]$$

$$\bar{y}_1^0 = \bar{y}_0^0 + \frac{h}{2} \left[ \bar{f}^0(t_0, y_0) + \bar{f}^0(t_1, y_1) \right]$$

biçiminde ifade edilir. Yani burada,

$$\begin{cases} \underline{y}_1^0 = \underline{y}_0^0 + \frac{h}{2}[-\bar{y}_0^0 + t_0 + 1 - \bar{y}_1^0 + t_1 + 1] \\ \bar{y}_1^0 = \bar{y}_0^0 + \frac{h}{2}[-\underline{y}_0^0 + t_0 + 1 - \underline{y}_1^0 + t_1 + 1] \end{cases} \quad (5.9)$$

olup, böylece

$$\begin{cases} \underline{y}_1^0 + 0.005\bar{y}_1^0 = 0.965 \\ \bar{y}_1^0 + 0.005\underline{y}_1^0 = 1.01525 \end{cases}$$

sistemi bulunur ve buradan da

$$\begin{cases} \underline{y}_1^0 = 0.959947748 \\ \bar{y}_1^0 = 1.010450261 \end{cases}$$

⋮  
⋮  
⋮

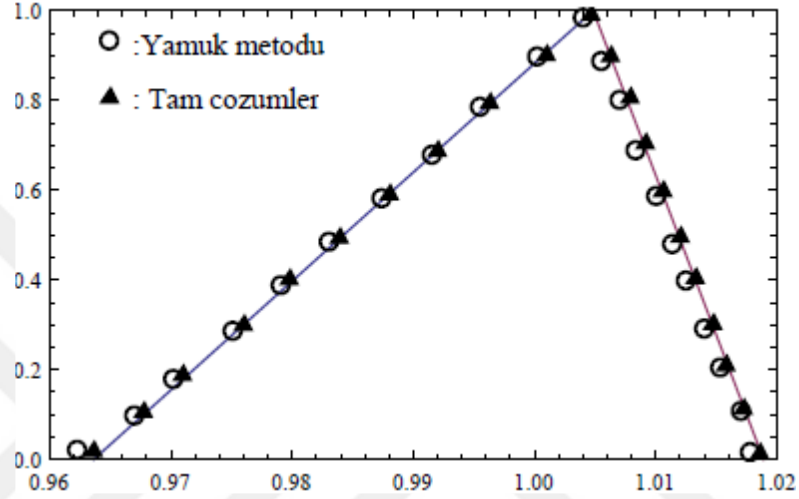
$$\begin{cases} \underline{y}_{10}^0 = 0.963634812 \\ \bar{y}_{10}^0 = 1.018893413 \end{cases}$$

çözümleri elde edilir. Benzer işlemler 10 adım tekrar edilerek  $t = 0.1$  deki yaklaşık çözümler böylece yamuk metodu ile bulunmuş olur. Burada her bir  $\alpha$ -kesiti için nümerik hesaplamalar ve hatalar Tablo 5.1 de verilmiştir. Ayrıca tam ve nümerik çözümler ise Şekil 5.1' de gösterilmiştir.

**Tablo 5.1.** (5.4) başlangıç değer probleminin (i)-türevine göre yamuk metodu ile çözümleri ve mutlak hataları

$\alpha$	$\underline{y}$	$\bar{y}$	Hata $ \underline{Y} - \underline{y} $	Hata $ \bar{Y} - \bar{y} $
0	0.9636348180	1.0188934100	7.6575-e07	7.1970e-07
0.1	0.9677550026	1.0174877354	7.6458e-07	7.2314e-07
0.2	0.9718751872	1.0160820608	7.6341e-07	7.2657e-07
0.3	0.9759953718	1.0146763862	7.6224e-07	7.3000e-07
0.4	0.9801155564	1.0132707116	7.6107e-07	7.3344e-07

0.5	0.9842357410	1.0118650370	7.5989e-07	7.3687e-07
0.6	0.9883559256	1.0104593624	7.5872e-07	7.4030e-07
0.7	0.9924761102	1.0090536877	7.5755e-07	7.4374e-07
0.8	0.9965962948	1.0076480131	7.5638e-07	7.4717e-07
0.9	1.0007164794	1.0062423385	7.5521e-07	7.5060e-07
1	1.0048366639	1.0048366639	7.5404e-07	7.5404e-07



**Şekil 5.1.** (5.4) başlangıç değer probleminin (i)-türevine göre yamuk metodu ile çözümleri ve tam çözüm ile karşılaştırılması

Şimdi de (5.4) denkleminin yamuk metodu ile yaklaşık çözümlerini (ii)-türevlenebilme tanımı altında hesaplayalım: (5.6) denklemleri ile gösterilen parametrik form yardımıyla

$$\begin{aligned}\bar{y}'(t;\alpha) &= \underline{f}(t, y(t;\alpha)) = -\bar{y}(t;\alpha) + t + 1 \\ \underline{y}'(t;\alpha) &= \bar{f}(t, y(t;\alpha)) = -\underline{y}(t;\alpha) + t + 1\end{aligned}\quad (5.10)$$

biçimindeki denklemlerin tam çözümleri

$$\begin{aligned}\underline{Y}(t;\alpha) &= t + (0.96 + 0.04\alpha)e^{-t} \\ \bar{Y}(t;\alpha) &= t + (1.01 - 0.01\alpha)e^{-t}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Diğer yandan yamuk metodu ve (ii)-türevlenebilme tanımını vasıtasıyla yaklaşık çözümler ise aşağıdaki ardışık tekrar formülleri yardımıyla benzer şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}\underline{y}_{n+1}^\alpha &= \underline{y}_n^\alpha + \frac{h}{2} \left[ \underline{f}^\alpha(t_n, y_n) + \underline{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1}) \right] \\ \bar{y}_{n+1}^\alpha &= \bar{y}_n^\alpha + \frac{h}{2} \left[ \bar{f}^\alpha(t_n, y_n) + \bar{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1}) \right].\end{aligned}\tag{5.11}$$

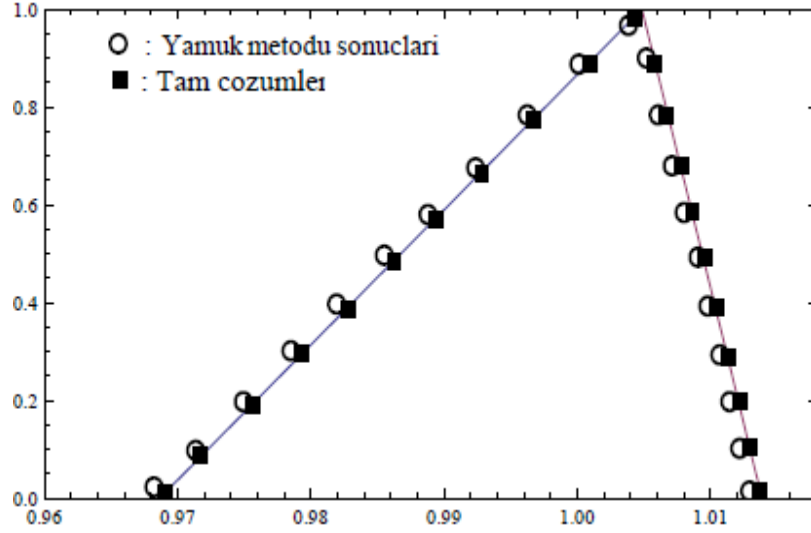
Burada  $t \in [0, 0.1]$  iken  $\alpha = 0$  olmak üzere adım aralığı  $h = 0.01$  alınırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_1^0 &= \bar{y}_0^0 + \frac{h}{2} \left[ -\bar{y}_0^0 + t_0 + 1 - \bar{y}_1^0 + t_1 + 1 \right] \\ \underline{y}_1^0 &= \underline{y}_0^0 + \frac{h}{2} \left[ -\underline{y}_0^0 + t_0 + 1 - \underline{y}_1^0 + t_1 + 1 \right]\end{aligned}\tag{5.12}$$

denklemleri yazılır ve sistemin çözümüne gerek kalınmaksızın her adım için çözüm kolay bir şekilde hesaplanır. Her bir  $\alpha$ -kesiti için bulunan nümerik sonuçlar ve hatalar Tablo 5.2'de verilmiştir. Bunun yanında tam ve nümerik çözümlerin grafiği ise Şekil 5.2 de gösterilmiştir.

**Tablo 5.2.** (5.4) başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu çözümleri ve mutlak hatalar

$\alpha$	$\underline{y}$	$\bar{y}$	$ \underline{Y} - \underline{y} $	$ \bar{Y} - \bar{y} $
0	0.9686431974	1.0138857922	7.2388e-07	7.6160e-07
0.1	0.9722632709	1.0129509547	7.2690e-07	7.6083e-07
0.2	0.9758826206	1.0120761173	7.2991e-07	7.6007e-07
0.3	0.9795019703	1.0111712799	7.3293e-07	7.5932e-07
0.4	0.9831213200	1.0102664425	7.3595e-07	7.5856e-07
0.5	0.9867406696	1.0093616051	7.3896e-07	7.5781e-07
0.6	0.9903592773	1.0084567677	7.4198e-07	7.5706e-07
0.7	0.9939793690	1.0075519302	7.4495e-07	7.5630e-07
0.8	0.9975987118	1.0066470328	7.4801e-07	7.5555e-07
0.9	1.0012180683	1.0057422554	7.5102e-07	7.5480e-07
1	1.0048366639	1.0048366639	7.5404e-07	7.5404e-07



**Şekil 5.2.** (5.4) başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu ile çözümleri ve tam çözüm ile karşılaştırılması

Şimdi de 2.örneği ele alarak genelleştirilmiş türev tanımı altında başlangıç değer problemini [40] çalışılan yamuk formüllerinin farklı tipleri için inceleyip sonuçlarını karşılaştıralım.

**Örnek 5.2.** Birinci mertebeden fuzzy diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t) , t \in [0,1], \lambda = 1 \\ y(0) &= [0.5 + 0.5\alpha, 1.5 - 0.5\alpha] \end{aligned} \quad (5.13)$$

biçiminde ele alalım.

(i)-türevlenebilme şartına göre bu denklemin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} \underline{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = \underline{y}(t; \alpha) \\ \overline{y}'(t; \alpha) = \overline{f}(t, y(t; \alpha)) = \overline{y}(t; \alpha) \\ \underline{y}(0; \alpha) = 0.5 + 0.5\alpha \\ \overline{y}(0; \alpha) = 1.5 - 0.5\alpha \end{cases} \quad (5.14)$$

biçiminde olup, tam çözümünü ise

$$\underline{Y}(t) = (0.5 + 0.5\alpha)e^t$$



$$\bar{Y}(t) = (1.5 - 0.5\alpha)e^t \quad (5.15)$$

dir.

(ii)-türevlenebilme şartına göre ise denklemin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} \bar{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = \underline{y}(t; \alpha) \\ \underline{y}'(t; \alpha) = \bar{f}(t, y(t; \alpha)) = \bar{y}(t; \alpha) \\ \underline{y}(0; \alpha) = 0.5 + 0.5\alpha \\ \bar{y}(0; \alpha) = 1.5 - 0.5\alpha \end{cases} \quad (5.16)$$

şeklinde olup, dolayısıyla (5.16)' in tam çözümleri

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t, \alpha) &= e^t - 0.5(1 - \alpha)e^{-t} \\ \bar{Y}(t, \alpha) &= e^t + 0.5(1 - \alpha)e^{-t} \end{aligned} \quad (5.17)$$

olarak bulunur.

(5.13) denkleminin yaklaşık çözümlerini her iki türev tanımına göre  $t \in [0, 1]$  ve  $N = 10$  alarak sırasıyla yamuk metodu, geometrik ortalama, logaritmik ortalama, harmonik ortalama ve ters harmonik ortalama formülleri ile hesaplayıp tam çözümler ile karşılaştıralım. Fuzzy diferansiyel denklemler için bahsedilen metotların ardışık tekrar formülleri aşağıda verilen şekilde uygulanacaktır:

Yamuk metodu (Y.M) ile yaklaşık çözümler,

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}^\alpha &= \underline{y}_n^\alpha + \frac{h}{2} [\underline{f}^\alpha(t_n, y_n) + \underline{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1})] \\ \bar{y}_{n+1}^\alpha &= \bar{y}_n^\alpha + \frac{h}{2} [\bar{f}^\alpha(t_n, y_n) + \bar{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1})] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Geometrik ortalama (G.O) ile yaklaşık çözümler;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}^\alpha &= \underline{y}_n^\alpha + h \sqrt{\underline{f}^\alpha(t_n, y_n) \underline{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1})} \\ \bar{y}_{n+1}^\alpha &= \bar{y}_n^\alpha + h \sqrt{\bar{f}^\alpha(t_n, y_n) \bar{f}^\alpha(t_{n+1}, y_{n+1})} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Logaritmik ortalama (L.O) ile yaklaşık çözümler,

$$\underline{y}_{n+1}^{\alpha} = \underline{y}_n^{\alpha} + h \left[ \frac{f^{\alpha}(t_{n+1}, y_{n+1}) - f^{\alpha}(t_n, y_n)}{\ln \left( \frac{f^{\alpha}(t_{n+1}, y_{n+1})}{f^{\alpha}(t_n, y_n)} \right)} \right] \quad (5.20)$$

$$\bar{y}_{n+1}^{\alpha} = \bar{y}_n^{\alpha} + h \left[ \frac{\bar{f}^{\alpha}(t_{n+1}, y_{n+1}) - \bar{f}^{\alpha}(t_n, y_n)}{\ln \left( \frac{\bar{f}^{\alpha}(t_{n+1}, y_{n+1})}{\bar{f}^{\alpha}(t_n, y_n)} \right)} \right]$$

Harmonik ortalama (H.O) ile yaklaşık çözümler,

$$\underline{y}_{n+1}^{\alpha} = \underline{y}_n^{\alpha} + 2h \left[ \frac{\underline{f}_n \underline{f}_{n+1}}{\underline{f}_n + \underline{f}_{n+1}} \right] \quad (5.21)$$

$$\bar{y}_{n+1}^{\alpha} = \bar{y}_n^{\alpha} + 2h \left[ \frac{\bar{f}_n \bar{f}_{n+1}}{\bar{f}_n + \bar{f}_{n+1}} \right]$$

Ters harmonik ortalama (T.H.O) ile yaklaşık çözümler,

$$\underline{y}_{n+1}^{\alpha} = \underline{y}_n^{\alpha} + h \left[ \frac{\underline{f}_n^2 + \underline{f}_{n+1}^2}{\underline{f}_n + \underline{f}_{n+1}} \right] \quad (5.22)$$

$$\bar{y}_{n+1}^{\alpha} = \bar{y}_n^{\alpha} + h \left[ \frac{\bar{f}_n^2 + \bar{f}_{n+1}^2}{\bar{f}_n + \bar{f}_{n+1}} \right]$$

verilen ardışık tekrar formülleri ile hesaplanır.

(5.13) denkleminin (i)-türevlenebilme şartına göre  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  yaklaşık çözümleri sırasıyla Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 de verilmiştir.

**Tablo 5.3.** (5.13) başlangıç değer probleminin (i)-türev şartına göre yaklaşık  $\underline{y}$  çözümleri

$\alpha$	Tam Ç.	Y.M $\underline{y}$	G.O $\underline{y}$	H.O $\underline{y}$	T.H.O $\underline{y}$	L.O $\underline{y}$
0	1.3591409142	1.3602757070	1.3585753593	1.3568876824	1.3637064133	1.3591409142
0.1	1.4950550056	1.4963032778	1.4944328953	1.4925764507	1.5000770546	1.4950550056
0.2	1.6309690970	1.6323308485	1.6302904312	1.6282652189	1.6364476959	1.6309690970
0.3	1.7668831884	1.7683584192	1.7661479671	1.7639539872	1.7728183373	1.7668831884
0.4	1.9027972799	1.9043859899	1.9020055031	1.8996427554	1.9091889786	1.9027972799
0.5	2.0387113713	2.0404135606	2.0378630390	2.0353315237	2.0455596199	2.0387113713
0.6	2.1746254627	2.1764411313	2.1737205749	2.1710202919	2.1819302613	2.1746254627
0.7	2.3105395541	2.3124687020	2.3095781109	2.3067090602	2.3183009026	2.3105395541
0.8	2.4464536456	2.4484962727	2.4454356468	2.4423978284	2.4546715439	2.4464536456
0.9	2.5823677370	2.5845238434	2.5812931827	2.5780865967	2.5910421853	2.5823677370
1	2.7182818284	2.7205514142	2.7171507187	2.7137753649	2.7274128266	2.7182818284

**Tablo 5.4.** (5.13) başlangıç değer probleminin (i)-türev şartına göre yaklaşık  $\bar{y}$  çözümleri

$\alpha$	Tam Ç. $\bar{Y}$	Y.M $\bar{y}$	G.O $\bar{y}$	H.O $\bar{y}$	T.H.O $\bar{y}$	L.O $\bar{y}$
0	4.0774227426	4.0808271212	4.0757260780	4.0706630474	4.0911192399	4.0774227426
0.1	3.9415086512	3.9447995505	3.9398685421	3.9349742791	3.9547485986	3.9415086512
0.2	3.8055945598	3.8087719798	3.8040110062	3.7992855109	3.8183779572	3.8055945598
0.3	3.6696804684	3.6727444091	3.6681534702	3.6635967426	3.6820073159	3.6696804684
0.4	3.5337663769	3.5367168384	3.5322959343	3.5279079744	3.5456366746	3.5337663769
0.5	3.3978522855	3.4006892677	3.3964383984	3.3922192061	3.4092660332	3.3978522855
0.6	3.2619381941	3.2646616970	3.2605808624	3.2565304379	3.2728953919	3.2619381941
0.7	3.1260241027	3.1286341263	3.1247233265	3.1208416696	3.1365247506	3.1260241027
0.8	2.9901100113	2.99260655561	2.9888657906	2.9851529014	3.0001541092	2.9901100113
0.9	2.8541959198	2.85657898490	2.8530082546	2.8494641331	2.8637834679	2.8541959198
1	2.7182818284	2.72055141419	2.7171507187	2.7137753649	2.7274128266	2.7182818284

**Tablo 5.5.** (5.13) başlangıç değeri probleminin (i)-türevlenebilirlik şartına göre bulunan  $\underline{y}$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

$\alpha$	Y.M $\underline{y}$	G.O $\underline{y}$	H.O $\underline{y}$	T.H.O $\underline{y}$
0	0.00113479	0.00056555	0.00225323	0.00456550
0.1	0.00124827	0.00062211	0.00247855	0.00502205
0.2	0.00136175	0.00067866	0.00270388	0.00547860
0.3	0.00147523	0.00073522	0.0029292	0.00593515
0.4	0.00158871	0.00079178	0.00315452	0.00639170
0.5	0.00170219	0.00084833	0.00337985	0.00684825
0.6	0.00181567	0.00090489	0.00360517	0.00730480
0.7	0.00192915	0.00096144	0.00383049	0.00776135
0.8	0.00204263	0.00101799	0.00405581	0.00821790
0.9	0.00215611	0.00107455	0.00428114	0.00867445
1	0.00226959	0.00113111	0.00450646	0.0091310

**Tablo 5.6.** (5.13) başlangıç değeri probleminin (i)-türevlenebilirlik şartı altında  $\bar{y}$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

$\alpha$	Y.M $\bar{y}$	G.O $\bar{y}$	H.O $\bar{y}$	T.H.O $\bar{y}$
0	0.00340437	0.00169666	0.00675969	0.01369649
0.1	0.00329089	0.00164011	0.00653437	0.01323994
0.2	0.00317742	0.00158355	0.00630905	0.01278339
0.3	0.00306394	0.00152699	0.00608373	0.01232684
0.4	0.00295046	0.00147044	0.0058584	0.01187029
0.5	0.00283698	0.00141388	0.00563308	0.01141374
0.6	0.00272350	0.00135733	0.00540775	0.01095719
0.7	0.00261002	0.00130077	0.00518243	0.01050064
0.8	0.00249654	0.00124422	0.00495711	0.01004409
0.9	0.00238307	0.00118766	0.00473179	0.00958754
1	0.00226958	0.00113111	0.00450646	0.00913099

Aynı yaklaşık metotlar ile (5.13) denkleminin (ii)-türevlenebilme tanımına göre sırasıyla  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümleri ise Tablo 5.7 ve Tablo 5.8 de gösterilmiştir.

**Tablo 5.7.** (5.13) başlangıç değer probleminin (ii)-türevlenebilme şartı kullanılarak bulunan  $\underline{y}$  çözümleri

$\alpha$	Tam Ç.	Y.M $\underline{y}$	G.O $\underline{y}$	H.O $\underline{y}$	T.H.O $\underline{y}$	L.O $\underline{y}$
0	2.5343421078	2.5367651430	2.5331627527	2.5295964766	2.5440306379	2.5343605969
0.1	2.5527360799	2.5551437701	2.5516578296	2.5482046332	2.5621766290	2.5528170023
0.2	2.5711300519	2.5735223972	2.5701257748	2.5667594422	2.5803765607	2.5712552860
0.3	2.5895240240	2.5919010243	2.5885698847	2.5852672352	2.5986240082	2.5896776535
0.4	2.6079179961	2.6102796514	2.6069925991	2.6037327236	2.6169141929	2.6080857368
0.5	2.6263119681	2.6286582786	2.6253957207	2.6221594013	2.6352435723	2.6264807412
0.6	2.6447059402	2.6470369057	2.6437805600	2.6405498158	2.6536095651	2.6448635428
0.7	2.6630999122	2.6654155328	2.6621480331	2.6589057508	2.6720103648	2.6632347540
0.8	2.6814938843	2.6837941599	2.6804987273	2.6772283502	2.6904448142	2.6815947674
0.9	2.6998878564	2.7021727870	2.6988329430	2.6955181979	2.7089123244	2.699943783
1	2.7182818284	2.7205514141	2.7171507187	2.7137753649	2.7274128266	2.718281828

**Tablo 5.8.** (5.13) başlangıç değer probleminin (ii)-türevlenebilme şartı kullanılarak bulunan  $\bar{y}$  çözümleri

$\alpha$	Tam Ç.	Y.M $\bar{y}$	G.O $\bar{y}$	H.O $\bar{y}$	T.H.O $\bar{y}$	L.O $\bar{y}$
0	2.9022215490	2.9043376853	2.8992230217	2.8941556947	2.9146332015	2.9009243331
0.1	2.8838275769	2.8859590582	2.8811370433	2.8763568903	2.8956689438	2.8827410581
0.2	2.8654336049	2.8675804311	2.8630149456	2.8584871765	2.8767765690	2.8645336515
0.3	2.8470396328	2.8492018040	2.8448617100	2.8405561395	2.8579463213	2.8463054469
0.4	2.8286456608	2.8308231769	2.8266811524	2.8225711631	2.8391706885	2.8280589966
0.5	2.8102516887	2.8124445497	2.8084762293	2.8045379924	2.8204438270	2.8097962777
0.6	2.7918577166	2.7940659226	2.7902492443	2.7864611185	2.8017611701	2.7915188302
0.7	2.7734637446	2.7756872955	2.7720019892	2.7683440444	2.7831191560	2.7732278519
0.8	2.7550697725	2.7573086684	2.7537358434	2.7501894714	2.7645150381	2.7549242645

0.9	2.7366758005	2.7389300413	2.7354518411	2.7319994293	2.7459467522	2.7366087594
1	2.7182818284	2.7205514141	2.7171507187	2.7137753649	2.7274128266	2.7182818284

**Tablo 5.9.** (5.13) başlangıç değeri probleminin (ii)-türevlenebilirlik şartı altında bulunan  $y$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

$\alpha$	Y.M $y$	G.O $y$	H.O $y$	T.H.O $y$	L.O $\bar{y}$
0	0.00242304	0.00117936	0.00474563	0.00968853	0.00001848
0.1	0.00240769	0.00107825	0.00453145	0.00944054	0.00008092
0.2	0.00239235	0.00100428	0.00437061	0.0092465	0.00012523
0.3	0.00237700	0.00095413	0.00425679	0.00909998	0.00015362
0.4	0.00236166	0.00092539	0.00418527	0.00899619	0.00016774
0.5	0.00234631	0.00091625	0.00415256	0.00893160	0.00016877
0.6	0.00233097	0.00092538	0.00415612	0.00890362	0.00015760
0.7	0.00231562	0.00095188	0.00419416	0.00891045	0.00013484
0.8	0.00230028	0.00099517	0.00426553	0.00895093	0.00010088
0.9	0.00228493	0.00105491	0.00436966	0.00902446	0.00005593
1	0.00226959	0.00113111	0.00450646	0.0091310	$3.9968 \times 10^{-15}$

**Tablo 5.10.** (5.13) başlangıç değeri probleminin (ii)-türevlenebilirlik şartı altında bulunan  $\bar{y}$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

$\alpha$	Y.M $\bar{y}$	G.O $\bar{y}$	H.O $\bar{y}$	T.H.O $\bar{y}$	L.O $\bar{y}$
0	0.00211613	0.00299853	0.00806585	0.01241165	0.00129722
0.1	0.00213148	0.00269053	0.00747067	0.01184137	0.00108652
0.2	0.00214682	0.00241866	0.00694643	0.01134296	0.00012523
0.3	0.00216217	0.00217792	0.00648349	0.01090669	0.00089995
0.4	0.00217752	0.00196451	0.00607449	0.01052503	0.00073419
0.5	0.00219286	0.00177546	0.00571369	0.01019214	0.00058666
0.6	0.00220821	0.00160847	0.00415612	0.00990345	0.00033889
0.7	0.00222355	0.00146176	0.00511970	0.00965541	0.00023589
0.8	0.00223889	0.00133393	0.00488030	0.00944527	0.00014551
0.9	0.00225424	0.00122396	0.00467637	0.00927095	0.00006704
1	0.00226959	0.00113111	0.00450646	0.0091310	$3.9968 \times 10^{-15}$

**Örnek 5.3.** (5.13) ile verilen birinci mertebeden fuzzy diferansiyel denkleminde  $\lambda = -1$  olarak denklemi yeniden inceleyip, sonuçları da beraberinde yorumlayalım. Bunun için

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t \in [0,1], \quad \lambda = -1 \\ y(0) &= [1 + 2\alpha, 4 - \alpha] \end{aligned} \quad (5.23)$$

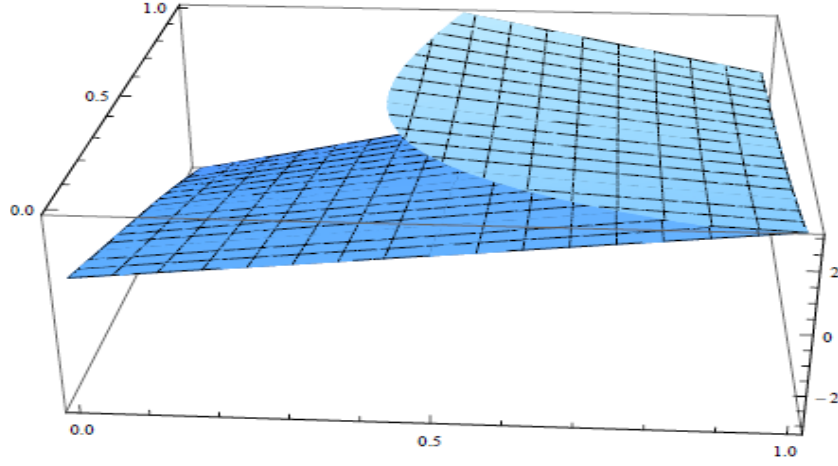
olmak üzere (i)-türevlenebilme şartına göre denklemin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} \underline{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = -\underline{y}(t; \alpha) \\ \overline{y}'(t; \alpha) = \overline{f}(t, y(t; \alpha)) = -\overline{y}(t; \alpha) \\ \underline{y}(0; \alpha) = 1 + 2\alpha \\ \overline{y}(0; \alpha) = 4 - \alpha \end{cases} \quad (5.24)$$

biçiminde olup, bunun tam çözümü

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t, \alpha) &= (\alpha - 1)1.5e^t + (2.5 + 0.5\alpha)e^{-t} \\ \overline{Y}(t, \alpha) &= (1 - \alpha)1.5e^t + (2.5 + 0.5\alpha)e^{-t} \end{aligned} \quad (5.25)$$

olarak bulunur. Ancak bu çözüm artan destek uzunluğuna sahip olduğundan fuzzy sayısı tanımı ile çelişir. Bulunan sonucun fuzzy sayısı olabilmesi için (5.25) denkleminde bulunan  $\underline{Y}(t, \alpha)$  'nin sol azalmayan sürekli bir fonksiyon ve  $\overline{Y}(t, \alpha)$  'nin de sağ artmayan fonksiyon olması gerekir. Bu nedenle (i)-türevlenebilme tanımı altında bir üçgen fuzzy sayısı çözümü yoktur. Böylece aşağıda verilen üç boyutlu uzaydaki sonuçlarının üçgen fuzzy sayısı olmadığı açık bir şekilde görülmektedir.



**Şekil 5.3.** (5.23) başlangıç değer probleminin (i)-türevlenebilme şartı altında bulunan tam çözümün grafiksel gösterimi

Diğer yandan (ii)-türevlenebilme şartına göre parametrik gösterimi

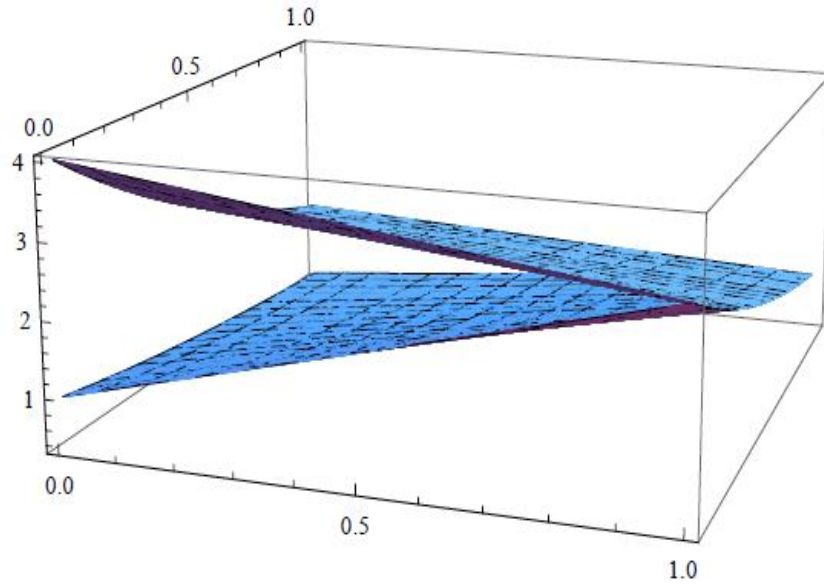
$$\begin{cases} \bar{y}'(t; \alpha) = \underline{f}(t, y(t; \alpha)) = -\bar{y}(t; \alpha) \\ \underline{y}'(t; \alpha) = \bar{f}(t, y(t; \alpha)) = -\underline{y}(t; \alpha) \\ \underline{y}(0; \alpha) = 1 + 2\alpha \\ \bar{y}(0; \alpha) = 4 - \alpha \end{cases} \quad (5.26)$$

biçiminde olup, bunun tam çözümü ise

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t, \alpha) &= (1 + 2\alpha) e^{-t} \\ \bar{Y}(t, \alpha) &= (4 - \alpha) e^{-t} \end{aligned} \quad (5.27)$$

şeklindedir. Bunun yanında tam çözümlerin  $\alpha$  -kesitleri için oluşturulan üçgen fuzzy sonuçlarının ise üç boyutlu uzaydaki görünümü





**Şekil 5.4.** (5.23) başlangıç değer probleminin (ii)-türevlenebilme şartı altında bulunan tam çözümün grafiksel gösterimi

şeklindedir. Buradan da (5.26) denkleminin yaklaşık çözümleri hesaplanmış ve sonuçlar aşağıda Tablo 5.11 ve Tablo 5.12 ile verilmiştir.

**Tablo 5.11.** (ii)-türevlenebilme şartı altında bulunan  $\underline{y}$  çözümleri

$\alpha$	Tam Ç.	Y.M $\underline{y}$	G.O $\underline{y}$	H.O $\underline{y}$	T.H.O $\underline{y}$	L.O $\underline{y}$
0	0.3678794411	0.3675725423	0.3680325839	0.3684903374	0.3666478320	0.3678794411
0.1	0.4414553294	0.4410870508	0.4416391007	0.4421884044	0.4399773984	0.4414553294
0.2	0.5150312176	0.5146015593	0.5152456175	0.5158864728	0.5133069648	0.5150312176
0.3	0.5886071058	0.5881160678	0.5888521343	0.5895845399	0.5866365312	0.5886071058
0.4	0.6621829941	0.6616305762	0.6624586511	0.6632826074	0.6599660976	0.6621829941
0.5	0.7357588824	0.7351450847	0.7360651679	0.7369806749	0.7332956641	0.7357588824
0.6	0.8093347705	0.8086595932	0.8096716845	0.8106787423	0.8066252305	0.8093347705
0.7	0.8829106588	0.8821741017	0.8832782014	0.8843768098	0.8799547969	0.8829106588
0.8	0.9564865470	0.9556886101	0.9568847182	0.9580895123	0.9532843633	0.9564865470
0.9	1.0300624352	1.0292031186	1.0304912350	1.0317729448	1.0266139297	1.0300624352
1	1.1036383235	1.1027176271	1.1040977518	1.1054710123	1.0999434961	1.1036383235

**Tablo 5.12.** (ii)-türevlenebilme şartı altında bulunan  $\bar{y}$  çözümleri

$\alpha$	Tam Ç.	Y.M $\bar{y}$	G.O $\bar{y}$	H.O $\bar{y}$	T.H.O $\bar{y}$	L.O $\bar{y}$
0	1.4715177646	1.4702901695	1.4721303358	1.4739613498	1.4665913282	1.4715177646
0.1	1.4347298205	1.43353291529	1.4353270774	1.4371123160	1.4299265450	1.4347298205
0.2	1.3979418764	1.3967756610	1.3985238190	1.4002632823	1.3932617618	1.3979418764
0.3	1.3611539323	1.36001840681	1.3617205606	1.3634142485	1.3565969785	1.3611539323
0.4	1.3243659882	1.3232611525	1.3249173022	1.3265652148	1.3199321953	1.3243659882
0.5	1.2875780441	1.2865038983	1.2881140438	1.2897161814	1.2832674121	1.2875780441
0.6	1.2507900999	1.24974664410	1.2513107854	1.2528671473	1.2466026289	1.2507900999
0.7	1.2140021558	1.2129893898	1.2145075270	1.2160181135	1.2099378457	1.2140021558
0.8	1.1772142117	1.1762321356	1.17770426864	1.1791690798	1.1732730625	1.1772142117
0.9	1.1404262676	1.13947488138	1.1409010102	1.1423200461	1.1366082793	1.1404262676
1	1.1036383235	1.1027176271	1.10409775185	1.1054710123	1.0999434961	1.1036383235

**Tablo 5.13.** (ii)-türevlenebilme şartı altında bulunan  $\underline{y}$  çözümlerin mutlak hata tablosu

$\alpha$	Y.M $\underline{y}$	G.O $\underline{y}$	H.O $\underline{y}$	T.H.O $\underline{y}$	L.O $\underline{y}$
0	0.00030689	0.00015314	0.00061089	0.00123161	0
0.1	0.00036827	0.00018377	0.00073307	0.00147793	$5.55112 \times 10^{-17}$
0.2	0.00042965	0.00021439	0.00085525	0.00172425	$1.11022 \times 10^{-16}$
0.3	0.00049103	0.00024503	0.00097743	0.00197057	$1.11022 \times 10^{-16}$
0.4	0.00055241	0.00027566	0.00109961	0.00221689	$2.22045 \times 10^{-16}$
0.5	0.00061379	0.00030629	0.00122179	0.00246322	$1.11022 \times 10^{-16}$
0.6	0.00067517	0.00033691	0.00134397	0.00270954	$4.44089 \times 10^{-16}$
0.7	0.00073655	0.00036754	0.00146615	0.00295586	$2.22045 \times 10^{-16}$
0.8	0.000797936	0.00039817	0.00160296	0.00320218	$4.44089 \times 10^{-16}$
0.9	0.00085931	0.00042879	0.00171051	0.00344851	0
1	0.00092069	0.00045943	0.00183268	0.00369483	0

**Tablo 5.14.** (ii)-türevlenebilme şartı altında bulunan  $\bar{y}$  çözümlerin mutlak hata tablosu

$\alpha$	$\frac{Y.M}{\bar{y}}$	$\frac{G.O}{\bar{y}}$	$\frac{H.O}{\bar{y}}$	$\frac{T.H.O}{\bar{y}}$	$\frac{L.O}{\bar{y}}$
0	0.00122759	0.00061257	0.00244358	0.00492644	$2.22045 \times 10^{-16}$
0.1	0.00119691	0.00059726	0.00238249	0.00480327	0
0.2	0.00116621	0.00058194	0.0023214	0.00468011	0
0.3	0.00113552	0.00056663	0.00226032	0.00455695	$6.66134 \times 10^{-16}$
0.4	0.00110483	0.00055131	0.00219922	0.00443379	$4.44089 \times 10^{-16}$
0.5	0.00107414	0.00053599	0.00213814	0.00431063	0
0.6	0.00104345	0.00052069	0.00207705	0.00418747	$2.22045 \times 10^{-16}$
0.7	0.001012766	0.00050537	0.00201596	0.00406431	$8.88178 \times 10^{-16}$
0.8	0.00098207	0.00049006	0.00195487	0.00394114	$2.22045 \times 10^{-16}$
0.9	0.00095138	0.00047474	0.00189378	0.00381798	$4.44089 \times 10^{-16}$
1	0.00092069	0.00045943	0.00183269	0.00369482	0

Şimdiye kadar incelenen örneklerde yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu uygulanarak elde edilen sonuçların tam çözüme daha iyi bir şekilde yaklaştığını göstermektedir. Bundan sonraki örneklerde ise bu iki metodun lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklemlere uygulanışı gösterilmiş ve elde edilen sonuçlar tablolar ve şekiller ile temsil edilmiştir.

**Örnek 5.4.**  $y(t)$  bir fuzzy fonksiyonu olmak üzere lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklem, fuzzy başlangıç şartı ile birlikte aşağıda gösterildiği gibi ele alınsın;

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \quad y'(t) = \underbrace{y^2(t) + 1}_{f(t, y(t))}, \quad (5.28)$$

$$y(0) = [0.96 + 0.04\alpha, 1.01 - 0.01\alpha], \quad t \in [0, 0.1]$$

- (i)-türev tanımına göre  $y(t) > 0$  alındığında (5.28) başlangıç değer problemi parametrik şekilde;

$$y[t; \alpha] = [\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left[ \underline{y}'(t; \alpha), \bar{y}'(t; \alpha) \right] &= 1 + \left[ \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \right] \left[ \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \right] \\ \underline{y}'(t; \alpha) &= 1 + \min \left[ \left\{ \underline{y}(t; \alpha) \underline{y}(t; \alpha), \underline{y}(t; \alpha) \bar{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \bar{y}(t; \alpha) \right\} \right] \\ \bar{y}'(t; \alpha) &= 1 + \max \left[ \left\{ \underline{y}(t; \alpha) \underline{y}(t; \alpha), \underline{y}(t; \alpha) \bar{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \bar{y}(t; \alpha) \right\} \right] \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir ve sonuçta bunun

$$\underline{y}'(t; \alpha) = \underline{y}^2(t; \alpha) + 1 \quad (5.29)$$

$$\bar{y}'(t; \alpha) = \bar{y}^2(t; \alpha) + 1$$

denklemlerine dönüştüğü görülür. Böylece (5.29) sisteminin tam çözümleri

$$\underline{Y}(t, \alpha) = \tan[t + \arctan(0.96 + 0.04\alpha)] \quad (5.30)$$

$$\bar{Y}(t, \alpha) = \tan[t + \arctan(1.01 - 0.01\alpha)]$$

olarak bulunur.

- (ii)-türev tanımına göre  $y(t) > 0$  olmak üzere (5.27) sistemi için parametrik şekilde benzer işlemler uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \left[ \bar{y}'(t; \alpha), \underline{y}'(t; \alpha) \right] &= 1 + \left[ \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \right] \left[ \underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha) \right] \\ \bar{y}'(t; \alpha) &= \underline{y}^2(t; \alpha) + 1 \\ \underline{y}'(t; \alpha) &= \bar{y}^2(t; \alpha) + 1 \end{aligned} \quad (5.31)$$

lineer olmayan denklem sistemi elde edilir ve sonuçta (5.31) sistemlerinin tam çözümü bulunamaz.

Diğer yandan, (i)-türev tanımına göre  $N = 10$  için yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu kullanılarak yaklaşık çözümler,  $h = 0.01$  adım aralığında elde edilmiş ve bulunan bu sonuçlar ile birlikte bunlara ait hata analizleri aşağıda Tablo 5.15 ve Tablo 5.16 ile gösterilmiştir.

**Tablo 5.15.** (5.28) başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre  $\underline{y}$  çözümleri ve mutlak hata tablosu

$\alpha$	Tam Çözümler $\underline{y}$	Y.M $\underline{y}$	L.O $\underline{y}$	Hata ( Y.M) $\underline{y}$	Hata ( L.O) $\underline{y}$
0	1.1733535987	1.1733710335	1.1733620508	$1.7434 \times 10^{-5}$	$8.4522 \times 10^{-6}$
0.1	1.1783032546	1.1783208882	1.1783117859	$1.7634 \times 10^{-5}$	$8.5314 \times 10^{-6}$
0.2	1.1832573108	1.1832751454	1.1832659221	$1.7835 \times 10^{-5}$	$8.6113 \times 10^{-6}$
0.3	1.18821577335	1.1882338109	1.1882244654	$1.8038 \times 10^{-5}$	$8.6921 \times 10^{-6}$
0.4	1.19317864794	1.1931968906	1.1931874214	$1.8243 \times 10^{-5}$	$8.7736 \times 10^{-6}$
0.5	1.19814594053	1.1981643904	1.1981547963	$1.8450 \times 10^{-5}$	$8.8558 \times 10^{-6}$
0.6	1.20311765703	1.2031363163	1.2031265959	$1.8659 \times 10^{-5}$	$8.9389 \times 10^{-6}$
0.7	1.20809380334	1.2081126742	1.2081028260	$1.8871 \times 10^{-5}$	$9.0227 \times 10^{-6}$
0.8	1.21307438539	1.2130934700	1.2130834927	$1.9085 \times 10^{-5}$	$9.1074 \times 10^{-6}$
0.9	1.21805940911	1.2180787097	1.2180686019	$1.9301 \times 10^{-5}$	$9.1928 \times 10^{-6}$
1	1.22304888044	1.2230683992	1.2230581594	$1.9519 \times 10^{-5}$	$9.2791 \times 10^{-6}$

**Tablo 5.16.** (5.28) başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre  $\bar{y}$  çözümleri ve mutlak hata tablosu

$\alpha$	Tam Çözümler $\bar{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\bar{y}$	Hata ( Y.M) $\bar{y}$	Hata ( L.O) $\bar{y}$
0	1.2355420562	1.2355621302	1.2355515544	$2.0074 \times 10^{-5}$	$9.4982 \times 10^{-6}$
0.1	1.2342914834	1.2343115013	1.2343009594	$2.0018 \times 10^{-5}$	$9.4761 \times 10^{-6}$
0.2	1.2330411897	1.2330611516	1.2330506437	$1.9962 \times 10^{-5}$	$9.4540 \times 10^{-6}$
0.3	1.2317911752	1.2318110812	1.2318006072	$1.9906 \times 10^{-5}$	$9.4319 \times 10^{-6}$
0.4	1.2305414397	1.2305612900	1.2305508497	$1.9850 \times 10^{-5}$	$9.4099 \times 10^{-6}$
0.5	1.2292919831	1.2293117777	1.2293013711	$1.9795 \times 10^{-5}$	$9.3880 \times 10^{-6}$
0.6	1.2280428053	1.2280625445	1.2280521714	$1.9739 \times 10^{-5}$	$9.3661 \times 10^{-6}$
0.7	1.2267939062	1.2268135901	1.2268032505	$1.9684 \times 10^{-5}$	$9.3443 \times 10^{-6}$
0.8	1.2255452858	1.2255649145	1.2255546083	$1.9629 \times 10^{-5}$	$9.3225 \times 10^{-6}$
0.9	1.2242969439	1.2243165175	1.2243062446	$1.9574 \times 10^{-5}$	$9.3007 \times 10^{-6}$
1	1.2230488804	1.2230683992	1.2230581594	$1.9519 \times 10^{-5}$	$9.2791 \times 10^{-6}$

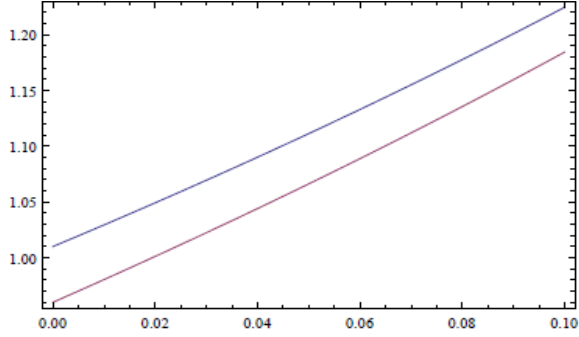
**Tablo 5.17.** (5.28) başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu ile  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümleri

$\alpha$	Yaklaşık Tam Ç. $\underline{y}$	Yaklaşık Tam Ç. $\bar{y}$	Y.M $\underline{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\underline{y}$	L.O $\bar{y}$
0	1.1843187234	1.2245191834	1.1843668501	1.2250320654	1.1843277608	1.2245280714
0.1	1.1881897572	1.2243581281	1.1882350476	1.2248222365	1.18819881814	1.2243670522
0.2	1.1920612327	1.2242001885	1.1921036811	1.2246153984	1.1920703170	1.2242091493
0.3	1.1959331493	1.2240453652	1.1959727503	1.2244115515	1.1959422571	1.2240543632
0.4	1.1998055067	1.2238936584	1.1998422548	1.2242106959	1.1998146381	1.2239026942
0.5	1.2036783045	1.2237450686	1.2036973559	1.2237642331	1.2036874595	1.2237541426
0.6	1.2075515424	1.2235995961	1.2075825679	1.2238179607	1.2075607209	1.2236087089
0.7	1.2114252199	1.2234572412	1.2114533757	1.2236260808	1.2114344221	1.2234663935
0.8	1.2152993366	1.2233180043	1.2153246171	1.2234371938	1.2153085625	1.2233271963
0.9	1.2191738922	1.2231818859	1.2191962917	1.2232512994	1.2191831417	1.2231911182
1	1.2230488862	1.2230488862	1.2230683992	1.2230683992	1.2231394714	1.2231394713

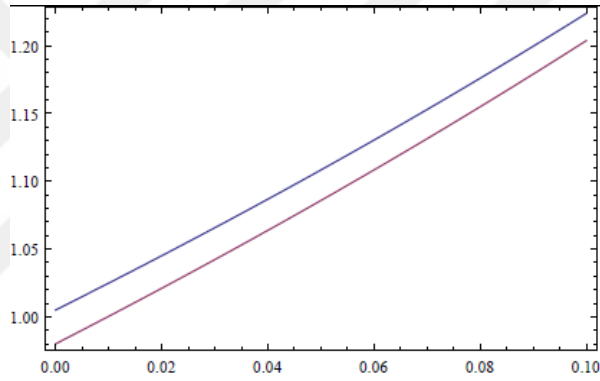
**Tablo 5.18.** (5.28) denkleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu için  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

$\alpha$	Y.M $\underline{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\underline{y}$	L.O $\bar{y}$
0	$4.8126 \times 10^{-5}$	$5.1288 \times 10^{-4}$	$9.0373 \times 10^{-6}$	$8.8880 \times 10^{-6}$
0.1	$4.5291 \times 10^{-5}$	$4.6411 \times 10^{-4}$	$9.0608 \times 10^{-6}$	$8.9241 \times 10^{-6}$
0.2	$4.2449 \times 10^{-5}$	$4.1521 \times 10^{-4}$	$9.0843 \times 10^{-6}$	$8.9608 \times 10^{-6}$
0.3	$3.9601 \times 10^{-5}$	$3.6619 \times 10^{-4}$	$9.1078 \times 10^{-6}$	$8.9980 \times 10^{-6}$
0.4	$3.6748 \times 10^{-5}$	$3.1704 \times 10^{-4}$	$9.1313 \times 10^{-6}$	$9.0357 \times 10^{-6}$
0.5	$1.9052 \times 10^{-5}$	$1.9164 \times 10^{-5}$	$9.1549 \times 10^{-6}$	$9.0739 \times 10^{-6}$
0.6	$3.1026 \times 10^{-5}$	$2.1836 \times 10^{-4}$	$9.1784 \times 10^{-6}$	$9.1128 \times 10^{-6}$
0.7	$1.8871 \times 10^{-5}$	$2.1836 \times 10^{-4}$	$9.2021 \times 10^{-6}$	$9.1521 \times 10^{-6}$
0.8	$2.8155 \times 10^{-5}$	$1.1918 \times 10^{-4}$	$9.2258 \times 10^{-6}$	$9.1921 \times 10^{-6}$
0.9	$2.2396 \times 10^{-5}$	$6.9414 \times 10^{-5}$	$9.2494 \times 10^{-6}$	$9.2322 \times 10^{-6}$
1	$1.9513 \times 10^{-5}$	$1.9513 \times 10^{-5}$	$9.2791 \times 10^{-6}$	$9.2791 \times 10^{-6}$

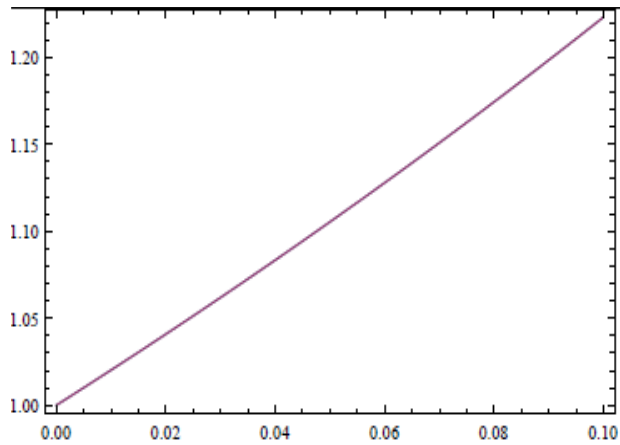
(ii)-türevi ile elde edilen denklem sisteminden analitik çözüm elde edilemeyeceğinden dolayı sadece çözümler nümerik olarak hesaplanır. Böylece farklı  $\alpha$  değerleri için fuzzy klasik çözümleri aşağıdaki grafiklerle gösterilmiştir.



Şekil 5.5.  $\alpha = 0$  için fuzzy çözüm



Şekil 5.6.  $\alpha = 0.5$  için fuzzy çözüm



Şekil 5.7.  $\alpha = 1$  için fuzzy (normal) çözüm

Şimdi de ele alınan örnekte lineer olmayan Riccati diferansiyel denkleminin başlangıç şartını fuzzy sayısı olarak alarak çözümün davranışını incelemeye çalışalım. Diğer yandan fuzzy Riccati diferansiyel denklemi genelleştirilmiş türev tanımları kullanılarak nümerik olarak çözülecek ve elde edilen sonuçlar tam çözüm ile karşılaştırılacaktır. Birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem olan Riccati diferansiyel denklemi fizik, mekanik ve uygulamalı matematiğin diğer dallarında önemli uygulama alanlarına sahiptir. Literatürde bu denklemin nümerik çözümlerini bulmak için pek çok metot uygulanmıştır. Örneğin homotopi pertürbasyon metodu, homotopi analiz metodu, Adomian ayrışma metodu vb. [42, 43, 45] . Ancak fuzzy Riccati diferansiyel denklemini çözmek için sadece birkaç sayısal yöntem uygulanmıştır [41, 44, 46]. Gerçek hayattaki uygulamalarda diferansiyel denklemlerdeki değişkenler ve katsayılar her zaman sabit değildir. Bu değişkenler ve katsayılar ya bir deney ya da tecrübe ile elde edilebilir. Bu nedenle, katsayılar veya değişkenler ya aralıklarda ele alınır ya da fuzzy değeri olarak kullanılabilir. Fuzzy Riccati diferansiyel denklemi genel formda

$$y'(t) = p(t) + q(t)y(t) + r(t)y^2(t) \quad (5.32)$$

biçiminde gösterilir. Burada  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$  fuzzy fonksiyonları ve  $y(0) = y_0$  fuzzy başlangıç değeridir. (5.32) denklemindeki  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$  fonksiyonları crisp (kesin) fonksiyonlar olduğunda ortaya aşağıdaki durumlar çıkar:

### Durum 1.

- (a) (i)-türevlenebilme tanımını kullanarak  $q(t)$  ve  $r(t)$ ' nin pozitif olması durumunda:

$$\underline{y}'(t) = p(t) + q(t)\underline{y}(t) + r(t)\underline{y}^2(t)$$

$$\bar{y}'(t) = p(t) + q(t)\bar{y}(t) + r(t)\bar{y}^2(t)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0, \bar{y}(0) = \bar{y}_0$$

olarak ifade edilir.



(b) (i)-türevlenebilme koşuluna göre  $q(t)$  ve  $r(t)$ ' nin negatif olması durumunda ise

$$\underline{y}'(t) = p(t) + q(t)\bar{y}(t) + r(t)\bar{y}^2(t)$$

$$\bar{y}'(t) = p(t) + q(t)\underline{y}(t) + r(t)\underline{y}^2(t)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0, \bar{y}(0) = \bar{y}_0$$

biçiminde gösterilir.

## Durum 2.

(a) (ii)-türevlenebilme koşulu kullanıldığında  $q(t)$  ve  $r(t)$ ' nin pozitif olması durumunda:

$$\underline{y}'(t) = p(t) + q(t)\bar{y}(t) + r(t)\bar{y}^2(t)$$

$$\bar{y}'(t) = p(t) + q(t)\underline{y}(t) + r(t)\underline{y}^2(t)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0, \bar{y}(0) = \bar{y}_0$$

olduğu görülür.

(b) (ii)-türevlenebilme tanımına göre  $q(t)$  ve  $r(t)$ ' nin negatif olması durumunda ise

$$\bar{y}'(t) = p(t) + q(t)\bar{y}(t) + r(t)\bar{y}^2(t)$$

$$\underline{y}'(t) = p(t) + q(t)\bar{y}(t) + r(t)\bar{y}^2(t)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0, \bar{y}(0) = \bar{y}_0$$

şeklindedir.

**Örnek 5.5.**  $y(t) > 0$  fuzzy fonksiyonu olmak üzere fuzzy Riccati diferansiyel denklemini üçgen fuzzy sayısı başlangıç şartı ile birlikte

$$y'(t) = 1 + 2y(t) - y^2(t)$$

$$y(0) = (-1, 0, 1), \quad t \in [0, 0.08] \quad (5.33)$$

biçiminde ele alınsın. Bu durumda her iki türev tanımını altında elde edilen sonuçlar aşağıda gösterildiği gibi tek tek incelenir.

- (i)-türev tanımına göre  $y(t) > 0$  olmak üzere (5.33) denklemi parametrik şekilde,

$$y[t; \alpha] = [\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$$

biçiminde gösterilir ve böylece

$$[\underline{y}'(t; \alpha), \bar{y}'(t; \alpha)] = 1 + 2[\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)] - [\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)][\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)]$$

$$\underline{y}'(t; \alpha) = 1 + 2\underline{y}(t; \alpha) - \max\left\{\underline{y}(t; \alpha)\underline{y}(t; \alpha), \underline{y}(t; \alpha)\bar{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)\bar{y}(t; \alpha)\right\}$$

$$\bar{y}'(t; \alpha) = 1 + 2\bar{y}(t; \alpha) - \max\left\{\underline{y}(t; \alpha)\underline{y}(t; \alpha), \underline{y}(t; \alpha)\bar{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)\underline{y}(t; \alpha), \bar{y}(t; \alpha)\bar{y}(t; \alpha)\right\}$$

olarak ifade edilir. Buradan da

$$\underline{y}'(t; \alpha) = 1 + 2\underline{y}(t; \alpha) - \bar{y}^2(t; \alpha)$$

$$\bar{y}'(t; \alpha) = 1 + 2\bar{y}(t; \alpha) - \underline{y}^2(t; \alpha) \quad (5.34)$$

şeklinde lineer olmayan denklem sistemi bulunur.

- (ii)-türev tanımına göre  $y(t) > 0$  olmak üzere (5.33) denklemi parametrik şekilde yazılır ve yukarıdaki işlemlere benzer adımlar uygulanırsa,

$$\bar{y}'(t; \alpha) = 1 + 2\underline{y}(t; \alpha) - \bar{y}^2(t; \alpha)$$

$$\underline{y}'(t; \alpha) = 1 + 2\bar{y}(t; \alpha) - \underline{y}^2(t; \alpha) \quad (5.35)$$

biçiminde lineer olmayan denklem sistemi elde edilir.

Her iki türev tanımına göre sonuçta elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin analitik çözümleri mevcut olmadığından dolayı sadece yaklaşık

çözümler bulunur ve bu çözümler de uygulanan diğer nümerik metotlarla elde edilen çözümler ile karşılaştırılır. Burada nümerik çözümler bulunurken  $N=8$  alınır ve  $h=0.01$  için hesaplar ise ayrı ayrı yapılır.

**Tablo 5.19.** (5.33) başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu ile  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümleri

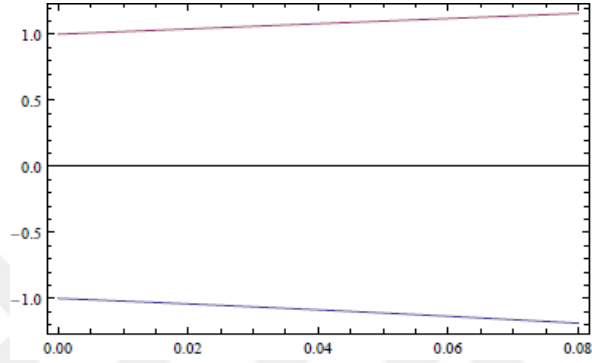
$\alpha$	Yaklaşık T.Ç $\underline{y}$	Yaklaşık T.Ç $\bar{y}$	Y.M $\underline{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\underline{y}$	L.O $\bar{y}$
0	-1.1876240585	1.1575912642	-1.1876386909	1.1575661438	-1.1876141693	1.1575676602
0.1	-1.0526109024	1.0610967799	-1.0526271531	1.0610797356	-1.0526147199	1.0612798203
0.2	-0.9191357723	0.9621168415	-0.9191523841	0.9621065394	-0.9191316138	0.9621071365
0.3	-0.7872552443	0.8606977459	-0.7872711628	0.8606928609	-0.787252394	0.8606918825
0.4	-0.6570257374	0.7568867883	-0.6570401147	0.7568860255	-0.6570230749	0.7568834826
0.5	-0.5285034516	0.6507322198	-0.5285156483	0.6507343374	-0.5284986306	0.6507305859
0.6	-0.4017443089	0.5422832052	-0.4017538932	0.5422870361	-0.4017475436	0.5422811237
0.7	-0.2768038936	0.4315897793	-0.2768106380	0.4315942506	-0.2768115589	0.4315889931
0.8	-0.1537373936	0.3187028004	-0.1537412702	0.3187069527	-0.1537413731	0.3187020545
0.9	-0.0325995474	0.2036738938	-0.0326007158	0.203676907	-0.0326021031	0.203672826
1	0.0865554377	0.0865554377	0.0865566193	0.0865566193	-----	-----

**Tablo 5.20.** (5.33) başlangıç değer probleminin (i)-türev tanımına göre yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu için  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

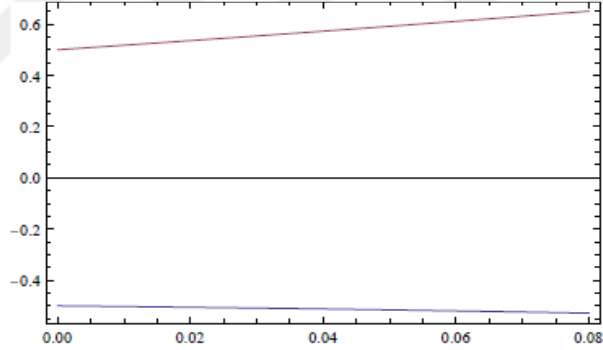
$\alpha$	Y.M $\underline{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\underline{y}$	L.O $\bar{y}$
0	$3.8612 \times 10^{-6}$	$2.5120 \times 10^{-5}$	$9.8892 \times 10^{-6}$	$2.3604 \times 10^{-5}$
0.1	$1.6251 \times 10^{-5}$	$1.7044 \times 10^{-5}$	$9.0608 \times 10^{-6}$	$8.9241 \times 10^{-6}$
0.2	$1.6612 \times 10^{-5}$	$1.0302 \times 10^{-4}$	$9.08432 \times 10^{-6}$	$8.9608 \times 10^{-6}$
0.3	$1.5918 \times 10^{-5}$	$4.885 \times 10^{-6}$	$9.10783 \times 10^{-6}$	$8.9980 \times 10^{-6}$
0.4	$1.4377 \times 10^{-5}$	$7.628 \times 10^{-7}$	$9.13135 \times 10^{-6}$	$9.0357 \times 10^{-6}$
0.5	$1.2197 \times 10^{-5}$	$2.1176 \times 10^{-6}$	$9.15491 \times 10^{-6}$	$9.0739 \times 10^{-6}$
0.6	$9.5843 \times 10^{-6}$	$3.8309 \times 10^{-6}$	$9.17845 \times 10^{-6}$	$9.1128 \times 10^{-6}$

0.7	$6.7444 \times 10^{-6}$	$4.4713 \times 10^{-6}$	$9.20217 \times 10^{-6}$	$9.15213 \times 10^{-6}$
0.8	$3.8766 \times 10^{-6}$	$4.1523 \times 10^{-6}$	$9.2245 \times 10^{-6}$	$9.1947 \times 10^{-6}$
0.9	$1.1684 \times 10^{-6}$	$3.0132 \times 10^{-6}$	$9.24949 \times 10^{-6}$	$9.23227 \times 10^{-6}$
1	$1.1816 \times 10^{-6}$	$1.1816 \times 10^{-6}$	-----	-----

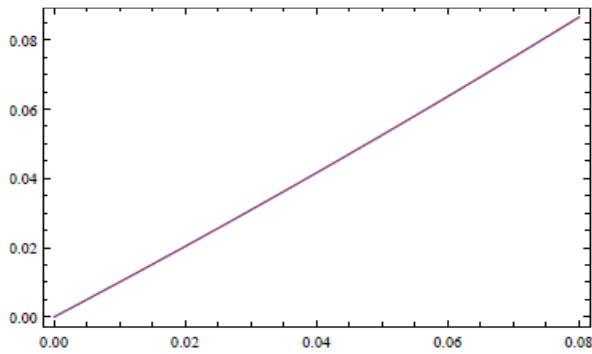
(i)-türevi ile elde edilen denklem sistemi analitik olarak çözülemeyeceğinden dolayı sadece bu sistemin nümerik çözümleri elde edilmiş ve bunlara ilişkin grafikler ise aşağıda ayrı ayrı gösterilmiştir:



Şekil 5.8.  $\alpha = 0$  için fuzzy çözüm



Şekil 5.9.  $\alpha = 0.5$  için fuzzy çözüm



Şekil 5.10.  $\alpha = 1$  için fuzzy (normal) çözüm

Aynı işlemler (ii)-türev metoduna göre tekrar incelenmiş ve bunlara ait sonuçlar ise aşağıda verilmiştir:

**Tablo 5.21.** (5.33) başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu ile  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümleri

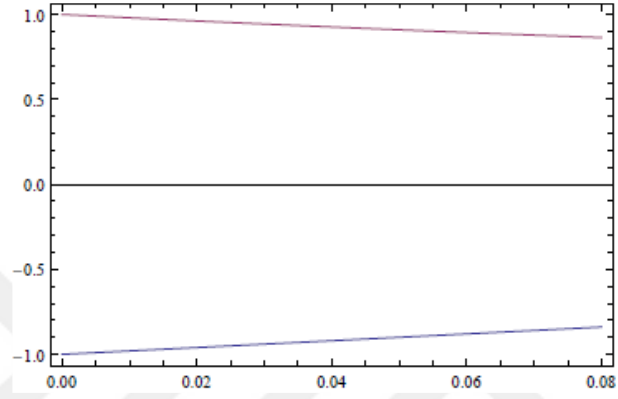
$\alpha$	Yaklaşık T.Ç $\underline{y}$	Yaklaşık T.Ç $\bar{y}$	Y.M $\underline{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\underline{y}$	L.O $\bar{y}$
0	-0.839368925	0.86379676	-0.8393650638	0.8637855569	-0.8393634572	0.863804493
0.1	-0.7391313895	0.79194115	-0.7391282074	0.7919332283	-0.7391267706	0.7919517724
0.2	-0.6406960417	0.718847412	-0.6406934697	0.7188421177	-0.6406921555	0.7188612747
0.3	-0.5440218471	0.6444922138	-0.5440197867	0.6444889744	-0.5440203016	0.6444640816
0.4	-0.4490691505	0.5688514486	-0.4490674866	0.5688497683	-0.4490657681	0.5688810861
0.5	-0.3557996119	0.4919002017	-0.3557982356	0.4918996649	-0.3557923072	0.4919718053
0.6	-0.2641761879	0.4136127499	-0.264174986	0.4136129978	-0.2641815365	0.4135602745
0.7	-0.174163054	0.3339624915	-0.1741619271	0.3339632404	-0.174164174	0.3339501599
0.8	-0.0857255615	0.2529219436	-0.0857244387	0.2529229759	-0.0857264047	0.2529163332
0.9	0.0011697991	0.1704627086	0.0011709532	0.1704638664	0.0011687414	0.1704597662
1	0.0865554377	0.0865554377	0.0865566193	0.0865566193	-----	-----

**Tablo 5.22.** (5.33) başlangıç değer probleminin (ii)-türev tanımına göre yamuk metodu ve logaritmik ortalama metodu için  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  çözümlerinin mutlak hata tablosu

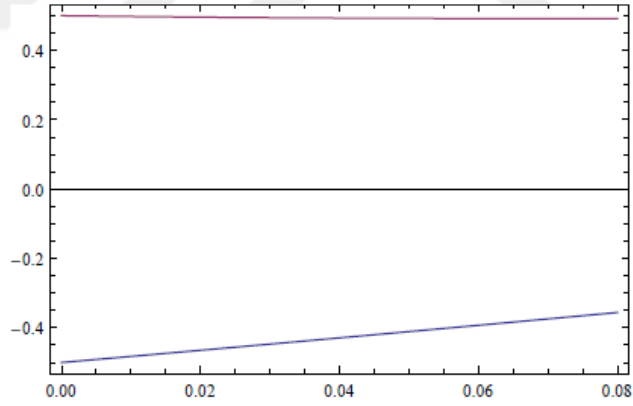
$\alpha$	Y.M $\underline{y}$	Y.M $\bar{y}$	L.O $\underline{y}$	L.O $\bar{y}$
0	$3.8612 \times 10^{-6}$	$1.1120 \times 10^{-5}$	$5.4678 \times 10^{-6}$	$7.733 \times 10^{-6}$
0.1	$3.1821 \times 10^{-6}$	$7.9217 \times 10^{-6}$	$4.6189 \times 10^{-6}$	$1.0622 \times 10^{-5}$
0.2	$2.572 \times 10^{-6}$	$5.2943 \times 10^{-6}$	$3.8862 \times 10^{-6}$	$1.3862 \times 10^{-5}$
0.3	$2.0604 \times 10^{-6}$	$3.2394 \times 10^{-6}$	$1.5455 \times 10^{-6}$	$2.8132 \times 10^{-5}$
0.4	$1.6639 \times 10^{-6}$	$1.6803 \times 10^{-6}$	$3.3824 \times 10^{-6}$	$2.9637 \times 10^{-5}$
0.5	$1.3763 \times 10^{-6}$	$5.368 \times 10^{-7}$	$7.3047 \times 10^{-6}$	$7.1603 \times 10^{-5}$
0.6	$1.2019 \times 10^{-6}$	$2.479 \times 10^{-7}$	$5.3486 \times 10^{-6}$	$5.2475 \times 10^{-5}$
0.7	$1.1269 \times 10^{-6}$	$7.489 \times 10^{-7}$	$1.12 \times 10^{-6}$	$1.2331 \times 10^{-5}$

0.8	$1.1228 \times 10^{-6}$	$1.0323 \times 10^{-6}$	$8.432 \times 10^{-7}$	$5.6104 \times 10^{-5}$
0.9	$1.1541 \times 10^{-6}$	$1.1578 \times 10^{-6}$	$1.0577 \times 10^{-6}$	$2.9424 \times 10^{-5}$
1	$1.1816 \times 10^{-6}$	$1.1816 \times 10^{-6}$	-----	-----

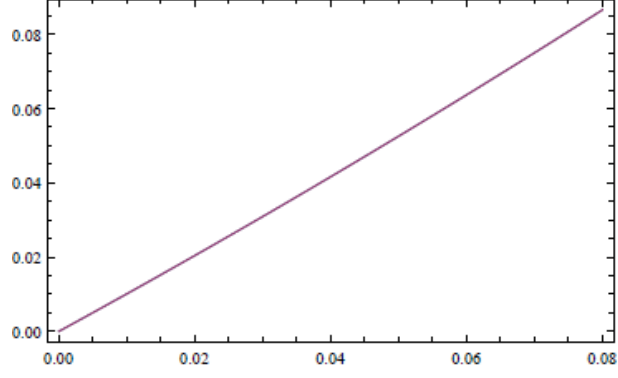
Aynı şekilde (ii)-türevi ile elde edilen denklem sisteminden analitik çözüm bulunamayacağı için nümerik olarak çözümler bulunmuş ve elde edilen grafikler ise aşağıda ayrı ayrı gösterilmiştir.



Şekil 5.11.  $\alpha = 0$  için fuzzy çözüm



Şekil 5.12.  $\alpha = 0.5$  için fuzzy çözüm



**Şekil 5.13.**  $\alpha = 1$  için fuzzy (normal) çözüm

(i) ve (ii) türev tanımına göre elde edilen sonuçlar sırasıyla Şekil 5.8 ve Şekil 5.11 ile gösterilmiş, sonuçta (ii)-türev tanımı altında (i)-türevine göre destek bölgesinde daralan çözümün bulunduğu görülmüştür. Aynı durum Şekil 5.9 ve Şekil 5.12 de de tespit edilmiştir. Diğer yandan  $\alpha = 1$  merkez değeri olduğundan elde edilen crisp değerlerin birbirine eşit olduğu da açıktır.

## 6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Fuzzy diferansiyel denklemler belirsizlik altında dinamik sistemleri modellemede etkin bir rol oynamıştır. Böylece tanımlanan fuzzy sayı ve uygulanan fuzzy türeve göre farklılık gösteren çözümler elde edilmiştir. Bir başka ifade ile aynı başlangıç değer problemlerinin farklı türev tanımlarına göre, farklı çözümlere sahip oldukları ya da herhangi bir çözüme sahip olmadıkları görülmüştür.

Bu çalışmada başlangıç şartları üçgen fuzzy sayısı olarak ele alınmış, genelleştirilmiş türev tanımı altında birinci mertebeden farklı tipte lineer ve lineer olmayan fuzzy başlangıç değer problemi örnekleri incelenmiş ve yaklaşık çözümleri bulmak için farklı nümerik metotlar uygulanmıştır. Burada özellikle yamuk metodu ile logaritmik ortalama metodu ele alınarak, fuzzy başlangıç değer problemlerinin çözümü için bu metotlar uygulanmış ve elde edilen sonuçların ise oldukça etkili olduğu saptanmıştır.

Özellikle uygulamalarda da görüldüğü gibi fuzzy başlangıç değer problemlerine logaritmik ortalama metodu uygulanarak, uygun başlangıç şartları ve yakınsadığı aralıkta yine uygun seçilen  $t$  zaman aralığında elde edilen çözümlerin, tam çözüm ile çakıştığı görülmüş ve diğer örneklerde ise en az hata veren metot olduğu açıkça gözlemlenmiştir. Ayrıca lineer olmayan fuzzy diferansiyel denklemlerin çözümünde yine logaritmik ortalama metodu kullanılmış ve sonuçta etkili ve daha hassas çözümler elde edilmiştir.

Bu metotların önemli avantajı ise literatürde uygulanan diğer yöntemlere göre işlem adımlarının kolay bir biçimde uygulanması ve hesap adımlarının da kısa olmasıdır. Genelleştirilmiş türev tanımı ile incelenen denklemlerde tanımın yapısı itibariyle iki farklı çözüm elde edilmektedir. Bu nedenle daha az işlemlerle etkili sonuç elde edildiği için uygulanan metotlar oldukça kullanışlıdır. Uygulanan yöntemlerin farklı örnek tiplerinde, değişik başlangıç şartları altında analitik olarak çözülen ve çözülemeyen problemler için de kullanılabilir olduğu ayrıca gösterilmiştir.

Sonuç olarak yapılan bu tez çalışmasının daha yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan fuzzy başlangıç değer problemlerine genişletilebileceği beklenmektedir.



## KAYNAKLAR

- [1] Zadeh L.A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8(1965) 338-353.
- [2] Akın Ö., Oruç Ö., A pray and predator model with fuzzy initial values, Hacet.J.Math.Stat.,41(2012) , 387-395.
- [3] Kandel A., Byatt W.J., Fuzzy differential equation, In Proceedings of the International Conference and Society, Tokyo, Japan (1978) , 1213-1216.
- [4] El Naschie M.S., From experimental quantum optics to quantum gravity via a fuzzy Khler manifold, Chaos, Solutions& Fractals., 25 (2005), 969-977.
- [5] Abbod M.F., D. G. Von Keyserlingk, M. Mahfouf, Survey of utilization of fuzzy technology in medicine and healthcare, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001), 331-349.
- [6] Barro S., Marin R., Fuzzy logic in medicine, Physica-Verlag Heidelberg, Berlin, (2002) , 113-138.
- [7] Chang B. C. , Halgamuge S.K. , Protein motif extraction with neuro-fuzzy optimization, Bioinformatics 18(2002), 1084-1090.
- [8] Casasnovas J., Rossell F., Averaging fuzzy biopolymers, Fuzzy Set Systems 152 (2005) , 139-158.
- [9] Hanakata, K. A methodology for interactive systems. In “Learning Systems and Intelligent Robots” (K. S. Fu and J. T. Tou, eds.) , (1974) 317–324. Plenum, New York.
- [10] Urugami, M., Mizumoto, M., and Tanaka, K., Fuzzy robot controls., J. Cybern. 6(1976) , 39–64.
- [11] Feng G, Chen G. Adaptative control of discrete-time chaotic systems: A fuzzy control approach., Chaos, Solitons & Fractals 253(2005),459–467.
- [12] Roma'n-Flores H , Chalco-Cano Y., Robinson's chaos in set-valued discrete systems., Chaos , Solitons & Fractals, 25(2005) , 33–42.
- [13] Roma'n-Flores H , Chalco-Cano Y., Some chaotic properties of Zadeh's extension. Chaos, Solitons & Fractals, 35(2008) , 452–459.
- [14] Hanss M. Applied fuzzy arithmetic: An introduction with engineering applications. Berlin: Springer-Verlag; 2005.
- [15] Guo, M. , Xue, X., Li,R. Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models , Fuzzy Set Systems.138(2003),601-615.
- [16] Chang, S.L. and Zadeh , L.A., On fuzzy mapping and control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2(1972), 30-34.

- [17] Puri, M. and Ralescu, D., Differentials of fuzzy functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91(1983) , 552-558.
- [18] Kaleva, O., Fuzzy differential equations , *Fuzzy Sets and Systems* , 24(1987), 301-317.
- [19] Hullermeier E. An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems. *Int Journal Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Bases System*, 5 (1997) , 117–137.
- [20] Bede B., S. G. Gal, Almost periodic fuzzy-number-valued functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 147(2004) , 385-403.
- [21] B. Bede, S. G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy number value functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 151(2005) , 581-599.
- [22] B. Bede, I. J. Rudas, A. L. Bencsik, First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, *Information Sciences*, 177 (2007), 1648-1662.
- [23] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, On new solutions of fuzzy differential equations, *Chaos, Solitons and Fractals* ,38 (2008) , 112-119.
- [24] J. J. Nieto, A. Khastan, K. Ivaz, Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3(2009) , 700-707.
- [25] Seikkala S., On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987) , 319-330.
- [26] Diamond, P., Kloeden, P.: Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. In: Dubois, D., Prade, H., et al. (eds.) *Handbook Fuzzy Sets Ser.*, (2000), Vol. 7, 583–641, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [27] Zadeh, L.A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information Sciences* 8 , (1975), 199–249.
- [28] Diamond P., Stability and periodicity in fuzzy differential equations, *IEEE Trans. Fuzzy Systems* 8 , (2000), 583-590.
- [29] Bede, B., Department of Mathematical Sciences Lecture Series: Mathematical of epistemic uncertainty, The University of Texas at El Paso, USA.
- [30] B. Bede, *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2013).
- [31] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham, V. Devi, Revisiting fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis* 58(2004) , 351-358.

- [32] Lupulescu, V., On a class of fuzzy functional differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2009) , 1547–1562.
- [33] Wu, C., Song, S., Stanley Lee, E., Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 202(1996) , 629–644.
- [34] Bede, B., Gal, S.G.: Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability, *Communications in Mathematical Analysis* 9 , (2010), 22–41.
- [35] Bede, B., Note on “Numerical solutions of fuzzy differential equations by predictor–corrector method”, *Information Sciences*, (2008), 178, 1917–1922.
- [36] Hukuhara, M., Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj* , (1967), 10, 205–223.
- [37] Wu Congxin and Gong Zengtai, On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions, I, *Fuzzy Sets and Systems*,(2001), 120, 523-532.
- [38] Goetschel, R., Voxman, W., Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, (1986), 18, 31– 43.
- [39] Ivaz, K., Khastan, A., Nieto, J. J, A numerical method for fuzzy differential equations and hybrid differential equations , *Hindawi Publishing Corporation*, (2013).
- [40] Bildik, N. and İnç, M. “On the numerical solution of initial value problems for nonlinear trapezoidal formulas with different types.” *Intern. J. Computer Math*, (2003), 80, 1175.
- [41] Tapaswini, S., Chakraverty, S., “Approximate solution of fuzzy quadratic Riccati differential equation.” *Coupled Systems of Mechanics*, (2013), Vol. 2, No. 3, 255-269.
- [42] Abbasbandy, S., Solving Riccati differential equation using Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computers*, (2014), 157, 54-63.
- [43] Abbasbandy, S., A new application of He’s variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian’s polynomials, *Computation Applied Mathematics*, (2007), 207, 59-63.
- [44] Hooshangian L., Numerical solution for fuzzy Riccati equation under generalized derivation, *International Journal of Applications of Fuzzy Sets and Artificial Intelligence*, (2016), Vol. 6, 133-143.
- [45] Yang C., Hou J., and Qin B., Numerical solution of Riccati differential equations by using hybrid functions and Tau method, *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, (2012), Vol. 6, No. 8.

[46] Behzadi S., Vahdani B., Allahviranloo T., Abbasbandy S., Application of fuzzy Picard method for solving fuzzy quadratic Riccati and fuzzy Painlevé equations, Applied Mathematical Modelling,(2016), 1-13.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Asuman AÇIK  
Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1990  
Medeni Hali : Bekar  
Yabancı Dili : İngilizce  
E-posta : asumanack@hotmail.com

### Eğitim Durumu

Lise : İzmir Şemikler Lisesi (YDA) , 2008  
Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013.  
Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018.

### Mesleki Deneyim

Uzman Yaklaşım Özel Öğretim Kursu	2012-2017
Harmandalı Ortaokulu (Ücretli Öğretmenlik)	2014-2015
Mavişehir Fen Bilimleri Vip Kurs	2017-2018
Açı Eğitim Kurumları	2017-2018
Karşıyaka Final Temel Lisesi	2018- ..... (halen)

### Yayımları

Bildik, N., Açıık A., Deniz S., “A New Approach to Fuzzy Differential Equations using Logarithmic Mean.” Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, No. 1, 10-21, (2018).