T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

ÇİFT KUTUPLU METRİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ VE ÖZEL SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Kübra ÖZKAN

Danışman
Prof. Dr. Ali MUTLU

MANİSA-2018

TEZ ONAYI

Kübra ÖZKAN tarafından hazırlanan **"Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş ve Özel Sabit Nokta Teoremleri"** adlı tez çalışması 21.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Erdal EKİCİ** Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK** Kırıkkale Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Cihangir ALACA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

K. Özkan

Kübra ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayıların kümesi
$\mathbb{N}$	Pozitif tam sayılar kümesi
A^B	B kümesinden A kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi
$\inf A$	A kümesinin infimumu
$\sup A$	A kümesinin supremumu
$(A, B) \subset (X, Y)$	(A, B), (X, Y)'nin bir alt ikilisidir.
$(A, B) \Subset (X, Y)$	(A, B), (X, Y)'nin bir çift kutuplu alt ikilisidir.
$\overline{d}$	d çift kutuplu metriğinin karşıtı
d_X	d çift kutuplu metriğinin X üzerinde ürettiği iç metrik
$e_{X,Y}$	(X, Y) küme ikilisi üzerinde tanımlı ayrık çift kutuplu metrik
$\overrightarrow{f}$	f kovaryant veya kontravaryant dönüşümünün sağ karşıtı
$\overleftarrow{f}$	f kovaryant veya kontravaryant dönüşümünün sol karşıtı
$\overleftrightarrow{f}$	f kovaryant veya kontravaryant dönüşümünün karşıtı
$f\|_A$	f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanışı
$f[A]$	A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$f^{-1}[A]$	A kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü
$f : (X, Y) \rightrightarrows U$	(X, Y)'den (U, U)'ya tanımlı dönüşüm
$f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$	(X_1, Y_1)'den (X_2, Y_2)'ye tanımlı dönüşüm
$f : (X_1, Y_1) \mathrel{\times\!\!\!\!\rightrightarrows} (X_2, Y_2)$	(X_1, Y_1)'den (X_2, Y_2)'ye tanımlı kontravaryant dönüşüm
$\mathrm{I}_{X,Y}$	(X, Y) küme ikilisi için birim dönüşüm
İng.	İngilizce
$U_n(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerindeki $n \times n$ üst üçgensel matrislerin kümesi
$L_n(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerindeki $n \times n$ alt üçgensel matrislerin kümesi

Tx	x noktasının T dönüşümü altında aldığı değer; $T(x)$
$(u_n) \rightharpoondown u$	(u_n) sol dizisi u sağ noktasına yakınsar.
$(u_n) \rightharpoonup u$	(u_n) sağ dizisi u sol noktasına yakınsar.
$\overleftrightarrow{(X,Y)}$	(Y,X)
$\overleftrightarrow{(X,Y,d)}$	$(Y,X,\overline{d})$
$H(A,B)$	d ile üretilmiş Pompeui$-$Hausdorff (çift kutuplu) metrik

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca değerli bilgilerinden faydalandığım ve her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali MUTLU'ya en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Yapmış oldukları kıymetli önerileri ile çalışmalarıma katkı sağlayan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Erdal EKİCİ ve Sayın Doç. Dr. Cihangir ALACA'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışmam süresince fikirleri ve bilgisi ile bana yardımcı olan çalışma arkadaşım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL'a ve çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca "BİDEB 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Kübra ÖZKAN
Manisa, 2018

ÖZET

Doktora Tezi

Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş ve Özel Sabit Nokta Teoremleri

Kübra ÖZKAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali MUTLU

Bu tez çalışmasında literatürde iyi bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin çift kutuplu metrik uzaylardaki genelleştirmelerinin ifade edilmesi amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda, ilk olarak kısaca sabit nokta teorisi, metrik uzaylar ve çift kutuplu metrik uzayların tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve çalışmaya ön hazırlık oluşturubilecek bazı temel kavram ve teoremler verilmiştir. Ayrıca, üzerinde çalışılan çift kutuplu metrik uzayların tanımı verilerek çalışmada kullanılacak bu uzaylarla ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar ifade edilmiştir. Daha sonrasında çalışmanın esas kısmında, ikili sabit nokta teoremleri ve ortak sabit nokta teoremleri gibi önemli sabit nokta teoremleri çift kutuplu metrik uzaylara genelleştirilmiştir. $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel büzülme dönüşümü, zayıf büzülme dönüşümü, $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü, $\alpha-$uygun dönüşüm ve çok değerli dönüşüm gibi kavramlar üzerinde çalışılan uzaylarda tanımlanmış ve bu dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini gösteren teorem ve sonuçlar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teorisi, Metrik uzaylar, Çift kutuplu metrik uzaylar

2018, 82 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Generalized and Special Fixed Point Theorems In Bipolar Metric Spaces

Kübra ÖZKAN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ali MUTLU

In this thesis study, it is aimed to describe generalizations of some fixed point theorems, which are well-known in literature, to bipolar metric spaces. For this purpose, first of all, the historical development of fixed point theory, metric spaces and bipolar metric spaces are briefly mentioned and some basic concepts and theorems, which can prepare for the study, are given. In addition, the definition of bipolar metric spaces is given and some definitions, theorems and results related to these spaces, which are used in the study, are expressed. Afterwards, in the main part of the study, important fixed point theorems such as coupled fixed point theorems and common fixed point theorems are generalized to bipolar metric spaces. The concepts such as $(\epsilon, \lambda)-$uniform locally contraction mapping, weakly contraction mapping, $\alpha - \psi-$contraction mapping, $\alpha-$admissible mapping and multivalued mapping are defined on the studied spaces and the theorems and results showing the existence and uniqueness of the fixed point for these mappings are expressed.

Keywords: Fixed point theory, Metric spaces, Bipolar metric spaces,

2018, 82 pages

1. GİRİŞ

Bir dönüşümün sabit noktasının varlığı verilen dönüşümün özelliklerinin yanı sıra üzerinde tanımlandığı kümenin yapısına ve özelliklerine bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta çalışmaları aşağıdaki sorulara cevap aranmasına dayanır. Bir T dönüşümü verildiğinde;

(a) Dönüşümün en az bir sabit noktasının varlığı veya bu sabit noktanın tekliği için T ne tür şartları sağlamalıdır?

(b) Dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti etmek için üzerinde çalışılan uzaya hangi şartlar eklenmelidir?

(c) Dönüşümün bütün sabit noktaları ne tür bir yapıya sahiptir?

(d) Dönüşümün iterasyonlarının durumu hakkında neler söylenebilir?

Bu tür sorulara ve benzeri birçok soruya cevap arayan araştırmacılar sabit nokta teorisi aracılığıyla genel topoloji, fonksiyonel analiz, uygulamalı matematik ve geometri gibi matematiğin birçok alanında çeşitli problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin incelenmesine katkı sağlamışlardır. Ayrıca, sabit nokta teorisi matematiğin dışında oyun teorisi, mühendislik, istatistik ve ekonomi gibi birçok alanda da uygulamalara sahiptir.

Sabit nokta teorisi çalışmaları 1912 yılında Brouwer'in [1] çalışmaları ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$'in kapalı birim yuvarından yine aynı kapalı birim yuvar üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün bir sabit noktasının varlığını göstermiştir. 1930 da Schauder [2], bu teoremin lineer normlu uzaylarda kompakt kümelere genişletilmişi olan "X bir normlu lineer uzay, $C \subseteq X$ kapalı ve konveks bir alt küme ve $f : C \to C$ sürekli olsun. Bu durumda f, C'de bir sabit noktaya sahiptir" teoremini vermiştir. Gerek Brouwer, gerekse Schauder'ın kanıtlarında sabit noktanın bulunması için ne yapılabileceği konusunda en ufak bir ipucu bulunmamaktadır. Diğer yandan, 1922'de Banach [3], Banach'ın büzülme prensibi de denilen ve 2. bölümde verilecek olan Banach sabit nokta teoremini vererek literatürde ilk defa tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisini ifade etmenin yanı sıra, bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini garanti eden en önemli teoremlerden birini ifade etmiştir. Bu teorem Brouwer ve Schauder'un teoremlerinden farklı olarak sabit noktasının tekliği ve nasıl bulunacağı hakkında bir fikir vermiştir. Daha sonra Kannan, Chatterjea, Reich, Hardy ve Rogers ve Ćirić gibi bazı önemli genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri ifade edilerek sabit nokta teorisinin gelişmesine katkıda bulunulmuştur [4–9].

Kümelerin cebirsel özellikleri bazı problemlerin çözümünde yeterli olmadığı için ihtiyaç duyulan metrik uzay kavramı ilk defa 1906 yılında Fréchet tarafından ortaya atılmıştır [10]. Frechét metrik uzayları, reel veya kompleks sayılar teorisindeki birçok özelliğin herhangi bir uzayda nasıl tanımlanacağını gösteren daha soyut bir yolla tanımlamıştır. Metrik uzay kavramı topoloji ve fonksiyonel analiz gibi birçok soyut yapı çalışmalarının temelini oluşturmuştur [11–16].

Metrik uzayların birçok genelleştirilmiş hali vardır. Bunlardan bazıları Wilson [17] tarafından tanımlanan kuasi metrik uzaylar, Czerwik [18] tarafından tanımlanan b-metrik uzaylar, Matthews [19] tarafından tanımlanan kısmi metrik uzaylar, Branciari [20] tarafından tanımlanan dörtgensel metrik uzaylar, Mustafa and Sims [21] tarafından tanımlanan G-metrik uzaylar, Huang ve Zhang [22] tarafından tanımlanan koni metrik uzaylar ve Chistyakov [23, 24] tarafından tanımlanan modüler metrik uzaylardır.

Metrik uzaylar veya yukarıda verilmiş olan diğer genelleştirmeleri boştan farklı bir kümenin iki veya daha fazla elamanları arasındaki uzaklık kavramını incelemektedir. Diğer taraftan, boştan farklı iki kümenin elemanları arasındaki uzaklığın nasıl elde edilebileceği sorusu akla gelmiş, ancak mevcut metrik uzay çeşitlerinin özellikleri bu soruya cevap bulmak için yeterli olmamıştır. Dolayısıyla, 2016 yılında Mutlu ve Gürdal [25] bu soruna bir çözüm bulabilmek amacıyla metrik uzayların yeni bir genelleştirmesi olan çift kutuplu metrik uzayları tanımlamışlardır. Bu çalışmada canlıların yaşadıkları ortamlar veya farklı ortamlar ile arasındaki uygunluğun, bir öğrencinin herbir derse karşı öğrenme isteği ölçütünün, hayat boyu insanlar ve şehirler arası ortalama uzaklığın günlük hayatta çift kutuplu metrik uzaylar için birer örnek teşkil ettiği ifade edilmiştir. Diğer taraftan Mutlu ve Gürdal bu çalışmalarında çift kutuplu metrik uzaylarda yakınsaklık, süreklilik, dizi, Cauchy dizisi, tamlık v.b. gibi metrik uzaylarda tanımlanan bazı kavramları ve özellikleri vererek büzülme (daralma) dönüşümleri ile ilgili Banach ve Kannan gibi bazı önemli sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

Bu çalışmada da çift kutuplu metrik uzaylar hakkında kısaca bilgi verilerek metrik uzaylar üzerinde ispatlanmış olan bazı bilinen sabit nokta teoremleri çift kutuplu metrik uzaylarda ispatlanmıştır. Bu anlamda ilk olarak literatürde iyi bilinen ikili (*İng. coupled*) sabit nokta teoremleri ve ortak (*İng. common*) sabit nokta teoremleri çift kutuplu metrik uzaylarda ispatlanarak, bu teoremlerle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel (*İng. locally*) büzülme ve zayıf (*İng. weakly*) büzülme dönüşümü kavramları çift kutuplu metrik uzaylara taşınmış ve bu dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini gösteren bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Bunlara ek olarak, $\alpha-\psi-$büzülme dönüşümü ve $\alpha-$uygun (*İng. admissible*) dönüşüm kavramları bu metrik uzaylarda tanımlanmış ve bu dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ve sonuçlar ifade edilmiştir. Son olarak, çok değerli (*İng. multivalued*) dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerinin ve bu teoremlerle ilgili bazı önemli sonuçların çift kutuplu metrik uzaylardaki karşılığı ifade edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Tanım 2.0.1 (**Metrik Uzay**). [26] X boştan farklı bir küme olmak üzere bir $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

(M0) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$

(M1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. Diğer yandan, eğer d fonksiyonu sadece $(\mathrm{M0})$, $(\mathrm{M1})$ ve $(\mathrm{M2})$ özelliklerini sağlıyorsa (X, d)'ye bir yarı (semi) metrik uzay denir [27]. Eğer d fonksiyonu $(\mathrm{M0})$, $(\mathrm{M2})$, $(\mathrm{M3})$ aksiyomlarını ve $(\mathrm{M1})$'in yalnızca yeter sartını sağlıyorsa (X, d)'ye bir pseudo metrik uzay denir [26].

Örnek 2.0.2. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ biçiminde tanımlanan dönüşüm bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (veya standart, veya mutlak) metrik denir.

Tanım 2.0.3. [28] (X, d) bir metrik uzay, $A, B \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) :\ a \in A\}$$

değerine x noktasının A kümesine uzaklığı,

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) :\ a \in A,\ b \in B\}$$

değerine A ve B kümeleri arasındaki uzaklık ve

$$d(A) = \sup\{d(a, a') :\ a, a' \in A\}$$

değerine de A kümesinin çapı denir. Çapı sonlu olan kümeye sınırlı küme denir.

Tanım 2.0.4 (Pompeiu−Hausdorff Metrik). [29] (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X'in boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun. $A, B \in CB(X)$ olmak üzere

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

biçiminde ifade edilsin. Bu taktirde H, $CB(X)$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe d metriği tarafından üretilen Pompeiu$-$Hausdorff metrik denir.

Bir X kümesi üzerindeki bir dizi, $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesinden X'e tanımlı bir fonksiyon ile temsil edilir. Genelde $\mathbb{N}$ kümesinin elemanlarıyla indislenir ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n) ve $\{x_n\}$ biçimlerinde gösterilir.

Tanım 2.0.5 (Yakınsaklık). [30] (X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ iken $d(x_n, x) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine x noktasına yakınsaktır denir ve $(x_n) \to x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.6 (Tamlık). [30] (X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsar ise (X, d)'ye tamdır denir.

Bir (X, d) metrik uzayda $(x_n) \to x$ olması $\mathbb{R}$'de $(d(x_n, x)) \to 0$ olmasını, (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması ise $\mathbb{R}$'de $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$ olmasını gerektirir [30].

Tanım 2.0.7 (Süreklilik). [30] (X, d) ve (Y, d') metrik uzaylar olmak üzere $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\forall x \in X,\ d(x, x_0) < \delta$$

iken

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\delta > 0$ varsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. f fonksiyonu uzayın her noktasında sürekli ise f'e sürekli fonksiyon denir. Diğer yandan, (X, d) uzayında $(x_n) \to x$ iken (Y, d') uzayında $(f(x_n)) \to f(x)$ oluyor ise f'e dizisel sürekli fonksiyon denir.

Metrik uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik birbirlerine denk kavramlardır [30].

Tanım 2.0.8 (Sabit Nokta). [31] X bir küme $T : X \to X$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $T(x) = x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir. Diğer bir deyişle T'nin sabit noktası

$$Tx = x, \; x \in X$$

fonksiyonel denkleminin çözümüdür.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi $T : X \to X$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün hiç sabit noktası olmayacağı gibi bir veya birden fazla sabit noktası da olabilir.

Örnek 2.0.9. 1) $a \neq \emptyset$ olmak üzere $T(x) = x + a$ biçiminde tanımlanan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öteleme fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

2) $0 < \theta < 2\pi$ için

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönme fonksiyonunun yalnız bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta $(0, 0)$ noktasıdır.

3) $T(x) = \sqrt{x}$ biçiminde tanımlanan $T : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunun 0 ve 1 gibi iki sabit noktası vardır.

I, X kümesi üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümünün sabit noktası aslında $(T - I)(x) = 0$ denkleminin çözümleridir. O halde bu denklemin çözümünü bulmak için standart bir teknik, buna karşılık gelen dönüşümün sabit noktalarını bulmaktır.

Tanım 2.0.10. [31] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

şartını sağlayan bir $\lambda \geq 0$ sabiti varsa T'ye Lipschitz dönüşümü (*İng. Lipschitz mapping*) denir. Bu eşitsizliği sağlayan λ sayılarının en küçüğüne ise T'nin Lipschitz sabiti denir ve L ile gösterilir. Eğer $L < 1$ ise T'ye büzülme veya daralma (*İng. contraction*) dönüşümü ve $L \leq 1$ ise T'ye genişlemeyen (*İng. nonexpansive*) dönüşüm denir. Eğer her $x, y \in X$ için $(x \neq y)$

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa T'ye büzülebilir (*İng. contractive*) dönüşüm denir. Bu durumda aşağıdaki gerektirmenin doğruluğu kolayca görülebilir.

Büzülme $\Longrightarrow$ Büzülebilir $\Longrightarrow$ Genişlemeyen $\Longrightarrow$ Lipschitz.

Örnek 2.0.11. 1) (X, d) alışılmış metrik uzayı üzerinde $T : X \to X, T(x) = x+a$ $(a \neq 0)$ öteleme dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat büzülebilir ve büzülme dönüşümü değildir.

2) $X = [0, 1]$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzayı üzerinde $T(x) = \dfrac{x}{3}$ biçiminde tanımlanan $T : X \to X$ dönüşümü bir büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla, büzülebilir, genişlemeyen dönüşümdür ve Lipschitz koşulunu da sağlar.

3) $X = [1, \infty)$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzayı üzerinde $T(x) = x + \dfrac{1}{x}$ biçiminde tanımlanan $T : X \to X$ dönüşümü büzülebilir dönüşümdür. Ancak büzülme dönüşümü değildir.

Teorem 2.0.12 (Banach Sabit Nokta Teoremi). [3] (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.0.13 (Kannan Sabit Nokta Teoremi). [4] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \left(d(x, Tx) + d(y, Ty)\right)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ sabiti bulunabiliyorsa T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.0.14 (Chatterjea Sabit Nokta Teoremi). [5] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta \left(d(x, Ty) + d(y, Tx)\right)$$

olacak şekilde bir $\beta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ sabiti bulunabiliyorsa T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.0.15 (Reich Sabit Nokta Teoremi). [6] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)$$

şartı sağlanıyorsa T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.0.16 (Hardy-Rogers Sabit Nokta Teoremi). [7] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için $a, b, c, e, f \geq 0$ ve $a+b+c+e+f < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, Ty) + ed(y, Tx) + fd(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.0.17 (Ćirić Sabit Nokta Teoremi). [8] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx))\right\}$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabiti bulunabiliyorsa T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde çalışmada ele alınan çift kutuplu metrik uzaylarla ilgili bazı temel tanım ve teoremlere kısaca yer verilmiştir. Bu kısımda verilen ifadeler [25] ve [32]'den alınmıştır.

3.1. Çift Kutuplu Metrik Uzaylara Giriş

Bu kısımda, çift kutuplu metrik uzayların çalışılmasına temel sağlayan küme ikilileriyle ilgili temel özellikler ve bazı işlemler tanımlanmış, fonksiyon ve dizi benzeri bazı kavramlar incelenmiştir.

Bu çalışma boyunca X bir küme olmak üzere (X, X) her zaman X kümesini temsil eden bir küme ikilisi olarak göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.1.1. Bir (X, Y) küme ikilisi verildiğinde, X kümesine sol kutup (*İng. left pole*), Y kümesine sağ kutup (*İng. right pole*), $X \cap Y$ kümesine ise merkez (*İng. center*) denir. Sol kutbun noktalarına sol nokta (*İng. left point*), sağ kutbun noktalarına sağ nokta (*İng. right point*), hem sol nokta hem de sağ nokta olan noktalara ise merkezi nokta (*İng. central point*) denir.

Tanım 3.1.2. Eğer $X \cap Y = \varnothing$ ise (X, Y) küme ikilisine ayrık (*İng. disjoint*) denir.

Tanım 3.1.3. Bir (X, Y) küme ikilisi verildiğinde (Y, X) küme ikilisi $\overleftrightarrow{(X, Y)}$ ile gösterilir ve $\overleftrightarrow{(X, Y)}$'ye (X, Y)'nin karşıtı (*İng. opposite*) denir.

Tanım 3.1.4. (X, Y) bir küme ikilisi olmak üzere eğer $X, Y \neq \varnothing$ ise (X, Y)'ye boş olmayan kümelerin ikilisi (*İng. pair of nonempty sets*) denir.

Tanım 3.1.5. (A, B) ve (X, Y) küme ikilileri olmak üzere eğer $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ ise (A, B)'ye (X, Y)'nin bir çift kutuplu alt ikilisi (*İng. bipolar subpair*) denir ve $(A, B) \Subset (X, Y)$ biçiminde gösterilir. Eğer $(A, B) = (X \cap U, Y \cap U)$ olacak şekilde bir U kümesi varsa (A, B)'ye (X, Y)'nin bir alt ikilisi (*İng. subpair*) denir ve $(A, B) \subset (X, Y)$ yazılır.

Bu tanıma göre A ve X kümeleri için $A \subseteq X$ olması ile $(A, A) \subset (X, X)$ olması aynı anlama gelmektedir. Böylece bir X kümesini temsil eden, yani (X, X) şeklinde olan bir küme ikilisinin alt ikilileri, X'in altkümelerine tam olarak karşılık gelir.

Tanım 3.1.6. (X, Y) bir küme ikilisi ve (u_n), $X \cup Y$ kümesi üzerinde bir dizi olsun. Bu küme ikilisi üzerinde (u_n)'e, eğer $(u_n) \subset X$ ise bir sol dizi (*İng. left sequence*), eğer $(u_n) \subset Y$ ise bir sağ dizi (*İng. right sequence*) ve hem sol hem de sağ dizi, yani $(u_n) \subset X \cap Y$ ise (X, Y) üzerinde bir merkezi dizi (*İng. central sequence*) denir. (u_n), (X, Y) üzerinde bir sol dizi veya bir sağ dizi ise (u_n)'e (X, Y) küme ikilisi üzerinde kısaca dizi adı verilir.

Bu tanıma göre, (u_n)'in (X, Y) üzerinde bir dizi olması için ya $(u_n) \subset X$, ya da $(u_n) \subset Y$ olması gerekir. Başka bir deyişle, $X \cup Y$ kümesi üzerindeki bir (u_n) dizisi, aynı anda hem $X \backslash Y$ hem de $Y \backslash X$ kümelerinden en az birer terim içeriyorsa (u_n), (X, Y) ikilisi üzerinde bir dizi olarak kabul edilmemektedir. Ayrıca (u_n)'in (X, X) küme ikilisi üzerinde bir dizi (veya sol dizi, sağ dizi, merkezi dizi) olması için gerek ve yeter şart (u_n)'in X kümesi üzerinde bir dizi olmasıdır.

Tanım 3.1.7. (X, Y) bir küme ikilisi olmak üzere $X \times Y$ kümesi üzerindeki bir diziye (X, Y) üzerinde bir çift dizi veya bidizi (*İng. bisequence*) denir.

Tanım 3.1.8. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) küme ikilileri ve bir $f : X_1 \cup Y_1 \to X_2 \cup Y_2$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f[X_1] \subseteq X_2$ ve $f[Y_1] \subseteq Y_2$ ise f'e (X_1, Y_1)'den (X_2, Y_2)'ye bir kovaryant dönüşüm (*İng. covariant map*) veya kısaca dönüşüm denir ve

$$f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$$

yazılır. $f[X_1] \subseteq Y_2$ ve $f[Y_1] \subseteq X_2$ ise f'e (X_1, Y_1)'den (X_2, Y_2)'ye bir kontravaryant dönüşüm (*İng. contravariant map*) denir ve bu durum

$$f : (X_1, Y_1) \mathrel{\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow} (X_2, Y_2)$$

veya $f : (X_1, Y_1) \rightleftarrows (X_2, Y_2)$ biçiminde gösterilir. Bir (X, Y) küme ikilisi için $f : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ ise bu takdirde f'e (X, Y)'nin bir kovaryant özdönüşümü (*İng. covariant self–mapping*) veya kısaca özdönüşümü denir. Eğer $f : (X, Y) \mathrel{\nearrow\!\!\!\!\!\!\searrow} (X, Y)$ ise f'e (X, Y)'nin bir kontravaryant özdönüşümü (*İng. contravariant self-mapping*) denir. $f : (X, Y) \rightrightarrows (U, U)$ ya da buna denk olarak $f : X \cup Y \to U$ olması durumu da bazen $f : (X, Y) \rightrightarrows U$ yazımıyla ifade edilir.

Önerme 3.1.9. Ayrık olmayan bir küme ikilisinden ayrık bir küme ikilisine kovaryant veya kontravaryant bir dönüşüm tanımlanamaz. Dolayısıyla kümelerden farklı olarak küme ikilileri arasında da her zaman bir dönüşüm tanımlamak mümkün olmayabilir.

Bir $f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ dönüşümü verildiğinde f, $f[X_1] \subseteq X_2$ ve $f[Y_1] \subseteq Y_2$ olmasını sağlayan bir $f : X_1 \cup Y_1 \to X_2 \cup Y_2$ fonksiyonudur. Dikkat edilecek olursa burada f fonksiyonu, (X_1, Y_1)'den (Y_2, X_2)'ye kontravaryant dönüşüm olma, (Y_1, X_1)'den (X_2, Y_2)'ye kontravaryant dönüşüm olma ve (Y_1, X_1)'den (Y_2, X_2)'ye kovaryant dönüşüm olma şartlarını da sağlamaktadır. Benzer bir durum bir kontravaryant dönüşüm verildiğinde de geçerlidir.

Aşağıda aynı fonksiyonel değerleri alan kovaryant ve kontravaryant dönüşümlerden daha kolay bahsedebilmek için gerekli olacak bazı gösterimler ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.10. $f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{f} : (X_1, Y_1) \mathrel{\nearrow\!\!\!\!\searrow} \overleftrightarrow{(X_2, Y_2)}$$

$$\overleftarrow{f} : \overleftrightarrow{(X_1, Y_1)} \mathrel{\nearrow\!\!\!\!\searrow} (X_2, Y_2)$$

$$\overleftrightarrow{f} : \overleftrightarrow{(X_1, Y_1)} \rightrightarrows \overleftrightarrow{(X_2, Y_2)}$$

kovaryant ve kontravaryant dönüşümleri her $z \in X_1 \cup Y_1$ için

$$f(z) = \overrightarrow{f}(z) = \overleftarrow{f}(z) = \overleftrightarrow{f}(z)$$

olacak şekilde tanımlanır. Benzer şekilde bir $f : (X_1, Y_1) \mathrel{\nearrow\!\!\!\!\searrow} (X_2, Y_2)$ kontravaryant dönüşümü verildiğinde

$$\overrightarrow{f} : (X_1, Y_1) \rightrightarrows \overleftrightarrow{(X_2, Y_2)}$$

$$\overleftarrow{f} : \overleftrightarrow{(X_1, Y_1)} \rightrightarrows (X_2, Y_2)$$

$$\overleftrightarrow{f} : \overleftrightarrow{(X_1, Y_1)} \mathrel{\nearrow\!\!\!\!\searrow} \overleftrightarrow{(X_2, Y_2)}$$

kovaryant ve kontravaryant dönüşümleri her $z \in X_1 \cup Y_1$ için

$$f(z) = \overrightarrow{f}(z) = \overleftarrow{f}(z) = \overleftrightarrow{f}(z)$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada $\overrightarrow{f}$, $\overleftarrow{f}$ ve $\overleftrightarrow{f}$'e sırasıyla f'in sağ karşıtı (*İng. right opposite*), sol karşıtı (*İng. left opposite*) ve karşıtı (*İng. opposite*) denir.

Bu tanımlara göre $\overset{\rightrightarrows}{f} = \overset{\leftleftarrows}{f} = \overset{\substack{\leftrightarrow \\ \leftrightarrow}}{f} = f$ ve $\overset{\leftrightarrows}{f} = \overset{\rightleftarrows}{f} = \overleftrightarrow{f}$ gibi eşitliklerin varlığı kolayca görülmektedir.

Küme fonksiyonları olarak bakıldığında f, $\overrightarrow{f}$, $\overleftarrow{f}$ ve $\overleftrightarrow{f}$ eşit olabilirken, kovaryant ve kontravaryant dönüşümler olarak ele alındıklarında bunların hepsi teorik anlamda birbirinden farklı olarak alınmaktadır. Genelde kontravaryant dönüşümlerle ilgili bir özellik, sağ karşıtlar ele alınarak kovaryant dönüşümlerin daha önce bilinen özelliklerinden direkt olarak elde edilebilse de bazı durumlarda kovaryant dönüşümler için sağlanan bir özellik kontravaryant dönüşümler için sağlanmayabilmekte veya bunun tersi bir durum oluşabilmektedir. Örneğin $X \neq Y$ olması hâlinde bir $f : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ kontravaryant özdönüşümü verildiğinde, $\overrightarrow{f} : (X, Y) \rightrightarrows \overleftrightarrow{(X, Y)}$ kovaryant dönüşümü bir özdönüşüm olmayacağından, kovaryant özdönüşüm ve kontravaryant özdönüşüm kavramları için elde edilen sonuçlar birbirinden farklı olabilmektedir.

Tanım 3.1.11. $f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ ve $g : (X_2, Y_2) \rightrightarrows (X_3, Y_3)$ olmak üzere her $z \in X_1 \cup Y_1$ için $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ ile tanımlanan $g \circ f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_3, Y_3)$ dönüşümüne g ile f'in bileşkesi denir.

$f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ ve $g : (X_2, Y_2) \rightrightarrows (X_3, Y_3)$ kovaryant dönüşümleri verildiğinde Tanım 3.1.8 gereği $f[X_1] \subseteq X_2$, $f[Y_1] \subseteq Y_2$, $g[X_2] \subseteq X_3$ ve $g[Y_2] \subseteq Y_3$ olduğundan $(g \circ f)[X_1] = g[f[X_1]] \subseteq g[X_2] \subseteq X_3$ ve $(g \circ f)[Y_1] = g[f[Y_1]] \subseteq g[Y_2] \subseteq Y_3$ olup $g \circ f$ gerçekten de (X_1, Y_1)'den (X_3, Y_3)'e bir dönüşüm olma şartını sağlar.

Tanım 3.1.12. (X, Y) bir küme ikilisi olmak üzere her $z \in X \cup Y$ için $f(z) = z$ ile tanımlanan $f : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ dönüşümüne (X, Y) küme ikilisi üzerinde birim dönüşüm denir ve $\mathrm{I}_{X,Y}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.1.13. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) küme ikilileri ve $f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ olsun. Eğer bir $g : (X_2, Y_2) \rightrightarrows (X_1, Y_1)$ dönüşümü için $g \circ f = \mathrm{I}_{X_1,Y_1}$ ve $f \circ g = \mathrm{I}_{X_2,Y_2}$ oluyorsa g dönüşümüne f'in tersi denir ve $g = f^{-1}$ biçiminde gösterilir.

Örnek 3.1.14. $X_1 = \{a, b, c\}$, $Y_1 = \{c, d\}$, $X_2 = \{1, 2, 3\}$, $Y_2 = \{2, 3, 4\}$ olmak üzere $f : X_1 \cup Y_1 \to X_2 \cup Y_2$ fonksiyonu $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$ ile tanımlansın. Bu durumda $f[X_1] \subseteq X_2$ ve $f[Y_1] \subseteq Y_2$ olduğundan f bir kovaryant dönüşüm, yani $f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ olur. f birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan $f^{-1} : X_2 \cup Y_2 \to X_1 \cup Y_1$ tersi vardır ve $f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(2) = b$, $f^{-1}(3) = c$, $f^{-1}(4) = d$ ile tanımlıdır. Bununla birlikte $f^{-1}[X_2] \subseteq X_1$, ancak $f^{-1}[Y_2] = \{b, c, d\} \nsubseteq Y_1$ olduğundan f^{-1}, (X_2, Y_2)'den (X_1, Y_1)'e bir kovaryant dönüşüm olma şartını sağlamaz. Dolayısıyla f'in bir kovaryant dönüşüm olarak tersi mevcut değildir.

3.2. Çift Kutuplu Metrik Uzaylar

Bu kısımda çalışmanın temelini oluşturan çift kutuplu metrik uzaylar ifade edilecektir.

Tanım 3.2.1. (X, Y) boş olmayan kümelerin ikilisi olmak üzere bir $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki aksiyomlar göz önüne alınsın.

(B0) $\forall (x, y) \in X \times Y,\ d(x, y) = 0 \implies x = y$

(B1) $\forall u \in X \cap Y,\ d(u, u) = 0$

(B2) $\forall u, v \in X \cap Y,\ d(u, v) = d(v, u)$

(B3) $\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y,\ d(x, y) \leq d(x, y') + d(x', y') + d(x', y)$.

Eğer (B0), (B1), (B2) ve (B3) aksiyomları sağlanıyorsa d'ye (X, Y) üzerinde bir çift kutuplu metrik (*İng. bipolar metric*) denir. Diğer yandan, eğer (B1) ve (B2) aksiyomları sağlanıyorsa d'ye (X, Y) üzerinde bir çift kutuplu pseudo yarı metrik (*İng. bipolar pseudo-semimetric*) denir. Benzer şekilde, eğer (B1), (B2) ve (B3) aksiyomları sağlanıyorsa d'ye (X, Y) üzerinde bir çift kutuplu pseudo metrik (*İng. bipolar pseudo-metric*) denir. d bir (X, Y) küme ikilisi üzerinde bir çift kutuplu (pseudo (yarı)) metrik ise, (X, Y, d) üçlüsüne bir çift kutuplu (pseudo (yarı)) metrik uzay denir.

Her ne kadar yukarıda tanımlanan en genel yapı çift kutuplu pseudo yarı metrik uzaylarsa da, bu çalışmada basitlik amacıyla genellikle çift kutuplu metrik uzaylar merkez alınmıştır.

(B3) özelliği dörtgen eşitsizliği olarak adlandırılmıştır. Bunun, literatürde dörtgensel metrik uzaylara atfedilen dörtgen eşitsizliğinden biraz farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca (B1) de hesaba katıldığında (B3), $x \in X$, $y \in Y$ ve $z \in X \cap Y$ ise; $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ şeklindeki üçgen eşitsizliğini de gerektirir.

Örnek 3.2.2. (X, d) bir (pseudo (yarı)) metrik uzay ise bu durumda (X, X, d) üçlüsü bir çift kutuplu (pseudo (yarı)) metrik uzay olur. Özel olarak d, $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı alışılmış metriği göz önüne alınsın. Bu durumda $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, d)$ çift kutuplu metrik uzayı, $\mathbb{R}$ için bir çift kutuplu metrik uzaydır. Bu uzaya alışılmış çift kutuplu metrik uzay denir.

Örnek 3.2.3. $X = \{x, v\}, Y = \{v, y, z\}$ olsun. $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $d(x, v) = 3$, $d(x, y) = 1$, $d(x, z) = 4$, $d(v, v) = 0$, $d(v, y) = 2$ ve $d(v, z) = 5$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzaydır.

Örnek 3.2.4. $X, Y \neq \emptyset$ iki küme olacak şekilde her $(x, y) \in X \times Y$ için $e_{X,Y} : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$e_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ 1, & x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(X, Y, e_{X,Y})$ bir çift kutuplu metrik uzaydır. $e_{X,Y}$'ye (X, Y) üzerindeki diskret çift kutuplu metrik ve $(X, Y, e_{X,Y})$ uzayına da bir diskret çift kutuplu metrik uzay (*İng. discrete bipolar metric space*) denir.

Tanım 3.2.5. (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayı göz önüne alınsın. Eğer (X, Y) küme ikilisi ayrık ise (X, Y, d) uzayına iki parçalı (*İng. bipartite*) denir.

Örnek 3.2.6. Y, $\mathbb{R}$'den $[1, 3]$ kapalı aralığına tanımlı bütün fonksiyonların kümesi, yani $Y = [1, 3]^{\mathbb{R}}$ olmak üzere $d : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ ve her $f \in Y$ için $d(x, f) = f(x)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}, Y, d)$ bir çift kutuplu metrik uzaydır ve iki parçalıdır.

Tanım 3.2.7. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olmak üzere, her $(y, x) \in Y \times X$ için $\bar{d}(y, x) = d(x, y)$ biçiminde tanımlanan $\bar{d} : Y \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu (Y, X) üzerinde bir çift kutuplu metrikdir. Burada $(Y, X, \bar{d})$ uzayına (X, Y, d) uzayının karşıtı denir ve $\overleftrightarrow{(X, Y, d)} = (Y, X, \bar{d})$ biçiminde gösterilir.

Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayı için $\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{(X, Y, d)}} = (X, Y, d)$ olduğu kolayca söylenebilir.

3.3. Çift Kutuplu Metrik Uzaylar ve Metrik Uzaylar Arasındaki İlişki

Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında $X = Y$ eşitliği varsa, yani uzay (X, X, d) biçiminde ise, bu tanım (X, d)'nin metrik uzay olması tanımına denk olmaktadır. Bu şekilde her bir (X, d) metrik uzayı, (X, X, d) çift kutuplu metrik uzayı ile özdeş tutulmakta ve (X, X, d) yerine (X, d) yazılmaktadır. Böylece çift kutuplu metrik uzayların teorisi, metrik uzaylar teorisini kapsayacak şekilde genelleştirmekte ve çift kutuplu metrik uzaylarda tanımlanan veya tanımlanacak kavramların metrik uzaylardaki kavramlarla $X = Y$ eşitliği altında denk olması şartı aranmaktadır. Dolayısıyla her metrik uzay bir çift kutuplu metrik uzaydır. Bu kısımda çift kutuplu metrik uzaylar ve metrik uzaylar arasındaki bağlantılardan bazıları incelenmektedir.

Önerme 3.3.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere (X, X, d) üçlüsünün bir çift kutuplu metrik uzay (çift kutuplu pseudo metrik uzay, çift kutuplu pseudo yarı metrik uzay) olması için gerek ve yeter şart, (X, d)'nin bir metrik uzay (pseudo metrik uzay, pseudo yarı metrik uzay) olmasıdır.

Bu önermeden d'nin bir X kümesi üzerinde bir metrik olması ile (X, X) küme ikilisi üzerinde bir çift kutuplu metrik olması arasında, d'nin tanım ve değer kümeleri ve sağlaması gereken özellikler bakımından hiçbir fark olmadığı sonucu çıkarılabilir.

Önerme 3.3.2. (X, Y, d) bir çift kutuplu (pseudo (yarı)) metrik uzay, (A, B) boştan farklı kümelerin ikilisi, $(A, B) \Subset (X, Y)$ olsun. $d|_{A\times B}$, d fonksiyonunun $A \times B$ kümesine kısıtlanışını göstermek üzere $(A, B, d|_{A\times B})$ üçlüsü de bir çift kutuplu (pseudo (yarı)) metrik uzaydır.

Tanım 3.3.3. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay, (A, B) boştan farklı kümelerin ikilisi olsun. Eğer Tanım 3.1.5 anlamında $(A, B) \Subset (X, Y)$ ise $(A, B, d|_{A\times B})$ uzayı (X, Y, d) uzayının bir çift kutuplu alt uzayı (*İng. bipolar subspace*) olarak adlandırılır. Eğer $(A, B) \subset (X, Y)$ ise $(A, B, d|_{A\times B})$'ye (X, Y, d)'nin bir alt uzayı (*İng. subspace*) denir. (X, Y, d) uzayı iki parçalı değil ise, (X, Y, d)'nin $(X \cap Y, d|_{(X\cap Y)\times(X\cap Y)})$ alt uzayına (X, Y, d) uzayının merkezi (*İng. center*) denir.

Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayının bir $(A, B, d|_{A\times B})$ çift kutuplu alt uzayı alınsın. Burada $d|_{A\times B}$ ve d fonksiyonları $A \times B$ üzerinde aynı değerleri alırlar. Dolayısıyla $(A, B, d|_{A\times B})$ çift kutuplu alt uzayı bazen (A, B, d) şeklinde de gösterilebilir. Benzer durum alt uzaylar için de geçerlidir.

Aşağıdaki önerme çift kutuplu metrik uzaylardaki alt uzay tanımı ile metrik uzaylardaki alt uzay tanımının çelişmediğini göstermektedir.

Önerme 3.3.4. Eğer bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayı bir metrik uzay ise, (X, Y, d)'nin her alt uzayı da bir metrik uzaydır.

Aşağıdaki iki örnekte görüleceği üzere, bir çift kutuplu metrik uzayın bir alt uzayının metrik uzay olması gerekmediği gibi bir metrik uzayın bir çift kutuplu alt uzayının da metrik uzay olması gerekmez.

Örnek 3.3.5. $X = [0, \infty), Y = (-\infty, 0]$ olmak üzere $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$, $d(x, y) = x^2 + y^2$ ile verilen d fonksiyonu (X, Y) üzerinde bir çift kutuplu metriktir. $U = [-1, 1]$ kümesi için $(X \cap U, Y \cap U, d) = ([0, 1], [-1, 0], d)$ olup $[0, 1] \neq [-1, 0]$ olduğundan, (X, Y, d)'nin alt uzayı olan $([0, 1], [-1, 0], d)$ çift kutuplu metrik uzayı bir metrik uzay değildir.

Örnek 3.3.6. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, d) = (\mathbb{R}, d)$ alışılmış çift kutuplu metrik uzayı verilsin. $A = [0, 1]$, $B = [-1, 0]$ olarak alınırsa tanım gereği (A, B, d), $(\mathbb{R}, d)$'nin bir çift kutuplu alt uzayı olur. Dolayısıyla (A, B, d) çift kutuplu metrik uzayı bir metrik uzayın çift kutuplu alt uzayı olmasına rağmen, $A \neq B$ olduğundan bir metrik uzay değildir. Diğer yandan, bu örnekte bir $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayından, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı iki A ve B alt kümesi alınarak, metrik olması gerekmeyen (A, B, d) çift kutuplu metrik uzayı elde edilmiştir.

Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında, biri X diğeri Y'de olan noktalar arasındaki uzaklık tanımlı iken $X \backslash Y$'den seçilen iki noktanın veya $Y \backslash X$'den seçilen iki noktanın arasındaki uzaklık tanımlı değildir. Dolayısıyla, örneğin $x_1, x_2 \in X$ ise, aynı zamanda $x_2 \in Y$ olmadıkça $d(x_1, x_2)$ gösterimi anlamlı değildir. Bununla birlikte, X'in noktalarının kendi arasındaki olası uzaklıklar hakkında Y'nin noktaları referans alınarak bir dereceye kadar fikir sahibi olunabilir.

Önerme 3.3.7. (X, Y, d) bir çift kutuplu pseudo metrik uzay olsun. Bu durumda her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d_X(x_1, x_2) = \sup_{y \in Y} |d(x_1, y) - d(x_2, y)|$$

biçiminde tanımlı $d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu X üzerinde; her $y_1, y_2 \in Y$ için

$$d_Y(y_1, y_2) = \sup_{x \in X} |d(x, y_1) - d(x, y_2)|$$

biçiminde tanımlı $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ise Y üzerinde bir pseudo metriktir.

Aşağıdaki örnekte, yukarıda verilen önermenin çift kutuplu pseudo yarı metrik uzaylara uyarlanamayacağı, yani (X, Y, d) bir çift kutuplu pseudo yarı metrik uzay iken d_X ve d_Y'nin X ve Y üzerinde pseudo yarı metrik olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 3.3.8. $a, b \notin \mathbb{R}$ olmak üzere $X = \{a, b\}$ olsun. $d : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $y \in \mathbb{R}$ için $d(a, y) = |3y|$, $d(b, y) = |2y|$ biçiminde tanımlansın. d, (B1) ve (B2) aksiyomlarını sağladığından $(X, \mathbb{R}, d)$ bir çift kutuplu pseudo yarı metrik uzaydır. Ancak,

$$d_X(a, b) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |d(a, y) - d(b, y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} ||3y| - |2y|| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |y| = \infty$$

olduğundan Önerme 3.3.7'de verilen d_X fonksiyonu X üzerinde bir pseudo yarı metrik değildir.

Tanım 3.3.9. (X, Y, d) bir çift kutuplu pseudo metrik uzay olsun. Önerme 3.3.7'nin ifadesinde tanımlanan d_X ve d_Y pseudo metriklerine sırasıyla X ve Y üzerinde d'nin ürettiği iç pseudo metrikler (*İng. inner pseudo-metrics*) denir. (X, d_X) ve (Y, d_Y)'ye de (X, Y, d)'nin ürettiği iç pseudo metrik uzaylar denir.

Tanım 3.3.10. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer X üzerindeki d_X pseudo metriği bir metrik ise Y'nin X'i karakterize ettiği söylenir. Y üzerindeki d_Y pseudo metriği bir metrik ise X'in Y'yi karakterize ettiği söylenir. Eğer X, Y'yi, Y de X'i karakterize ediyorsa (X, Y, d) uzayına çifte karakterize edilmiş veya bikarakterize (*İng. bicharacterized*) denir.

Örnek 3.3.11. $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ küresi verilsin. Y, $\mathbf{S}^2$'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. $d : \mathbf{S}^2 \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $d(p, q)$, p ile q arasındaki geodezik uzaklık olacak şekilde tanımlanırsa $(\mathbf{S}^2, Y, d)$ bir çift kutuplu metrik uzay olur. Bu durumda $(\mathbf{S}^2, Y, d)$'nin çifte karakterize edilmiş olması için gerek ve yeter şart küre üzerinde hiçbiri birbirinin tam karşıt noktası olmayan en az üç noktanın Y kümesinde bulunmasıdır.

3.4. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Yakınsaklık ve Tamlık

Bir (X, d) metrik uzayı üzerindeki bir dizi, X kümesi üzerindeki bir dizi olarak tanımlandığı gibi, bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayı üzerindeki bir (çift) dizi, (X, Y) küme ikilisi üzerindeki bir (çift) dizi olarak tanımlanır.

Tanım 3.4.1. Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzay, (x_n) bir sol dizi ve y de bir sağ nokta olsun. Her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ olması $d(x_n, y) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (x_n) sol dizisi y sağ noktasına yakınsaktır denir ve $(x_n) \rightharpoondown y$ veya $\lim\limits_{n \rightharpoondown \infty} x_n = y$ biçiminde gösterilir. Benzer şekilde, bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayından (y_n) bir sağ dizi ve x bir sol nokta olmak üzere her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ olması $d(x, y_n) < \varepsilon$ olmasını gerektirecek şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (y_n) sağ dizisi x sol noktasına yakınsaktır denir ve $(y_n) \rightharpoonup x$ ya da $\lim\limits_{n \rightharpoonup \infty} y_n = x$ biçiminde gösterilir. Eğer bir (u_n) merkezi dizisi ve u merkezi noktası için hem $(u_n) \rightharpoondown u$ hem de $(u_n) \rightharpoonup u$ ise bu durumda (u_n) dizisi u'ya yakınsaktır ve bu durum $(u_n) \rightarrow u$ veya $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ biçiminde gösterilir.

Bir çift kutuplu metrik uzayda, sol noktaların ancak sağ noktalara olan uzaklıkları tanımlı olduğundan, bir sol dizi ancak bir sağ noktaya ve benzer şekilde bir sağ dizi de ancak bir sol noktaya yakınsayabilir.

Aşağıdaki önerme, sağ dizilerin yakınsaması ile sol dizilerin yakınsamaları arasında bir dualite ilgisi olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 3.4.2. Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında $(z_n) \rightharpoondown z$ olması için gerek ve yeter şart $\overleftrightarrow{(X, Y, d)}$ çift kutuplu metrik uzayında $(z_n) \rightharpoonup z$ olması, ve benzer şekilde (X, Y, d) çift kutuplu uzayında $(z_n) \rightharpoonup z$ olması için gerek ve yeter şart ise $\overleftrightarrow{(X, Y, d)}$ çift kutuplu uzayında $(z_n) \rightharpoondown z$ olmasıdır.

Örnek 3.4.3. $d : (0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $d(x, y) = |x - y|$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $((0, 1], [0, 1], d)$ bir çift kutuplu metrik uzaydır. Bu uzayda $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ merkezi dizisini göz önüne alalım. Burada $(u_n) \rightharpoondown 0$ olduğu kolayca görülebilir. Fakat $0 \notin (0, 1]$ olduğundan $d\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ ifadesi tanımsızdır. Dolayısıyla $(u_n) \rightharpoonup 0$ yakınsaması gerçeklenemez.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi bir çift kutuplu metrik uzayda (u_n) bir merkezi dizi ise $(u_n) \rightharpoondown u$ ve $(u_n) \rightharpoonup u$ durumlarından her ikisi de aynı anda geçerli olmayabilir. (u_n) bir sağ dizi olduğundan $d(u, u_n)$'nun tanımlı olması için u'nun bir sol nokta olması gerekir. Bu durumda (u_n) bir sol dizi olarak u sol noktasına yakınsayamaz. Bu yakınsamanın gerçeklenebilmesi için u'nun bir sağ nokta ve dolayısıyla merkezi nokta olması gerekir. Gerçekten de (u_n) merkezi dizi ve u da merkezi nokta ise, hem $d(u_n, u)$ hem de $d(u, u_n)$ tanımlı olacağından (B2) aksiyomundan $d(u_n, u)$ ve $d(u, u_n)$ ifadeleri eşit olur. Burada u_n'nun sol dizi olarak u'ya yakınsaması sağ dizi olarak da u'ya yakınsamasını gerektirir. Bu durum çift kutuplu metrik uzaylardaki yakınsaklık tanımının, metrik uzaylar için bilinen yakınsaklık tanımıyla çelişmediğini göstermektedir.

Önerme 3.4.4. Bir (X, d) metrik uzayı (X, X, d) çift kutuplu metrik uzayı olarak verilsin. (X, X, d) çift kutuplu metrik uzayında $(u_n) \to u$ olması için gerek ve yeter şart, (X, d) metrik uzayında $(u_n) \to u$ olmasıdır. Ayrıca (X, X, d) uzayında $(u_n) \rightharpoondown u$, $(u_n) \rightharpoonup u$ ve $(u_n) \to u$ ifadeleri birbirine denktir.

Aşağıdaki önerme, çift kutuplu metrik uzaylardaki yakınsama problemini reel sayılara indirgeyerek uygulamada kolaylık sağlamaktadır.

Önerme 3.4.5. Bir (X, Y, d) çift kutuplu pseudo metrik uzayı verilsin. $(x_n) \rightharpoondown y$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$'de $(d(x_n, y)) \to 0$ olması ve $(y_n) \rightharpoonup x$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$'de $(d(x, y_n)) \to 0$ olmasıdır.

Metrik uzaylardaki durumdan farklı olarak çift kutuplu metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin birden fazla limiti olabilir. Aşağıdaki örnekte bu durum gösterilmiştir.

Örnek 3.4.6. $X = (1, \infty)$, $Y = [-1, 1]$ olmak üzere $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $(x, y) \in X \times Y$ için $d(x, y) = x^2 - y^2$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda (X, Y, d) üçlüsü bir çift kutuplu metrik uzaydır. Bu uzayda $(x_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ sol dizisi alınsın. $-1, 1 \in Y$ için $\mathbb{R}$'de

$$(d(x_n, -1)) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - (-1)^2\right) = \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to 0$$

ve

$$(d(x_n, 1)) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1^2\right) = \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to 0$$

olduğundan (X, Y, d) üzerinde hem $(x_n) \rightharpoondown -1$ hem de $(x_n) \rightharpoondown 1$ dir.

Çift kutuplu metrik uzaylar üzerinde elde edilebilecek birçok sonuç için bir dizinin limitinin tek olması önem taşıdığından, limitin hangi durumlarda tek olduğu belirten aşağıdaki iki teorem ifade edilmiştir.

Teorem 3.4.7. Eğer bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayı çifte karakterize edilmiş ise yakınsak her dizinin limiti tektir.

Teorem 3.4.8. Eğer bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında bir dizi merkezi noktaya yakınsak ise bu dizinin limiti tektir.

Tanım 3.4.9. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer bir $A \subseteq X \cup Y$ kümesindeki her yakınsak dizinin limiti yine A da ise bu küme kapalıdır denir. Bu durumda $(A \cap X, A \cap Y, d)$ alt uzayının bir kapalı alt uzay (*İng. closed subspace*) olduğu söylenir.

Tanım 3.4.10. (x_n, y_n) bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında bir çift dizi olsun. Eğer hem (x_n) sol dizisi hem de (y_n) sağ dizisi yakınsak ise (x_n, y_n) çift dizisinin bu uzayda yakınsak olduğu söylenir. Eğer (x_n) sol dizisi ve (y_n) sağ dizisi ortak bir noktaya yakınsak ise, bu durum (x_n, y_n) çift dizisinin bu noktaya çifte yakınsak ya da biyakınsak (*İng. biconvergent*) olması şeklinde adlandırılır.

Bir çift kutuplu metrik uzayda bir dizi ya bir sol dizi ya da bir sağ dizi olduğundan, dizinin terimleri arasında merkezi noktaların bulunmaması halinde, dizinin terimlerinin birbirine olan uzaklığı hesaplanamayacağından Cauchy dizisi tanımı çift kutuplu metrik uzaylarda çift dizi aracılığıyla ifade edilmiştir.

Tanım 3.4.11. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve (x_n, y_n) bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n \geq n_0$ olmak üzere $d(x_n, y_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n, y_n)'e bir Cauchy çift dizisi veya Cauchy bidizisi (*İng. Cauchy bisequence*) denir.

Önerme 3.4.12. Bir (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında bir (x_n, y_n) çift dizisinin bir Cauchy çift dizisi olması için gerek ve yeter şart, (y_n, x_n) çift dizisinin $\overleftrightarrow{(X, Y, d)}$ uzayında bir Cauchy çift dizisi olmasıdır.

Önerme 3.4.13. Bir çift kutuplu metrik uzayda her çifte yakınsak çift dizi bir Cauchy çift dizisidir.

Tanım 3.4.10'dan her çifte yakınsak çift dizinin yakınsak olduğu kolayca görülebilir. Aşağıdaki önerme bu ifadenin tersinin de doğru olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.4.14. Bir çift kutuplu metrik uzayda her yakınsak Cauchy çift dizisi çifte yakınsaktır.

Tanım 3.4.15. Her Cauchy çift dizisinin yakınsak olduğu bir çift kutuplu metrik uzaya tam (*İng. complete*) çift kutuplu metrik uzay denir.

Önerme 3.4.14'ten faydalanılarak aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.4.16. Bir tam çift kutuplu metrik uzayda her Cauchy çift dizisi çifte yakınsaktır.

Önerme 3.4.17. Bir tam çift kutuplu metrik uzayın her kapalı alt uzayı da tamdır.

Önerme 3.4.18. Bir (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart (X, X, d) çift kutuplu metrik uzayının tam olmasıdır

3.5. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Süreklilik

(X_1, Y_1, d_1) ve (X_2, Y_2, d_2) gibi iki çift kutuplu metrik uzay alındığında bir $f : (X_1, Y_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2)$ kovaryant dönüşümü veya $g : (X_1, Y_1) \rightleftarrows (X_2, Y_2)$ kontravaryant dönüşümü, $f : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2, d_2)$ veya $g : (X_1, Y_1, d_1) \rightleftarrows (X_2, Y_2, d_2)$ biçiminde (X_1, Y_1, d_1)'den (X_2, Y_2, d_2)'ye tanımlanır ve bunların d_1 ve d_2 metrikleri üzerinde bazı özellikleri verilir.

Tanım 3.5.1. (X_1, Y_1, d_1) ve (X_2, Y_2, d_2) çift kutuplu metrik uzaylar, $f : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2, d_2)$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X_1$, $y_0 \in Y_1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $y \in Y_1$ ve $d_1(x_0, y) < \delta$ iken $d_2(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f dönüşümüne x_0 da sol sürekli (*left continuous*) denir. Benzer şekilde, her $\varepsilon > 0$ için, $x \in X_1$ ve $d_1(x, y_0) < \delta$ iken $d_2(f(x), f(y_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f dönüşümüne y_0 da sağ sürekli (*right continuous*) denir. Eğer f dönüşümü (X_1, Y_1, d_1) uzayının her sol noktasında sol sürekli ve her sağ noktasında sağ sürekli ise f'e sürekli denir. $g : (X_1, Y_1, d_1) \rightleftarrows (X_2, Y_2, d_2)$ bir kontravaryant dönüşüm, $x_0 \in X_1$ ve $y_0 \in Y_1$ olmak üzere eğer $\overrightarrow{g} : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows \overleftrightarrow{(X_2, Y_2, d_2)}$ dönüşümü x_0 da sol sürekli ise g kontravaryant dönüşümüne x_0 da sol sürekli, $\overrightarrow{g}$ dönüşümü y_0 da sağ sürekli ise g

kontravaryant dönüşümüne y_0 da sağ sürekli ve $\overrightarrow{g}$ dönüşümü sürekli ise g kontravaryant dönüşümüne sürekli denir.

Buradaki sol ve sağ süreklilik kavramlarının $\mathbb{R}$ deki soldan ve sağdan süreklilik kavramlarıyla bir ilgisinin olmadığına dikkat edilmelidir.

Önerme 3.5.2. Bir f kovaryant veya kontravaryant dönüşümünün bir noktada sol sürekli olması için gerek ve yeter şart $\overleftrightarrow{f}$ karşıtının bu noktada sağ sürekli olması; f'in bir noktada sağ sürekli olması için gerek ve yeter şart $\overleftrightarrow{f}$ karşıtının aynı noktada sol sürekli olması ve f'in uzayın tamamında sürekli olması için gerek ve yeter şart $\overleftrightarrow{f}$ karşıtının uzayın tamamında sürekli olmasıdır.

Aşağıdaki örnek bir merkezi noktada sol süreklilik ve sağ süreklilik kavramlarının birbirlerini gerektirmediğini göstermektedir.

Örnek 3.5.3. $X = [0,1]$, $Y = \{0,1\}$ olmak üzere $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$, $d(x,y) = |x - y|$ olacak şekilde (X,Y,d) çift kutuplu metrik uzayı verilsin. $[\![z]\!]$, z'nin tam değerini göstermek üzere $f : (X,Y,d) \rightrightarrows (X,Y,d)$ dönüşümü her $z \in X \cup Y$ için $f(z) = [\![z]\!]$ biçiminde tanımlansın. $1 \in X$ sol noktasını ele alınsın. $0 \in Y$ için

$$d(1,0) = 1,\ d(f(1), f(0)) = d(1,0) = 1$$

ve $1 \in Y$ için

$$d(1,1) = 0,\ d(f(1), f(1)) = d(1,1) = 0$$

olur. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta = 1$ olarak seçilirse $y \in Y$ için $d(1,y) < \delta$ iken $y = 1$ olur. Bu durumda

$$d(f(1), f(y)) = d(f(1), f(1)) = d(1,1) = 0 < \varepsilon$$

olduğu görülür. Buradan her $\varepsilon > 0$ için f dönüşümünün 1 noktasında sol sürekli olduğu söylenir. Şimdi de $1 \in Y$ sağ noktası olarak göz önüne alınsın. Her $x \in X$ için $d(x,1) = |x-1| = 1-x$ olup, $x \neq 1$ olması durumunda $d(f(x), f(1)) = d(0,1) = 1$ ve $x = 1$ olması durumunda $d(f(1), f(1)) = 0$ olur. $\varepsilon = 1 > 0$ sayısı ele alınsın. Her $x \in X$ için $d(x,1) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(1)) < 1$ önermesi doğru olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunmalıdır. $d(f(x), f(1)) < 1$ olacak şekildeki tek $x \in X$ noktası $x = 1$ olduğundan bu ifade, $1 - x < \delta \Longrightarrow x = 1$ ifadesine denktir. Bu durumda seçilebilecek her $\delta > 0$

sayısı için, $x = 1 - \dfrac{\delta}{2}$ sayısı $1 - x < \delta$ eşitsizliğini sağlarken $x \neq 1$ olduğundan bu önerme sağlanmaz. Dolayısıyla f, 1 noktasında sağ sürekli değildir.

Tanım 3.5.4. (X_1, Y_1, d_1) ve (X_2, Y_2, d_2) çift kutuplu metrik uzaylar, $x_0 \in X_1$ ve $y_0 \in Y_1$ olsun. (X_1, Y_1, d_1) uzayında $(y_n) \rightharpoonup x_0$ iken (X_2, Y_2, d_2)'de $(f(y_n)) \rightharpoonup f(x_0)$ oluyorsa $f : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2, d_2)$ dönüşümüne x_0 da dizisel sol sürekli (*sequential left continuous*) denir. (X_1, Y_1, d_1)'de $(x_n) \rightharpoondown y_0$ iken (X_2, Y_2, d_2)'de $(f(x_n)) \rightharpoondown f(y_0)$ oluyorsa $f : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2, d_2)$ dönüşümüne y_0 noktasında dizisel sağ sürekli (*sequential right continuous*) denir. Eğer bir $f : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, Y_2, d_2)$ dönüşümü (X_1, Y_1, d_1) uzayının her sol noktasında dizisel sol sürekli ve her sağ noktasında dizisel sağ sürekli ise f'e dizisel sürekli denir. $g : (X_1, Y_1, d_1) \rightleftarrows (X_2, Y_2, d_2)$ bir kontravaryant dönüşüm, $x_0 \in X_1$ ve $y_0 \in Y_1$ olmak üzere eğer $\overrightarrow{g} : (X_1, Y_1, d_1) \rightrightarrows \overleftrightarrow{(X_2, Y_2, d_2)}$ dönüşümü x_0 da dizisel sol sürekli ise g'nin x_0 da dizisel sol sürekli, $\overrightarrow{g}$ dönüşümü y_0 da dizisel sağ sürekli ise g'nin y_0 da dizisel sağ sürekli ve $\overrightarrow{g}$ dönüşümü dizisel sürekli ise g kontravaryant dönüşümünün dizisel sürekli olduğu söylenir.

Önerme 3.5.5. Bir f kovaryant veya kontravaryant dönüşümünün bir noktada dizisel sol sürekli (bir noktada dizisel sağ sürekli, uzayın tamamında dizisel sürekli) olması için gerek ve yeter şart $\overleftrightarrow{f}$ karşıtının aynı noktada dizisel sağ sürekli (aynı noktada dizisel sol sürekli, uzayın tamamında dizisel sürekli) olmasıdır.

Önerme 3.5.6. Çift kutuplu metrik uzaylar arasında tanımlanan bir kovaryant veya bir kontravaryant dönüşümün bir sol noktada sol sürekli olması için gerek ve yeter şart aynı noktada dizisel sol sürekli olması, bir sağ noktada sağ sürekli olması için gerek ve yeter şart aynı noktada dizisel sağ sürekli olması ve uzayın tamamında sürekli olması için gerek ve yeter şart dizisel sürekli olmasıdır.

Önerme 3.5.7. Metrik uzaylarda bir $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ fonksiyonunun dizisel sürekli olması için gerek ve yeter şart, $f : (X_1, X_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, X_2, d_2)$ kovaryant dönüşümünün dizisel sürekli olmasıdır.

Metrik uzaylarda süreklilik ile dizisel sürekliliğin denkliği, Önerme 3.5.6 ve Önerme 3.5.7 kullanılarak aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.5.8. Metrik uzaylarda bir $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart, $f : (X_1, X_1, d_1) \rightrightarrows (X_2, X_2, d_2)$ kovaryant dönüşümünün sürekli olmasıdır.

Önerme 3.5.9. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olmak üzere (x_n) bir sol dizi, y bir sağ nokta, (y_n) bir sağ dizi ve x bir sol nokta olsun. Eğer $(x_n) \rightharpoondown y$ ve $(y_n) \rightharpoonup x$ ise $\mathbb{R}^+$ da $(d(x_n, y_n)) \to d(x, y)$ olur.

Önerme 3.5.10. Çift kutuplu metrik uzaylarda tanımlı iki sürekli dönüşümün bileşkesi de süreklidir.

3.6. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Banach ve Kannan Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, [25]'te verilmiş olan Banach ve Kannan sabit nokta teoremleri ispatları verilmeksizin kısaca ifade edilmiştir.

Tanım 3.6.1. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay, $f : (X, Y, d) \rightrightarrows (X, Y, d)$ bir kovaryant özdönüşüm olsun. Eğer her $(x, y) \in X \times Y$ için

(i) $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı varsa f'e Lipschitz sürekli (*İng. Lipschitz continuous*),

(ii) $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ oluyorsa f'e genişlemeyen (*İng. nonexpansive*),

(iii) $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ oluyorsa f'e büzülebilir veya kontraktif (*İng. contractive*),

(iv) $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde bir $0 < \lambda < 1$ sayısı bulunabiliyorsa f'e büzülme veya daralma (*İng. contraction*) denir. Benzer şekilde $g : (X, Y, d) \rightleftarrows (X, Y, d)$ bir kontravaryant özdönüşüm olmak üzere her $(x, y) \in X \times Y$ için

(i) $d(g(y), g(x)) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı bulunması,

(ii) $d(g(y), g(x)) \leq d(x, y)$ olması,

(iii) $d(g(y), g(x)) < d(x, y)$ olması ve

(iv) $d(g(y), g(x)) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde bir $0 < \lambda < 1$ sayısı bulunması

durumlarında g'ye sırasıyla Lipschitz sürekli, genişlemeyen, büzülebilir (veya kontraktif) ve büzülme (veya daralma) denir.

Önerme 3.6.2. Bir f kovaryant veya kontravaryant özdönüşümü büzülme ise büzülebilir, büzülebilir ise genişlemeyen, genişlemeyen ise Lipschitz süreklidir.

Teorem 3.6.3 (Banach Sabit Nokta Teoremi). [25] Bir tam çift kutuplu metrik uzayın her kovaryant büzülme özdönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 3.6.4 (Kontravaryant Banach Sabit Nokta Teoremi). [25] Bir tam çift kutuplu metrik uzayın her kontravaryant büzülme özdönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 3.6.5 (Kannan Sabit Nokta Teoremi). [25] (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay, $T : (X, Y, d) \rightleftarrows (X, Y, d)$ olsun. Eğer bir $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti,

$$d(Ty, Tx) \leq \alpha \left(d\left(x, Tx\right) + d\left(Ty, y\right)\right)$$

olmasını her $(x, y) \in X \times Y$ için sağlıyor ise bu takdirde $T : X \cup Y \to X \cup Y$ fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 3.6.6. [25] X, $\mathbb{R}$'nin tek noktadan oluşan bütün altkümelerinin ailesi ve Y, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan bütün kompakt altkümelerinin ailesi olsun. $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\{x\} \in X$ ve her $C \in Y$ için

$$d(\{x\}, C) = |x - \inf(C)| + |x - \sup(C)|$$

ile tanımlansın. Bu durumda (X, Y, d) üçlüsü bir tam çift kutuplu metrik uzay olur. $T : (X, Y, d) \rightleftarrows (X, Y, d)$ kontravaryant dönüşümü her $A \in X \cup Y$ için

$$TA = \left\{ \frac{\inf(A) + \sup(A) + 6}{8} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlansın. Bu kontravaryant dönüşüm $\alpha = \dfrac{1}{3}$ için

$$d(Ty, Tx) \leq \alpha \left(d\left(x, Tx\right) + d\left(Ty, y\right)\right)$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece T'nin bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de $\{1\} \in X \cap Y$ kümesi, bu kontravaryant dönüşümün tek sabit noktasıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde çift kutuplu metrik uzaylarda bazı genelleştirilmiş ve özel sabit nokta teoremleri ifade edilmiştir.

4.1. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda İkili Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda Bhaskar ve Lakshmikantham [33] tarafından metrik uzaylar üzerinde tanımlanan ve periyodik sınır değer problemlerinin, diferansiyel denklemlerin ve lineer olmayan integral denklemlerin çözümlerinin varlığının ve tekliğinin incelenmesinde faydalanılan, ikili (*İng. coupled*) sabit nokta teoremleri çift kutuplu metrik uzaylarda tanımlanmış ve bu teoremlerle ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Bu bölümde verilenler [34]'te yayınlanmıştır.

Tanım 4.1.1. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $F : (X^2, Y^2) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Eğer $F(a, b) = a$ ve $F(b, a) = b$ ise, $(a, b) \in X^2 \cup Y^2$'ye F'in bir ikili sabit noktası denir.

Teorem 4.1.2. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay, $F : (X^2, Y^2) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm ve k, l negatif olmayan sabitler olmak üzere $k + l < 1$ olsun. Eğer her $a, b \in X$, $p, q \in Y$ için

$$d(F(a, b), F(p, q)) \leq kd(a, p) + ld(b, q), \tag{4.1}$$

koşulu sağlanıyor ise, $F : X^2 \cup Y^2 \to X \cup Y$ bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat: $a_0, b_0 \in X$ ve $p_0, q_0 \in Y$ olsun. $a_1 = F(a_0, b_0)$, $b_1 = F(b_0, a_0)$, $p_1 = F(p_0, q_0)$, $q_1 = F(q_0, p_0)$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in X$ ve $p_1, q_1 \in Y$ alınsın. Benzer olarak, $a_2 = F(a_1, b_1)$, $b_2 = F(b_1, a_1)$, $p_2 = F(p_1, q_1)$, $q_2 = F(q_1, p_1)$ olacak şekilde $a_2, b_2 \in X$ ve $p_2, q_2 \in Y$ alınsın. Benzer yolla, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = F(a_n, b_n),\ b_{n+1} = F(b_n, a_n),\ p_{n+1} = F(p_n, q_n),\ q_{n+1} = F(q_n, p_n)$$

olacak şekilde (a_n, p_n) ve (b_n, q_n) çift dizileri elde edilir. $k + l = \lambda$ olsun. (4.1) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} d(a_n, p_{n+1}) &= d(F(a_{n-1}, b_{n-1}), F(p_n, q_n)), \\ &\leq kd(a_{n-1}, p_n) + ld(b_{n-1}, q_n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} d(b_n, q_{n+1}) &= d(F(b_{n-1}, a_{n-1}), F(q_n, p_n)), \\ &\leq kd(b_{n-1}, q_n) + ld(a_{n-1}, p_n) \end{aligned} \tag{4.3}$$

ifadeleri elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$e_n = d(a_n, p_{n+1}) + d(b_n, q_{n+1})$$

olsun. (4.2) ve (4.3) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} e_n &= d(a_n, p_{n+1}) + d(b_n, q_{n+1}) \\ &\leq kd(a_{n-1}, p_n) + ld(b_{n-1}, q_n) + kd(b_{n-1}, q_n) + ld(a_{n-1}, p_n) \\ &= (k+l)(d(a_{n-1}, p_n) + d(b_{n-1}, q_n)) \\ &= \lambda e_{n-1} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Bu durumda

$$0 \leq e_n \leq \lambda e_{n-1} \leq \lambda^2 e_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^n e_0 \tag{4.4}$$

olur. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} d(a_{n+1}, p_n) &= d(F(a_n, b_n), F(p_{n-1}, q_{n-1})), \\ &\leq kd(a_n, p_{n-1}) + ld(b_n, q_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

ve

$$\begin{aligned} d(b_{n+1}, q_n) &= d(F(b_n, a_n), F(q_{n-1}, p_{n-1})), \\ &\leq kd(b_n, q_{n-1}) + ld(a_n, p_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$s_n = d(a_{n+1}, p_n) + d(b_{n+1}, q_n)$$

olsun. (4.5) ve (4.6) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} s_n &= d(a_{n+1}, p_n) + d(b_{n+1}, q_n) \\ &\leq kd(a_n, p_{n-1}) + ld(b_n, q_{n-1}) + kd(b_n, q_{n-1}) + ld(a_n, p_{n-1}) \\ &= (k+l)(d(a_n, p_{n-1}) + d(b_n, q_{n-1})) \\ &= \lambda s_{n-1} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (4.4) ifadesine benzer olarak

$$0 \leq s_n \leq \lambda s_{n-1} \leq \lambda^2 s_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^n s_0 \tag{4.7}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} d(a_n, p_n) &= d(F(a_{n-1}, b_{n-1}), F(p_{n-1}, q_{n-1})), \\ &\leq kd(a_{n-1}, p_{n-1}) + ld(b_{n-1}, q_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned} d(b_n, q_n) &= d(F(b_{n-1}, a_{n-1}), F(q_{n-1}, p_{n-1})), \\ &\leq kd(b_{n-1}, q_{n-1}) + ld(a_{n-1}, p_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

ifadeleri elde edilir. Burada, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = d(a_n, p_n) + d(b_n, q_n)$$

olsun. (4.8) ve (4.9) ifadelerinden

$$\begin{aligned} t_n &= d(a_n, p_n) + d(b_n, q_n) \\ &\leq kd(a_{n-1}, p_{n-1}) + ld(b_{n-1}, q_{n-1}) + kd(b_{n-1}, q_{n-1}) + ld(a_{n-1}, p_{n-1}) \\ &= (k+l)(d(a_{n-1}, p_{n-1}) + d(b_{n-1}, q_{n-1})) \\ &= \lambda t_{n-1} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$0 \leq t_n \leq \lambda t_{n-1} \leq \lambda^2 t_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^n t_0 \tag{4.10}$$

olur. (B3) aksiyomu kullanılarak her bir $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için

$$d(a_n, p_m) \leq d(a_n, p_{n+1}) + d(a_{n+1}, p_{n+1}) + \cdots + d(a_{m-1}, p_m), \tag{4.11}$$

$$d(b_n, q_m) \leq d(b_n, q_{n+1}) + d(b_{n+1}, q_{n+1}) + \cdots + d(b_{m-1}, q_m) \tag{4.12}$$

ve

$$d(a_m, p_n) \leq d(a_m, p_{m-1}) + d(a_{m-1}, p_{m-1}) + \cdots + d(a_{n+1}, p_n), \tag{4.13}$$

$$d(b_m, q_n) \leq d(b_m, q_{m-1}) + d(b_{m-1}, q_{m-1}) + \cdots + d(b_{n+1}, q_n) \tag{4.14}$$

ifadeleri elde edilir. (4.4), (4.7), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14) ifadelerinden $n < m$ için

$$\begin{aligned} d(a_n, p_m) + d(b_n, q_m) \leq\ & (d(a_n, p_{n+1}) + d(b_n, q_{n+1})) \\ & + (d(a_{n+1}, p_{n+1}) + d(b_{n+1}, q_{n+1})) + \cdots \\ & + (d(a_{m-1}, p_{m-1}) + d(b_{m-1}, q_{m-1})) \\ & + (d(a_{m-1}, p_m) + d(b_{m-1}, q_m)), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e_n + t_{n+1} + e_{n+1} + \cdots + t_{m-1} + e_{m-1}, \\
&\leq \lambda^n e_0 + \lambda^{n+1} t_0 + \lambda^{n+1} e_0 + \cdots + \lambda^{m-1} t_0 + \lambda^{m-1} e_0, \\
&= (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}) e_0 \\
&\quad + (\lambda^{n+1} + \lambda^{n+2} + \cdots + \lambda^{m-1}) t_0, \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} e_0 + \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} t_0 \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d(a_m, p_n) + d(b_m, q_n) &\leq (d(a_m, p_{m-1}) + d(b_m, q_{m-1})) \\
&\quad + (d(a_{m-1}, p_{m-1}) + d(b_{m-1}, q_{m-1})) + \cdots \\
&\quad + (d(a_{n+1}, p_{n+1}) + d(b_{n+1}, q_{n+1})) \\
&\quad + (d(a_{n+1}, p_n) + d(b_{n+1}, q_n)), \\
&= s_{m-1} + t_{m-1} + \cdots + s_{n+1} + t_{n+1} + s_n, \\
&\leq \lambda^{m-1} s_0 + \lambda^{m-1} t_0 + \cdots + \lambda^{n+1} s_0 + \lambda^{n+1} t_0 + \lambda^n s_0, \\
&= (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}) s_0 \\
&\quad + (\lambda^{n+1} + \lambda^{n+2} + \cdots + \lambda^{m-1}) t_0, \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} s_0 + \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} t_0 \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Keyfi bir $\epsilon > 0$ için

$$
\frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda} e_0 + \frac{\lambda^{n_0+1}}{1-\lambda} t_0 < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{ve} \quad \frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda} s_0 + \frac{\lambda^{n_0+1}}{1-\lambda} t_0 < \frac{\epsilon}{3}
$$

olacak şekilde n_0 sayısı mevcuttur. (4.15) ve (4.16) eşitsizliklerinden her bir $n, m \geq n_0$ için

$$
d(a_n, p_m) + d(b_n, q_m) < \frac{\epsilon}{3}
$$

olur. Bu durumda, (a_n, p_n) ve (b_n, q_n) Cauchy çift dizileridir. (X, Y, d) tam olduğundan,

$$
a_n \rightharpoondown p,\ b_n \rightharpoondown q,\ p_n \rightharpoonup a \text{ ve } q_n \rightharpoonup b \qquad (4.17)
$$

olacak şekilde $a, b \in X$ ve $p, q \in Y$ vardır. Buradan her $n \geq n_1$ ve $\epsilon > 0$ için

$$
d(a_n, p) < \frac{\epsilon}{3},\ d(b_n, q) < \frac{\epsilon}{3},\ d(a, p_n) < \frac{\epsilon}{3} \text{ ve } d(b, q_n) < \frac{\epsilon}{3}
$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. (a_n, p_n) ve (b_n, q_n) birer Cauchy çift dizisi olduğundan, $d(a_n, p_n) < \frac{\epsilon}{3}$ ve $d(b_n, q_n) < \frac{\epsilon}{3}$ olur. Böylece, (4.1) ifadesinden her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$
d(F(a, b), p) \leq d(F(a, b), p_{n+1}) + d(a_{n+1}, p_{n+1}) + d(a_{n+1}, p)
$$

$$
\begin{aligned}
&= d(F(a,b),F(p_n,q_n)) + d(a_{n+1},p_{n+1}) + d(a_{n+1},p)\\
&\leq kd(a,p_n) + ld(b,q_n) + d(a_{n+1},p_{n+1}) + d(a_{n+1},p)\\
&< k\frac{\epsilon}{3} + l\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}\\
&= \lambda\frac{\epsilon}{3} + 2\frac{\epsilon}{3} < \epsilon
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda, $d(F(a,b),p) = 0$ ve dolayısıyla $F(a,b) = p$ olur. Benzer şekilde, $F(b,a) = q$, $F(p,q) = a$ ve $F(q,p) = b$ ifadeleri elde edilir. Diğer taraftan, (4.17)'den

$$d(a,p) = d(\lim_{n\to\infty} p_n, \lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} d(a_n,p_n) = 0$$

ve

$$d(b,q) = d(\lim_{n\to\infty} q_n, \lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} d(b_n,q_n) = 0$$

olur. Böylece, $a = p$ ve $b = q$ olur. Dolayısıyla, $(a,b) \in X^2 \cap Y^2$, F'in bir ikili sabit noktasıdır.

Şimdi de tekliği göstermek için F'in bir başka $(a^*,b^*) \in X^2 \cap Y^2$ ikili sabit noktasının varlığı kabul edilsin. Bu durumda

$$d(a^*,a) = d(F(a^*,b^*),F(a,b)) \leq kd(a^*,a) + ld(b^*,b)$$

ve

$$d(b^*,b) = d(F(b^*,a^*),F(b,a)) \leq kd(b^*,b) + ld(a^*,a)$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$d(a^*,a) + d(b^*,b) \leq \lambda(d(a^*,a) + d(b^*,b)) \tag{4.18}$$

olur. (4.18) ifadesinde $\lambda < 1$ olduğundan, $d(a^*,a) + d(b^*,b) = 0$ olur. Böylece, $a^* = a$ ve $b^* = b$ olduğu elde edilir. Bu durumda, (a,b), F'in bir tek ikili sabit noktasıdır. ■

Eğer Teorem 4.1.2'de k ve l sabitleri eşit alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3. (X,Y,d) bir tam çift kutuplu metrik uzay, $F : (X^2,Y^2) \rightrightarrows (X,Y)$ bir kovaryant dönüşüm ve k, l negatif olmayan sabitler olmak üzere $k < 1$ olsun. Eğer her $a,b \in X$, $p,q \in Y$ için

$$d(F(a,b),F(p,q)) \leq \frac{k}{2}(d(a,p) + d(b,q)), \tag{4.19}$$

koşulu sağlanıyor ise, $F : X^2 \cup Y^2 \to X \cup Y$ bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

Şimdi de ikili sabit nokta teoreminin çift kutuplu metrik uzaylarda bir başka genelleştirilmesi ifade edilsin.

Tanım 4.1.4. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay, $a \in X$, $p \in Y$ ve $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Eğer

$$F(a, p) = a \text{ ve } F(p, a) = p$$

ise (a, p)'ye F'in bir ikili sabit noktası denir.

Teorem 4.1.5. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay, $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm ve k, l negatif olmayan sabitler olmak üzere $k + l < 1$ olsun. Eğer her $a, b \in X$, $p, q \in Y$ için

$$d(F(a, p), F(q, b)) \leq kd(a, q) + ld(b, p), \tag{4.20}$$

koşulu sağlanıyor ise, $F : (X \times Y) \cup (Y \times X) \to X \cup Y$ bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.1.2'nin ispatına benzer olarak, (a_n, p_n) ve (b_n, q_n) çift dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = F(a_n, p_n),\ p_{n+1} = F(p_n, a_n),\ b_{n+1} = F(b_n, q_n) \text{ ve } q_{n+1} = F(q_n, b_n)$$

biçiminde alınsın. $k + l = \lambda$ olsun. Bu durumda, (4.20)'den, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} d(a_n, q_{n+1}) &= d(F(a_{n-1}, p_{n-1}), F(q_n, b_n)), \\ &\leq kd(a_{n-1}, q_n) + ld(b_n, p_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} d(a_{n+1}, q_n) &= d(F(a_n, p_n), F(q_{n-1}, b_{n-1})), \\ &\leq kd(a_n, q_{n-1}) + ld(b_{n-1}, p_n) \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} d(b_n, p_{n+1}) &= d(F(b_{n-1}, q_{n-1}), F(p_n, a_n)), \\ &\leq kd(b_{n-1}, p_n) + ld(a_n, q_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} d(b_{n+1}, p_n) &= d(F(b_n, q_n), F(p_{n-1}, a_{n-1})), \\ &\leq kd(b_n, p_{n-1}) + ld(a_{n-1}, q_n) \end{aligned} \tag{4.24}$$

ifadeleri elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$e_n = d(a_n, q_{n+1}) + d(b_{n+1}, p_n)$$

ve

$$s_n = d(a_{n+1}, q_n) + d(b_n, p_{n+1})$$

olarak alınsın. (4.21), (4.22), (4.23) ve (4.24) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} e_n &= d(a_n, q_{n+1}) + d(b_{n+1}, p_n) \\ &\leq kd(a_{n-1}, q_n) + ld(b_n, p_{n-1}) + kd(b_n, p_{n-1}) + ld(a_{n-1}, q_n) \\ &= (k+l)(d(a_{n-1}, q_n) + d(b_n, p_{n-1})) \\ &= \lambda e_{n-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s_n &= d(a_{n+1}, q_n) + d(b_n, p_{n+1}) \\ &\leq kd(a_n, q_{n-1}) + ld(b_{n-1}, p_n) + kd(b_{n-1}, p_n) + ld(a_n, q_{n-1}) \\ &= (k+l)(d(a_n, q_{n-1}) + d(b_{n-1}, p_n)) \\ &= \lambda s_{n-1} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Buradan,

$$0 \leq e_n \leq \lambda e_{n-1} \leq \lambda^2 e_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^n e_0 \tag{4.25}$$

ve

$$0 \leq s_n \leq \lambda s_{n-1} \leq \lambda^2 s_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^n s_0 \tag{4.26}$$

olur. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} d(a_n, q_n) &= d(F(a_{n-1}, p_{n-1}), F(q_{n-1}, b_{n-1})), \\ &\leq kd(a_{n-1}, q_{n-1}) + ld(b_{n-1}, p_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.27}$$

ve

$$\begin{aligned} d(b_n, p_n) &= d(F(b_{n-1}, p_{n-1}), F(p_{n-1}, a_{n-1})), \\ &\leq kd(b_{n-1}, p_{n-1}) + ld(a_{n-1}, q_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = d(a_n, q_n) + d(b_n, p_n)$$

olarak alınsın. (4.27) ve (4.28) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} t_n &= d(a_n, q_n) + d(b_n, p_n) \\ &\leq kd(a_{n-1}, q_{n-1}) + ld(b_{n-1}, p_{n-1}) + kd(b_{n-1}, p_{n-1}) + ld(a_{n-1}, q_{n-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (k+l)(d(a_{n-1},q_{n-1}) + d(b_{n-1},p_{n-1})) \\
&= \lambda t_{n-1}
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$0 \leq t_n \leq \lambda t_{n-1} \leq \lambda^2 t_{n-2} \leq \cdots \leq \lambda^n t_0 \tag{4.29}$$

olduğu görülür. Bu durumda, her bir $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için

$$d(a_n, q_m) \leq d(a_n, q_{n+1}) + d(a_{n+1}, q_{n+1}) + \cdots + d(a_{m-1}q_m), \tag{4.30}$$

$$d(b_n, p_m) \leq d(b_n, p_{n+1}) + d(b_{n+1}, p_{n+1}) + \cdots + d(b_{m-1}, p_m), \tag{4.31}$$

$$d(a_m, q_n) \leq d(a_m, q_{m-1}) + d(a_{m-1}, q_{m-1}) + \cdots + d(a_{n+1}, q_n), \tag{4.32}$$

$$d(b_m, p_n) \leq d(b_m, p_{m-1}) + d(b_{m-1}, p_{m-1}) + \cdots + d(b_{n+1}, p_n) \tag{4.33}$$

olur. (4.25), (4.26), (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) ve (4.33) ifadelerinden $n < m$ için

$$
\begin{aligned}
d(a_n, q_m) + d(b_m, p_n) &\leq (d(a_n, q_{n+1}) + d(b_{n+1}, p_n)) \\
&\quad + (d(a_{n+1}, q_{n+1}) + d(b_{n+1}, p_{n+1})) + \cdots \\
&\quad + (d(a_{m-1}, q_{m-1}) + d(b_{m-1}, p_{m-1})) \\
&\quad + (d(a_{m-1}, q_m) + d(b_m, p_{m-1})), \\
&= e_n + t_{n+1} + e_{n+1} + \cdots + t_{m-1} + e_{m-1}, \\
&\leq \lambda^n e_0 + \lambda^{n+1} t_0 + \lambda^{n+1} e_0 + \cdots + \lambda^{m-1} t_0 + \lambda^{m-1} e_0, \\
&= (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}) e_0 \\
&\quad + (\lambda^{n+1} + \lambda^{n+2} + \cdots + \lambda^{m-1}) t_0, \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} e_0 + \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} t_0
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d(a_m, q_n) + d(b_n, p_m) &\leq (d(a_m, q_{m-1}) + d(b_{m-1}, p_m)) \\
&\quad + (d(a_{m-1}, q_{m-1}) + d(b_{m-1}, p_{m-1})) + \cdots \\
&\quad + (d(a_{n+1}, q_{n+1}) + d(b_{n+1}, p_{n+1})) \\
&\quad + (d(a_{n+1}, q_n) + d(b_n, p_{n+1})), \\
&= s_{m-1} + t_{m-1} + \cdots + s_{n+1} + t_{n+1} + s_n, \\
&\leq \lambda^{m-1} s_0 + \lambda^{m-1} t_0 + \cdots + \lambda^{n+1} s_0 + \lambda^{n+1} t_0 + \lambda^n s_0, \\
&= (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}) s_0 \\
&\quad + (\lambda^{n+1} + \lambda^{n+2} + \cdots + \lambda^{m-1}) t_0,
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad \frac{\lambda^n}{1-\lambda}s_0 + \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}t_0 \tag{4.35}$$

ifadeleri elde edilir. Keyfi $\epsilon > 0$ için

$$\frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda}e_0 + \frac{\lambda^{n_0+1}}{1-\lambda}t_0 < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{ve} \quad \frac{\lambda^{n_0}}{1-\lambda}s_0 + \frac{\lambda^{n_0+1}}{1-\lambda}t_0 < \frac{\epsilon}{3}$$

olacak şekilde n_0 var olduğundan, her bir $n, m \geq n_0$ için (4.34) ve (4.35) ifadeleri kullanılarak

$$d(a_n, q_m) + d(b_m, p_n) < \frac{\epsilon}{3}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, (a_n, q_n) ve (b_n, p_n) birer Cauchy çift dizileridir. (X, Y, d)'nin tamlığı kullanılarak

$$a_n \rightharpoondown q,\ b_n \rightharpoondown p,\ p_n \rightharpoonup b \text{ ve } q_n \rightharpoonup a \tag{4.36}$$

olacak şekilde $a, b \in X$ ve $p, q \in Y$'nin varlığından söz edilebilir. Bu durumda, her $n \geq n_1$ ve $\epsilon > 0$ için

$$d(a_n, q) < \frac{\epsilon}{3},\ d(b_n, p) < \frac{\epsilon}{3},\ d(b, p_n) < \frac{\epsilon}{3} \text{ ve } d(a, q_n) < \frac{\epsilon}{3}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. (a_n, q_n) ve (b_n, p_n), Cauchy çift dizileri olduğundan, $d(a_n, q_n) < \frac{\epsilon}{3}$ ve $d(b_n, p_n) < \frac{\epsilon}{3}$ olur. Dolayısıyla, (4.20)'den her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda < 1$ için

$$\begin{aligned}
d(F(a,p), q) &\leq d(F(a,p), q_{n+1}) + d(a_{n+1}, q_{n+1}) + d(a_{n+1}, q) \\
&= d(F(a,p), F(p_n, b_n)) + d(a_{n+1}, q_{n+1}) + d(a_{n+1}, q) \\
&\leq kd(a, q_n) + ld(b_n, p) + d(a_{n+1}, q_{n+1}) + d(a_{n+1}, q) \\
&< k\frac{\epsilon}{3} + l\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \lambda\frac{\epsilon}{3} + 2\frac{\epsilon}{3} < \epsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $d(F(a,p), q) = 0 \Rightarrow F(a,p) = q$ olur. Benzer olarak, $F(p,a) = b$, $F(b,q) = p$ ve $F(q,b) = a$ ifadeleri elde edilir. (4.36)'dan

$$d(a,q) = d(\lim_{n\to\infty} q_n, \lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, q_n) = 0$$

ve

$$d(b,p) = d(\lim_{n\to\infty} p_n, \lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} d(b_n, p_n) = 0$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla, $a = q$ ve $b = p$ olur. Bu durumda, $(a,p) \in (X \times Y) \cap (Y \times X)$, F'in bir ikili sabit noktasıdır.

Şimdi de tekliği göstermek için F'in bir başka $(a^*, p^*) \in (X \times Y) \cap (Y \times X)$ ikili sabit noktasının varlığı kabul edilsin. Bu durumda

$$d(a^*, a) = d(F(a^*, p^*), F(a, p)) \leq kd(a^*, a) + ld(p^*, p)$$

ve

$$d(p^*, p) = d(F(p^*, a^*), F(p, a)) \leq kd(p^*, p) + ld(a^*, a)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan

$$d(a^*, a) + d(p^*, p) \leq \lambda(d(a^*, a) + d(p^*, p)) \tag{4.37}$$

olduğu görülür. $\lambda < 1$ olduğundan, $d(a^*, a) + d(p^*, p) = 0$ olur. Böylece, $a^* = a$ ve $p^* = p$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, (a, b), F'in bir tek ikili sabit noktasıdır. ■

Sonuç 4.1.6. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay, $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm ve k, l negatif olmayan sabitler olmak üzere $k < 1$ olsun. Eğer her $a, b \in X$, $p, q \in Y$ için

$$d(F(a, p), F(q, b)) \leq \frac{k}{2}(d(a, q) + d(b, p)), \tag{4.38}$$

koşulu sağlanıyor ise, $F : (X \times Y) \cup (Y \times X) \to X \cup Y$ bir tek ikili sabit noktaya sahiptir.

Örnek 4.1.7. $U_n(\mathbb{R})$ ve $L_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde $n \times n$ tipinde sırasıyla bütün üst ve alt üçgensel matrislerin kümeleri olsun. $d : U_n(\mathbb{R}) \times L_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $A = (a_{ij})_{n \times n} \in U_n(\mathbb{R})$ ve $B = (b_{ij})_{n \times n} \in L_n(\mathbb{R})$ matrisleri için

$$d(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|$$

biçiminde tanımlansın. Burada, $(U_n(\mathbb{R}), L_n(\mathbb{R}), d)$ bir tam çift kutuplu metrik uzaydır. $(A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}) \in U_n(\mathbb{R})^2 \cup L_n(\mathbb{R})^2$ iken

$$F(A, B) = \left(\frac{a_{ij} + b_{ij}}{3}\right)_{n \times n}$$

olacak şekilde

$$F : \left(U_n(\mathbb{R})^2, L_n(\mathbb{R})^2\right) \rightrightarrows (U_n(\mathbb{R}), L_n(\mathbb{R}))$$

kovaryant dönüşümü göz önüne alınsın. Herhangi bir $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n} \in U_n(\mathbb{R})$ ve $C = (c_{ij})_{n \times n}, D = (d_{ij})_{n \times n} \in L_n(\mathbb{R})$ için

$$d(F(A, B), F(C, D)) \;=\; d\left(\left(\frac{a_{ij} + b_{ij}}{3}\right)_{n \times n}, \left(\frac{c_{ij} + d_{ij}}{3}\right)_{n \times n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{a_{ij} + b_{ij} - c_{ij} - d_{ij}}{3} \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{a_{ij} - c_{ij}}{3} \right| + \left| \frac{b_{ij} - d_{ij}}{3} \right| \\
&= \frac{1}{3} \left(d(A,C) + d(B,D) \right)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, $k = \dfrac{2}{3}$ için (4.19) ifadesi sağlanır. Bu durumda, Sonuç 4.1.3'ten F bir tek ikili sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $0_{n\times n}$ bir sıfır matris olmak üzere bu ikili sabit noktanın

$$
(0_{n\times n}, 0_{n\times n}) \in U_n(\mathbb{R})^2 \cap L_n(\mathbb{R})^2
$$

olduğu kolay görülebilir.

Diğer taraftan, eğer

$$
F : \left(U_n(\mathbb{R})^2, L_n(\mathbb{R})^2 \right) \rightrightarrows \left(U_n(\mathbb{R}), L_n(\mathbb{R}) \right)
$$

dönüşümü $(A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}) \in U_n(\mathbb{R})^2 \cup L_n(\mathbb{R})^2$ olmak üzere

$$
F(A,B) = \left(\frac{a_{ij} + b_{ij}}{2} \right)_{n\times n}
$$

biçiminde tanımlanırsa,

$$
d(F(A,B), F(C,D)) \leq \frac{1}{2} (d(A,C) + d(B,D))
$$

olur. Bu durumda, $k = 1$ için F, (4.19) ifadesini sağlar. Dolayısıyla, $0_{n\times n}$ sıfır matris ve I_n birim matris olmak üzere F'in ikili sabit noktaları hem $(0_{n\times n}, 0_{n\times n}) \in U_n(\mathbb{R})^2 \cap L_n(\mathbb{R})^2$ hem de $(I_n, I_n) \in U_n(\mathbb{R})^2 \cap L_n(\mathbb{R})^2$ olur. Bu durumda, F bir tek ikili sabit noktaya sahip değildir. Buradan şu sonuç çıkarılabilir ki Teorem 4.1.2'de $k + l < 1$ olması ve Sonuç 4.1.3'te $k < 1$ olması ikili sabit noktanın tekliğinin sağlanması için çok önemli koşullardır.

4.2. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda lineer olmayan integral denklemler, dinamik programlama ve Urysohn integral denklemlerde önemli uygulamalara sahip olan ve Jungck [35] tarafından ilk defa 1976 yılında ifade edilen ortak (*İng. common*) sabit nokta teoremleri çift kutuplu metrik uzaylar üzerinde tanımlanmış ve bu sabit nokta teoremleri ile ilgili çeşitli sonuçlar verilmiştir.

Tanım 4.2.1. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve S, T özdönüşümleri (X, Y) üzerinde kovaryant veya kontravaryant olsun. Eğer $Sz = Tz = z$ olacak şekilde bir $z \in X \cup Y$ noktası var ise bu noktaya S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir.

Tanım 4.2.2. f ve g özdönüşümleri (X, Y) üzerinde kovaryant veya kontravaryant olsun. Eğer her $x \in X \cup Y$ için $g(f(x)) = f(g(x))$ ise g dönüşümü f ile değişmelidir denir.

Teorem 4.2.3. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $f : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ kovaryant dönüşümü sürekli olsun. Eğer f ile değişmeli olan $g : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ kovaryant dönüşümü, $\alpha \in (0, 1)$, $g(X) \subset f(X)$ ve $g(Y) \subset f(Y)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(f(x), f(y)) \tag{4.39}$$

şartını sağlıyor ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ ve $f(x_1) = g(x_0)$, $f(y_1) = g(y_0)$ olsun. Daha genel olarak

$$f(x_n) = g(x_{n-1}) \text{ ve } f(y_n) = g(y_{n-1}) \tag{4.40}$$

olacak şekilde (x_n, y_n) seçilirse $(f(x_n), f(y_n))$ ve $(g(x_n), g(y_n))$, (X, Y) üzerinde birer çift dizi olur. $g(X) \subset f(X)$ ve $g(Y) \subset f(Y)$ olduğundan bu seçim yapılabilir. (4.39) ve (4.40) ifadelerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(g(x_n), g(y_n)) &\leq \alpha d(f(x_n), f(y_n)) \\ &= \alpha d(g(x_{n-1}), g(y_{n-1})) \\ &\leq \alpha^2 d(f(x_{n-1}), f(y_{n-1})) \\ &= \alpha^2 d(g(x_{n-2}), g(y_{n-2})) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(g(x_0), g(y_0)) \end{aligned} \tag{4.41}$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan, (4.39) ve (4.40) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} d(g(x_n), g(y_{n+1})) &\leq \alpha d(f(x_n), f(y_{n+1})) \\ &= \alpha d(g(x_{n-1}), g(y_n)) \\ &\leq \alpha^2 d(f(x_{n-1}), f(y_n)) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(g(x_0), g(y_1)) \end{aligned} \tag{4.42}$$

ifadesi elde edilir. $n > m$ olmak üzere her $n, m \in \mathbb{N}$ için, (4.41) ve (4.42) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
d(g(x_n), g(y_m)) &\leq d(g(x_n), g(y_n)) + d(g(x_{n-1}), g(y_n)) + d(g(x_{n-1}), g(y_{n-1})) \\
&\quad + d(g(x_{n-2}), g(y_{n-1})) + \cdots + d(g(x_m), g(y_{m+1})) \\
&\quad + d(g(x_m), g(y_m)) \\
&\leq \alpha^n d(g(x_0), g(y_0)) + \alpha^{n-1} d(g(x_0), g(y_1)) \\
&\quad + \alpha^{n-1} d(g(x_0), g(y_0)) + \alpha^{n-2} d(g(x_0), g(y_1)) \\
&\quad + \cdots + \alpha^m d(g(x_0), g(y_1)) + \alpha^m d(g(x_0), g(y_0)) \\
&= (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \cdots + \alpha^m) d(g(x_0), g(y_1)) \\
&\quad + (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha^m) d(g(x_0), g(y_0)) \\
&\leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} (d(g(x_0), g(y_0)) + d(g(x_0), g(y_1)))
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $K > 0$ olmak üzere $d(g(x_0), f(g_0)) + d(g(x_0), g(y_1)) = K$ eşitliği alınsın. $\alpha \in (0,1)$ olduğundan her $\epsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ iken $\dfrac{\alpha^m}{1-\alpha} K < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer olarak, $m > n \geq n_1$ olmak üzere yeterince büyük her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(g(x_n), g(y_m)) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan, benzer yolla yeterince büyük her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(f(x_n), f(y_m)) < \epsilon$ olduğu da gösterilebilir. Bu durumda $(f(x_n), f(y_n))$ ve $(g(x_n), g(y_n))$, (X, Y, d) üzerinde birer Cauchy çift dizisidir. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay olduğundan $(f(x_n), f(y_n))$ ve $(g(x_n), g(y_n))$ çifte yakınsaktır. Bu durumda, $n \to \infty$ iken $f(x_n) \rightharpoondown z$ ve $f(y_n) \rightharpoonup z$ olacak şekilde $z \in X \cap Y$ vardır. (4.40) ifadesi kullanılarak $n \to \infty$ iken $g(x_n) \rightharpoondown z$ ve $g(y_n) \rightharpoonup z$ olduğu söylenebilir. f kovaryant dönüşümü sürekli olduğundan (4.39) ifadesinden faydalanılarak g dönüşümünün de sürekli olduğu söylenebilir. f ve g'nin değişebilirliği ve sürekliliği kullanılarak

$$f(z) = f(\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f^2(x_n) \tag{4.43}$$

$$f(z) = f(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) \tag{4.44}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.39) ifadesinden

$$d(g(f(x_n)), g(z)) \leq \alpha d(f^2(x_n), f(z))$$

olur. $n \to \infty$ iken limit alınırsa (4.43) ve (4.44) ifadelerinden

$$d(f(z), g(z)) \leq \alpha d(f(z), f(z))$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, $0 \leq d(f(z), g(z)) \leq 0$ olur. Bu da $f(z) = g(z)$ olmasını gerektirir. (4.39) ifadesinden

$$d(g(x_n), g(z)) \leq \alpha d(f(x_n), f(z))$$

olduğu görülür. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(z, g(z)) \leq \alpha d(z, f(z)) = \alpha d(z, g(z))$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, $g(z) = z$ ve dolayısıyla $f(z) = g(z) = z$ olur. Sonuç olarak, z, f ve g'nin ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi de ortak sabit noktanın tekliği gösterilsin. z ve t'nin $z \neq t$ olacak şekilde f ve g'nin ortak iki sabit noktası olduğu varsayılsın. Bu durumda, $z = g(z) = f(z)$ ve $t = g(t) = f(t)$ olur. Buradan $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(z,t) &= d(g(z), g(t)) \\ &\leq \alpha d(f(z), f(t)) \\ &= \alpha d(z,t) \end{aligned}$$

olur. Bu da $d(z,t) = 0$ olduğunu ifade eder. Böylece $z = t$ olur. Dolayısıyla, f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Teorem 4.2.4. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $f : (X, Y) \nearrow\!\!\!\!\searrow (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü sürekli olsun. Eğer f ile değişmeli olan $g : (X, Y) \nearrow\!\!\!\!\searrow (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü, $\alpha \in (0, 1)$, $g(X) \subset f(X)$ ve $g(Y) \subset f(Y)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g(y), g(x)) \leq \alpha d(f(y), f(x))$$

şartını sağlıyor ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.2.3'ün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. ■

Teorem 4.2.5. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $f : (X, Y) \nearrow\!\!\!\!\searrow (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü sürekli olsun. Eğer f ile değişmeli olan $g : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ kovaryant dönüşümü, $\alpha \in (0, 1)$, $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(f(y), f(x)) \tag{4.45}$$

şartını sağlıyor ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f(x_0) = g(y_0)$ ve $f(y_1) = g(x_0)$ olsun. Daha genel olarak

$$f(x_n) = g(y_n) \text{ ve } f(y_n) = g(x_{n-1}) \tag{4.46}$$

olacak şekilde (x_n, y_n) seçelim. Bu durumda $(f(y_n), f(x_n))$ ve $(g(x_n), g(y_n))$, (X, Y) üzerinde birer çift dizidir. $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olduğundan böyle bir seçim yapılabilir. (4.45) ve (4.46) ifadelerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(g(x_n), g(y_n)) &\leq \alpha d(f(y_n), f(x_n)) \\
&= \alpha d(g(x_{n-1}), g(y_n)) \\
&\leq \alpha^2 d(f(y_n), f(x_{n-1})) \\
&= \alpha^2 d(g(x_{n-1}), g(y_{n-1})) \\
&\vdots \\
&\leq \alpha^{2n} d(g(x_0), g(y_0))
\end{aligned} \tag{4.47}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, (4.45) ve (4.46) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
d(g(x_{n+1}), g(y_n)) &\leq \alpha d(f(y_n), f(x_{n+1})) \\
&= \alpha d(g(x_{n-1}), g(y_{n+1})) \\
&\leq \alpha^2 d(f(y_{n+1}), f(x_{n-1})) \\
&= \alpha^2 d(g(x_n), g(y_{n-1})) \\
&\vdots \\
&\leq \alpha^{2n} d(g(x_1), g(y_0))
\end{aligned} \tag{4.48}$$

olur. $m > n$ olacak şekilde her $n, m \in \mathbb{N}$ için (4.47) ve (4.48) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
d(g(x_n), g(y_m)) &\leq d(g(x_n), g(y_n)) + d(g(x_{n+1}), g(y_n)) + d(g(x_{n+1}), g(y_{n+1})) \\
&\quad + d(g(x_{n+2}), g(y_{n+1})) + \cdots + d(g(x_m), g(y_{m-1})) \\
&\quad + d(g(x_m), g(y_m)) \\
&\leq \alpha^{2n} d(g(x_0), g(y_0)) + \alpha^{2n} d(g(x_1), g(y_0)) \\
&\quad + \alpha^{2n+2} d(g(x_0), g(y_0)) + \alpha^{2n+2} d(g(x_1), g(y_0)) \\
&\quad + \cdots + \alpha^{2m-2} d(g(x_1), g(y_0)) + \alpha^{2m} d(g(x_0), g(y_0)) \\
&= (\alpha^{2n} + \alpha^{2n+2} + \cdots + \alpha^{2m}) d(g(x_0), g(y_0))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\alpha^{2n}+\alpha^{2n+2}+\cdots+\alpha^{2m-2})d(g(x_1),g(y_0)) \\
\leq\ & \frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha}(d(g(x_0),g(y_0))+d(g(x_1),g(y_0)))
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $K > 0$ olmak üzere $d(g(x_0), g(y_0)) + d(g(x_1), g(y_0)) = K$ eşitliği alınsın. $\alpha \in (0,1)$ olduğundan her $\epsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ iken $\frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha}K < \epsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer olarak, $m > n \geq n_1$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ için yeterince büyük $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(g(x_n), g(y_m)) < \epsilon$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan, benzer yolla yeterince büyük her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(f(y_m), f(x_n)) < \epsilon$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda $(f(y_n), f(x_n))$ ve $(g(x_n), g(y_n))$, (X, Y) üzerinde birer Cauchy çift dizisidir. (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzay olduğundan $(f(y_n), f(x_n))$ ve $(g(x_n), g(y_n))$ çifte yakınsaktır. Bu durumda, $n \to \infty$ iken $f(x_n) \rightharpoonup z$ ve $f(y_n) \rightharpoondown z$ olacak şekilde $z \in X \cap Y$ vardır. (4.46) ifadesi kullanılarak $n \to \infty$ iken $g(x_n) \rightharpoondown z$ ve $g(y_n) \rightharpoonup z$ olduğu söylenebilir. f kontravaryant dönüşümü sürekli olduğundan (4.45) ifadesinden faydalanılarak g dönüşümünün de sürekli olduğu söylenebilir. f ve g'nin değişebilirliği ve sürekliliği kullanılarak

$$
f(z) = f(\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f^2(x_n) \tag{4.49}
$$

$$
f(z) = f(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) \tag{4.50}
$$

ifadeleri elde edilir. (4.45) ifadesinden

$$
d(g(f(x_n)), g(z)) \leq \alpha d(f^2(x_n), f(z))
$$

olur. $n \to \infty$ iken limit alınırsa (4.49) ve (4.50) eşitliklerinden

$$
d(f(z), g(z)) \leq \alpha d(f(z), f(z))
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, $0 \leq d(f(z), g(z)) \leq 0$ olur. Bu da $f(z) = g(z)$ olmasını gerektirir. (4.45) ifadesinden

$$
d(g(x_n), g(z)) \leq \alpha d(f(x_n), f(z))
$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$
d(z, g(z)) \leq \alpha d(z, f(z)) = \alpha d(z, g(z))
$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, $g(z) = z$ olur. Buradan $f(z) = g(z) = z$ olduğu görülür. Dolayısıyla, z, f ve g'nin ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi de ortak sabit noktanın tekliği gösterilsin. z ve t'nin, $z \neq t$ olacak şekilde f ve g'nin ortak iki sabit noktası olduğu varsayılsın. Bu durumda, $z = f(z) = g(z)$ ve $t = f(t) = g(t)$ olur. Buradan $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(z,t) &= d(g(z), g(t)) \\ &\leq \alpha d(f(z), f(t)) \\ &= \alpha d(z,t) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu da $d(z,t) = 0$ olduğunu ifade eder. Bu durumda $z = t$ olur. Dolayısıyla, f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Teorem 4.2.6. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $f : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ kovaryant dönüşümü sürekli olsun. Eğer f ile değişmeli olan $g : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü, $\alpha \in (0, 1)$, $g(Y) \subset f(X)$, $g(X) \subset f(Y)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g(y), g(x)) \leq \alpha d(f(x), f(y))$$

şartını sağlıyor ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.2.5'in ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. ■

Sonuç 4.2.7. f ve g, (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzayı üzerinde iki değişmeli kovaryant dönüşüm olsun. f dönüşümünün sürekli, $g(X) \subset f(X)$ ve $g(Y) \subset f(Y)$ olduğu varsayılsın. Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g^k(x), g^k(y)) \leq \alpha d(f(x), f(y))$$

olacak şekilde $\alpha \in (0, 1)$ ve k pozitif tam sayısı var ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: g^k'nın f ile değişmeli ve

$$g^k(X) \subset g(X) \subset f(X),$$

$$g^k(Y) \subset g(Y) \subset f(Y)$$

olduğu açıktır. Bu durumda, Teorem 4.2.3'ten, f ve g^k bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu sabit noktaya z denilsin. Bu durumda

$$z = f(z) = g^k(z) \tag{4.51}$$

olur. Diğer yandan, f ve g değişmeli olduğundan (4.51) ifadesi kullanılarak

$$g(z) = f(g(z)) = g^k(g(z))$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $g(z)$, f ve g^k nın ortak sabit noktasıdır. Bu da ortak sabit nokta z'nin tekliği ile çelişir. Dolayısıyla, $z = g(z) = f(z)$ olur. Sonuç olarak, f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Sonuç 4.2.8. f ve g, (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzayı üzerinde sırasıyla değişmeli kontravaryant ve kovaryant dönüşümler olsun. f dönüşümünün sürekli, $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olduğu varsayılsın. Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g^k(x), g^k(y)) \leq \alpha d(f(y), f(x))$$

olacak şekilde $\alpha \in (0, 1)$ ve k pozitif tam sayısı var ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: g^k'nın f ile değişmeli ve

$$g^k(X) \subset g(X) \subset f(Y),$$

$$g^k(Y) \subset g(Y) \subset f(X)$$

olduğu açıktır. Bu durumda, Teorem 4.2.5'ten, f ve g^k bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu sabit noktaya z denilsin. Bu durumda

$$z = f(z) = g^k(z) \tag{4.52}$$

olur. Diğer yandan, f ve g değişmeli olduğundan (4.52) ifadesi kullanılarak

$$g(z) = f(g(z)) = g^k(g(z))$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $g(z)$, f ve g^k'nın ortak sabit noktasıdır. Bu da ortak sabit nokta z'nin tekliği ile çelişir. Dolayısıyla, $z = g(z) = f(z)$ olur. Sonuç olarak, f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Sonuç 4.2.9. f ve g, (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzayı üzerinde iki değişmeli kontravaryant dönüşüm olsun. f dönüşümünün sürekli, $g(X) \subset f(X)$ ve $g(Y) \subset f(Y)$ olduğu varsayılsın. Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\begin{aligned} k = 2n \text{ iken } d(g^k(x), g^k(y)) &\leq \alpha d(f(y), f(x)) \\ k = 2n-1 \text{ iken } d(g^k(y), g^k(x)) &\leq \alpha d(f(y), f(x)) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ ve k pozitif tam sayısı var ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $k = 2n$ için ispat Sonuç 4.2.8'e benzer olarak yapılır. $k = 2n-1$ için ispatı yapılsın:
g^k, f ile değişmeli ve

$$g^k(X) \subset g(X) \subset f(X),$$
$$g^k(Y) \subset g(Y) \subset f(Y)$$

dir. Bu durumda, Teorem 4.2.4'ten, f ve g^k bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. Bu sabit noktaya z denilsin. Bu durumda

$$z = f(z) = g^k(z) \tag{4.53}$$

olur. Diğer yandan, f ve g değişmeli olduğundan (4.53) ifadesini kullanarak

$$g(z) = f(g(z)) = g^k(g(z))$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $g(z)$, f ve g^k nın ortak sabit noktasıdır. Bu da ortak sabit nokta z'nin tekliği ile çelişir. Dolayısıyla, $z = g(z) = f(z)$ olur. Sonuç olarak, f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Sonuç 4.2.10. f ve g, (X,Y,d) tam çift kutuplu metrik uzayı üzerinde sırasıyla değişmeli kovaryant ve kontravaryant dönüşümler olsun. f dönüşümünün sürekli, $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olduğu varsayılsın. Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\begin{aligned} k = 2n \text{ iken } d(g^k(x), g^k(y)) &\leq \alpha d(f(x), f(y)) \\ k = 2n-1 \text{ iken } d(g^k(y), g^k(x)) &\leq \alpha d(f(x), f(y)) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ ve k pozitif tam sayısı var ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 4.2.9'un ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. ■

Teorem 4.2.11. (X,Y,d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $f : (X,Y) \rightrightarrows (X,Y)$ kovaryant dönüşümü sürekli olsun. Eğer f ile değişmeli olan $g : (X,Y) \rightleftarrows (X,Y)$ kontravaryant dönüşümü, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olmak üzere her $x \in X$ ve

$y \in Y$ için

$$d(g(y), g(x)) \leq \alpha(d(f(x), g(x)) + d(g(y), f(y))) \tag{4.54}$$

şartını sağlıyor ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ ve $f(y_n) = g(x_n)$, $f(x_{n+1}) = g(y_n)$ olsun. Burada

$$\begin{aligned} d(f(x_{n+1}), f(y_n)) &= d(g(y_n), g(x_n)) \\ &\leq \alpha(d(f(x_n), g(x_n)) + d(g(y_n), f(y_n))) \\ &= \alpha(d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(x_{n+1}), f(y_n))) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(f(x_{n+1}), f(y_n)) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}(d(f(x_n), f(y_n))) \tag{4.55}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(y_n)) &= d(g(y_{n-1}), g(x_n)) \\ &\leq \alpha(d(f(x_n), g(x_n)) + d(g(y_{n-1}), f(y_{n-1}))) \\ &= \alpha(d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(x_n), f(y_{n-1}))) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}(d(f(x_n), f(y_{n-1}))) \tag{4.56}$$

ifadesi elde edilir. $h = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak alınsın. Eğer (4.55) ve (4.56) ifadeleri birleştirilirse,

$$\begin{aligned} d(f(x_{n+1}), f(y_n)) &\leq h(d(f(x_n), f(y_n))) \\ &\leq h^2(d(f(x_n), f(y_{n-1}))) \\ &\vdots \\ &\leq h^{2n+1}(d(f(x_0), f(y_0))) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(y_n)) &\leq h(d(f(x_n), f(y_{n-1}))) \\ &\leq h^2(d(f(x_{n-1}), f(y_{n-1}))) \\ &\vdots \\ &\leq h^{2n}(d(f(x_0), f(y_0))) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(y_m)) &\leq d(f(x_n), f(y_{n-1})) + d(f(x_{n-1}), f(y_{n-1})) \\ &\quad + \cdots + d(f(x_{m+1}), f(y_{m+1})) + d(f(x_{m+1}), f(y_m)) \\ &\leq h^{2n-1}d(f(x_0), f(y_0)) + h^{2n-2}d(f(x_0), f(y_0)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\cdots+h^{2m+2}d(f(x_0),f(y_0))+h^{2m+1}d(f(x_0),f(y_0)) \\
= \;& (h^{2n-1}+h^{2n-2}+\cdots+h^{2m+2}+h^{2m+1})d(f(x_0),f(y_0)) \\
\leq \;& \frac{h^{2m+1}}{1-h}d(f(x_0),f(y_0))
\end{aligned}
$$

olur. $K=\dfrac{h^{2m+1}}{1-h}$ olarak alınırsa $d(f(x_n),f(y_m)) \leq Kd(f(x_0),f(y_0))$ olur. Diğer yandan, $m>n$ için

$$
\begin{aligned}
d(f(x_n),f(y_m)) \leq\;& d(f(x_n),f(y_n))+d(f(x_{n+1}),f(y_n)) \\
& +\cdots+d(f(x_m),f(y_{m-1}))+d(f(x_m),f(y_m)) \\
\leq\;& h^{2n}d(f(x_0),f(y_0))+h^{2n+1}d(f(x_0),f(y_0)) \\
& +\cdots+h^{2m-1}d(f(x_0),f(y_0))+h^{2m}d(f(x_0),f(y_0)) \\
=\;& (h^{2n}+h^{2n+1}+\cdots+h^{2m-1}+h^{2m})d(f(x_0),f(y_0)) \\
\leq\;& \frac{h^{2n}}{1-h}d(f(x_0),f(y_0))
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $K'=\dfrac{h^{2n}}{1-h}$ olarak alınırsa,

$$d(f(x_n),f(y_m)) \leq K'd(f(x_0),f(y_0))$$

olur. Bu durumda, her $n,m\in\mathbb{N}$ için $n,m\to\infty$ iken $d(f(x_n),f(y_m))\to 0$ olur. Benzer şekilde, $n,m\to\infty$ iken $d(g(y_n),g(x_n))\to 0$ olur. Bu durumda $(g(y_n),g(x_n))$ ve $(f(x_n),f(y_n))$, (X,Y) üzerinde birer Cauchy çift dizisidir. (X,Y,d) tam çift kutuplu metrik uzay olduğundan, $(g(y_n),g(x_n))$ ve $(f(x_n),f(y_m))$ çifte yakınsaktır. Bu durumda, $n\to\infty$ iken

$$f(x_n)\rightharpoondown z,\; f(y_n)\rightharpoonup z$$

olacak şekilde $z\in X\cap Y$ vardır. Buradan $n\to\infty$ iken

$$g(x_n)\rightharpoonup z,\; g(y_n)\rightharpoondown z$$

ifadesi elde edilir. f kovaryant dönüşümü sürekli olduğundan (4.54) ifadesinden faydalanılarak g'nin de sürekli olduğu söylenebilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
g(f(x_n))\rightharpoonup g(z) \quad &\text{ve}\quad g(f(y_n))\rightharpoondown g(z) \\
f(g(x_n))\rightharpoonup f(z) \quad &\text{ve}\quad f(g(y_n))\rightharpoondown f(z)
\end{aligned}
$$

olur. f ve g değişmeli olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$f(g(x_n))=g(f(x_n)) \text{ ve } f(g(y_n))=g(f(y_n))$$

olur. Bu durumda $f(z) = g(z)$ eşitliği elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} d(z, g(z)) &= \lim_{n\to\infty} d(g(x_n), g(g(x_n))) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \alpha(d(f(x_n), g(x_n)) + d(g(g(x_n)), f(g(x_n)))) \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha(d(z, z) + d(g(z), f(z))) \end{aligned}$$

olup $d(z, g(z)) = 0 \Rightarrow z = g(z) = f(z)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, f ve g ortak bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi de ortak sabit noktanın tekliği gösterilsin. $t \in X \cap Y$'nin, $z \neq t$ olacak şekilde f ve g'nin bir başka sabit noktası olduğu varsayılsın. Yani $f(t) = g(t) = t$ olsun. Bu durumda, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ iken

$$d(z, t) = d(g(z), g(t)) \leq \alpha(d(f(z), g(z)) + d(g(t), f(t)))$$

olur. Sonuç olarak, $d(z, t) = 0$ olup $z = t$ olur. Dolayısıyla, f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Teorem 4.2.12. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $f : (X, Y) \nearrow\!\!\!\!\searrow (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü sürekli olsun. Eğer f ile değişmeli olan $g : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ kovaryant dönüşümü, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha(d(g(x), f(x)) + d(f(y), g(y))) \tag{4.57}$$

şartını sağlıyor ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.2.11'in ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. ■

Örnek 4.2.13. $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$, $Y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ ve $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü $x \in X$, $y \in Y$ için $d((x, 0), (0, y)) = |x - y|$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, (X, Y, d) bir tam bipolar metrik uzaydır. $g : (X, Y) \nearrow\!\!\!\!\searrow (X, Y)$ ve $f : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ dönüşümleri de her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= \left(0, \frac{x}{2}\right) \qquad f(x, 0) = (x, 0) \\ g(0, y) &= \left(\frac{y}{2}, 0\right) \qquad f(0, y) = (0, y) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Buradan, $\alpha = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(g(0, y), g(x, 0)) \leq \alpha d(f(x, 0), f(0, y))$$

şartının sağlandığı kolayca görülebilir. Diğer yandan, $g(X) \subset f(Y)$ ve $g(Y) \subset f(X)$ olduğu açıktır. Burada

$$g(f(x,0)) = g(x,0) = \left(0, \frac{x}{2}\right) = f\left(0, \frac{x}{2}\right) = f(g(x,0))$$

dır. Bu durumda, f ve g değişmelidir. Dolayısıyla, Teorem 4.2.6'dan, f ve g bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu sabit nokta $(0,0)$ noktasıdır.

4.3. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Yerel ve Zayıf Büzülme Dönüşümleri için Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda sırasıyla Edelstein [36] ve Rakotch [37–39] tarafından tanımlanan $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel (*İng. locally*) büzülme ve zayıf (*İng. weakly*) büzülme dönüşümü kavramları çift kutuplu metrik uzaylara taşınmış ve ayrıca bu dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini gösteren bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

Tanım 4.3.1. (X,Y,d) bir çift kutuplu metrik uzay, $\lambda \in (0,1)$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Eğer her $(x,y) \in X \times Y$ için

$$d(x,y) < \epsilon \;\Rightarrow\; d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$$

ise $T : (X,Y) \rightrightarrows (X,Y)$'ye $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme dönüşümü ve her $(x,y) \in X \times Y$ için

$$d(x,y) < \epsilon \;\Rightarrow\; d(Ty,Tx) \leq \lambda d(x,y)$$

ise $T : (X,Y) \leftrightarrows (X,Y)$'ye $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kontravaryant büzülme dönüşümü denir.

Lemma 4.3.2. Her $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme (veya kontravaryant büzülme) dönüşümü (X,Y,d) çift kutuplu metrik uzayı üzerinde süreklidir.

İspat: İlk olarak T'nin $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme dönüşümü olduğu durum göz önüne alınsın. (u_n), X üzerinde bir dizi olmak üzere $(u_n) \to v$ olsun. Bu durumda $v \in Y$ olur. Diğer taraftan, $\epsilon_0 > 0$ olmak üzere $\epsilon_1 = \min\{\epsilon, \epsilon_0\}$ olarak tanımlansın. $(u_n) \to v$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, v) < \epsilon_1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ elemanı alınabilir. Bu durumda, $d(u_n, v) < \epsilon_1 \leq \epsilon$ ifadesi elde edilir. Dolayısıyla,

$$d(Tu_n, Tv) \leq \lambda d(u_n, v) < \lambda\epsilon_1 \leq \lambda\epsilon_0 < \epsilon_0$$

olur. Buradan $Tu_n \to Tv$ ifadesi elde edilir.

Şimdi de T'nin $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kontravaryant büzülme dönüşümü olduğu durum göz önüne alınsın. (u_n), X üzerinde bir dizi olmak üzere $(u_n) \to v$ olsun. Bu durumda $v \in Y$ olur. $\epsilon_0 > 0$ olmak üzere $\epsilon_1 = \min\{\epsilon, \epsilon_0\}$ olarak tanımlansın. $(u_n) \to v$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, v) < \epsilon_1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ elemanı alınabilir. Bu durumda, $d(u_n, v) < \epsilon_1 \leq \epsilon$ ifadesi elde edilir. Dolayısıyla,

$$d(Tv, Tu_n) \leq \lambda d(u_n, v) < \lambda\epsilon_1 \leq \lambda\epsilon_0 < \epsilon_0$$

olur. Buradan $Tu_n \to Tv$ ifadesi elde edilir. ■

Tanım 4.3.3. Eğer $0 \leq i \leq m$ için $d(x_i, y_i) < \epsilon$ ve $1 \leq i \leq m$ için $d(x_i, y_{i-1}) < \epsilon$ olmak üzere verilen her $a \in X$ ve $b \in Y$ için

$$a = x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m = b$$

noktalarının sonlu kümesi mevcut ise (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayına $\epsilon-$zincirlenebilir denir.

Teorem 4.3.4. (X, Y, d), $\epsilon-$zincirlenebilir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ de $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X \cap Y$ noktası vardır.

İspat: $x \in X$ ve $y \in Y$ noktaları alınsın. Bu durumda

$$x = x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m = Ty$$

olacak şekilde bir ϵ-zinciri vardır. Tanım 4.3.1'den faydalanılarak $n \geq 1$ ve $0 \leq i \leq m$ tam sayıları için

$$\begin{aligned} d(T^n x_i, T^n y_i) &\leq \lambda d(T^{n-1} x_i, T^{n-1} y_i) \\ &\leq \lambda^2 d(T^{n-2} x_i, T^{n-2} y_i) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_i, y_i) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Benzer olarak, $n \geq 1$ ve $1 \leq i \leq m$ tam sayıları için

$$\begin{aligned} d(T^n x_i, T^n y_{i-1}) &\leq \lambda d(T^{n-1} x_i, T^{n-1} y_{i-1}) \\ &\leq \lambda^2 d(T^{n-2} x_i, T^{n-2} y_{i-1}) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_i, y_{i-1}) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+1} y) &= d(T^n x_0, T^n y_m) \\ &\leq d(T^n x_0, T^n y_0) + d(T^n x_1, T^n y_0) + d(T^n x_1, T^n y_m) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq d(T^n x_0, T^n y_0) + d(T^n x_1, T^n y_0) + d(T^n x_1, T^n y_1) \\
&\quad + d(T^n x_2, T^n y_1) + \cdots + d(T^n x_m, T^n y_{m-1}) \\
&\quad + d(T^n x_m, T^n y_m) \\
&= \sum_{i=0}^{m} d(T^n x_i, T^n y_i) + \sum_{i=1}^{m} d(T^n x_i, T^n y_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{m} \lambda^n d(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{m} \lambda^n d(x_i, y_{i-1}) \\
&\leq (2m+1)\lambda^n \epsilon
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan,

$$x = a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m = y$$

bir $\epsilon-$zinciri olsun. Bu durumda, $n \geq 1$ olmak üzere $0 \leq i \leq m$ için

$$d(T^n a_i, T^n b_i) \leq \lambda^n d(a_i, b_i)$$

ve $1 \leq i \leq m$ için

$$d(T^n a_i, T^n b_{i-1}) \leq \lambda^n d(a_i, b_{i-1})$$

ifadeleri elde edilir. Buradan,

$$d(T^n x, T^n y) = d(T^n a_0, T^n b_m) \leq \cdots \leq (2m+1)\lambda^n \epsilon$$

olduğu görülür. $p < q$ olacak şekilde herhangi iki p ve q tam sayıları için

$$
\begin{aligned}
d(T^p x, T^q y) &\leq d(T^p x, T^{p+1} y) + d(T^{p+1} x, T^{p+1} y) + \cdots + d(T^{q-1} x, T^{q-1} y) \\
&\quad + d(T^{q-1} x, T^{q-1} y) + d(T^{q-1} x, T^q y) \\
&= \sum_{i=p}^{q-1} d(T^i x, T^{i+1} y) + \sum_{i=p+1}^{q-1} d(T^i x, T^i y) \\
&\leq \sum_{i=p}^{q-1} (2m+1)\lambda^i \epsilon + \sum_{i=p+1}^{q-1} (2m+1)\lambda^i \epsilon \\
&\leq \sum_{i=p}^{\infty} (2m+1)\lambda^i \epsilon + \sum_{i=p+1}^{\infty} (2m+1)\lambda^i \epsilon \\
&= \frac{(2m+1)\lambda^p \epsilon}{1-\lambda} + \frac{(2m+1)\lambda^{p+1} \epsilon}{1-\lambda}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, $p, q \to \infty$ iken $d(T^p x, T^q y) \to 0$ olduğu görülür. Benzer olarak, $p \geq q$ için de aynı sonuçlar elde edilebilir. Bu durumda, $(T^n x, T^n y)$ ikilisi (X, Y, d) uzayı üzerinde bir Cauchy çift dizisidir. (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik olduğundan, $(T^n x, T^n y)$ bir $u \in X \cap Y$ noktasına yakınsaktır (özel olarak çifte yakınsaktır). Lemma 4.3.2'den, herhangi bir $(\epsilon,\lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme dönüşümü sürekli olduğundan,

$$Tu = T(\lim_{n\to\infty} T^n x) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = \lim_{n\to\infty} T^n x = u$$

olduğu kolayca görülür. Bu durumda, u noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi de T'nin sabit noktası u'nun tekliği gösterilsin. $u' \neq u$ ve $Tu' = u'$ olacak şekilde bir $u' \in X \cap Y$ noktasının var olduğu kabul edilsin.

$$u = x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k = u'$$

bir ϵ-zinciri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
0 < d(u,u') &= d(Tu, Tu') \\
&= d(T^2u, T^2u') = \cdots = d(T^n u, T^n u') = d(T^n x_0, T^n y_k) \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} d(T^n x_i, T^n y_i) + \sum_{i=1}^{k} d(T^n x_i, T^n y_{i-1}) \\
&\leq (2k+1)\lambda^n \epsilon \to 0 \ (n \to \infty \text{ iken})
\end{aligned}$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu durumda, $u = u'$ olmalıdır. ■

Lemma 4.3.5. (X,Y,d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer $T : (X,Y) \leftrightarrows (X,Y)$ bir $(\epsilon,\lambda)-$düzgün yerel kontravaryant büzülme dönüşümü ise $T^2 : (X,Y) \rightrightarrows (X,Y)$ bir $(\epsilon,\lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme dönüşümüdür.

İspat: $x \in X$, $y \in Y$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $d(x,y) < \epsilon$ olsun. T bir $(\epsilon,\lambda)-$düzgün yerel kontravaryant büzülme dönüşümü olduğundan $x \in X$, $y \in Y$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$d(x,y) < \epsilon \Rightarrow d(Ty,Tx) \leq \lambda d(x,y) < \lambda\epsilon < \epsilon$$

olur. Bu ifadeden faydalanılarak

$$d(T^2x, T^2y) \leq \lambda d(Ty,Tx) \leq \lambda^2 d(x,y) \leq \lambda d(x,y)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, T^2 bir $(\epsilon,\lambda)-$düzgün yerel kovaryant büzülme dönüşümüdür. ■

Teorem 4.3.6. (X, Y, d) bir $\epsilon-$zincirlenebilir tam çift kutuplu metrik uzay ve T : $(X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kontravaryant büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X \cap Y$ noktası vardır.

İspat: T bir $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel kontravaryant büzülme dönüşümü olduğu için Lemma 4.3.5'ten, $S = T^2$ bir $(\epsilon, \lambda)-$düzgün yerel büzülme dönüşümüdür. Teorem 4.3.4'ten, $Su = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X \cap Y$ sabit noktası vardır. $Tu = v$ olsun. $u \in X$, $v \in Y$ veya $u \in Y$, $v \in X$ olduğundan

$$Sv = T^2v = T^3u = TT^2u = TSu = Tu = v$$

olur. Bu durumda, $v \in X \cap Y$ noktası S'nin bir sabit noktasıdır. Diğer yandan, S'nin sabit noktasının tekliğinden $v = u$ olur. Bu durumda, $Tu = u$ dur. Sonuç olarak u noktası T'nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi de, T'nin sabit noktasının tekliğini göstermek için $u' \neq u$ ve $Tu' = u'$ olacak şekilde bir $u' \in X \cap Y$ noktasının var olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$Su' = T^2u' = TTu' = Tu' = u'$$

olur. Diğer yandan, u noktası S'nin tek sabit noktası olduğundan $u' = u$ olur. Dolayısıyla, $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X \cap Y$ noktası vardır. ■

Tanım 4.3.7. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir kontravaryant dönüşüm olsun. Eğer her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$d(Ty, Tx) \leq \lambda(d(x, y))d(x, y) \tag{4.58}$$

ve her $k, l, t > 0$ için

$$\sup\{\lambda(t) : 0 < k \leq t \leq l\} < 1$$

şartları sağlanacak şekilde bir $\lambda : (0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu var ise, T'ye zayıf kontravaryant büzülme dönüşümü denir.

Teorem 4.3.8. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir zayıf kontravaryant büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda, T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Bir $x \in X$ sol noktası ve (X,Y,d) üzerinde $(T^{2n}x, T^{2n+1}x)$ çift dizisi göz önüne alınsın. Eğer $d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ noktası var ise, $T^{2n}x = T^{2n+1}x = TT^{2n}x$ olduğundan T kontravaryant dönüşümü bir $T^{2n}x$ sabit noktasına sahiptir. Benzer olarak, eğer $d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) = 0$ ise $T^{2n+1}x$ de T kontravaryant dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi de, her bir negatif olmayan n tam sayısı için $d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) > 0$ ve $d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, her $r \in (0,\infty)$ için $\lambda(r) < 1$ olduğundan T bir kontravaryant büzülme dönüşümüdür. Her bir pozitif n tam sayısı için

$$\begin{aligned} d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) &= d(TT^{2n-1}x, TT^{2n}x) \\ &\leq \lambda(d(T^{2n}x, T^{2n-1}x)).d(T^{2n}x, T^{2n-1}x) \\ &< d(T^{2n}x, T^{2n-1}x) \end{aligned}$$

ifadesi ve her bir negatif olmayan n tam sayısı için

$$\begin{aligned} d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) &= d(TT^{2n+1}x, TT^{2n}x) \\ &\leq \lambda(d(T^{2n}x, T^{2n+1}x)).d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) \\ &< d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$d(x,Tx) > d(T^2x,Tx) > d(T^2x,T^3x) > d(T^4x,T^3x) > \cdots \tag{4.59}$$

olduğu görülür. Bu durumda, $d(T^{2n}x, T^{2n+1}x)$ ve $d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x)$ dizileri $\mathbb{R}$ üzerinde monoton azalan ve 0 ile alttan sınırlıdır. Şu halde, bu diziler yakınsaktır. Hatta (4.59) ifadesinden bu iki dizi aynı noktaya yakınsar.

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) = \lim_{n\to\infty} d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) = \alpha$$

olsun. Dolayısıyla,

$$\alpha < d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) \leq d(x,Tx)$$

ve benzer olarak

$$\alpha < d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) \leq d(x,Tx)$$

olur. $\alpha = 0$ olduğu elde edilmesi için $\alpha > 0$ olduğu kabul edilsin.

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda(t) : 0 < \alpha \leq t \leq d(x,Tx)\}$$

kümesi oluşturulsun. Bu durumda, herbir pozitif n tam sayısı için

$$\lambda(d(T^{2n}x, T^{2n+1}x)) \leq \lambda_0 \quad \text{ve} \quad \lambda(d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x)) \leq \lambda_0$$

ifadesi elde edilir. Şu halde,

$$0 < \alpha < d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) \leq \lambda_0 d(T^{2n}x, T^{2n-1}x) \leq \cdots \leq \lambda_0^{2n} d(x, Tx) \to 0$$

olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha = 0$'dır.

Şimdi de, $(T^{2n}x, T^{2n+1}x)$'in (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayı üzerinde bir Cauchy çift dizisi olduğu gösterilsin. Bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$\delta = \delta(\epsilon) = \sup\{\lambda(t) : 0 < \frac{\epsilon}{3} \leq t \leq \epsilon\} < 1 \tag{4.60}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ oluşturulsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) = \lim_{n\to\infty} d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) = \alpha = 0$$

ve $1 - \delta > 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ için

$$d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) < \frac{1-\delta}{3}\epsilon \quad \text{ve} \quad d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) < \frac{1-\delta}{3}\epsilon \tag{4.61}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $m, n \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq n_0$ olsun. Eğer $m \geq n$ ise k bir negatif olmayan tam sayı olmak üzere $m = n + k$ şeklinde yazılabilir. Tümevarımdan,

$$d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \epsilon \tag{4.62}$$

olduğu gösterilebilir. $k = 0$ için

$$d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) = d(T^{2n}x, T^{2n+1}x) < \frac{1-\delta}{3}\epsilon < \epsilon$$

olur. Bu durumda, (4.62) eşitsizliği sağlanır. $k > 0$ için $d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \epsilon$ olduğu varsayılsın. $k + 1$ göz önüne alınsın. Eğer $d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) \geq \frac{\epsilon}{3}$ ise (4.58) ve (4.60) ifadelerinden

$$d(T^{2n+2}x, T^{2m+1}x) \leq \lambda(d(T^{2m}x, T^{2n+1}x))d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \delta\epsilon$$

olur. Bu durumda, (4.61) ifadesinden

$$\begin{aligned} d(T^{2(n+k+1)}x, T^{2n+1}x) &= d(T^{2m+2}x, T^{2n+1}x) \\ &\leq d(T^{2m+2}x, T^{2m+1}x) + d(T^{2n+2}x, T^{2m+1}x) \\ &\quad + d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) \\ &< \frac{1-\delta}{3}\epsilon + \delta\epsilon + \frac{1-\delta}{3}\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

olur. Eğer $d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \frac{\epsilon}{3}$ ise (4.61) ifadesinden

$$\begin{aligned} d(T^{2(n+k+1)}x, T^{2n+1}x) &= d(T^{2m+2}x, T^{2n+1}x) \\ &\leq d(T^{2m+2}x, T^{2m+1}x) + d(T^{2m}x, T^{2m+1}x) \\ &\quad + d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) \\ &< \frac{1-\delta}{3}\epsilon + \frac{1-\delta}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan, eğer $m < n$ ise $k \geq 0$ iken $n = m + k$ yazılabilir. Tümevarımdan,

$$d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \epsilon$$

olduğu gösterilebilir. $k = 0$ için

$$d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) = d(T^{2m}x, T^{2m+1}x) < \frac{1-\delta}{3}\epsilon < \epsilon$$

olur. $k > 0$ için $d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \epsilon$ olduğu varsayılsın. $k+1$ için incelensin. Eğer $d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) \geq \frac{\epsilon}{3}$ ise (4.58) ve (4.60) ifadelerinden

$$d(T^{2n+2}x, T^{2m+1}x) \leq \lambda(d(T^{2m}x, T^{2n+1}x))d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \delta\epsilon$$

olur. Bu durumda, (4.61) ifadesinden

$$\begin{aligned} d(T^{2m}x, T^{2(m+k+1)+1}x) &= d(T^{2m}x, T^{2n+3}x) \\ &\leq d(T^{2m}x, T^{2m+1}x) + d(T^{2n+2}x, T^{2m+1}x) \\ &\quad + d(T^{2n+2}x, T^{2n+3}x) \\ &< \frac{1-\delta}{3}\epsilon + \delta\epsilon + \frac{1-\delta}{3}\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

olur. Eğer $d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) < \frac{\epsilon}{3}$ ise (4.61) ifadesinden

$$\begin{aligned} d(T^{2m}x, T^{2(m+k+1)+1}x) &= d(T^{2m}x, T^{2n+3}x) \\ &\leq d(T^{2m}x, T^{2n+1}x) + d(T^{2n+2}x, T^{2n+1}x) \\ &\quad + d(T^{2n+2}x, T^{2n+3}x) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{1-\delta}{3}\epsilon + \frac{1-\delta}{3}\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $(T^{2n}x, T^{2n+1}x)$ ikilisi (X, Y, d) uzayı üzerinde bir Cauchy çift dizisidir. Ayrıca, bu çift dizi bir $u \in X \cap Y$ noktasına çifte yakınsaktır. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} T^{2n}x = \lim_{n\to\infty} T^{2n+1}x = u$$

olur. T bir kontravaryant büzülme dönüşümü olduğundan süreklidir. Buradan,

$$Tu = T(\lim_{n\to\infty} T^{2n}x) = \lim_{n\to\infty} TT^{2n}x = \lim_{n\to\infty} T^{2n+1}x = u$$

olur. Bu durumda, u noktası T'nin bir sabit noktasıdır. T kontravaryant büzülme dönüşümünün sabit noktasının tekliğini göstermek için $u \neq u'$, $Tu = u$ olacak şekilde bir $u' \in X \cap Y$ alınsın. Bu durumda,

$$0 < d(u, u') = d(Tu, Tu') \leq \lambda(d(u, u'))d(u, u')$$

ve $\lambda < 1$ olduğundan $d(u, u') = 0$ olur. O halde $u = u'$ olarak bulunur. ■

Örnek 4.3.9. $X = [0, 1]$ ve $Y = [-1, 1]$ olsun. $x \in X$ ve $y \in Y$ için $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $d(x, y) = |x - y|$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzaydır. $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü her $z \in X \cup Y$ için $Tz = \dfrac{z+1}{4}$ biçiminde ve $\lambda : (0, \infty) \to [0, 1)$ dönüşümü de $t > 0$ için $\lambda(t) = \dfrac{t}{t+1}$ biçiminde tanımlansın. Buradan $x \in X$, $y \in Y$ için

$$d(Ty, Tx) \leq \lambda(d(x, y))d(x, y)$$

ifadesi sağlanır. Ayrıca, her $k, l, t \in \mathbb{R}^+$ için

$$sup\{\lambda(t) : 0 < k \leq t \leq l\} < 1$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, T zayıf kontravaryant büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla, Teorem 4.3.8'den, T bir tek sabit noktaya sahiptir. Hatta bu sabit nokta $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ olur.

4.4. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda $\alpha-$Uygun Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda metrik uzaylar üzerinde Samet ve diğerleri [40] tarafından tanımlanan $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü ve $\alpha-$uygun (*İng. admissible*) dönüşüm kavramları çift kutuplu metrik uzaylarda tanımlanmış ve bu dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ve sonuçlar ifade edilmiştir.

Tanım 4.4.1. [40] Ψ, aşağıdaki şartları sağlayan $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonların bir ailesi olsun;

(1) ψ azalmayandır,

(2) ψ^n, ψ'nin n'nci iterasyonu olmak üzere her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < +\infty$'dur.

Bu fonksiyonlara (c)-karşılaştırma fonksiyonları veya Bianchini-Grandolfi ölçü fonksiyonları denir. Eğer ψ bir (c)-karşılaştırma fonksiyonu ise herhangi bir $t > 0$ için $\psi(t) < t$'dir.

Burada eğer $\psi \in \Psi$ ise her bir $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0 \Rightarrow \psi(t) < t \Rightarrow \psi(0) = 0$$

olur.

Tanım 4.4.2. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)), \tag{4.63}$$

olacak şekilde $\alpha : X \times Y \to [0, +\infty)$ ve $\psi \in \Psi$ mevcut ise T'ye kovaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü denir.

Tanım 4.4.3. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir kontravaryant dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\alpha(x, y)d(Ty, Tx) \leq \psi(d(x, y)), \tag{4.64}$$

olacak şekilde $\alpha : X \times Y \to [0, +\infty)$ ve $\psi \in \Psi$ mevcut ise T'ye kontravaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü denir.

Uyarı 4.4.4. Banach şartını sağlayan bir $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ dönüşümü her $x \in X,\ y \in Y$ için $\alpha(x, y) = 1$ ve her bir $t \geq 0$ ve en az bir $k \in [0, 1)$ için $\psi(t) = kt$ olacak şekilde bir kovaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümüdür. Benzer şekilde, Banach şartını sağlayan bir $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü her $x \in X,\ y \in Y$ için $\alpha(x, y) = 1$ ve her $t \geq 0$ ve en az bir $k \in [0, 1)$ için $\psi(t) = kt$ olacak şekilde bir kontravaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümüdür.

Tanım 4.4.5. $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm ve $\alpha : X \times Y \to [0, +\infty)$ olsun. Eğer $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$$

koşulu sağlanıyor ise T kovaryant dönüşümüne $\alpha-$uygun denir.

Tanım 4.4.6. $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir kontravaryant dönüşüm ve $\alpha : X \times Y \to [0, +\infty)$ olsun. Eğer $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Ty, Tx) \geq 1$$

koşulu sağlanıyor ise T kontravaryant dönüşümüne $\alpha-$uygun denir.

Örnek 4.4.7. $X = [0, +\infty)$ ve $Y = (-\infty, 0]$ olsun. $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ kovaryant dönüşümü $Tx = x$, $x \in X \cup Y$ biçiminde ve $\alpha : X \times Y \to [0, +\infty)$ dönüşümü her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T kovaryant dönüşümü $\alpha-$uygundur. Benzer şekilde, eğer $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ kontravaryant dönüşümü $Tx = -x$, $x \in X \cup Y$ biçiminde tanımlansın. Bu takdirde, T kontravaryant dönüşümü $\alpha-$uygundur.

Teorem 4.4.8. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın;

(i) T bir $\alpha-$uygun dönüşümdür,

(ii) $\alpha(x_0, y_0) \geq 1$ ve $\alpha(x_0, Ty_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X, y_0 \in Y$ vardır,

(iii) T süreklidir.

Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\alpha(x_0, Ty_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X, y_0 \in Y$ alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$, $y_{n+1} = Ty_n$ olacak şekilde (x_n, y_n) çift dizisi tanımlansın. T kovaryant dönüşümü bir $\alpha-$uygun olduğundan (ii) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha(x_0, y_0) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Tx_0, Ty_0) \geq 1, \\ \alpha(x_0, y_1) = \alpha(x_0, Ty_0) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Tx_0, Ty_1) = \alpha(x_1, y_2) \geq 1, \\ \alpha(x_1, y_1) = \alpha(Tx_0, Ty_0) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Tx_1, Ty_1) = \alpha(x_2, y_2) \geq 1, \\ \alpha(x_1, y_2) = \alpha(x_1, Ty_1) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Tx_1, Ty_2) = \alpha(x_2, y_3) \geq 1, \\ \alpha(x_2, y_2) = \alpha(Tx_1, Ty_1) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Tx_2, Ty_2) = \alpha(x_3, y_3) \geq 1 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu işlem tekrar edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, y_n) \geq 1 \quad \text{ve} \quad \alpha(x_n, y_{n+1}) \geq 1 \tag{4.65}$$

ifadeleri elde edilir. (4.63) ve (4.65) denklemleri kullanılarak $n \geq 1$ iken $x = x_{n-1},\ y = y_n$ için

$$d(x_n, y_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Ty_n) \leq \alpha(x_{n-1}, y_n) d(Tx_{n-1}, Ty_n) \leq \psi(d(x_{n-1}, y_n))$$

ve $x = x_n,\ y = y_n$ için

$$d(x_{n+1}, y_{n+1}) = d(Tx_n, Ty_n) \leq \alpha(x_n, y_n) d(Tx_n, Ty_n) \leq \psi(d(x_n, y_n))$$

bulunur. Bu ifadeler genelleştirilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, y_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, y_1)) \quad \text{ve} \quad d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leq \psi^{n+1}(d(x_0, y_0))$$

ifadeleri elde edilir. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$\sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_0, y_1)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^{n+1}(d(x_0, y_0)) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ var olsun. $m > n > n(\epsilon)$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$ ve her $k \geq 1$ için $(B3)$ aksiyomu uygulanarak

$$\begin{aligned}
d(x_n, y_m) &\leq d(x_n, y_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+2}) + d(x_{n+2}, y_{n+2}) \\
&\quad + \cdots + d(x_{m-1}, y_{m-1}) + d(x_{m-1}, y_m) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, y_{k+1}) + \sum_{k=n}^{m-2} d(x_{k+1}, y_{k+1}) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(d(x_0, y_1)) + \sum_{k=n}^{m-2} \psi^{k+1}(d(x_0, y_0)) \\
&\leq \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_0, y_1)) + \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^{n+1}(d(x_0, y_0)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, $n > m > n(\epsilon)$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$ ve her $k \geq 1$ için $(B3)$ özelliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
d(x_n, y_m) &\leq d(x_m, y_m) + d(x_m, y_{m+1}) + d(x_{m+1}, y_{m+1}) + d(x_{m+1}, y_{m+2}) \\
&\quad + \cdots + d(x_n, y_{n+1}) + d(x_n, y_n) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n} d(x_k, y_k) + \sum_{k=m}^{n} d(x_k, y_{k+1}) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n} \psi^k(d(x_0, y_0)) + \sum_{k=m}^{n} \psi^k(d(x_0, y_1)) \\
&\leq \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_0, y_0)) + \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_0, y_1)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, (x_n, y_n) bir Cauchy çift dizisidir. (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzay olduğundan (x_n, y_n) çifte yakınsaktır. Yani, $n \to \infty$ iken $(x_n) \rightharpoondown u$ ve $(y_n) \rightharpoonup u$ olacak şekilde bir $u \in X \cap Y$ vardır. T kovaryant dönüşümü sürekli olduğundan $(y_n) \rightharpoonup u$ olması $y_{n+1} = Ty_n \rightharpoonup Tu$ olmasını ve $(x_n) \rightharpoondown u$ olması da $x_{n+1} = Tx_n \rightharpoondown Tu$

olmasını gerektirir. Limitin tekliğinden $Tu = u$ olduğu elde edilir. Bu takdirde, u, T'nin bir sabit noktasıdır. ■

Teorem 4.4.9. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir kontravaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın;

(i) T bir $\alpha-$uygundur,

(ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,

(iii) T süreklidir.

Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için (x_n, y_n) çift dizisi $y_n = Tx_n$ ve $x_{n+1} = Ty_n$ biçiminde tanımlansın. T kontravaryant dönüşümü $\alpha-$uygun olduğundan

$$
\begin{aligned}
\alpha(x_0, y_0) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Ty_0, Tx_0) = \alpha(x_1, y_0) \geq 1 \\
\alpha(x_1, y_0) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Ty_0, Tx_1) = \alpha(x_1, y_1) \geq 1 \\
\alpha(x_1, y_1) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Ty_1, Tx_1) = \alpha(x_2, y_1) \geq 1 \\
\alpha(x_2, y_1) \geq 1 &\Rightarrow \alpha(Ty_1, Tx_2) = \alpha(x_2, y_2) \geq 1
\end{aligned}
$$

ifadeleri elde edilir. Bu işlem tekrar edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\alpha(x_n, y_n) \geq 1 \quad \text{ve} \quad \alpha(x_{n+1}, y_n) \geq 1 \tag{4.66}
$$

ifadeleri elde edilir. (4.64) ve (4.66) ifadeleri kullanılarak $n \geq 1$ iken $x = x_n,\ y = y_{n-1}$ için

$$
d(x_n, y_n) = d(Ty_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha(x_n, y_{n-1}) d(Ty_{n-1}, Tx_n) \leq \psi(d(x_n, y_{n-1}))
$$

ve $x = x_{n+1},\ y = y_n$ için

$$
d(x_{n+1}, y_n) = d(Ty_n, Tx_n) \leq \alpha(x_n, y_n) d(Ty_n, Tx_n) \leq \psi(d(x_n, y_n))
$$

olduğu elde edilir. Bu ifadeler genelleştirilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
d(x_n, y_n) \leq \psi^n(d(x_1, y_0)) \quad \text{ve} \quad d(x_{n+1}, y_n) \leq \psi^{n+1}(d(x_0, y_0))
$$

ifadeleri elde edilir. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$
\sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_1, y_0)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^{n+1}(d(x_0, y_0)) < \frac{\epsilon}{2}
$$

olacak şekilde $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ var olsun. $m > n > n(\epsilon)$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$ ve her $k \geq 1$ için $(B3)$ aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned}
d(x_n, y_m) &\leq d(x_n, y_n) + d(x_{n+1}, y_n) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) + d(x_{n+2}, y_{n+1}) \\
&\quad + \cdots + d(x_m, y_{m-1}) + d(x_m, y_m) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m} d(x_k, y_k) + \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, y_k) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m} \psi^k(d(x_1, y_0)) + \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k+1}(d(x_0, y_0)) \\
&\leq \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_1, y_0)) + \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^{n+1}(d(x_0, y_0)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, $n > m > n(\epsilon)$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$ ve her $k \geq 1$ için $(B3)$ aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned}
d(x_n, y_m) &\leq d(x_n, y_{n-1}) + d(x_{n-1}, y_{n-1}) + d(x_{n-1}, y_{n-2}) + d(x_{n-2}, y_{n-2}) \\
&\quad + \cdots + d(x_m, y_{m-1}) + d(x_m, y_m) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, y_k) + \sum_{k=m}^{n} d(x_k, y_{k-1}) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} \psi^k(d(x_0, y_0)) + \sum_{k=m}^{n} \psi^k(d(x_1, y_0)) \\
&\leq \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_0, y_0)) + \sum_{n \geq n(\epsilon)} \psi^n(d(x_1, y_0)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, (x_n, y_n) bir Cauchy çift dizisidir. (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzay olduğundan (x_n, y_n) çifte yakınsaktır. Yani, $n \to \infty$ iken $(x_n) \rightharpoondown u$ ve $(y_n) \rightharpoonup u$ olacak şekilde $u \in X \cap Y$ vardır. T kontravaryant dönüşümü sürekli olduğundan $x_n \rightharpoondown u$ olması $y_n = Tx_n \rightharpoonup Tu$ olmasını gerektirir. $y_n \rightharpoonup u$ olması da kullanılarak $Tu = u$ olduğu elde edilir. Bu takdirde, u, T'nin bir sabit noktasıdır. ■

Teorem 4.4.10. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın;

(i) T bir $\alpha-$uygun dönüşümdür,

(ii) $\alpha(x_0, y_0) \geq 1$ ve $\alpha(x_0, Ty_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X, y_0 \in Y$ vardır,

(iii) Eğer $n \to \infty$ iken her n için $\alpha(x_n, y_n) \geq 1$ ve $x_n \rightharpoondown a$, $a \in X \cap Y$ olacak

şekilde (x_n, y_n) çift dizisi varsa her n için $\alpha(a, y_n) \geq 1$ olur.
Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.4.8'in ispatındakine benzer olarak, her $n \geq 0$ için (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzayı üzerinde (x_n, y_n) Cauchy çift dizisi $x_{n+1} = Tx_n,\ y_{n+1} = Ty_n$ biçiminde tanımlansın. Bu çift dizi $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoondown u$ ve $y_n \rightharpoonup u$ olacak şekilde bir $u \in X \cap Y$ noktasına yakınsasın. (4.65) ifadesinden ve (iii) koşulundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(u, y_n) \geq 1$ ifadesi elde edilir. $(B3)$ aksiyomu ve (4.63) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(Tu, u) &\leq d(Tu, Ty_n) + d(Tx_n, Ty_n) + d(Tx_n, u) \\ &\leq \alpha(u, y_n) d(Tu, Ty_n) + \alpha(x_n, y_n) d(Tx_n, Ty_n) + d(x_{n+1}, u) \\ &\leq \psi(d(u, y_n)) + \psi(d(x_n, y_n)) + d(x_{n+1}, u) \\ &\leq \psi(d(u, y_n)) + \psi(d(x_n, u) + d(u, u) + d(u, y_n)) + d(x_{n+1}, u) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $t = 0$ da $\psi(0) = 0$ olduğundan $d(Tu, u) = 0 \Rightarrow Tu = u$ ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, u, T'nin bir sabit noktasıdır. ■

Teorem 4.4.11. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightleftarrows (X, Y)$ bir kontravaryant $\alpha - \psi-$büzülme dönüşümü olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın;

(i) T bir $\alpha-$uygun dönüşümdür,

(ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,

(iii) Eğer $n \to \infty$ iken her n için $\alpha(x_n, y_n) \geq 1$ ve $x_n \rightharpoondown a$, $a \in X \cap Y$ olacak şekilde (x_n, y_n) çift dizisi varsa her n için $\alpha(a, y_n) \geq 1$ olur.

Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.4.9'un ispatındakine benzer olarak, her $n \geq 0$ için (X, Y, d) tam çift kutuplu metrik uzayı üzerinde (x_n, y_n) Cauchy çift dizisi $y_n = Tx_n,\ x_{n+1} = Ty_n$ biçiminde tanımlansın. Bu çift dizi $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoondown u$ ve $y_n \rightharpoonup u$ olacak şekilde bir $u \in X \cap Y$ noktasına yakınsasın. (4.66) ifadesinden ve (iii) koşulundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(u, y_n) \geq 1$ ifadesi elde edilir. $(B3)$ aksiyomu ve (4.64) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq d(u, Tx_n) + d(Ty_n, Tx_n) + d(Ty_n, Tu) \\ &\leq d(u, y_n) + \alpha(x_n, y_n) d(Ty_n, Tx_n) + \alpha(u, y_n) d(Ty_n, Tu) \end{aligned}$$

$$\leq d(u, y_n) + \psi(d(x_n, y_n)) + \psi(d(u, y_n))$$
$$\leq d(u, y_n) + \psi(d(x_n, u) + d(u, u) + d(u, y_n)) + d(x_{n+1}, u) + \psi(d(u, y_n))$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, $t = 0$'da $\psi(0) = 0$ olduğundan $d(u, Tu) = 0 \Rightarrow Tu = u$ ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, u, T'nin bir sabit noktasıdır. ■

Aşağıda sabit noktanın tekliğini ifade eden bir hipotez verilmiştir.

H : Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(z, y) \geq 1$ olacak şekilde $z \in X \cap Y$ vardır.

Teorem 4.4.12. Teorem 4.4.8 (veya Teorem 4.4.9)'un hipotezine **H** şartı eklenirse, u'nun T kovaryant (veya kontravaryant) dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu elde edilir.

İspat: T kovaryant (veya kontravaryant) dönüşümünün sabit noktasının tekliği gösterilmek isteniyor. Tersi varsayılsın. Yani, v, $u \neq v$ olacak şekilde T'nin bir başka sabit noktası olsun. Bu takdirde, **H** şartından

$$\alpha(u, z) \geq 1 \quad \text{ve} \quad \alpha(z, v) \geq 1 \tag{4.67}$$

olacak şekilde $z \in X \cap Y$ vardır. T, $\alpha-$uygun dönüşüm olduğundan, (4.67) ifadesi kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(u, T^n z) \geq 1 \quad \text{ve} \quad \alpha(T^n z, v) \geq 1 \tag{4.68}$$

ifadeleri elde edilir. (4.63) ve (4.68) eşitsizlikleri birleştirilerek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(u, T^n z) &= d(Tu, T(T^{n-1}z)) \\ &\leq \alpha(u, T^{n-1}z) d(Tu, T(T^{n-1}z)) \\ &\leq \psi(d(u, T^{n-1}z)) \\ &\vdots \\ &\leq \psi^n(d(u, z)) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Benzer olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z, v) \leq \psi^n(d(z, v))$$

olduğu kolayca elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $T^n z \to u$ ve $T^n z \to v$ ifadeleri elde edilir. Bu da limitin tekliği ile çelişir. Bu durumda, $u = v \in X \cap Y$ olur. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir. ■

Lemma 4.4.13. $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Eğer $T : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X \times Y, Y \times X)$ kovaryant dönüşümü her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$T(x, y) = (F(x, y), F(y, x)) \tag{4.69}$$

biçiminde tanımlanırsa, (x, y)'nin F'in bir ikili sabit noktası olması için gerek ve yeter şart (x, y)'nin T'nin bir sabit noktası olmasıdır.

Lemma 4.4.14. $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Eğer $T : (X \times Y, Y \times X) \mathrel{\times\!\!\!\!\!\rightrightarrows} (X \times Y, Y \times X)$ kontravaryant dönüşümü her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$T(x, y) = (F(y, x), F(x, y))$$

biçiminde tanımlanırsa, (x, y)'nin T'nin bir ikili sabit noktası olması için gerek ve yeter şart (x, y)'nin T'nin bir sabit noktası olmasıdır.

Teorem 4.4.15. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Her $(x, y),\ (v, u) \in X \times Y$ için

$$\alpha((x, y), (u, v)) d(F(x, y), F(u, v)) \leq \frac{1}{2}\psi(d(x, u) + d(v, y)) \tag{4.70}$$

olacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : (X \times Y) \times (Y \times X) \to [0, +\infty)$ fonksiyonlarının mevcut olduğu ve aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın;

(i) Her $(x, y),\ (v, u) \in X \times Y$ için

$$\alpha((x, y), (u, v)) \geq 1 \Rightarrow \alpha((F(x, y), F(y, x)), (F(u, v), F(v, u)) \geq 1$$

dir.

(ii)

$$\alpha((x_0, y_0), (F(y_0, x_0), F(x_0, y_0))) \geq 1,$$

ve

$$\alpha((F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)), (y_0, x_0)) \geq 1$$

olacak şekilde $(x_0, y_0) \in X \times Y$ vardır.

(iii) F süreklidir.

Bu takdirde, F bir ikili sabit noktaya sahiptir. Yani, $u = F(u,v)$ ve $v = F(v,u)$ olacak şekilde $(u,v) \in X \times Y$ vardır.

İspat: $A = X \times Y$, $B = Y \times X$ ve her $(x,y) \in A$, $(u,v) \in B$ için

$$\delta((x,y),(u,v)) = d(x,u) + d(v,y)$$

olacak şekilde (A, B, δ) tam çift kutuplu metrik uzayı göz önüne alınsın. (4.70) ifadesi kullanılarak,

$$\alpha((x,y),(u,v))d(F(x,y),F(u,v)) \leq \frac{1}{2}\psi(\delta((x,u),(v,y))) \tag{4.71}$$

$$\alpha((v,u),(y,x))d(F(x,y),F(u,v)) \leq \frac{1}{2}\psi(\delta((x,u),(v,y))) \tag{4.72}$$

ifadeleri elde edilir. $\beta : A \times B \to [0, +\infty)$,

$$\beta(\varepsilon, \eta) = \min\{\alpha((\varepsilon_1, \varepsilon_2), (\eta_1, \eta_2)), \alpha((\eta_2, \eta_1), (\varepsilon_2, \varepsilon_1))\}$$

biçiminde ve $T : (A, B) \rightrightarrows (A, B)$ kovaryant dönüşümü (4.69) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere (4.71) ve (4.72) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa her $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in A$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in B$ için $\beta(\varepsilon, \eta)\delta(T\varepsilon, T\eta) \leq \psi(\delta(\varepsilon, \eta))$ ifadesi elde edilir. Bu takdirde, T kovaryant dönüşümü sürekli ve $\beta - \psi-$büzülme dönüşümüdür. $\beta(\varepsilon, \eta) \geq 1$ olmak üzere $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in A$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in B$ alınsın. (i) koşulundan $\beta(T\varepsilon, T\eta) \geq 1$ ifadesi elde edilir. Bu durumda, T dönüşümü $\beta-$uygundur.

Diğer taraftan, (ii) koşulundan $\beta((x_0, y_0), T(y_0, x_0)) \geq 1$ (veya $\beta(T(x_0, y_0), (y_0, x_0)) \geq 1$) olmak üzere $(x_0, y_0) \in A$ (veya $(y_0, x_0) \in B$) vardır. Bu durumda, Teorem 4.4.8 sağlanır. Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, Lemma 4.4.13'ten bu sabit nokta F'in ikili sabit noktasıdır. ■

Teorem 4.4.16. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $F : (X \times Y, Y \times X) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Her $(x,y) \in X \times Y,\ (u,v) \in Y \times X$ için

$$\alpha((x,y),(u,v))d(F(x,y),F(u,v)) \leq \frac{1}{2}\psi(d(x,u) + d(v,y)) \tag{4.73}$$

olacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : (X \times Y) \times (Y \times X) \to [0, +\infty)$ fonksiyonlarının mevcut olduğu ve aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın;

(i) Her $(x,y) \in X \times Y,\ (u,v) \in Y \times X$ için

$$\alpha((x,y),(u,v)) \geq 1 \Rightarrow \alpha((F(x,y),F(y,x)),(F(u,v),F(v,u))$$

olur.

(ii)

$$\alpha((x_0, y_0), (F(y_0, x_0), F(x_0, y_0))) \geq 1,$$

ve

$$\alpha((F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)), (y_0, x_0)) \geq 1$$

olacak şekilde $(x_0, y_0) \in X \times Y$ vardır.

(iii) Eğer her n için

$$\alpha((x_n, y_n), (y_{n+1}, x_{n+1})) \geq 1, \qquad \alpha((x_{n+1}, y_{n+1}), (y_n, x_n)) \geq 1$$

ve $n \to \infty$ için $x_n \rightharpoondown y \in Y, y_n \rightharpoonup x \in X$ olacak şekilde (x_n, y_n) bir çift dizi ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha((x_n, y_n), (y, x)) \geq 1 \quad \text{ve} \quad \alpha((x, y), (y_n, x_n)) \geq 1$$

olur.
Bu takdirde, F bir ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat: Bu teorem Teorem 4.4.15'in ispatındaki notasyonlar kullanılarak ispatlansın: $n \to \infty$ iken $\beta((x_n, y_n), (y_{n+1}, x_{n+1})) \geq 1$ ve $(x_n, y_n) \to (y, x)$ olacak şekilde (x_n, y_n), A da bir çift dizi ve (y_n, x_n), B'de bir çift dizi olsun. (iii) şartından $\beta((x_n, y_n), (y, x)) \geq 1$ olduğu elde edilir. Bu durumda, Teorem 4.4.10'un hipotezi sağlanır. Böylece, T'nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, Lemma 4.4.13'ten, bu sabit nokta F'in ikili sabit noktasıdır. ■

Aşağıda sabit noktanın tekliğini ifade eden bir hipotez verilmiştir.

H′ : Her $(x, y) \in X \times Y$ ve $(u, v) \in Y \times X$ için

$$\alpha((x, y), (z_1, z_2)) \geq 1, \ \alpha((z_2, z_1), (y, x)) \geq 1$$

ve

$$\alpha((v, u), (z_1, z_2)) \geq 1, \ \alpha((z_2, z_1), (u, v)) \geq 1$$

olacak şekilde $(z_1, z_2) \in (X \times Y) \cap (Y \times X)$ vardır.

Teorem 4.4.17. Eğer Teorem 4.4.15 (veya Teorem 4.4.16)'in hipotezine $\mathbf{H}'$ şartı eklenirse, (z_1, z_2), F kovaryant (veya kontravaryant) dönüşümünün bir tek ikili sabit noktasıdır.

İspat: $\mathbf{H}'$ hipotezi göz önüne alınırsa T ve β'nın $\mathbf{H}$ hipotezini sağladığı söylenebilir. Teorem 4.4.10 ve Lemma 4.4.13'ten sonuç açık olarak elde edilir. ■

Örnek 4.4.18. $U_n(\mathbb{R})$ ve $L_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde sırasıyla $n \times n$ tipindeki üst ve alt üçgensel matrislerin kümesi olsun. Bir $d : U_n(\mathbb{R}) \times L_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $A = (a_{ij})_{n\times n} \in U_n(\mathbb{R})$ ve $B = (b_{ij})_{n\times n} \in L_n(\mathbb{R})$ için

$$d(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $(U_n(\mathbb{R}), L_n(\mathbb{R}), d)$ tam çift kutuplu metrik uzaydır. $(A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}) \in ((U_n(\mathbb{R}) \times L_n(\mathbb{R})) \cup (L_n(\mathbb{R}) \times U_n(\mathbb{R}))$ olmak üzere $F(A, B) = \left(\dfrac{a_{ij} + b_{ij}}{4}\right)_{n\times n}$ biçiminde tanımlanan

$$F : (U_n(\mathbb{R}) \times L_n(\mathbb{R}), L_n(\mathbb{R}) \times U_n(\mathbb{R})) \rightrightarrows (U_n(\mathbb{R}), L_n(\mathbb{R}))$$

sürekli kovaryant dönüşümü alınsın. Diğer taraftan,

$$\alpha : (U_n(\mathbb{R}) \times L_n(\mathbb{R})) \times (L_n(\mathbb{R}) \times U_n(\mathbb{R})) \to [0, +\infty)$$

dönüşümü $A = (a_{ij})_{n\times n},\ D = (d_{ij})_{n\times n} \in U_n(\mathbb{R})$ ve $B = (b_{ij})_{n\times n}, C = (c_{ij})_{n\times n} \in L_n(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\alpha((A, B), (C, D)) = \begin{cases} 1, & a_{ij} \geq b_{ij},\ c_{ij} \geq d_{ij} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Her $(A, B) \in U_n(\mathbb{R}) \times L_n(\mathbb{R})$ ve $(C, D) \in L_n(\mathbb{R}) \times U_n(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} d(F(A, B), F(C, D)) &= d\left(\left(\frac{a_{ij} + b_{ij}}{4}\right)_{n\times n}, \left(\frac{c_{ij} + d_{ij}}{4}\right)_{n\times n}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{a_{ij} + b_{ij} - c_{ij} - d_{ij}}{4}\right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{a_{ij} - c_{ij}}{4}\right| + \left|\frac{b_{ij} - d_{ij}}{4}\right| \\ &= \frac{1}{4}\left(d(A, C) + d(B, D)\right) \end{aligned}$$

olur. α dönüşümünün tanımından

$$\alpha((A, B), (C, D))d(F(A, B), F(C, D)) \leq \frac{1}{4}(d(A, C) + d(B, D))$$

olduğu görülür. Böylece, her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \dfrac{t}{2}$ olmak üzere (4.70) eşitsizliği sağlanır. α'nın ve F'in tanımlarından (i) şartı sağlanır. Ayrıca, $(x_0, y_0) = (I_n, I_n)$ birim matris ikilisi için Teorem 4.4.15'in (ii) şartı sağlanır. Bu durumda, F bir ikili sabit noktaya sahiptir. Üstelik, $0_{n\times n} \in U_n(\mathbb{R}) \cap L_n(\mathbb{R})$ sıfır matrisi olmak üzere bu ikili sabit nokta $(0_{n\times n}, 0_{n\times n})$ olur.

Sonuç 4.4.19. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

olacak şekilde bir $\psi \in \Psi$ fonksiyonunun mevcut olduğu varsayılsın. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.4.8 ve Teorem 4.4.12'de her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\alpha : X \times Y \to [0, +\infty)$ dönüşümü $\alpha(x, y) = 1$ olarak alınsın. Bu takdirde, Teorem 4.4.8 ve Teorem 4.4.12'nin hipotezleri sağlanır ve böylece, ispat tamamlanır. ■

Şimdi de benzer bir sonuç kontravaryant dönüşümler için verilsin.

Sonuç 4.4.20. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $T : (X, Y) \leftrightarrows (X, Y)$ bir kontravaryant dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(Ty, Tx) \leq \psi(d(x, y))$$

olacak şekilde bir $\psi \in \Psi$ fonksiyonunun mevcut olduğu varsayılsın. Bu takdirde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 4.4.19'un ispatındakine benzer bir yöntem kullanılarak Teorem 4.4.9 ve Teorem 4.4.12'de her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\alpha(x, y) = 1$ alınması ispat için yeterli olacaktır. Bu takdirde, Teorem 4.4.9 ve Teorem 4.4.12 sağlanır. ■

Sonuç 4.4.21. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde $T : (X, Y) \rightrightarrows (X, Y)$ bir kovaryant dönüşüm olsun. Bu durumda, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Eğer Sonuç 4.4.19'da her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dönüşümü $\psi(t) = \lambda t$ biçiminde alınırsa ispat elde edilir. ■

Sonuç 4.4.22. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere $T : (X, Y) \nearrow\!\!\!\!\searrow (X, Y)$, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$d(Ty, Tx) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde bir kontravaryant dönüşüm olsun. Bu durumda, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 4.4.20'de her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dönüşümü $\psi(t) = \lambda t$ biçiminde alınırsa ispat elde edilir. ■

4.5. Çift Kutuplu Metrik Uzaylarda Çok Değerli Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda ilk defa Nadler [41] tarafından ifade edilen çok değerli (*İng. multivalued*) dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerinin ve bu teoremlerle ilgili bazı önemli sonuçların çift kutuplu metrik uzaylardaki karşılığı ifade edilmiştir. Bu kısımda verilen çalışmalar [42]'de yayınlanmıştır.

Tanım 4.5.1. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun.
(1) Eğer her $y \in Y$ için $\delta(A) = \sup\{d(a, y) : a \in A\} < \infty$ ise $A \subseteq X$ kümesine sınırlıdır denir.
(2) Eğer her $x \in X$ için $\delta(B) = \sup\{d(x, b) : b \in B\} < \infty$ ise $B \subseteq Y$ kümesine sınırlıdır denir.

Tanım 4.5.2. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. Her $A \in CB(X)$ ve $B \in CB(Y)$ için

$$\begin{aligned}
CB(X) &= \{A : A,\ X\text{'in boştan farklı kapalı ve sınırlı bir altkümesidir}\} \\
CB(Y) &= \{B : B,\ Y\text{'nin boştan farklı kapalı ve sınırlı bir altkümesidir}\} \\
D(a, B) &= \inf\{d(a, b) : b \in B \subset Y\},\ a \in X \\
D(A, b) &= \inf\{d(a, b) : a \in A \subset X\},\ b \in Y \\
H(A, B) &= \max\{\sup\{D(a, B) : a \in A\}, \sup\{D(A, b) : b \in B\}\}
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilsin. Bu takdirde, H, $(CB(X), CB(Y))$ üzerinde bir çift kutuplu metriktir ve

$$(CB(X), CB(Y), H)$$

uzayı d çift kutuplu metriği tarafından üretilen Pompeiu$-$Hausdorff çift kutuplu metrik uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 4.5.3. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun.

(1) Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{4.74}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0, 1)$ sabit sayısı varsa bir $T : (X, Y) \rightrightarrows (CB(X), CB(Y))$ kovaryant dönüşümüne çok değerli kovaryant büzülme dönüşümü denir.

(2) Eğer her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$H(Ty, Tx) \leq \lambda d(x, y) \tag{4.75}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0, 1)$ sabit sayısı varsa bir $T : (X, Y) \mathrel{\rightrightarrows\kern-1.1em\times} (CB(X), CB(Y))$ kontravaryant dönüşümüne çok değerli kontravaryant büzülme dönüşümü denir.

(3) Eğer $u \in Tu$ ise $u \in X \cup Y$ noktasına bir T çok değerli kovaryant veya kontravaryant dönüşümünün sabit noktası denir.

Lemma 4.5.4. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay, $A \in CB(X)$, $B \in CB(Y)$ ve $\epsilon > 0$ olsun.

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \epsilon \tag{4.76}$$

olacak şekilde herhangi bir $a \in A$ için bir $b = b(a) \in B$ (veya herhangi bir $b \in B$ için bir $a = a(b) \in A$) vardır.

İspat: $\epsilon > 0$ iken $D(a, B)$, $D(A, b)$ ve $H(A, B)$'nin tanımlarından

$$d(a, b) \leq D(a, B) + \epsilon \leq H(A, B) + \epsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $a \in A$ için $b \in B$'nin mevcut olduğu ve

$$d(a, b) \leq D(A, b) + \epsilon \leq H(A, B) + \epsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $b \in B$ için bir $a \in A$'nın varlığı açıktır. ∎

Lemma 4.5.5. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay, $A \in CB(X)$, $B \in CB(Y)$ ve $h \in (0, 1)$ olsun.

$$hd(a, b) \leq H(A, B) \tag{4.77}$$

olacak şekilde herhangi bir $a \in A$ için bir $b = b(a) \in B$ (veya herhangi bir $b \in B$ için bir $a = a(b) \in A$) vardır.

İspat: Eğer $H(A, B) = 0$ ise, $a \in B$ ve $b = a$ için (4.77) eşitsizliği sağlanır. Eğer $H(A, B) > 0$ ise, $h \in (0, 1)$ olduğundan,

$$\epsilon = (h^{-1} - 1)H(A, B) > 0 \tag{4.78}$$

olarak alınabilir. Lemma 4.5.4 ve (4.78) eşitsizliğinden

$$hd(a, b) \leq H(A, B)$$

ifadesi elde edilir. ■

Teorem 4.5.6. (X, Y, d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer

$$T : (X, Y) \rightrightarrows (CB(X), CB(Y))$$

bir çok değerli kovaryant büzülme dönüşümü ise,

(i) T en az bir sabit noktaya sahiptir;

(ii) Her bir $(x_0, y_0) \in X \times Y$ için $n \to \infty$ iken $x_{n+1} \in Tx_n$, $y_{n+1} \in Ty_n$ ve $x_n \rightharpoondown u$, $y_n \rightharpoonup u$ olacak şekilde bir $(x_n, y_n) \in X \times Y$ dizisi vardır ve $u \in Tu$'dur.

İspat:

(i) $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ ve $h = \sqrt{\lambda}$ olsun. $x_1 \in Tx_0$ olarak alınsın. Lemma 4.5.5'ten, her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\exists y_1 \in Ty_0 \quad &; \quad hd(x_1, y_1) \leq H(Tx_0, Ty_0),\\
\exists x_2 \in Tx_1 \quad &; \quad hd(x_2, y_1) \leq H(Tx_1, Ty_0),\\
\exists y_2 \in Ty_1 \quad &; \quad hd(x_2, y_2) \leq H(Tx_1, Ty_1),\\
&\vdots\\
\exists y_n \in Ty_{n-1} \quad &; \quad hd(x_n, y_n) \leq H(Tx_{n-1}, Ty_{n-1}),\\
\exists x_{n+1} \in Tx_n \quad &; \quad hd(x_{n+1}, y_n) \leq H(Tx_n, Ty_{n-1}),
\end{aligned}$$

olarak seçilebilir. Bu durumda, $(x_n, y_n) \in X \times Y$ çift dizisi elde edilir. Dolayısıyla, (4.74) ifadesinden

$$\begin{aligned} hd(x_n, y_n) &\leq \lambda d(x_{n-1}, y_{n-1}) = h^2 d(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ \Rightarrow d(x_n, y_n) &\leq hd(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ hd(x_{n+1}, y_n) &\leq \lambda d(x_n, y_{n-1}) = h^2 d(x_n, y_{n-1}) \\ \Rightarrow d(x_{n+1}, y_n) &\leq hd(x_n, y_{n-1}) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu işlem $n-$kez tekrar edilirse,

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq h^n d(x_0, y_0) \\ d(x_{n+1}, y_n) &\leq h^n d(x_1, y_0) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. $n \leq m$ olmak üzere herhangi $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, y_m) &\leq d(x_n, y_n) + d(x_{n+1}, y_n) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) + d(x_{n+2}, y_{n+1}) \\ &\quad + \cdots + d(x_m, y_{m-1}) + d(x_m, y_m), \\ &\leq h^n d(x_0, y_0) + h^n d(x_1, y_0) + h^{n+1} d(x_0, y_0) + h^{n+1} d(x_1, y_0) \\ &\quad + \cdots + h^{m-1} d(x_1, y_0) + h^m d(x_0, y_0), \\ &= (h^n + h^{n+1} + \cdots + h^m) d(x_0, y_0) \\ &\quad + (h^n + h^{n+1} + \cdots + h^m) d(x_1, y_0), \\ &= \left(\frac{h^n}{1-h}\right) d(x_0, y_0) + \left(\frac{h^n}{1-h}\right) d(x_1, y_0) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, y_m) \to 0$ olur. Benzer olarak, $m < n$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, y_m) &\leq d(x_n, y_{n-1}) + d(x_{n-1}, y_{n-1}) + d(x_{n-1}, y_{n-2}) + d(x_{n-1}, y_{n-2}) \\ &\quad + \cdots + d(x_{m+1}, y_{m+1}) + d(x_{m+1}, y_m), \\ &\leq h^{n-1} d(x_1, y_0) + h^{n-1} d(x_0, y_0) + h^{n-2} d(x_1, y_0) + h^{n-2} d(x_0, y_0) \\ &\quad + \cdots + h^{m+1} d(x_0, y_0) + h^m d(x_1, y_0), \\ &= (h^{n-1} + h^{n-2} + \cdots + h^m) d(x_1, y_0) \\ &\quad + (h^{n-1} + h^{n-2} + \cdots + h^{m+1}) d(x_0, y_0), \\ &= \left(\frac{h^{n-1}}{1-h}\right) d(x_1, y_0) + \left(\frac{h^{n-1}}{1-h}\right) d(x_0, y_0) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu takdirde, $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, y_m) \to 0$ olur. Buradan, (x_n, y_n) bir Cauchy çift dizisidir. (X, Y, d) tam olduğundan (x_n, y_n) bir $u \in X \cap Y$ noktasına yakınsaktır (çifte yakınsaktır). Böylece

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = u$$

olur. (4.74) ve (B3) aksiyomundan $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} D(u,Tu) &\leq d(u,y_{n+1}) + d(x_{n+1},y_{n+1}) + D(x_{n+1},Tu), \\ &\leq d(u,y_{n+1}) + d(x_{n+1},y_{n+1}) + H(Tx_n,Tu), \\ &\leq d(u,y_{n+1}) + d(x_{n+1},y_{n+1}) + \lambda(x_n,u) \to 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $D(u,Tu) = 0$ ve Tu kapalı olduğundan, $u \in Tu$ olur. Dolayısıyla, u, T'nin bir sabit noktasıdır.

(ii) (i)'in ispatında tanımlanan (x_n) ve (y_n) dizileri (ii)'deki şartları sağlar.

■

Teorem 4.5.7. (X,Y,d) bir çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer $\alpha,\beta \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta < 1$ iken

$$T : (X,Y) \rightleftarrows (CB(X), CB(Y))$$

her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$H(Ty,Tx) \leq \alpha d(x,y) + \beta[D(x,Tx) + D(Ty,y)] \tag{4.79}$$

olacak şekilde bir çok değerli kontravaryant dönüşüm ise, T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$, $y_0 \in Tx_0$ ve $r = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}$ olsun. $x_1 \in Ty_0$ olarak alınsın. Lemma 4.5.4'ten $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \exists y_1 \in Tx_1 \quad &; \quad d(x_1,y_1) \leq H(Ty_0,Tx_1) + r, \\ \exists x_2 \in Ty_1 \quad &; \quad d(x_2,y_1) \leq H(Ty_1,Tx_1) + r^2, \\ \exists y_2 \in Tx_2 \quad &; \quad d(x_2,y_2) \leq H(Ty_1,Tx_2) + r^3, \\ &\vdots \\ \exists y_n \in Tx_n \quad &; \quad d(x_n,y_n) \leq H(Ty_{n-1},Tx_n) + r^{2n-1}, \\ \exists x_{n+1} \in Ty_n \quad &; \quad d(x_{n+1},y_n) \leq H(Ty_n,Tx_n) + r^{2n}, \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. (4.79) ifadesi ve Lemma 4.5.4'ten,

$$\begin{aligned} d(x_n,y_n) &\leq \alpha d(x_n,y_{n-1}) + \beta[D(x_n,Tx_n) + D(Ty_{n-1},y_{n-1})] + r^{2n-1} \\ &\leq \alpha d(x_n,y_{n-1}) + \beta[d(x_n,y_n) + d(x_n,y_{n-1})] + r^{2n-1} \end{aligned}$$

olması

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d(x_n, y_{n-1}) + \frac{r^{2n-1}}{1-\beta} \\ &= r d(x_n, y_{n-1}) + \frac{r^{2n-1}}{1-\beta} \end{aligned}$$

olmasını ve

$$\begin{aligned} d(x_n, y_{n-1}) &\leq \alpha d(x_{n-1}, y_{n-1}) + \beta[D(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + D(Ty_{n-1}, y_{n-1})] + r^{2n-2} \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, y_{n-1}) + \beta[d(x_{n-1}, y_{n-1}) + d(x_n, y_{n-1})] + r^{2n-2} \end{aligned}$$

olması da

$$\begin{aligned} d(x_n, y_{n-1}) &\leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{r^{2n-2}}{1-\beta} \\ &= r d(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{r^{2n-2}}{1-\beta} \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Buradan

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq r^2 d(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{r^{2n-1}}{1-\beta} + \frac{r^{2n-1}}{1-\beta} \\ &\vdots \\ &\leq r^{2n} d(x_0, y_0) + \frac{2n r^{2n-1}}{1-\beta} \end{aligned}$$

olduğu sonucu elde edilir. Diğer taraftan, benzer olarak

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, y_n) &\leq \alpha d(x_n, y_n) + \beta[D(x_n, Tx_n) + D(Ty_n, y_n)] + r^{2n} \\ &\leq \alpha d(x_n, y_n) + \beta[d(x_n, y_n) + d(x_{n+1}, y_n)] + r^{2n} \end{aligned}$$

olması

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, y_n) &\leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d(x_n, y_n) + \frac{r^{2n}}{1-\beta} \\ &= r d(x_n, y_n) + \frac{r^{2n}}{1-\beta} \\ &\vdots \\ &\leq r^{2n+1} d(x_0, y_0) + \frac{(2n+1) r^{2n}}{1-\beta} \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. $n \leq m$ olmak üzere herhangi $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, y_m) &\leq d(x_n, y_n) + d(x_{n+1}, y_n) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\quad + \cdots + d(x_m, y_{m-1}) + d(x_m, y_m) \\ &\leq r^{2n} d(x_0, y_0) + \frac{2n r^{2n-1}}{1-\beta} + r^{2n+1} d(x_0, y_0) + \frac{(2n+1) r^{2n}}{1-\beta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +r^{2n+2}d(x_0,y_0)+\frac{(2n+2)r^{2n+1}}{1-\beta}+\cdots+r^{2m-1}d(x_0,y_0) \\
& +\frac{(2m-1)r^{2m-2}}{1-\beta}+r^{2m}d(x_0,y_0)+\frac{(2m)r^{2m-1}}{1-\beta} \\
& \vdots \\
\leq\ & (r^{2n-1}+r^{2n}+\cdots+r^{2m-1})d(x_0,y_0) \\
& +\frac{(2n)r^{2n-1}+(2n+1)r^{2n}+\cdots+(2m)r^{2m-1}}{1-\beta}
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $r<1$ olduğundan $n,m\to\infty$ iken $d(x_n,y_m)\to 0$ olur. Benzer olarak, eğer $m<n$ ise, $n,m\to\infty$ için $d(x_n,y_m)\to 0$ olur. Bu takdirde (x_n,y_n) bir Cauchy çift dizisidir. (X,Y,d) bir tam çift kutuplu metrik uzay olduğundan, (x_n,y_n), bir $u\in X\cap Y$ noktasına yakınsaktır (çifte yakınsaktır). Bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \text{ ve } \lim_{n\to\infty} y_n = u$$

olur. 4.79 ve (B3) aksiyomundan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
D(u,Tu) &\leq d(u,y_{n+1})+d(x_{n+1},y_{n+1})+D(x_{n+1},Tu) \\
&\leq d(u,y_{n+1})+d(x_{n+1},y_{n+1})+H(Ty_n,Tu) \\
&\leq d(u,y_{n+1})+d(x_{n+1},y_{n+1})+\alpha d(u,y_n)+\beta[D(Ty_n,y_n)+D(u,Tu)] \\
&\leq d(u,y_{n+1})+d(x_{n+1},y_{n+1})+\alpha d(u,y_n)+\beta[d(x_{n+1},y_n)+D(u,Tu)]
\end{aligned}
$$

olur. $n\to\infty$ iken,

$$D(u,Tu)\leq \beta D(u,Tu)$$

olduğu görülür. $\beta<1$ olduğundan $D(u,Tu)=0$ olur. Bu durumda, u, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. ■

Teorem 4.5.7'den, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.5.8. (X,Y,d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve

$$T:(X,Y)\rightleftarrows (X,Y),$$

$\alpha,\beta\geq 0$ ve $\alpha+2\beta<1$ iken her $x\in X$ ve $y\in Y$ için

$$d(Ty,Tx)\leq \alpha d(x,y)+\beta[d(x,Tx)+d(Ty,y)] \tag{4.80}$$

olacak şekilde bir kontravaryant dönüşüm olsun. Bu takdirde T bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.5.9. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve

$$T : (X, Y) \rightleftarrows (CB(X), CB(Y)),$$

$a_1, a_2, a_3 \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 < 1$ iken her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$H(Ty, Tx) \leq a_1 d(x, y) + a_2 D(x, Tx) + a_3 D(Ty, y) \tag{4.81}$$

olacak şekilde bir çok değerli kontravaryant dönüşüm olsun. Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.5.10. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay olsun. Eğer

$$T : (X, Y) \rightleftarrows (CB(X), CB(Y))$$

bir çok değerli kontravaryant büzülme dönüşümü ise, T bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.5.11. (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzay ve

$$T : (X, Y) \rightleftarrows (CB(X), CB(Y)),$$

$\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ iken her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$H(Ty, Tx) \leq \beta[D(x, Tx) + D(Ty, y)] \tag{4.82}$$

olacak şekilde bir çok değerli kontravaryant dönüşüm olsun. Bu takdirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek 4.5.12. $X = \{0, 1, 2\}$ ve $Y = \{1, 2, 3\}$ olsun. $d : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü

$$\begin{aligned} d(1,1) = d(2,2) &= 0, \\ d(1,2) = d(2,1) &= 5, \\ d(0,1) = 13,\ d(0,2) &= 12, \\ d(0,3) = 15,\ d(1,3) = 14,\ d(2,3) &= 9 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde (X, Y, d) bir tam çift kutuplu metrik uzaydır. Bir

$$T :\ (X, Y) \rightrightarrows (CB(X), CB(Y))$$

kovaryant dönüşümü

$$T(0) = \{1\},\ T(1) = T(2) = \{2\},\ T(3) = \{1, 2\}$$

olarak tanımlansın. Burada her $x \in X$ ve $y \in Y$ için Tx ve Ty, (X, Y, d) çift kutuplu metrik uzayında kapalı ve sınırlıdır. Bu durumda, her $x \in X$, $y \in Y$ ve $k = \dfrac{5}{9}$ sabiti için

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

koşulu sağlanır. Teorem 4.5.6'dan, T bir sabit noktaya sahiptir. Bu sabit nokta $2 \in X \cap Y$ olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında literatürde mevcut olan ve üzerinde sıkça çalışılan bazı sabit nokta teoremlerinin, son zamanlarda tanımlanan ve günlük hayatta çeşitli örneklere sahip olan çift kutuplu metrik uzaylardaki genelleştirmeleri ifade edilmiş ve ispatları detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışmada bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin direkt çift kutuplu metrik uzaylara genelleştirilemediği görülmüş, bunun için farklı tanımlar ve lemmalar ifade edilmiştir. Ayrıca, çift kutuplu metrik uzaylar üzerinde kovaryant ve kontravaryant olmak üzere iki tip dönüşüm mevcut olduğundan bazı tanımlar ve sabit nokta teoremleri metrik uzaylardakinden farklı olarak birden fazla durum için incelenmiş ve ifade edilmiştir. Dolayısıyla metrik uzaylardaki bazı sabit nokta teoremlerinin çift kutuplu metrik uzaylarda birden fazla genelleştirmesi elde edilmiştir. Örneğin, Nadler'in metrik uzaylarda tek şekilde ifade ettiği ortak sabit nokta teoremi mevcut çalışmada f ve g'nin kovaryant veya kontravaryant olması durumuna göre dört farklı teorem olarak elde edilmiş ve ispat edilmiştir. Bir başka örnek ise, Samet tarafından verilen $\alpha - \psi -$büzülme dönüşümünün tanımı bu çalışmada çift kutuplu metrik uzaylar için kovaryant $\alpha - \psi -$büzülme dönüşümü ve kontravaryant $\alpha - \psi -$büzülme dönüşümü olarak iki farklı biçimde verilmesidir. Diğer yandan, çalışmada ifade edilen teoremlerin daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla bazı örnekler verilmiş ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Literatürde iyi bilinen Suzuki, Meir Keeler gibi diğer sabit nokta teoremleri de çift kutuplu metrik uzaylar üzerinde ifade ve ispat edilebilir. Diğer yandan, çift kutuplu metrik uzayların bilinen farklı disiplinler arası ilişkilerin incelenmesine önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla bu konu üzerinde detaylı çalışmalar yapılarak çift kutuplu metrik uzaylar teorisi geliştirilebilir ve metrik uzaylarda mevcut olan birçok farklı özellik bu uzaylarda da incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Brouwer, L.E.J. Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen. 1910, 71, 97–115.

[2] Schauder, J. Der fixpunktsatz in funktionalraümen. Studia Mathematica. 1930, 2, 171–180.

[3] Banach, S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae. 1922, 3, 133–181.

[4] Kannan, R. Some results on fixed points. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 1968, 60, 71–76.

[5] Chatterjea, S.K. Fixed point theorems. Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727–730.

[6] Reich, S. Fixed points of contractive functions. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1972, 5, 26–42.

[7] Hardy, G.E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin. 1973, 16, 201–206.

[8] Ćirić, L.B. Fixed points for generalized multivalued contractions. Matematički Vesnik. 1972, 9 (24), 265–272.

[9] Caristi, J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. Transactions of the American Mathematical Society. 1976, 215, 241–251.

[10] Fréchet, M.M. Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906, 22, 1–72.

[11] Banach, S. Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Fundamenta Mathematicae. 1920, 1(1), 123–124.

[12] Hausdorff, F. Grundzüge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914). Chelsea, New York, 1965.

[13] Alexandroff, P. Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie. Mathematische Annalen. 1925, 94(1), 296–308.

[14] Weil, A. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Paris: Hermann, 1938.

[15] Efremovich, V.A.E. The geometry of proximity I. Matematicheskii Sbornik. 1952, 73(1), 189–200.

[16] Lowen, R. Approach spaces A common Supercategory of TOP and Met. Mathematische Nachrichten. 1989, 141(1), 183–226.

[17] Wilson W.A. On quasi-metric spaces. American Journal of Mathematics. 1931, 53(3), 675–684.

[18] Czerwik, S. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis. 1993, 1(1), 5–11.

[19] Matthews, S.G. Partial metric topology. Annals of the New York Academy of Sciences. 1994, 728, 183–197.

[20] Branciari, A. A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. Publicationes Mathematicae (Debrecen). 2000, 57, 31–37.

[21] Mustafa, Z., Sims, B. A new approach to generalized metric spaces. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 2006, 7(2), 289–297.

[22] Huang, L.G., Zhang, X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007, 332(2), 1468–1476.

[23] Chistyakov, W. Modular metric spaces, I: Basic concepts. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2010, 72(1), 1–14.

[24] Chistyakov, W. Modular metric spaces, II: Application to superposition operators. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2010, 72(1), 15–30.

[25] Mutlu, A., Gürdal, U. Bipolar metric spaces and some fixed point theorems. Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA). 2016, 9(9), 5362–5373.

[26] Kurepa, Đ. Tableaux ramifiés d'ensembles, Espaces pseudo-distanciés. Comptes Rendus Mathématique. 1934, 198, 1563–1565.

[27] Wilson, W.A. On semi-metric spaces. American Journal of Mathematics. 1931, 53(2), 361–373.

[28] Mucuk, O. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, Türkiye, 2009, 462s.

[29] Kelley, J.L. General Topology. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1955, 193s.

[30] Willard, S. General topology. Courier Corporation, Mineola, Newyork, 2004, 384s.

[31] Granas, A., Dugundji, J. Fixed Point Theory. Springer, Newyork, 2002, 690s.

[32] Gürdal, U. Çift kutuplu metrik uzaylar ve sabit nokta teoremleri. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2018, 121s. (Doktora Tezi).

[33] Bhaskar, T.G., Lakshmikantham, V. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2006, 65, 1379–1393.

[34] Mutlu, A., Özkan, K., Gürdal, U. Coupled Fixed Point Theorems on Bipolar Metric Spaces. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017, 10(4), 655–667.

[35] Jungck, G. Compatible mappings and common fixed points. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1986, 9(4), 771–779.

[36] Edelstein, M. An extension of Banach's contraction principle. Proceedings of the American Mathematical Society. 1961, 12, 7–10.

[37] Rakoch, E. A note on contractive mappings. Proceedings of the American Mathematical Society. 1962, 10F, 459–465.

[38] Rakoch, E. A note on α-locally contractive mappings. Bulletin of the Research Council of Israel. 1962, 10F, 188–191.

[39] Rakoch, E. On ϵ-contractive mappings. Bulletin of the Research Council of Israel. 1962, 10F, 53–58.

[40] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P. Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ contractive type mappings. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2012, 75(4), 2154–2165.

[41] Nadler, B.S.Jr. Multi-valued contraction mappings. Pacific Journal of Mathematics. 1969, 30(2), 475–488.

[42] Mutlu A., Özkan, K., Gürdal, U. Fixed Point Theorems for Multivalued Mappings on Bipolar Metric Spaces. Fixed Point Theory. Basılacak.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Kübra ÖZKAN
Doğum Yeri ve Yılı	:	Erzurum, 1989
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	kubra.ozkan@hotmail.com (kubra.ozkan@cbu.edu.tr)

Eğitim Durumu

Lisans	:	Atatürk Üniversitesi, Matematik, 2012
Yüksek Lisans	:	Atatürk Üniversitesi, Topoloji, 2014
Doktora	:	Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Topoloji, 2018

Meslekî Deneyim

Araştırma Görevlisi, Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015 – 2016

Araştırma Görevlisi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016 –

Yayınları

1. Özkan, K., Elmalı, C.S., Uğur, T. Normal Base of Ditopological Texture Space and Its Wallman Compactification. Journal of Advanced Studies in Topology. 2017, 1(8), 1–8.
2. Mutlu, A., Özkan, K., Gürdal, U. Coupled Fixed Point Theorems on Bipolar Metric Spaces. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017, 10(4), 655–667.
3. Mutlu, A., Gürdal, U., Özkan, K. A New Approach to G-Normed Spaces: Functionally Generalized Normed Spaces. Celal Bayar University Journal of Science. 2018, 14(1), 1–12.
4. Mutlu, A., Özkan, K., Gürdal, U. Coupled Fixed Point Theorem in Partially Ordered Modular Metric Spaces and Its An Application. Journal of Computational Analysis & Applications. 2018, 25(2), 207–216.
5. Mutlu, A., Özkan, K., Gürdal, U. A New Fixed Point Theorem in Modular Metric Spaces. International Journal of Analysis and Applications. 2018, 16(4), 472–483.
6. Mutlu, A., Özkan, K., Gürdal, U. Fixed Point Theorems for Multivalued Mappings on Bipolar Metric Spaces. Fixed Point Theory. Basılacak.