

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ DERECEDEKİ LİNEER OLMAYAN  
TERİMLERE SAHİP DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  $q$ -  
HOMOTOPİ ANALİZ DÖNÜŞÜM METODU İLE SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİ**

**Zeyyan ÖZTAŞ**

**Danışman  
Doç. Dr. Ali KONURALP**



**MANİSA-2019**

**Zeyyan**

**İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ DERECEDEDEN LİNEER OLMAYAN TERİMLERE SAHİP**

**ÖZTAŞ**

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN q-HOMOTOPİ ANALİZ DÖNÜŞÜM METODU İLE**

**SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**2019**

## TEZ ONAYI

Zeyyan ÖZTAŞ tarafından hazırlanan "İkinci ve Üçüncü Dereceden Lineer Olmayan Terimlere Sahip Diferansiyel Denklemlerin q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu ile Sayısal Çözümleri" adlı tez çalışması 20/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak başarı ile savunulmuştur.

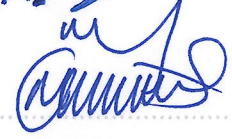
**Danışman**

**Doç. Dr. Ali KONURALP**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR**  
Balıkesir Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Zeyyan ÖZTAŞ**



# İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER .....	I
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT .....	VIII
1. GİRİŞ .....	1
2. GENEL BİLGİLER .....	3
2.1. Temel Kavramlar .....	3
2.2. Ricatti Diferansiyel Denklemler .....	3
2.3 Fisher Denklemleri.....	4
2.4 Van der Pol-Duffing Denklemleri.....	4
2.5 Burgers-Fisher Denklemleri.....	5
2.6 Klein-Gordon Denklemleri .....	5
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	6
3.1. Materyal .....	6
3.2. Yöntem.....	6
3.2.1. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Terimlere Sahip Diferansiyel Denklemler için q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu.....	6
3.2.1.1 Riccati Diferansiyel Denklemleri için q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu .....	6
3.2.1.2 Fisher Denklemleri için q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu	8
3.2.2. Üçüncü Dereceden Lineer Olmayan Terimlere Sahip Diferansiyel Denklemler İçin q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu .....	10
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA .....	133
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	36

KAYNAKLAR .....	37
ÖZGEÇMİŞ .....	42



## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{L}$	Laplace Operatörü
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Operatörü
$R$	Lineer Diferansiyel Operatör
$N$	Lineer Olmayan Diferansiyel Operatör
$H(x)$	Sıfırdan Farklı Yardımcı Fonksiyon
$h$	Sıfırdan Farklı Parametre
$q$	Parametre
$n$	Gömme Parametresi
$u_{yak}$	Yaklaşık Çözüm
$\vec{u}_m$	$u_m$ Elemanlarından Oluşan Vektör
$\mathfrak{R}_m$	$m$ . deformasyon fonksiyonu
$e_{yak}$	Yaklaşık Çözümün Mutlak Hatası
$\phi(x, q)$	Yaklaşım Fonksiyonu
HAM	Homotopy Analysis Method
q-HAM	q-Homotopy Analysis Method
q-HATM	q-Homotopy Analysis Transform Method

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

Şekil 4.1. Örnek 4.1'in $h = -4.219882751999999$ ve $n = 12$ değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği .....	16
Şekil 4.2. Örnek 4.1'in $h = -4.2989$ ve $n = 12$ için hata grafiği .....	16
Şekil 4.3. Örnek 4.3'ün $h = 2.28718$ ve $n = 16$ değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği .....	20
Şekil 4.4. Örnek 4.3'ün $h = 0.280316$ ve $n = 2$ için hata grafiği .....	21
Şekil 4.5. Örnek 4.3'ün $h = 1.82267$ ve $n = 13$ için hata grafiği .....	21
Şekil 4.6. Örnek 4.3'ün $h = 2.2423$ ve $n = 16$ için hata grafiği .....	22
Şekil 4.7. Örnek 4.5'in $h = -1$ ve $n = 1$ değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği .....	28
Şekil 4.8. Örnek 4.5'in $h = -1.72$ ve $n = 2$ değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği .....	29
Şekil 4.9. Örnek 4.5'in $h = -3$ ve $n = 1$ için hata grafiği .....	30
Şekil 4.10. Örnek 4.5'in $h = -1$ ve $n = 2$ için hata grafiği ....	31
Şekil 4.11. Örnek 4.5'in $h = -5.23$ ve $n = 6$ için hata grafiği .....	31
Şekil 4.12. Örnek 4.5'in $h = -0.92$ ve $n = 1$ için hata grafiği .....	31
Şekil 4.13. Örnek 4.6'nın $h = -100$ ve $n = 1$ değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği .....	33
Şekil 4.14. Örnek 4.6'nın $h = -4.14026$ ve $n = 50$ için hata grafiği .....	34
Şekil 4.15. Örnek 4.6'nın $h = -6.8$ ve $n = 20$ için hata grafiği .....	35



## TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ,bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum , Sayın Doç. Dr. Ali KONURALP' e, çalışmalarım sırasında desteğini her zaman hissettiğim, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan babam Mehmet Ali ÖZTAŞ' a, annem Nurhan ÖZTAŞ' a, kardeşim Beyza ÖZTAŞ' a ve nişanlım İlker KOÇ' a yürekten teşekkür ederim.

Zeyyan ÖZTAŞ  
Manisa, 2019



## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

### İkinci ve Üçüncü Dereceden Lineer Olmayan Terimlere Sahip Diferansiyel Denklemlerin q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu ile Sayısal Çözümleri

Zeyyan ÖZTAŞ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ali KONURALP

Bu tezde, ikinci ve üçüncü dereceden lineer olmayan terimlere sahip diferansiyel denklemlerin q-Homotopi analiz dönüşüm metodu (q-HATM) yöntemi ile sayısal çözümleri yapılmıştır. q-Homotopi analiz metodu ile Laplace dönüşüm metodunun birleştirilmesiyle oluşan q-Homotopi analiz dönüşüm metodu kısmi ve adi diferansiyel denklemlerin geniş bir sınıfına uygulanabilir.

Çalışmada öncelikle q-Homotopi analiz dönüşüm metodunun kullanım alanları ve tarihsel sürecinden bahsedilmiştir. Ayrıca q-Homotopi analiz dönüşüm metodunun, homotopi analiz metodu, q-Homotopi analiz metodu ve Laplace dönüşüm metodu ile arasındaki bağlantılar açıklanmıştır. Ardından, q-Homotopi analiz dönüşüm metodu ile ilgili temel kavramlardan, Ricatti diferansiyel denklemlerinden, Fisher denklemlerinden, Burgers-Fisher denklemlerinden, Van der Pol-Duffing denklemlerinden ve Klein Gordon denklemlerinden bahsedilmiştir. Daha sonra q-Homotopi analiz dönüşüm metodunun ikinci ve üçüncü dereceden lineer olmayan terimlere sahip diferansiyel denklemlere uygulanma metodu açıklanmıştır. Uygulanan bu metod aracılığıyla ikinci dereceden lineer olmayan terimlere sahip Ricatti diferansiyel denklemler ile Fisher denklemlerinin yakınsak seri çözümleri elde edilmiş ve üçüncü dereceden lineer olmayan terimlere sahip Burgers-Fisher denklemleri, Van der Pol-Duffing denklemleri ve Klein Gordon denklemlerinin de çözümleri bulunmuştur. Son olarak önerilen metodun güvenilirliğini göstermek için hata analizi yapılarak bulunan sonuçlar grafikler ile gösterilmiş ve yorumlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu, Laplace Dönüşüm Metodu, Ricatti Diferansiyel Denklemleri, Fisher Denklemleri, Burgers-Fisher Denklemleri, Van der Pol-Duffing Denklemleri, Klein Gordon Denklemleri

2019, 53 sayfa

## ABSTRACT

M.Sc. Thesis

### **q-Homotopy Analysis Transform Method for Differential Equations Having Quadratic and Cubic Nonlinearity**

**Zeyyan ÖZTAŞ**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali KONURALP**

In this thesis deals with the solutions of differential equations having quadratic and cubic nonlinearity obtained by the q-homotopy analysis transform method (q-HATM). The q-HATM, combined by the q-homotopy analysis method and Laplace transform method, can be applied to a wide class of the partial and ordinary differential equations.

In study, firstly, the usage areas and the historical process of q-HATM are examined. In addition, the connections between q-HATM, homotopy analysis method, q-Homotopy analysis method and Laplace transformation method are explained. Thereafter, the basic concepts of q-HATM, Ricatti differential equations, Fisher equations, Burgers-Fisher equations, Van der Pol-Duffing equations and Klein Gordon equations are mentioned. Then the method of applying the q-HATM for differential equations with having quadratic and cubic nonlinearity terms is explained. Through this method, convergent series solutions of Ricatti differential equations and Fisher equations having quadratic nonlinearity and numerical solutions of Burgers-Fisher equation and Van der Pol-Duffing equation having cubic nonlinearity are obtained. Finally, in order to reliability of the q-HATM, error analysis are performed and the results are shown and interpreted with graphs.

**Keywords: q-Homotopy Analysis Transform Method, Laplace Transform Method, Ricatti Differential Equations, Fisher Equations, Burgers-Fisher Equations, Van der Pol-Duffing Equations, Klein Gordon Equations**

**2019, 53 pages**

## 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler matematik, mühendislik, biyoloji, mekanik, endüstri, finans gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Yüzyıllardır çalışılan diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerine ulaşmak için farklı metotlar uygulanmakta ve hesaplamalar yapılmaktadır. Uygulanan bu metotlar sayesinde bu denklemlerin gerek genel çözümlerine gerekse başlangıç ve/veya sınır değer şartları altında özel çözümlerine ulaşılmaktadır. Matematiksel olarak modellenmiş gerçek hayat problemlerinin lineer olmayan terimlere sahip olduğunu biliyoruz. Lineer olmayan terimlere sahip diferansiyel denklemlerin birçoğunda analitik çözüm bulmak oldukça zordur. Bu yüzden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için literatürde pek çok metot bulunmaktadır.

Topolojide ve diferansiyel geometride karşımıza çıkan homotopi kavramı ile diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için homotopi analiz metodu önerilmiştir [1,2,3,4,5,6,7,8]. Bu metot ilk olarak 1992 yılında Shi Jun Liao [1] tarafından ortaya atılmıştır. Homotopi analiz metodu, lineer veya lineer olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin yarı-analitik çözümlerine ulaşmak için homotopi yapısı ile birlikte  $h$  gömme parametresine bağlı önerilen yaklaşım serisinin gerçek çözüme yakınsamasını incelemektedir. Yaklaşım serisinin ilk teriminin seçimindeki esneklik dolayısıyla kolay uygulanabilen bir metottur.

Son zamanlarda M. A. El-Tawil ve S. N. Huseen [9,10] tarafından ortaya konulan  $q$ -homotopi analiz metodunda [9,10,11,12] ise homotopi analiz metodunda bulunan  $h$  parametresine ek olarak  $n$  parametresi de bulunmaktadır. Metotta bulunan ikinci parametre sayesinde çözüm serilerinin yakınsaklığı daha geniş bir bölgede incelenebilmektedir.

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri bulunurken bu metotların yanı sıra uygulanan bir başka metot ise  $q$ -Homotopi analiz dönüşüm metodudur [13,14,15,16,17,18,19,20,21]. Aslında  $q$ -Homotopi analiz dönüşüm metodu;  $q$ -Homotopi analiz metodu ile Laplace dönüşüm metodunun [22,23,24,25] birleşmesiyle oluşan yeni bir yaklaşımdır. Laplace dönüşümü ilk olarak Pierre-Simon

Laplace tarafından ortaya konulmuştur. Başlangıçta, mühendislik alanlarında ortaya çıkan bazı sorunların giderilmesi için matematiksel bir teori olarak ele alınmıştır. Daha sonradan Oliver Heaviside tarafından 20.yüzyılın başlarında Laplace dönüşümleri ile ilgili çalışmalar başlatılmıştır. Laplace dönüşüm metodu ile diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklem sistemleri, integro diferansiyel denklemler, fark denklemleri gibi birçok denklem tipi çözülebilir. Ayrıca mühendislik çalışmalarında karşımıza çıkan elektrik devreleri ve sistemleri ile ilgili çalışmalar için de Laplace dönüşüm metodundan faydalanılmaktadır.

Son zamanlarda Singh ve arkadaşları [21] yeni bir homotopi tekniği olarak kullanılacak olan q-Homotopi analiz dönüşüm metodunu tanıtır ve geliştirmeye başladı. Bu çalışmalar aracılığıyla q-HATM sayesinde doğada ortaya çıkan lineer olmayan problem üzerinde çalışılmaya başlandı [17,20]. q-HATM, Laplace dönüşümü ile homotopi algoritmasının kolay uygulanabilir bir metodudur.

Bu tezin amacı, q-Homotopi analiz dönüşüm metodunu kullanarak lineer olmayan terimlere sahip ikinci ve üçüncü dereceden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmektir. q-HATM ile Ricatti [26,27,28,29], Fisher [21,30,31,32,33], Van der Pol-Duffing [34,35,36], Burgers-Fisher [38,39,40,41,42,43,44,45,46] ve Klein-Gordon [47] denklemleri göz önüne alınıp çözümleri yapılmış, tablo ve grafiklerle sonuçların doğruluğu incelenmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1 Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1:**  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar,  $f, g: X \rightarrow Y$  sürekli fonksiyonlar olmak üzere;  $f$  sürekli fonksiyonundan  $g$  sürekli fonksiyonuna tanımlı homotopi,  $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$  ve  $x \in X$  olmak üzere

$$F(x, 0) = f(x) \text{ ve } F(x, 1) = g(x)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradaki  $F$  sürekli fonksiyondur. Eğer bu eşitlikler sağlanırsa  $f$   $g$ 'ye homotopiktir denir.

**Tanım 2.1.2:**  $t$  değişkenine bağımlı bir  $u(t)$  fonksiyonunun reel ya da kompleks  $s$  parametresine bağlı Laplace dönüşümü aşağıdaki genelleştirilmiş integralin yakınsadığı tüm  $s$  değerleri için

$$G(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt$$

şeklindedir.

**Tanım 2.1.3:**  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  fonksiyonları  $[0, \infty)$  üzerinde sürekli,  $f^{(n)}(t)$ ,  $[0, \infty)$  üzerinde parçalı sürekli ve bu fonksiyonları tümü  $\alpha$  mertebeden üstel fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda  $s > \alpha$  için

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(s)\} = s^n \mathcal{L}\{f(s)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

eşitliği sağlanır.

### 2.2 Riccati Diferansiyel Denklemler

1720'li yıllarda Count Jacapo Francesco Riccati arkadaşı Giovanni Rizetti'ye yazdığı mektubunda iki yeni diferansiyel denklemden bahsetmiştir [26,27,28,29] Bu denklemler şu şekilde ifade edilmiştir

$$D_x = \alpha x^2 + \beta t^m \quad (2.1)$$

$$D_x = \alpha x^2 + \beta t + \gamma t^2 \quad (2.2)$$

buradaki  $m$  bir sabit,  $t$  ise bağımsız bir değişkendir. Günümüzde önemli bir diferansiyel denklem tipi olan Riccati diferansiyel denklemleri ile ilgili ortaya çıkan ilk denklemler yukarıdaki gibi oluşturulmuştur. Count Jacopo Riccati'nin çalışmaları ölümünden sonra oğlu Giordano Riccati tarafından 1765 yılında kitap olarak yayınlanmıştır. Riccati diferansiyel denklemleri ile ilgili 1760 yıllarında Euler, 1840 yıllarında Jacques Liouville gibi isimler tarafından birçok çalışma yapılmıştır. 20. yüzyılda yapılan çalışmalar sonucunda

$$D_x u = A(x)u^2(x) + B(x)u(x) + C(x) \quad (2.3)$$

(2.3) şeklinde elde edilen diferansiyel denklemlere Riccati diferansiyel denklemler denilmiştir. Burada  $A(x) = 0$  ise denklem lineer diferansiyel denklem,  $C(x) = 0$  ise denklem Bernoulli diferansiyel denklemdir. Riccati diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için genel bir yöntem olmayıp, farklı metotlar ile denklemin çözümlerine ulaşılabilir.

### 2.3 Fisher Denklemleri

1937 yılında Fisher, Kolmogorov, Petrovsky ve Piscounov sonsuz bir ortamda viril bir geninin zamansal ve mekansal yayılımı için Fisher-KPP denklemi olarak adlandırılan bir model önerdiler [21,30,31,32,33,34]. Daha sonradan bu denklem Fisher tarafından geliştirilerek Fisher denklemi olarak bilinmeye başlandı. Bilim ve mühendislik alanında birçok uygulama alanına sahip olan bu denklem aynı zamanda en basit ve klasik haliyle reaksiyon difüzyon denklemi olarak bilinir. Genel olarak  $\beta \in N$ ,  $\alpha$  ve  $a$  reel sabitler olmak üzere

$$u_t(x, t) = u_{xx} + \alpha(1 - u^\beta(x, t))(u(x, t) - a) \quad (2.4)$$

formundadır.

### 2.4 Van der Pol-Duffing Denklemleri

Van der Pol-Duffing denklemleri [35,36,37,38] ilk olarak Van der Pol tarafından 1926 yılında ortaya atılmıştır. Denklemden geçen osilatör (salıngaç) özellikle mühendislik, fizik ve biyoloji konularında karşımıza çıkan lineer olmayan

denklemlerin çözümünde kullanılır. Son zamanlarda Van der Pol-Duffing denklemleri Ji ve Zhang [35] tarafından tartışılmış, ancak bulunan çözümler küçük parametrelerle sınırlı kalmıştır. Genel olarak  $\mu > 0$  gömme parametresi, periyodu  $T = \frac{2\pi}{w}$  olacak şekilde  $g(f, w, t) = f \cos(wt)$  olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = g(f, w, t) \quad (2.5)$$

formundadır.

## 2.5 Burgers-Fisher Denklemleri

Burgers-Fisher denklemleri [39,40,41,42,43,44,45,46] sıvı dinamik modellerinde kullanılmaktadır. Burgers-Fisher denklemleri reaksiyon, ısıyayım ve difüzyon mekanizmalarında kullanıldığı için yüksek mertebeden lineer olmayan bir denklemdir. Denlemin Burgers-Fisher olarak adlandırılmasının temel nedeni konvektif özelliklere sahip Burgers denklemleri ile difüzyon mekanizmalarında kullanılan Fisher denklemlerinin birleşimi ile oluştuğu içindir. Bu denklem  $0 \leq x \leq 1$  ve  $t \geq 0$  koşulları altında

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1 - u^\delta) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buradaki  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\delta$  birer parametredir.

## 2.6 Klein-Gordon Denklemleri

Klein-Gordon denklemleri ilk olarak Oscar Glein ve Walter Gordon tarafından bulunmuştur. Lineer olmayan Klein-Gordon denklemleri  $u(x, 0) = f(x)$  ve  $u_t(x, 0) = g(x)$  başlangıç koşulları altında

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u + \beta u^\gamma = h(x, t) \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki  $\alpha$  ve  $\beta$  sabit,  $h(x, t)$  ve  $f(x)$  bilinen fonksiyonlar,  $u(x, t)$  ise bilinmeyen bir fonksiyondur.  $\gamma = 2$  alındığında ikinci dereceden,  $\gamma = 3$  alındığında ise üçüncü dereceden lineer olmayan denkleme dönüşür.



### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

#### 3.1. Materyal

Tezde kullanılan materyal, çalışmada ele alınan ikinci ve üçüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ilgili problemleri içeren makaleler ve kitaplardan oluşmaktadır.

#### 3.2. Yöntem

##### 3.2.1. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Terimlere Sahip Diferansiyel Denklemler için q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu

##### 3.2.1.1. Riccati Diferansiyel Denklemler İçin q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu

Bilindiği üzere Riccati diferansiyel denklemleri genel olarak

$$D_x u = A(x)u^2(x) + B(x)u(x) + C(x), u(0) = u_0 \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $D_x$ ,  $x$  e göre türev operatörü olmak üzere  $D_x u(x)$ 'in birinci türev fonksiyonu,  $u(0) = u_0$  ise başlangıç koşuludur.  $B(x)u(x) = R(u)$ ,  $A(x)u^2(x) = N(u)$  şeklinde seçildiğinde,  $R$  lineer diferansiyel operatör,  $N$  ise lineer olmayan diferansiyel operatör olarak adlandırılabilir. Seçilen operatörler (3.1) denkleminde yerine koyulursa

$$D_x u - N(u) - R(u) = C(x) \quad (3.2)$$

denklemini operatör formunda elde edilir. Şimdi diferansiyel denklemden cebirsel denkleme geçmek için Laplace dönüşümünü (3.1) denkleminde uygularsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_x u\} - \mathcal{L}\{A(x)u^2(x)\} - \mathcal{L}\{B(x)u(x)\} &= \mathcal{L}\{C(x)\} \\ s\mathcal{L}\{u\} - u(0) - \mathcal{L}\{A(x)u^2(x)\} - \mathcal{L}\{B(x)u(x)\} &= \mathcal{L}\{C(x)\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

denkleminde ulaşılır. (3.3) denklemini sadeleştirilip  $s$  katsayısına bölünürse

$$\mathcal{L}\{u\} - \frac{1}{s}u_0 - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{A(x)u^2(x) + B(x)u(x) + C(x)\} = 0 \quad (3.4)$$

denklemini bulunur. Burada  $u = \phi(x, q)$ ,  $x$  ve  $q$  operatörüne bağlı yardımcı fonksiyon olmak üzere, bu yardımcı fonksiyonu (3.4) denkleminde yerine yazarsak

$$N[\phi(x, q)] = \mathcal{L}\{\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}u_0 - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{A(x)\phi^2(x, q) + B(x)\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{C(x)\} \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada  $q$ ,  $n \geq 1$  olmak şartıyla  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$  aralığından alınan bir gömme parametresidir. Şimdi (3.5) denkleminde ilişkin homotopyi kuracak olursak,  $\mathcal{L}$  Laplace operatörü,  $H(x)$  sıfırdan farklı bir yardımcı fonksiyon ve  $h$  da sıfırdan farklı yardımcı parametre olmak üzere

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)N(\phi(x, q)) \quad (3.6)$$

bulunur.  $q = 0$  ve  $q = \frac{1}{n}$  değerleri (3.6) denkleminde yeri yazıldığında sırasıyla

$$\phi(x, 0) = u_0 \text{ ve } \phi\left(x, \frac{1}{n}\right) = u(x) \quad (3.7)$$

elde edilirken,  $q$  parametresinin 0 dan  $n \geq 1$  için  $\frac{1}{n}$ 'e artışında,  $\phi(x, q)$  fonksiyonu, başlangıç değeri olan  $u_0$  ile denklemin çözümü olan  $u(x)$  arasında bir değişim gösterir.  $q$  gömme parametresine göre MacLaurin serisine  $\phi(x, q)$  fonksiyonu altında genişletilirse

$$\phi(x, q) = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)q^m \quad (3.8)$$

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \phi^{(m)}(x, q) \Big|_{q=0} = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.7) ile ifade edilen serinin yakınsaklığı, (3.6)'daki  $h$ ,  $n$  parametreleri ve  $H(x)$  yardımcı fonksiyonunun uygun bir şekilde seçimi ile genişletilebilir.  $q = \frac{1}{n}$  alınmak üzere (3.7) deki  $u_m$  vektörlerini

$$\vec{u}_m = \{u_0, u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\} \quad (3.10)$$

$$u(x) = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (3.11)$$

olarak yazabiliriz. Böylece (3.6) denklemini

$$\begin{aligned}
(1 - nq)\mathcal{L}\left\{u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)q^m - u_0\right\} &= hqH(x)N\left(u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)q^m\right) \\
(1 - nq)\mathcal{L}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)q^m\right\} &= hqH(x)\mathcal{L}\left\{u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)q^m\right\} - \frac{1}{s}u_0 \\
&\quad - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{A(x)\phi^2(x, q) + B(x)\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{C(x)\}
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

(3.5) numaralı denklemin  $m$ . mertebeden  $q$ 'ya göre türevi alınıp,  $q = 0$  koşulu altında her iki taraf  $m!$ 'e bölünürse,  $m$ . dereceden deformasyon fonksiyonu

$$\mathcal{L}[u_m(x) - k_m u_{m-1}(x)] = hH(x)\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. (3.12) denkleminin her iki tarafında ters Laplace dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.13)$$

olmak üzere (3.11) çözüm serisini oluşturan terimleri

$$u_m(x) = k_m u_{m-1}(x) + h\mathcal{L}^{-1}[H(x)\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (3.14)$$

ile buluruz. Buradaki  $k_m$ ,  $m > 1$  olduğunda  $n$  değerine eşit, diğer durumlarda da sifıra eşit olan başka bir parametredir.

### 3.2.1.2 Fisher Denklemleri için q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu

Fisher denklemlerinin lineer difüzyon ve lineer olmayan büyüme modellerine uygulanmıştır [18]. Bu denklemi ele alacak olursak

$$u_t(x, t) = u_{xx} + \alpha(1 - u^\beta(x, t))(u(x, t) - a) \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $a$  sabit terimlerdir.

Eğer (3.15) denkleminde  $a = 0$ ,  $\alpha = 1$  and  $\beta = 1$  alınırsa lojistik büyüme difüzyon denklemi formuna dönüşür.

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.16)$$

$u(x, 0) = u_0(x)$  başlangıç koşulu altında (3.16) denklemi elde edilir.

(3.16) denkleminde Laplace dönüşüm yöntemi uygulanırsa elde edilen cebirsel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_t\} &= \mathcal{L}\{u_{xx} + u(1 - u)\} \\ s\mathcal{L}\{u\} - u_0(x, 0) &= \mathcal{L}\{u_{xx}\} + \mathcal{L}\{u(1 - u)\} \\ \mathcal{L}\{u\} - \frac{1}{s}u_0(x, 0) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u_{xx}\} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u(1 - u)\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$n \geq 1$  koşulu altında  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$  aralığında bulunan  $q$  parametresi ve  $\phi(x, t; q)$  yardımcı fonksiyon ve

$$N[\phi(x, t; q)] = \mathcal{L}\{\phi(x, t; q)\} - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u_0}{s} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\phi_{xx}(x, t; q) + \phi(x, t; q)(1 - \phi(x, t; q))\} \quad (3.18)$$

lineer olmayan operatör olmak üzere,

$$(1 - qn) \mathcal{L}\{\phi(x, t; q) - u_0(x, t)\} = hqH(x, t)N[\phi(x, t; q)] \quad (3.19)$$

homotopi yapısı oluşturulsun. (3.19) denklemindeki  $\mathcal{L}$  Laplace operatörü,  $H(x)$  sıfırdan farklı yardımcı fonksiyon ve  $h$  sıfırdan farklı sabit olmak üzere  $m$ . dereceden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}\{u_m(x, t) - k_m u_{m-1}(x, t)\} = h\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (3.20)$$

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} + \frac{\partial^m \phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (3.21)$$

ve

$$\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.22)$$

şeklinde bulunur. Bu denklemin kesilmiş serisi

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (3.23)$$

$u(x, t)$  için uygun çözümleri verir. Böylece

$$\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}) = \mathcal{L}\{u_{m-1}\} - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u_0}{s} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{u_{m-1} - \sum_{i=0}^{m-1} u_{m-1-i} u_i\} \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) denkleminde ters Laplace dönüşüm yöntemi uygulanırsa elde edilecek vektör bileşenleri

$$u_m(x, t) = k_m u_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}^{-1} \mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}). \quad (3.25)$$

şeklindedir.

### 3.2.3 Üçüncü Dereceden Lineer Olmayan Terimlere Sahip Diferansiyel Denklemler için q-Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu

$u(x, 0) = b$  ve  $u'(x, 0) = 0$  başlangıç koşulları altında üçüncü dereceden lineer olmayan

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \mu(1 - u^2) \frac{du}{dt} + bu + \beta u^3 = g(f, w, t) \quad (3.26)$$

Van der Pol-Duffing diferansiyel denklemini ele alalım [34,35,36]. Burada  $L(u) = \frac{d^2 u}{dt^2}$ ,  $N(u) = \mu u^2 \frac{du}{dt} + \beta u^3$ ,  $R(u) = -\mu \frac{du}{dt} + bu$ ,  $g(f, w, t) = f \cos wt$  olarak seçilsin.

$$L(u) + N(u) + R(u) = g(f, w, t) \quad (3.27)$$

(3.27) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşüm metodu uygulandığında

$$\mathcal{L}\{L(u) + N(u) + R(u)\} = \mathcal{L}\{g(f, w, t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 u}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{N(u)\} + \mathcal{L}\{R(u)\} = \mathcal{L}\{f \cos wt\}$$

$$s^2 u(s) - su(0) - u'(0) + \mathcal{L}\{N(u) + R(u)\} = f \frac{s}{s^2 + w^2} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) denkleminin her iki tarafını  $s^2$ 'ye bölersek

$$u(s) - \frac{1}{s}b + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{N(u) + R(u)\} = f \frac{1}{s(s^2+w^2)} \quad (3.29)$$

bulunur.  $u(x, t) = \phi(t, q)$ ,  $t$  ve  $q$  operatörüne bağlı yardımcı fonksiyon olmak üzere, bu yardımcı fonksiyonu (3.29) denkleminde yerine yazarsak

$$N[\phi(t, q)] = \mathcal{L}\{\phi(t, q)\} - \frac{1}{s}b + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left\{\mu\phi^2(t, q) \frac{\partial(t, q)}{\partial t} + \beta\phi^3(t, q)\right\} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left\{-\mu \frac{\partial(t, q)}{\partial t} + b\phi(t, q)\right\} - f \frac{1}{s(s^2+w^2)} = 0 \quad (3.30)$$

Şimdi denklemlere  $u_0 = a$  başlangıç koşulları altında homotopi metodunu uygularsak

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(t, q) - b\} = hqH(x)N(\phi(t, q)) \quad (3.31)$$

bulunur. Buradaki  $\mathcal{L}$ , Laplace operatörü,  $H(x)$  sıfırdan farklı yardımcı fonksiyon ve  $h$  sıfırdan farklı parametredir.

$q = 0$  ve  $q = \frac{1}{n}$  için  $\phi(t, 0) = u(x, 0) = a$  ve  $\phi\left(t, \frac{1}{n}\right) = u(x, t)$  olmak üzere  $q$ , 0'dan  $\frac{1}{n}$ 'e giderken  $\phi(t, q)$  fonksiyonu  $u(x, 0)$  başlangıç değerinden  $u(x, t)$  analitik çözüm fonksiyonuna gider.

Şimdi  $\phi(t, q)$  yardımcı fonksiyonunun  $q$  parametresine göre Maclaurin serisini alırsak

$$\phi(t, q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)q^m \quad (3.32)$$

serisi elde edilir. Burada  $u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \phi^m(t, q)|_{q=0}$  ile belirlenir.

Uygun  $a$ ,  $n$ , ve  $h$  sabitleri ile  $H(x)$  yardımcı fonksiyonunun seçimleri için  $q = \frac{1}{n}$  değerinde (3.32) yakınsak olup

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (3.33)$$

şeklinde bulunur.

$u_m$  elemanlarından oluşan vektör

$$\vec{u}_m(x, t) = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t)\} \quad (3.34)$$

ile gösterilir. Böylece (3.31) denklemi

$$(1 - nq)\mathcal{L}\left\{b + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)q^m - b\right\} = hqH(x)N\left(b + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)\left(\frac{1}{n}\right)^m\right)$$

halini alır. (3.33) eşitliği bu son eşitlikte yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} (1 - nq)\mathcal{L}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)q^m\right\} \\ = hqH(x)\mathcal{L}\left\{b + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)\left(\frac{1}{n}\right)^m\right\} - \frac{1}{s}b \\ + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{\mu \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} u_i u_{j-i}(u_{m-1-j})' + \beta \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} u_i u_{j-i}u_{m-1-j}\right\} \\ + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{-\mu \sum_{i=0}^{m-1} u_i\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ile de çözüm için gerekli olan terimler belirlenir.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde q-Homotopi analiz dönüşüm metodunun ikinci ve üçüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulamaları yapılmıştır. Bulunan sonuçlar grafik üzerinde gösterilmiş ve hata analizleri yapılmıştır.

**Örnek 4.1.** [27,28,29]  $u(0) = 0$  başlangıç değeri ve  $u = 1 + \sqrt{2} \tanh \left[ \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \log \left( \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right]$  tam çözüm olacak şekilde

$$D_x u = -u^2(x) + 2u(x) + 1 \quad (4.1)$$

verilen Ricatti diferansiyel denklemini q-HATM ile çözelim.

Verilen Ricatti diferansiyel denklem için Laplace dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{u\} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{u^2(x)\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{2u(x)\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} = 0 \quad (4.2)$$

denklemini elde edilir. (4.2) denklemini için  $u = \phi(x, q)$  ve  $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$  alınırsa lineer olmayan  $N$  operatörü

$$N[\phi(x, q)] = \mathcal{L}\{\phi(x, q)\} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\phi^2(x, q)\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{2\phi(x, q)\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. (4.3) denklemine  $n \geq 1$ ,  $H(x) = 1$ ,  $h \neq 0$  ve  $u_0(x) = u(0)$  başlangıç koşulu altında homotopi dönüşüm metodunu uygularsak

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)N(\phi(x, q))$$

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)\mathcal{L}\{\phi(x, q)\} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\phi^2(x, q)\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{2\phi(x, q)\} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu problem için  $m=7$  olarak seçilirse 7. dereceden çözümlere ulaşılır.

Böylece  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x) - k_m u_{m-1}(x)] = hH(x)\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}), \quad 0 \leq m \leq 7 \quad (4.5)$$



şeklinde elde edilir. (4.5) denkleminin ters Laplace dönüşümü yapılırsa

$$u_m(x) = k_m u_{m-1}(x) + h\mathcal{L}^{-1}[\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1})], \quad 0 \leq m \leq 7 \quad (4.6)$$

bulunur. Sonuç olarak denklemin ilk 8 teriminin q-HATM seri çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_0(x) = 0$$

$$u_1(x) = -hx$$

$$u_2(x) = -hx(1 + h + n - hx)$$

$$u_3(x) = -\frac{1}{3}hx(3(1 + n + n^2) - 3h(1 + 2n)(-1 + x) + h^2(3 - 6x + x^2))$$

$$u_4(x) = -\frac{1}{3}hx \left( 3(1 + n + n^2 + n^3) - 3h(1 + 2n + 3n^2)(-1 + x) + h^3(3 - 9x + 3x^2 + x^3) + 3h^2(1 - 2x + n(3 - 6x + x^2)) \right)$$

$$u_5(x) = \frac{1}{15}hx(-15(1 + n + n^2 + n^3 + n^4) + 15h(1 + 2n + 3n^2 + 4n^3)(-1 + x) + h^4(-15 + 60x - 30x^2 - 20x^3 + 7x^4) - 5h^2(3 + n(9 - 18x) - 6x - x^2 + 6n^2(3 - 6x + x^2)) - 5h^3(3(1 - 3x + x^3) + 4n(3 - 9x + 3x^2 + x^3)))$$

$$u_6(x) = -\frac{1}{45}hx(45(1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5) - 45h(1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4)(-1 + x) + h^5(45 - 225x + 150x^2 + 150x^3 - 105x^4 + 7x^5) + 15h^2(3 + n^2(18 - 36x) - 6x - 2x^2 + 10n^3(3 - 6x + x^2) - 3n(-3 + 6x + x^2)) + 15h^3(3 - 9x - 3x^2 + 5x^3 + 12n(1 - 3x + x^3) + 10n^2(3 - 9x + 3x^2 + x^3)) - 3h^4(-15 + 60x - 60x^3 + 14x^4 + 5n(-15 + 60x - 30x^2 - 20x^3 + 7x^4)))$$

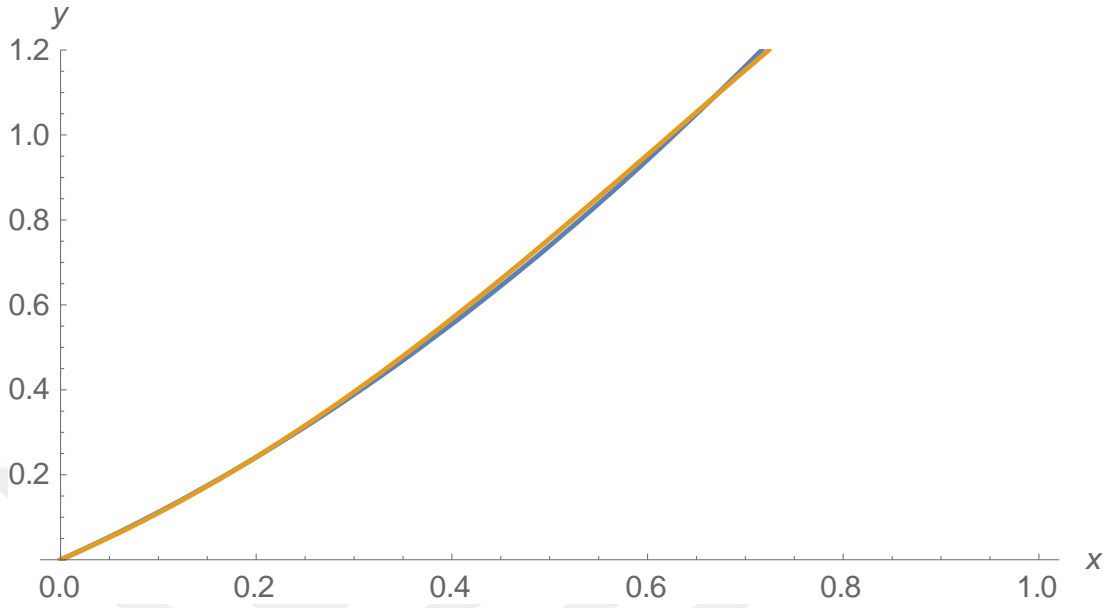
$$\begin{aligned}
u_7(x) = & -h(1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6)x + h^2(1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4 \\
& + 6n^5)(-1 + x)x + h^7(-x + 6x^2 - 5x^3 - \frac{20x^4}{3} + 7x^5 - \frac{14x^6}{15} \\
& - \frac{53x^7}{315}) + h^3x(-1 + 2x + x^2 + 10n^3(-1 + 2x) - 5n^4(3 - 6x \\
& + x^2) + 2n^2(-3 + 6x + x^2) + n(-3 + 6x + 2x^2)) - \frac{1}{3}h^4x(3 - 9x \\
& - 6x^2 + 7x^3 + 30n^2(1 - 3x + x^3) + 20n^3(3 - 9x + 3x^2 + x^3) \\
& + 4n(3 - 9x - 3x^2 + 5x^3)) + \frac{1}{15}h^5x(-15 + 60x + 30x^2 - 100x^3 \\
& + 19x^4 + 15n^2(-15 + 60x - 30x^2 - 20x^3 + 7x^4) + 5n(-15 \\
& + 60x - 60x^3 + 14x^4)) - \frac{1}{45}h^6x(45 - 225x + 450x^3 - 210x^4 \\
& - x^5 + 6n(45 - 225x + 150x^2 + 150x^3 - 105x^4 + 7x^5))
\end{aligned}$$

Bulunan bu çözümler sayesinde seri çözümünü şu şekilde elde edilir.

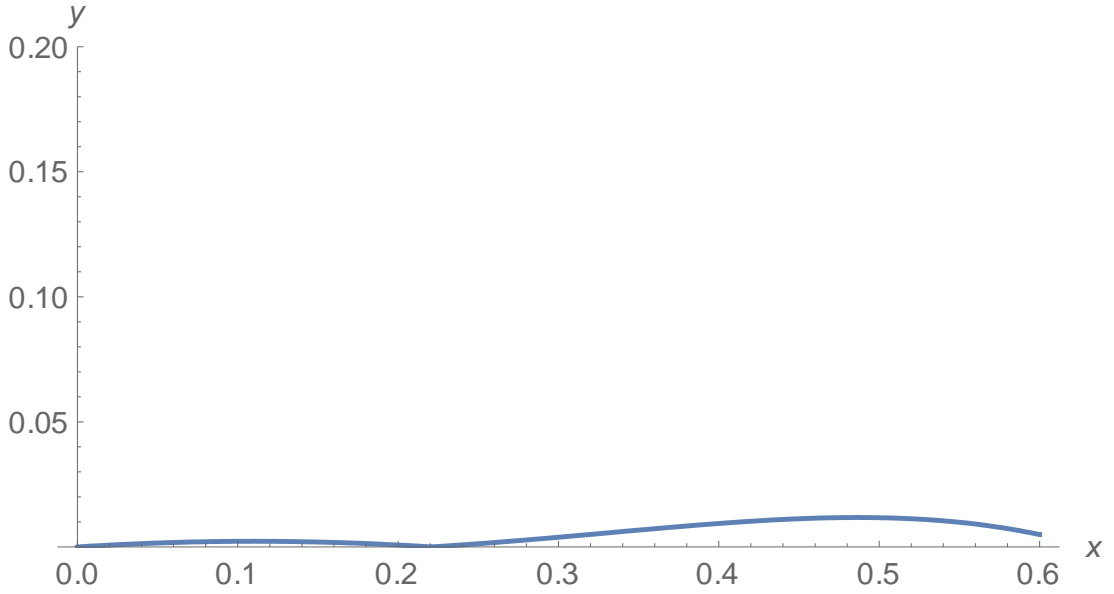
$$\begin{aligned}
u_{yak}(x) &= u_0(x) + \sum_{i=1}^7 u_i(x) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= -\frac{1}{315n^7}hx(315(1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4 + 6n^5 + 7n^6) \\
&\quad - 315h(1 + 3n + 6n^2 + 10n^3 + 15n^4 + 21n^5)(-1 + x) + h^6(315 \\
&\quad - 1890x + 1575x^2 + 2100x^3 - 2205x^4 + 294x^5 + 53x^6) \\
&\quad + 105h^2(-60n^3(-1 + 2x) + 35n^4(3 - 6x + x^2) - 3(-1 + 2x \\
&\quad + x^2) - 10n^2(-3 + 6x + x^2) - 4n(-3 + 6x + 2x^2)) + 105h^3(3 \\
&\quad - 9x - 6x^2 + 7x^3 + 45n^2(1 - 3x + x^3) + 35n^3(3 - 9x + 3x^2 \\
&\quad + x^3) + 5n(3 - 9x - 3x^2 + 5x^3)) - 21h^4(-15 + 60x + 30x^2 \\
&\quad - 100x^3 + 19x^4 + 21n^2(-15 + 60x - 30x^2 - 20x^3 + 7x^4) \\
&\quad + 6n(-15 + 60x - 60x^3 + 14x^4)) + 7h^5(45 - 225x + 450x^3 \\
&\quad - 210x^4 - x^5 + 7n(45 - 225x + 150x^2 + 150x^3 - 105x^4 \\
&\quad + 7x^5))
\end{aligned}$$

Bu kesilmiş serinin yakınsama bölgesini ayarlamak ve kontrol etmek için q-Homotopi analiz dönüşüm metodunda seçilen iki parametre olan  $h = -4.219882$  ve  $n = 12$  alındığında Şekil 4.1'den, yaklaşık çözümün tam çözüm ile neredeyse çakıştığı görülmektedir. Şekil 4.2,  $u_{yak}(x)$  yaklaşım fonksiyonu ile tam çözüm arasındaki mutlak değeri ifade eden  $e_{yak}(x) = |u(x) - u_{yak}(x)|$  hata fonksiyonunun davranışını

göstermektedir. Hatanın  $x$ 'in aralığının sağ uç tarafında diğer kısımlara nazaran biraz daha büyümeğe olduğu görülmektedir.



**Şekil 4.1.**  $h = -4.219882751999999$ ,  $n = 12$  değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği



**Şekil 4.2.**  $h = -4.2989$  ve  $n = 12$  için hata grafiği

**Örnek 4.2.** [32,33,34] Bu örnekte analitik çözümü  $u(x, t) = \frac{\lambda e^t}{1-\lambda+\lambda e^t}$  olan (3.16) denkleminin q-HATM ile çözümlerini inceleyeceğiz.

Alt başlık (3.3.2) de verilen çözüm yöntemi ile (3.25) de verilen formülü kullanırsak

$$u_m(x) = k_m u_{m-1}(x) + h\mathcal{L}^{-1}[\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1})], \quad 0 \leq m \leq 5 \quad (4.7)$$

elde edilir.

(3.16) denkleminin q-HATM serisinin ilk 5 yaklaşık çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_0(x, t) = \lambda$$

$$u_1(x, t) = ht(-1 + \lambda) \lambda$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} ht(-1 + \lambda) \lambda (2n + h(2 + t(-1 + 2\lambda)))$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{6} ht(-1 + \lambda) \lambda (6n^2 + 6hn(2 + t(-1 + 2\lambda)) + h^2(6 + 6t(-1 + 2\lambda) + t^2(1 - 6\lambda + 6\lambda^2)))$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{24} ht(-1 + \lambda) \lambda (24n^3 + 36hn^2(2 + t(-1 + 2\lambda)) + 12h^2n(6 + 6t(-1 + 2\lambda) + 2\lambda) + t^2(1 - 6\lambda + 6\lambda^2)) + h^3(24 + 36t(-1 + 2\lambda) + 12t^2(1 - 6\lambda + 6\lambda^2) + t^3(-1 + 14\lambda - 36\lambda^2 + 24\lambda^3)))$$

$$u_5(x, t) = \frac{1}{120} ht(-1 + \lambda) \lambda (120n^4 + 240hn^3(2 + t(-1 + 2\lambda)) + 120h^2n^2(6 + 6t(-1 + 2\lambda) + t^2(1 - 6\lambda + 6\lambda^2)) + 20h^3n(24 + 36t(-1 + 2\lambda) + 12t^2(1 - 6\lambda + 6\lambda^2) + t^3(-1 + 14\lambda - 36\lambda^2 + 24\lambda^3)) + h^4(120 + 240t(-1 + 2\lambda) + 120t^2(1 - 6\lambda + 6\lambda^2) + 20t^3(-1 + 14\lambda - 36\lambda^2 + 24\lambda^3) + t^4(1 - 30\lambda + 150\lambda^2 - 240\lambda^3 + 120\lambda^4)))$$

Böylece (3.23) denkleminin kesilmiş serisi

$$\begin{aligned}
u_{yak}(x, t) &= u_0(x, t) + \sum_{i=1}^5 u_i(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= \frac{1}{120n^5} \lambda (120n^5 + 600hn^4(2 + t(-1 + \lambda)) + 600h^2n^3(4 \\
&\quad + 2t(-3 + 5\lambda) + t^2(1 - 3\lambda + 2\lambda^2)) + 200h^3n^2(12 + 6t(-5 \\
&\quad + 13\lambda) + 6t^2(2 - 9\lambda + 8\lambda^2) + t^3(-1 + 7\lambda - 12\lambda^2 + 6\lambda^3)) \\
&\quad + 25h^4n(48 + 24t(-7 + 25\lambda) + 36t^2(3 - 19\lambda + 22\lambda^2) + 4t^3(-5 \\
&\quad + 49\lambda - 108\lambda^2 + 66\lambda^3) + t^4(1 - 15\lambda + 50\lambda^2 - 60\lambda^3 + 24\lambda^4)) \\
&\quad + h^5(240 + 120t(-9 + 41\lambda) + 240t^2(4 - 33\lambda + 48\lambda^2) \\
&\quad + 40t^3(-7 + 91\lambda - 252\lambda^2 + 186\lambda^3) + 10t^4(3 - 60\lambda + 250\lambda^2 \\
&\quad - 360\lambda^3 + 168\lambda^4) + t^5(-1 + 31\lambda - 180\lambda^2 + 390\lambda^3 - 360\lambda^4 \\
&\quad + 120\lambda^5)))
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu çözüm fonksiyonunda bulunan  $h$  ve  $n$  parametre değerleri yakınsaklık bölgesinin kontrolünü sağlamak için seçilebilir. Eğer  $h = -1$  ve  $n = 1$  seçilirse, bu taktirde problemin tam çözümünün seri açılımının ilk 6 terimini elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned}
&\lambda - t(-1 + \lambda)\lambda + \frac{1}{2}t^2\lambda(1 - 3\lambda + 2\lambda^2) - \frac{1}{6}t^3\lambda(-1 + 7\lambda - 12\lambda^2 + 6\lambda^3) + \\
&\frac{1}{24}t^4\lambda(1 - 15\lambda + 50\lambda^2 - 60\lambda^3 + 24\lambda^4) - \frac{1}{120}t^5\lambda(-1 + 31\lambda - 180\lambda^2 + 390\lambda^3 - \\
&360\lambda^4 + 120\lambda^5).
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu çözüm fonksiyonu, Fourier dönüşüm homotopi pertürbasyon metodu ile [32,34]'de elde edilen çözümler ile örtüşmektedir.

**Örnek 4.3.** [27,29]  $u(0) = \frac{1}{2}$  başlangıç değeri ve  $u = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$  tam çözüm olacak şekilde

$$D_x u = u^2(x) - u(x) \quad (4.8)$$

verilen Ricatti diferansiyel denklemini q-HATM ile çözelim.

Verilen Ricatti diferansiyel denklem için Laplace dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{u\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u^2(x)\} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u(x)\} = 0 \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir. (4.9) denklemini için  $u = \phi(x, q)$  ve  $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$  alınırsa lineer olmayan  $N$  operatörü

$$N[\phi(x, q)] = \mathcal{L}\{\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi^2(x, q)\} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi(x, q)\} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. (4.10) denkleminde  $n \geq 1$ ,  $H(x) = 1$ ,  $h \neq 0$  ve  $u_0(x) = u(0)$  başlangıç koşulu altında homotopi dönüşüm metodunu uygularsak

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)N(\phi(x, q))$$

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)\mathcal{L}\{\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi^2(x, q)\} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi(x, q)\} \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu problem için  $m=5$  olarak seçilirse 5. dereceden çözümlere ulaşılır.

Böylece  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x) - k_m u_{m-1}(x)] = hH(x)\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}), \quad 0 \leq m \leq 5 \quad (4.12)$$

şeklinde elde edilir. (4.12) denkleminin ters Laplace dönüşümü yapılırsa

$$u_m(x) = k_m u_{m-1}(x) + h\mathcal{L}^{-1}[\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1})], \quad 0 \leq m \leq 5 \quad (4.13)$$

bulunur. Sonuç olarak denklemin ilk 6 teriminin q-HATM seri çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$u_1(x) = \frac{hx}{4}$$

$$u_2(x) = \frac{1}{4}h(h+n)x$$

$$u_3(x) = -\frac{1}{48}hx(-24hn - 12n^2 + h^2(-12 + x^2))$$

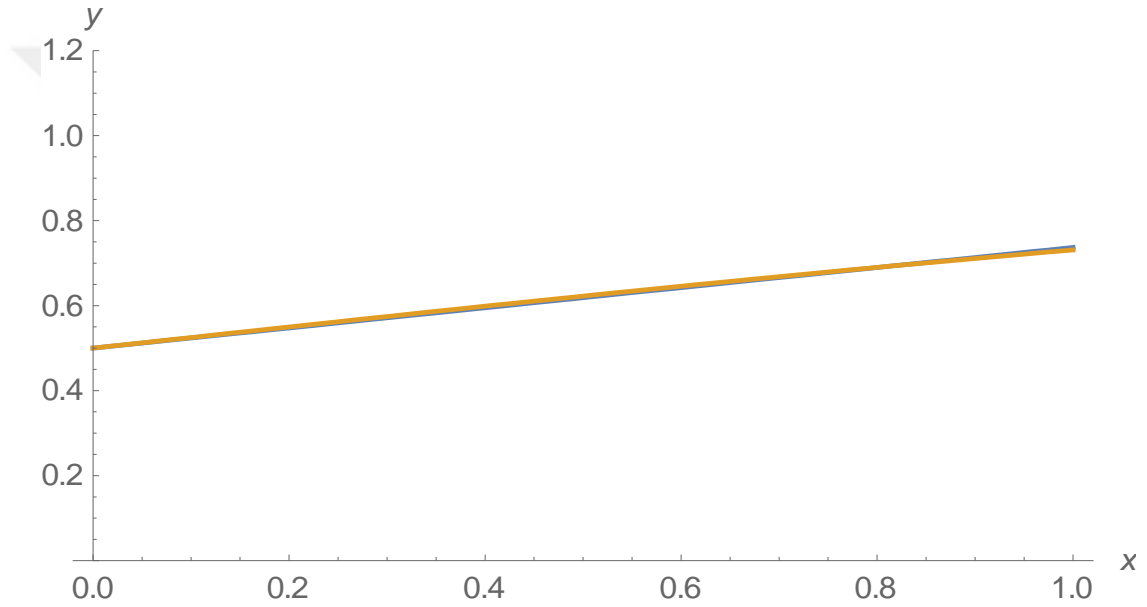
$$u_4(x) = -\frac{1}{16}h(h+n)x(-8hn - 4n^2 + h^2(-4 + x^2))$$

$$u_5(x) = \frac{1}{480}hx(480hn^3 + 120n^4 - 60h^2n^2(-12 + x^2) - 120h^3n(-4 + x^2) + h^4(120 - 60x^2 + x^4))$$

Bulunan bu çözümler sayesinde seri çözümünü şu şekilde elde edilir.

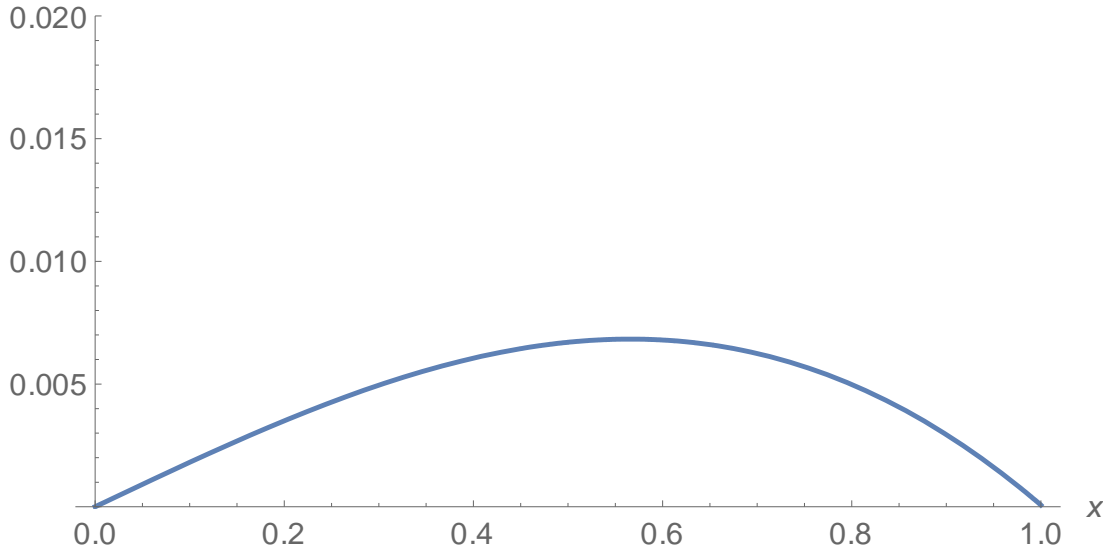
$$\begin{aligned}
u_{yak}(x) &= u_0(x) + \sum_{i=1}^5 u_i(x) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= \frac{1}{480n^5} (240n^5 + 1200h^2n^3x + 600hn^4x - 100h^3n^2x(-12 \\
&\quad + x^2) - 150h^4nx(-4 + x^2) + h^5x(120 - 60x^2 + x^4))
\end{aligned}$$

Bu kesilmiş serinin yakınsama bölgesini ayarlamak ve kontrol etmek için q-Homotopi analiz dönüşüm metodunda seçilen iki parametre olan  $h = 2.28718$  ve  $n = 16$  alındığında Şekil 4.3'ten, yaklaşık çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.

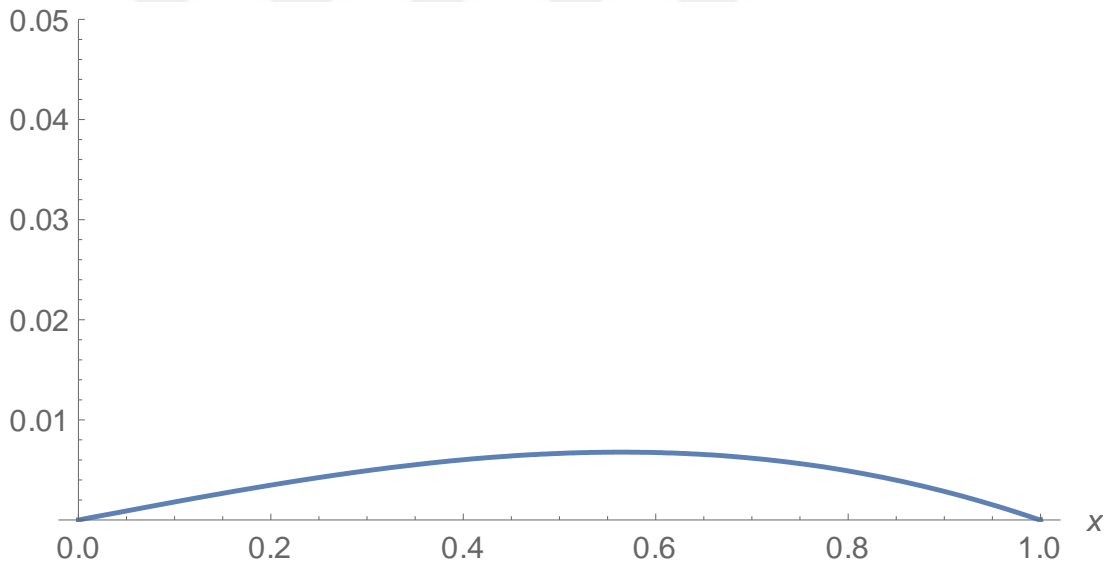


**Şekil 4.3.**  $h = 2.28718$  ve  $n = 16$  değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 4.4,  $h = 0.280316$  ve  $n = 2$  değerleri için, Şekil 4.5,  $h = 1.82267$  ve  $n = 13$  değerleri için ve Şekil 4.6,  $h = 2.2423$  ve  $n = 16$  değerleri için  $u_{yak}(x)$  yaklaşım fonksiyonu ile tam çözüm arasındaki mutlak değeri ifade eden  $e_{yak}(x) = |u(x) - u_{yak}(x)|$  hata fonksiyonlarının davranışlarını göstermektedir.

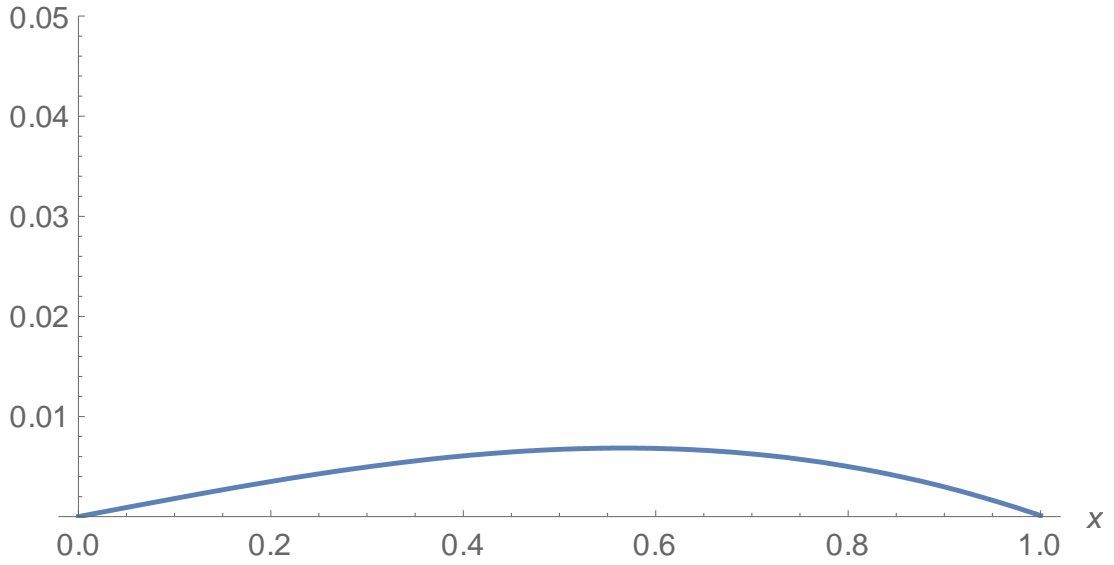


**Şekil 4.4.**  $h = 0.280316$  ve  $n = 2$  için hata grafiği



**Şekil 4.5.**  $h = 1.82267$  ve  $n = 13$  için hata grafiği





**Şekil 4.6.**  $h = 2.2423$  ve  $n = 16$  için hata grafiği

**Örnek 4.4.**[27,29]  $u(0) = 1$  başlangıç değeri ve  $u = 1 - 4x$  tam çözüm olacak şekilde

$$D_x u = u^2(x) + 8xu(x) + 16x^2 - 5 \quad (4.14)$$

verilen Ricatti diferansiyel denklemini q-HATM ile çözelim.

Verilen Ricatti diferansiyel denklem için Laplace dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{u\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u^2(x)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{8xu(x)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{16x^2\} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{5\} = 0 \quad (4.15)$$

denklemini elde edilir. (4.15) denklemini için  $u = \phi(x, q)$  ve  $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$  alınırsa lineer olmayan  $N$  operatörü

$$N[\phi(x, q)] = \mathcal{L}\{\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi^2(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{8x\phi(x, q)\} \quad (4.16)$$

şeklinde yazılır. (4.16) denklemine  $n \geq 1$ ,  $H(x) = 1$ ,  $h \neq 0$  ve  $u_0(x) = u(0)$  başlangıç koşulu altında homotopi dönüşüm metodunu uygularsak

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)N(\phi(x, q))$$

$$(1 - nq)\mathcal{L}\{\phi(x, q) - u_0\} = hqH(x)\mathcal{L}\{\phi(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\phi^2(x, q)\} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{8x\phi(x, q)\} \quad (4.17)$$

elde edilir. Bu problem için  $m=5$  olarak seçilirse 5. dereceden çözümlere ulaşılır.

Böylece  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x) - k_m u_{m-1}(x)] = hH(x)\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1}), \quad 0 \leq m \leq 5 \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir. (4.18) denkleminin ters Laplace dönüşümü yapılırsa

$$u_m(x) = k_m u_{m-1}(x) + h\mathcal{L}^{-1}[\mathfrak{R}_m(\vec{u}_{m-1})], \quad 0 \leq m \leq 5 \quad (4.19)$$

bulunur. Sonuç olarak denklemin ilk 6 teriminin q-HATM seri çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = -\frac{4}{3}hx(-3 + 3x + 4x^2)$$

$$u_2(x) = \frac{1}{15}hx(75 - 80x^2 - 20n(-3 + 3x + 4x^2) + 4h(15 - 30x - 50x^2 + 40x^3 + 32x^4))$$

$$u_3(x) = \frac{1}{315}hx \left( -4h^2(-315 + 945x + 1890x^2 - 3255x^3 - 2436x^4 + 1904x^5 + 1088x^6) - 105(-15 + 16x^2 + 4n^2(-3 + 3x + 4x^2) + n(-15 + 16x^2)) + 21h(75 - 75x - 280x^2 + 40x^3 + 128x^4 + 8n(15 - 30x - 50x^2 + 40x^3 + 32x^4)) \right)$$

$$u_4(x) = \frac{1}{2835}hx(4h^3(2835 - 11340x - 26460x^2 + 71820x^3 + 49518x^4 - 96264x^5 - 42624x^6 + 35712x^7 + 15872x^8) - 945(-15 + 16x^2 + 4n^3(-3 + 3x + 4x^2) + n(-15 + 16x^2) + n^2(-15 + 16x^2)) + 189h(75 - 75x - 280x^2 + 40x^3 + 128x^4 + 12n^2(15 - 30x - 50x^2 + 40x^3 + 32x^4) + 2n(75 - 75x - 280x^2 + 40x^3 + 128x^4)) - 9h^2(-1575 + 3150x + 13230x^2 - 10080x^3 - 17808x^4 + 4256x^5 + 5632x^6 + 12n(-315 + 945x + 1890x^2 - 3255x^3 - 2436x^4 + 1904x^5 + 1088x^6)))$$

$$\begin{aligned}
u_5(x) = \frac{1}{2835} h \left( & 2835(5 + 4h^4 + 5n + 5n^2 + 5n^3 + 4n^4 + h^3(5 + 16n) + h^2(5 \\
& + 15n + 24n^2) + h(5 + 10n + 15n^2 + 16n^3))x - 2835(20h^4 \\
& + 4n^4 + h^3(15 + 64n) + 2h^2(5 + 15n + 36n^2) + h(5 + 10n \\
& + 15n^2 + 32n^3))x^2 - 945(160h^4 + h^3(226 + 448n) + h^2(151 \\
& + 378n + 432n^2) + 8h(7 + 14n + 21n^2 + 20n^3) + 16(1 + n + n^2 \\
& + n^3 + n^4))x^3 + 945h(600h^3 + h^2(339 + 1216n) + 24h(4 + 12n \\
& + 31n^2) + 8(1 + 2n + 3n^2 + 16n^3))x^4 + 1512h(235h^3 + h^2(335 \\
& + 524n) + 6h(21 + 53n + 58n^2) + 16(1 + 2n + 3n^2 + 4n^3))x^5 \\
& - 504h^2(76 + 2545h^2 + 228n + 816n^2 + 4h(203 + 764n))x^6 \\
& - 288h^2(1345h^2 + 32h(45 + 74n) + 24(9 + 22n + 34n^2))x^7 \\
& + 1152h^3(109 + 896h + 496n)x^8 + 2048h^3(50 + 145h \\
& + 124n)x^9 - \frac{1415168h^4x^{10}}{5} - \frac{5660672h^4x^{11}}{55} \Big)
\end{aligned}$$

Bulunan bu çözümler sayesinde seri çözümünü şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_{yak}(x) &= u_0(x) + \sum_{i=1}^7 u_i(x) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1 \\
&\quad - \frac{1}{155925n^5} 4h^5x \left( -155925 + 779625x + 2079000x^2 - 7796250x^3 - 4885650x^4 \right. \\
&\quad + 17636850x^5 + 5326200x^6 - 14192640x^7 - 4083200x^8 + 3891712x^9 \\
&\quad + 1415168x^{10}) \\
&\quad - \frac{hx(-15 + 16x^2 + 20n^4(-3 + 3x + 4x^2) + n(-30 + 32x^2) + n^2(-45 + 48x^2) + n^3(-60 + 64x^2))}{3n^5} \\
&\quad + \frac{1}{15n^5} h^2x \left( 75 - 75x - 280x^2 + 40x^3 + 128x^4 + 40n^3(15 - 30x - 50x^2 + 40x^3 \right. \\
&\quad + 32x^4) + 3n(75 - 75x - 280x^2 + 40x^3 + 128x^4) + 6n^2(75 - 75x - 280x^2 + 40x^3 \\
&\quad + 128x^4) \left. - \frac{1}{315n^5} h^3x(-1575 + 3150x + 15855x^2 - 10080x^3 - 21168x^4 + 4256x^5 \right. \\
&\quad + 6912x^6 + 40n^2(-315 + 945x + 1890x^2 - 3255x^3 - 2436x^4 + 1904x^5 + 1088x^6) \\
&\quad + 4n(-1575 + 3150x + 13230x^2 - 10080x^3 - 17808x^4 + 4256x^5 + 5632x^6) \left. \right) \\
&\quad + \frac{1}{2835n^5} h^4x(14175 - 42525x - 213570x^2 + 320355x^3 + 506520x^4 - 409248x^5 \\
&\quad - 414720x^6 + 125568x^7 + 102400x^8 + 20n(2835 - 11340x - 26460x^2 + 71820x^3 \\
&\quad + 49518x^4 - 96264x^5 - 42624x^6 + 35712x^7 + 15872x^8) \left. \right)
\end{aligned}$$

**Örnek 4.5 [46]**  $u(x, 0) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(a_1 x) \right]^{\frac{1}{\delta}}$  olmak üzere  $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1 - u^\delta)$  şeklinde tanımlı Burgers-Fisher denklemini  $a_1 = \frac{-\alpha\delta}{2(1+\delta)}$  ve  $\delta = \alpha = \beta = 1$  koşulları altında q-HATM ile çözelim.

Verilen Burgers-Fisher denklemine (3.2.3)'de verilen q-HATM uygulanırsa denklemin ilk 6 teriminin q-HATM serisinin ilk 6 çözümü aşağıdaki gibidir.

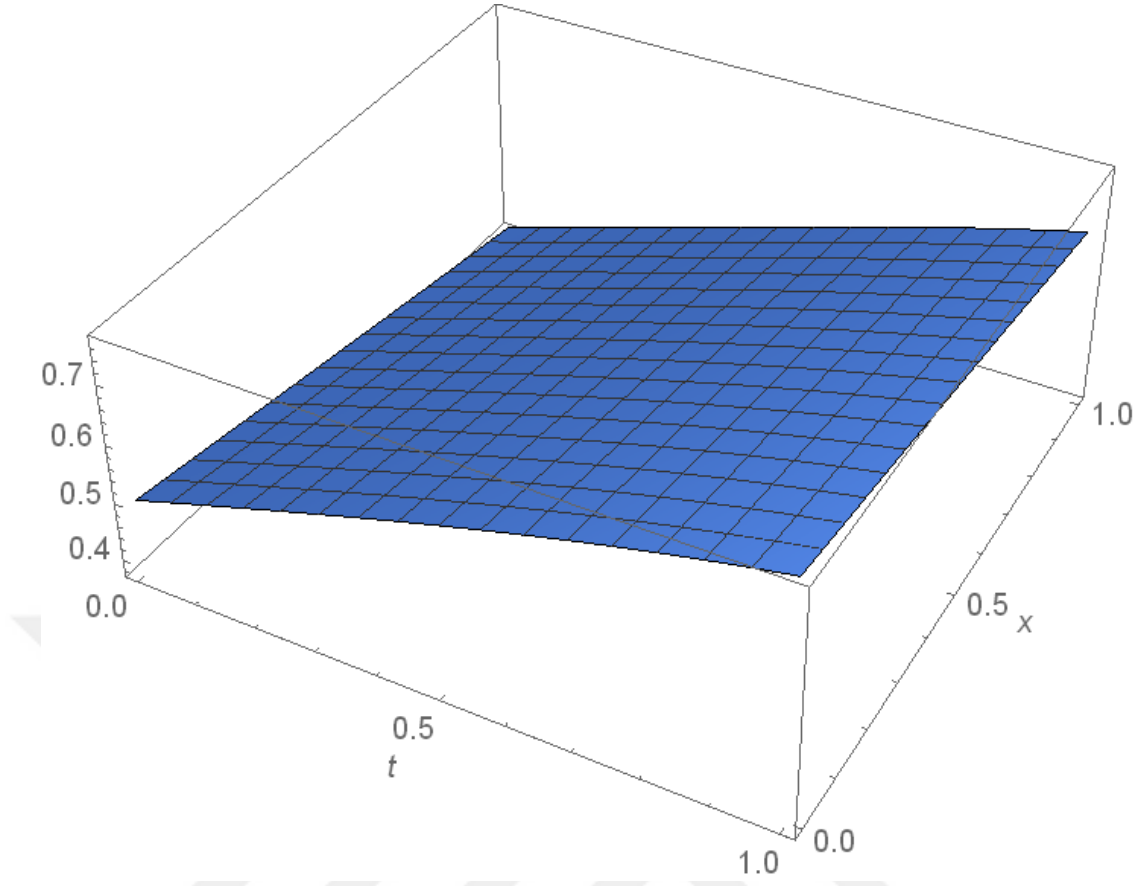
$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \right) \\
u_1(x, t) &= -\frac{5}{16} ht \operatorname{Sech}\left(\frac{x}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= \frac{5}{128} ht \operatorname{Sech} \left( \frac{x}{4} \right)^2 \left( -8(h+n) + 5ht \operatorname{Tanh} \left( \frac{x}{4} \right) \right) \\
u_3(x, t) &= -\frac{1}{3072} 5ht \operatorname{Sech} \left( \frac{x}{4} \right)^4 \left( \left( 192hn + 96n^2 + h^2(96 + 25t^2) \right) \operatorname{Cosh} \left( \frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2(96hn + 48n^2 + h^2(48 - 25t^2) - 60h(h+n)t \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{4} \right)) \right) \\
u_4(x, t) &= \frac{1}{98304} 5ht \operatorname{Sech} \left( \frac{x}{4} \right)^5 \left( 144(h+n)(-64hn - 32n^2 + h^2(-32 \right. \\
&\quad \left. + 25t^2)) \operatorname{Cosh} \left( \frac{x}{4} \right) - 48(h+n)(64hn + 32n^2 + h^2(32 \right. \\
&\quad \left. + 25t^2)) \operatorname{Cosh} \left( \frac{3x}{4} \right) + 10ht(1152hn + 576n^2 + h^2(576 - 125t^2) \right. \\
&\quad \left. + (1152hn + 576n^2 + h^2(576 + 25t^2)) \operatorname{Cosh} \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{4} \right) \right) \\
u_5(x, t) &= -\frac{1}{786432} 5ht \operatorname{Sech} \left( \frac{x}{4} \right)^6 \left( 18432h^4 + 73728h^3n + 110592h^2n^2 \right. \\
&\quad \left. + 73728hn^3 + 18432n^4 - 28800h^4t^2 - 57600h^3nt^2 \right. \\
&\quad \left. - 28800h^2n^2t^2 + 4125h^4t^4 - 2(-49152hn^3 - 12288n^4 \right. \\
&\quad \left. + 384h^2n^2(-192 + 25t^2) + 768h^3n(-64 + 25t^2) + h^4(-12288 \right. \\
&\quad \left. + 9600t^2 + 1625t^4)) \operatorname{Cosh} \left( \frac{x}{2} \right) + (24576hn^3 + 6144n^4 \right. \\
&\quad \left. + 768h^3n(32 + 25t^2) + 384h^2n^2(96 + 25t^2) + h^4(6144 \right. \\
&\quad \left. + 9600t^2 + 125t^4)) \operatorname{Cosh}(x) - 30720h^4t \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. - 92160h^3nt \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{2} \right) - 92160h^2n^2t \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 30720hn^3t \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{2} \right) + 20000h^4t^3 \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 20000h^3nt^3 \operatorname{Sinh} \left( \frac{x}{2} \right) - 15360h^4t \operatorname{Sinh}(x) - 46080h^3nt \operatorname{Sinh}(x) \right. \\
&\quad \left. - 46080h^2n^2t \operatorname{Sinh}(x) - 15360hn^3t \operatorname{Sinh}(x) - 2000h^4t^3 \operatorname{Sinh}(x) \right. \\
&\quad \left. - 2000h^3nt^3 \operatorname{Sinh}(x) \right)
\end{aligned}$$

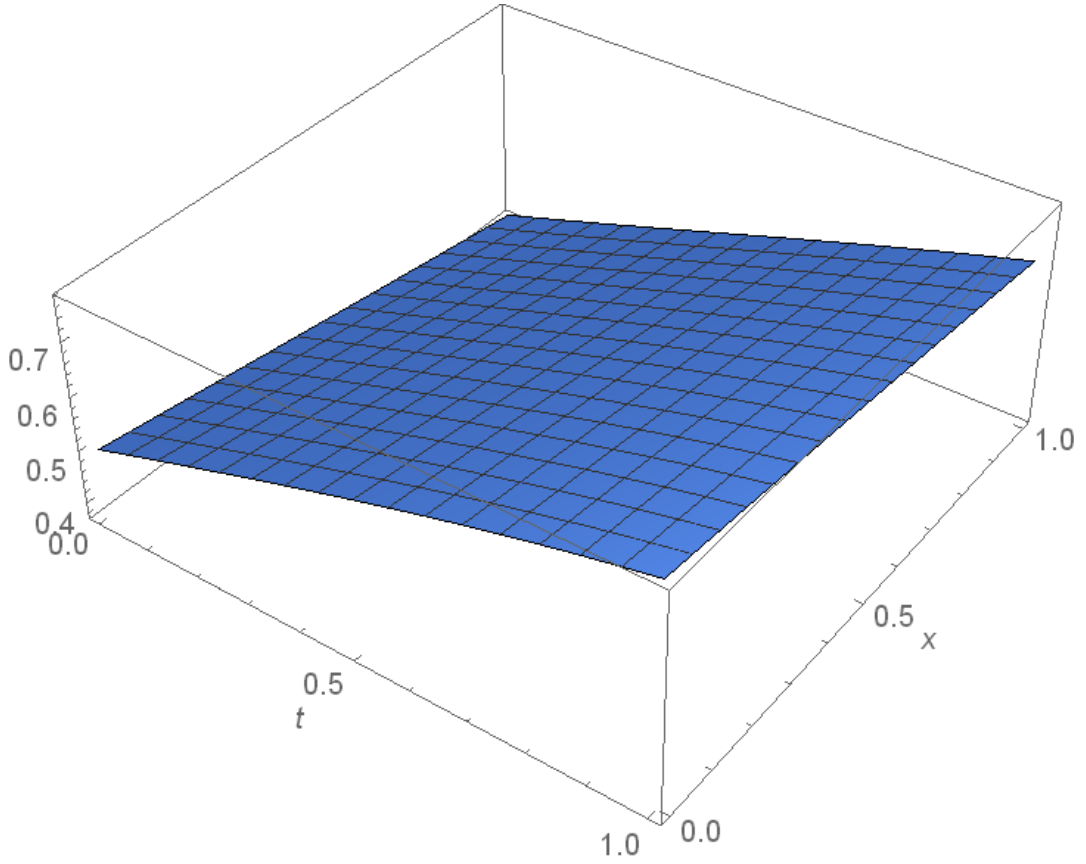
Bulunan bu çözümler sayesinde seri çözümünü şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_{yak}(x, t) &= u_0(x, t) + \sum_{i=1}^5 u_i(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= \frac{1}{2} - \frac{5ht \operatorname{Sech}\left(\frac{x}{4}\right)^2}{16n} \\
&\quad + \frac{1}{98304n^4} 5ht \operatorname{Sech}\left(\frac{x}{4}\right)^5 \left( 144(h \right. \\
&\quad + n) \left( -64hn - 32n^2 + h^2(-32 + 25t^2) \right) \operatorname{Cosh}\left(\frac{x}{4}\right) - 48(h \\
&\quad + n)(64hn + 32n^2 + h^2(32 + 25t^2)) \operatorname{Cosh}\left(\frac{3x}{4}\right) + 10ht(1152hn \\
&\quad + 576n^2 + h^2(576 - 125t^2) + (1152hn + 576n^2 + h^2(576 \\
&\quad + 25t^2)) \operatorname{Cosh}\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{Sinh}\left(\frac{x}{4}\right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{3072n^3} 5ht \operatorname{Sech}\left(\frac{x}{4}\right)^4 \left( \left( 192hn + 96n^2 + h^2(96 \right. \right. \\
&\quad + 25t^2) \operatorname{Cosh}\left(\frac{x}{2}\right) + 2(96hn + 48n^2 + h^2(48 - 25t^2) - 60h(h \\
&\quad + n)t \operatorname{Sinh}\left(\frac{x}{2}\right) \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Tanh}\left(\frac{x}{4}\right) \\
&\quad \left. \left. + \frac{5ht \operatorname{Sech}\left(\frac{x}{4}\right)^2 (-8(h+n) + 5ht \operatorname{Tanh}\left(\frac{x}{4}\right))}{128n^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Bu kesilmiş serinin yakınsama bölgesini ayarlamak ve kontrol etmek için q-Homotopi analiz dönüşüm metodunda seçilen iki parametre olan  $h = -1$  ve  $n = 1$  alındığında Şekil 4.7 ve  $h = -1.72$  ve  $n = 2$  alındığında ise Şekil 4.8'den gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği yaklaşık çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın olduğu göstermektedir.



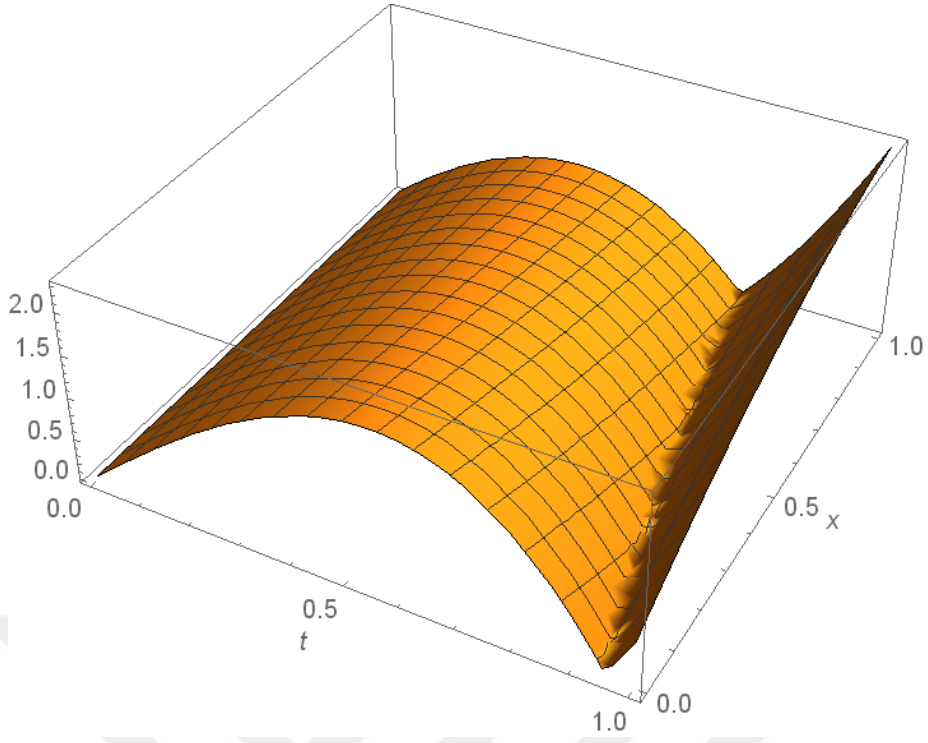
Şekil 4.7  $h = -1$  ve  $n = 1$  değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği



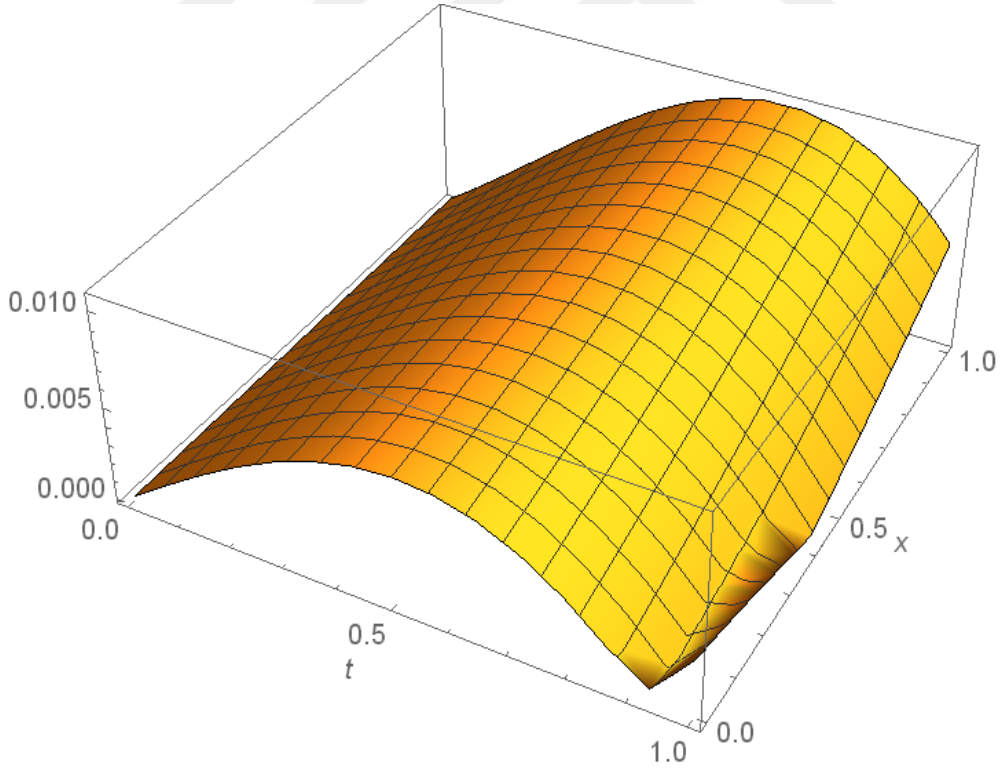
**Şekil 4.8.**  $h = -1.72$  ve  $n = 2$  değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 4.9,  $h = -3$  ve  $n = 1$  değerleri için ve Şekil 4.10,  $h = -1$  ve  $n = 2$  değerleri için, Şekil 4.11  $h = -5.23$  ve  $n = 6$  değerleri için, Şekil 4.12 ise  $h = -0.92$  ve  $n = 1$  değerleri için  $u_{yak}(x, t)$  yaklaşım fonksiyonu ile tam çözüm arasındaki mutlak değeri ifade eden  $e_{yak}(x, t) = |u(x, t) - u_{yak}(x, t)|$  hata fonksiyonlarının davranışlarını göstermektedir.

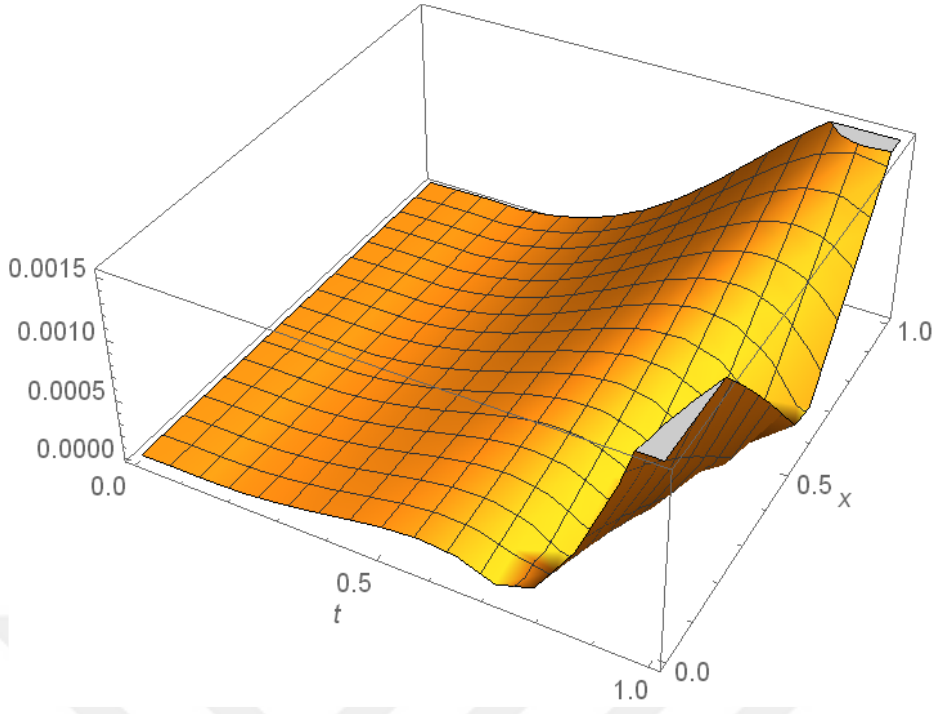




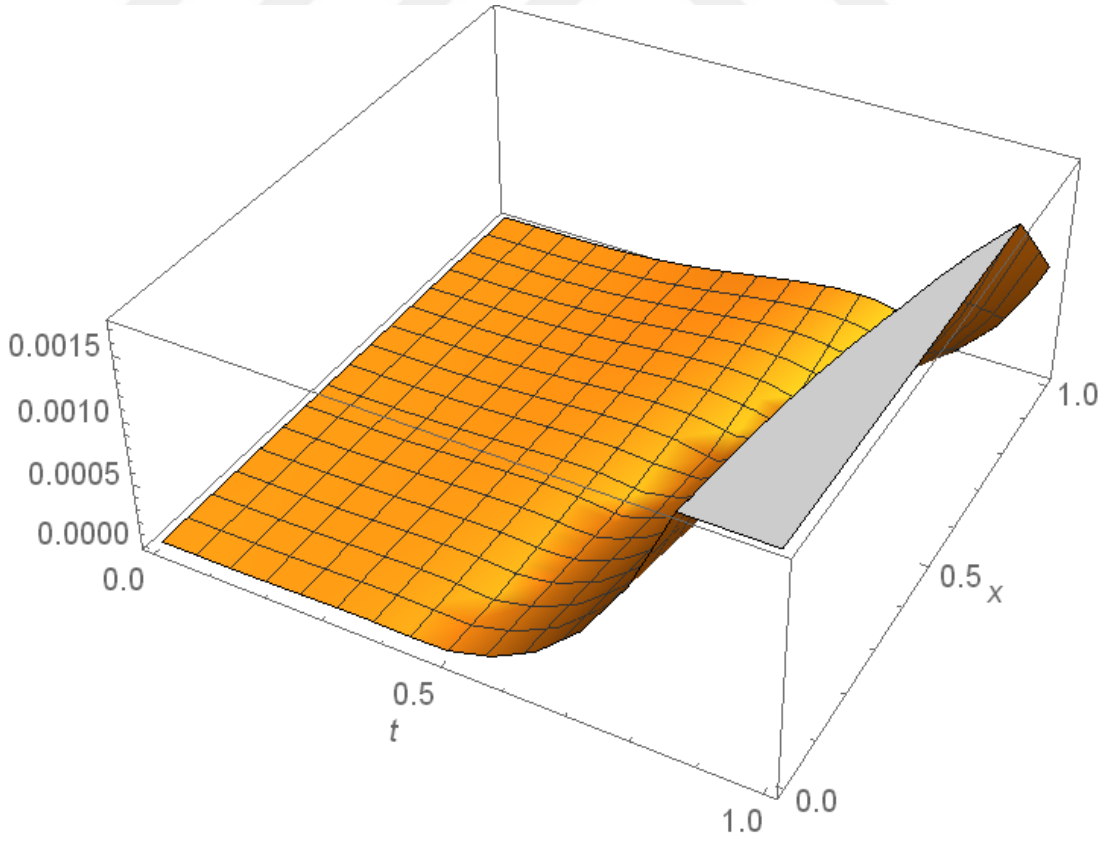
Şekil 4.9.  $h = -3$  ve  $n = 1$  değerleri için hata grafiği



Şekil 4.10.  $h = -1$  ve  $n = 2$  değerleri için hata grafiği



**Şekil 4.11.**  $h = -5.23$  ve  $n = 6$  değerleri için hata grafiği



**Şekil 4.12.**  $h = -0.92$  ve  $n = 1$  değerleri için hata grafiği

**Örnek 4.6.** [47] Başlangıç şartları  $\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\beta = -\frac{3}{2}u^3$ ,  $\gamma = 3$ ,  $h(x, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = -\text{sech}(x)$  ve olan  $u_{tt} - u_{xx} + \frac{3}{4}u - \frac{3}{2}u^3 = 0$  Klein-Gordon denklemini q-HATM ile çözelim.

Verilen Klein-Gordon denkleminin (3.2.3)'de verilen q-HATM uygulanırsa denklemin ilk 6 teriminin q-HATM serisinin ilk 4 çözümü aşağıdaki gibidir.

$$u_0(x, t) = -\text{Sech}(x)$$

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \text{Sech}(x) \text{Tanh}(x)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{16} \text{Sech}(x) \text{Tanh}(x) (8h + 8n + 3ht^2 + 2ht^2 \text{Sech}(x)^2 - 4ht^2 \text{Tanh}(x)^2)$$

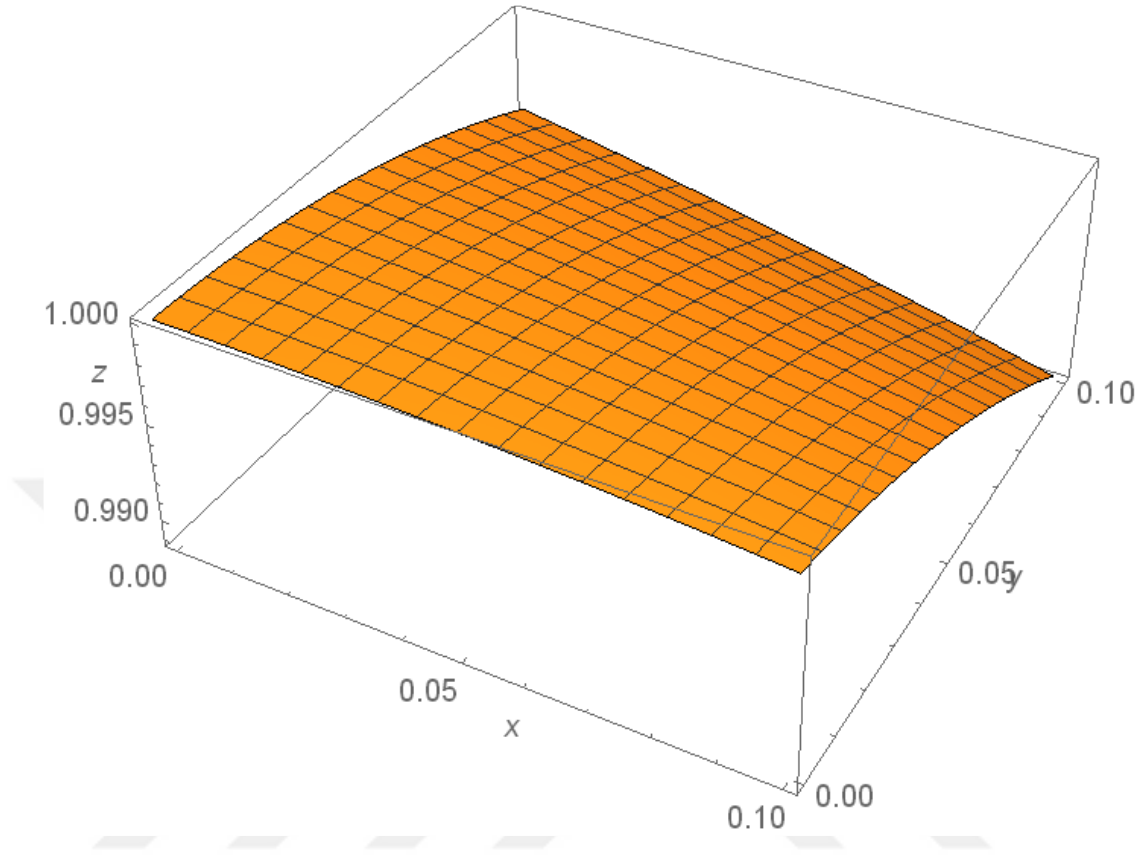
$$u_3(x, t) = \frac{1}{768} \text{Sech}(x) \text{Tanh}(x) (384n^2 + 96hn(8 + 3t^2) + 3h^2(128 + 96t^2 + 3t^4) + 148h^2t^4 \text{Sech}(x)^4 - 24ht^2(16n + h(16 + t^2)) \text{Tanh}(x)^2 + 16h^2t^4 \text{Tanh}(x)^4 + 4ht^2 \text{Sech}(x)^2(48n + 3h(16 + t^2) + 108 \text{Tanh}(x) - 52ht^2 \text{Tanh}(x)^2))$$

Bulunan bu çözümler sayesinde seri çözümünü şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} u_{yak}(x, t) &= u_0(x, t) + \sum_{i=1}^3 u_i(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\ &= \frac{1}{768n^3} \text{Sech}(x) (-768n^3 + (3(384n^2 + 48hn(8 + 3t^2) + h^2(128 + 96t^2 + 3t^4)) + 12ht^2(24n + h(16 + t^2)) \text{Sech}[x]^2 + 148h^2t^4 \text{Sech}[x]^4) \text{Tanh}(x) + 432ht^2 \text{Sech}(x)^2 \text{Tanh}(x)^2 - 8ht^2(72n + 3h(16 + t^2) + 26ht^2 \text{Sech}(x)^2) \text{Tanh}(x)^3 + 16h^2t^4 \text{Tanh}(x)^5) \end{aligned}$$

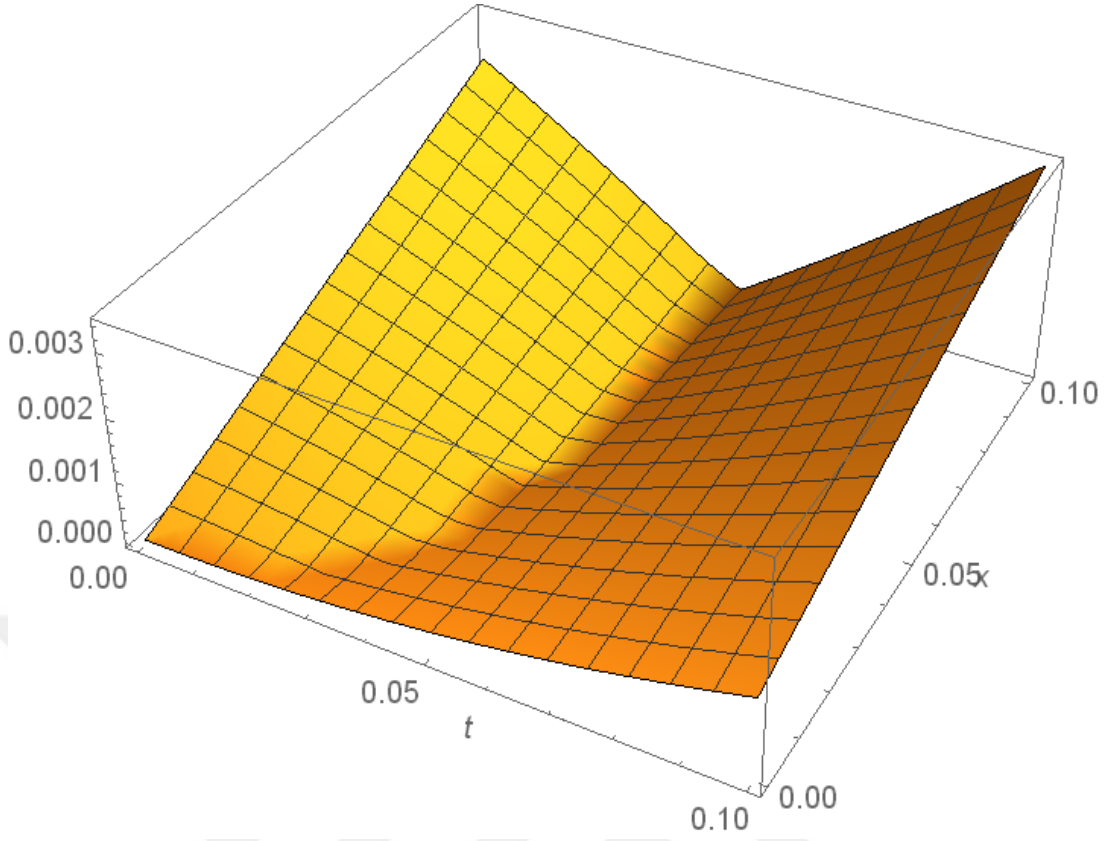
Bu kesilmiş serinin yakınsama bölgesini ayarlamak ve kontrol etmek için q-Homotopi analiz dönüşüm metodunda seçilen iki parametre olan  $h = -1$  ve  $n = 1$  alındığında

Şekil 4.14 ve  $h = -100$  ve  $n = 1$  alındığında gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği yaklaşık çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.

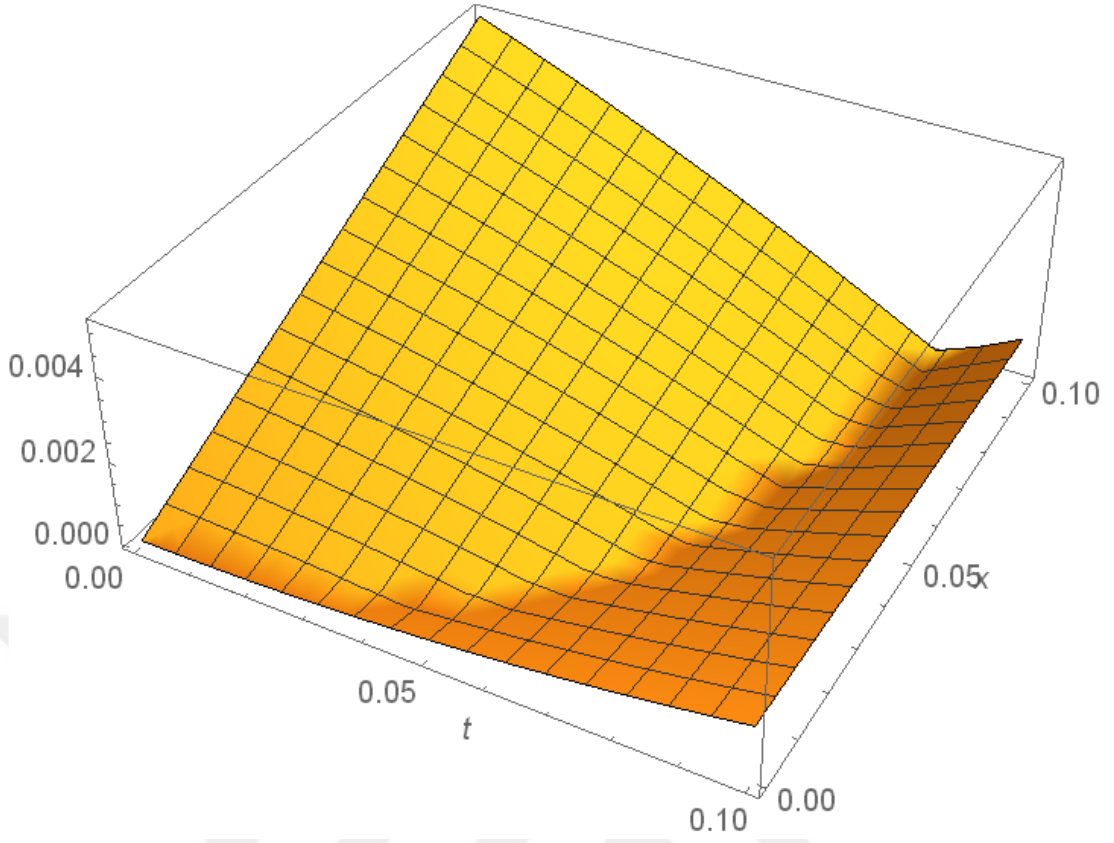


**Şekil 4.13.**  $h = -100$  ve  $n = 1$  değerleri için gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 4.14,  $h = -4.14026$  ve  $n = 50$  değerleri için, Şekil 4.15,  $h = -6.8$  ve  $n = 20$  değerleri için  $u_3(x, t)$  yaklaşım fonksiyonu ile tam çözüm arasındaki mutlak değeri ifade eden  $e_{yak}(x, t) = |u(x, t) - u_{yak}(x, t)|$  hata fonksiyonlarının davranışlarını göstermektedir.



**Şekil 4.14.**  $h = -4.14026$  ve  $n = 50$  değerleri için hata grafiği



Şekil 4.15.  $h = -6.8$  ve  $n = 20$  değerleri için hata grafiği

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

q-homotopi analiz dönüşüm metodunu kullanarak Ricatti ve Fisher denklemlerinin nümerik çözümlerini başarıyla elde ettik. Ricatti diferansiyel denklemi ve bazı başlangıç koşullarına bağlı lojistik büyüme yayılma sürecini modelleyen Fisher denkleminin ikinci dereceden doğrusal olmayan terimlere sahip olmaları dolayısıyla göz önüne alındı. Ayrıca üçüncü mertebeden lineer olmayan terime sahip Van der Pol-Duffing denklemleri, Burgers-Fisher denklemleri ve Klein-Gordon denklemlerinin çözümleri incelendi. Elde edilen çözümler, ikinci ve üçüncü dereceden lineer olmayan denklemlerin tam veya yaklaşık olarak çözülebileceğini göstermiştir. Yaklaşık çözümler yarı analitik fonksiyon şeklinde elde edilebilir. Bu çözümlerde bulunan  $h$  ve  $n$  ( $n \geq 1$ ) parametrelerinin uygun seçimleri, çözüm fonksiyonunun yakınsadığı bölgenin genişletilmesine ve kontrol etmemize imkan vermektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Liao, S. Beyond Perturbation. Introduction to Homotopy Analysis Method. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida, United States of America, 2003.
- [2] Abdou, M., Soliman, A. Variational iteration method for solving Burger's and Coupled Burger's equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005, 181, 245-251.
- [3] Sajid, M., Hayat, T., Asghar, S. On the analytic solution of the steady flow of a fourth grade fluid. Physics Letters. 2006, A(355), 18-26.
- [4] Abbasbandy, S., The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. Physics Letters. 2006, A(360), 109-113.
- [5] Alomari, A., Noorani, M., Nazar, R. Adaptation of homotopy analysis method for the numeric-analytic solution of Chen system. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2009, 14, 2336-2346.
- [6] Chen, Y., Liu, J., Homotopy analysis method for limit cycle oscillations of an airfoil with cubic nonlinearities. Journal of Vibration and Control. 2010, 16(2), 163-179.
- [7] Liao, S. On the relationship between the homotopy analysis method and Euler transform. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2010, 15, 1421-1431.
- [8] Srinivas, S., Muthuraj, R. Effects of thermal radiation and space porosity on MHD mixed convection flow in a vertical channel using the homotopy analysis method. Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010, 15, 2098-2108.
- [9] El-Tawil, M., Huseen, S. The q-homotopy analysis method (q-HAM). International Journal Applied Mathematics and Mechanics. 2012, 8(15), 51-75.
- [10] El-Tawil, M., Huseen, S. On convergence of the q-homotopy analysis method. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. 2013, 8, 481-497.
- [11] Iyiola, O., Soh, M., Enyi, C. Generalised homotopy analysis method (q-HAM) for solving foam drainage equation of time fractional type. Journal Mesa. 2013, 4(4), 429-440.



- [12] Iyiola, O. Exact and Approximate Solutions of Fractional Diffusion Equations with Fractional Reaction Terms. *Progress in Fractional Differentiation and Application*. 2016, 2(1), 21-30.
- [13] Cveticanin, L. The homotopy-perturbation method applied for solving complex-valued differential equations with strong cubic nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*. 2005, 285, 1171-1179.
- [14] Singh, J., Kumar, D., Swroop, R. Numerical solution of time-and space-fractional coupled Burgers' equations via homotopy algorithm. *Alexandria Engineering Journal*. 2016, 55, 1753-1763.
- [15] Kumar, D., Singh, J., Baleanu, D. A new analysis for fractional model of regularized long-wave equation arising in ion acoustic plasma. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2017, 40(15), 5642-5653.
- [16] Prakash, A., Kaur, H. Numerical solution for fractional model of Fokker-Planck equation by using q-HATM. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2017, 105, 99-110.
- [17] Srivastava, H., Kumar, D., Singh, J. An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation. *Applied Mathematical Modelling*. 2017, 45, 192-204.
- [18] Prakash, A., Kaur, H. q-homotopy analysis transform method for space and time-fractional KdV-Burgers equation. *Nonlinear Science Letters A: Mathematics, Physics and Mechanics*. 2018, 9(1), 44-61.
- [19] Singh, J., Kumar, D., Swroop, R., Kumar, S. An efficient computational approach for time fractional Rosenau-Hyman equation. *Neural Comput & Applic*. 2018, 30, 3063-3070.
- [20] Veerasha, P., Prakasha, D., Baskonus, H. New numerical surfaces to the mathematical model of cancer chemotherapy effect in Caputo fractional derivatives. *Chaos*. 2019, 29(1), 1-13.
- [21] Veerasha, P., Prakasha, D., Baskonus, H. Novel simulations to the time-fractional Fisher's equation. *Mathematical Sciences*. 2019, 13, 33-42.

- [22] Schiff, J. The Laplace Transform Theory and Applications. Ed: Sheldon Axler, Frederick Gehring, Ken Ribet, Springer/Verlag, New York, United States of America, 1999, 235.
- [23] Cohen, A. Numerical Methods for Laplace Transform Inversion. Springer Science+Business Media/LLC, New York, United States of America, 2007, 250.
- [24] Duz, M. On an application of Laplace transforms. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2017, 5(2), 193-198.
- [25] Reddy, K., Vaithyasubramanian, S. A Survey of Laplace Transform Applications in various field of Science and Engineering. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2018, 119(7), 769-777.
- [26] Sezer, M., Daşcıoğlu A. *Diferansiyel Denklemler I*. Dora/Dora, Bursa, Türkiye, 2010, 278.
- [27] Aminikhah, H. Approximate Analytical Solution for Quadratic Riccati Differential Equation. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*. 2013, 3(2), 21-31.
- [28] Batiha, B. A new efficient method for solving quadratic Riccati differential equation. *International Journal of Applied Mathematic Research*. 2015, 4(1), 24-29.
- [29] Ghomanjani, F., Khorram, E. Approximate solution for quadratic Riccati differential equation. *Journal of Taibah University for Science*. 2017, 11, 246-250.
- [30] Wazwaz, A., Gorguis, A. An analytic study of Fisher's equation by using Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*. 2004, 154, 609-620.
- [31] Branco, J., Ferreira, J., Oliveira, P. Numerical methods for the generalized Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation. *Applied Numerical Mathematics*. 2007, 57, 89-102
- [32] Ağırseven, D., Öziş, T. An analytical study for Fisher type equations by using homotopy perturbation method. *Computers and Mathematics with Applications*. 2010, 60, 602-609.

- [33] Chandraker, V., Awasthi, A., Jayaraj, S. A Numerical treatment of Fisher Equation. *Procedia Engineering*. 2015, 127, 1256-1262.
- [34] Abbaszadeh, M., Nourazar, S. An Application of the Fourier Transform Homotopy Perturbation Method for the Solution of Nonlinear Fisher Equation. *Mechanics Letters*. 2017, 1, 14-22.
- [35] Kimiaefar, A., Saidi, A., Bagheri, G., Rahimpour, M., Domairry, D. Analytical solution for Van der Pol-Duffing oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2009, 42, 2660-2666.
- [36] Ji, J., Zhang, N. Nonlinear response of a forced van der Pol-Duffing oscillator at non-resonant bifurcations of codimension two. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2009, 41, 1467-1475.
- [37] Zhihong, Z., Shaopu, Y. Application of van der Pol-Duffing oscillator in weak signal detection. *Computers and Electrical Engineering*. 2015, 41, 1-8.
- [38] Kyzioł, J., Okniński, A. The Duffing-Van der Pol Equation: Metamorphoses of Resonance Curves. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2015, 15, 25-31.
- [39] Kaya, D., El-Sayed, S. A numerical simulation and explicit solutions of the generalized Burgers–Fisher equation. *Applied Mathematics and Computation* 2004, 152, 403-413.
- [40] Chen, H., Zhang, H. New multiple soliton solutions to the general Burgers–Fisher equation and the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2004, 19, 71-76.
- [41] Ismail, H., Raslan, K., Rabboh, A. Adomian decomposition method for Burger’s–Huxley and Burger’s–Fisher equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2004, 159, 291-301.
- [42] Ismail, H., Rabboh, A. A restrictive Padè approximation for the solution of the generalized Fisher and Burger–Fisher equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2004, 154, 203-210.
- [43] Zhu, C., Kang, W. Numerical solution of Burgers–Fisher equation by cubic B-spline quasi-interpolation. *Applied Mathematics and Computation*. 2010, 216, 2679-2686.

[44] Nawaz, R., Ullah, H., Islam, S., Idrees, M. Application of Optimal Homotopy Asymptotic Method to Burger Equations. *Journal of Applied Mathematics*. 2013, ID 387478, 8 sayfa.

[45] Malik, S., Quershi, I., Amir, M., Malik, A., Haq, I. Numerical Solution to Generalized Burgers'-Fisher Equation Using Exp-Function Method Hybridized with Heuristic Computation. *PLoS ONE*. 2015, 10(3), e0121728.

[46] Chandraker, V., Awasthi, A., Jayaraj, S. Numerical Treatment of Burger-Fisher equation. *Procedia Technology*. 2016, 25, 1217-1225.

[47] Bildik, N., Deniz, S. New Approximate Solutions to the Nonlinear Klein-Gordon Equations Using Perturbation Iteration Techniques. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*. doi:10.3934/dcdss

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeyyan ÖZTAŞ

Doğum Yeri ve Yılı : Gaziantep, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : zeyyanoztas@hotmail.com

### Eğitim Durumu

Lise : Gaziemir Nevvar Salih İşgören Anadolu Lisesi, 2010

Lisans : Anadolu Üniversitesi, İşletme Bölümü, 2016

Lisans : Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2017

Ön Lisans : Ege Üniversitesi, Bilgisayar Programcılığı Bölümü, 2018-...  
(halen)

### Mesleki Deneyim

Eskişehir Kenan Yalçın Anadolu Lisesi 2016-2017

Gaziemir Özel Analiz Fen Eğitim Kurumları 2018-... (halen)

### Yayınları

Öztaş Z., Konuralp A., q-Homotopy Analysis Transform Method for Differential Equations having Quadratic Nonlinearities. İzmir Katip Çelebi University, International Students Science Congress, 3-4 Mayıs 2019, İzmir (Bildiriler Kitabı, 389-395).