T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

DEĞİŞMELİ HALKA ÜZERİNDEKİ LEAVITT YOL CEBİRLERİ

Ercüment ÖZYEŞİLPINAR

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba Güroğlu

MANİSA-2018

TEZ ONAYI

Ercüment ÖZYEŞİLPINAR tarafından hazırlanan **"Değişmeli Halka Üzerindeki Leavitt Yol Cebirleri"** adlı tez çalışması 16.10.2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba Güroğlu** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	. . . .
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Salahattin Özdemir** Dokuz Eylül Üniversitesi	. . . .
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Gökşen Bacak Turan** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	. . . .

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ercüment ÖZYEŞİLPINAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

K	Cisim
R	Birimli ve değişmeli halka
$L_K(E)$	E grafı üzerindeki Leavitt yol K-cebiri
$L_R(E)$	E grafı üzerindeki Leavitt yol R-cebiri
E^0	E grafının köşeler kümesi
E^1	E grafının kenarlar kümesi
E^*	E grafındaki tüm yolların kümesi
KE	E grafı üzerindeki yol K-cebiri
$CP(v)$	v köşesini baz alan tüm kapalı yolların kümesi
$CSP(v)$	v köşesini baz alan tüm kapalı basit yolların kümesi
$T(v)$	v köşesinin ağacı
$P_l(E)$	E grafındaki tüm çizgi nokta köşelerin kümesi
B_H	H kalıtsal doymuş alt kümesindeki tüm kırılan köşelerin kümesi
M	E grafının maksimal uç kümesi
H_E	E grafının kalıtsal doymuş alt kümelerinin kümesi
(H, S)	Uygun çift
δ_{ij}	Kroneker delta

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimi sürecinde bana yardımcı olan, tez çalışmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde bilgi ve tecrübesiyle her zaman yanımda olup desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU'na, öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Ercüment Özyeşilpınar
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Değişmeli Halka Üzerindeki Leavitt Yol Cebirleri

Ercüment ÖZYEŞİLPINAR

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba Güroğlu

Bu tezde birimli ve değişmeli bir halka üzerindeki Leavitt yol cebirleri incelenmiş ve bu Leavitt yol cebirlerindeki ideallerin çarpımsal özellikleri verilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu tezin ilk iki bölümü tezin konusunu oluşturan Leavitt yol cebirlerinin tarihçesi ile halka ve modül teorideki temel tanım ve kavramlardan oluşmaktadır. Tezin üçüncü bölümü, katsayıları K cismi üzerindeki $L_K(E)$ Leavitt yol cebirleri ve katsayıları birimli, değişmeli R halkası üzerindeki $L_R(E)$ Leavitt yol cebirleri ile ilgili tanım ve teoremleri içermektedir.

Tezin orjinal bölümü olan dördüncü bölümde, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirlerindeki ideallerin çarpımsal özelliklerden bahsedilerek, $L_R(E)$ nin aritmetik bir halka olduğu gösterilmiş ve son bölümde ise bu konuya ilgi duyan araştırmacılar için ilerideki çalışmalara yön verecek problemlerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graflar, İdealler, Leavitt Yol Cebirleri

2018, 30 sayfa

ABSTRACT

Master of Science Thesis

Leavitt Path Algebras With Coefficients in Commutative Ring

Ercüment ÖZYEŞİLPINAR

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ayşe Tuğba Güroğlu

In this thesis, Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring are examined and the multiplicative properties of the ideals in Leavitt path algebras are given.

The first two chapters of this thesis which is of five chapters consists of the history of Leavitt path algebras and the definitions and notions in ring and module theory. The third chapter of this thesis contains the definitions and theorems related to Leavitt path algebras $L_K(E)$ with coefficients in a field K and Leavitt path algebras $L_R(E)$ with coefficients in a unital commutative ring R.

In the fourth chapter which is the original part of the thesis, the multiplicative properties of the ideals in Leavitt path algebra $L_R(E)$ are mentioned and it is proved that Leavitt path algebra $L_R(E)$ is an arithmetical ring. In the last chapter, some problems that will give direction for the next study are given for researchers interested in Leavitt path algebras $L_R(E)$.

Keywords: Graphs, Ideals, Leavitt Path Algebras

2018, 30 pages

1. GİRİŞ

Bir R halkası ve m, n tamsayıları için sol $R-$modül olarak ${}_RR^m \cong_R R^n$ iken $m = n$ eşitliği, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, $K[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkası veya cisimler için sağlanmasına rağmen bazı hakalar için sağlanmayabilir. Bu özelliğe sahip halkalara IBN (Invariant Basis Number) özelliğine sahip halkalar denir.

1960'lı yıllarda W.G. Leavitt, Leavitt cebiri olarak adlandırılan " her $n > m$ pozitif tamsayıları için A bir $K-$cebiri olmak üzere ${}_KA^n \cong_K A^m$" olan ve IBN özelliğine sahip olmayan bir $K-$cebirinin varlığını kanıtlamıştır [1]. 2008 yılında yönlü bir E grafı üzerinde katsayıları keyfi bir $K-$cisminden alınan $L_K(E)$ Leavitt yol cebirleri G. Abrams ve G. Aranda Pino tarafından tanımlanmıştır [2], [3].Daha sonra birçok araştırmacı $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinin bütünüyle sonsuz basit (purely infinite simple), socle, sonlu boyutlu (finite dimensional), asal ve maksimal ideal yapısı gibi halka-teorik özelliklerini incelemiştir. [4], [5], [6], [7], [8].

2011 yılında M. Tomforde sıra-sonlu bir E grafı üzerinde katsayıları birimli ve değişmeli bir R halkasından alınan $L_R(E)$ Leavitt yol cebirlerini incelemiş ve $L_R(E)$ nin temel olarak basit (basically simple) olması için gerek ve yeter koşulları vermiştir [9]. 2015 yılında H. Larki $L_R(E)$ Leavitt yol cebirlerini sayılabilir graflara genişletmiş ve $L_R(E)$ nin asal ve primitive halka olması ile asal ve pirimitive ideal yapılarının karakterizasyonunu vermiştir. [10].

Bu tezde, K.M. Rangaswamy [11]tarafından çalışılan $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinin aritmetik ve çarpımsal bir halka olması ile ideallerin çarpımsal özelliklerinin, katsayıları birimli ve değişmeli R halkasından alınan $L_R(E)$ Leavitt yol cebirlerinde de sağlandığı gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Halka ve Modül Teori

Tanım 2.1.1. ([12]) $(R, +, .)$ cebirsel yapısı verilsin. Her $a, b, c \in R$ için,

1. $(R, +)$ abelyan grup,
2. $(a.b).c = a.(b.c)$
3. $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.c$

koşulları sağlanıyorsa $(R, +, .)$ cebirsel yapısına bir *halka (ring)* denir. R halkasında "." işleminin değişme özelliği varsa yani her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ ise R halkasına *değişmeli halka (commutative ring)* adı verilir. Ayrıca her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a = a$ olacak şekilde bir $1 = 1_R \in R$ varsa R halkasına *birimli halka* denir.

Tanım 2.1.2. ([12]) I, birimli, değişmeli R halkasının bir alt kümesi olsun. Eğer I, R nin toplamsal alt grubu ve her $x \in I, r \in R$ için $rx \in I$ ise I ya R nin *ideali (ideal)* adı verilir.

Önerme 2.1.1. ([12]) R bir halka ve I, J, K, R halkasının idealleri olsun. Bu taktirde

$$I(J + K) = IJ + IK$$

dır.

İspat: R halkasının I, J, K ideallerinden en az biri sıfır ise önermenin doğruluğu açıktır. $I, J, K \neq 0$ idealler olsun. $a \in I$, $b \in J$ ve $c \in K$ için $x = a(b + c) \in I(J + K)$ olsun. $a, b, c \in R$ olduğu için dağılma özelliğinden $x = a(b + c) = ab + ac \in IJ + IK$ olur ve $I(J + K) \subseteq IJ + IK$ sağlanır. Her $a \in IJ$ ve her $b \in IK$ elemanları için $c = a + b \in IJ + IK$ olsun. $c = xc'$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in I$ elemanı için a, b elemanları $a' \in J$ ve $b' \in K$ olmak üzere $a = xa'$ ve $b = xb'$ şeklinde düzenlensin. Bu durumda $c = a + b = xa' + xb' = x(a' + b') \in I(J + K)$ olur. Dolayısıyla $I(J + K) = IJ + IK$ eşitliği sağlanır. ∎

Önerme 2.1.2. ([12]) R birimli, değişmeli bir halka ve I, J, K, R halkasının idealleri olsun. Eğer $I \supseteq J$ ise

$$I \cap (J + K) = J + (I \cap K)$$

dır.

İspat: Sıfırdan farklı her $c \in I \cap (J + K)$ elemanı için $c \in I$ ve $c \in (J + K)$ olur. $c \in (J + K)$ olduğundan $a \in J$ ve $b \in K$ elemanları için $c = a + b$ şeklindedir. $c \in I$ ve $a \in J \subseteq I$ olduğundan $c - a \in I$ dır. Böylece $b = c - a \in I \cap K$ olduğundan $c = a + b \in J + (I \cap K)$ olur. Dolayısıyla $I \cap (J + K) \subseteq J + (I \cap K)$ dır. Tersine olarak $a \in J$ ve $b \in (I \cap K)$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $x = a + b \in (J + (I \cap K))$ elemanını alalım. $b \in I \cap K$ olduğundan $b \in I$ ve $b \in K$ dır. Böylece $a \in J$ ve $b \in K$ ise $a+b \in (J+K)$ olur ve $a, b \in I$ olduğu için $a+b \in I$ dir. Bu durumda $a+b \in I \cap (J+K)$ olur. ■

Önerme 2.1.3. ([12]) R birimli, değişmeli bir halka ve I, J, R halkasının idealleri olsun. Bu taktirde

$$(I + J)(I \cap J) \subseteq IJ$$

dir.

İspat: R birimli, değişmeli bir halka ve I, J R halkasının idealleri olsun. Bu taktirde $(I + J)(I \cap J) = I(I \cap J) + J(I \cap J) \subseteq IJ$ dır. ■

Tanım 2.1.3. ([12]) R birimli, değişmeli bir halka ve I, J, R halkasının idealleri olsun. Eğer $I + J = R$ ise I ve J ideallerine *aralarında asal (coprime)* denir.

Önerme 2.1.4. ([12]) R birimli, değişmeli bir halka ve I, J, R halkasında aralarında asal idealler olsun. Bu taktirde

$$IJ = I \cap J$$

İspat: $a \in I$ ve $b \in J$ olmak üzere $ab \in IJ$ olsun. $ab = a(\underbrace{1_R + 1_R + 1_R ... 1_R}_{b}) = a + a + a + ... + a \in I$ ve $ab = ba = b(\underbrace{1_R + 1_R + 1_R + ... + 1_R}_{a}) = b + b + b + ... + b \in J$ olduğu için $ab \in I \cap J$ olur. Bu durumda $IJ \subseteq I \cap J$ dir. Sıfırdan farklı bir $c \in I \cap J$ olsun. Bu taktirde $c \in I$ ve $c \in J$ dir. I, J idealleri aralarında asal idealler yani $I + J = R$ olduğu için $a + b = 1_R$ olacak şekilde $a \in I$ ve $b \in J$ elemanları vardır. Böylece

$c = c.1_R = c(a + b) = ca + cb \in IJ$ ise $I \cap J \subseteq IJ$ dir. ■

Tanım 2.1.4. ([12]) R birimli, değişmeli bir halka ve $I \subsetneq R$ bir ideal olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ ise I idealine *asal ideal (prime ideal)* denir.
R birimli, değişmeli bir halka ve $M \subsetneq R$ bir ideal olsun. Eğer $M \subset I \subset R$ olacak şekilde bir $I \subsetneq R$ ideali yoksa M idealine *maksimal ideal (maximal ideal)* adı verilir.

Tanım 2.1.5. ([12]) Bir R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine *Jacobson radikali (Jacobson radical)* denir ve $J(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. ([13]) R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer I ideali $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $I^n = 0$ şartını sağlıyorsa I idealine *nilpotent ideal* (*nilpotent ideal*) denir.

Tanım 2.1.7. ([13]) R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ elemanı $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $a^n = 0$ şartını sağlıyorsa $a \in R$ elemanına *nilpotent eleman* (*nilpotent element*) denir.

Tanım 2.1.8. ([13]) R bir halka olsun. Her $a \in R$ elemanı ve R halkasının bir I ideali için aşağıdaki şartlardan biri sağlanıyorsa R halkasına *yarı asal* (*semiprime*) halka denir.
i) $aRa = 0$ ise $a = 0$ dır.
ii) $I^2 = 0$ ise $I = 0$ dır.
iii) R halkası sıfırdan farklı nilpotent ideal içermez.

Tanım 2.1.9. ([14]) R bir halka ve I, J, K, R halkasının idealleri olsun. Eğer

$$I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$$

sağlanıyorsa R halkasına *aritmetik halka* (*arithmetical ring*) denir.

Tanım 2.1.10. ([12]) $(M, +)$ abelyan bir grup ve R bir halka olsun. $R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M grubuna R halkası üzerinde bir *sol R-modül (left R-module)* adı verilir.
(i) Her $r \in R$, her $m, n \in M$ için $r(m + n) = rm + rn$
(ii) Her $r, s \in R$, her $m \in M$ için $(r + s)m = rm + sm$
(iii) Her $r, s \in R$, her $m \in M$ için $r(sm) = (rs)m$

(iv) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

Sağ R-modül tanımı da aynı şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.1.11. ([12]) R bir halka, M bir sol R-modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt kümesi olsun. N alt kümesi modül şartlarını sağlıyor ise N alt kümesi M nin *alt modülü (submodule)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.12. ([12]) R bir halka ve $e \in R$ olsun. $e^2 = e$ şartını sağlayan $e \in R$ elemanına *idempotent eleman* denir.

Tanım 2.1.13. ([15]) R bir halka ve her $X = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq R$ sonlu alt kümesi için $X \subseteq eRe$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent elemanı varsa, R halkası *yerel birimlere (local unit)* sahiptir denir. Bu durumda, her $x_i \in X$ için $ex_i = x_i = x_i e$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ olacak şekilde bir e idempotent elemanı varsa e elemanına X alt kümesinin yerel birimi adı verilir.

Tanım 2.1.14. ([15]) Birimli ve değişmeli bir R halkasında sıfırdan farklı ortogonal idempotentlerin bir E kümesi için sol $R-$modül olarak

$$_RR = \bigoplus_{e \in E} Re$$

ise R halkasına *yeterli idempotentlere (enough idempotents)* sahiptir denir. Açıkça yeterli idempotentlere sahip olan halkalar yerel birimlere de sahiptir.

Tanım 2.1.15. ([15]) R bir halka, $(R, +)$ toplamsal grubunun bir $\{R_n : n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubu için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa R halkasına *$\mathbb{Z}$-dereceli ($\mathbb{Z}$-graded)* halka denir.

Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$

Abelyan grup olarak, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$.

R_n alt grubunun elemanlarına $n.$ dereceden *homojen elemanlar* denir.

Tanım 2.1.16. ([15]) I, $\mathbb{Z}$-dereceli $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ halkasının bir ideali olsun. Eğer $x = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} x_n \in I$ iken $x_n \in I$ oluyorsa I idealine *dereceli ideal (graded ideal)* denir.

Tanım 2.1.17. ([15]) $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ ve $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ iki $\mathbb{Z}$-dereceli halka ve

$\phi : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\phi(R_n) \subseteq S_n$ oluyorsa ϕ dönüşümüne *dereceli homomorfizma (graded homomorphism)* adı verilir. $\mathbb{Z}$-dereceli bir homomorfizmada çekirdek (kernel) $\mathbb{Z}$-dereceli bir idealdir.

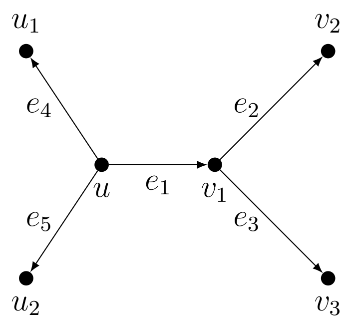
2.2. Graf Teori

Bu kısımda öncelikle Leavitt yol cebirlerinde kullanacağımız yönlü graflarla ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.2.1. ([15]) Bir *yönlü graf (directed graph)* $E = (E^0, E^1, r, s)$, E^0 ve E^1 kümeleri ve $r, s : E^0 \to E^1$ dönüşümlerinden oluşur. E^0'ın elemanlarına *köşeler (vertices)* ve E^1'in elemanlarına *kenarlar (edges)* denir. Herhangi bir $e \in E^1$ kenarı için $s(e)$'ye e kenarının *kaynağı (source)* ve $r(e)$'ye e kenarının *menzili (range)* adı verilir. Bir $e \in E^1$ kenarı ve $v, w \in E^0$ köşeleri için, $s(e) = v$ ve $r(e) = w$ ise e kenarının *yayıcısı* $(emits)$ v köşesi, e kenarının *alıcısı (receiver)* w köşesidir. Herhangi iki $e_1, e_2 \in E^1$ kenarları için $r(e_1) = s(e_2)$ oluyor ise e_1, e_2 kenarlarına *komşu kenarlar (adjacent)* denir.

Bir v köşesi için $s^{-1}(v)$, kaynağı v olan kenarların kümesi ve $r^{-1}(v)$ ise menzili v olan kenarların kümesidir. Eğer bir v köşesi herhangi bir kenar yaymıyorsa, yani $s^{-1}(v) = \varnothing$ ise v köşesine *batak (sink)*, v köşesi hiç kenar almıyorsa yani $r^{-1}(v) = \varnothing$ ise v köşesine *kaynak (source)* denir.

Örnek 2.2.1. E :



Yukarıdaki E grafında u_1, u_2, v_2 ve v_3 köşeleri birer batak , u köşesi ise kaynak'tır. Ayrıca

$$s(e_1) = u, \quad r(e_1) = v_1, \qquad s^{-1}(u) = \{e_1, e_4, e_5\}, \quad r^{-1}(u) = \varnothing,$$

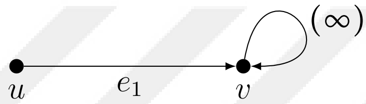
$$s^{-1}(v_1) = \{e_2, e_3\}, \quad r^{-1}(v_1) = \{e_1\}, \qquad r(e_1) = v_1 = s(e_2) = s(e_3),$$

$$s^{-1}(v_2) = \varnothing, \quad r^{-1}(v_2) = \{e_2\}, \qquad s^{-1}(v_3) = \varnothing, \quad r^{-1}(v_3) = \{e_3\},$$

$s^{-1}(u_1) = \varnothing, \quad r^{-1}(u_1) = \{e_4\}, \qquad s^{-1}(u_2) = \varnothing, \quad r^{-1}(u_2) = \{e_5\},$

Tanım 2.2.2. ([15]) Bir grafta bir köşe sonsuz kenar yayıyorsa yani bir u köşesi için $|s^{-1}(u)| = \infty$ ise bu u köşesine *sonsuz yayıcı (infinite emitter)* denir. Graftaki bir u köşesi batak veya sonsuz yayıcı ise bu köşeye *tekil köşe (singular vertex)*, aksi taktirde u köşesine *düzgün köşe (regular vertex)* adı verilir. Bir E grafının *sonlu (finite)* olması E^0 ve E^1 kümelerinin sonlu olmasına bağlıdır. Bir E grafı sonsuz yayıcı içermiyorsa bu grafa *sıralı sonlu (row finite)* graf denir.

Örnek 2.2.2. E :

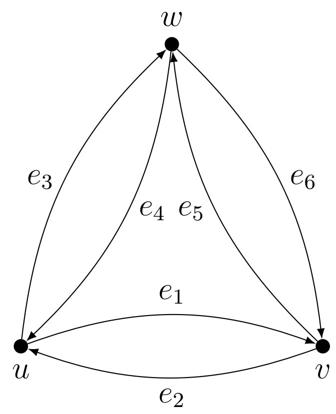


Yukarıdaki grafta v köşesine sonsuz sayıda kenar geldiğinden v köşesi sonsuz yayıcıdır ve dolayısı ile tekil köşedir. u köşesi ise sonlu sayıda kenar yaydığından düzgün köşedir. Ayrıca E grafı sonlu ve sıra sonlu olmayan bir graftır.

Tanım 2.2.3. ([15]) Bir E grafındaki $e_1, e_2, ..., e_n \in E^1$ kenarları için $r(e_i) = s(e_{i+1})$ $(i = 1, 2, 3, ..., n-1)$ olacak şekilde oluşturulan $p = e_1e_2...e_n$ dizisine *yol (path)* denir. Burada $s(p) = s(e_1)$ ve $r(p) = r(e_n)$ dir. Bir p yolunun içerdiği kenar sayısı p yolunun *uzunluğunu (length)* verir ve $l(p)$ ile gösterilir. Bir p yolunu oluşturan kenar sayısı sonsuz sayıda ise p yolu *sonsuz uzunluklu yol* olarak adlandırılır. Bir E grafındaki tüm yolların kümesi $E^\star$ ile gösterilir. Graftaki tüm köşeler 0 uzunluklu birer yoldur. $E^\star$ kümesinde $m \leqslant n$ olmak üzere $p = e_1e_2...e_n$ ve $q = e_1e_2...e_m$ yolları için q yoluna p yolunun *başlangıç alt yol*'u *(initial subpath)* denir.

Tanım 2.2.4. ([15]) n uzunluktaki bir $p = e_1e_2...e_n$ yolu için $s(p) = r(p) = u$ oluyor ise p yoluna *kapalı yol (closed path)*, u köşesine de kapalı yolun *bazı (base)* denir ve u köşesini baz alan kapalı yolların kümesi $CP(u)$ ile gösterilir. Kapalı bir $p = e_1e_2...e_n$ yolu $i > 1$ iken $s^{-1}(e_i) \neq u$ özelliğini sağlıyorsa p yolu u köşesini baz alan *kapalı basit yol (closed simple path)* olarak adlandırılır ve u köşesini baz alan bütün kapalı basit yolların kümesi $CSP(u)$ ile gösterilir. Her kapalı basit yol bir kapalı yoldur.

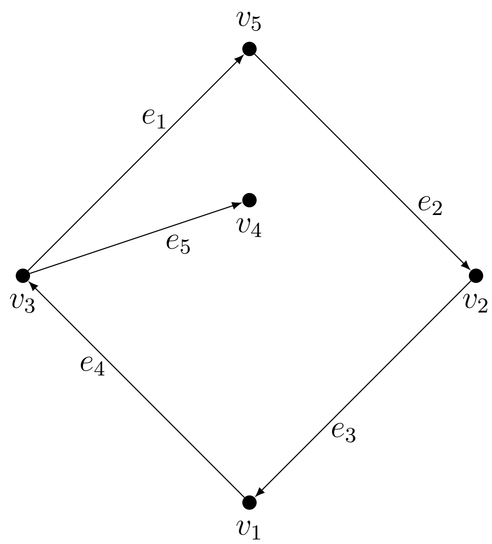
Örnek 2.2.3. E :



$q = e_2 e_1$ yolu v köşesini baz alan kapalı bir yoldur. $p = e_3 e_6 e_2$, u köşesini baz kabul eden kapalı basit yoldur. $c = e_4 e_3 e_6 e_5$ yolu ise w köşesini baz alan bir kapalı yoldur ancak $s(e_4) = w = s(e_6)$ olduğundan kapalı basit yol değildir.

Tanım 2.2.5. ([15]) $p = e_1 e_2 ... e_n$ yolu için $s(p) = r(p) = u$ ve herbir $i \neq j$ için $s(e_i) \neq s(e_j)$ oluyorsa p yoluna u köşesini baz alan *döngü (cycle)* denir. Bir graf döngü içermiyor ise bu grafa *çevrimsiz graf (acyclic graph)* adı verilir. Bir $p = e_1 e_2 ... e_n$ yolu için $s(e) = s(e_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ve $e \neq e_i$ olacak şekilde bir $e \in E^1$ kenarı varsa e kenarına p yolunun *çıkış'ı (exit)* denir.

Örnek 2.2.4. E :



Yukarıdaki grafta v_3 köşesini baz alan bir $c = e_1e_2e_3e_4$ döngüsü için e_5 kenarı bir çıkıştır ve bu döngünün uzunluğu $\ell(c) = 4$'dür.

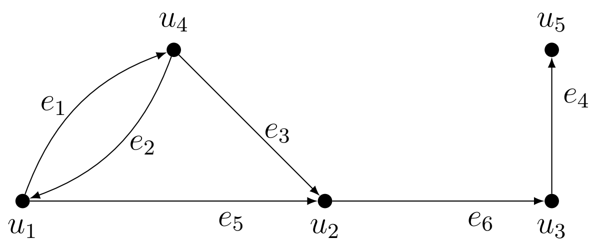
Tanım 2.2.6. ([15]) Bir E grafında her kapalı basit yol bir çıkış içeriyorsa bu E grafı *L koşulu*'nu *(Condition L)* sağlıyor denir. Eğer E grafındaki tüm köşeler ya hiçbir kapalı basit yolun bazı değil yada birden fazla kapalı basit yolun bazı ise E grafı *K koşulu*'nu *(Condition K)* sağlar. Bu durumda K koşulunu sağlayan bir graf her zaman L koşulunu da sağlar.

Tanım 2.2.7. ([15]) $u, w \in E^0$ köşeleri için kaynağı u köşesi ve menzili w köşesi olan bir $p \in E^\star$ yolu varsa yani $s(p) = u$ ve $r(p) = w$ ise E^0 kümesi üzerindeki $\geq$ bağıntısı $u \geq w$ şeklinde tanımlanır ve u ile w *bağlantılıdır (connected)* denir.

Tanım 2.2.8. ([15]) $u \in E^0$ köşesi için u ile bağlantılı tüm köşelerin kümesine u köşesinin *ağacı (tree)* denir yani

$$T(u) = \{w \in E : u \geq w\}$$

Örnek 2.2.5. E :



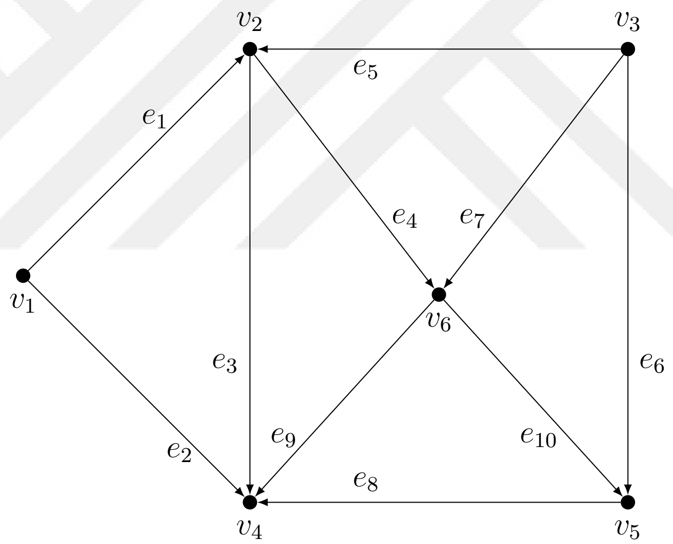
E grafında köşelerin ağaçları $T(u_1) = E^0$, $T(u_2) = \{u_2, u_3, u_5\}$, $T(u_3) = \{u_3, u_5\}$, $T(u_4) = E^0$, $T(u_5) = \{u_5\}$ şeklindedir. Ayrıca $p = e_1e_2$ yolu u_1 köşesini baz alan bir döngüdür ve bu döngünün çıkışı e_3 kenarıdır. u_1 köşesi başka hiçbir döngünün bazı olmadığından E grafı L koşulunu sağlayan fakat K koşulunu sağlamayan bir graftır.

Tanım 2.2.9. ([16]) Bir $v \in E^0$ köşesi birden fazla kenar yayıyorsa yani $|s^{-1}(v)| > 1$ ise bu v köşesine *çatallanma (bifurcation)* denir. Bir $v \in E^0$ köşesi bir çatallanma değilse veya bir döngünün bazı değil ise bu $v \in E^0$ köşesi *çizgi nokta (line point)* olarak adlandırılır. E grafının çizgi noktalarının kümesi $P_l(E)$ ile gösterilir. Graftaki tüm batak köşeler birer çizgi nokta köşesidir.

Örnek 2.2.6. Örnek 2.2.5.'deki E grafında çatallanan köşelerin kümesi $\{u_1, u_4\}$ ve çizgi nokta köşelerinin kümesi de $P_l(E) = \{u_2, u_3, u_5\}$ dir.

Tanım 2.2.10. ([15]) Bir $H \subseteq E^0$ alt kümesi için $u \in H$ iken $T(u) \subseteq H$ oluyorsa bu H alt kümesine *kalıtsal alt küme (hereditary subset)*, her u düzgün köşesi için $\{r(e) : s(e) = u\} \subseteq H$ iken $u \in H$ ise H alt kümesine *doymuş alt küme (saturated subset)* denir. Bir E grafında kalıtsal doymuş alt kümelerin (hereditary saturated subset) kümesi H_E ile gösterilir. Bir grafta E^0 ve boş küme her zaman kalıtsal doymuş kümelerdir.

Örnek 2.2.7. E :



- $H_1 = \{v_4, v_5\}$ kümesi kalıtsal alt kümedir ancak doymuş alt küme değildir çünkü $r(e_9) = v_4, s(e_9) = v_6$ için $v_6 \notin H_1$.
- $H_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ kümesi doymuş alt kümedir ancak kalıtsal alt küme değildir çünkü $T(v_6) = \{v_4, v_5, v_6\}$ için $T(v_6) \nsubseteq H_2$.
- $H_3 = \{v_4, v_6\}$ kümesi ne kalıtsal alt küme ne de doymuş bir alt kümedir çünkü $T(v_6) = \{v_4, v_5, v_6\}, T(v_6) \nsubseteq H_3$ ve $r(e_4) = v_6$ ve $r(e_3) = v_4$ olmak üzere $\{r(e_i) : s(e_i) = v_2\} \subseteq H_3$ için $v_2 \notin H_3$.

Tanım 2.2.11. ([15]) E bir graf ve $H \subseteq E^0$ kalıtsal doymuş alt küme olsun. $w \in E^0 \backslash H$

köşesi

$$0 < |s^{-1}(w) \cap r^{-1}(E^0 \backslash H)| < \infty$$

özelliğini sağlayan sonsuz yayıcı ise w köşesine *kırılan köşe (breaking vertex)* denir. H kalıtsal doymuş alt kümesine bağlı tüm kırılan köşelerin kümesi B_H ile gösterilir. Her $w \in B_H$ köşesi için

$$w^H = w - \sum_{\binom{s(e)=w}{r(e)\notin H}} ee^*$$

şeklindedir.

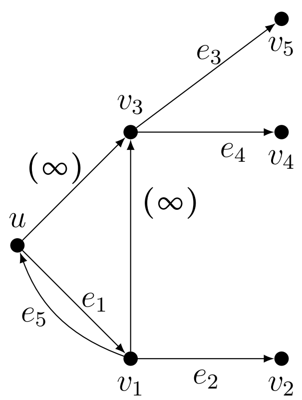
H kalıtsal doymuş alt küme ve $S \subseteq B_H$ alt kümesi için (H, S) ikilisi *uygun çift (admissible pair)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.12. ([16]) E bir graf, H kalıtsal doymuş bir alt küme ve $S \subseteq B_H$ olmak üzere (H, S) uygun çiftine karşılık gelen $E\backslash(H, S)$ *bölüm grafi (quotient graph)* aşağıdaki gibi tanımlanır:
$(E\backslash(H, S))^0 = (E^0\backslash H) \cup \{u' : u \in B_H\backslash S\}$

$$(E\backslash(H, S))^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H\} \cup \{e' : e \in E^1, r(e) \in B_H\backslash S\}$$

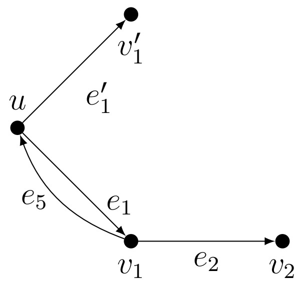
Ayrıca, r, s menzil ve kaynak fonksiyonları $s(e') = s(e)$, $r(e') = r(e)'$ şeklinde $(E\backslash(H, S))^0$ kümesine genişletilir.
$E\backslash(H, S)$ bölüm grafındaki tüm u' köşeleri birer bataktır.

Örnek 2.2.8. E :



E grafında $H = \{v_3, v_4, v_5\}$ kalıtsal doymuş alt kümesi için $E^0\backslash H = \{u, v_1, v_2\}$ dir. Burada kırılan köşelerin kümesi $B_H = \{u, v_1\}$ şeklindedir. $S = \{u\}$ kümesi için $E\backslash(H, S)$ bölüm grafı aşağıdaki gibidir.

$E\backslash(H,S):$



Tanım 2.2.13. ([16])

$$R(u) = \{p \in E^\star : r(p) = u\}$$

kümesinin eleman sayısına $u \in E^0$ köşesinin *hedef indeks*'i *(range index)* denir ve $n(u)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.14. ([7]) E bir graf, $H \subseteq E^0$ boştan farklı kalıtsal doymuş alt küme olsun. $M \subseteq H$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa M kümesine *maksimal uç (maximal tail)* kümesi denir.

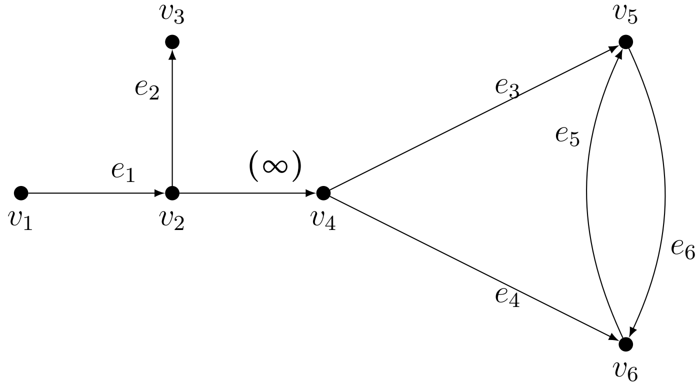
(MT-1) $v \in M$ ve $u \in H$ için $u \geq v$ ise $u \in M$ dir.

(MT-2) $v \in M$ düzgün bir köşe olmak üzere $s(e) = v$ ve $r(e) \in M$ olacak şekilde bir $e \in E^1$ kenarı vardır.

(MT-3) Herhangi iki $u, v \in M$ köşesi için $u \geq w$ ve $v \geq w$ olacak şekilde $w \in M$ köşesi vardır.

Bir grafta M maksimal uç kümesi olmak üzere $E^0\backslash M$ kalıtsal doymuş alt kümedir.

Örnek 2.2.9. E :



E grafında $H = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ kalıtsal doymuş alt kümesi için $M = \{v_4, v_5, v_6\}$ maksimal uç kümesidir ve $E^0 \backslash M = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi kalıtsal doymuş bir alt kümedir.

(MT-1) $v_4, v_5, v_6 \in M$ için

• $v_4 \in H$ ve $v_4 \geq v_4$, $v_4 \geq v_5$ ve $v_4 \geq v_6$ olduğundan $v_4 \in M$ dir.

• $v_5 \in H$ ve $v_5 \geq v_5$ ve $v_5 \geq v_6$ olduğundan $v_5 \in M$ dir.

• $v_6 \in H$ ve $v_6 \geq v_5$ ve $v_6 \geq v_6$ olduğundan $v_6 \in M$ dir.

(MT-2) $v_4, v_5, v_6 \in M$ düzgün köşeler olmak üzere

• $s(e_3) = v_4$ ve $r(e_3) = v_5 \in M$ olacak şekilde $e_3 \in E^1$ vardır.

• $s(e_6) = v_5$ ve $r(e_6) = v_6 \in M$ olacak şekilde $e_6 \in E^1$ vardır.

• $s(e_5) = v_6$ ve $r(e_5) = v_5 \in M$ olacak şekilde $e_5 \in E^1$ vardır.

(MT-3) $v_4, v_5, v_6 \in M$ köşeleri için

• $v_4, v_5 \in M$ için $v_4 \geq v_5$ ve $v_5 \geq v_5$ olacak şekilde $v_5 \in M$ vardır.

• $v_4, v_6 \in M$ için $v_4 \geq v_6$ ve $v_6 \geq v_6$ olacak şekilde $v_6 \in M$ vardır.

• $v_5, v_6 \in M$ için $v_5 \geq v_6$ ve $v_6 \geq v_6$ olacak şekilde $v_6 \in M$ vardır.

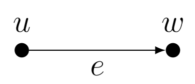
3. LEAVITT YOL CEBİRLERİ

3.1. Katsayıları Cisim Üzerindeki Leavitt Yol Cebirleri

Tanım 3.1.1. ([15]) E keyfi bir graf olsun. $(E^1)^\star = \{e_i^\star : e_i \in E^1\}$ kümesi ve bütün $e \in E^1$ kenarları için r' ve s' dönüşümleri $r'(e^\star) = s(e), s'(e^\star) = r(e)$ ve $r'(e) = r(e), s'(e) = s(e)$ şeklinde olan $\hat{E} = \{E^0, E^1 \cup (E^1)^\star, r', s'\}$ grafına E grafının *genişletilmiş grafi (extended graf)* denir. $E^\star$ grafındaki E^1 kümesi *reel kenarların (real edges)* kümesi ve $(E^1)^\star$ ise *gölge kenarların (ghost edges)* kümesi olarak adlandırılır.

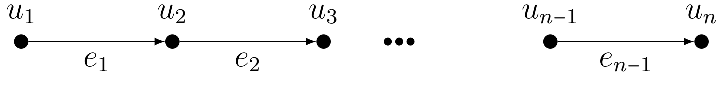
Tanım 3.1.2. ([15]) K bir cisim ve E keyfi bir graf olsun. E grafı için aşağıdaki şartları sağlayan bir $K[E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^\star]$ cebiri varsa bu cebire katsayıları K cisminde olan ve E^0, E^1 ve $(E^1)^\star$ kümeleri tarafından üretilen *Leavitt yol cebiri (Leavitt path algebra)* denir ve $L_K(E)$ ile gösterilir.
(A1) Her $v_i, v_j \in E^0$ için $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$
(A2) Her $e \in E^1$ için $s(e)e = e = er(e)$ ve $r(e)e^\star = e^\star = e^\star s(e)$
(CK1) Her $e_i, e_j \in E^1$ için $e_i^\star e_j = \delta_{ij} r(e_j)$
(CK2) Her düzgün $v \in E^0$ köşesi için $v = \Sigma_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^\star$
Burada $(A1)$ ve $(A2)$ şartlarını sağlayan E grafı üzerindeki cebire *yol K-cebiri (path K-algebra)* denir ve $A(E)$ ile gösterilir. Ayrıca burada $(CK1)$ ve $(CK2)$ şartları genişletilmiş $\hat{E}$ grafı üzerinde *Cuntz-Krieger bağıntıları (Cuntz-Krieger relations)* olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.1. ([15]) A_2 :



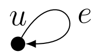
A_2 grafının Leavitt yol K-cebiri $L_K(A_2) \cong M_2(K)$ dır.

Örnek 3.1.2. ([15]) A_n :



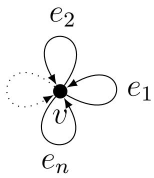
A_n grafının Leavitt yol K-cebiri $L_K(A_n) \cong M_n(K)$ dır.

Örnek 3.1.3. ([15]) R_1 :



R_1 grafının Leavitt yol K-cebiri $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$ dır.

Örnek 3.1.4. ([15]) R_n :



R_n grafının Leavitt yol K-cebiri $L_K(R_n) \cong L(1,n)$ dir. Burada $L(1,n)$ Leavitt cebiri $\{x_i, y_i : i = 1, ..., n\}$ elemanları tarafından üretilen ve

(i) $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ için $x_i y_j = \delta_{ij}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 1$

şartlarını sağlayan birimli bir $K - cebiri$ dir.

Lemma 3.1.1. ([16]) E keyfi bir graf olsun. $k \in K$ ve $p, q \in E^\star$ için $L_K(E)$'nin her *elemanı* $kpq^\star$ formundadır ve her eleman aşağıdaki iki formdan biri ile ifade edilir:

(i) $k \in K$ ve $v_i \in E^0$ için kv_i veya

(ii) $k \in K$, $e_{i_1}, ..., e_{i_m}, e_{j_1}, ..., e_{j_n} \in E^1$,$m, n \geqslant 0$, $m + n \geqslant 1$ olmak üzere $ke_{i_1}...e_{i_m}e^\star_{j_n}...e^\star_{j_1}$ şeklindedir öyleki ya p ve q, v_i köşesinde 0 uzunluklu yollardır veya $p = e_{i_1}...e_{i_m}$, $q = e_{j_1}...e_{j_n}$ yollarından en az biri 0 dan büyük uzunluktadır.

Teorem 3.1.1. ([16]) E keyfi bir graf olsun.

$$L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v$$

İspat: Her bir $x \in L_K(E)$ elemanı için Lemma 3.1.1 den her $k_i \in K$ ve her $p_i, q_i \in E^\star$ için $x = k_1 p_1 q_1^\star + ... + k_n p_n q_n^\star$ şeklindedir. Böylece $x = k_1 p_1 q_1^\star v_1 + ... + k_n p_n q_n^\star v_n \in \sum_{v \in E^0} L_K(E)v$ ve her bir $v_i = s(q_i)$ için $L_K(E) = \sum_{v \in E^0} L_K(E)v$ olur. $v \in E^0$ için $y \in L_K(E)v \cap \sum_{w \in E^0, w \neq v} L_K(E)w$ olsun. Bu durumda en az bir $a, a_w \in L_K(E)$ elemanları için $y = av = \sum_{w \in E^0, w \neq v} a_w w$ eşitliği vardır. Böylece E grafındaki köşelerin kümesi $L_K(E)$ nin ortogonal idempotentleri olduğundan $av = (av)v = (\sum_{w \in E^0, w \neq v} a_w w)v = 0$

elde edilir. Bu durumda $L_K(E) = \bigoplus_{v\in E^0} L_K(E)v$ eşitliği sağlanır. ■

Lemma 3.1.2. ([15]) E keyfi bir graf ve $p, q \in E^\star$ olsun.

(i) p ve q aynı uzunluklu ise $p^\star q = \delta_{p,q} r(p)$.

(ii) Eğer p ve q farklı uzunlukta

$$p^\star q = \begin{cases} p_2^\star, & \text{eğer q, p'nin ilk altyolu ise } p = qp_2; \\ q_2, & \text{eğer p, q'nun ilk altyolu ise } q = pq_2; \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Teorem 3.1.2. ([16]) E keyfi bir graf olsun.

(i) Eğer E^0 sonlu ise $L_K(E)$'nin birim elemanı $\sum_{v_i\in E^0} v_i$ dir.

(ii) Eğer E^0 sonsuz ise $L_K(E)$ için bir yerel birim kümesi vardır.

İspat: (i) E^0 sonlu olsun. $p, q \in E^\star$, $k \in K$ için $kpq^\star \in L_K(E)$ keyfi elemanını alalım. $\alpha = \sum_{v_i\in E^0} v_i$ elemanı için,

$$\alpha(kpq^\star) = (\sum_{v_i\in E^0} v_i)kpq^\star = k(\sum_{v_i\in E^0} \delta_{v_i,s(p)} s(p))pq^\star = ks(p)pq^\star = kpq^\star$$

Benzer şekilde $(kpq^\star)\alpha = kpq^\star$ olduğu gösterilir. $L_K(E)$ da bulunan herhangi bir eleman $kpq^\star$ formundaki elemanların toplamı olduğundan her $x \in L_K(E)$ için $\alpha x = x = x\alpha$ olur.
(ii) Varsayalım ki E^0 sonsuz olsun. $X = \{a_i\}_{i=1}^t$ $L_K(E)$'nin sonlu alt kümesi olsun. Her bir $p_j^i, q_j^i \in E^\star$ ve $k_j^i \in K$ elemanları için $a_i = \sum_{j=1}^{s(i)} k_j^i p_j^i (q_j^i)^\star \alpha$ dir.

$$V = \bigcup_{i=1}^{t} \{s(p_j^i), s(q_j^i) : j = 1, ..., s(i)\}$$

ve $\beta = \sum_{v\in V} v$ olarak tanımlayalım. Her $a_i \in X$ için $\beta a_i = a_i = a_i\beta$ olduğu görülür. β sonlu bir toplam ve idempotent olduğundan X kümesi için bir yerel birim üretir. Bu durumda E^0, $L_K(E)$ için bir yerel birim kümesidir. ■

Lemma 3.1.3. ([16]) E sonlu ve sıra sonlu bir graf ve $v \in E^0$ bir batak olmak üzere

$$I_v := span(\{\alpha\beta\star : \alpha, \beta \in E^\star, r(\alpha) = v = r(\beta)\})$$

$L_K(E)$'nin bir idealidir ve $I_v \cong M_{n(v)}(K)$ dır.

Teorem 3.1.3. ([16]) E sonlu, sıra sonlu ve çevrimsiz bir graf olsun. $\{v_1, ..., v_t\}$ köşeleri E grafının batakları olmak üzere

$$L_K(E) \cong \bigoplus_{i=1}^{t} M_{n(v_i)}(K)$$

dır.

Lemma 3.1.4. ([15]) E keyfi bir graf olsun
(i) $L_K(E)$'nin her sıfırdan farklı $\mathbb{Z}$-dereceli ideali bir köşe içerir.
(ii) Eğer E grafı L koşulunu sağlıyor ise $L_K(E)$'nin sıfırdan farklı her ideali bir köşe içerir.

Teorem 3.1.4. ([15]) (Dereceli Teklik Teoremi) E keyfi bir graf ve A $\mathbb{Z}$-dereceli bir halka olsun. Her $v \in E^0$ için $\pi(v) \neq 0$ olmak üzere $\pi : L_K(E) \longrightarrow A$ dereceli bir halka homomorfizması ise π bir monomorfizmadır.

İspat: $ker(\pi)$ $L_K(E)$'de bir dereceli ideal olsun. Eğer $ker(\pi)$ sıfırdan farklı ise $Lemma$ $3.1.4$'e göre bir köşe içerir. Fakat bu her $v \in E^0$ için $\pi(v) \neq 0$ olması ile çelişir. Bu yüzden $ker(\pi) = \{0\}$ ve π bir monomorfizimdir. ■

Teorem 3.1.5. ([15]) (Cuntz-Krieger Teklik Teoremi) E L koşulunu sağlayan bir graf ve A bir halka olsun. Her $v \in E^0$ için $\pi(v) \neq 0$ olmak üzere $\pi : L_K(E) \longrightarrow A$ halka homomorfizması ise π bir monomorfizmadır.

İspat: $ker(\pi) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $ker(\pi)$ $L_K(E)$'nin bir ideali ve E grafı L koşulunu sağladığından $Lemma$ $3.1.4$ den dolayı $ker(\pi)$ bir köşe içermelidir. Ancak bu $v \in E^0$ köşesi için $\pi(v) \neq 0$ olması ile çelişir. Bu yüzden $ker(\pi) = \{0\}$ ve π bir monomorfizimdir. ■

3.2. Katsayıları Birimli ve Değişmeli Halka Üzerindeki Leavitt Yol Cebirleri

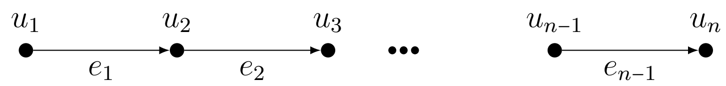
Bu bölümde tez konusunun üzerine kurulduğu katsayıları birimli ve değişmeli halka üzerindeki Leavitt yol cebirlerinin yapısını M. Tomforde ([9]) ve H. Larki ([10]) makaleleri yardımıyla vereceğiz.

Tanım 3.2.1. ([9]) E bir yönlü graf ve R bir halka olsun. $\{v : v \in E\}$ ikişerli ortogonal idempotentlerin kümesi olmak üzere bir $\{v, e, e^{\star} : v \in E^0, e \in E^1\} \subseteq R$ koleksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa *Leavitt E-ailesi* (*Leavitt E-family*) adını alır.

1. Her $e \in E^1$ için $s(e)e = er(e) = e$,
2. Her $e \in E^1$ için $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$,
3. Her $e, f \in E^1$ için $e^*f = \delta_{e,f}r(e)$,
4. $v \in E^0$ düzgün köşe olmak üzere $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e)=v\}} ee^*$.

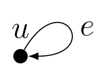
Tanım 3.2.2. ([9]) E bir yönlü graf ve R birimli, değişmeli bir halka olsun. Leavitt E-ailesi tarafından üretilen evrensel R-cebirine *katsayıları R halkasında olan Leavitt yol cebiri* denir ve $L_R(E)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.1. ([17]) A_n :



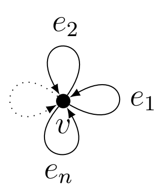
A_n grafının Leavitt yol R-cebiri $L_R(A_n) \cong M_n(R)$ dır.

Örnek 3.2.2. ([17]) R_1 :



R_1 grafının Leavitt yol R-cebiri $L_R(R_1) \cong R[x, x^{-1}]$ dir. Burada $R[x, x^{-1}]$, katsayıları birimli ve değişmeli R halkasından alınan Laurent polinom halkasıdır.

Örnek 3.2.3. ([17]) R_n :



R_n grafının Leavitt yol R-cebiri $L_R(R_n) \cong L(1,n)$ dir. Burada $L(1,n)$ Leavitt cebiri $\{x_i, y_i : i = 1, ..., n\}$ elemanları tarafından üretilen ve
(i) $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ için $x_i y_j = \delta ij$
(ii) $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 1$
şartlarını sağlayan birimli bir $R-$cebiri dir.

Önerme 3.2.1. ([9]) E yönlü bir graf ve R birimli, değişmeli bir halka olsun.

$$L_R(E) = span_R\{\alpha\beta^\star : \alpha, \beta \in E^\star \quad ve \quad r(\alpha) = u = r(\beta)\}$$

ve tüm $u \in E^0$ ve tüm $r \in R \setminus \{0\}$ için $ru \neq 0$ dır.

Tanım 3.2.3. ([10]) E sayılabilir bir graf ve R değişmeli, birimli bir halka olsun. (H, S) uygun çifti için

$$I(H,S) = span_R(\{\alpha\beta^\star : r(\alpha) = r(\beta) \in H\} \cup \{\alpha v^H \beta^\star : r(\alpha) = r(\beta) = v \in S\})$$

idealine *dereceli ideal* denir.

Lemma 3.2.1. ([10]) E sayılabilir bir graf ve R değişmeli birimli bir halka olsun. (H, S) uygun çifti için $H = I(H,S) \cap E^0$ ve $S = \{v \in B_H : v^H \in I(H,S)\}$ dir.

Tanım 3.2.4. ([10]) E sayılabilir bir graf ve R değişmeli, birimli bir halka ve I, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin bir ideali olsun. $x \in E^0$ veya $v \in E^0$ ve $s(e_i) = v$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $x = v - \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^\star$ ise $0 \neq r \in R$ için $rx \in I$ iken $x \in I$ oluyorsa I idealine *temel ideal* (*basic ideal*) adı verilir.

Lemma 3.2.2. ([10]) E sayılabilir bir graf ve R değişmeli, birimli bir halka olsun. Eğer E grafına ait (H, S) uygun çifti var ise $I(H, S)$ ideali temel idealdir.

Teorem 3.2.1. ([10]) E sayılabilir bir graf ve R değişmeli, birimli bir halka olsun. E grafı K-koşulunu sağlar ancak ve ancak $L_R(E)$'nin her temel ideali dereceli idealdir.

Teorem 3.2.2. ([10]) E sayılabilir bir graf ve R değişmeli, birimli bir halka olsun.

(i) E^0 ın (H,S) uygun çiftleri ile $L_R(E)$ nin dereceli temel idealleri arasındaki $(H,S) \to I(H,S)$ izomorfizması vardır.

(ii) Herhangi bir (H,S) uygun çifti için, $L_R(E)/I(H,S) \cong L_R(E/(H,S))$.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

K bir cisim olmak üzere $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinin aritmetik halka olduğu K.M. Rangaswamy tarafından gösterilmiştir ([11]). Bu bölümde katsayıları birimli ve değişmeli bir R halkasından alınan $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli ideallerinin çarpımsal özelliklerinden bahsedilecek ve $L_R(E)$ nin bir aritmetik halka olduğu gösterilecektir. Bu kısımda E sayılabilir bir graf, R birimli, değişmeli bir halka ve bütün idealler temel ideal olarak kabul edilecektir.

4.1. Araştırma Bulguları

Önerme 4.1.1. $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli bir ideali I olsun. Bu taktirde $L_R(E)$ nin herhangi bir J ideali için $IJ = I \cap J$ ve $JI = J \cap I$ dır.

İspat: I, $L_R(E)$ nin dereceli bir ideali ve J, $L_R(E)$ nin herhangi bir ideali olmak üzere $IJ \subseteq I \cap J$ olduğu açıktır. Tersini göstermek için $x \in I \cap J$ alalım. ([10], Corolloary 3.14) den I yerel birim kümesine sahip bir halkadır. Böylece $x = x.y = y.x$ olacak şekilde $y \in I$ yerel birimi vardır. Buradan $x = y.x \in IJ$ dir. Dolayısıyla $IJ = I \cap J$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $JI = J \cap I$ eşitliği gösterilir. ■

Önerme 4.1.2. I, J, K, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin idealeri olsun. Eğer I, J, K ideallerinden biri dereceli ideal ise bu taktirde

$$I(J \cap K) = (IJ) \cap (IK)$$

dır.

İspat: I, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli bir ideali olsun. Önerme $4.1.1$ den

$$I(J \cap K) = I \cap (J \cap K) = (I \cap J) \cap (I \cap K) = (IJ) \cap (IK)$$

dır. Şimdi J idealinin dereceli ideal olduğunu kabul edelim. $I(J \cap K) \subseteq IJ \cap IK$ olduğu açıktır. $a \in IJ \cap IK$ olsun. J dereceli bir ideal olduğundan Önerme $4.1.1$ den $a \in IJ = I \cap J$ yani $a \in I$ ve $a \in J$ dir. ([10], Corollary 3.14) den J yerel birim kümesine sahip bir halkadır ve $a \in J$ için $u \in J$ yerel birimi vardır öyle ki $a = u.a = a.u$ dur. $a \in IK$ olduğundan $i \in I$ ve $k \in K$ için $a = i.k$ dır. Böylece

$$a = a.u = (i.k).u = i.(k.u) \in I(J \cap K)$$

elde edilir. Şimdi de K, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli ideali olsun. $I(J \cap K) \subseteq IJ \cap IK$ olduğu açıktır. Tersini göstermek için $x \in IJ \cap IK$ alalım. Buradan $x \in IJ$ ve $x \in IK$ dır. Önerme $4.1.1$ den K dereceli ideal olduğundan $x \in I \cap K = IK$ olur. ([10], Corollary 3.14) den $x \in K$ için $v \in K$ yerel birimi vardır öyle ki $x.v = v.x = x$ dir. $x \in IJ$ olduğundan $i \in I$, $j \in J$ için $x = i.j$ dir. Böylece

$$x = x.v = (i.j).v = i.(j.v) \in I(J \cap K)$$

dır. ■

Sonuç 4.1.1. $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin I ve J ideallerinden biri dereceli ideal ise $IJ = JI$ dır.

Önerme 4.1.3. $I \subseteq J$ olmak üzere I, J, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin idealleri olsun. $gr(J)$, J ideali içindeki en büyük dereceli ideal olmak üzere eğer $I \subseteq gr(J)$ veya J bir dereceli ideal ise $IJ = I = JI$ dır.

İspat: $I \subseteq gr(J)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $I = I \cap gr(J)$ dir. Önerme $4.1.1$ den

$$I = I \cap gr(J) = Igr(J) \subseteq IJ \subseteq I$$

olduğundan $IJ = I$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde

$$I = gr(J) \cap I = gr(J)I \subseteq JI \subseteq I$$

ise $JI = I$ dır. Böylece $IJ = I = JI$ elde edilir. Eğer J dereceli bir ideal ise $J = gr(J)$ olduğundan $IJ = I = JI$ olduğu açıktır. ■

Önerme 4.1.4. I, J, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli olmayan idealleri olsun. Eğer $gr(I) + gr(J) = L_R(E)$ ise $IJ = I \cap J$ dir.

İspat: I ve J, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli olmayan idealleri olsun. $I.J \subseteq I \cap J$ olduğu açıktır. Tersine olarak $I \cap J \subseteq IJ$ olduğunu gösterelim. $gr(I) + gr(J) = L_R(E)$ ise modüler kuraldan

$$I = I \cap L_R(E) = I \cap [gr(I) + gr(J)] = gr(I) + I \cap gr(J)$$

dir. Böylece modüler kural tekrar uygulanırsa

$$I \cap J = [gr(I) + I \cap gr(J)] \cap J$$

$$= gr(I) \cap J + I \cap gr(J) \cap J$$

$$= gr(I) \cap J + I \cap gr(J)$$

elde edilir. Buradan Önerme 4.1.1 den

$$I \cap J = gr(I).J + I.gr(J) \subseteq IJ$$

sağlanır. ■

Önerme 4.1.5. I, J, K, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin idealleri olsun. Eğer I, J, K ideallerinden biri dereceli ideal ise

$$I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$$

dır.

İspat: $I \subseteq L_R(E)$ idealinin dereceli ideal olduğunu kabul edelim. Önerme 4.1.1 den

$$I \cap (J + K) = I(J + K) = IJ + IK = (I \cap J) + (I \cap K)$$

sağlanır. Şimdi $J \subseteq L_R(E)$ dereceli ideal olsun. $(I \cap J) + (I \cap K) \subseteq I \cap (J + K)$ olduğu açıktır. Tersini göstermek için $i \in I$, $j \in J$ ve $k \in K$ için $i = j + k \in I \cap (J + K)$ elemanını alalım. J dereceli ideali ([10], Corollary 3.14) den yerel birime sahip bir halkadır. Böylece $j = v.j = j.v$ olacak şekilde $v \in J$ yerel birim elemanı vardır. Burada $j = v.j.v = v.(i - k).v = v.i.v - v.k.v \in IJ + KJ$ dır. J dereceli ideal olduğundan Önerme 4.1.1 den $j \in (I \cap J) + (K \cap J)$ olur. Dolasıyla modüler kuraldan

$$k = i - j \in K \cap [I + (I \cap J) + (K \cap J)] = K \cap [I + (K \cap J)] = K \cap I + K \cap J$$

ise

$$i = j + k \in I \cap [(I \cap J) + (K \cap J) + (K \cap I) + (K \cap J)]$$

$$= I \cap [(I \cap J) + (K \cap I) + (K \cap J)]$$

$$= (I \cap J) + (K \cap I) + (I \cap K \cap J) = (I \cap J) + (I \cap K)$$

elde edilir. Benzer şekilde eğer $K \subseteq L_R(E)$ dereceli bir ideal ise $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$ olduğu gösterilir. ■

Aşağıdaki teoremde $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin bir aritmetik halka olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.1.1. I, J, K, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli olmayan idealleri olsun. Eğer $gr(I) + gr(J) = L_R(E)$ ise

$$I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$$

dır.

İspat: I, J, K, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli olmayan idealleri olsun. $(I \cap J) + (I \cap K) \subseteq I \cap (J + K)$ olduğu açıktır. Şimdi $I \cap (J + K) \subseteq (I \cap J) + (I \cap K)$ olduğunu gösterelim. Modüler kuraldan

$$I = I \cap L_R(E) = I \cap [gr(I) + gr(J)] = gr(I) + I \cap gr(J)$$

$$J = J \cap L_R(E) = J \cap [gr(I) + gr(J)] = gr(J) + J \cap gr(I)$$

elde edilir. Önerme $4.1.5$ den

$$K = K \cap L_R(E) = K \cap [gr(I) + gr(J)] = K \cap gr(I) + K \cap gr(J)$$

dir. Böylece Önerme $4.1.5$ den

$I \cap (J + K) = [gr(I) + I \cap gr(J)] \cap [gr(J) + J \cap gr(I) + K \cap gr(I) + K \cap gr(J)]$

$= [gr(I) + I \cap gr(J)] \cap [gr(J) + gr(I) \cap (J + K)]$

$= gr(I) \cap gr(J) + gr(I) \cap gr(I) \cap (J + K) + I \cap gr(J) \cap gr(J) + I \cap gr(J) \cap gr(I) \cap (J + K)$

$= gr(I) \cap gr(J) + gr(I) \cap (J + K) + I \cap gr(J)$

$= gr(I) \cap J + gr(I) \cap K + I \cap gr(J) \subseteq (I \cap J) + (I \cap K)$

dır. ■

Önerme 4.1.6. R bir tamlık bölgesi ve I, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli bir ideali olsun. Bu taktide $I_i (i = 1, ..., n)$, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin idealleri olmak üzere $I = I_1 ... I_n$ ancak ve ancak $I = I_1 \cap ... \cap I_n$ dir.

İspat: ($\Rightarrow$) $I = I_1...I_n$ olsun. Bu taktirde $L_R(E)/I$ Leavitt yol cebirinde $(I_1 \cap ... \cap I_n/I)^n = 0$ dır. I dereceli ideal olduğundan (H,S) uygun çifti tarafından üretilir. Böylece $L_R(E)/I \cong L_R(E/(H,S))$ dir. R bir tamlık bölgesi olduğunda ([18], Önerme 4.1) den $L_R(E/(H,S))$ yarı asal bir halkadır ve sıfırdan farklı bir nilpotent ideal içermez. Dolayısıyla $(I_1 \cap ... \cap I_n/I) = 0$ yani $I = I_1 \cap ... \cap I_n$ dir.
($\Leftarrow$) $I = I_1 \cap ... \cap I_n$ olduğunu kabul edelim. I dereceli bir ideal olduğundan $I = I^n$ dir. Böylece

$$I = I^n \subseteq I_1...I_n \subseteq I_1 \cap ... \cap I_n = I$$

ise $I = I_1...I_n$ sağlanır. ∎

Teorem 4.1.2. E sonlu bir graf ve R tamlık bölgesi olsun. Bu taktirde $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin her dereceli ideali sonlu sayıda asal idealin çarpımıdır.

İspat: I, $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin dereceli bir ideali olsun. Bu taktirde $I \cap E^0 = H$ ve $\{v \in B_H : v^H \in I\} = S$ olmak üzere $I = I(H,S)$ dir. ([9], Theorem 7.9)'dan $L/I(H,S) \cong L_R(E/(H,S))$'dir. R tamlık bölgesi ise ([18], Önerme 4.1)'den $L/I(H,S)$ yarı asal bir halkadır ve dolayısıyla asal radikali 0 dır. Böylece $I(H,S)$ dereceli ideali I idealini içeren dereceli asal ideallerin kesişimidir yani $I(H,S) = \cap\{P_i : P_i$ dereceli asal ideal öyle ki $P_i \supseteq I\}$ dir. E sonlu bir graf olduğundan $(E/H)^0$ grafında sonlu tane kalıtsal doymuş alt küme vardır. Dolasıyla ([10], Theorem $3.10(4)$) den $L_R(E)/I(H,S)$ bölüm cebirinde sonlu tane dereceli ideal bulunur. Böylece $I(H,S)$ dereceli ideali sonlu tane dereceli asal idealin kesişimidir. Önerme $4.1.6$ dan, I sonlu sayıda dereceli asal idealin çarpımıdır. ∎

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Keyfi bir K cismi üzerindeki $L_K(E)$ Leavitt yol cebirlerinin çarpımsal özellikleri ile $L_K(E)$ nin Aritmetik (Arithmatical) ve çarpımsal (multiplication) bir halka olduğu K.M. Rangaswamy [11] tarafından gösterilmiştir. Bu tezde katsayıları birimli ve değişmeli R halkasından alınan $L_R(E)$ Leavitt yol cebirindeki ideallerin çarpımsal özellikleri incelenmiş ve E sayılabilir bir graf ve R birimli, değişmeli bir halka iken $L_R(E)$ nin Aritmetik bir halka olduğu gösterilmiştir. Ayrıca R bir tamlık bölgesi olarak alındığında $L_R(E)$ Leavitt yol cebirindeki her dereceli idealin sonlu sayıda asal idealin çarpımı olduğu kanıtlanmıştır.

$L_R(E)$ Leavitt yol cebirleri üzerine çalışmaların çok yeni olması ve daha bir çok halka-teorik özelliklerinin kanıtlanmamış olması birçok araştırmacının ilgisini bu alana çekebilir. Aşağıda $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinde henüz kanıtlanmamış bazı sorulara değinilmiştir.

(1) $L_R(E)$ bir çarpımsal (multiplication) halka mıdır?

(2) $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinde dereceli olmayan temel idealler de sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak yazılabilir mi?

(3) $L_R(E)$ de temel ideal olmayan dereceli ideallerin karakterizasyonu nasıldır?

(4) R halkası bir Noether halka olduğunda $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinde her (dereceli) ideal sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak yazılabilir mi?

KAYNAKLAR

[1] Leavitt, W.G., Modules Without Invariant Basis Number, Proc. Amer. Soc., 1957, 8, 322–328.

[2] Abrams, G., Aranda Pino, G., The Leavitt Path Algebra of a Graph, Journal of Algebra, 2005, 293(2), 319–334.

[3] Abrams, G., Aranda Pino, G. The Leavitt Path Algebras of Arbitrary Graph, Houston J.Math, 2008, 34(2), 423–442.

[4] Abrams, G., Aranda Pino, G., Purely Infinite Simple Leavitt Path Algebras, J. Pure Appl. Algebra 2006, 207(3), 553–563.

[5] Aranda, G., Martin Barquero, D., Martin Gonzalez, C., Siles Molina, M., The Socle of a Leavitt Path Algebra, J. Pure Appl. Algebra, 2008, 212, 500–509.

[6] Abrams, G., Aranda Pino, G., Sils Molina, M., Finite Dimensional Leavitt Path Algebras, J. Pure Appl. Algebra, 2007, 209, 753–762.

[7] Rangaswamy, K. M., The Theory of Prime Ideals of Leavitt Path Algebras Over Arbitrary Graphs, J. Algebra, 2013, 375, 73–96.

[8] Esin, S., Er. M. K., Existence of Maximal Ideals in Leavitt Path Algebras, 2018, 42, 2081–2090.

[9] Tomforde, M., Leavitt Path Algebras with Coefficients in a Commutative Ring, J. Pure Appl. Algebra, 2011, 215, 471–484.

[10] Larki, H., Ideal Structure of Leavitt Path Algebras With Coefficients in a Unital Commutative Ring, Communications in Algebra, 2015, 43, 5031–5058.

[11] Rangaswamy, K. M., The Multiplicative ideal theory of Leavitt Path Algebras, J. Algebra, 2017, 487, 173–199.

[12] Atiyah, M., F., Macdonald, I., G., Introduction to Commutative Algebra, Westview Press, Massachusetts, 1994, 138s.

[13] Bresar, M., Introduction to Noncommutative Algebra, Springer, Switzerland, 2014, 199s.

[14] Fuchs, L., Mosteig, Über die Ideale Arithmetischer Ringe, Comment. Math. Helv., 1949, 23, 334–341.

[15] Abrams, G., Ara P., Molina, M. S., Leavitt Path Algebras, Springer, London, 2016, 289s.

[16] Dangerfield, I., Leavitt Path Algebras, University of Otago, Dunedin, 2011, 178s. (Master Thesis).

[17] Cristobal, G.C., On The Structure of Leavitt Path Algebras and Kumjian-Pask Algebras, University of Malaga, Department of Algebra, Geometry and Topology, 2017, 163s. (Doctoral Thesis)

[18] Öztürk, M. S., Leavitt Yol Cebirleri, Celal Bayar Üniv., Manisa, 2017, 41s. (Yüksek Lisans Tezi).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Ercüment ÖZYEŞİLPINAR
Doğum Yeri ve Yılı	:	İzmir, 1993
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	ercumentozyesilpinar@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lisans	:	Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015