T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
TERMODİNAMİK BİLİM DALI

CARREAU-YASUDA AKIŞKANININ ISI TRANSFERİ ETKİSİ ALTINDA SINIR TABAKASI DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Kıvanç SAMRA

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY

MANİSA–2019

Kıvanç SAMRA	**CARREAU-YASUDA AKIŞKANININ ISI TRANSFERİ ETKİSİ ALTINDA SINIR TABAKASI DAVRANIŞININ İNCELENMESİ**	**2019**

TEZ ONAYI

Kıvanç SAMRA tarafından hazırlanan " Carreau-Yasuda Akışkanının ısı transferi etkisi altında sınır tabakası davranışının incelenmesi" adlı tez çalışması 28/11/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet ÇEVİK** İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Ali YURDDAŞ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Kıvanç SAMRA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER…….....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ……...	II
ŞEKİLLER DİZİNİ……	III
TEŞEKKÜR……	IV
ÖZET…….....	V
ABSTRACT…….....	VI
1.GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	7
2.1. Referans Çalışmalar	7
2.2. Tezin Amacı	11
2.3. Problemin Tanımı.....	12
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	16
3.1 Momentumun Korunumu	16
3.2 Sınır Tabakası Yaklaşımı	19
3.3 Momentum Denklemlerin Simetrileri ve Adi Diferansiyel Formlar.....	25
3.4.Akışkan İçerisinde Sıcaklık Dağılımı	33
3.5. Sayısal Çözümler.....	39
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	41
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR	57
EK	60
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

GNA	Genelleştirilmiş Newtonyen Akışkan
η_0, η_∞	Akışkan başlangıç ve limit Viskoziteleri
λ	Newtonyen Olmayan Akışkan Zaman Sabiti.
n, m	Akışkana Özgü Malzeme Parametreleri
x^*, y^*	Plaka Üzeri Dikey ve Yatay Koordinat Bileşenleri
$\boldsymbol{\tau}$	Kayma gerilmelerini içeren tensörel büyüklük
$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$	Deformasyon Hızlarını İçeren Tensörel Büyüklük
U^*	Sonsuzdan Gelen Akışkan Hızı
u^*, v^*	x^*ve y^*Doğrultularındaki Akışkan Hızları
T^*	Akışkan Sıcaklığı
T_w^*	Plaka Sıcaklığı
T_∞^*	Sonsuzdan Gelen Akışkan Sıcaklığı
$\dot{q}$	Isı Akısı
L	Plaka Uzunluğu
δ^*	Sınır Tabakası Kalınlığı
ρ	Akışkan Yoğunluğu
P^*	Basınç
V	Referans Hız
De	Deborah Sayısı
Pr	Prandtl Sayısı
Nu	Nusselt Sayısı
Re	Reynolds Sayısı
ξ	Benzerlik değişkeni
$\mathrm{f}(\xi)$	x Yönünde Akışkan Hızına ait Benzerlik fonksiyonu
$\mathrm{g}(\xi)$	y Yönünde Akışkan Hızına ait Benzerlik fonksiyonu
$\mathrm{z}(\xi)$	Akışkan Sıcaklığı ile İlişkili Benzerlik Fonksiyonu
h, k	Isı Taşınım ve iletim Katsayıları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Sınır Tabakası Temsili Gösterim 12
Şekil 3. 1 Termal Sınır Tabakası Temsili Gösterim..... 33
Şekil 4. 1 Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı $Deborah$ sayıları için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi..... 41
Şekil 4. 2 Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı n değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (m=2 , De=10)..... 43
Şekil 4. 3 Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı n değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5 , De=10) 44
Şekil 4. 4 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı Deborah sayıları için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5, m=2,Pr=1)..... 45
Şekil 4. 5 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı n değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (m=2, De=10, Pr=1) 46
Şekil 4. 6 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı m değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5, De=10,Pr=1). 47
Şekil 4. 7 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı Prandtl sayıları için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5, m=2 De=10)..... 48
Şekil 4. 8 Nusselt sayısının farklı n değerleri için Deborah sayısına göre değişimi (m=2,Re=10)..... 49
Şekil 4. 9 Nusselt sayısının farklı m değerleri için Prandtl sayısına göre değişimi (n=0.5, De=10,Re=10) 50
Şekil 4. 10 Plaka üzerindeki boyutsuz kayma gerilmesinin farklı n değerleri için Deborah sayısına göre değişimi (m=2, Pr=1,Re=10)..... 51
Şekil 4. 11 Plaka üzerindeki boyutsuz kayma gerilmesinin farklı m değerleri için Deborah sayısına göre değişimi (n=0.5, Pr=1,Re=10)..... 52

TEŞEKKÜR

Öncelikle Lisansüstü eğitimimin her aşamasında ilmi ve manevi desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY'a, yoğun meslek hayatımın yanı sıra bu tez çalışması boyunca da her zaman yanımda olan sevgili eşim Malike SAMRA'ya destekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Kıvanç SAMRA
Manisa, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Carreau-Yasuda Akışkanının Isı Transferi Etkisi Altında Sınır Tabakası Davranışının İncelenmesi

Kıvanç SAMRA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY

Bu çalışmada genelleştirilmiş bir Newtonyen akışkan modeli olan Carreau-Yasuda formülü bir plaka üzerinde gerçekleşen akışa uyarlanmıştır. Sonsuzdan uniform hız ve sabit sıcaklıkta gelen akışkan plaka üzerine temas ettikten sonra sürtünmeli akış dolayısıyla iki boyutlu hız ve sıcaklık profiline sahip olmaktadır. Bu profillerinn davranışını matematiksel olarak bulabilmek için akışa ait momentum, süreklilik ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Tüm denklemler matematiksel olarak kapsamlı, kısmi ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemdir. Bu denklemleri basitleştirmek için problemin fiziği ile uyumlu sınır tabakası yaklaşımı geliştirilmiştir. Sınır tabakası yaklaşımı ile akış bölgesi oldukça daraltılmış ve denklemlerdeki önemli terimler ön plana çıkarılıp bazı terimler ihmal edilmiştir. Bu sayede genellikten kayıp olmaksızın denklemler üzerindeki çözüm için gereken iş yükü azaltılmıştır. Basitleştirmeye rağmen eldeki denklemler kısmi diferansiyel olduğu için adi forma indirgemek için denklemlerin simetrileri hesaplanmıştır. Son olarak indirgenmiş adi diferansiyel denklem sisteminin sayısal çözümleri yapılmış. Bu analizden elde edilen verilerden çizilen grafikler ile akışkan parametrelerinin sınır tabakası içerisindeki akışa etkisi incelenmiştir. Sonuç olarak viskozite ile ilgili özelliklerimiz akışı yavaşlatırken sınır tabakasını kalınlaştırdığı, power-law yasasına ilişkin özelliklerin de tam tersi etkilere yol açtığı bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler:(Newtonyen olmayan akışkan, genelleştirilmiş Newtonyen akışkan, momentum sınır tabaka, termal sınır tabaka, benzerlik dönüşümleri, sayısal çözümler)

2019, 61 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Boundary Layer Analysis of Carreau-Yasuda Fluid with Heat Transfer

Kıvanç SAMRA

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Assist. Prof. Yiğit AKSOY

In this study, Carreau-Yasuda formula, a generalized Newtonian fluid model, is adapted to the flow on a plate. After infinite uniform velocity and constant temperature, the fluid comes into contact with the plate and therefore has a two-dimensional velocity and temperature profile due to frictional flow. In order to find the behavior of these profiles mathematically, momentum, continuity and energy equations of the flow have been obtained. All equations are mathematically comprehensive, partial and nonlinear differential equations. In order to simplify these equations, a boundary layer approach compatible with the physics of the problem has been developed. With the boundary layer approach, the flow region was narrowed and important terms in the equations were brought to the fore and some terms were neglected. Thus, the workload required for the solution of the equations without loss of generality is reduced. In spite of the simplification, since the available equations are partial differentials, the symmetries of the equations were calculated to reduce them to ordinary form. Finally, numerical solutions of the system of reduced ordinary differential equations are made. The graphs drawn from the data obtained from this analysis examined the effect of fluid parameters on the flow in the boundary layer. As a result, it has been found that our viscosity properties thicken the boundary layer while slowing down the flow, and the properties of power-law law have the opposite effects.

Keywords:(non-Newtonian fluid, generalized Newtonian fluid, momentum and thermal boundary layer, similarity transformations, numerical solutions)

2019, 61 pages

1.GİRİŞ

Hareket halindeki bir rijit cisimde üzerinde bir noktanın hızı bilindiğinde dinamik kuralları gereği üzerindeki tüm noktaların hızını hesaplayabiliriz. Cismin rijit olması cismin üzerindeki noktaların birbirine göre konumlarını hiçbir zaman değiştirmeyeceğinden birbirlerine göre değişen hızları olmayacaktır. Bu sayede geometrik kısıtlar ve belli bir noktadaki hız, cismin hızını ve konumunu takip etmemize olanak sağlayacaktır. Akışkanlarda ise böyle bir durum söz konusu değildir. Akışkan parçacıklarının birbirlerine göre sürekli olarak konumları farklı hızlar ile değişmektedir. Bu yüzden akışkan hızı zamandan ayrı olarak da mekâna göre de değişmektedir. Bu fark her akışkan parçacığının farklı momentumlara sahip olacağını söyleyebilir ve toplam akışkan kütlesine Newton' un ikinci yasasını uygulamayı zorlaştırır.

Diğer bir akışkan maddenin ayırt edilebilir özelliği ise şöyle tanımlanabilir; akışkan, katı bir cismin aksine üzerine uygulanan bir kuvvet altında, kuvvet ortadan kalksa dahi, sürekli olarak deforme olur [1]. Katı cisimlerde ise kuvvet etkisi altında deformasyon oluşsa bile kuvvet ortadan kalktığında nihai bir şekle ulaşılır. Rijit cisimler katı cisim olmakla birlikte her katı cisim rijit cisim değildir. Katı cisimlerde deformasyondan bahsedilebilirken rijit cisimlerin şeklini her türlü etki altında koruyabildiği kabul edilir. Akışkanlarda ise deformasyona neden olan etkenler ortadan kalksa dahi şeklen bir denge durumu söz konusu değildir. Bu yüzden akışkanlara üzerinde kayma gerilmesi taşıyamayan maddeler de denir. Her akma davranışı gösteren maddeler akışkan olarak tanımlanmayabilir. Bunun nedeni etkiler ortadan kalktığında şekil itibari ile bir denge halinin yakalanacak olması olarak söylenir. Katı cisimlerde bu gözlemler uygulanan kuvvete bağlı olarak elastik ve plastik deformasyon olarak ayrı ayrı incelenir. Dolayısıyla katılarda bir akma davranışı gözlemlense bile bunun kuvvet etkisi altında olduğu söylenir. Akışkan maddelerde ise böyle bir sürekli bir etkiye gerek yoktur. Kuvvetin büyüklüğü ne olursa olsun akışkan bu kuvveti üzerinde kayma gerilmesi olarak sürekli iletmeye çalışarak deforme olacaktır.

Akışkan deformasyonu katı cisimlerden farklı olarak sürekli gerçekleştiğinden bu sürekli deforme olan hal bir denge durumu olarak düşünülür ve deformasyon miktarı yerine deformasyon hızıyla ilgilenilir. Söz konusu deformasyon hızı ve kayma gerilmesi arasındaki ilişki Newton tarafından doğrusal ilişki kabulü ile aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [2].

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{1.1}$$

Burada $\boldsymbol{\tau}$ tüm yönlerdeki akışkan parçacığı üzerindeki kayma gerilmelerini içeren koordinat sisteminden bağımsız bir tensörel büyüklüktür. $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ aynı şekilde her yöndeki birim uzama (deformasyon) hızlarını içeren deformasyon hız tensörüdür. Dikkat edilirse kayma gerilmeleri ve deformasyon hızları arasındaki ilişki doğrusal olarak μ sabiti ile tanımlanmıştır. μ akışkan türüne özgü olmakla birlikte, viskozite olarak bilinir. Viskozite kısaca akışkanın akmaya gösterdiği direnç olarak belirtilebilir. Denklem (1.1) ile verilen ilişkiye uyan akışkanlara Newtonyen akışkan denir. Newtonyen akışkanlarda viskozite sabit ve kayma gerilmesi deformasyon hızı ilişkisi doğrusaldır. Su başta olmak üzere çoğu sıvı ve gazlar Newtonyen akışkan olarak kabul edilse de bu kurala uymayan birçok akışkan gözlemlenebilir. Uymayan tabiri ile üzerinde durulmak istenen kayma gerilmesi ve deformasyon hızı arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığıdır. Bu durumda ilk olarak sabit viskozite yerine deformasyon hızı ile değişen bir viskozite modeli önerilmesi gerektiği söylenmiştir. Bu tanım Newtonyen akışkan modelinden sapma gösterse de bu kural ile davranışı tahmin edilebilen akışkanlara "Genelleştirilmiş Newtonyen Akışkan" ya da kısaca GNA denir [3]. Akışkan cinsinden bağımsız GNA kayma gerilmesi deformasyon hızı ilişkisi aşağıdaki ifade ile verilir.

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|)\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{1.2}$$

Burada $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$, skaler bir büyüklük olup $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ tensörünün şiddetidir. $\mu(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|)$ için görünür viskozite ya da viskozite fonksiyonu denir. Yapılan deneyler sonucu viskozitenin deformasyon hızına göre ayırt edici değişimleri araştırmacılar tarafından çok farklı $\mu(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|)$ formülleri ile tanımlanmıştır. En çok bilinen GNA formülleri başında aşağıdaki Ostwald-de Waele ya da daha çok kullanılan adıyla power-law akışan modeli [4] gelir.

$$\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \eta|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^{n-1} \tag{1.3}$$

Burada η akışkan sabiti ve n power-law indeksini temsil eder. Yukarıdaki ifade $n = 1$ durumu için Newtonyen akışkan modelini sağlamaktadır. Newtonyen tanımının dışına çıkan akışkanların çoğunda görünür viskozitenin artan deformasyon hızları ile azaldığı veya tam tersi şekilde arttığı söylenebilir. Endüstriyel boyalar ve bazı organik sıvıların artan deformasyon hızlarında daha akıcı duruma geçtikleri gözlemlenir. Bu davranış $n < 1$ power-law akışkan modeli ile tahmin edilebilirken bu tarz akışkanlara incelen (shear thinning) akışkan denir. Mısır nişastası su karışımı gibi bazı süspansiyonlarda artan deformasyon hızları ile akışkan hamur haline geçip sertleşir ve neredeyse katı madde gibi davranmaya başlar bu tarz akışkanlara kabaran (shear thickening) akışkan denir ve power-law modelinde $n > 1$ ile temsil edilir. Denklem (1.3)' de bulunmayan limit viskoziteler sırasıyla sıfıra yakın deformasyon hızlarında $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \approx 0$ başlangıç viskozitesi μ_0, çok yüksek deformasyon hızlarında ise limit viskozitedir μ_∞. Bu yüzden Ostwald-de Waele ya da power-law formülü viskozitenin limit değerlerinde doğru sonuçlar vermemesi ile bilinmektedir. İncelen bir akışkanın $n < 1$ görünür viskozitesi dikkate alındığında deformasyon hızının paydada olacağı görülür. Paydadaki deformasyon hızı $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \approx 0$ iken görünür viskozitenin başlangıç değerinde sonsuz $\mu_0 \to \infty$, limit değerinde ise sıfır $\mu_\infty \to 0$ olduğu görülür. Ancak gerçekte bir akışkanın viskozitesi ne sonsuz ne de sıfır olabilir. Bu sebeple power-law modelinin bu eksikliğini gideren GNA modelleri geliştirilmiştir. Cross akışkan modeli [5] incelen bir GNA için görünür geniş deformasyon hızı aralığında viskoziteyi aşağıdaki formül vasıtası ile tahmin eder.

$$\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \eta|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^m} \tag{1.4}$$

Dikkat edilirse yukarıdaki ifade ile görünür viskozite eğrisinin değiştiği üç bölge sırasıyla giriş viskozite, power-law ve limit viskozite bölgesi bulunur. Buradaki η malzemeye özgü zaman sabitidir, power-law bölgesinin yapısına karar verir. Çoğu incelen GNA için limit viskozite başlangıç viskozitesine göre oldukça küçük kalmaktadır, $\mu_0 \gg \mu_\infty$. Ayrıca ele alınan problemlerde yüksek deformasyon hızlarında

gerçekleşir, $|\dot{\gamma}| \gg 1$. Bu durumda Cross akışkan modelinin karmaşık yapısından dolayı basitleştirilmiş hali olan Sisko akışkan modeli [6] aşağıdaki şekilde önerilmiştir.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + \frac{\mu_0}{\eta|\dot{\gamma}|^m} \tag{1.5}$$

Çok düşük deformasyon hızları hariç Sisko eşitliği basitlik açısından Cross modeline göre tercih edilmektedir. GNA akışkanların ampirik formülleri moleküler ağlar veya gazların kinetiği gibi teorik kuramlar ile doğrulanmış ve daha gelişmiş formüller türetilmiştir. Bunların başında sürekli ortam mekaniğine dahil olan molekülerin birbiri ile bağlantısını modelleyen moleküler ağ teorisi ile aşağıdaki Carreau akışkan modeli [7] geliştirilmiştir.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + \eta\,|\dot{\gamma}|^2)^{\frac{n-1}{2}} \tag{1.6}$$

Carreau akışkan modeli Cross ve Sisko akışkan modelinden farklı olarak kabaran akışkanlar için geçerli olsa da düşük hız deformasyon hızları bölgesinden power-law davranışa geçiş davranışı bu tip akışkanlar için aşağıdaki Yasuda-Carreau akışkan modeli [8] önerilmiştir.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + \eta\,|\dot{\gamma}|^m)^{\frac{n-1}{m}} \tag{1.7}$$

Carreau modeli 4 parametreye sahipken, Yasuda-Carreau akışkan modeli 5 parametreye sahiptir. Bu parametre sayılarındaki artış sağlatılabilecek akışkan cinsini arttırırken analitik hesaplamaları zorlaştırmaktadır. Yine de Cross ve Sisko akışkan arasındaki ilişkide olduğu gibi, yüksek deformasyon hızlarında limit viskozitenin tayini zor olduğundan her iki Carreau akışkan modelinde de $\mu_\infty \approx 0$ kabul etmek analitik hesaplamaları kolaylaştıracaktır. Gazların kinetik teorisi kullanılarak hiperbolik fonksiyonlara sahip GNA modelleri geliştirilmiştir. Bunlardan en başta gelen ve en önemlisi aşağıda verilen Powell-Eyring akışkanıdır [9].

$$\mu(\dot{\gamma}) = \bar{\mu} + \frac{1}{\beta|\dot{\gamma}|}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{c_1}|\dot{\gamma}|\right) \tag{1.8}$$

Burada $\bar{\mu}, \beta$ ve c_1 akışkan parametreleridir. Özellikle hava Newtonyen akışkan olarak kabul edilse de özellikle ses üstü akışlarda Newtonyen davranışın dışına çıkmakta ve Powell-Eyring formülü ile temsil edilmesi daha uygun görülmektedir [10].

Buraya kadar Newtonyen akışkanın sabit viskozitesin aslında bazı özel durumlar için sabit olmaması gerektiğinin üzerinde durduk. Ancak söz konusu ve vurgulanmak istenen "akma" eylemi ise doğadaki tüm maddeler bir şekilde, ender karşılaşılan şartlar (çok yüksek basınç, sıcaklık, çok uzun zaman aralığı) altında akmaktadır. Bu yüzden çok çeşitli akma mekanizmaları işin içine dahil edildiği zaman akışkan tanımındaki deformasyon hızı ile ilişkili tanımlanmış viskozite tek başına yeterli olmamaktadır. Örneğin yoğurt katı halde iken sabit devirli bir mikser ile karıştırıldığında git gide daha akıcı hale gelecektir. Bu özelliğe sahip akışkanlara tiksotropik akışkan [11] denir. Bu tip akışkanlar GNA altında bahsi geçen incelen akışkanlar ile karıştırılır. GNA çatısı altındaki incelen akışkanlar artan deformasyon hızı ile daha akıcı hale gelirken, tiksotropik akışkan sabit deformasyon hızlarında da zamanla daha ince (akıcı) hale gelecektir. Bazı durumlarda ise deformasyona neden olan etkiler ortadan kalktığında akışkan ilk haline geri döner. Bu davranışa materyal hafızası demekle birlikte bu özelliğe sahip olan maddeler viskoelastik akışkan [12] denir. Mısır nişastası ve su karışımından oluşan hamurdan daha önce kabaran akışkan olarak bahsetmiştik. Oluşan hamuru karıştırmayı bıraktığımız zaman hızlıca tekrar sıvılaştığını veya hamur halinde karıştırmaya devam ettiğimiz zaman karıştırıcının bıçaklarından yukarı doğru tırmandığını gözlemleriz. Bu iki davranış GNA kabaran akışkan kabulü ile açıklanamaz. Sabit devir ile karıştırırken akışkanın akıcılığını kaybetmesi tiksotropik akışkan olduğunu gösterse de karıştırıcının bıçaklarına tırmanması tamamen kayma gerilmeleri üzerine inşa edilmiş akışkanlar mekaniğine uymamaktadır [13]. Akışkanın yukarı yönlü hareketini akış düzlemine dik normal kuvvetler gerçekleştirmektedir. Akış sırasında düzlemlere dik kuvvetler elastik polimerik zincirli yüksek moleküler ağırlığa sahip akışkanlarda ve kimyasal süspansiyonlarda görülür. Bu davranışlara sahip akışkanların davranışını tahmin edebileceğimiz matematiksel modeller ileri seviye sürekli ortam mekaniği analizlerine ihtiyaç duyabilir. Ancak bu tarz elastik davranışlar tamamen kayma gerilmelerinin etkin olduğu paralel plakalar arasında gözlemlenmeyebilir. Hatta akışkan viskoelastik olup sabit Newtonyen viskoziteye de sahipse bu tarz bir akış geometrisi için söz

konusu aykırı davranışa sahip akışkanımızın Newtonyen akışkana dönüşecektir [14]. Buradan karmaşık bir akışkan modelinin içerdiği farklılıkların ele alınan problem için ortaya çıkıp çıkmayacağı önceden bilinmesi gerektiği ortaya çıkar. Bu sayede ele alınan akış geometrisinin ve akışkan modelinin analizden önce ele alınıp gerekli değilse daha basit bir akışkan modeline geçilebilir. Bu sayede işlem yükü ve hesaplama gücünden ciddi anlamda tasarruf olacak, gereksiz işlemlerden kaçınılacaktır. Bu konuda bir örnek daha vermek gerekirse incelen davranışa sahip viskoelastik bir akışkan ele alınabilir. Kayma gerilmelerinin etkin olduğu ve normal yönde akışın engellendiği bir problemde akışkan modelini viskoelastik kabul etmek yerine GNA modeli seçilmelidir [15]. Newtonyen olmayan akışkanları GNA ve diğer tiptekiler olarak ikiye ayırdığımız da bile aslında çoğu özellikler iç içe geçmiş durumdadır. Hatta "diğerleri" dediğimiz daha karmaşık etkilere dahil olan grup bazı özel şartlar altında Newtonyen davranış gösterir. Hatta bazı araştırmacılar katıları dahi doğrusal olmayan plastisite bilimi altında bu çatı altına sokabilir. Burada akışkanlar mekaniği ve reoloji [16] yani akış bilimini birbirinden ayırabiliriz. Akışkanlar mekaniği Newtonyen veya genelleştirilmiş teorisi altında kurulduğu için maddenin akma davranışını inceleme konusuna kadar sınırlarını oluşturmuştur. Bu yüzden günümüzde güncel akışkan modelleri ve bunları ortaya atarken kullandığımız sürekli ortamlar mekaniği kuralları artık büyük ölçüde reoloji biliminin konusudur. Bu yüzden bu çalışma için akışkanlar mekaniği ve daha büyük ölçekte reoloji bilim dalını ilgilendirir diyebiliriz.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Referans Çalışmalar

Bu çalışma kapsamında bir önceki bölümde bahsi geçen bir GNA' nın özel bir akış durumu incelenecektir. Öncelikle ele aldığımız akışkan modelinin referans alındığı çalışmalara değinilecek. Daha sonra ise akış geometrimizi kullanan diğer akışkan modelleriyle ilgili çalışmalardan bahsedilecektir. Referans aldığımız çalışmalarımızın çoğunluğu kendi çalışmamızda olduğu gibi teorik çalışmalardır ve GNA akışkan modellerinin önerildiği ilk çalışmalara mümkün olduğu kadar referans gösterilmeye çalışılmıştır. Daha önce bahsedildiği gibi henüz tüm akışkanları temsil edecek bir matematiksel model olmadığından akışkan davranışlarına özgü basitten genele oldukça fazla sayıda akışkan modeli bulunmaktadır. Özellikle önde gelen GNA modellerin birçoğunun deneysel olarak viskometrik akışlarda akışkan özelliklerini sağladığı bilinmektedir. Bu amaçla yapılan çalışmalarda akışkan modelinin gerçek akış koşullarını ne kadar doğrulukla sağladığı gösterilmiştir. Özetle Newtonyen olmayan akışkanlar ile ilgili çalışmalar öncelikle yeni bir akışkan modeli ve deneysel sonuçlarla uyumu ile ilgilidir ardından ise doğruluğu ve uygulanabilirliğinden emin olunan bu modeller farklı akış koşulları ile teorik veya deneysel çalışmalarda kullanılır.

Bird tarafından [17]' de Newtonyen olmayan akışkanlar üzerine modellerin tanıtıldığı derleme bir çalışma sunulmuştur. Bu çalışmada Newtonyen olmayan özelliklere değinilmiş ve bunlara uygun matematiksel modeller üzerinde durulmuştur. Ayrıca sistematik bir şekilde o tarihe kadar ortaya atılmış akışkan modellerini reoloji bilimi çerçevesinde sınıflandırmış ve bir model diyagramında aralarındaki ilişkiyi ağaç dalları şeklinde göstermiştir. Bu diyagramda başlangıçlar en genel modellerden başlarken özelliğin olmadığı durumlar için dallar oluşmaktadır. Bu sayede en gelişmiş ve genel modellerin basit modeller ile bağlantısı sağlanmış ve tüm modellerin Newtonyen akışkan ile bağlantılı olması gerektiği gösterilmiştir. Meter ve Bird Newtonyen olmayan polimer solüsyonların boru içerisindeki türbülanslı akışı için sürtünme katsayısı tayini [18] yapılmıştır. Bir GNA modeli seçilmiş ve viskometrik bir akış düzeneğinden elde edilen deneysel sonuçları akışkana özgü olarak eğri uydurma teknikleri ile modele sağlatılmıştır. GNA akışkan modelleri genellikle deneysel gözlemlere göre çıkarılmıştır. Deneysel sonuçlardan elde edilen kayma

gerilmesi deformasyon hızı grafiklerine araştırmacıların önerdiği matematiksel formlar en az hata ile sağlatılarak GNA modelleri sunulmuştur. Bu tarz bir çalışma Al-Zahrani [19] tarafından incelen bir GNA olarak kabul edilen sondaj sıvıları için yapılmıştır. Geometrik olarak türettilen GNA modeli hiperbolik ve eliptik formlar için iki kısma ayrılmış ve deneysel çalışmalar ile uyumlu olduğu gösterilmiştir. Deneysel çalışmalar genellikle özel tasarlanmış düzenekler ve viskometrik akışlar üzerinden yürütülmüştür. Plastik enjeksiyon sürecindeki gibi nispeten daha karmaşık geometriler için ise sayısal çalışmalar yapılabilmektedir. Hem geometrinin hem de akışkanın karmaşık olduğu durumlarda mühendisler Ansys ve Comsol gibi sayısal analiz tabanlı ticari yazılımlar sayesinde hızlı bir şekilde öngörülerde bulunabilirler. Polimer akışlarını öngörebilmek için tasarlanmış Moldflow yazılımı bu tarz bir akış probleminde Koszkul ve Nabialek [20] tarafından belli başlı GNA modelleri kullanılarak sınanmıştır. Bu çalışmada ayrıca eriyik polimerlerin akışı gerçekleştiğinden GNA modellerindeki parametrelerin sıcaklığa göre değişimleri hesaba katılmış ve görünür viskozitenin sıcaklıkla azalması istenmiştir. Reçine ve solvent bazlı polimerik akışkanların deneysel sonuçlarını Raju ve ark. [21] tarafından Carreau, Ellis ve Cross akışkan modellerine sağlatılıp hangi modelin daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Akışkan çeşitliliğinin farklı solventler ile sağlandığı viskometrik akışlar yüksek deformasyon hızlarında da gerçekleştirilmiş olup Carreau ve Ellis akışkan modelinin Cross formülüne göre daha geniş deformasyon hızı aralıklarında geçerli olduğu belirtilmiştir. Silikon dioksit ve solvent olarak polipropilen glikol süspansiyonları Newtonyen olmayan davranış göstermekle birlikte aynı anda hem incelen hem de kabaran akışkan özelliklerine sahiptir. Bu akışkanlar düşük deformasyon hızlarında Newtonyen davranış gösterirken artan deformasyon hızları ile önce incelen daha sonra ise kabaran sonra tekrardan incelen davranış gösterirler. Bu sayede GNA modellerinin sahip olduğu üç bölge (başlangıç viskozite, power-law bölgesi ve limit viskozite)' den fazla viskozite bölgesine sahip olurlar. Galindo-Rosales ve ark. [22] tarafından bu bölgelere parçalı fonksiyon tipindeki görünür viskozite fonksiyonları önerilmiştir. Önerilen fonksiyonlar Cross akışkan modeline oldukça benzer olup tüm bölgeler viskozite eğrisinin sürekliliği bozulmadan en az hata ile sağlatılmıştır. Petrol kuyularının sondaj işlemlerinde çeşitli amaçlar için kullanılan sıvılar genelde Newtonyen olmayan akışkan olarak kabul edilir. Khalil ve ark. bu akışkanlardan biri olan sondaj sonrası kuyulara basılan tamamlama sıvılarının davranışlarının Sisko modeli ile başarı ile tahmin edilebileceğini [23]' de deneysel

sonuçlar ile karşılaştırarak göstermişlerdir. Deneysel viskometrik akışlar basitleştirici kabulleri dolayısıyla teorik hesapların doğruluğu için çalışmalarda oldukça fazla tercih edilir. Buna rağmen silindirik olmayan iki boyutlu kanallarda hiperbolik tipte bir GNA modeli Mitsuishi ve Aoyagi [24] tarafından Newtonyen olmayan davranışa sahip karboksimetil selülozun sulu solüsyonun akışının analitik basınç düşüşü ve debi formüllerinin bulunmasında kullanılmış ve sonuçlar deneysel verilerle karşılaştırılmıştır. Yine aynı akışkanın görünür viskozitesinin tayini için Kazunori [25] tarafından Carreau akışkan modelinin değişken eleman sayılı çok noktalı özel bir hali kullanılmıştır. Klasik Carreau akışkan modeli karboksimetil selüloz konsantrasyonu arttıkça başlangıç ve limit bölgeler hariç, viskozite deformasyon eğrisinin power-law kısmında başarısız sonuçlar verirken bu çalışmada önerilen oldukça fazla sayıda parametreye sahip viskozite fonksiyonunun seri çarpım halinde verilen deformasyon hızı ilişkisinin eleman sayısı artarken çok daha iyi sonuçlar alındığı belirtilmiştir. Cross akışkan modeli de benzer olarak oldukça fazla sayıda daha karmaşık ve gelişmiş GNA modellerine temel oluşturmuştur. Ancak yapısı gereği Carreau akışkanının aksine Cross akışkan kabaran akışkan davranışlarını tahmin edememektedir. Bunun nedeninin Cross formülasyonunun akışkan parçacıklarının Brownian hareketini göz önüne alarak türetildiğini söyleyen Galindo ve ark. [26] tarafından yine Cross temelli ancak kabaran akışkanları da kapsayan bir akışkan modeli önerilmiştir. Aslında daha önceki çalışmasındaki [22] temel alan bu çalışmada benzer viskozite formülasyonları Cross akışkan modelinin ilk çıkış noktası ele alınarak tekrardan düzenlenmiştir.

Buraya kadar belli başlı GNA modelleri ve neden tercih edilmeleri konusunda cevap olacak nitelikteki deneysel çalışmalarla ilişki makalelere yer verilmiştir. Bu şekilde üzerinde çalışılmış GNA modellerinin doğrulu ve uygulanabilirliği tartışılmıştır denilebilir ve daha geniş kapsamlı teorik analizlerde kullanılabilir hatta ticari yazılımlara uyarlanabilir. Bu sayede daha karmaşık deney düzeneklerine dolayısıyla yüksek maddi kaynaklara ihtiyaç duymak yerine teorik ve sayısal çalışmalara güvenilebilir. Bu tarz çalışmalardan birinde Matsuhisa ve Bird [27] tarafından Ellis modelinin kanal ve boru içi gibi temel akış geometrilerinde termal ve isotermal durumlar için verdiği analitik sonuçlar hesaplanmıştır. Power-law akışkanının eksiklerini gidermek için kullanılan bu GNA modelinin analitik sonuçlarının kendinden önce gelen çalışmalar ile uyumlu olduğu gösterilmiştir. Temel geometriler için yine benzer bir çalışma viskoplastik akışkanlar için tercih edilen Phan-

Thien-Tanner akışkan modeli kullanılarak Pinho ve Oliveira [28] tarafından gerçekleştirilmiştir. Isı transferi etkilerinin dahil edildiği bu çalışmada akışkan hareketinin ısı transferine olan etkisi analitik Nusselt sayısının elde edilmesi ile tarif edilmiştir. Viskoplastik akışkanların incelen ve kabaran davranışının da dahil edildiği Robertson-Stiff modeli Filip ve David [29] Newtonyen olmayan bir akışkanın boru içerisindeki hidrodinamik kararlı, laminer ve isotermal akışında kullanılmıştır. Damarlardaki kan akışının matematiksel olarak tasviri ile damarlardaki kolesterol kaynaklı tıkanıklıklar ve buna bağlı tansiyon etkisi üzerinde daha derin bakış açısı elde edilmiştir. Matematiksel modeller ne kadar gerçeğe yakın kurulmuşsa sonuçlar o kadar çok araştırmacının işine yarayabilir. Örneğin, kan akışkan olarak Newtonyen olmayan özelliklere sahiptir, damar içi pürüzsüz dümdüz kılcal bir boru yerine elastik içinde düzensiz dağılmış kolesterol parçalarına hatta kısmen de bu parçaların tıkadığı kesit alanlarına sahiptir. Bunun gibi kanın damar içindeki akışını bir boru içerisindeki su akışından ayırabilecek oldukça fazla sayıda fark sayabiliriz. Bu konuda çalışan araştırmacılar bu özelliklerin bir kısmını dahil ettikleri matematiksel modeller ile uğraşmışlardır. Bu çalışmalardan birinde Dash ve ark. [30] kanın davranışının Casson akışkan modeline uygun olduğuna karar vermiş ve damarı ise içinde Darcy modelinin geçerli olduğu bir gözenekli ortama sahip olduğunu kabul etmişlerdir. Bu çalışmada damar tıkanıklığının etkisini incelemek istediklerinden gözenekli ortamın geçirgenliğini damar çapı boyunca değişken almışlardır. Araştırmacılar bu çalışma vasıtası ile ortam geçirgenliği azaldığı zaman damarların çeperlerinde oluşacak akışkan sürtünmesi kaynaklı kayma geriliminin artacağını ve sonuçlarının koroner-kalp damar hastalıklarının tedavisinde kullanılabilir olduğunu rapor etmişlerdir. Bu sefer başka bir çalışmada hem damarların eğrisel oluşu ve kalbi bir pompa gibi düşünürsek kan basıncın sinusoidal olması Boyd ve Buick [31] tarafından analizlere dahil edilmiştir. Kan akışını modelleyen Newtonyen olmayan akışkan modeli olarak Casson akışkanına ilave olarak Carreau-Yasuda akışkanı da seçilmiştir. Kanın incelen bir akışkan olmasını söyleyen bu çalışmada akışkanlar mekaniğinde kullanılan Eulerian yaklaşımını temel alarak kurulan momentumun korunumu ilkesi, Lagrangian prensiplere göre yazılmış ve Lattice-Boltzmann denklemleri elde edilmiştir. Sayısal olan ve Lattice-Boltzmann denklemleri gereği hayli bir hesaplama gücüne ihtiyaç duyulan analizler Casson akışkan modelinin Newtonyen davranıştan daha uzak sonuçlar verdiğini ve damarların iç yüzeyinde oluşan gerilimin bu doğrultuda artacağını söyler. Kan akışı ile ilgili [31] referanslı çalışma [30]' e göre biraz daha

gerçeğe yakın davranışları çalışmaya dahil etse de gözenekli ortam etkileri ihmal edilmiştir. Benzer şekilde Hakeem ve ark. [32] çalışmasında ele alınan damar elastikliğini bir şekilde benzetebileceğimiz perisaltik hareket ile ilişkilendirebiliriz. Söz konusu çalışmada basınç gradyenine ilave olarak Carreau akışkanı boru yüzeyinin perisaltik hareketi ile deforme edilmiş ve akış gerçekleştirilmiştir.

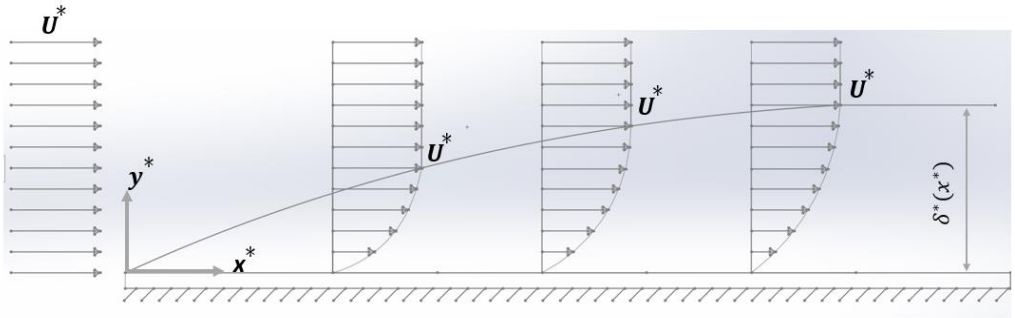
2.2. Tezin Amacı

Aerodinamik ve hidrodinamik gibi hareket halindeki akışkan ve katı cisimlerin birbirlerine etkilerini ele alan akışkanlar mekaniğinin özelleştirilmiş alt konularında genellikle hava ve su esas olarak Newtonyen akışkanlar üzerinde durulmuştur. Bu bilim dallarında genellikle hareketli akışkanın katı cisim üzerindeki şekil değiştirme ya da yer değiştirme etkileri ile ilgilenildiği gibi hareketli katı yüzeylerin akışkanı nasıl ve ne şekilde hareket ettirdiği üzerinde de durulur. Bütün bu etkiler büyük oranda akışkan sürtünmesi kaynaklıdır. Akışkan sürtünmesinin dahil edilmeği sürtünmesiz akışkan varsayımı ile oluşturulan potansiyel teoriler mevcut ise de viskoz akışkan teorisi gerçeğe daha yakın sonuçlar verecektir. Bu yüzden viskozite bu kadar önemli iken Newtonyen olmayan akışkan davranışında bahsettiğimiz tüm özellikler esasen viskozitenin daha genel bir tanımı ile ilişkilidir. Daha genel bir durumdan kasıt viskozitenin sabit durumda olduğu değil ne gibi etkilere göre değiştiğinin de hesaba katılmasıdır. Söz konusu problemleri tanımlayan denklemler Newtonyen akışkan için bile oldukça uğraştırıcıdır. Newtonyen olmayan etkiler dahil edildiğinde çok daha karmaşık durumlar ortaya çıkmaktadır. Özellikle Carreau-Yasuda akışkanı gibi oldukça fazla sayıda parametreye bağlı akışkan modelleri ise araştırmacılar için bu zorlukları daha ileri seviyeye taşımaktadır. Bu yüzden Newtonyen akışkan için oldukça detaylı çalışılmış katı yüzeyler üzerindeki akış problemleri Newtonyen akışkan modellerinin çoğu için henüz çok yenidir.

Eğer söz konusu görünen viskozitenin deformasyon hızı değişimi ise bu özelliğe sahip bir akışkan davranışı genelleştirilmiş bir viskozite modeli ile ele alınmalıdır. Detayı bir sonraki kısımda verilecek bu tez kapsamında ele alınacak GNA probleminde Newtonyen davranıştan farklı gözlemler oluşmalıdır. Bu farkları teorik olarak ortaya koymak ve uygulama da bunlardan ne gibi fayda veya dezavantaj elde edilebileceği tartışılmalıdır. Teorik çalışmanın verdiği esneklik ile bazı parametrelerin özel halleri için istenen veya istenmeyen durumlar ortaya çıkarılabilir. Bu yüzden

deneysel çalışmalardan kesin yargılar çıkarılamazken teorik çalışmalar bize her türlü durumu özetleyebilir ve bazı gerçekleri ispatlayabilir.

2.3. Problemin Tanımı



Şekil 2. 1 Sınır Tabakası Temsili Gösterim

"Şekil (2.1)' de problemimizin fiziksel gösterimi verilmiştir. Buna göre düz bir plaka üzerine U hızı ile sonsuzdan gelen düzgün dağılımlı (uniform) Newtonyen olmayan akışkan plakaya temas etmekte ve kaymama şartı gereği plakaya yapışıp hızı sıfırlanmaktadır. Hareket halindeki akışkan üst üste plakalar halinde hareket edeceğinden plakaya yapışan akışkan kendinden sonraki plakayı bir miktar yavaşlatacak, dolayısıyla y koordinatında yukarı doğru hareket ettikçe plakaların hızı artacaktır. Bu artış y koordinatında hız U hızını bulduğunda sonlanacaktır. Plaka üzerindeki akışkanın hızının tekrar U yakaladığı nokta δ* olsun. Yapılan gözlemler ve deneyler sonucu plaka üzerinde x* koordinatında ilerledikçe bu δ* uzaklığında artış gözlemlenmektedir. Bu δ* noktalarını birleştirdiğimizde bir δ*=δ* (x*) eğrisi oluşmaktadır. δ* ifadesine sınır tabakası kalınlığı denir ve x* koordinatına göre değişmektedir. Şekil (2.5)' den de dikkat edilirse δ* eğrisi ve plaka arasında kalan bölge arasında kalan bölgede akışkanın hızı değişmektedir ve bu bölgeye sınır tabaka bölgesi denir. Bu durum bize matematiksel olarak sadece değişimin olduğu bölgeyi dikkate almamızı değişiminin olmadığı bölgeyi ise bir şekilde göz ardı edebileceğimiz fikrini verebilir. Rüzgâr tünellerinde akım çizgisi görüntüleme teknikleri ile bu δ* kalınlığının çok küçük bir yüksekliğe sahip olduğu gözlemlenmiştir, kısaca δ*≪1. Hareketli akışkan kütlesinden adeta bir parça katı yüzeye yapışmakta ve çok küçük bir mesafede de diğer parçaları etkilemektedir. Bu kalınlığın dışında ise akışkan davranışının uniform akıştan bir farkı kalmamaktadır.",* Sümer [33].

Viskometrik akışların paralel plakalar arasındaki akış varsayımında olduğu gibi, akışkanlar mekaniğinin çoğu probleminde geometrik olarak daha basit akış durumlarına bazı kabuller ile indirgenebilir. Benzer şekilde Şekil 2.1' de verilen plaka üzerindeki akış problemi daha karmaşık bir yüzeyi yaklaşık olarak temsil edebilir. Dolayısıyla problem geometrimiz ne kadar basit seçilirse seçilsin daha geniş kapsamlı bir problem için ciddi ön görülerde bulunmamızı sağlayacaktır.

Ele alınan problemde akışın viskoz olmasından dolayı plaka üzerinde akışkan tarafından bir kayma gerilmesi oluşacaktır. Bu kayma gerilmeleri tüm plaka alanı üzerinden sürüklenme kuvvetine neden olur. Sürüklenme kuvveti özellikle akışkan içerisinde hareket eden ya da hareketli bir akışkan içerisinde akışa göre göreceli hıza sahip cisimlerin üzerinde akış doğrultusunda (veya katı cisim hareketine ters) oluşan fazladan kuvvettir. Cisim akışa göre sabit durabilmesi ya da hareket edebilmesi için bu kuvveti yenmesi gerekir. Newtonyen akışkanda bu kuvvet başlıca viskozite ile ilişkili iken Carreau-Yasuda akışkanı için bu çalışma kapsamında etkiler araştırılacaktır. Etkilerden kasıt Carreau-Yasuda akışkanına ait görünür viskozite fonksiyonundaki sabitlerden dolayıdır.

Bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde Bölüm 1'de verilen farklı akışkanlara göre viskozite fonksiyonlarının kayma gerilmesi ile ilişkisi bünye denklemi üzerinden verilecektir. Kayma gerilmesi viskozite gibi akışkanın özelliği ile ilgili olduğu gibi akışkanın deformasyon hızı ya da kısaca hızı ile ilişkilidir. Akışkan hızı akışkan içerisinde de farklılıklar göstereceği için hesaplanmak istenen kayma gerilmesinin olduğu yerde akışkan hızının da bilinmesi gerekir. Akışkan hızı akışkan parçacığının üzerine momentumun korunum yasası uygulanarak bulunabilir. Bir akışkan parçacığına Newton' un ikinci yasası ya da diğer bir deyişle momentumun korunumu uygulanırsa ortaya çıkan eşitlik hızlar cinsinden bir kısmi diferansiyel denklem olacaktır. Söz konusu akışkan bu denklemlere Navier-Stokes denklemleri denir. Doğrusal olmayan ve kısmi diferansiyel türevler içeren bu Navier-Stokes denklemlerinin henüz tam çözümü bulunamadığı gibi sayısal çözümleri de günümüzün güçlü bilgisayarlarında yapılmaktadır. Newtonyen olmayan akışkanlar da ise bu zor durum katlanarak artmaktadır. Momentum denklemlerini çözebilmek için çeşitli kabuller yapılabilmektedir. Sınır tabakası teorisi [34] bu kabullerin sistematik olarak uygulandığı bir yaklaşımdır. Sınır tabakası teorisi ya da yaklaşımı sadece akışkanlar

mekaniği problemlerine özgü olmamakla birlikte ısıl sınır tabaka, konsantrasyon sınır tabaka, momentum sınır tabaka gibi farklı uygulama alanları bulunur. Akışkanlar mekaniği için bu yaklaşım aslında bir momentum sınır tabakası olmakla birlikte sadece değişimin gerçekleştiği bölgeye odaklanır. Örneğin plaka üzerindeki bölgede akışkan plakaya yapıştıktan sonra hızı sıfırlanır ve sonsuzdan gelen akışkan hızını yakalayıncaya kadar hızı artmaya devam eder. Bu değişimin gerçekleştiği bölge çok dardır, kısaca akışkan maksimum hızını çok kısa bir mesafe sonra yakalar. Sınır tabakası teorisi tam olarak bu dar bölgeye odaklanır ve dışarıda kalan bölgede değişimin olmadığı için bakılmaması gerektiğini söyler. Ayrıca bu dar bölgenin oluşabilmesi için akış sırasında değişen özelliklerin hangisinin birbirine göre daha önemli olduğunu söyler ve ilave etkileri birbirlerine göre karşılaştırıp bizlere ihmal etme olanağı sunar. Bu dar bölge yüzünden ihmal edilen terimler genellikten bir saptırma yapmayacağı gibi denklemlerin boyutsal olarak büyüklüğünü ciddi olarak küçültür ve çözümünü daha kolay hale getirir. Sınır tabakasının çok dar olmasının getirdiği kabuller bir sonraki bölümde detaylı olarak anlatılacaktır. Sınır tabakası yaklaşımından sonra momentum denklemleri büyük oranda basitleştirilmiş olsa da son hali hala kısmi diferansiyel denklem formundadır. Kısmi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere göre çözümleri analitik ya sayısal olarak oldukça zorlayıcıdır. Ancak bu denklemler her ne kadar kısmi olsa da çoğunlukla adi diferansiyel denkleme indirgenebilir ve bu denklemler çözülebilir. Bu denklemler, kısmi denklemlerin adi formda benzerleridir ve çözümlerine benzerlik çözümleri denir. Adi diferansiyel denklemlere dönüşüm için özel yeni değişkenler tanımlanması gerekir. Akışkanlar mekaniği denklemleri için bu yeni değişkenler ya da benzerlik dönüşümleri literatürde sıklıkla bilindik halleri ile kullanılsa da biz bu çalışmada Lie gruplarının özel bir dönüşümden yola çıkarak sistematik bir şekilde bu yapıları tanımlayacağız. Diferansiyel denklemlerin değişkenlerine özel bir dönüşüm uygulandığında yeni değişkenler cinsinden denklem yazıldığında denklem ilk halini tekrar veriyorsa diferansiyel denklem bu dönüşümler altında değişmez (invaryant) denir. Bu özel dönüşüme ait parametrelere ise diferansiyel denklemin simetrileri denir. Kısaca bu yeni parametreler cinsinden özel dönüşümler kullanılmış değişkenleri denkleme yerleştirdiğimizde denklemin yapısında bir değişiklik olmuyorsa diferansiyel denklem bu dönüşümler altında simetriktir denir. Lie grupları teorisi bu simetrilerin bulunmasından kullanılan bir yaklaşımdır. Teori bize bir sistemin kabul ettiği tüm simetrileri bulmamızı sağlasa da biz bu çalışmada Lie gruplarından ortaya

çıkmış hazır dönüşümler üzerinde duracağız. Lie grupları ile tanımlanabilecek simetrilerin teorik fizikte oldukça fazla kullanım alanı olsa da bizim kullanma amacımız kısmi diferansiyel denklemin adi diferansiyel denkleme indirme içindir. Bu yüzden simetriler kullanılarak ortaya çıkan kısmi diferansiyel sınır tabakası denklemi yeni değişkenler cinsinden adi diferansiyel denkleme indirgenecektir.

Bu çalışmada ele alınan problem ve çözüm yollarının benzerlerine literatürde farklı akışkanlar için karşılaşılabilir. Genellikle simetri analizleri ile beraber benzer yaklaşımlar Aksoy ve ark. tarafından viskoelastik Oldroyd ve Maxwell akışkanları [35,36], viskoelastik ve power-law özelliğe sahip ikinci derece akışkanlar [37,38], GNA olarak Sisko [39], Williamson [40], Powell-Eyring [41] akışkanlarının sınır tabakası içerisindeki davranışlarına uygulanmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1 Momentumun Korunumu

Sadece dış kuvvet olarak basınç gradyeni etkisi altında laminer, sıkıştırılamaz ve sürekli bir akışta Newton' un ikinci yasası bir akışkan parçacığı için yazılırsa, koordinat sisteminden bağımsız olarak aşağıdaki vektörel formdaki momentum denklemi elde edilir.

$$\rho \mathbf{u}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}P^{*} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\tau} \tag{3.1}$$

Burada ρ yoğunluk, u hız verktörü, P basınç ve ∇ gradyeni operatörüdür. τ daha önce belirttiğimiz gibi akışkan tipine özel, kayma gerilmelerini içeren bir tensörel büyüklüktür. Ele aldığımız probleme uygun olarak Denklem (3.1) kartezyen koordinatlar için x* koordinatında,

$$\rho\left[u^{*}\frac{\partial}{\partial x^{*}} + v^{*}\frac{\partial}{\partial y^{*}}\right]u^{*} = -\frac{\partial P^{*}}{\partial x^{*}} + \frac{\partial}{\partial x^{*}}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y^{*}}\tau_{xy} \tag{3.2}$$

ve y^{*} koordinatı için;

$$\rho\left[u^{*}\frac{\partial}{\partial x^{*}} + v^{*}\frac{\partial}{\partial y^{*}}\right]v^{*} = -\frac{\partial P}{\partial y^{*}} + \frac{\partial}{\partial x^{*}}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y^{*}}\tau_{yy} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. Burada sırasıyla u* ve v*, x* ve y* doğrultusundaki hızlardır. Ayrıca kayma gerilmesi ifadelerindeki ilk indis düzlemi, ikinci indisin de doğrultuyu gösterdiği söylenmelidir. Yukarıdaki Denklem (3.2) ve Denklem (3.3) akışkan modelinden bağımsız momentum denklemleridir. Cross akışkanını temsil etmesi için denklemlerdeki kayma gerilmeleri ifadesi Denklem (1.8) kullanılarak hesaplanmalıdır. Deformasyon hızlarını ya da birim uzama hızlarını içeren $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ tensörü aşağıdaki hız vektörünün gradyeninin ∇u, kendisinin transpozu $(\nabla u)^{T}$ ile toplamıdır, yani

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^{T} \tag{3.4}$$

Kartezyen koordinatlar için $\nabla = \boldsymbol{e_1}\frac{\partial}{\partial x^*} + \boldsymbol{e_2}\frac{\partial}{\partial y^*}$ ve $\boldsymbol{u} = u^*\boldsymbol{e_1} + v^*\boldsymbol{e_2}$ olur. Burada $\boldsymbol{e_1}$ve $\boldsymbol{e_2}$, sırasıyla x^* ve y^* yönündeki birim vektörlerdir. Skaler bir büyüklük olarak $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ tensörünün şiddeti aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}.\dot{\boldsymbol{\gamma}})} \tag{3.5}$$

tr ya da $tracert$ operatörü $\dot{\boldsymbol{\gamma}}.\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ çarpımı ile ortaya çıkan tensörünün diyagonal elemanlarının toplamını ifade eder. Kartezyen koordinatlar için bu ifade,

$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = \left(2\left(\frac{\partial \mathrm{u}^*}{\partial \mathrm{x}^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathrm{v}^*}{\partial \mathrm{y}^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}^*}{\partial \mathrm{x}^*} + \frac{\partial \mathrm{u}^*}{\partial \mathrm{y}^*}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

olarak hesaplanır ve Denklem (1.7)' ye yerleştirilirse Carreau-Yasuda akışkanı için görülür viskozite;

$$\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)$$
$$\left(1 + \lambda^{\mathrm{m}}\left(2\left(\frac{\partial \mathrm{u}^*}{\partial \mathrm{x}^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathrm{v}^*}{\partial \mathrm{y}^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{u}^*}{\partial \mathrm{y}^*} + \frac{\partial \mathrm{v}^*}{\partial \mathrm{x}^*}\right)^2\right)^{\frac{\mathrm{m}}{2}}\right)^{\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{m}}} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki Carreau-Yasuda akışkanına özel görünür viskozite Denklem (1.2)' ye yerleştirilirse Carreau-Yasuda denklemi için bünye denklemi elde edilir.

$$\boldsymbol{\tau}^* = \left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m\left(2\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{3.8}$$

Bünye denklemlerinin bileşenleri hesaplanırken $\boldsymbol{\tau}^*$ ve $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ' nin kartezyen koordinatlardaki aşağıdaki formları kullanılmalıdır.

$$\boldsymbol{\tau}^* = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \text{ ve } \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} & \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \\ \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} & 2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{bmatrix}$$

Böylece Denklem (3.2) ve (3.3)' deki kayma gerilmeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\tau_{xx}^* = 2\left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m\left(2\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\tau_{xy}^* = \left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m\left(2\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)$$

$$\tau_{yy}^* = 2\left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m\left(2\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \quad (3.9)$$

Burada tensörün simetrik olması gerektiğinden $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ olması gerektiği söylenmelidir. Yukarıda hesaplanan kayma gerilmesi ifadeleri Denklem (3.2) ve Denklem (3.3)' e yerleştirildiğinde Carreau-Yasuda akışkanının hareketini temsil eden momentum denklemleri elde edilir.

Sınır tabakası ile alakalı referans çalışmalara dikkat edildiğinde sınır tabakası kabullerinin momentum denklemlerinin son haline uygulandığı görülecektir. Biz bu çalışmada sadelik açısından momentum denklemlerinin nihai halinden ziyade kayma gerilmeleri üzerinde yaklaşımları yapıp sınır tabakası denklemlerine ulaşacağız.

3.2 Sınır Tabakası Yaklaşımı

Sınır tabakası daha önce değindiğimiz gibi değişimin gerçekleştiği dar bir bölgeyi temsil etmektedir. Bu değişimin gerçekleştiği dar bölgeye ilişkin kabuller GNA modelleri için devasa büyüklükteki momentum denklemlerini ciddi şekilde basitleştirir. Kısaca bu kabuller ve ilişkili matematiksel hallerine değinelim. Sınır tabakası kalınlığı oldukça küçük bir büyüklüktür;

$$\delta^* \ll 1$$

Bu nedenle y^* koordinatı da δ^* mertebesindedir, yani çok küçük olmalıdır;

$$y^* \sim O(\delta^*)$$

Plaka yönündeki koordinat küçük olmamasına karşın 1 değerindedir;

$$x^* \sim O(1)$$

Kütlenin korunumu prensibi gereği süreklilik denklemi şu şekildedir;

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \tag{3.10}$$

Süreklilik denklemindeki terimler, kütlenin korunumu gereği aynı mertebede olmalıdırlar bu yüzden;

$$u^* \sim O(1) \text{ ve } v^* \sim O(\delta^*)$$

olmalıdır. Bu yapılan kabuller ile önceki kısımdaki ifadelerin içerisindeki hız gradyenlerinin mertebeleri hakkında aşağıdaki şekilde bilgi sahibi olabilir;

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \sim O(1)$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \sim O\left(\frac{1}{\delta^*}\right)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \sim O(\delta^*)$$

$$\frac{1}{\delta^*} \gg 1 \gg \delta^*$$

olarak mertebe hiyerarşisi gereği en büyük terim tutulup diğer terimler elimine edilirse görünür viskozite;

$$\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}} \tag{3.11}$$

olarak basitleştirilir. Bu ifade sınır tabakası içerisindeki görünür viskozitedir. Aynı şekilde Denklem (3.9) ile verilen kayma gerilmeleri sınır tabakası için düzenlenirse;

$$\tau_{xx}^* = 2\left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\tau_{xy}^* = \left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\frac{\partial u^*}{\partial y^*}$$

$$\tau_{yy}^* = \left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)\left(1 + \lambda^m \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\right)\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \tag{3.12}$$

elde edilir. x^* momentum denklemi de benzer olarak:

$$\rho\left[u^*\frac{\partial}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial}{\partial y^*}\right]u^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*}\tau_{xy} \tag{3.13}$$

mertebe hiyerarşisi gereği sınır tabakası için basitleşir. Denklem (3.12)' deki τ_{xy} ifadesi yukarıdaki denkleme konur ve türevler hesaplanırsa;

$$\rho\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x^*}+\eta_\infty\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+(\eta_0-\eta_\infty)\left(1+\lambda^m\left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+$$

$$\lambda^m(\eta_0-\eta_\infty)(n-1)\left(1+\lambda^m\left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\right)^{\frac{n-m-1}{m}}\left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^m\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \tag{3.14}$$

Dikkat edilirse yukarıdaki denklemde daha önceden yaptığımız mertebe hiyerarşisine uymamakla birlikte denklemin sol tarafındaki terimler ve sağ taraf basınç gradyeni $O(1)$ iken diğer tüm viskoz terimlerin $\frac{1}{\delta^*}$ ve $\frac{1}{\delta^{*m}}$ mertebelerinde olduğu fark edilmelidir. Daha sistematik bir şekilde denklemdeki mertebe karmaşasını ortadan kaldırmak için sınır tabakası kalınlığı δ^*' yı plaka uzunluğuna bölerek boyutsuz sınır tabakası δ aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\delta=\frac{\delta^*}{L} \tag{3.15}$$

$L\sim O(1)$ ve δ ifadesi boyutsuz olduğundan δ^* mertebesi terimler olan hızın dikey bileşeni v^* ve yine plakaya dik koordinat y^*' yi aşağıdaki şekilde ölçekleyelim.

$$v^*=\delta\tilde{v}^*\ ve\ y^*=\delta\tilde{y}^* \tag{3.16}$$

İncelen akışkanlar için genelde $\eta_0 \gg \eta_\infty$ olduğundan $\eta_\infty \approx 0$ kabulü ile ölçeklediğimiz yeni değişkenleri Denklem (3.14)' e yerleştirip düzenleyelim.

$$\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\tilde{v}^*\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\frac{\eta_0}{\delta^2}\left(1+\frac{\lambda^m}{\delta^m}\left|\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tilde{y}^{*2}}+\ (n-1)$$

$$\left(1+\frac{\lambda^m}{\delta^2}\left|\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right|^m\right)^{\frac{n-m-1}{m}}\frac{\lambda^m}{\delta^m}\left|\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right|^m\frac{\eta_0}{\delta^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tilde{y}^{*2}} \tag{3.17}$$

Yukarıdaki eşitliğin sol ve sağ tarafındaki tüm terimlerin birbirlerine göre baskın olmaması gerektiğinden tüm terimlerin mertebeleri aynı olmak zorundadır. Bu yüzden

$$\frac{\eta_0}{\delta^2}\sim\frac{\lambda^m}{\delta^m}\sim O(1) \tag{3.18}$$

olmalıdır. Mertebe hiyerarşisini bozmamak için η_0 ve λ yı aşağıdaki şekilde ölçekleyelim.

$$\eta_0 = \delta^2\widetilde{\eta_0} \text{ ve } \lambda = \delta^m\tilde{\lambda} \tag{3.19}$$

Bu ifadeleri Denklem (3.17)' ye yerleştirdiğimizde tüm ifadenin $O(1)$ olduğu aşağıdaki şekilde görülecektir.

$$\rho\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \tilde{v}^*\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x^*} + \widetilde{\eta_0}\left(1 + \tilde{\lambda}^m\left|\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tilde{y}^{*2}} + (n-1)\tilde{\lambda}^m\widetilde{\eta_0}$$
$$\left(1 + \tilde{\lambda}^m\left|\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right|^m\right)^{\frac{n-m-1}{m}}\left|\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{y}^*}\right|^m\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tilde{y}^{*2}} \tag{3.17}$$

Basitlik açısından yukarıdaki denklemlerdeki ~ aksanlarını kaldırıp boyut analizi için aşağıdaki boyutsuz büyüklükleri tanımlayalım.

$$u = \frac{u^*}{V}, v = \frac{v^*}{V},\ x = \frac{\rho V}{\eta_0}x^*,\ y = \frac{\rho V}{\eta_0}y^*,\ P = \frac{P^*}{\rho V^2} \text{ ve } U = \frac{U^*}{V} \tag{3.18}$$

Yukarıdaki ifadelerde dikkat edilmesi gereken önemli bir husus boyutsuzlaştırma işlemlerinde kullandığımız referans hız V'nin sonsuzdan gelen akışkan hızı U^*' dan farklı bir büyüklük olarak tanımlanmasıdır. Her ne kadar şu ana kadar referans hız V için bir fiziksel ilişki kurulamamış olsa da ileriki kısımlarda U^* hızı ve referans hız V arasında bir bağın olması gerektiği analitik olarak gösterilecektir. Şimdi Denklem (3.18)' de verilen eşitliklerdeki boyutlu terimleri aşağıdaki şekilde çekelim.

$$u^* = Vu,\ v^* = Vv,\ x^* = \frac{\eta_0}{\rho V}x,\ y^* = \frac{\eta_0}{\rho V}y,\ P = \rho V^2 P^* \text{ ve } U^* = VU$$

Bu ifadeler Denklem (3.17)' de yerine konur ve düzenlenirse

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(1+\frac{\lambda^m\rho^m U^{2m}}{\eta_0^m}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}$$

$$\left(1+(n-1)\frac{\frac{\lambda^m\rho^m U^{2m}}{\eta_0^m}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m}{1+\frac{\lambda^m\rho^m U^{2m}}{\eta_0^m}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m}\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemdeki $\frac{\lambda\rho U^2}{\eta_0}$ ifadesi Newtonyen olmayan akışkanlara özgü Deborah sayısıdır. $De=\frac{\lambda\rho U^2}{\eta_0}$ sayısı cinsinden Denklem (3.19) aşağıdaki şekilde boyutsuz haline indirgenir.

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(1+\left|De\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\left(1+(n-1)\frac{\left|De\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m}{1+\left|De\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m}\right) \tag{3.20}$$

Burada basitlik açısından Deborah sayısı her zaman pozitif bir sayı olacağından hız gradyeni ile beraber mutlak değer içerisine alınmıştır. x^* momentum denkleminin üzerinde uygulanan sınır tabakası kabullerinden gelen $\eta_0\sim O(\delta^{*2})$, $\eta_\infty\sim O(\delta^{*2})$ ve $\lambda\sim O\left(\delta^{*m}\right)$ sonuçları gereği y^* yönündeki momentum denkleminin boyutsuz son hali aşağıdaki şekilde elde edilir

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{3.21}$$

Buradan hareketle basıncın plaka yönünde değiştiğini söyleyebiliriz veya kısaca $p=p(x)$' dir. Potansiyel teori gereği Bernoulli denkleminden sonsuzdaki akış için basınç hesaplanır.

$$P=-\frac{1}{2}U^2+\text{sabit} \tag{3.22}$$

Bu ifadenin x' e göre türevi alınırsa:

$$\frac{dp}{dx}=-U\frac{dU}{dx} \tag{3.23}$$

hesaplanır. Bu ifade Denklem (3.20)' ye yerleştirilirse sınır tabakası içerisindeki x doğrultusundaki boyutsuz momentum denklemi elde edilir

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(1+\left|De\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}}\left(1+(n-1)\frac{\left|De\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m}{1+\left|De\frac{\partial u}{\partial y}\right|^m}\right) \tag{3.24}$$

Boyutsuz süreklilik denklemi ise;

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3.25}$$

olur. Denklem (3.24) ve (3.25)' i çözmek için gerekli sınır şartları; plaka üzerinde akışkanın hız bileşenleri kaymama koşulu gereği sıfırdır.

$$u^*(x^*,0)=v^*(x^*,0)=0 \tag{3.26}$$

Ayrıca yeteri kadar plakadan yukarda akışkan hızının x^* bileşeni sonsuzdan gelen akışın hızına eşittir.

$$u^*(x^*,\infty)=U^* \tag{3.27}$$

Son olarak bu şartın gerçekleşmesi ile alakalı olarak akışkan hızının y^* bileşeni yönündeki artışın sıfırlanması,

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*}(x^*,\infty)=0 \tag{3.28}$$

olarak yazılabilir. Bu şartlar Denklem (3.18)' de verilen boyutsuz değişkenler cinsinden tekrar yazılabilir:

$$u(x,0)=v(x,0)=0,\ u(x,\infty)=U \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x,\infty)=0 \tag{3.29}$$

Momentum denklemlerinin çözümlerinin bir diğer ihtiyaç duyulduğu kısım ise akışkanın katı cisimler üzerinde oluşturduğu kayma gerilmesi ve buna bağlı olarak ortaya çıkan akışa paralel ve aynı yönde sürüklenme kuvvetidir. Akışkan içine daldırılmış katı cisim hareketinde ise bu kuvvet harekete ters yönde ortaya çıkacaktır.

Bu yüzden potansiyel yani sürtünmesiz akış teorisinden farklı olarak momentum denklemlerinin çözümlerinden sonra bu kuvvetin hesabında yüzey üzerindeki kayma gerilmesinin büyüklüğü bilinmelidir. $\eta_\infty = 0$ olduğunu hatırlayarak Denklem (12) vasıtası ile plaka üzerindeki kayma gerilmesi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\tau_{xy}^*(0) = \eta_0 \left(1 + \lambda^m \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}(0)\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}} \frac{\partial u^*}{\partial y^*}(0) \tag{3.30}$$

Denklem (3.18)' de verilen ilgili boyutsuz parametreler yukarıdaki ifadeye yerleştirilir ve eşitlikteki büyüklüklerin tamamen boyutsuz hale getirmek için gerekli işlemler yapıldığında

$$\tau_{xy}(0) = \frac{\tau_{xy}^*}{\rho V^2}(0) = \left(1 + \left|De\frac{\partial u}{\partial y}(0)\right|^m\right)^{\frac{n-1}{m}} \frac{\partial u}{\partial y}(0) \tag{3.31}$$

halinde plaka üzerindeki kayma gerilmesi boyutsuz olarak hesaplanabilir. Bu kısımda sınır tabakası içerisindeki akışı tanımlayan boyutsuz kısmi diferansiyel formda Denklem (3.24) ve (3.25), Denklem (3.29)' da ki sınır şartları altında elde edilmiştir. Bundan sonraki kısımda bu denklemlerin değişmez kaldığı yeni benzerlik değişkenleri üzerinden adi diferansiyel denklem formlarının elde edilip edilemeyeceği tartışılacak ve bu denklemlerin çözümlerinin de kullanıldığı enerji denklemi üzerinde durulacaktır.

3.3 Momentum Denklemlerin Simetrileri ve Adi Diferansiyel Formlar

Bir denklemin simetrileri, orjinal denkleme yerleştirildiğinde denklemin değişmez (invaryant) kalmasını sağlayan yeni değişkenleridir. Hazır simetrik yapılar öteleme, ölçekleme, spiral dönüşümler olduğu gibi Lie grubu analizleri ile denklemin kabul ettiği tüm simetrik yapılar elde edilebilir. Adi diferansiyel denklemlerde bu simetriler denklemin kanonik formda çözmemize olanak tanırken kısmi diferansiyel denklemlerde adi denklemlere indirgemede kullanılır.

Bu çalışma kapsamında sadece sınır tabakası denklemlerinin kabul ettiği ölçekleme dönüşümleri incelenecektir. Ölçekleme dönüşüne uygun olarak aşağıdaki yeni değişkenlerimizi tanımlayalım.

$$\bar{x} = e^{-a}x \rightarrow \quad x = e^{a}\bar{x}$$
$$\bar{y} = e^{-b}y \rightarrow \quad y = e^{b}\bar{y}$$
$$\bar{u} = e^{-c}u \rightarrow \quad u = e^{c}\bar{u} \tag{3.30}$$
$$\bar{v} = e^{-d}v \rightarrow \quad v = e^{d}\bar{v}$$
$$\bar{U} = e^{-f}U \rightarrow \quad U = e^{f}\bar{U}$$

Yukarıdaki denklemlerde okun sol tarafı yeni değişkenlerimizi, sağ tarafı ise sınır tabakası denklemlerine yerleştireceğimiz orijinal değişkenlerimizin yeni değişkenler cinsinden eşitini verir. Burada a, b, c, d, f ölçekleme dönüşümüne ait parametrelerdir. Simetriler için a, b, c, d, f parametrelerinin hangi özel değerlerinde Denklem (3.30)' da verilen değişkenler orijinal denklemlere yerleştirildiğinde denklemler değişmez kalacak sorusunu araştıracağız.

Denklem (3.24)' ü Denklem (3.30)' da verilen değişkenler cinsinden tekrar yazıp ve sol taraftaki ilk terimin katsayısı 1 olacak şekilde düzenlersek;

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + e^{-c+a+d-b}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = e^{-2f-2c}\bar{U}\frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} + e^{-c-2b+a}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\left(1 + \left|e^{c-b}De\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right|^{m}\right)^{\frac{n-1}{m}}$$
$$\left(1 + (n-1)\frac{\left|e^{c-b}De\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right|^{m}}{1+\left|e^{c-b}De\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right|^{m}}\right) \tag{3.31}$$

elde edilir. Aynı değişkenler cinsinden süreklilik denklemi yani Denklem (3.25) düzenlenirse;

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \beta^{a-c+d-b}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = 0 \tag{3.32}$$

bulunur. Dikkat edilirse yukarıdaki denklemlerin orijinal denklemlere dönüşebilmesi için e ' ifadelerinin katsayılarının 1'e eşit olması gerekmektedir. Dolayısıyla katsayılarda bulunan *e* ifadelerinin üstlerinin sıfır olması gerekmektedir. Bunun için momentum denkleminden;

$$a - c + d - b = 0$$

$$-2c + 2f = 0$$
$$a - 2b - c = 0 \tag{3.33}$$
$$(c - b) = 0$$

ve süreklilik denkleminden;

$$a - c + d - b = 0 \tag{3.34}$$

Yukarıdaki süreklilik denkleminden gelen ifade momentum denkleminden ilki ile aynıdır. Tüm parametreleri yukarıdaki sistemden bulmak mümkün değildir, dolayısıyla sistem lineer bağımlıdır denir. Ancak tek bir parametre cinsinden diğer simetri parametrelerini bulabiliriz. C cinsinden diğer parametreler şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} f &= c \\ b &= c \\ a &= 3c \\ d &= -c \end{aligned} \tag{3.35}$$

Simetriler ve orijinal değişkenler arasında aşağıdaki diferansiyel formların eşitliği yazılabilir.

$$\frac{d\bar{x}}{a\bar{x}} = \frac{d\bar{y}}{b\bar{y}} = \frac{d\bar{u}}{c\bar{u}} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{v}} = \frac{d\bar{U}}{f\bar{U}} \tag{3.36}$$

Aksanları basitlik açısından kaldırıp yukarıdaki ifadeye Denklem (3.35)' deki değerler yerleştirilir ve c' ler sadeleştirilirse:

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} = \frac{dv}{-v} = \frac{dU}{U} \tag{3.37}$$

Yukarıdaki ifadeden kısmi diferansiyel denklemleri adi denkleme indirgemek için gerekli benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları elde edilir. Benzerlik değişkeni için

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y} \tag{3.38}$$

ele alalım. Her iki tarafında integrali alındığında integral sabiti benzerlik değişkenimiz olsun

$$\ln x^{\frac{1}{3}} + \ln\xi = \ln y \tag{3.39}$$

Sol taraf tek ln fonksiyonu içinde toplayalım.

$$\ln\xi x^{\frac{1}{3}} = \ln y \tag{3.40}$$

İçler eşitlenip benzer değişkeni ξ çekilirse;

$$\xi = \frac{y}{x^{\frac{1}{3}}} \tag{3.41}$$

bulunur. Benzer şekilde Denklem (3.37)' den ilk benzerlik fonksiyonumuzu bulalım.

$$\frac{dx}{3x} = \frac{du}{u} \tag{3.42}$$

Her iki tarafında integralini alırsak u ile ilişkili ilk benzerlik fonksiyonumuz integral sabitinden gelecektir. Buradan;

$$f(\xi) = \frac{u}{x^{\frac{1}{3}}} \tag{3.43}$$

bulunur. v ile ilişkili benzerlik fonksiyonu için Denklem (3.37)' nin aşağıdaki kısmını alalım.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{-3x} \tag{3.44}$$

Her iki tarafın integrali alınır ve integral sabiti olarak son benzerlik fonksiyonumuz çekilirse;

$$g(\xi) = x^{\frac{1}{3}}v \tag{3.45}$$

Son olarak U fonksiyonuna ait benzerlik değişkenimiz aşağıdan bulunur.

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dU}{U} \tag{3. 46}$$

Buradan gelecek son benzerlik fonksiyonumuz;

$$h(\xi) = \frac{U}{x^{\frac{1}{3}}} \tag{3.47}$$

Yukarıda bulduğumuz tüm yeni benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları kısmi diferansiyel denklemin adi denkleme indirgedikten sonra içereceği fonksiyonlar ve değişkenler olacaktır. Özetle Denklem (3.24) ve (3.25)'de bulunan değişkenleri benzerlik fonksiyonu ve benzerlik değişkeni cinsinden yazarsak;

$$\begin{aligned} u &= x^{\frac{1}{3}} f(\xi) \\ v &= x^{-\frac{1}{3}} g(\xi) \\ U &= x^{\frac{1}{3}} h(\xi) \end{aligned} \tag{3.48}$$

$U = U(x)$ olması gerektiğinden ξ' nin y bağımlılığından dolayı $h = h(\xi)$ yerine $h = \text{sabit}$ olması gerekmektedir. Bu yüzden genellikten kayıp olmaksızın U ile ilişkili benzerlik fonksiyonu $h(\xi) = 1$ alalım. Denklem (3.24) ve (3.25) için türev operatörleri de benzerlik değişkeni ve fonksiyonları cinsinden yazılmalıdır. Öncelikle benzerlik değişkeninin türevlerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} y \text{ ve } \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = x^{-\frac{1}{3}} \tag{3.49}$$

Türev operatörleri ise şu şekilde hesaplanır

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y\frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} = x^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = x^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

Bu operatörlerin yardımı ile sınır tabakası içerisindeki terimleri hesaplayalım

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(\xi) - \frac{1}{3}x^{-1}y\frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2 f}{d\xi^2} \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x^{-\frac{2}{3}}\frac{dg}{d\xi}$$

$$U\frac{dU}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

Denklem (3.24)' ün tüm terimleri buraya kadar simetri parametreleri ile hesaplanan benzerlik değişkeni ve fonksiyonları cinsinden bulunmuştur. Hesaplanan terimler Denklem (3.24)' e yerleştirilirse;

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}f(\xi)}{3}\left(x^{\frac{-2}{3}}f(\xi) - \frac{1}{3}x^{-1}yf'(\xi)\right) + x^{\frac{-1}{3}}g(\xi)f'(\xi) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}f''(\xi)$$

$$(1 + |Def'(\xi)|^m)^{\frac{n-1}{m}}\left(1 + \frac{(n-1)|Def'(\xi)|^m}{1+|Def'(\xi)|^m}\right) \tag{3.52}$$

Denklemin her iki tarafını $3x^{\frac{1}{3}}$ ile çarpalım ve sol taraftaki ikinci terimde kalan değişken katsayılarının benzerlik değişkenine eşit olduğunu dikkat ederek;

$$f^2(\xi) - \xi f(\xi)f'(\xi) + 3g(\xi)f'(\xi) = 1 + 3f''(\xi)(1 + |Def'(\xi)|^m)^{\frac{n-1}{m}}$$
$$\left(1 + \frac{(n-1)|Def'(\xi)|^m}{1+|Def'(\xi)|^m}\right) \tag{3.53}$$

Aynı işlemler süreklilik denklemine de uygulanırsa;

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) + 3g'(\xi) = 0 \tag{3.54}$$

elde edilir. Dönüştürülmüş sınır şartları ise;

$$\begin{aligned} &f(0) = 0 \\ &g(0) = 0 \\ &x^{\frac{1}{3}}f(\infty) = U \\ &f'(\infty) = 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

olarak bulunur. Sondan bir önceki ifadedeki $x^{\frac{1}{3}}$ katsayısı bu şartın benzerlik fonksiyonları ve değişkenleri cinsinden başarılı bir dönüşüm olmadığını gösterir. Başarılı bir benzerlik dönüşümü için tüm eski bağımlı ve bağımsız değişkenler denklemler ve sınır şartlarında bulunmaması gerekir. Daha önceden tanımladığımız ve U ile ilişkilendirebileceğimiz V bu sıkıntıyı ortadan kaldırmak için kullanabiliriz. Son şartı boyutlu hızlar cinsinden tekrar yazıp ifadeyi aşağıdaki şekilde düzenleyelim.

$$f(\infty) = \frac{U^*}{V} x^{-\frac{1}{3}} \tag{3.56}$$

Dikkat edersek $U^* x^{-\frac{1}{3}}$ terimini sadeleştirebilmek için $V = x^{-\frac{1}{3}}U^*$ hızını tanımlarsak son şart istenen şekilde aşağıdaki hale gelir

$$f(\infty) = 1 \tag{3.57}$$

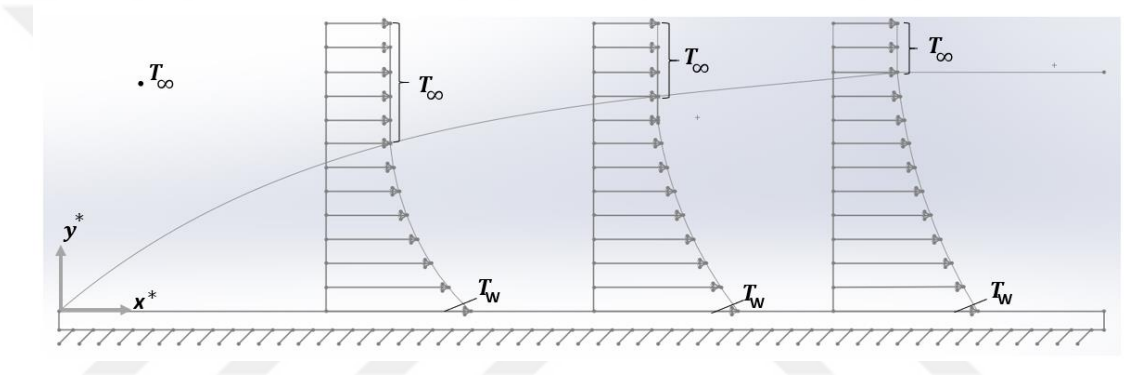
Son olarak Denklem (3.31)' de verilen kayma gerilmesi ifadesine de Denklem (3.51)' de verilen ilgili türevin benzerlik fonksiyonları cinsinden eşiti uygulandığında

$$\tau_{xy}(0) = (1 + |\mathrm{Def}'(0)|^{m})^{\frac{n-1}{m}} f'(0) \tag{3.58}$$

şeklinde benzerlik fonksiyonları cinsinden eş değeri elde edilir. Şu andan itibaren adi diferansiyel forma indirgenmiş momentum sınır tabaka ve süreklilik denklemimiz dönüştürülmüş şartlar altında sayısal çözüme uygun haldedir. Bundan sonraki kısımda benzer yaklaşımlar sınır tabakası içerisindeki sıcaklık profilini bulmamızı sağlayacak enerji denklemine uygulanacaktır.

3.4.Akışkan İçerisinde Sıcaklık Dağılımı

Bu kısımdaki analizler ile plaka üzerinde akışkan sıcaklığının malzeme parametrelerine göre nasıl değiştiğini bulacağız. Ele alınan problemin termal kısmı Şekil 3.1.' de verilmiştir. Buna göre plaka sabit T_w sıcaklığında tutulurken üzerinden T_∞ sıcaklığında Newtonyen olmayan akışkan geçiyor. Akışkanın plakaya temas eden yüzeyi T_w sıcaklığını alırken yüzeyden düşey yönde ilerlerken akışkan T_∞ sıcaklığına tekrar ulaşıyor. Sıcaklık değişimi momentum sınır tabakasına benzer şekilde dar bir bölgede değişir. Bu bölgeye termal sınır tabaka denir. Tüm bölgede aşağıdaki sıcaklık değişimini bulabileceğimiz enerji denklemi geçerlidir.



Şekil 3. 1 Termal Sınır Tabakası Temsili Gösterim

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{3.58}$$

Burada $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ ısı yayılım katsayısı olmak üzere c_p akışkanın özgül ısısı ve k akışkanın ısı iletim katsayısıdır. Momentum denklemine benzer şekilde ısı sınır tabakası yaklaşımı uygulanıp sağ taraftaki parantez içindeki ilk terim ikinci terime göre ihmal edilir ve denklem boyutsuzlaştırılırsa $Pr = \frac{c_p \eta_0}{k}$ Prandtl sayısı cinsinden

$$\frac{u}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x} (r(x)T) + v \frac{\partial T}{\partial y} = Pr^{-1} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3.59}$$

olarak termal sınır tabaka denklemi elde edilir. Yukarıdaki ifade boyutsuz sıcaklık olarak aşağıda verilen özel bir boyutsuzlaştırma kullanılmıştır.

$$T = \left(\frac{T^* - T_\infty}{T_w - T_\infty}\right)\frac{1}{r(x)} \tag{3.60}$$

Genellikten kayıp olmaksızın burada $r(x)$ fonksiyonu termal sınır şartlarının benzerlik denklemine sağlatılabilmesi için yapay olarak tanımlanmış boyutsuz bir ifadedir. Termal problemimiz için sınır şartlarımız ilk olarak temas yüzeyinde akışkan plaka sıcaklığını alacağından

$$T^*(x^*, 0) = T_w$$

ve yeteri kadar plakaya düşey uzaklıkta akışkan sıcaklığının sonsuzdan gelen havanın sıcaklığına eşit olması gerektiğinden

$$T^*(x^*, \infty) = T_\infty$$

yazılır. Bu şartlara boyutsuzlaştırma sürecimiz uygulanırsa

$$T(x, 0) = \frac{1}{r(x)} \text{ ve } T(x, \infty) = 0 \tag{3.60}$$

elde edilir. Denklem (3.58) ve (3.60) eşitliklerinin simetrileri için Denklem (3.30) simetri dönüşümlerine aşağıdaki ek dönüşümler ilave edilir.

$$\overline{T} = e^{-g}T \rightarrow \quad T = e^{g}\overline{T}$$
$$\bar{r} = e^{-h}r \rightarrow \quad r = e^{h}\bar{r}$$

Bu ifadeler ve Denklem (3.30)' dan ilgili olan terimler Denklem (3.58)' e yerleştirilirse

$$\frac{\bar{u}}{\bar{r}(x)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}(x)\overline{T}) + e^{-c+a+d-b}\bar{v}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{y}} = Pr^{-1}e^{-2b-c+a}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \bar{y}^2} \tag{3.61}$$

Eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin Denklem (3.58) ile verilen ifadeye eşit olması ya da invaryant (değişmez) kalabilmesi için e' lı ifadeler 1' e eşit olmalı. Bu yüzden aşağıdaki eşitlikler yazılmalıdır.

$$-c + a + d - b = 0$$

$-2b - c + a = 0$

$f - 2b = 0$

Dikkat edilirse yukarıdaki cebirsel denklemler momentum denkleminden gelen katsayıları sağlasa da enerji denklemi ile ilgili h ve g katsayıları ile ilgili bir değer vermemektir. Ancak bu eksiklik h ve g' nin her değeri için dönüşümün gerçekleşeceğini söylemektedir. Bu yüzden h ve g' yi keyfi olarak aşağıdaki şekilde seçelim.

$g = 1$ ve h=A

A burada keyfi bir sabittir. Şimdi Denklem (3.37)' yi aynı şekilde tekrar düzenleyelim.

$$\frac{dx}{a\,x} = \frac{dy}{b\,y} = \frac{du}{c\,u} = \frac{dv}{d\,v} = \frac{dU}{e\,U} = \frac{dT}{f\,T} = \frac{dr}{g\,r}$$

Bulunan sabitleri $g = A$ alarak yerine koyalım ve c' leri sadeleştirirsek

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} = \frac{dv}{-v} = \frac{dU}{U} = \frac{dT}{T} = \frac{d\bar{r}}{A\,\bar{r}} \tag{3.62}$$

elde edilir. Boyutsuz sıcaklık olan T fonksiyonu ile ilgili benzerlik fonksiyonumuz için yukarıdaki ifadeden

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dT}{T} \tag{3.63}$$

çekilirse;

$$T = x^{\frac{1}{3}} z(\xi) \tag{3.64}$$

ve r fonksiyonu ile ilgili benzerlik fonksiyonumuz

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dr}{A\,r} \tag{3.65}$$

İfadesinden

$$r = x^{\frac{A}{3}} w(\xi) \tag{3.66}$$

hesaplanır

Ancak $r = r(x)$ olacağından $w(\xi) = B$ gibi keyfi bir sabit olmalıdır. Buradan $B = 1$ için

$$r = x^{\frac{A}{3}} \tag{3.67}$$

olarak alınabilir. Denklem (3.61)' deki her bir terim Denklem (3.50)' de verilen operatörler kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}(r(x)T) = \frac{A}{3} x^{\frac{A+1}{3}-1} z(\xi) + \frac{x^{\frac{A}{3}}}{3}\left(x^{\frac{-2}{3}} z(\xi) - x^{-1} y\, z'(\xi)\right)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} = z'(\xi)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} = x^{-\frac{1}{3}} z''(\xi)$$

Bu ifadeler Denklem (3.43) ve (3.45) ile birlikte β' lı terimlerin 1'e eşit olması gerektiğini dikkate alarak Denklem (3.61)' e yerleştirirsek

$$f(\xi)\left(\frac{A}{3} x^{\frac{-1}{3}} z(\xi) + \frac{1}{3}\left(x^{\frac{-1}{3}} z(\xi) - x^{\frac{-2}{3}} y\, z'^{(\xi)}\right)\right) + x^{-\frac{1}{3}} g(\xi)\, z'^{(\xi)} = Pr^{-1}\, x^{-\frac{1}{3}} z''(\xi) \tag{3.68}$$

Elde edilir. Her iki tarafı $x^{\frac{1}{3}}$ çarparsak $\xi = x^{-\frac{1}{3}} y$ olması gerektiği ile ısıl sınır tabaka denkleminin benzerlik değişkenleri cinsiden son hali

$$z''(\xi) + Pr\left(\frac{\xi f(\xi)}{3} - g(\xi)\right) z'(\xi) + \frac{A+1}{3} Prf(\xi) z(\xi) = 0 \tag{3.69}$$

şeklini alır. Denklem (3.60)' da verilen sınır şartları da benzer dönüşümlere maruz bırakılırsa, ilk şart için

$$T(x,0) = x^{\frac{1}{3}} z(0) = \frac{1}{x^{\frac{A}{3}}} \tag{3.70}$$

yazılır. Sağlıklı bir benzerlik ya da simetri dönüşümü için x ' göre terimleri sadeleştirmemiz gerekir. Bu konuda bize daha önce keyfi sabitler olarak bıraktığımız A parametresi işimize yarayacaktır. Bu yüzden

$$x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{-A}{3}} \tag{3.71}$$

eşitliğinin geçerli olabilmesi için $A = -1$ olarak keyfi sabitimiz belirlenir. Bu sayede Denklem (3.70)

$$z(0) = 1 \tag{3.72}$$

halini alır. Denklem (3.60)' ın ikinci şartı ise herhangi bir işleme gerek kalmadan

$$z(\infty) = 0 \tag{3.73}$$

şeklinde başarı ile dönüşür. Ayrıca Denklem (3.69) ile verilen adi diferansiyel forma indirgenmiş enerji denklemi $A = -1$ tekrar düzenlenirse aşağıdaki daha yalın bir hale kavuşacaktır.

$$z''(\xi) + \Pr\left(\frac{\xi f(\xi)}{3} - g(\xi)\right) z'(\xi) = 0 \tag{3.74}$$

Yukarıdaki enerji denklemine sayısal çözüm uygulanırlen Denklem (3.72) ve (3.74)' deki şartlar uygulanmalıdır. Akışkanın üzerindeki sıcaklık dağılımı ısı transferi yolu ile değişiklik göstermektedir. Sıcak plakadan daha düşük sıcaklıktaki havaya sürekli ısı transferi mevcuttur. Hareket halindeki akışkana katı bir yüzey tarafından birim zamanda transfer edilen enerji akısı ya da diğer bir deyişle plakadan akışkana olan ısı transfer akısı aşağıdaki taşınım formülü ile verilir.

$$\dot{q} = h(T_w^* - T_\infty^*) \tag{3.75}$$

Burada h ortamdaki ısıl taşınım katsayısıdır. Bu ısı transfer miktarı ayrıca taşınımdan önce katı yüzeye yapışmış yani hızı olmayan akışkan tabakasına iletim yolu gönderilir. Bu durum plaka üzerindeki sıcaklık gradyeni cinsinden Fourier yasası ile şu şekilde yazılır.

$$\dot{q} = -k\frac{\partial T^*}{\partial y^*}(0) \tag{3.76}$$

Denklem (3.75) ve (3.76) birbirine eşitlenir ve daha önceki analizlerde kullanılan boyutsuz parametreler ifadeye yerleştirilirse

$$h(T_w^* - T_\infty^*) = -k\frac{\rho V r(x)}{\eta_0}\frac{\partial T}{\partial y}(0) \tag{3.77}$$

elde edilir. $r(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ve $V = x^{\frac{1}{3}}U^*$ olduğunu hatırlar ve her iki tarafı plaka boyu L ile çarparsak

$$\frac{hL}{k} = -\frac{\rho VL}{\eta_0}\frac{\partial T}{\partial y}(0) \tag{3.78}$$

bulunur. Burada $\frac{hL}{k}$ ifadesi taşınım ile ilgili problemlerde oldukça önemli olan Nusselt sayısına eşit olmakla birlikte $\frac{\rho VL}{\eta_0}$ boyutsuz terimi Reynolds sayısıdır, kısaca

$$Nu = -Re\frac{\partial T}{\partial y}(0) \tag{3.79}$$

olarak ifade edilir. Momentum denklemi ile ilişkili sınır tabaka denklemimiz ve bu kısımda türettiğimiz enerji denklemimiz hız ve sıcaklık profilleri gereği beraber çözülmelidir. Bu denklemler bir denklem sistemini oluşturmaktadır. Momentum denklemini oluşturan akışkan hız profil fonksiyonları yani u ve y aynı zamanda enerji denkleminde de bulunduğundan denklem sistemi eşleniktir (coupled) ve birbilerine bağlantılı şekilde sayısal veya analitik olarak çözülmelidir. Biz bu çalışmada çözümler için sayısal bir yaklaşım uygulayacağız. Yalnız sayısal çözümlere geçmeden önce tüm denklemlerin tekrar ele alınıp sayısal yaklaşıma uygun olan birinci mertebe diferansiyel denklem formuna indirgenmesi gerekmektedir.

3.5. Sayısal Çözümler

Özet olarak belirtmemiz gerekirse sayısal olarak çözmemiz gereken üzerlerinde benzerlik dönüşümleri gerçekleştirilmiş Denklem (3.53) momentum sınır tabaka denklemi, Denklem (3.54) süreklilik denklemi ve Denklem (3.69) ısıl sınır tabaka denklemidir. Bu denklemlerin sayısal çözümlerine geçmeden önce birinci mertebe denklem sistemi cinsinden gösterilmeleri gerekmektedir. Öncelikle aşağıdaki yeni değişkenlerimizi tanımlayalım.

$$f(\xi) = f_1(\xi)\ f'(\xi) = f_2(\xi)\ g(\xi) = f_3(\xi), z(\xi) = f_4(\xi)\ \text{ ve } z'(\xi) = f_5(\xi) \tag{3.75}$$

Yukarıdaki ifadeyi bir kez türevini alalım.

$$f'(\xi) = f_1'(\xi),\ f''(\xi) = f_2'(\xi) \text{ ve } g'(\xi) = f_3'(\xi), z'(\xi) = f_4'(\xi), z''(\xi) = f_5'(\xi) \tag{3.76}$$

Dikkat edilirse yukarıdaki yeni değişkenler sayesinde Denklem (3.53), (3.54) ve ısıl sınır tabaka denklemi Denklem (3.69) aşağıdaki birinci mertebe diferansiyel denklem sistemi haline indirgenir.

$$\begin{aligned}
f_1' &= f_2 \\
f_2' &= \frac{(f_1^2 - \xi f_1 f_2 + 3 f_3 f_2 - 1)}{3(1 + |Def_2|^m)^{\frac{n-1}{m}}\left(1 + \frac{(n-1)|Def_2|^m}{1+|Def_2|^m}\right)} \\
f_3' &= \frac{f_1 - \xi f_2}{-3} \\
f_4' &= f_5 \\
f_5' &= Prf_5\left(f_3 - \frac{\xi f_1}{3}\right)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Sınır şartlarımız ise;

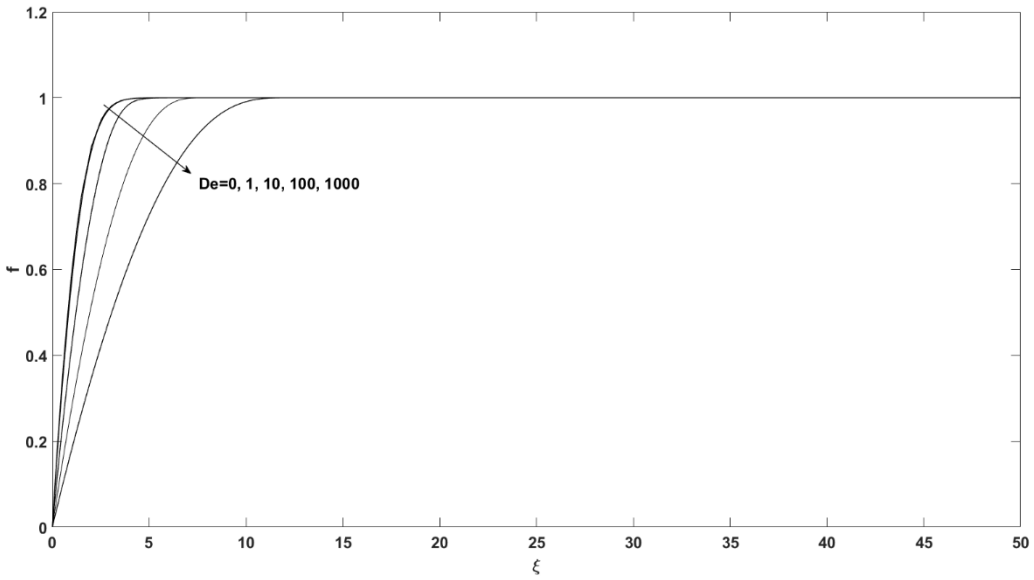
$$\begin{aligned}
f_1(0) &= 0 \\
f_1(\infty) &= 1 \\
f_3(0) &= 0 \\
f_4(0) &= 1 \\
f_4(\infty) &= 0
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Denklem (3.58)' de verilen diferansiyel denklem sistemi Denklem (3.59) şartları altında Matlab ortamında programlanmış sonlu farklar sayısal yaklaşımı temelli *bvp4c*

alt komutu kullanılarak çözülmüştür. Söz konusu komut sınır tabakası denklemlerinde sayısız defa kullanılmış ve güvenilirliğini ispatlamıştır. Sonsuzdaki şartlar sayısal denklemlere orjinden yeteri kadar uzaklıktaki bir noktanın sayısal değeri verilerek sağlatılmış ve bu noktalarda çözümlerin kararlı duruma geçip sonsuzdaki şartları sağladığı gösterilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

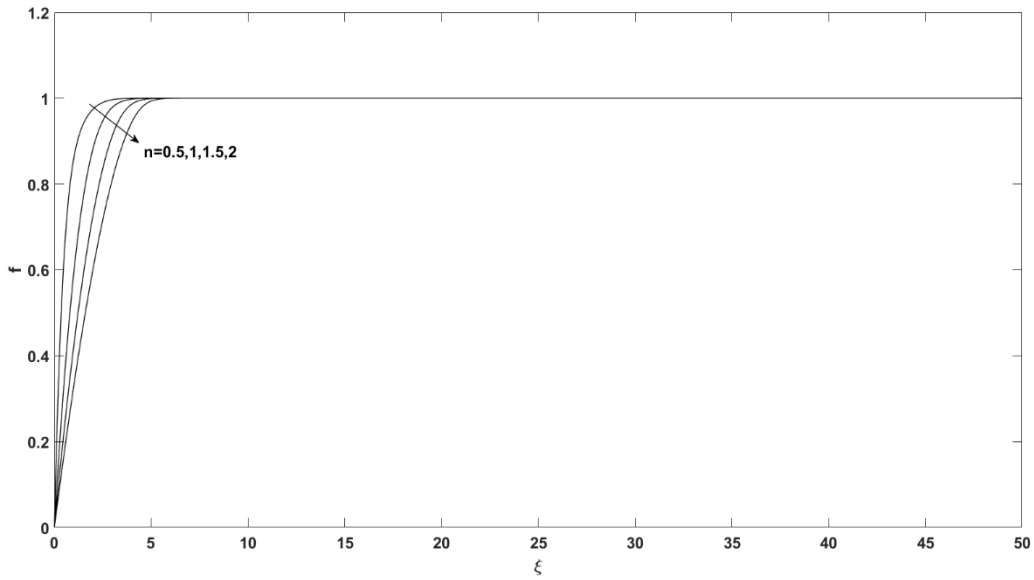
Bu kısımda, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri sonucu oluşturulmuş grafikler vasıtası ile Carreau-Yasuda akışkan modelinin sınır tabakası içerisindeki davranışı yorumlanacaktır. Yapılan boyutsuzlaştırma yaklaşımı ile akışkan modelinin özellikleri power-law parametreleri ve Deborah sayısı ile analitik formülasyonlar üzerinden temsil edilmiştir. Deborah sayısı Newtonyen olmayan akışkanlara özgü bir parametre olup Carreau-Yasuda ve Newtonyen model arasındaki başlıca farkı oluşturmaktadır. Momentum sınır tabakasına ek olarak benzer kabüller ile enerji denkleminden ısıl sınır tabaka denklemi elde edilmiş. Tüm denklemler kısmi diferansiyel denklem olup denklemlerin simetrilerinden elde edilen benzerlik dönüşümleri ile denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenmiş ve sayısal teknikler bu denklemlere uygulanmıştır. Akışkanın özelliklerin yorumları Matlab ortamında *bvp4c* komutunun verdiği sayısal çıktıların kullanılarak çizildiği grafikler vasıtası ile yapılmıştır. Söz konusu komut sınır değer diferansiyel denklem problemleri için sonlu fark temelli bir algoritmayı kullanmaktadır.



Şekil 4. 1 Benzerlik fonksiyonu $\boldsymbol{f}$' nin farklı $\boldsymbol{Deborah}$ sayıları için $\boldsymbol{\xi}$ benzerlik değişkenine göre değişimi

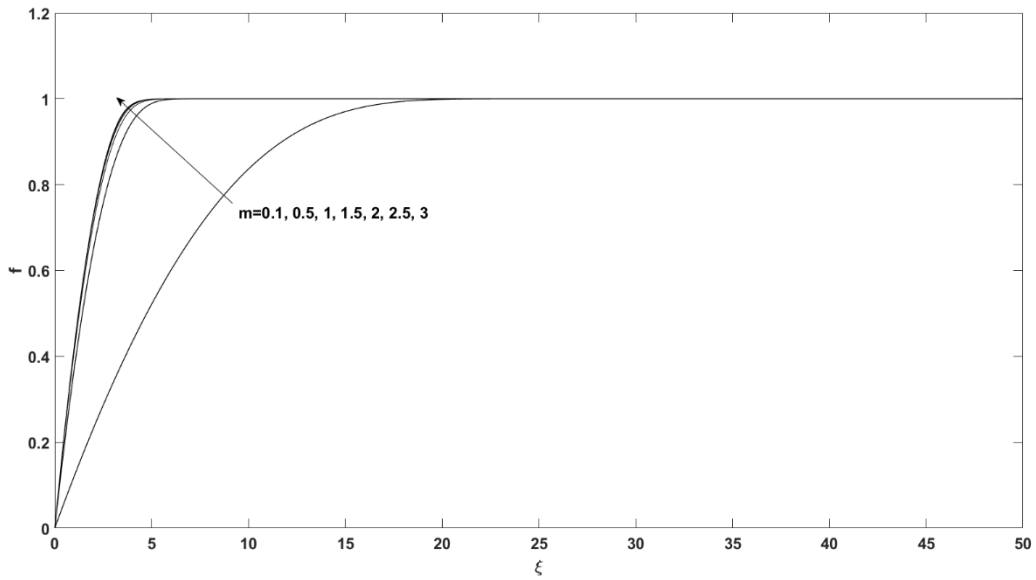
Sınır tabakası problemlerinde kabüller gereği akışkan hızının dikey bileşeni yatay bileşenine göre oldukça küçük kabul edildiğinden momentum denklemlerinin çözümlerinde genellikle yatay bileşen ile ilgilenilir. Bu nedenle akışkan hızını

tartışılan bölümlerde sadece hızın yatay bileşeni ile ilgili benzerlik fonksiyonunun f(ξ) çözümü bulunacak ve sınır tabakası davranışı benzerlik fonksiyonu f(ξ) üzerinden değerlendirilecektir. Ancak yatay bileşen ile alakalı benzerlik fonksiyonumuz g(ξ)' nin başta f(ξ) olmak üzere diğer bileşenler üzerindeki etkisi göz ardı edilemez. Buna göre Şekil 4.1' de sınır tabakasının davranışını inceleyebileceğimiz hızın yatay yöndeki bileşeni ile ilgili benzerlik değişkeninin farklı Deborah sayılarında davranışı betimlenmiştir. Deborah sayısı akışkan problemindeki karakteristik zamanların oranı olmakla birlikte Newtonyen akışkanın zaman sabiti ile ilişkili doğru orantılıdır. Diğer bir deyişle Deborah sayısı depoladıkları elastik enerjiyi sönümlemesi ile geçen süre (relaxation time) ile gözlem süresi gibi bir karakteristik zamanın oranı da denebilir. Bu yüzden yüksek zaman sabitine sahip akışkanlar yüksek Deborah sayıları ile temsil edilebileceği gibi akmaya karşı daha yüksek direnç göstereceklerdir. Bu gözlemleri doğrulayan davranışlar Şekil 4.1'de f(ξ) ' in ξ benzerlik değişkenine göre farklı Deborah sayılarında yapılmış çözümlerinde verilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere Deborah sayısı arttıkça akışkanın davranışı Newtonyen kabulden uzaklaşıp ve akmaya karşı gösterdiği direnç artmıştır. Benzerlik değişkenimiz ξ plakanın üzerindeki yatay koordinat ile ilişkili olduğundan akışkan hızının ξ' nin artan değerleri için büyük Deborah sayılarında akışkanın maksimum hızını yakalamak için plaka üzerinde kat etmesi gereken mesafe artacaktır. Bu durum plaka üzerinde yüksek sürtünmeli ancak daha düşük bir akışkan hızına ve dolayısıyla daha kalın bir sınır tabakasına işaret eder. Dikkat edilirse Newtonyen akışkan ve düşük Deborah sayılarında sürtünmesi ideal akış durumuna daha yakın olunmakla birlikte sınır tabakası incelecektir. Sürtünmesiz akış durumunda sonsuzdan gelen akışkan hızının plaka üzerinde hiçbir zaman değişmeyeceği ve sınır tabakasının oluşmayacağı hatırlatılmalıdır.



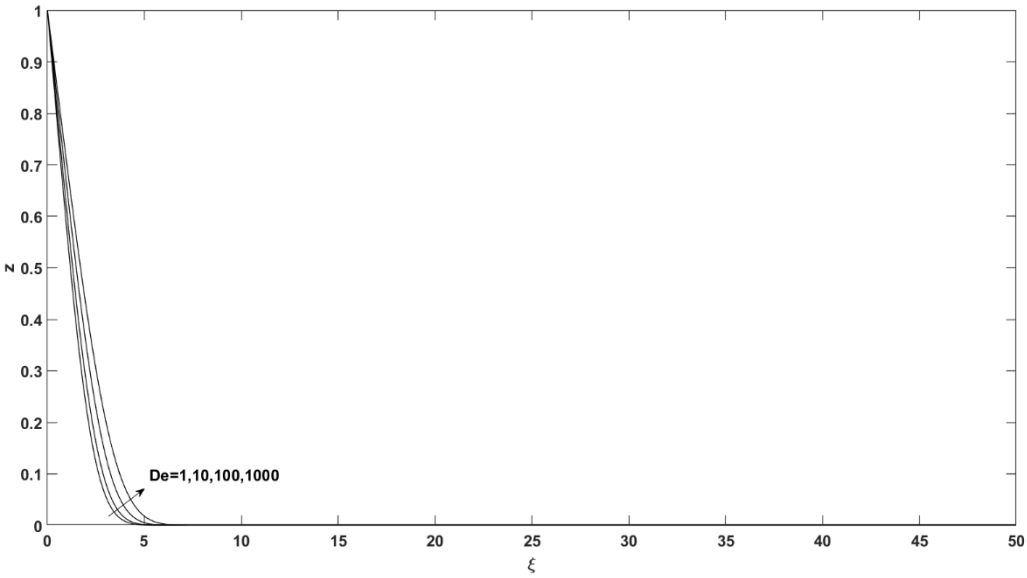
Şekil 4. 2 Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı n değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (m=2 , De=10).

Benzerlik değişkeni f için diğer bir benzer davranış ise geleneksel power-law sabiti n için Şekil 4.2.' den gözlemlenebilir. Newtonyen akışkan için $n = 1$ iken, $n > 1$ durumunda akıcılık azalır, $n < 1$ olduğunda ise akışkan daha akıcı hale gelecektir. Dolayısıyla $n < 1$ için daha kolay akan bir akışkan ideal akışa yakın davranış çizer ve dar bir sınır tabaka kalınlığına götürür. Bu olay Şekil 4.2.' de gözlemlendiği gibi, tam tersi durumda $n > 1$ için gözlemlenir ve sınır tabakasının daha belirgin olup kalınlaştığı söylenebilir.



Şekil 4. 3 Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı n değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5 , De=10)

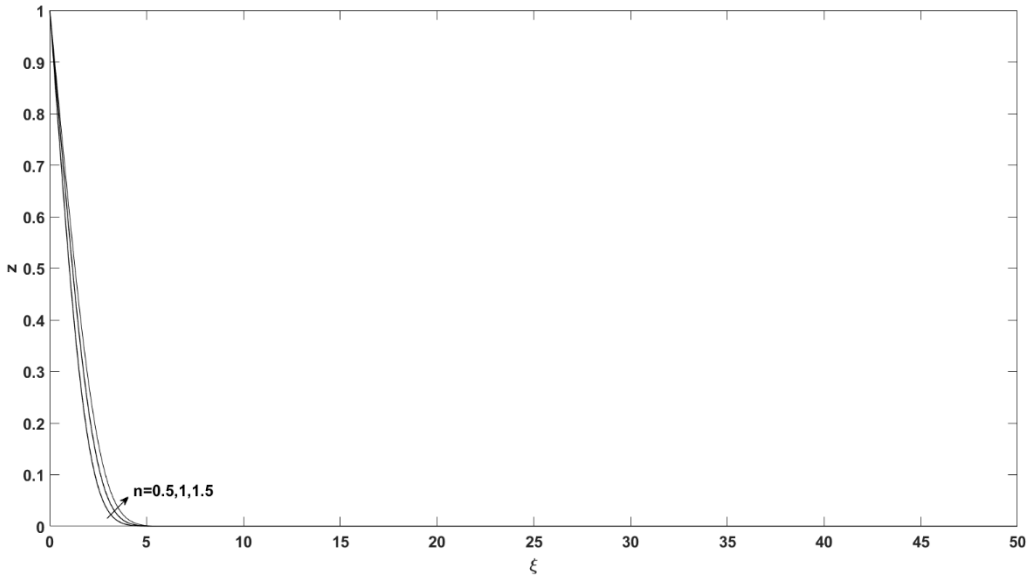
Deformasyon hızının ve bu sayede akışkan davranışının kolaylıkla değiştirilebildiği diğer bir power-law sabiti olan m dikkat edilirse akışkan modelinde n değerine göre paydada olup, benzer akışkan modellerinde $m = 2$ değerini alır. Bu sayede $m = 2$ değeri civarında artan ve azalan değerler bir önceki şekilde tartışılan n değerlerine göre tam tersi bir etki göstermelidir. Bu husus belirtildiği gibi Şekil 4.3.' de görülebilir. Ancak dikkat edilirse $m = 0.5$ değerinden sonra artan m değerleri için akışkanlar arasında çok büyük bir davranış farkı gözlemlenememiştir. Sonuç olarak geleneksel modellerde kullanılan $m = 2$' nin üzerlerindeki değerlerde çok bir fark ortaya konulamayacağı ancak m' in çok küçük değerlerinin akışkan hızını önemli ölçüde azaltıp sınır tabakasını ciddi oranda kalınlaştıracağı aşikardır.



Şekil 4. 4 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı Deborah sayıları için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5, m=2,Pr=1).

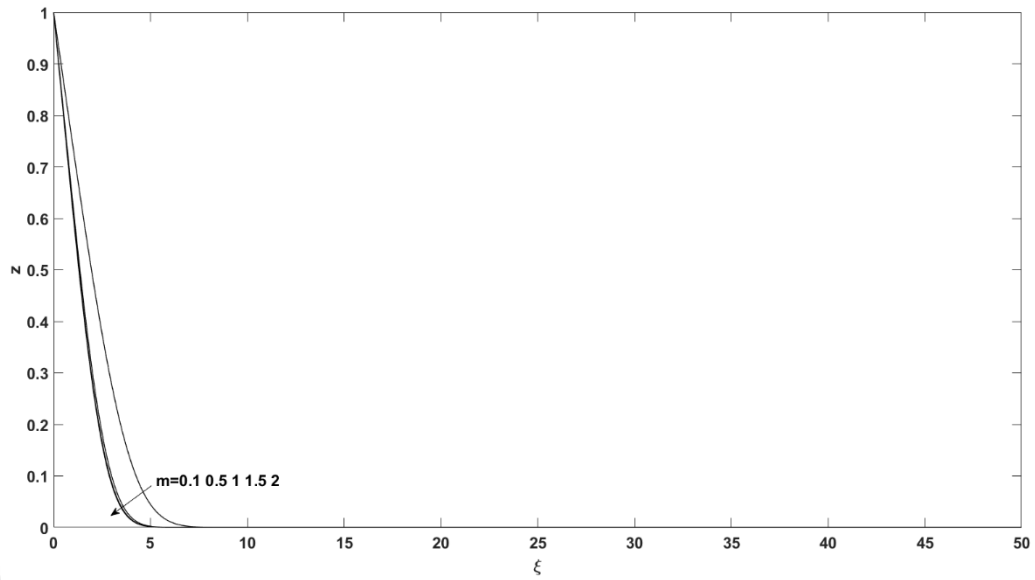
T_∞^* sıcaklığında sonsuzdan gelen akışkanı farklı sıcaklıktaki plakaya temas ettikten sonra hızında olduğu gibi sıcaklığında da değişim olacaktır. Bu değişim akışkanın plakaya temas ettiği yerdeki plaka sıcaklığı T_w^* ile T_∞^* arasında olacaktır. T_w^* ile T_∞^* arasındaki geçiş akışkan modeli ve akış tipine bağlı olduğu gibi aslen plaka ve akışkan arasındaki sıcaklık farkından ortaya çıkan ısı transferinin bir nedenidir. Bu nedenle akışkan içerisinde sıcaklık değişimi dikkatlice incelenmelidir. Şekil 4.4.' de farklı Deborah sayılarında akışkan sıcaklığı ile ilgili benzerlik değişkeni z' nin, plaka üzerindeki yatay koordinat ile ilişkili ξ benzerlik değişkenine göre değişimi gösterilmiştir. Şekilde plaka sıcaklığı $T_w^* > T_\infty^*$ durumu ele alınmış olup akışkanın plakaya temas ettikten sonra T_w^* sıcaklığını alıp plaka üzerinde düşey koordinatta ilerlediğimiz zaman dar bir mesafede tekrar sıcaklığının T_∞^*' a düşmesi gerekir. Bu dar mesafe plaka üzerindeki yatay koordinatta değişmekte olup ısıl sınır tabakayı oluşturmaktadır. Momentum sınır tabakasında olduğu gibi bu sınır tabakanın da kalınlığından bahsedilebilir. Kalın sınır tabaka değişimin önemli olduğunu vurgularken, ısıl sınır tabaka inceldikçe bu değişim çok daha dar bir düşey eksende değiştiğini vurgular. Dolayısıyla düşey yönde sıcaklık gradyeninin ısıl sınır tabakasının daralabilmesi için artması gerekmektedir. Şekilden anlaşılacağı üzere düşük Deborah sayılarında akışkan kendi sıcaklığını plaka doğrultusunda daha erken yakaladığı söylenir. Bu daha dar ısıl sınır tabakaya işaret eder. Tam tersi durumda ise

sıcaklık gradyeni azalacağından düşey yöndeki değişim daha geniş bir düşey doğrultudaki aralıkta gözlemlenmiştir.



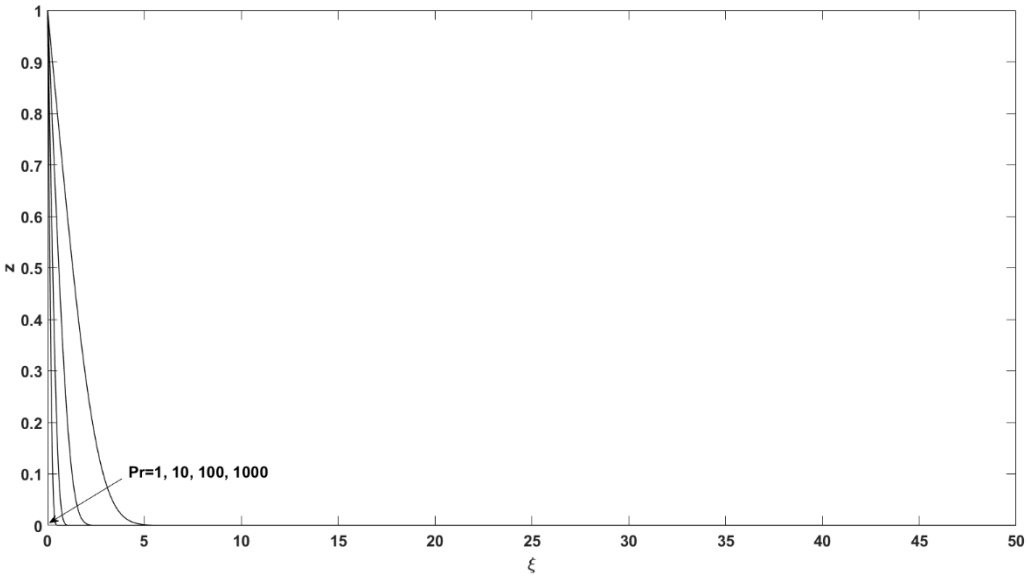
Şekil 4. 5 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı n değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (m=2, De=10, Pr=1)

Şekil 4.5.' de ise sıcaklık değişimini değerlendirebileceğimiz benzerlik fonksiyonu z ' nin farklı geleneksel power-law sabiti n değerlerinde benzerlik değişkeni ξ' ye göre değişimi verilmiştir. Dikkat edilirse düşey yönde yüksek sıcaklık gradyeni hızlı soğumaya işaret etmekle birlikte ısıl sınır tabakanın incelmesine neden olur. Plaka üzerinde hareket ettikçe de sabit bir n değerinde sıcaklık gradyeninin düştüğü ve lokal olarak sınır tabakasının kalınlaştığı söylenmelidir. Momentum denklemindeki çözümleri de göz önüne aldığımızda daha akıcı bir akışkanın plaka üzerindeki hız ve sıcaklık değişimleri çok dar bir bölgeye hapsolmakla birlikte hem momentum hem ısıl sınır tabaka daha ince olacaktır.



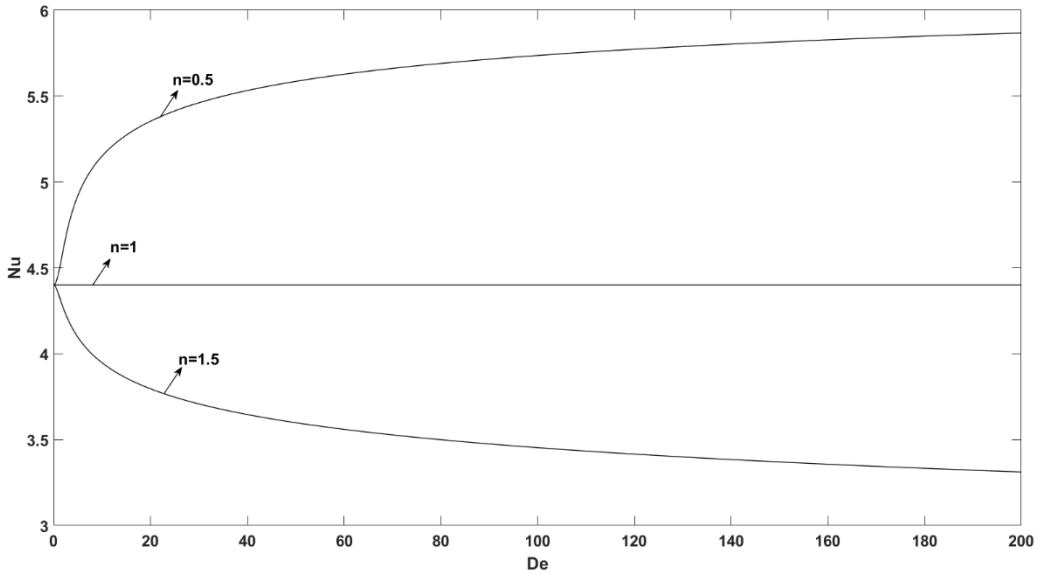
Şekil 4. 6 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı m değerleri için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5, De=10,Pr=1).

Momentum denklemleri ile ilişki kısımdaki çözümlere benzer olarak Şekil 4.6'da da n ve m arasındaki ters orantı ısıl sınır tabaka değişiminde de gözlemlenmiştir. Buna göre m değerlerinin artması ile akışkan deformasyon hızı azalmakta dolayısıyla daha kalın bir sınır tabakaya işaret eder. Benzer durum şekilden anlaşılacağı üzere ısıl sınır tabakada da görülebilir. Yüksek m değerine sahip olan akışkanlar plakaya daha çok yapışacağı için plaka hızını aldıktan sonra tekrar sonsuzdaki sıcaklıklarını yakalamaları düşey koordinata göre daha uzun bir mesafe alır denebilir.



Şekil 4. 7 Benzerlik fonksiyonu z' nin farklı Prandtl sayıları için ξ benzerlik değişkenine göre değişimi (n=1.5, m=2 De=10).

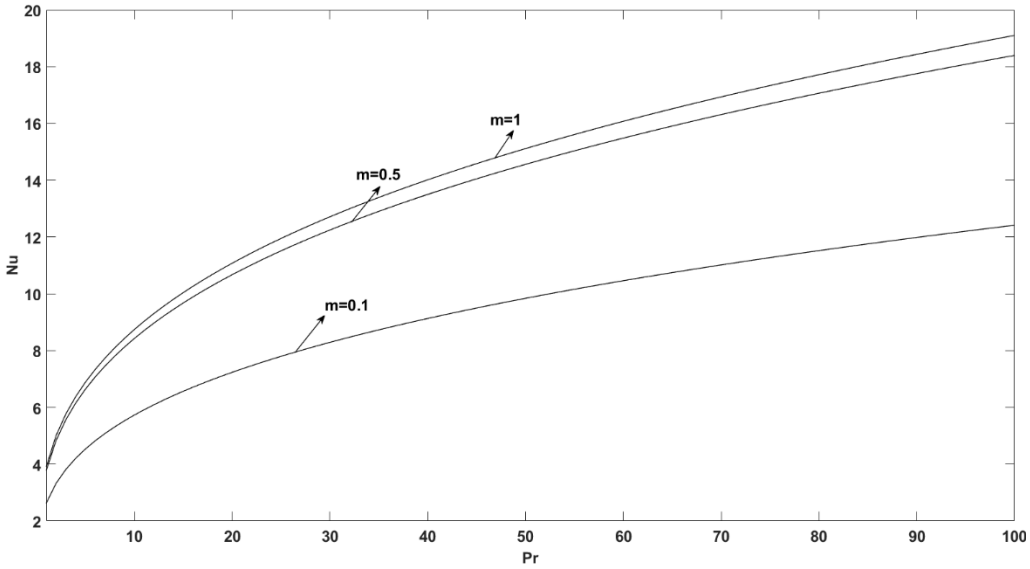
Şekil 4.7.' de farklı Prandtl sayıları için benzerlik değişkeni z' nin benzerlik değişkeni ξ' ye göre değişimi verilmiştir. Prandtl sayısı akışkanın momentum iletim kabiliyetinin ısıl iletim kabiliyetine oranı denebilir. Başta cıva ($\mathrm{Pr} = 0.03$) olmak üzere sıvı metaller gibi yüksek ısıl iletim kabiliyetine sahip akışkanların Prandtl sayıları düşük olmakla birlikte momentum yani hareket kabiliyetleri düşüktür ve oldukça viskozdurlar. Bu tarz akışkanlar soğutmanın dolayısıyla ısıl iletkenliğin çok önemli olduğu nükleer santrallere ait özel soğutma çevrimlerinde kullanılır. Şekilden anlaşılacağı üzere yüksek Prandtl sayısına sahip akışkan ısıl iletim kabiliyeti düşük ancak akıcılığı yüksek olacaktır bu da ısıl sınır tabakasında kalınlaşmaya yol açar.



Şekil 4. 8 Nusselt sayısının farklı n değerleri için Deborah sayısına göre değişimi (m=2,Re=10).

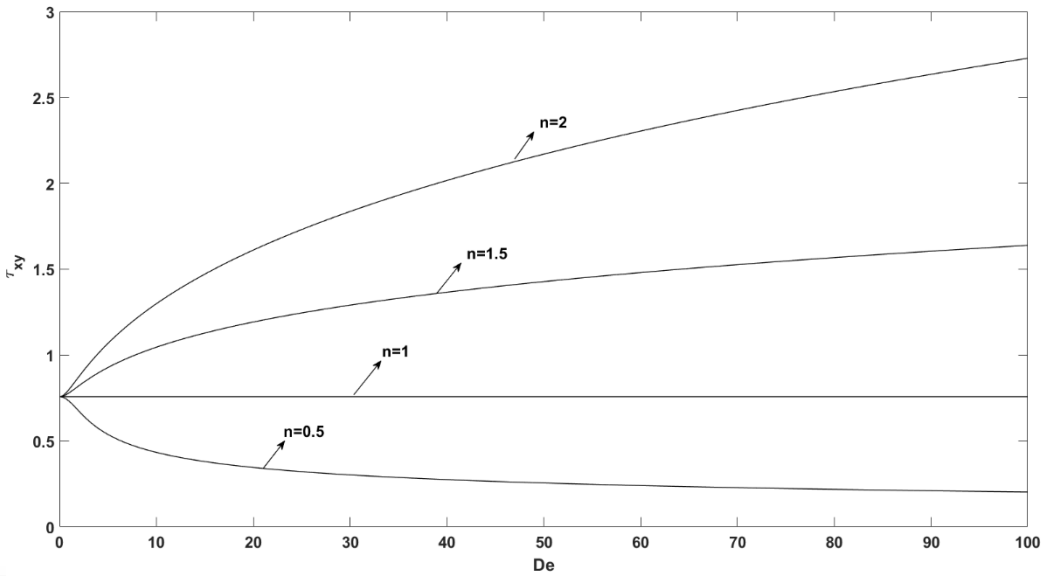
Nusselt sayısı taşınım ile aktarılan ısı transfer hızının, iletim yolu ile gerçekleşene oranıdır. Sistemde anlık olarak taşınım yolu ile ısı transferi miktarı, iletim yolu ile gerçekleşen ısı transfer miktarına göre arttıkça Nusselt sayısı büyüyecektir. Isı transfer performansının taşınım yolu ile arttırmak istenilen sistemlerde Nusselt sayısı mümkün olduğunca arttırılmalıdır. Bundan dolayı Carreau-Yasuda akışkanının ısı transfer özellikleri Şekil 4.8.' de Nusselt sayısı üzerinden tartışılacaktır. Bu şekilde farklı n değerleri için Nusselt sayısının Deborah sayısına göre değişimi çizilmiştir. Nusselt sayısının Deborah sayısına göre üç farklı davranışı vardır. Bu davranışlar power-law sabitimiz ile doğrudan ilişkili olduğu görülebilir. Öncelikle akışkan modelinden de dikkat edilirse $n = 1$ durumu aynı zamanda Newtonyen durumu işaret ettiği için Deborah sayısı ile ilgili tüm terimler yok olmaktadır. Bunun sonucunda şekilden de görüldüğü üzere Nusselt sayısı ve Deborah sayısı arasında bir ilişki bulunmamaktadır. Akışkanın Newtonyen akışkana göre daha akıcı hale geldiği $n < 1$ durumlarında ise Nusselt sayısı artan Deborah sayısı ile artmakta bu da ısı transferinin büyük oranda taşınım ile gerçekleştiğini söyler. Önceden azalan n değerlerinde sınır tabakasının kalınlaştığına işaret etmiştik. Isıl sınır tabakasın başlıca oluşum nedeni taşınım etkisidir. Dolayısıyla sıcaklık değişiminin daha net gözlemlendiği kalın bir ısıl sınır tabakada taşınım etkileri daha baskın olarak bu durumda Nusselt sayısının artmasına neden olacaktır. Ayrıca $n > 1$ durumunda ise akışkanın akıcılığı Newtonyen akışkana göre zorlaşacağından toplam ısı transferinde

iletim etkileri ön plana çıkmış ve artan Deborah sayılarında Nusselt sayısında bir düşüş gözlemlenmiştir.



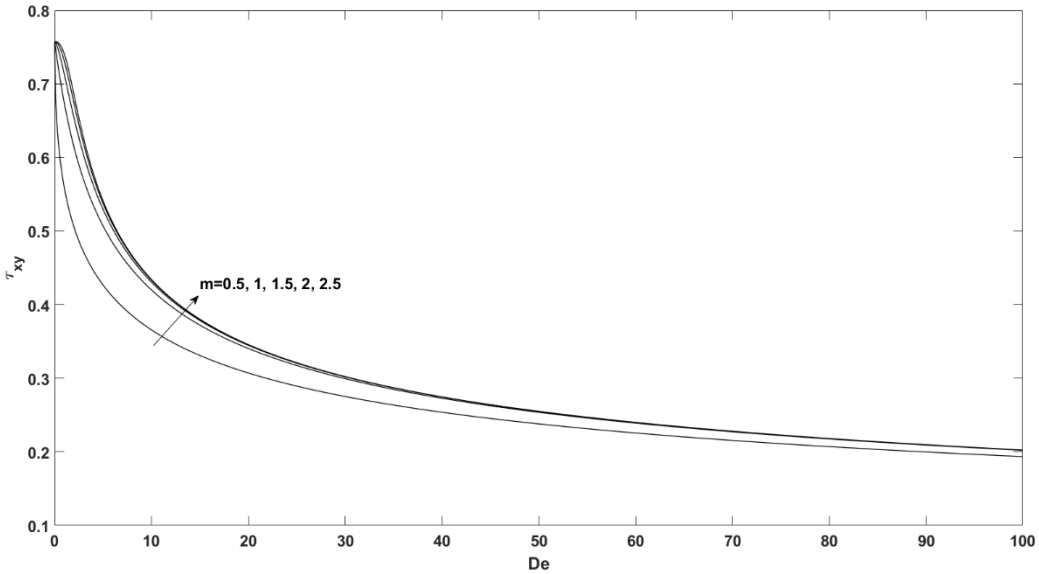
Şekil 4. 9 Nusselt sayısının farklı m değerleri için Prandtl sayısına göre değişimi (n=0.5, De=10,Re=10)

Daha önceki analizlerden ve grafiklerin yorumlanmasından power-law sabitleri m ve n' nin birbirlerine göre ters etki gösterdiğinin sonucu çıkarılmıştı. Yine bu gözleme doğrulamakla birlikte bir önceki şekil 4.8 ve Şekil 4.9 arasında benzer ilişki bulunmaktadır. Bu sefer grafikten anlaşılacağı üzere n parametresinin etkilerinin aksine artan m değerlerinde ısı transferinde taşınım etkileri artmakta Nusselt sayısı buna bağlı olarak yükselmektedir. Ayrıca Prandtl sayısındaki artış momentum transfer kapasitesinin arttığını ve bundan dolayı taşınım etkilerinin artışını işaret eder. Bunu doğrular bir biçimde benzer etkiler Prandtl sayısı üzerinden Nusselt sayısındaki artış ile Şekil 4.9. üzerinden gözlemlenebilir.



Şekil 4. 10 Plaka üzerindeki boyutsuz kayma gerilmesinin farklı n değerleri için Deborah sayısına göre değişimi (m=2, Pr=1,Re=10).

Newtonyen akışkan $n = 1$ referans alındığında artan n değerleri için akışkan daha viskoz hale geleceği için akışkan tarafından plaka yüzeyine uygulanan kayma gerilmesi artacaktır. Tam tersi durumda ise bir nevi plaka ve akışkan arasındaki temas direnci azaldığı ve kayma gerilmesinde buna bağlı olarak azaldığı Şekil 4.10.' un da desteklediği şekilde söylenir. Şekil 4.11.' dan fark edilmesi gereken farklı bir davranış ise kayma gerilmesinin Deborah sayısına göre farklı değişim durumlarının olmasıdır. Daha önce belirtildiği gibi $n = 1$ durumunda Deborah sayısının etkisi kaybolacağından artan Deborah sayılarında kayma gerilmesinin değişimi olmayacaktır. Ayrıca şekilden $n > 1$ durumunda kayma gerilmesinin artan Deborah sayısı ile ciddi şekilde artacağı diğer durumda ise yani $n < 1$ olduğunda bu ilişkinin tam tersine döndüğü (kayma gerilmesi artan Deborah sayısı ile azalır) gözlemlenebilir.



Şekil 4. 11 Plaka üzerindeki boyutsuz kayma gerilmesinin farklı m değerleri için Deborah sayısına göre değişimi (n=0.5, Pr=1,Re=10).

Son olarak Şekil 4.11.'de boyutsuz kayma gerilmesinin Deborah sayısına göre farklı m değerleri için değişimi verilmiştir. Boyutsuz kayma gerilmesi artan m değerleri için artmaktadır. Ancak bu artış m değerinin paydada bulunmasından dolayı bir noktaya kadar görülmekte ($m = 1.5$) sonraki eğrilerde herhangi bir fark bulunmamaktadır. İlave olarak yine şekilden artan Deborah sayılarında kayma gerilmesinin azaldığı söylense de bu durum $n = 0.5$ durumundan kaynaklandığı hatırlatılmalıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez kapsamında üniform hızlı Newtonyen olmayan bir akışkanın, akışa paralel ince bir plaka üzerindeki kararlı, laminer, sürtünmeli ve iki boyutlu akışı incelenmiştir. Plaka üzerinde çok dar bölgede akışa ait değişimlerin gerçekleştiği, dış bölgede ise akışın sürtünmesiz ve potansiyel akış teorisine uyduğu kabul edilmiştir. İlk olarak probleme uygun kartezyen koordinatlarda Carreau-Yasuda akışkan modelinin kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Plaka üzerinde gerçekleşen akışta değişimler neredeyse plakaya yapışık çok dar bir akışkan filmi içerisinde gerçekleştiği kabulü sınır tabakası teorisinin temelini oluşturmaktadır. Sonsuzdan gelen üniform hızdaki akışkan plakaya temas ettikten sonra çok dar bölgede kaymama şartından hızı sıfırdan sonsuzdaki hızına kadar bir değişim gösterir. Bu hız değişimini veren fonksiyonlar akışkanın hız profili olup momentum denklemlerinin süreklilik denklemi ile çözümü ile bulunur. Ancak Newtonyen akışkana ait momentum ya da bilinen adıyla Navier-Stokes denklemlerinin bile tam çözümleri henüz bulunamamış ve sayısal çözümleri oldukça zorlayıcıyken Newtonyen olmayan akışkanları tanımlayan modellerden türetilen momentum denklemlerinin çözümü çok daha zordur. Bu yüzden sınır tabakası teorisinden gelen kabuller ile momentum denklemlerindeki bazı terimler mertebe sırasına göre birbirlerine göre ihmal edilip basitleştirilmiş sınır tabaka denklemleri elde edilir. Bu çalışmada sınır tabakası kabulleri momentum denklemlerinden daha önce kayma gerilmelerine uygulanmış ve en genel momentum denklemleri elde edilmeden önce sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir. Ardından bu denklemlerin boyutsuz halleri elde edilmiştir. Çalışmanın bu adımdan sonraki kısımlarında momentum denkleminin genel hali kullanılmayacağı için türetilmesi gerek görülmemiştir. Momentum sınır tabakası denklemleri ile süreklilik denklemi kısmi diferansiyel denklem olduğu için sayısal çözüm teknikleri adi diferansiyel denklem formlarına uygulanmak istenmiştir. Bu yüzden momentum ve süreklilik denklemlerinin invaryant yani değişmez kaldığı simetrileri bulunmuştur. Bu simetriler vasıtası ile benzerlik değişkeni ve fonksiyonları bulunmuştur. Orijinal değişkenleri benzerlik değişkenleri cinsinden denklemlere yerleştirdiğimizde adi diferansiyel denklem yapısına indirgeme tamamlanır. Hız alanlarının sayısal denklemlerine geçmeden önce aynı süreç sıcaklık profillerinin veren enerji denklemine uygulanmıştır. Benzerlik değişkenleri ve adi diferansiyel denklem sistemine indirgeme enerji denklemine de uygulanmış olup, son halde elimizde benzerlik dönüşümleri

yapılmış momentum, süreklilik ve enerji denklemi bulunmaktadır. Daha sonra bu denklemler sayısal çözümlere en uygun form olan birinci mertebe adi diferansiyel denklem sistemi halinde temsil edilmiştir. Söz konusu birinci mertebe diferansiyel denklem sistemini çözmek için Matlab bünyesinde sınır değer problemleri için geliştirilmiş bvp4c komutu kullanılmıştır. Sayısal çözümlerden elde edilen veriler ile şekiller çizdirilmiş ve yorumlanmıştır. Akış davranışını görebileceğimiz şekilde boyutsuz parametrelerin değişimine göre tüm benzerlik değişkenlerin davranışları şekiller vasıtası ile gösterilmiştir. Tüm davranışalar Newtonyen olmayan akışkana ait power-law sabitleri ve Deborah sayısı cinsinden yorumlanmıştır. Ayrıca enerji denkleminde ortaya çıkan Prandtl sayısı ve Nusselt sayısının üzerinde şekiller vasıtası ile bulunulmuştur. Şekillerden elde edilen sonuçların fiziki karşılıkları belirtilmekle birlikte analitik sonuçların da ilişkileri üzerinde durulmuştur.

Çalışma kapsamından elde edilen sonuçlara kısaca aşağıdaki şekilde madde madde değinelim.

- Akışkan hızı plaka üzerinde sabit noktada artan Deborah sayısı ile azalmakta ve sonsuzdaki hızını yakalaması için kat etmesi gereken mesafe plaka ucuna doğru kaymaktadır
- Aynı etki durum akışkanın daha az akıcı hale gelmesine neden olan artan geleneksel power-law sabitinin etkisinden de kaynaklanmaktadır.
- Paydada bulunan ikincil power-law sabitimiz arttıkça akışkan hızımız artar ve akış üniform hıza yakın bir davranış gösterir.
- Akışkanın akmaya karşı gösterdiği direnç arttıkça akış daha viskoz olurken sınır tabakası daha kalın hale gelir.
- Akıcılığı ve akışkan hızını arttıran tüm etkiler akışkan davranışını ideal akışa yaklaştırır ve sınır tabakası gittikçe incelir.
- Artan Deborah sayısı ile akışkan sıcaklığı daha düşük hale gelir ya da plaka sıcaklığından sonsuzdaki akışkan sıcaklığını yakalaması daha dar bir bölgede gerçekleşir.
- Geleneksel power-law sabitimiz artan değerlerinde sınır tabakası içerisindeki sabit bir noktanın sıcaklığı artar.

- Paydadaki ikincil power-law sabitinin artan değerlerinde akışkanın sıcaklığı azalacaktır.
- Artan sıcaklık ısıl sınır tabakayı kalınlaştırırken sınır tabakası içerisindeki bir noktanın sıcaklığının azalması ısıl sınır tabakanın darlaştığını gösterir.
- Momentum sınır tabakasını kalınlaştıran yani akışkan hızını düşüren tüm etkiler sıcaklığı arttırırken ısıl sınır tabakayı da kalınlaştırır.
- Azalan Prandtl sayısı ile akışkan ısıl sınır tabaka incelirken akışkan sıcaklığı düşer.
- Deborah sayısının artması ile taşınım etkilerinin arttığını gösteren artan Nusselt sayısı sadece Newtonyen akışkan referans alındığında daha akıcı olan Carreau-Yasuda akışkanlarında gözlemlenir.
- Newtonyen akışkana göre daha az akıcı ya da daha viskoz Carreau-Yasuda akışkanlarında taşınım etkileri artan Deborah sayıları ile azalır. Dolayısıyla Nusselt sayısı da azalacaktır.
- İkincil power-law sabitimizin artan değerlerinde Nusselt sayısı azalırken Prandtl sayısının artan değerlerinde Nusselt sayısı artar.
- Sadece Newtonyen akışkana göre daha az akıcı olan akışkanlarda plaka üzerindeki kayma gerilmesi artan birincil power-law sabiti ve Deborah sayısı ile artar.
- Sadece Newtonyen akışkana göre daha az akıcı olan akışkanlarda plaka üzerindeki kayma gerilmesi artan birincil power-law sabiti ve Deborah sayısı ile artar.
- Newtonyen akışkana daha az viskoz ya da akıcı olan bir Carreau-Yasuda akışkanının plakaya uyguladığı kayma gerilmesi artan Deborah sayısı ile azalır.
- İkincil power-law sabitinin artan değerleri plaka üzerindeki kayma gerilmesini arttırmaktadır.

Çalışmanın devamı niteliğindeki fikirler oldukça fazla sayıdadır. Ancak bu çalışmaya ilave edilecek birkaç husus aşağıdaki maddeler ile verilebilir.

- Akışın sürekli olduğu kabulü zamana bağımlı değişkenler ile değiştirilebilir.
- Plaka üzerindeki akışa neden olan sonsuzdan gelen üniform akış etkisi yerine hareketli plaka durumu incelenebilir.
- Akışkanda nano parçacık ve manyetik alan etkileri göz önüne alınabilir.
- Gözenekli plaka durumu ve farklı tipteki momentum sınır tabaka denklemleri incelenebilir.

- Tüm akışkan özellikleri sıcaklığa bağlı kabul edilebilir.
- Enerji denkleminde sürtünmeye bağlı ısınma etkileri kısaca viskoz ısınma sonuçları çalışılabilir.
- Radyasyon gibi farklı ısı transferi mekanizmaları denklemlere ilave edilebilir.
- Geleneksel olmayan sonlu farklar yöntemleri denklemler için programlanabilir.

Bu çalışma neticesinde sunulan yorumların büyük kısmı sayısal çözümlerin grafikleri vasıtası ile yapılmış olup, analitik çözümler ile desteklenebilir. Ancak denklemlerin yapısı gereği analitik sonuçların yaklaşık çözümler olabilme ihtimalleri oldukça yüksektir.

KAYNAKLAR

1. Morrison, F.A. An Introduction of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, Newyork ABD, 2013, 946 s.
2. Morrison, F.A. Understanding Rheology, Oxford University Press, Newyork ABD, 2001, 446 s.
3. Astarita, G., Marucci, G. Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics, McGraw-Hill Book, Berkshire, İngiltere, 1974, 288 s.
4. Vajravelu, K., Prasad, K.V. Chiu-on, N. Unsteady flow and heat transfer in a thin film of Ostwald-de Waele liquid over a stretching surface. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012, 17, 4163-4173.
5. Cross. M. M. Rheology of Non-Newtonian Fluids: A new Flow Equation For Pseudoplastic Systems. Journal of Colloid Science. 1965, 20(5), 417-437.
6. Siddiqui, A.M., Ahmed, M., Ghori, Q.K. Couette and Poiseuille flows for non-Newtonian fluids. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2006, 7(1), 15-26.
7. Khellaf, K., Lauriat G. Numerical study of heat transfer in a non-Newtonian Carreau-fluid between rotating concentric vertical cylinders. Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics. 2000, 89, 45-61.
8. Lashgari, I., Pralits, J.O., Giannetti, F., Brandt, L. First instability of the flow of shear-thinning and shear thickening fluids past a cylinder. Journal of Fluid Mechanics 2012, 701, 201-227.
9. Patel, M., Timol, M.G. Numerical treatment of Powell-Eyring fluid flow using method of satisfaction of asymptotic boundary conditions. Applied Numerical Mathematics, 2009, 59, 2584-2592.
10. Eley, D.D., Pepper, D.C. Mechanisms for the Relaxation Theory of Viscosity. Nature Press. Cambridge, İngiltere, 1944, 428 s.
11. Bird, R.B., Armstrong R.C., Hassager, O. Dynamics of Polymeric Liquids, Wiley Interscience Publication, New York, ABD, 1987, 633.
12. Lin, F., Liu, C., Zhang, P. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2005, 58(11), 1437-1471.
13. Bonn, D., Kobylko, M., Bohn, S., Meunier, J., Morozov, A., Saarlos W. Rod-climbing effect in Newtonian fluids. Physical Review Letters, 2004, 93(21), 214503-4.
14. Aksoy, Y., Pakdemirli, M. Approximate analytical solutions for flow of a third-grade fluid through a parallel-plate channel filled with a porous medium. Transport in Porous Media, 2010, 83(2), 375-395.
15. Aksoy, Y., Effects of couple stresses on the heat transfer and entropy generation rates for a flow between parallel plates with constant heat flux. International Journal of Thermal Sciences 2016, 107, 1-12.
16. Irgens, F., Rheology and non-Newtonian Fluids, Springer, Trondheim, Norveç, 2013, 185 s.
17. Bird, R. B. Useful non-Newtonian models. Annual Review of Fluid Mechanics, 1976, 8(1), 13-34.
18. Meter, D.M., Bird, R. B. Tube flow of non-Newtonian polymer solutions: PART I. laminar flow and rheological models. AIChE Journal, 1964, 10(6), 878-881.
19. Al-Zahrani, S. M. A generalized rheological model for shear thinning fluids, 1997, 17, 211-215.

20. Koszkul, J., Nabialek, J. Viscosity models in simulation of the filling stage of the injection molding process. Journal of Materials Processing Technology, 2004, 157-158, 183-187.
21. Raju, K.V.S.N., Krishna, D., Rama Devi, G., Reddy, P. J., Yaseen, M. Assesment of applicability of Carreau, Ellis, and Cross models to the viscosity data of resin solutions. Journal of Applied Polymer Science. 1993, 48, 2101-2112.
22. Galindo-Rosales, F.J., Rubio-Hernandez, F.J., Sevilla, A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids. Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011, 166, 5-6, 321-325.
23. Khalil, M., Mohamed Jan, B. Abdul Raman, A. A. Rheological and statistical evaluation of nontraditional lightweight completion fluid and its dependence on temperature. Journal of Petroleum Science and Engineering. 2011, 77, 27-33.
24. Mitsuishi, N., Aoyagi, Y. Non-Newtonian flow in non-circular ducts. Chemical Engineering Science. 1969, 24, 309-319.
25. Kazunori, Y. A multi-mode viscosity model and its applicability to non-Newtonian fluids. Journal of Textile Engineering. 2006, 52(4), 171-173.
26. Galindo-Rosales, F.J., Rubio-Hernandez, F.J., Sevilla, A., Ewoldt R.H. How Dr. Malcom M. Cross may have tackled the development of "An apparent viscosity function for shear thickening fluids". Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011, 166, 1421-1424.
27. Matsuhisa, S., Bird, R.B. An analytical and numerical solutions for laminar flow of the non-Newtonian Ellis fluid. AIChE Journal, 1965, 11(4), 588-595.
28. Pinho, F.T., Oliveira, P.J. Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien-Tanner fluid. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2000, 43, 2273-2287.
29. Filip, P., David, J. Axial Couette-Poiseuille flow of power-law viscoplastic fluids in concentric annuli. Journal of Petroleum Science and Engineering. 2003, 40, 111-119.
30. Dash, R.K., Mehta, K.N., Jayaraman, G. Casson fluid flow in pipe filled with a homogeneous porous medium. International Journal of Engineering Science, 1996, 34(10), 1145-1156.
31. Boyd, J., Buick, M.J., Green, S. Analysis of the Casson and Carreau-Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flow using the lattice Boltzmann method. Physics of Fluids. 2007, 19, 093103.
32. El-Hakeem, A., El-Naby A., El-Misery A., El-Kareem M. Separation in the flow through peristaltic motion of a carreau fluid in uniform tube. Physica A. 2004, 343, 1-14.
33. Sümer, Hikmet. Newtonyen olmayan cross akışkanının sınır tabakası içerisindeki davranışının incelenmesi. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği, Manisa, 2019, 58 (Yüksek Lisans Tezi).
34. Schlichting, H. Boundary Layer Theory McGraw-Hill, New York, ABD, 1979, 817 s.
35. Pakdemirli, M., Hayat, T., Aksoy Y. Group-theoretic approach to boundary layer equations of an Oldroy-B fluid. Zeistchrift für Naturforschhung A. 2013, Volume 68 Issue 12, 785-790.

36. Deger, G., Pakdemirli, M., Aksoy, Y. Symmetry Analysis of Boundary Layer Equations of an Upper Convected Maxwell Fluid with Magnetohydrodynamic Flow. Zeitschrift für Naturforschung A. 2011, Volume 66, Issue 5, 321–328.
37. Aksoy Y., Pakdemirli, M., Khalique C.M. Boundary layer equations and stretching sheet solutions for the modified second grade fluid. International Journal of Engineering Science . 2007, Volume 45, Issue 10, 829-841.
38. Pakdemirli, M., Aksoy, Y., Yürüsoy, M., Khalique C.M. Symmetries of boundary layer equations of power-law fluids of second grade. Acta Mechanica Sinica. 2008, 24 (6), 661-670
39. Sarı, G., Pakdemirli, M., Aksoy,Y. Boundary layer equations and Lie group analysis of a Sisko fluid. Journal of Applied Mathematics. 2012, Special Issue 10.
40. Aksoy, Y., Hayat, T., Pakdemirli, M. Boundary layer theory and symmetry analysis of a Williamson fluid. Zeitschrift für Naturforschung A. 2012, 67 (6-7), 363-368.
41. Hayat,T., Pakdemirli, M., Aksoy, Y. Similarity solutions for boundary layer equations of a Powel-Eyring fluid. Mathematical and Computational Applications. 2013, 18(1), 62-70.

EK

MATHLAB KODU

```
tic
clear all
global m n De Pr
n=0.5;
m=2;
De=10;
Pr=1;
Re=10;
solinit = bvpinit(linspace(0,50,100),[1 0 0 0 0]);
range=0:0.1:100;
for m=[0.5 1 1.5 2 2.5]
   i=0;
for De=range
   i=i+1;
sol = bvp4c(@blp,@fsbc,solinit);
x = sol.x;
y = sol.y;
% plot(x,y(4,:));
% K(i)=y(2,1);
stress(i)=((1+abs(De*y(2,1))^m)^((n-1)/m))*y(2,1);
% Nu(i)=-Re*y(5,1);
% hold on
end
plot(range,stress)
hold on
end
toc

function fprime= blp(x,f)
global m n De Pr
fprime= [ f(2)
        (f(1)^2-x*f(1)*f(2)+3*f(3)*f(2)-1)/(3*((1+abs(De*f(2))^m)^((n-
1)/m))*(1+(((n-1)*abs(De*f(2))^m)/(1+abs(De*f(2))^m))))
        (f(1)-x*f(2))/-3
        f(5)
        f(5)*Pr*(f(3)-1/3*x*f(1))];
end

function res = fsbc(fa,fb)
res = [fa(1)
       fa(3)
       fb(1)-1
       fa(4)-1
       fb(4)];
end
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kıvanç SAMRA

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1981

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : kivanc.samra@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Atatürk Lisesi, 2000

Lisans : Balıkesir Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü, 2004

Mesleki Deneyim

Erd-Mak Mod. San.ve Tic. Ltd. Şti. 2004 – 2009
2004 – 2006 Tasarım Mühendisi
2006 – 2009 Tasarım & Üretim Müdürü

Burner Systems International 2009 – 2013
2009 – 2013 Üretim Müdürü

Renkler Makina ve Yedek Parça San. ve Tic. A.Ş. 2014 – Devam
2014 – 2015 Ticaret Müdürü
2015 – Devam Üretim Müdrü