

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ADI GECİKMELİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN LEGENDRE DALGACIK ÇÖZÜMLERİ**

**Gökçe ÖZALTUN**

**Danışman  
Prof. Dr. Necdet BİLDİK**

**II. Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Sevin GÜMGÜM**



**MANİSA-2019**

**Gökçe  
ÖZALTUN**

**LINEER VE LINEER OLMAYAN ADI GEÇİKMELİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN LEGENDRE DALGACIK ÇÖZÜMLERİ**

**2019**

## TEZ ONAYI

Gökçe ÖZALTUN tarafından hazırlanan "**Lineer ve Lineer Olmayan Adi Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Legendre Dalgacık Çözümleri**"adlı tez çalışması 12/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman** **Prof. Dr. Necdet BİLDİK**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**2.Danışman** **Dr. Öğr. Üyesi Sevin GÜMGÜM**  
İzmir Ekonomi Üniversitesi

**Jüri Üyesi** **Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ**  
Ege Üniversitesi

**Jüri Üyesi** **Doç. Dr. Ali KONURALP**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi** **Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Gökçe ÖZALTUN**



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇİNDEKİLER .....	I
ŞİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TABLO DİZİNİ .....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Tezin Planı .....	6
2. GENEL BİLGİLER .....	7
2.1. Legendre Polinomları .....	7
3. DALGACIKLAR VE LEGENDRE DALGACIKLARI .....	15
3.1. Dalgacıklar ve Dalgacık Dönüşümü.....	15
3.1.1. Sürekli Dalgacık Dönüşümü.....	15
3.1.2. Ayrık Dalgacık Dönüşümü .....	16
3.1.3. Çoklu Çözünürlük Analizi.....	17
3.1.4. Dalgacıkların Bazı Önemli Özellikleri .....	21
3.2. Legendre Dalgacıkları .....	23
4. NÜMERİK METODUN UYGULANMASI .....	26
4.1. Fonksiyon Yaklaşımı.....	26
4.2. Türevleme Matrisi .....	26
4.3. Türevleme Matrisinin Uygulaması.....	28
4.3.1. Lineer Adi Gecikmeli Nötr Diferansiyel Denklemler .....	28
4.3.2. Lineer Olmayan Adi Gecikmeli Diferansiyel Denklemler.....	29
4.4. Problemler .....	31
4.5. Yakınsaklık Analizi.....	71
4.6. Hata Sınırı.....	73
5. SONUÇ .....	75
KAYNAKLAR .....	76
ÖZGEÇMİŞ .....	82

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<b>ATM</b>	Aboodh Dönüşüm Metodu
<b>ADD</b>	Adi Diferansiyel Denklemler
<b>ADM</b>	Adomian Ayrıştırma Metodu
<b>DWT</b>	Ayrık Dalgacık Dönüşümü
<b>RKHSM</b>	Çekirdek Doğurucu Hilbert Uzayı Metodu
<b>MRA</b>	Çoklu Çözünürlük Analizi
<b>DTM</b>	Diferansiyel Dönüşüm Metodu
<b>GDD</b>	Gecikmeli Diferansiyel Denklemler
<b>FWT</b>	Hızlı Dalgacık Dönüşümü
<b>HAM</b>	Homotopi Analizi Metodu
<b>HPM</b>	Homotopi Pertürbasyon Metodu
<b>STFT</b>	Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü
<b>LWPIM</b>	Legendre Dalgacık Picard İterasyon Metodu
<b>LGCM</b>	Legendre-Gauss Sıralama Metodu
<b>LCM</b>	Legendre Sıralama Metodu
<b>RKM</b>	Runge-Kutta Metodu
<b>CWT</b>	Sürekli Dalgacık Dönüşümü
<b>VIM</b>	Varyasyonel İterasyon Metodu
$c_{nm}$	Bilinmeyen Katsayılar
$\delta_{mn}$	Kronecker Delta
$\psi_{nm}(t)$	Legendre Dalgacıkları
$P_n(x)$	Legendre Polinomları
$\tilde{P}_n(x)$	Ötelenmiş Legendre Polinomları

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1.1. Birinci tür Legendre polinomlarının grafiği .....	12
Şekil 4.4.1. $M = 2$ için gerçek çözüm ve nümerik çözüm grafiği .....	36
Şekil 4.4.2. $M = 4$ için gerçek çözüm ve nümerik çözüm grafiği .....	44
Şekil 4.4.3. $M = 4$ için analitik çözüm ve nümerik çözüm grafiği .....	48
Şekil 4.4.5. $M = 5$ için gerçek çözüm ve nümerik çözüm grafiği .....	56



## TABLO DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Tablo 4.4.1. Uygulanan nümerik metot ile diğer nümerik metotların mutlak hatalarının kıyaslaması.....	35
Tablo 4.4.2. Uygulanan nümerik metot ile diğer nümerik metotların mutlak hatalarının kıyaslaması.....	43
Tablo 4.4.3. Uygulanan nümerik metot ile diğer nümerik metotların mutlak hatalarının kıyaslaması.....	47
Tablo 4.4.5. $M = 2$ , $M = 3$ ve $M = 5$ için mutlak hata tablosu.....	56
Tablo 4.4.6. $M = 5$ ve $M = 6$ için mutlak hata tablosu .....	63
Tablo 4.4.7. Mutlak hata tablosu.....	67
Tablo 4.4.8. Gerçek çözüm ile uygulanan nümerik çözümün karşılaştırılması..	71





## TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, kendisini ve güzel ailesini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e, lisans ve lisansüstü öğrenim hayatımın her aşamasında bana yol gösteren, akademisyenliğe adım atmamda en büyük destekçim olan ve bu yolda bir an bile desteğini benden esirgemeyen, sadece başarılı bir öğrenci değil aynı zamanda güçlü bir kadın olmam için uğraşan, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocam Dr. Öğr. Üyesi Sevin GÜMGÜM'e, tez dönemi boyunca yaptığımız çalışmalarda büyük katkısı olan değerli hocam Öğr. Gör. Dr. Demet ERSOY ÖZDEK'e, bu süreçte verdiği tavsiyelerle beni her daim motive eden ve en zor zamanlarımda desteğini benden esirgemeyen sevgili hocam Prof. Dr. Gözde Yazgı TÜTÜNCÜ'ye, bilgi ve tecrübesi ile kendisinden çok şey öğrendiğim değerli iş arkadaşım Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ'ye, her zaman bana destek olan çalışma arkadaşlarıma, hayatımın en zor zamanlarında benimle olan, asla pes etmeme izin vermeyen, elinden gelenin fazlasını yaparak zorlukları aşmama yardımcı olan sevgili arkadaşım Nail Can ŞİMŞEK'e ve son olarak kendini sadece çocuklarının mutluluğuna adayan, bütün başarılarımın asıl kaynağı, hayattaki en büyük destekçim canım annem Selma ÖZALTUN ve canım babam Sedat ÖZALTUN'a ve her daim yanımda olan kız kardeşim Ecem ÖZALTUN'a sonsuz teşekkür ederim.

Gökçe ÖZALTUN  
Manisa, 2019

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### Lineer ve Lineer Olmayan Adi Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Legendre Dalgacık Çözümleri

Gökçe ÖZALTUN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necdet BİLDİK

II. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sevin GÜMGÜM

Bu tez, lineer ve lineer olmayan adi gecikmeli diferansiyel denklem tiplerini içeren başlangıç değer problemlerini çözmek için Legendre dalgacık metodunu sunmuştur. Legendre dalgacık metodu ile türevleme matrisi kullanılarak ele alınan diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları cebirsel denklem sistemine dönüştürülüp, daha sonra bu denklem sisteminden elde edilen katsayılarla fonksiyon yaklaşımı yapılarak yaklaşık çözüm elde edilmektedir.

Bu yöntem, birçok gecikmeli diferansiyel denklem tipine uygulanmıştır. Sonuçlar, grafikler ile desteklenmiş ve çözümler analitik çözümle ve literatürdeki diğer nümerik çözümler ile kıyaslanarak mutlak hata tabloları oluşturulmuştur.

Uygulanan metodun, incelenen bu denklem tiplerine kesin ve yaklaşık çözümler üretebilmek için oldukça etkili ve uygun bir yaklaşım olduğu görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Legendre Dalgacıkları, Nötr Diferansiyel Denklemler, Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemler, Değişken Gecikme, Kesirli Gecikme.

2019, 93 sayfa

## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

### **Legendre Wavelet Solutions of Linear and Nonlinear Ordinary Delay Differential Equations**

**Gökçe ÖZALTUN**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Necdet BİLDİK**

**Co-Supervisor: Asst. Prof. Sevin GÜMGÜM**

This thesis presents the Legendre wavelet method to solve initial value problems involving linear and nonlinear ordinary delay differential equations. The differential equations together with the given initial conditions are transformed into a system of algebraic equations by using operational matrix of differentiation. Then the approximate solution is obtained from the function approximation with the coefficients obtained from this system of equations.

This method is applied to several types of delay differential equations. The results are presented in terms of graphs. The solutions are compared with the analytical solution and numerical solutions in the literature when available.

It is observed that the proposed method is a very effective and suitable approach in order to obtain either the exact or the approximate solutions to indicated types of differential equations.

**Keywords: Legendre Wavelets, Neutral Differential Equations, Nonlinear Ordinary Differential Equations, Variable Delay, Proportional Delay.**

**2019, 93 pages**

## 1. GİRİŞ

Dalgacık analizinin fikri Fourier analizine dayanır. Fourier dönüşümü 19. yüzyılda Fransız matematikçi Jean-Baptiste Fourier tarafından bulunan bir yöntemdir. Fourier'in teorisine göre bir sinyal çeşitli genlik ve frekanslardaki sinüs ve kosinüs dalgalarının toplamı cinsinden yazılabilir [1]. Burada sinyal, fiziksel bir büyüklüğü veya değişkeni matematiksel olarak ifade eden bir fonksiyondur. Genel olarak bir sinyal zaman veya uzay tanım kümesinde ifade edilir. Verilen bir sinyalin taşıdığı bilgilerin analizinin yapılabilmesi için frekans tanım kümesine taşınması gerekir. Fourier dönüşümü sayesinde zaman tanım kümesinden frekans tanım kümesine geçiş sağlanır. Dönüşüm yoluyla sinyal farklı genlik ve fazlara sahip sinüs ve kosinüs temel fonksiyonlarına ayrışır. Frekans tanım kümesinde bu temel fonksiyonların her birisinin sinyalin oluşumundaki katkısı ifade edilir.

Fourier dönüşümü, başta sinyal ve görüntü işleme olmak üzere mühendisliğin ve bilimin birçok alanında kullanılan etkili bir yöntem olmasına rağmen bazı dezavantajlara da sahiptir. Bunlardan birisi, dönüşüm uygulandıktan sonra zaman çözünürlük bilgisinin kaybolmasıdır. Bir başka deyişle, Fourier dönüşümü sinyalin sahip olduğu tüm frekans bilgisini elde etse de bu frekansların zamanın neresinde varolduğunu tespit edemez. Fourier dönüşümünün bu konudaki eksikliğine yönelik ilk çalışma 1946 yılında Macar asıllı İngiliz fizikçi Dennis Gabor tarafından yapılmıştır. Gabor'ın "Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (STFT)" yöntemi ile bir sinyal yeterli büyüklükteki parçalara ayrılır ve sinyalin ayrılan her bir parçasının da durağan olduğu farz edilir [2]. Bu ayırma işlemi, zaman göre yerleştirilmiş bir pencere yardımı ile yapılır. Burada bütün olarak göz önüne alınan bir sinyalin analizinde boyutu sabit tek bir pencere kullanılır. Bu yüzden ayrılan parçaların boyutu kullanılan pencere ile aynıdır. Her bir pencerelenmiş parça için Fourier dönüşümü uygulanır ve bu sayede her parça için zaman-frekans bilgisi elde edilir. STFT ile sinyal, zaman ve frekansın iki boyutlu bir fonksiyonuna eşlenir [3].

Fourier dönüşümünde olduğu gibi, STFT'de de bazı yetersiz durumlar söz konusudur. 1970'lerin sonlarında, Fransız jeofizik mühendisi olan Jean Morlet, kısa zaman aralıklı çok yüksek frekans bileşenlerine ve uzun zaman aralıklı çok düşük frekans bileşenlerine sahip sinyalleri analiz etme problemi ile karşılaşmıştır [4]. Bir

başka deyiş ile sinyalin sahip olduğu bütün frekanslar için boyutu değişmeyen bir zaman penceresi kullanılmış ve bu durum zaman-frekans analizi için en kesin sonuçları vermediği gözlemlenmiştir. 1982 yılında Morlet ve çalışma arkadaşları, durağan olmayan sinyal analizi için dalgacık (wavelet) dönüşümünü tanımlamışlardır. Dalgacık dönüşümü, bir sinyalin zaman-ölçek analizini yapabilmek için kullanılmaktadır. Dalgacık analizinde, Fourier analizinde olduğu gibi bir sinyalin çeşitli frekanslardaki sinüs ve kosinüs dalgalarına ayrıştırılmasından farklı olarak bir sinyal, “mother wavelet” yani “ana dalgacık” denilen bir fonksiyonun ölçeklenmiş ve ötelenmiş versiyonuna ayrıştırılır. Ölçekleme, dalgacığın genişletilip daraltılmasına verilen addır. Öteleme ise dalgacığın zaman eksenini üzerinde kaydırılmasıdır. STFT’de kullanılan pencere fonksiyonunun görevini burada dalgacık fonksiyonları yerine getirir [5]. Dalgacık dönüşümünde STFT’de olduğu gibi belirli bir boyuttaki pencere fonksiyonunun aksine boyutu değişebilen pencere fonksiyonu kullanılır. Bu da frekans çözünürlüğünün ayarlanabilmesi açısından oldukça önemlidir.

Dalgacık kavramının kaynağı, 20.yüzyılın başlarında Alfred Haar’ın yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Haar dalgacıkları, dalgacıklar ailesinin en basit dalgacık örneği olarak kabul edilmektedir. 1982 yılında Morlet’in yaptığı çalışmaların akabinde, 1984 yılında Morlet ve Grossman kuantum fiziği bağlamında dalgacıkları geniş anlamda yeniden tanımlamışlardır [6]. 1985 yılında Fransız matematikçi olan Yves Meyer, ortogonal dalgacık baz fonksiyonlarını çok iyi zaman ve frekans lokalizasyonunu ile tanımlamış ve Haar dalgacıklarından sonra ikinci ortogonal dalgacık olarak kabul edilen Meyer dalgacıklarını oluşturmuştur [4]. Haar dalgacıklarının sürekli olmayıp bu yüzden de türevlenebilir olmamalarına karşın Meyer dalgacıkları sürekli türevlenebilir dalgacıklardır. Fakat bu dalgacıklar ise kompakt dayanaklı değildir. 1988 yılında, Belçika’lı bir kadın matematikçi olan Ingrid Daubechies, kompakt dayanaklı ortogonal dalgacıkları inşa etmenin sistematik bir yöntemini bulmuştur [7]. Yine aynı yıl içerisinde Meyer ve Mallat, ayrık dalgacık dönüşümü için uygulanan Çoklu Çözünürlük Analizi’ni (MRA) geliştirmiştir. 1992 yılında Mallat, çoklu çözünürlük analizinin özelliklerinden elde edilen Hızlı Dalgacık Dönüşümü’nü (FWT) öne sürmüştür [8]. Daha sonraki yıllarda, başka dalgacık tabanlı fonksiyonlardan ve MRA algoritması üzerinde yapılan değişikliklerden yararlanılarak, dalgacık analizi üzerinde yapılan çalışmalara devam edilmiştir.

Son yıllarda ise birçok farklı türde denklem ve probleme Legendre dalgacık metodu uygulanarak nümerik çözümler elde edilmiştir. Bu yöntem, tekillik içeren problemlerde oldukça etkili olduğu için son yıllarda yaygın olarak kullanılmıştır. 2000-2010 yılları arasındaki çalışmalara bakıldığında, Razzaghi ve ark. [9] varyasyonel problemlerin çözümünde Legendre dalgacıklarını kullanarak doğrudan hesaplamalı bir metot bulmuş ve Legendre dalgacıklarının kullanımının ısı iletimi problemleri için gerçek çözüm sağlayabildiğini göstermişlerdir. Zhang ve ark. [10] Legendre dalgacıklarının öteleme özelliğini kullanarak genişletilmiş Legendre dalgacıklarını türetmiş ve lineer bir denklem için yaklaşık çözüm hesaplayarak gerçek çözüme çok yakın sonuçlar bulmuşlardır. Aghazadeh ve ark. [11] Legendre dalgacık metodunu tekil integral-diferansiyel denklemlerine uygulamış ve elde ettikleri sonuçlarla literatürde yer alan diğer Galerkin metotlarının kıyaslamasını yapmışlardır. Yousefi ve ark. [12] lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denklemleri için daha doğru yaklaşık çözümler elde edebilmek için Gauss integralleme metodundan yararlanarak Legendre dalgacık yaklaşımını kullanmışlardır. Daha sonra Yousefi [13] integral operatörü yardımıyla Lane-Emden denklemlerini integral denklemlerine dönüştürmüş ve bu denklem tipini içeren başlangıç değer problemlerine Legendre dalgacık yöntemini uygulamıştır.

Daha sonraki yıllarda ise Mohammadi ve ark. [14] Legendre dalgacık metodunun lineer olmayan Riccati diferansiyel denklemlerinin çözümünde Adomian ayrıştırma metodu (ADM), homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ve varyasyonel iterasyon metoduna (VIM) kıyasla çok daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bu yazar ve arkadaşları ileriki çalışmalarında, yeni bir Legendre dalgacık türevleme matrisi tanımlamış, bu matrisin lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem içeren başlangıç ve sınır tekil değer problemlerinde basit ve anlaşılır biçimde uygulanabileceğini ortaya koymuşlardır [15]. 2011 yılında ise bu yazarın Mohyud-Din ile beraber yaptıkları çalışmalarında türevleme matrisinin Caputo anlamında kesirli mertebeden türeve sahip denklemler için genellemesini tanıtmışlar ve devamında ise Bagley-Torvik kesirli mertebeden sınır değer problemleri üzerinde de ayrıca çalışmışlardır [16].

Legendre dalgacıkları ile yapılan hesaplamaları geliştirebilmek adına Yin ve ark. [17] Legendre dalgacık metodunu Picard iterasyon metodu ile birleştirerek elde

ettikleri bu metodu (LWPIM) lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümünde de kullanmışlardır. Aynı şekilde Dizicheh ve ark. [18] Legendre dalgacık spektral metoduna dayalı bir algoritma geliştirerek metotlarını salınımlı başlangıç değer problemlerine uygulamışlardır.

Literatürde Legendre dalgacık metodu sadece belirli koşullar altında ele alınan bir diferansiyel denkleme değil, aynı zamanda farklı türden denklem sistemlerine de uygulanmıştır. Ahmad ve ark. [19] lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde küçük boyutlarda oluşturulan türevleme matrisi ile yüksek doğrulukta sonuçlar elde etmişlerdir. Aynı şekilde Kumar ve ark. [20] Legendre dalgacık sıralama metodunu lineer ve lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklem sistemine uygulayarak en düşük değerde hesaplama ile yüksek doğruluk derecesine ulaşmışlardır. 2018 yılında ise Seçer ve ark. [21] Legendre ve ötelenmiş Legendre polinomlarının önemli özelliklerini kullanarak bazı belirli koşullar altında tanımladıkları kesirli türevli operasyon matrisini, kesirli diferansiyel denklem sistemine uygulamış ve ele alınan metodun etkili ve uygulanabilir olduğunu doğrulamışlardır.

Bu tezde ise Legendre dalgacık metodu, orantılı gecikmeli nötr diferansiyel denklemlere ve yüksek mertebeden lineer olmayan değişken ve orantılı gecikmeli adi diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Nötr diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin önemli bir alt konusudur. Popülasyon dinamiklerinin ve bulaşıcı hastalıkların modellenmesinde, salınım teorisinde, elektrodinamik, astrofizik gibi bilim dallarında bu tip denklemler yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde nötr diferansiyel denklemler üzerine birçok nümerik metot uygulanmıştır. Chen ve ark. [22] varyasyonel iterasyon metodunu, Gheneai ve ark. [23] modifiye edilmiş varyasyonel metodunu, Abolhasani ve ark. [24] yeni bir homotopi pertürbasyon metodunu ve Padé yaklaşımını, Sakar [25] ve Biazar ve ark. [26] homotopi pertürbasyon metodunu, Rebenda ve ark. [27] Taylor yaklaşımını, Bhrawy ve ark. [28] Legendre Gauss sıralama metodunu (LGCM), Ghomanjani ve ark. [29] Bezier kontrol noktaları metodunu, Lv. ve ark. [30] çekirdek doğurucu Hilbert uzayı metodunu (RKHSM), Ibis ve ark. [31] Hermite polinomlarına dayalı sıralama metodunu, Bellen ve ark. [32] birinci mertebeden iki adımlı Runge-Kutta metodunu, Wang ve ark. [33] One-leg  $\theta$  metodunu, Yüzbaşı ve ark. [34] ötelenmiş Legendre

metodunu, Sedaghat ve ark. [35] ise Chebyshev polinomlarını kullanarak nötr diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için nümerik yaklaşımlarda bulunmuşlardır.

Doğada gerçekleşen birçok süreç gecikme içerir. Mühendislik, fizik, tıp, biyoloji, ekonomi ve finans gibi birçok alanda karşılaşılan problemlerin büyük bir kısmında gecikme söz konusudur ve bu problemlerin gerçekçi modellemelerinin yapılabilmesi için geçmiş durumların da hesaba katılması gerekir. Geçmiş durumlardan bağımsız bir şekilde oluşturulan modeller genellikle adi diferansiyel denklemler (ADD) ile ifade edilir. Bu tarz modellerdeki değişim oranı geçmişe bağlı olmayıp sadece o andaki zamana bağlıdır. Fakat bu süreçlerde çok küçük gecikme miktarları bile çok önem arz etmektedir. Çünkü en ufak bir gecikme mevcut sistemde çok büyük değişikliklere neden olabilmektedir. Bu tarz gecikmeleri dikkate alarak oluşturulan modeller ise gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) ile ifade edilir [36]. GDD'ler sabit gecikmeli, orantılı gecikmeli veya değişken gecikmeli olabilirler.

Sabit ve kesirli gecikmeli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için literatürde birçok nümerik metot uygulanmıştır. Bu metotlara, Aboodh dönüşüm metodu (ATM) [37], Adomian ayrıştırma metodu [38,39,40], kuvvet serileri metodu [41], ayrıştırma metodu [42], diferansiyel dönüşüm metodu [43], varyasyonel iterasyon metodu [44], Spektral metodu [45], yarı lineerizasyon tekniği [46], Runge-Kutta-Fehlberg metodu [47], Homotopi pertürbasyon metodu [48], varyasyonel yaklaşım [49], ötelenmiş Legendre polinomları [34,50] ve First Boubaker polinom yaklaşımı [52] örnek olarak verilebilir.

Diğer taraftan, değişken gecikmeli lineer olmayan diferansiyel denklemler üzerine de literatürde bazı çalışmalar bulunmaktadır. Benhammouda ve ark. [53] diferansiyel dönüşüm metodunun (DTM) modifiyeli versiyonu ile birleştirdikleri çoklu basamak metodunu ileri sürmüşlerdir. Wang ve ark. [54] bu tip değişken gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Legendre-Gauss sıralama metodunu tanıtmışlardır. Ismail ve ark. [55] Hermite interpolasyonunu kullanarak Runge-Kutta metodunu uygulamışlardır. Gümgüm ve ark. [56] değişken gecikmeli integral-diferansiyel denklemlerin çözümünde Lucas polinomlarını



kullanarak yeni bir matris sıralama tekniğini ele almışlardır. Vanani ve ark. [57] tarafından bu tip denklemlerin çözümünde Kuvvet ve Padé seri metodu kullanılmıştır. Literatürde, Legendre dalgacıkları Kumar ve ark. [20] tarafından belirli başlangıç ve sınır değerleri altında birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan sabit gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmıştır. Hafshejani ve ark. [59] ise bu metodu birinci mertebeden kesirli gecikmeli denklemlerin çözümünde ele almışlardır.

Bu çalışmada, ayrıca ayırık dalgacıklardan biri olan Legendre dalgacıkları metodu kullanılarak, lineer ve lineer olmayan denklem tiplerinin her ikisine de uygulanmıştır. Legendre dalgacıklarının oluşumunda kullanılan Legendre polinomlarının tercih edilmesinin en önemli sebebi, polinomun ortonormal yapısının sayısal hesaplamaların maliyetinde ve işleyiş süresinde oldukça önemli bir düşüş sağlamasıdır. Legendre dalgacık metodu ile yüksek mertebeden denklemler, önce cebirsel denklem sistemine dönüştürülür, daha sonra bu denklem sisteminden elde edilen katsayılarla fonksiyon yaklaşımı kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilir. Denklem sisteminin çözümünde ötelenmiş Legendre polinomlarının kökü kullanılmaktadır. Bunun sebebi ise ele aldığımız bu kökler ile yeterli doğrulukta yaklaşık çözümlerin bulunmasıdır. Elde edilen sonuçlar, grafikler ile desteklenmiş ve ele alınan problemler literatürdeki diğer nümerik metotlar ile karşılaştırılması yapılarak mutlak hata tabloları oluşturulmuştur.

### **1.1. Tezin Planı**

Bu tez çalışması beş bölümden ibarettir. Birinci bölümde, Fourier analizinden dalgacık analizine kadar geçen sürede sinyal analizinde uygulanan yöntemlerden ve daha sonrasında da dalgacık kavramı çerçevesinde yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, Legendre polinomları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, dalgacıklar ve dalgacık dönüşümlerinden bahsedilmiş ve dalgacıkların bazı önemli özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, çeşitli denklem tipleri içeren başlangıç değer problemlerine Legendre dalgacık metodu uygulanmış, sonuçlar grafik ve mutlak hata tabloları ile desteklenmiştir. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlara dayanılarak metodun ele alınan problemlere uygunluğundan bahsedilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Legendre Polinomları

Legendre diferansiyel denklemi

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0, \quad n > 0, \quad |x| < 1 \quad (2.1.1)$$

biçiminde ikinci mertebeden,  $\pm 1$  noktalarında kaydırılabilir tekilliğe sahip bir diferansiyel denklemdir [60]. Bu denklemin çözümünden n. dereceden Legendre fonksiyonları elde edilir. Denklemin genel çözümü

$$y = pP_n(x) + qQ_n(x), \quad |x| < 1$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $P_n(x)$  birinci tür Legendre fonksiyonlarını ifade eder ve

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.1.2)$$

şeklinde temsil edilir.  $Q_n(x)$  ise ikinci tür Legendre fonksiyonlarını ifade eder ve

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

biçiminde tanımlanır.  $n=0,1,2,\dots$  değerleri için  $P_n(x)$  Legendre polinomları olarak adlandırılır ve (2.1.2) denklemi ile gösterilen ifade Rodrigues formülü olarak bilinir.

(2.1.1) denklemi ile gösterilen Legendre diferansiyel denkleminin genel çözümü Frobenius yöntemi kullanılarak elde edilebilir.  $x_0$ , (2.1.1) denkleminin bir düzgün tekil noktası olmak üzere (2.1.1) denkleminin

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ile ifade edilen bir çözümlü olduğunu kabul edelim. Bu takdirde  $r = 0$  için yukarıdaki serinin açılımı

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

denklemleri ile ifade edilir. Buradan da türevleri  $y'$  ve  $y''$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu denklemler (2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

bulunur. Bu denklemin düzenlenmesi ile

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

olduğu görülür. Burada indis kaydırması yapılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k \\ & + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

elde edilir. (2.1.3) denkleminin yeniden düzenlenmesi ile

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)]a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + 2k - n(n+1)]a_kx^k = 0$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)]a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} [-k(k-1) - 2k + n(n+1)]a_kx^k \\ & = 0 \quad (2.1.13) \end{aligned}$$

dolayısı ile de

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (-k(k+1) + n(n+1))a_k = 0 \quad (2.1.4)$$

denkleminde ulaşılr. Şimdi de (2.1.4) denkleminde

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \\ &= -\frac{[n + (k+1)](n-k)}{(k+1)(k+2)} a_k \end{aligned}$$

biçimindeki tekrarlama bağıntısı elde edilir. Katsayıların bir kısmı

$$k = 0 \text{ için } a_2 = -\frac{n(n+1)}{1 \times 2} a_0$$

$$k = 2 \text{ için } a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \times 4} a_2 = (-1)^2 \frac{[(n-2)n][(n+1)(n+3)]}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a_0$$

$$k = 4 \text{ için } a_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5 \times 6} a_4 = (-1)^3 \frac{[(n-4)(n-2)n][(n+1)(n+3)(n+5)]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} a_0$$

biçiminde  $k$ 'nın çift değerleri için  $a_0$  keyfi sabiti cinsinden bulunur. Genel hali ile çift çözümler ise

$$y_{\text{çift}}(x) = 1$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[(n-2k+2) \dots (n-2)n][(n+1)(n+3) \dots (n+2k-1)]}{(2k)!} x^{2k}$$

denklemleri ile ifade edilir. Aynı şekilde geriye kalan katsayılar ise

$$k = 1 \text{ için } a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3} a_1$$

$$k = 3 \text{ için } a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \times 5} a_3 = (-1)^2 \frac{[(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a_1$$

$$k = 5 \text{ için } a_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{6 \times 7} a_5 = (-1)^3 \frac{[(n-5)(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)(n+6)]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} a_1$$

biçiminde  $k$ 'nın tek değerleri için  $a_1$  keyfi sabiti cinsinden bulunur. Genel hali ile tek çözümler

$$y_{\text{tek}}(x) = x$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[(n-2k+1) \dots (n-3)(n-1)][(n+2)(n+4) \dots (n+2k)]}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

denklemleri ile temsil edilir. Sonuçta bütün katsayılar

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

seri açılımında yerine konulursa

$$y = a_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} x^6 + \dots \right]$$

$$+ a_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

olduğu görülür. Böylece (2.1.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = a_0 y_{çift} + a_1 y_{tek}$$

olarak elde edilir. Eğer  $n$  çift bir sayı ise  $y_{tek}(x)$  ıraksar ve  $y_{çift}(x)$ ,  $x$ 'in çift kuvvetleri cinsinden ifade edilen  $n$ . dereceden bir polinom halini alır. Eğer  $n$  tek bir sayı ise  $y_{çift}(x)$  ıraksar ve  $y_{tek}(x)$ ,  $x$ 'in tek kuvvetleri cinsinden ifade edilen  $n$ . dereceden bir polinom şekline dönüşür. Böylece elde edilen bu  $y_{çift}(x)$  ve  $y_{tek}(x)$  lineer bağımsız çözümleri,  $|x| < 1$  aralığında yakınsak,  $|x| > 1$  aralığında ve  $x = \pm 1$  noktalarında ise ıraksaktır. [60].

Tekrarlama bağıntısı kullanılarak

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

biçiminde yüksek dereceden Legendre polinomları kolaylıkla temsil edilebilir. Aynı zamanda, (2.1.2) denklemi ile ifade edilen Rodrigues formülünü kullanılarak elde edilen ilk bir kaç Legendre polinomu

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

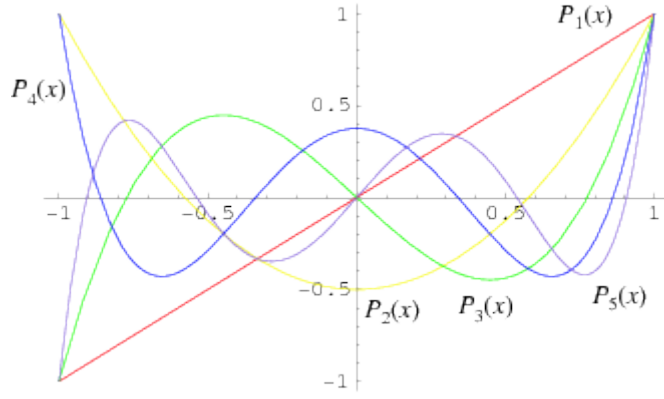
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

biçimindedir.



**Şekil 2.1.1.** Birinci tür Legendre polinomlarının grafiği

n. dereceden Legendre polinomunun toplam formülü

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N \left[ \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-2k)! (n-k)!} \right] x^{n-2k}$$

şekindedir [61]. Burada n çift alınır ise  $N = \frac{n}{2}$ , n tek alınır ise  $N = \frac{(n-1)}{2}$  olarak ifade edilir.

Legendre polinomları,  $[-1,1]$  aralığı üzerinde  $w(x) = 1$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogoneldir. Ortogonellik

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad m, n \in \{0,1,2, \dots\}$$

bağıntısı ile gösterilir. Burada  $\delta_{mn}$ , Kronecker delta'dır ve

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

ile tanımlanır. Buradan da Rodrigues formülü kullanılarak

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) (1-x^2)^n dx$$

integrali alınır. Yukarıdaki denklemde  $m = n$  alınırsa

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} P_n(x) (1-x^2)^n dx = a_n n! \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{(2n)!}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \quad (2.1.5)$$

denklemini elde edilir. Burada  $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} P_n(x)$  polinomunun başkatsayısıdır.

(2.1.5) denkleminde  $n=0,1,2,\dots$  değerleri için  $1-x = 2t$  olarak alınır ise

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx = \int_0^1 (2t)^n (2-2t)^n 2 dt \\ &= 2^{2n+1} B(n+1, n+1) = 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısı ile buradan

$$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \quad n = 0,1,2 \dots$$

denklemini bulunur. Bu da ortogonellik bağıntısını doğrulamış olur.

Legendre polinomları  $[-1,1]$  aralığında tanımlıdır. Legendre denkleminin tekilliğini ortadan kaldırabilmek için öteleme işlemi uygulanır. Bu polinomların

$$x \rightarrow 2x - 1$$

öteleme fonksiyonu ile  $[0,1]$  aralığında ötelenmiş Legendre polinomları tanımlanır ve

$$\tilde{P}_n(x) = P_n(2x - 1)$$

ile ifade edilir. Aynı şekilde bu polinomlar da  $[0,1]$  aralığında ortogoneldir.



$$\int_0^1 \widetilde{P}_m(x) \widetilde{P}_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{mn}$$

biçiminde gösterilir. Ötelenmiş Legendre polinomları için Rodrigues formülü ise

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - x)^n$$

biçiminde tanımlanır. Bu polinomlardan ilk birkaçı

$$\widetilde{P}_0(x) = 1$$

$$\widetilde{P}_1(x) = 2x - 1$$

$$\widetilde{P}_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

$$\widetilde{P}_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$$

$$\widetilde{P}_4(x) = 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1$$

$$\widetilde{P}_5(x) = 252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1$$

$$\widetilde{P}_6(x) = 924x^6 - 2772x^5 + 3150x^4 - 1680x^3 + 420x^2 - 42x + 1$$

şeklindedir ve elde edilen bu polinomlarda teklik ortadan kalkmaktadır.

### 3.DALGACIKLAR VE LEGENDRE DALGACIKLARI

#### 3.1. Dalgacıklar ve Dalgacık Dönüşümü

$\psi(t)$  ana dalgacık olmak üzere, dalgacıklar

$$\psi_{s,\tau}(t) = |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır [62]. Burada  $s$  ölçekleme parametresi,  $\tau$  ise öteleme parametresidir. Başka bir deyiş ile dalgacık, seçilen bir ana dalgacığa

1) ölçekleme:  $\psi(t) \rightarrow \psi(2t)$

2) öteleme:  $\psi(t) \rightarrow \psi(t+1)$

biçiminde işlemlerin uygulanması ile elde edilen fonksiyonlar ailesidir. Ölçekleme parametresi frekans ile ters ilişkilidir. Burada  $|s| < 1$  alınır ise dalgacık genişletilir ve bu sebeple düşük frekans elde edilir. Buradan dalgacıkların frekansa göre adapte edilebilir zaman genişleme özelliğine sahip oldukları anlaşılır [62].

#### 3.1.1. Sürekli Dalgacık Dönüşümü

Sürekli dalgacık dönüşümü (CWT) kısa zamanlı Fourier dönüşümünde yaşanan problemlere alternatif olarak geliştirilmiştir. CWT'de dalgacık fonksiyonu, sinyal süresi boyunca kaydırılıp bir ölçek ile çarpıldıktan sonra zaman alanı boyunca toplanır. Matematiksel olarak CWT

$$(W_\psi f)(s, \tau) = |s|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)} dt$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $f$ , karesi integrallenebilir bir fonksiyon,  $\overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)}$  kompleks eşlenik ve  $|s|^{-1/2}$  ise normalleştirme çarpanıdır. Bu noktada,  $f(t)$ 'nin, ters sürekli dalgacık dönüşümü ile birlikte ortaya çıkan yeni oluşumundan bahsedilmelidir.  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  olmak üzere

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$$

biçiminde tanımlanan bu sabitin değerinin bilinmesi gerekmektedir. Burada  $\hat{\psi}(w)$ ,  $\psi(t)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümünü,  $w$  ise pencere fonksiyonunu temsil etmektedir. Bu sabitin sonluluğu koşulu “kabul edilebilirlik” koşulu olarak bilinmektedir ve dalgacık olarak kullanılabilen  $L_2(\mathbb{R})$  fonksiyonlarının sınıfını sınırlandırır. Kabul edilebilirlik koşulu

$$|\hat{\psi}(w)|^2|_{w=0} = 0$$

gerektirir. Bunun anlamı,  $\psi(t)$ 'nin Fourier dönüşümü sıfır sıklıkta iken kaybolur. Bir başka deyişle, zaman tanım kümesindeki dalgacığın ortalama değeri sıfır olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Bu durumda  $f(t)$ 'nin  $C_\psi$  sabiti ile birlikte yeniden gösterimi

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{(W_\psi f)(s, \tau)\} \left\{ |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \right\} \frac{ds d\tau}{s^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

biçiminde ifade edilir [63].

### 3.1.2. Ayrık Dalgacık Dönüşümü

Sürekli dalgacık dönüşümü, “s” ölçekleme parametresi tarafından pencere genişliği kontrol edilebilen yapısıyla avantaja sahip olsa da sinyalin tüm özelliklerini belirleyebilmek için gereğinden fazla hesaplama yapması açısından dezavantaja sahiptir. Bu fazlalığı en aza indirgeyebilmek için ise ayrık dalgacık dönüşümü (DWT) geliştirilmiştir. Burada ayrık dalgacıklar sürekli olarak değil, ayrık aralıklarda ölçeklenir ve ötelenir.

DWT, dönüşüm alanında sayılabilen katsayılar kümesini verir [64].  $W_\psi: L^2 \rightarrow L^2(\mathbb{Z}^2)$  olmak üzere  $s_0 > 1$ ,  $\tau_0 > 0$  ve  $m, n \in \mathbb{Z}$  için ölçek parametresi  $\tau = n\tau_0 s_0^m$  olarak seçilen DWT,

$$\begin{aligned} W_\psi f(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t - n\tau_0 s_0^m}{s_0^m}\right) dt \\ &= s_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(s_0^{-m}t - n\tau_0) dt \\ &= \langle f, \psi_{m,n} \rangle \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Eğer  $s_0 = 2$  ve  $\tau_0 = 1$  olarak alınır ise

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \quad (3.1.2.1)$$

olduğu görülür. Bu ise  $L^2(\mathbb{R})$  üzerinde ortonormal dalgacık bazını ifade eder.

### 3.1.3. Çoklu Çözünürlük Analizi

Çoklu çözünürlük analizi (MRA), ölçekleme fonksiyonlarının ve dalgacıkların oluşturulmasında önemli bir yere sahiptir. Burada bir fonksiyonun çeşitli çözünürlüklerdeki durumları incelenir. Ele alınan bu fonksiyon, daha karmaşık bir yapıdan daha basit bir yapıya ayrıştırılır ve ayrıştırılan her parça ayrı ayrı analiz edilir. Bunun için aşağıdaki tanımlar verilir.

**Tanım 3.1.3.1.**[66] Çoklu çözünürlük analizi Lebesgue uzayının,  $L^2(\mathbb{R})$ , alt uzaylarının oluşturduğu bir seri  $(V_j)_j \in \mathbb{Z}$  olarak tanımlanır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i.  $V_j \subset V_{j+1}$
- ii.  $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  uzayının gerilimi  $= L_2(\mathbb{R})$
- iii.  $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

*iv.*  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$

*v.*  $f \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

*vi.*  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sisteminde  $V_0$  ortonormal bir baz olacak şekilde bir  $v \in V_0$  vardır ve bu  $v$  fonksiyonu ölçekleme fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.3.2.**[66]  $\tau \in \mathbb{R}$  olmak üzere, öteleme operatörü  $T_\tau$

$$T_\tau(f)(x) = f(x - \tau) \quad (3.1.3.1)$$

ile tanımlanır.

**Tanım 3.1.3.3.**[66]  $s \in \mathbb{Z}$  olmak üzere, diyalik ölçekleme operatörü  $J_s$ ,

$$J_s(f)(x) = f(2^s x)$$

biçiminde gösterilir.

**Önerme 3.1.3.1.** *i.* Her  $\tau \in \mathbb{R}$  için  $T_\tau$  operatörü  $L^2(\mathbb{R})$  üzerinde bir izometridir.

*ii.* Her  $s \in \mathbb{Z}$  için  $2^{s/2}J_n$  operatörü de  $L^2(\mathbb{R})$  üzerinde yine bir izometridir.

Önerme (3.1.3.1) kullanılarak veya değişken değiştirme uygulanarak Tanım (3.1.3.1)'de yer alan ve *vi.* ile belirtilen özellik aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

*vi\**. Her bir  $j \in \mathbb{Z}$  için  $\left\{2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sistemi  $V_j$  üzerinde bir ortonormal bazdır.

Diğer yandan Riesz bazları,  $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$  alt uzayı için

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $j$ . seviyede bir çözümleme ifade edilmektedir. Bu şekilde  $\varphi(x)$  ölçekleme fonksiyonu tarafından oluşturulan  $L^2(\mathbb{R})$ 'nin iç içe geçmiş alt uzaylarının dizisi  $j$  sonsuza giderken  $L^2(\mathbb{R})$ 'ye yaklaşma eğilimi gösterir.

$V_j$  uzayındaki herhangi bir  $f(t)$  fonksiyonu, bu uzayın bazıları ile ifade edilebilir.  $V_j \subset V_{j+1}$  ve  $W_j \subset V_{j+1}$  olmak üzere  $V_j$  ve  $W_j$  uzaylarındaki herhangi bir fonksiyon  $V_{j+1}$  uzayının bazıları ile temsil edilebilir. Matematiksel olarak

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (3.1.3.2)$$

ile ifade edilir. Bir başka deyiş ile  $V_{j+1}$  uzayındaki bir fonksiyon, biri  $V_j$  ve diğeri  $W_j$  uzayı içinde olmak üzere iki farklı fonksiyon şeklinde yazılabilir.

Dalgacık analizinde bir fonksiyon, dalgacık fonksiyon katsayıları ve ölçekleme fonksiyonu yardımıyla iki farklı fonksiyona ayrıştırılır.  $v_{j+1} \in V_{j+1}$ ,  $v_j \in V_j$  ve  $w_j \in W_j$  olmak üzere  $V_{j+1}$  uzayındaki herhangi bir  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \sum_k v_{j+1}(k) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}x - k) \quad (3.1.3.3)$$

şeklinde  $V_{j+1}$  uzayındaki bazların lineer kombinasyonu biçiminde ifade edilebilir [65]. (3.1.3.2) denklemi vasıtası ile (3.1.3.3) denklemi yeniden

$$f(x) = \sum_k v_j(k) 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) + \sum_k w_j(k) 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan

$$v_j(k) = \int f(x) 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) dt \quad (3.1.3.4)$$

elde edilir. Diğer yandan  $\varphi(x)$  fonksiyonu ise

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x - 1)$$

veya

$$= \sum_k h(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k) \quad (3.1.3.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $h(k)$  normalleştirme çarpanıdır ve (3.1.3.8) denklemini ölçekleme denklemleri olarak adlandırılır. Genelleme yapmak için  $x$  yerine  $2^j x - k$  yazılır ise

$$\begin{aligned} \varphi(2^j x - k) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sqrt{2} \varphi(2(2^j x - k) - n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} x - 2k - n) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $2k + n = m$  olarak alınır ise

$$\varphi(2^j x - k) = \sum_{m=2k}^{2k+N-1} h(m - 2k) \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} x - m) \quad (3.1.3.6)$$

bulunur. Bu da bize uzayların iç içe bir yapıda olduğunu ifade eder. Elde edilen (3.1.3.6) denklemini (3.1.3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$v_j(k) = \sum_{m=2k}^{2k+N-1} h(m - 2k) \int f(x) 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} x - m) dt$$

denkleminde ulaşılır Buradan

$$v_j(k) = \sum_{m=2k}^{2k+N-1} h(m-2k)V_{j+1}(m)$$

ve

$$w_j(k) = \sum_{m=2k}^{2k+N-1} g(m-2k)V_{j+1}(m)$$

olduğu görülür. Bu ayrıştırma işlemi  $v_0$  ve  $w_0$  elde edilinceye kadar sürdürülür. Böylece bir fonksiyon farklı çözünürlüklerde incelenmiş olur.

### 3.1.4. Dalgacıkların Bazı Önemli Özellikleri

**-Ortogonalite:** Fonksiyonların ortogonal açılımları dalgacık analizinde önemli bir rol oynar.  $f(x) \in L^2$  olmak üzere,  $f(x)$  fonksiyonunun  $\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ortonormal kümesi cinsinden açılımı

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

ile ifade edilir [8]. Burada  $c_k$  katsayıları, fonksiyon ile ilgili bazın iç çarpımı ile göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \varphi_l(x) \overline{\varphi_k(x)} dx \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \sigma_{l,k} = c_k \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

**-Kompakt Dayanaklılık:** Dalgacıklar ve ölçekleme fonksiyonunun kompakt dayanaklı olması, hızlı dalgacık dönüşümündeki toplama işlemlerini sonlu kılar.



-**Simetri:** Ölçekleme fonksiyonu ve dalgacıkların simetrik olmaması durumu faz bozukluğuna neden olabilir.

-**Rasyonel Katsayılar:** Katsayıların rasyonel veya diydik rasyonel olması bilgisayar hesaplamaları için oldukça faydalıdır.

-**Düzensünlük (Smoothness):** Dalgacıkların düzensünlüğü özellikle görüntü sıkıştırma uygulamalarında oldukça önemlidir. Dalgacıkların düzensünlük olmadığı durumda görüntüdeki hata kolay bir şekilde tespit edilebilir [66].

-**Kaybolan Anlar (Vanishing Moments):** Bir dalgacık

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^s \psi(x) dx = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m - 1$$

koşulunu sağlıyorsa bu taktirde bu dalgacık  $m$ . dereceden kaybolan anlara sahiptir denir. Bu konuyu daha iyi açıklayabilmek için aşağıdaki önerme verilir.

**Önerme 3.1.4.1.**  $\psi$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir fonksiyon olsun. Öyle ki

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) \right\}_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ j \in \mathbb{Z}}}$$

bazı  $L^2(\mathbb{R})$  üzerinde ortonormaldir. Farz edelim ki  $l = 0, 1, 2, \dots$  için  $\psi$ ,  $C^l$  nin bir sınıfı olsun ve  $s = 0, 1, 2, \dots, l$  için bütün türevler  $\psi^s(x)$  ile ifade edilsin. Aynı zamanda  $\psi$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde sınırlı olsun. Yani

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}, \quad \alpha > l + 1$$

olduğunda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^s \psi(x) dx = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l$$

dır.

### 3.2. Legendre Dalgacıkları

Legendre dalgacıkları  $k, M \in \mathbb{N}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  ve  $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$  olmak üzere dört argümanlı  $\psi_{nm} = \psi_{nm}(k, n, m, t)$  Legendre polinomlarından elde edilir ve

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k+1}{2}} L_m^*(2^{k+1}t - (2n + 1)), & \frac{n}{2^k} < t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & , \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

biçiminde tanımlanır [15]. Burada  $L_m^*(t)$  m.dereceden  $[-1,1]$  aralığında  $w(t) = 1$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan Legendre polinomudur. Bu polinomlar  $L_0^*(t) = 1$  ve  $L_1^*(t) = t$  olmak üzere

$$L_{m+1}^*(t) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right) t L_m^*(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right) L_{m-1}^*(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

tekrarlama bağıntısını sağlar [18]. Ayrıca (3.2.1) denkleminde yer alan  $t$  normalleştirilmiş zamandır ve  $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$  katsayısı ise ortonormallik için gereken katsayıdır.  $k = 0$  alınarak hesaplanan ilk birkaç Legendre dalgacı aşağıda listelenmiştir.

$$\psi_{00}(t) = 1$$

$$\psi_{01}(t) = \sqrt{3}(2t - 1)$$

$$\psi_{02}(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1]$$

$$\psi_{03}(t) = \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]$$

$$\psi_{04}(t) = \frac{3}{8} [35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3]$$

$$\psi_{05}(t) = \frac{\sqrt{11}}{8} [63(2t - 1)^5 - 70(2t - 1)^3 + 15(2t - 1)]$$

Ötelenmiş Legendre polinomları,  $[0,1]$  aralığında tanımlı olup  $t = 2x - 1$  değişken değişimi uygulanarak elde edilir ve

$$\widetilde{L}_m(x) = L_m(2x - 1)$$

biçiminde gösterilir. Bu polinomların analitik formdaki gösterimi ise

$$\widetilde{L}_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(m+k)! x^k}{(m-k)! (k!)^2}$$

şeklindedir [67].

Ötelenmiş Legendre polinomları ile bu polinomların türevleri arasında bir bağıntı vardır. Bu bağıntı aşağıda Teorem 3.2.1. ile verilir.

**Teorem 3.2.1.**[15]  $P_m(x)$ ,  $[0,1]$  aralığında ötelenmiş Legendre polinomları olsun. O halde

$$P'_m(x) = 2 \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) P_k(x)$$

**İspat 3.2.1.** [15] Farz edelim ki  $u(x)$  fonksiyonunun Legendre açılımı

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L_k(x) \quad (3.2.2)$$

olsun. O halde  $u'(x)$  fonksiyonu

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} L_k(x) \quad (3.2.3)$$

biçiminde yazılır. Burada  $\hat{u}_k^{(1)}$  fonksiyonu

$$\hat{u}_k^{(1)} = (2k+1) \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ tek}}}^{\infty} \hat{u}_p, \quad k \geq 0$$

ile tanımlıdır. (3.2.2) denkleminde  $u(x) = L_m(x)$  olarak seçilir ise,  $i \neq m$  için  $\hat{u}_m = 1$  ve  $\hat{u}_i = 0$  olur. Sonuç olarak

$$\hat{u}_k^{(1)} = \begin{cases} 2k + 1, & m + k \text{ tek}, \quad k \leq m - 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece (3.2.3) denklemini

$$L'_m(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ m+k \text{ tek}}}^{m-1} (2k + 1)L_k(x) \quad (3.2.4)$$

şeklini alır. (3.2.4) denkleminde  $x = 2t - 1$  alınır ise

$$P'_m(t) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ m+k \text{ tek}}}^{m-1} (2k + 1)P_k(t)$$

elde edilir.

## 4. NÜMERİK METOTUN UYGULANMASI

### 4.1. Fonksiyon Yaklaşımı

Tanım kümesi  $[0,1]$  olan bir  $f(t)$  fonksiyonunun Legendre dalgacıkları cinsinden sonsuz seri açılımı

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t) \quad (4.1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $c_{nm} = (f(t), \psi_{nm}(t)) = \int_0^1 f(t) \psi_{nm}(t) dt$  biçiminde tanımlı bilinmeyen katsayılarıdır. Eğer (4.1.1) ile gösterilen seri kestirilirse

$$f(t) \cong \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \psi(t) \quad (4.1.2)$$

elde edilir. Burada  $C$  ve  $\psi$

$$C = \left[ c_{00}, \dots, c_{0(M+1)}, c_{10}, \dots, c_{1(M+1)}, \dots, c_{(2^k-1)0}, \dots, c_{(2^k-1)(M+1)} \right]^T \quad (4.1.3)$$

$$\psi(t) = \left[ \psi_{00}(t), \dots, \psi_{0M}(t), \psi_{10}(t), \dots, \psi_{1M}(t), \dots, \psi_{(2^k-1)0}(t), \dots, \psi_{(2^k-1)M+1}(t) \right]^T \quad (4.1.4)$$

ile tanımlanan  $2^k(M+1) \times 1$  tipinde matrislerdir [68].

### 4.2. Türevleme Matrisi

Denklem (4.1.4) ile tanımlanan  $\psi(t)$  vektörünün  $n$ . dereceden türevi

$$\frac{d^n}{dt^n} \psi(t) = D^n \psi(t) \quad (4.2.1)$$

biçimindedir [15]. Burada  $D$

$$D = \begin{bmatrix} F & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & F \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

şeklinde tanımlanan  $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$  boyutundaki matrisin  $n$ . dereceden türevini ifade eder [15].  $D$  matrisinde köşegenlere yerleştirilmiş olan  $(M+1) \times (M+1)$  boyutundaki  $F$  matrisi ise

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{5}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^{k+1} \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & \sqrt{7}\sqrt{5} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{9}\sqrt{3} & 0 & \sqrt{9}\sqrt{7} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{2M+1} & 0 & \sqrt{2M+1}\sqrt{5} & 0 & \cdots & \sqrt{2M+1}\sqrt{2M-1} & 0 \end{bmatrix} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

formunda tanımlanır. Bu  $F$  matrisinin elemanları

$$F_{r,s} = \begin{cases} 2^{k+1}\sqrt{(2r-1)(2s-1)}, & r = 2, \dots, (M+1), s = 1, \dots, (r-1) \text{ ve } r+s \text{ tektir} \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

koşulu altında oluşturulur [15]. Burada, seçilen bir  $M$  sayısı için  $k$ 'nın değişen durumlarına göre  $D$  matrisinin boyutu ve doğal olarak kullanılan  $F$  matris sayısı değişkenlik göstermektedir.  $k = 0$  durumu için  $D$  matrisi ile  $F$  matrisinin boyutları aynı olur. Aynı zamanda,  $F$  matrisinin bir alt üçgen matris olması, çözümün belli bir koşula bağlı olmasından çıkmaktadır.

**Sonuç:** (4.2.1) ve (4.2.2) ile ifade edilen denklemde  $D^n$ ,  $D$  matrisinin  $n$ . dereceden kuvvetidir [69].

### 4.3. Türevleme Matrisinin Uygulaması

Bu kısımda türevleme matrisinin, yüksek mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlere ve orantılı gecikmeli nötr lineer diferansiyel denklemlere nasıl uygulandığı gösterilecektir.

#### 4.3.1. Lineer Adi Gecikmeli Nötr Diferansiyel Denklemler

$Q_j(t)$  ve  $g(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  aralığında  $p$  kez türevlenebilen fonksiyonlar olsun.  $c, d, a_{ij}$  ve  $\lambda_i$  belirli sabitler ve  $0 \leq \alpha_p \leq 1$  olmak üzere

$$\left(y(t) + cy(\alpha_p t)\right)^{(p)} + dy(t) + \sum_{j=0}^{p-1} (Q_j(t)y^{(j)}(\alpha_j t)) = g(t), 0 \leq t \leq 1 \quad (4.3.1.1)$$

biçiminde ifade edilen orantılı gecikmeli nötr diferansiyel denklemi

$$\sum_{j=0}^{p-1} a_{ij}y^{(j)}(0) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, p-1 \quad (4.3.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilsin [70]. Burada amaç (4.3.1.1) ve (4.3.1.2) denklemleri ile ifade edilen başlangıç değer problemine Legendre dalgacıkları kullanılarak yaklaşık bir çözüm üretmektir.  $y(t)$  fonksiyonunun dalgacık bazları cinsinden genişletilmiş halinin

$$y(t) \cong \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \psi(t) \quad (4.3.1.3)$$

olduğunu kabul edelim. Burada  $c_{nm}$  'ler bilinmeyen katsayıları,  $\psi_{nm}(t)$  'ler ise Legendre dalgacıklarını temsil etmektedir. (4.2.1) denklemi kullanıldığında  $y(t)$  fonksiyonunun  $p$ . dereceden türevi

$$y^{(p)}(t) = C^T D^p \psi(t) \quad (4.3.1.4)$$

olarak bulunur. Şimdi ise (4.3.1.3) ve (4.3.1.4) denklemleri (4.3.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$C^T \left( D^p \psi(t) + c D^p \psi(\alpha_p t) + d \psi(t) + \sum_{j=0}^{p-1} Q_j(t) D^j \psi(\alpha_j t) \right) = G(t) \quad (4.3.1.5)$$

elde edilir. Burada  $C^T$  ile ifade edilen bilinmeyen katsayıları bulmak için  $2^k(M+1)$  tane denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemlerden ilk  $(p-1)$  tanesi için (4.3.1.2) ile ifade edilen başlangıç koşulu kullanıldığında

$$C^T \sum_{j=0}^{p-1} a_{ij} D^j \psi(0) = \lambda_i \quad (4.3.1.6)$$

olduğu görülür. Geriye kalan  $2^k(M+1) - (p-1)$  adet denklem ise  $L_{2^k(M+1)}$  ötelenmiş Legendre polinomunun ilk  $2^k(M+1) - (p-1)$  kökü, (4.3.1.5) denkleminde yerine konularak bulunur. Böylece  $2^k(M+1)$  adet lineer denklem sistemi  $c_{nm}$  katsayıları için çözülür ve sonuçta elde edilen  $C^T$  vektörü (4.3.1.3) denkleminde yerine yazılarak  $\psi(t)$  dalgacık vektörü ile çarpılır. Böylece ele alınan bu başlangıç değer problemi için yaklaşık çözüm hesaplanır.

### 4.3.2. Lineer Olmayan Adi Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

$P_{ij}(t), R_{pq}(t), g(t)$  ve  $\tau_{ij}(t)$  fonksiyonları  $0 \leq t \leq 1$  aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^J P_{ij}(t) y^{(i)}(t - \tau_{ij}(t)) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p R_{pq}(t) y^{(p)}(\alpha_{pq} t) y^{(q)}(\beta_{pq} t) = g(t), \quad J \leq 6 \quad (4.3.2.1)$$

denklemini

$$y^{(i)}(0) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, 5 \quad (4.3.2.2)$$



başlangıç koşulları ile ele alalım [68]. Burada  $\tau_{ij}(t)$  değişken gecikmeleri  $\alpha_{pq}$  ve  $\beta_{pq}$  sabitleri ise orantılı gecikmeleri ifade eder. Burada amaç, Legendre dalgacıklarını kullanarak (4.3.2.1) ve (4.3.2.2) ile belirtilen başlangıç değer probleminde yaklaşık bir çözüm elde etmektir. Bunun için  $y(t)$  fonksiyonunun dalgacık bazları cinsinden açılımının

$$y(t) \cong \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \psi(t) \quad (4.3.2.3)$$

biçiminde olduğunu kabul edelim. O halde  $y(t)$  fonksiyonunun çeşitli mertebeden türevleri (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri kullanılarak

$$y^{(i)}(t) = C^T D^i \psi(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.3.2.4)$$

biçiminde bulunur. Elde edilen bu denklemde  $t$  yerine  $t - \tau_{ij}$ ,  $\alpha_{pq}t$  ve  $\beta_{pq}t$  konulursa (4.3.2.1) denklemi

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^J P_{ij}(t) C^T D^{(i)} \psi(t - \tau_{ij}(t)) + \\ & + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p R_{pq}(t) \left( C^T D^p \psi(\alpha_{pq}t) \right) \left( C^T D^{(q)} \psi(\beta_{pq}t) \right) = g(t), \quad J \leq 6 \quad (4.3.2.5) \end{aligned}$$

biçiminde yeniden ifade edilir. Burada bilinmeyen  $c_{nm}$  katsayılarını elde etmek için  $2^k(M + 1)$  tane denkleme ihtiyaç vardır. İlk 6 adet denklem başlangıç koşulları kullanılarak elde edilir.

$$y(0) = C^T \psi(0)$$

$$y^{(i)}(0) = C^T D^i \psi(0), \quad i = 1, \dots, 5$$

Geriye kalan  $2^k(M + 1) - 6$  adet denklem ise  $P_{2^k(M+1)}$  ötelenmiş Legendre polinomunun ilk  $(2^k(M + 1) - 6)$  kökünün (4.3.2.5) denkleminde yerine yazılmasıyla bulunur. Böylece bu lineer olmayan denklem sistemi, bilinmeyen  $c_{nm}$

katsayıları için MATLAB kullanılarak çözülür ve sonuç olarak (4.3.2.3) ile ifade edilen  $y(t)$  yaklaşık çözümü hesaplanır.

#### 4.4. Problemler

Bu kısımda Legendre dalgacık metodu, 3'ü lineer ve 5'i lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilen 8 farklı başlangıç değer problemine uygulanacaktır. Ele alınan metodun nasıl işlediğini gösterebilmek için her iki denklem tipine ait analitik çözümler önce bulunur, elde edilen analitik ve nümerik çözümlerle literatürdeki diğer nümerik çözümler kıyaslayarak Legendre dalgacık metodunun verimliliği gösterilir. Bulunan sonuçların kıyaslaması yapılırken mutlak hata tabloları kullanılır. Denklem sistemlerinin çözümünde ise MATLAB paket programından yararlanılır. Elde edilen çözümler ise grafiklerle de desteklenir.

##### Problem 1.

$$y''(t) = \frac{3}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) + y'\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}y''\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 - t + 1 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.4.1)$$

biçiminde ikinci dereceden orantılı gecikmeli nötr diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (4.4.2)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Bu başlangıç değer probleminin gerçek çözümü  $y(t) = t^2$  şeklindedir. Burada  $k = 0$ ,  $M = 2$  olarak seçilir ve (4.3.1.3) denklemi göz önüne alınırsa, bu takdirde bilinmeyen  $y(t)$  fonksiyonu yaklaşık olarak

$$y(t) = C^T \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \end{bmatrix} = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}[(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2 - 1] \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

biçiminde elde edilir. Burada amaç bilinmeyen  $c_{00}$ ,  $c_{01}$  ve  $c_{02}$  katsayılarını bularak  $y(t)$  yaklaşık çözümünü elde etmektir. Yukarıdaki (4.4.3) denkleminde matris çarpımı yapılırsa

$$y(t) = c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1] \quad (4.4.4)$$

denklemini bulunur. Bunun yanında (4.4.4) denkleminde  $t$  yerine  $\frac{t}{2}$  yazılırsa  $y\left(\frac{t}{2}\right)$  denklemini

$$y\left(\frac{t}{2}\right) = c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} [3(t - 1)^2 - 1] \quad (4.4.5)$$

olduğu görülür.  $y(t)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini bulmak için 3x3 boyutundaki  $D$  ve  $D^2$  matrisleri

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

formunda ele alınır. Bu taktirde  $y'(t)$  ve  $y''(t)$  türev fonksiyonları

$$\begin{aligned} y'(t) &= C^T D \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}[(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \end{bmatrix} \\ &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t - 1) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned}
y''(t) &= C^T D^2 \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}[(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \end{bmatrix} \\
&= c_{02}12\sqrt{5} \tag{4.4.8}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (4.4.7) ve (4.4.8) denklemlerinde  $t$  yerine  $\frac{t}{2}$  yazılırsa

$$y' \left( \frac{t}{2} \right) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(t-1) \tag{4.4.9}$$

ve

$$y'' \left( \frac{t}{2} \right) = c_{02}12\sqrt{5} \tag{4.4.10}$$

olduğu görülür. Bulunan bu yaklaşık fonksiyonları (4.4.1) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
&c_{02}12\sqrt{5} - \frac{3}{4} \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \right) \\
&\quad - \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(t-1)^2-1] \right) \\
&\quad - \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(t-1) \right) - \frac{1}{2}(c_{02}12\sqrt{5}) + t^2 + t - 1 \\
&= 0 \tag{4.4.11}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $M = 2$  aldığımızda  $c_{00}, c_{01}, c_{02}$  bilinmeyen katsayılarını bulmak için  $2^k(M+1) = 3$  adet denkleme ihtiyaç olduğu bilinir. İlk 2 denklem, başlangıç değerleri kullanılarak

$$y(0) = c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} = 0 \quad (4.4.12)$$

$$y'(0) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) = 0 \quad (4.4.13)$$

şeklinde elde edilir. Üçüncü denklemini elde edebilmek için 4.4.11 denkleminde  $t$  yerine  $P_3 - 3$ . derece ötelenmiş Legendre polinomunun ilk kökü olan  $t = 0.113$  yazılır ve

$$\begin{aligned} & c_{02}12\sqrt{5} - \frac{3}{4}(c_{00} + c_{01}(-1.34060732) + c_{02}(1.26052814)) \\ & - (c_{00} + c_{01}(-1.53632906) + c_{02}(2.15083421)) \\ & - (c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-11.90035377)) - \frac{1}{2}(c_{02}12\sqrt{5}) + (0.012769) \\ & + (0.113) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

bulunur. Böylece (4.4.12) – (4.4.14) denklemleri ile 3x3 tipinde lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi MATLAB paket programı kullanılarak çözüldüğünde

$$C^T = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02}] = [0.333333 \ 0.288675 \ 0.074535] \quad (4.4.15)$$

biçimindeki bilinmeyen katsayıları bulunmuş olur. Böylece ele alınan başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü

$$y(t) = C^T \psi(t) = [0.333333 \ 0.288675 \ 0.074535] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}[(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \end{bmatrix}$$

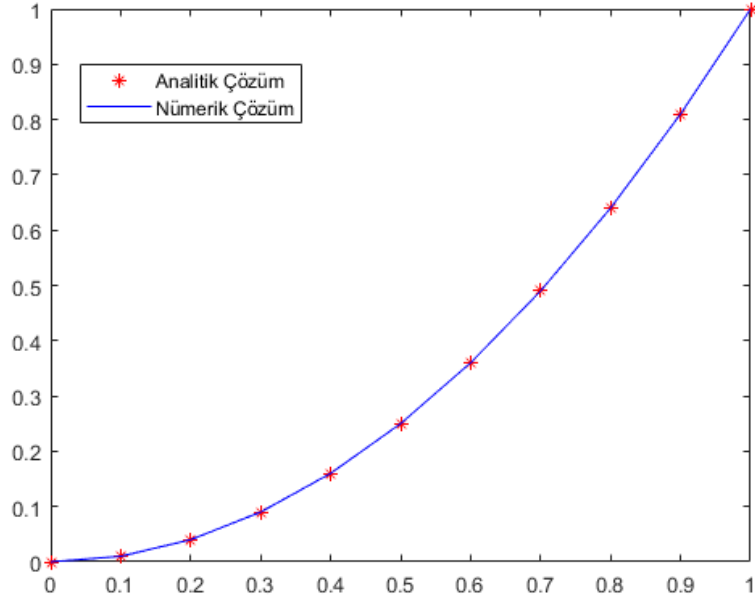
$$y(t) = (0.333333) + (0.288675)\sqrt{3}[2t-1] + (0.074535)\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \quad (4.4.16)$$

olarak elde edilir. Bulunan bu sonuç gerçek çözüm ile aynıdır. Probleme ait nümerik çözümün analitik çözüme ne kadar yaklaştığını gösteren grafik ise aşağıda verilmiştir.

Bu problem birinci mertebeden iki adımlı (two-stage order-one) Runge-Kutta metodu [32], One-leg  $\theta$  metodu [33], varyasyonel iterasyon metodu [22], Homotopi pertürbasyon metodu [26], çekirdek doğurucu Hilbert uzayı metodu [30], Legendre-Gauss sıralama metodu [28] ve Homotopi analizi metodu [25] gibi birçok metotla ele alınarak çözülmeye çalışılmıştır. Burada ise Legendre dalgacık metodu kullanılarak gerçek çözüm elde edilmiştir. Bu sebeple ele alınan bu metodun, kıyaslanan nümerik metotlara göre daha etkin olduğu gözlemlenmiştir. Bu metot uygulanarak elde edilen mutlak hata tablosu ise aşağıda verilmiştir. Tablodan da anlaşılacağı gibi, bu problemde düşük  $M$  değerlerine rağmen uygulanan metot, diğer metotlara göre daha etkili sonuçlar vermiştir.

**Tablo 4.4.1.** Uygulanan nümerik metot ile diğer nümerik metotların mutlak hatalarının kıyaslaması

$t_i$	Nümerik Metot M=2	Nümerik Metot M=4	One-leg- $\theta$ Metodu [33]	RKM [32]	VIM n=6 [22]	RKHSM n=100 [30]	HPM n=6 [26]	HAM n=6 [25]	LCM N=10 [28]
0.1	$3.43e-11$	$1.73e-18$	$6.10e-03$	$1.00e-03$	$1.67e-04$	$9.57e-06$	$1.67e-04$	$2.25e-08$	$6.59e-17$
0.2	$7.79e-11$	$6.94e-18$	$2.58e-02$	$2.02e-03$	$7.15e-04$	$1.95e-04$	$7.15e-04$	$9.81e-08$	$1.37e-17$
0.3	$1.98e-10$	$2.78e-17$	$6.47e-02$	$3.07e-03$	$1.73e-03$	$2.94e-04$	$1.72e-03$	$2.44e-07$	$5.67e-18$
0.4	$3.26e-10$	$2.78e-17$	$1.37e-01$	$4.17e-03$	$3.30e-03$	$3.93e-04$	$3.30e-03$	$4.90e-07$	$6.98e-17$
0.5	$4.62e-10$	0	$2.81e-01$	$5.34e-03$	$5.55e-03$	$4.92e-04$	$5.55e-03$	$8.69e-07$	$2.13e-17$



Şekil 4.4.1.  $M = 2$  için gerçek çözüm ve nümerik çözüm grafiği

**Problem 2.**

$$y'''(t) = y(t) + y'\left(\frac{t}{2}\right) + y''\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{2}y'''\left(\frac{t}{4}\right) - t^4 - \frac{t^3}{2} - \frac{4}{3}t^2 + 21t \quad (4.4.17)$$

biçimindeki üçüncü derece orantılı gecikmeli nötr diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \quad 0 < t < 1 \quad (4.4.18)$$

başlangıç koşulları ile ele alalım. Problemin gerçek çözümü  $y(t) = t^4$  dir. Gerçek çözüm dördüncü dereceden bir polinom ifade ettiği için  $M = 4$  alınarak beşinci derece Legendre polinomu burada kullanılır. O halde  $k = 0$ ,  $M = 4$  alındığında  $y(t)$  yaklaşık fonksiyonu

$$y(t) = C^T \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \\ \psi_{03} \\ \psi_{04} \end{bmatrix}$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \end{bmatrix} \quad (4.4.19)$$

biçiminde bulunur. Daha açık biçimde

$$y(t) = c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] + c_{04}\frac{3}{8}[35(2t-1)^4 \\ - 30(2t-1)^2+3] \quad (4.4.20)$$

yazılabilir.  $y(t)$  fonksiyonunun birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerini bulabilmek için  $5 \times 5$  boyutundaki  $D$ ,  $D^2$  ve  $D^3$  matrislerin

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 \end{bmatrix}, \quad D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 840\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.21)$$

formunda olduğu görülür. Bu taktirde  $y'(t)$ ,  $y''(t)$  ve  $y'''(t)$  fonksiyonları



$$y'(t) = C^T D \psi(t)$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \end{bmatrix}$$

$$= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t-1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t-1)^2-1]) \\ + c_{04}(18(2t-1) + 21[5(2t-1)^3-3(2t-1)]) \quad (4.4.22)$$

$$y''(t) = C^T D^2 \psi(t)$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \end{bmatrix}$$

$$= c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}(2t-1) + c_{04}(120 + 210[3(2t-1)^2-1]) \quad (4.4.23)$$

$$y'''(t) = C^T D^3 \psi(t)$$

$$\begin{aligned}
&= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 840\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \end{bmatrix} \\
&= c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}(2520(2t-1)) \tag{4.4.24}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (4.4.22) denkleminde  $t$  yerine  $\frac{t}{2}$ , (4.4.23) denkleminde  $t$  yerine  $\frac{t}{3}$  ve 4.4.24 denklemlerinde  $t$  yerine  $\frac{t}{4}$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
y' \left( \frac{t}{2} \right) &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(t-1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(t-1)^2-1]) \\
&+ c_{04}(18(t-1) + 21[5(t-1)^3-3(t-1)]) \tag{4.4.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' \left( \frac{t}{3} \right) &= c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7} \left( \frac{2t}{3} - 1 \right) \\
&+ c_{04} \left( 120 + 210 \left[ 3 \left( \frac{2t}{3} - 1 \right)^2 - 1 \right] \right) \tag{4.4.26}
\end{aligned}$$

$$y''' \left( \frac{t}{4} \right) = c_{03}120\sqrt{7} + c_{04} \left( 2520 \left( \frac{t}{2} - 1 \right) \right) \tag{4.4.27}$$

bulunur. Şimdi ise bu yaklaşık fonksiyonları (4.4.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}(2520(2t - 1)) \\
& - \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1] \right. \\
& + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2} [5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)] \\
& \left. + c_{04}\frac{3}{8} [35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3] \right) \\
& - \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(t - 1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(t - 1)^2 - 1]) \right. \\
& \left. + c_{04}(18(t - 1) + 21[5(t - 1)^3 - 3(t - 1)]) \right) \\
& - \left( c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}\left(\frac{2t}{3} - 1\right) \right. \\
& \left. + c_{04}\left(120 + 210\left[3\left(\frac{2t}{3} - 1\right)^2 - 1\right]\right) \right) \\
& - \frac{1}{2}\left(c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}\left(2520\left(\frac{t}{2} - 1\right)\right)\right) + t^4 + \frac{t^3}{2} + \frac{4}{3}t^2 - 21t \\
& = 0 \tag{4.4.28}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}$  bilinmeyen katsayılarını bulmak için  $2^k(M + 1) = 5$  adet denkleme ihtiyaç vardır. İlk üç denklem, başlangıç şartları kullanılarak

$$y(0) = c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 = 0 \tag{4.4.29}$$

$$y'(0) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) + c_{03}12\sqrt{7} + c_{04}(-60) = 0 \tag{4.4.30}$$

$$y''(0) = c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}(-60\sqrt{7}) + c_{04}540 = 0 \tag{4.4.31}$$

biçiminde bulunur. Geriye kalan iki adet denklemi elde etmek için (4.4.28) denkleminde  $t$  yerine  $P_5 - 5$ . derecen ötelenmiş Legendre polinomunun ilk iki kökü olan  $t = 0.04691$  ve  $t = 0.23077$  alınarak

$$\begin{aligned}
& c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}(2520(2(0.04691) - 1)) \\
& - \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2(0.04691) - 1] \right. \\
& + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} [3(2(0.04691) - 1)^2 - 1] \\
& + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2} [5(2(0.04691) - 1)^3 - 3(2(0.04691) - 1)] \\
& + c_{04}\frac{3}{8}[35(2(0.04691) - 1)^4 - 30(2(0.04691) - 1)^2 + 3] \left. \right) \\
& - \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}((0.04691) - 1) \right. \\
& + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3((0.04691) - 1)^2 - 1]) \\
& + c_{04}(18((0.04691) - 1) \\
& + 21[5((0.04691) - 1)^3 - 3((0.04691) - 1)]) \left. \right) \\
& - \left( c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}\left(\frac{2(0.04691)}{3} - 1\right) \right. \\
& + c_{04}\left(120 + 210\left[3\left(\frac{2(0.04691)}{3} - 1\right)^2 - 1\right]\right) \left. \right) \\
& - \frac{1}{2}\left(c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}\left(2520\left(\frac{(0.04691)}{2} - 1\right)\right)\right) + (0.04691)^4 \\
& + \frac{(0.04691)^3}{2} + \frac{4}{3}(0.04691)^2 - 21(0.04691) = 0 \quad (4.4.32)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}(2520(2(0.23077) - 1)) \\
& - \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2(0.23077) - 1] \right. \\
& + c_{02} \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2(0.23077) - 1)^2 - 1] \\
& + c_{03} \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2(0.23077) - 1)^3 - 3(2(0.23077) - 1)] \\
& + c_{04} \frac{3}{8} [35(2(0.23077) - 1)^4 - 30(2(0.23077) - 1)^2 + 3] \left. \right) \\
& - \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}((0.23077) - 1) \right. \\
& + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3((0.23077) - 1)^2 - 1]) \\
& + c_{04}(18((0.23077) - 1) \\
& + 21[5((0.23077) - 1)^3 - 3((0.23077) - 1)]) \left. \right) \\
& - \left( c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7} \left( \frac{2(0.23077)}{3} - 1 \right) \right. \\
& + c_{04} \left( 120 + 210 \left[ 3 \left( \frac{2(0.23077)}{3} - 1 \right)^2 - 1 \right] \right) \left. \right) \\
& - \frac{1}{2} \left( c_{03}120\sqrt{7} + c_{04} \left( 2520 \left( \frac{(0.23077)}{2} - 1 \right) \right) \right) \\
& + (0.23077)^4 + \frac{(0.23077)^3}{2} + \frac{4}{3}(0.23077)^2 - 21(0.23077) = 0 \quad (4.4.33)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.4.29) – (4.4.33) denklemleri ile 5x5 tipinde lineer denklem sistemi bulunur. Bu lineer denklem sistemi MATLAB programını kullanılarak çözümlürse

$$C^T = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] = [0.333333 \ 0.288675 \ 0.127775 \ 0.037796 \ 0.004761]$$

şeklinde bilinmeyen katsayılar elde edilir. Böylece bu başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü

$$y(t) = C^T \psi(t)$$

$$= [0.333333 \ 0.288675 \ 0.127775 \ 0.037796 \ 0.004761] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \end{bmatrix}$$

$$= (0.333333) + (0.288675)\sqrt{3}[2t-1] + (0.127775)\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ + (0.037796)\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ + (0.004761)\frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3]$$

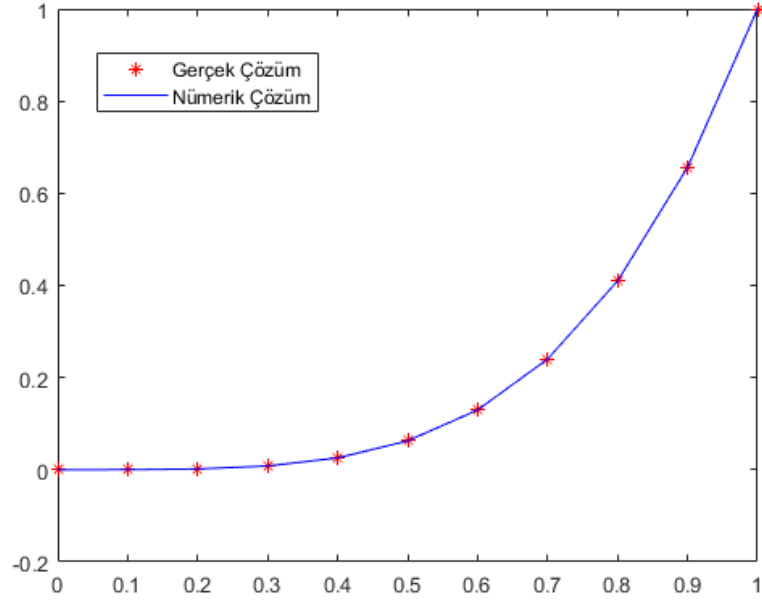
biçimindedir.

Bu problem daha önce Biazar ve Ghanbari [26] tarafından Homotopi pertürbasyon metodu, Chen ve Wang [22] tarafından varyasyonel iterasyon metodu ve Sakar [25] tarafından Homotopi analizi metodu kullanılarak çözülmüştür. Aşağıdaki mutlak hata tablosunda, ele alınan bu metotlarla belirli şartlar altında yazarların elde ettikleri hatalar verilmektedir.

**Tablo 4.4.2.** Uygulanan nümerik metot ile diğer nümerik metotların mutlak hatalarının kıyaslaması

$t_i$	Nümerik Method $M = 4$	HPM $n = 6[26]$	VIM $n = 6[22]$	HAM $n = 6[25]$
0.1	$1.36e-20$	$3.90e-12$	$9.09e-12$	$1.20e-13$
0.2	$2.17e-19$	$6.40e-10$	$2.98e-10$	$2.00e-12$
0.3	$5.20e-18$	$2.32e-08$	$2.33e-09$	$1.10e-11$
0.4	$3.47e-18$	$1.07e-07$	$1.01e-08$	$3.00e-11$
0.5	0	$2.70e-07$	$3.20e-08$	$1.00e-10$
0.6	0	$5.78e-07$	$8.24e-08$	$2.00e-10$
0.7	$8.33e-17$	$1.10e-06$	$1.85e-07$	$5.00e-10$
0.8	$5.55e-17$	$1.94e-06$	$3.76e-07$	$7.00e-10$
0.9	$1.11e-16$	$3.22e-06$	$7.09e-07$	$1.10e-09$
1	0	$5.09e-06$	$1.26e-06$	$1.60e-09$

Yukarıdaki tablodan da görülebileceği gibi ele alınan başlangıç değer problemini çözmek için uygulanan bu metodun kıyaslanan nümerik metotlara göre daha iyi sonuç verdiği söylenebilir. Uygulanan nümerik çözüm ile analitik çözüme ait grafik ise aşağıda vermiştir.



Şekil 4.4.2.  $M = 4$  için gerçek çözüm ve nümerik çözüm grafiği

### Problem 3.

$$y'(t) = -y(t) + 0.1y(0.8t) + 0.5y'(0.8t) + (0.32t - 0.5)e^{-0.8t} + e^{-t} \quad (4.4.34)$$

birinci derece orantılı gecikmeli nötr diferansiyel denklemi

$$y(0) = 0 \quad (4.4.35)$$

başlangıç koşulu ile ele alınmış olsun. Problemin gerçek çözümü ise  $y(t) = te^{-t}$  biçimindedir. İlk iki problemden farklı olarak bu problemde gerçek çözüm polinom formunda değildir. Bu sebeple  $M$  değerini çok yüksek bir sayı almamak koşulu ile  $M = 4$  olarak seçilsin. Burada seçilen  $M$  değeri yeterli gelmez ise bu değer artırılarak gerçek çözüme daha yakın bir sonuç elde etmeye çalışılır.  $k = 0$ ,  $M = 4$  alındığında  $y(t)$  çözüm fonksiyonunun yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
y(t) &= C^T \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \\ \psi_{03} \\ \psi_{04} \end{bmatrix} \\
&= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \end{bmatrix} \quad (4.4.36)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu taktirde  $y(t)$  fonksiyonu

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\
&+ c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\
&+ c_{04}\frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \quad (4.4.37)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki (4.4.37) denkleminde  $t$  yerine  $0.8t$  alınırsa

$$\begin{aligned}
y(0.8t) &= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[1.6t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(1.6t-1)^2-1] \\
&+ c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(1.6t-1)^3-3(1.6t-1)] \\
&+ c_{04}\frac{3}{8}[35(1.6t-1)^4-30(1.6t-1)^2+3] \quad (4.4.38)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan 4.4.21 denklemindeki  $D$  matrisi kullanılarak



$$y'(t) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t - 1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t - 1)^2 - 1]) + c_{04}(18(2t - 1) + 21[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) \quad (4.4.39)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki (4.4.39) denkleminde  $t$  yerine  $0.8t$  yazılırsa

$$y'(0.8t) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(1.6t - 1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(1.6t - 1)^2 - 1]) + c_{04}(18(1.6t - 1) + 21[5(1.6t - 1)^3 - 3(1.6t - 1)]) \quad (4.4.40)$$

elde edilir. Sonuçta bulunan bu değerler (4.4.34) denkleminde yerine konularak

$$\begin{aligned} & \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t - 1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t - 1)^2 - 1]) \right. \\ & \quad \left. + c_{04}(18(2t - 1) + 21[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) \right) \\ & + \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t - 1)^2 - 1] + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t - 1)^3 - \right. \\ & \quad \left. 3(2t - 1)] + c_{04}\frac{3}{8}[35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3] \right) - 0.1 \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[1.6t - \right. \\ & \quad \left. 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(1.6t - 1)^2 - 1] + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(1.6t - 1)^3 - 3(1.6t - 1)] + \right. \\ & \quad \left. c_{04}\frac{3}{8}[35(1.6t - 1)^4 - 30(1.6t - 1)^2 + 3] \right) - 0.5 \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(1.6t - 1) + \right. \\ & \quad \left. c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(1.6t - 1)^2 - 1]) + c_{04}(18(1.6t - 1) + 21[5(1.6t - 1)^3 - \right. \\ & \quad \left. 3(1.6t - 1)]) \right) - (0.32t - 0.5)e^{-0.8t} - e^{-t} = 0 \quad (4.4.41) \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}$  bilinmeyen katsayılarını bulmak için  $2^k(M + 1) = 5$  adet denkleme ihtiyaç vardır. İlk denklem, başlangıç değeri kullanılmak sureti ile

$$y(0) = c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 = 0 \quad (4.4.42)$$

biçiminde elde edilir. Geriye kalan dört denklem, (4.4.41) denkleminde  $t$  yerine  $P_5 - 5$ . derece ötelenmiş Legendre polinomunun ilk dört kökü olan  $t = 0.04691$ ,  $t = 0.23077$ ,  $t = 0.5$  ve  $t = 0.76923$  değerleri alınarak elde edilir. Böylece  $5 \times 5$  tipinde lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi MATLAB

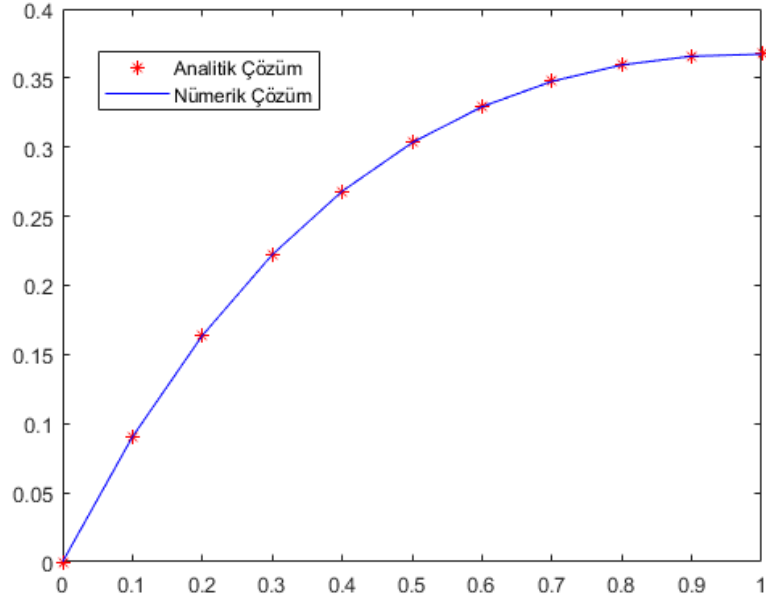
programı kullanılarak çözüldüğünde  $c_{nm}$  bilinmeyen katsayıları bulunur. Böylece bulunan bu katsayılarla probleme ait yaklaşık çözüm elde edilmiş olur.

Tablo (4.4.3),  $M = 4$  ile ele aldığımız nümerik metoda ve literatürdeki bu problemin çözümünde kullanılan bazı metotlardan olan One-leg  $\theta$  metodu [33], birinci mertebeden iki adımlı Runge- Kutta metodu [32], varyasyonel iterasyon metodu [22], çekirdek doğurucu Hilbert uzayı metodu [30] ve Homotopi pertürbasyon metoduna [26] ait mutlak hataları göstermektedir. İlgili tablodan da anlaşılacağı gibi uygulanan metot, ilgili aralıktaki her bir noktada diğer metotlara göre daha küçük bir hataya sahiptir. Bu da metodun dördüncü dereceden denklemlerde dahi daha doğru ve etkili sonuçlar verdiğini göstermektedir.

**Tablo 4.4.3.** Uygulanan nümerik metot ile diğer nümerik metotların mutlak hatalarının kıyaslaması

$t_i$	Nümerik Metot $M = 4$	One-leg - $\theta$ metodu [33]	Two-stage order-one Runge-Kutta Metodu [32]	VIM $n = 6$ [22]	RKHSM $n = 100$ [30]	HPM $n = 6$ [26]
0.1	$1.19e-05$	$4.65e-03$	$8.68e-04$	$1.30e-03$	$1.42e-04$	$1.06e-03$
0.2	$2.01e-05$	$1.45e-02$	$1.49e-03$	$2.14e-03$	$1.17e-04$	$1.35e-03$
0.3	$2.40e-05$	$2.57e-02$	$1.90e-03$	$2.63e-03$	$9.45e-04$	$1.18e-03$
0.4	$2.15e-06$	$3.60e-02$	$2.16e-03$	$2.84e-03$	$7.59e-04$	$7.61e-04$
0.5	$2.76e-05$	$4.43e-02$	$2.28e-03$	$2.83e-03$	$6.03e-04$	$2.32e-04$
0.6	$2.13e-05$	$5.03e-02$	$2.31e-03$	$2.67e-03$	$4.73e-04$	$2.98e-04$
0.7	$1.88e-05$	$5.37e-02$	$2.27e-03$	$2.39e-03$	$3.64e-04$	$7.64e-04$
0.8	$4.03e-05$	$5.47e-02$	$2.17e-03$	$2.04e-03$	$2.75e-04$	$1.12e-03$
0.9	$8.69e-05$	$5.35e-02$	$2.03e-03$	$1.64e-03$	$2.03e-04$	$1.37e-03$
1	$5.90e-04$	$5.03e-02$	$1.86e-03$	$1.22e-03$	$1.43e-04$	$1.50e-03$

Sonuç olarak aşağıda ele alınan probleme ait gerçek çözüm ile nümerik çözüm arasındaki farkı gösteren grafik ve mutlak hata tablosu yer almaktadır.



Şekil 4.4.3.  $M = 4$  için analitik çözüm ve nümerik çözüm grafiği

#### Problem 4.

$$y'(t) + ty(t - t^2) + ty^2(t) = 1 + t^2 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.4.43)$$

birinci dereceden lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemi

$$y(0) = 0 \quad (4.4.44)$$

başlangıç koşulu ile birlikte verilsin. Bu başlangıç değer probleminin değişken gecikmesi  $t^2$ , gerçek çözümü ise  $y(t) = t$ 'dir. Metodun lineer olmayan denklemlerde de gerçek çözümü bulabilme yetisi olduğunu göstermek için düşük dereceden denkleme sahip olan bu problemi  $k = 0$ ,  $M = 1$  olarak çözelim.  $y(t)$  fonksiyonu önce

$$y(t) = C^T \Psi(t) = [c_{00} \ c_{01}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \end{bmatrix} = [c_{00} \ c_{01}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}[(2t-1)] \end{bmatrix} \quad (4.4.45)$$

olarak yazılır. Bunun açık bir biçimde ifadesi ise

$$y(t) = c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] \quad (4.4.46)$$

şeklindedir. Yukarıdaki (4.4.46) denkleminde  $t$  yerine  $t - t^2$  yazılırsa

$$y(t - t^2) = c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2(t - t^2) - 1] \quad (4.4.47)$$

bulunur. Daha sonra  $D$  matrisi kullanılarak

$$y'(t) = C^T D \Psi(t) = [c_{00} \ c_{01}] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \end{bmatrix} = c_{01} 2\sqrt{3} \quad (4.4.48)$$

denklemini ifade edilir. Bulunan bu değerler (4.4.43) denkleminde yerine konulursa

$$c_{01} 2\sqrt{3} + t(c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2(t - t^2) - 1]) + t(c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1])^2 - 1 - t^2 = 0 \quad (4.4.49)$$

denklemini elde edilir. Burada  $c_{00}, c_{01}$  bilinmeyen katsayılarını bulabilmek için  $2^k(M + 1) = 2$  adet denkleme ihtiyaç vardır. Birinci denklem için  $y(0) = 0$  başlangıç değeri kullanılırsa

$$y(0) = c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) = 0 \quad (4.4.50)$$

olduğu görülür. Geriye kalan diğer denklem için ise (4.4.49) denkleminde  $t$  yerine  $P_2 - 2$ . derece ötelenmiş Legendre polinomunun ilk kökü olan  $t = 0.211$  değeri alınır

$$c_{01} 2\sqrt{3} + (0.211)(c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2((0.211) - (0.211)^2) - 1]) + (0.211)(c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2(0.211) - 1])^2 - 1 - (0.211)^2 = 0 \quad (4.4.51)$$

denklemini bulunur. Böylece (4.4.50) ve (4.4.51) denklemleri ile 2x2 tipinde lineer olmayan denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu lineer denklem sistemi çözüldüğünde

$$C^T = [c_{00} \ c_{01}] = [0.5 \ 0.2887]$$

katsayıları elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} y(t) &= C^T \psi(t) = [0.5 \ 0.2887] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}[(2t-1)] \end{bmatrix} \\ &= 0.5 + (0.2887)(1.7321)(2t - 1) \\ &= 0.5 + 0.5(2t - 1) = t \end{aligned} \quad (4.4.52)$$

bu çözüm ile gerçek çözümün aynı olduğu görülür. Bu da uygulanan metodun kolay ve etkili olduğunu göstermektedir.

#### Problem 5.

$$\begin{aligned} y''(t) + y'(t - t^2) - t^2 y\left(t + \frac{t}{2}\right) + (y'(t))^2 - y'(t)y(t) \\ = e^t + e^{t-t^2} - t^2 e^{\frac{3t}{2}} \quad t \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.4.53)$$

ikinci dereceden lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemi

$$y(0) = y'(0) = 1 \quad (4.4.54)$$

başlangıç şartları ile verilsin. Burada değişken gecikmeleri  $t^2$  ve  $-\frac{t}{2}$ 'dir. Problemin gerçek çözümü ise  $y(t) = e^t$  dir. Bu başlangıç değer problemine  $M = 2$  olarak ikinci dereceden bir polinom ile yaklaşıldığında problemin gerçek çözümüne yeterli düzeyde bir yaklaşmanın olmadığı tespit edilmiştir. Bu sebeple  $M$  değerini artırılarak  $M = 3$  ve  $M = 5$  değerleri alınmıştır.  $M = 5$  alındığında yeterli bir yaklaşım sağlandığından,  $M$  değerinin daha fazla artırılmasının önemsiz olduğu

düşünülmüştür. Bu yüzden problemin çözümü için  $k = 0$ ,  $M = 5$  alınmıştır. Böylece  $y(t)$  fonksiyonu

$$y(t) = C^T \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \\ \psi_{03} \\ \psi_{04} \\ \psi_{05} \end{bmatrix}$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \end{bmatrix}$$

$$= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1]$$

$$+ c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)]$$

$$+ c_{04}\frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3]$$

$$+ c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \quad (4.4.55)$$

biçiminde ifade edilir. Diğer yandan (4.4.55) denkleminde  $t$  yerine  $t + \frac{t}{2}$  yazılırsa

$$y\left(t + \frac{t}{2}\right) = c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[3t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(3t-1)^2-1]$$

$$+ c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(3t-1)^3-3(3t-1)]$$

$$+ c_{04}\frac{3}{8}[35(3t-1)^4-30(3t-1)^2+3]$$

$$+c_{05} \frac{\sqrt{11}}{8} [63(3t-1)^5 - 70(3t-1)^3 + 15(3t-1)] \quad (4.4.56)$$

olduğu görülür. Bunun yanında  $y'(t)$  ve  $y''(t)$  fonksiyonlarını elde etmek için

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{11} & 0 & 2\sqrt{55} & 0 & 6\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56\sqrt{33} & 0 & 36\sqrt{77} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6x6 tipindeki  $D$  ve  $D^2$  matrisleri kullanılarak

$$y'(t) = C^T D \psi(t)$$

$$[c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{11} & 0 & 2\sqrt{55} & 0 & 6\sqrt{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t - 1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t - 1)^2 - 1]) \\
&\quad + c_{04}(18(2t - 1) + 21[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) \\
&\quad + c_{05}\left(2\sqrt{11} + 5\sqrt{11}[3(2t - 1)^2 - 1] \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{4}\sqrt{11}[35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3]\right) \tag{4.4.57}
\end{aligned}$$

ve

$$y''(t) = C^T D^2 \psi(t)$$

$$\begin{aligned}
&= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05}] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56\sqrt{33} & 0 & 36\sqrt{77} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}(2t - 1) + c_{04}(120 + 210[3(2t - 1)^2 - 1]) \\
&\quad + c_{05}(168\sqrt{11}(2t - 1) \\
&\quad + 126\sqrt{11}[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) \tag{4.4.58}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Şimdi ise (4.4.57) denkleminde  $t$  yerine  $t - t^2$  konularak



$$\begin{aligned}
y'(t - t^2) &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2(t - t^2) - 1) \\
&+ c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2(t - t^2) - 1)^2 - 1]) \\
&+ c_{04}(18(2(t - t^2) - 1) \\
&+ 21[5(2(t - t^2) - 1)^3 - 3(2(t - t^2) - 1)]) \\
&+ c_{05}\left(2\sqrt{11} + 5\sqrt{11}[3(2(t - t^2) - 1)^2 - 1] \right. \\
&\left. + \frac{9}{4}\sqrt{11}[35(2(t - t^2) - 1)^4 - 30(2(t - t^2) - 1)^2 + 3]\right) \quad (4.4.59)
\end{aligned}$$

denklemini bulunur. Bulunan bu fonksiyon değerleri (4.4.53) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left( c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}(2t - 1) + c_{04}(120 + 210[3(2t - 1)^2 - 1]) \right. \\
&\quad \left. + c_{05}(168\sqrt{11}(2t - 1) + 126\sqrt{11}[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) \right) \\
&+ \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2(t - t^2) - 1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2(t - t^2) - 1)^2 - 1]) \right. \\
&\quad + c_{04}(18(2(t - t^2) - 1) \\
&\quad + 21[5(2(t - t^2) - 1)^3 - 3(2(t - t^2) - 1)]) \\
&\quad + c_{05}\left(2\sqrt{11} + 5\sqrt{11}[3(2(t - t^2) - 1)^2 - 1] \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{4}\sqrt{11}[35(2(t - t^2) - 1)^4 - 30(2(t - t^2) - 1)^2 + 3]\right) \Big) \\
&- t^2 \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[3t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(3t - 1)^2 - 1] \right. \\
&\quad + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(3t - 1)^3 - 3(3t - 1)] \\
&\quad + c_{04}\frac{3}{8}[35(3t - 1)^4 - 30(3t - 1)^2 + 3] \\
&\quad \left. + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8}[63(3t - 1)^5 - 70(3t - 1)^3 + 15(3t - 1)] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t-1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t-1)^2 - 1]) \right. \\
& \quad + c_{04}(18(2t-1) + 21[5(2t-1)^3 - 3(2t-1)]) \\
& \quad + c_{05} \left( 2\sqrt{11} + 5\sqrt{11}[3(2t-1)^2 - 1] \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{9}{4}\sqrt{11}[35(2t-1)^4 - 30(2t-1)^2 + 3] \right) \right)^2 \\
& - \left( c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t-1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t-1)^2 - 1]) \right. \\
& \quad + c_{04}(18(2t-1) + 21[5(2t-1)^3 - 3(2t-1)]) \\
& \quad + c_{05} \left( 2\sqrt{11} + 5\sqrt{11}[3(2t-1)^2 - 1] \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{9}{4}\sqrt{11}[35(2t-1)^4 - 30(2t-1)^2 + 3] \right) \right) \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t-1] \right. \\
& \quad + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2 - 1] + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3 - 3(2t-1)] \\
& \quad + c_{04}\frac{3}{8}[35(2t-1)^4 - 30(2t-1)^2 + 3] + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5 \\
& \quad \left. - 70(2t-1)^3 + 15(2t-1)] \right) - e^t - e^{t-t^2} + t^2 e^{\frac{3t}{2}} = 0
\end{aligned}
\tag{4.4.60}$$

denklemini elde edilir. Diğer yandan  $c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}, c_{05}$  bilinmeyen katsayılarını bulmak için  $2^k(M+1) = 6$  adet denkleme ihtiyaç vardır. İlk iki denklem, başlangıç değerleri kullanılarak

$$y(0) = c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 + c_{05}(-\sqrt{11}) = 1 \tag{4.4.61}$$

$$y'(0) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) + c_{03}12\sqrt{7} + c_{04}(-60) + c_{05}30\sqrt{11} = 1 \tag{4.4.62}$$

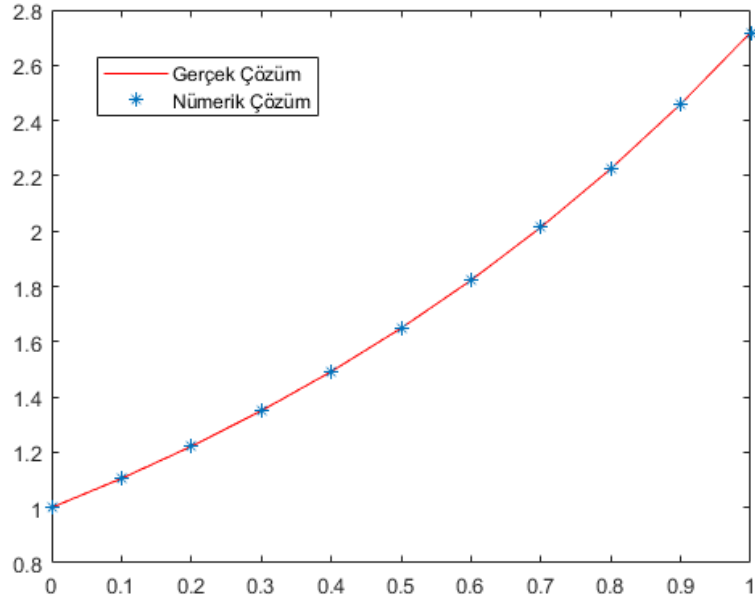
biçiminde bulunur. Geriye kalan dört adet denklemi elde etmek için (4.4.60) denkleminde  $t$  yerine  $P_6 - 6$ . derece ötelenmiş Legendre polinomunun ilk dört kökü olan  $t = 0.03377$ ,  $t = 0.16940$ ,  $t = 0.38069$ ,  $t = 0.61931$  değerleri yerine yazılarak elde edilir. Böylece 6x6 tipinde lineer olmayan denklem sistemi bulunur. Bu lineer olmayan denklem sistemi MATLAB programı kullanılarak çözüldüğünde  $c_{nm}$  bilinmeyen katsayıları elde edilmiş olur.

Problemin  $M = 2$ ,  $M = 3$  ve  $M = 5$  durumları için mutlak hatanın karşılaştırma tablosu ise aşağıdaki gibidir.

**Tablo 4.4.5.**  $M = 2$ ,  $M = 3$  ve  $M = 5$  için mutlak hata tablosu

$t_i$	$E_2$	$E_3$	$E_5$
0.1	0.0003700607	$2.681857e-05$	$3.759234e-08$
0.2	0.0007611571	$1.770104e-05$	$1.250407e-07$
0.3	$1.000193e-05$	$7.705389e-05$	$8.144094e-08$
0.4	0.0031690362	0.0001848035	$3.440118e-07$
0.5	0.0101967998	$9.769431e-05$	$4.761915e-07$
0.6	0.0226435623	0.0005415589	$4.774446e-07$
0.7	0.0422447445	0.0022553881	$1.197968e-06$
0.8	0.0709182830	0.0057487414	$5.626756e-06$
0.9	0.1107838255	0.0119282777	$3.901048e-05$
1	0.1641839450	0.0219235813	0.000137395

Aşağıdaki grafikte  $M = 5$  alınarak bulunan nümerik çözümün grafiği ile gerçek çözümün grafiğinin birbirinin üzerine çakıştığı görülmektedir.



**Şekil 4.4.5.**  $M = 5$  için gerçek çözüm ve nümerik çözüm grafiği

**Problem 6.**

$$y''(t) + 2y(t) - y^2(t) + y\left(\frac{t^3}{8}\right) = \sin t - \sin^2 t + \sin\left(\frac{t^3}{8}\right) \quad (4.4.63)$$

ikinci dereceden lineer olmayan değişken gecikmeli diferansiyel denklemi

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (4.4.64)$$

başlangıç koşulları ile verilmiş olsun. Bu başlangıç değer probleminin gerçek çözümlü  $y(t) = \sin t$  dir. Şimdi bu problemi  $k = 0$ ,  $M = 6$  olarak çözelim. Bunun için  $y(t)$  fonksiyonu

$$y(t) = C^T \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \\ \psi_{03} \\ \psi_{04} \\ \psi_{05} \\ \psi_{06} \end{bmatrix}$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{13}}{16}[231(2t-1)^6-315(2t-1)^4+105(2t-1)^2-5] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] + c_{02} \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1] \\
&+ c_{03} \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)] \\
&+ c_{04} \frac{3}{8} [35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3] \quad (4.4.65) \\
&+ c_{05} \frac{\sqrt{11}}{8} [63(2t - 1)^5 - 70(2t - 1)^3 + 15(2t - 1)] \\
&+ c_{06} \frac{\sqrt{13}}{16} [231(2t - 1)^6 - 315(2t - 1)^4 + 105(2t - 1)^2 - 5]
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Buradan da (4.4.65) denkleminde  $t$  yerine  $\left(\frac{t^3}{8}\right)$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
y\left(\frac{t^3}{8}\right) &= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}\left[\frac{t^3}{4} - 1\right] + c_{02} \frac{\sqrt{5}}{2} \left[3\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^2 - 1\right] \\
&+ c_{03} \frac{\sqrt{7}}{2} \left[5\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^3 - 3\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)\right] \\
&+ c_{04} \frac{3}{8} \left[35\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^4 - 30\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^2 + 3\right] \\
&+ c_{05} \frac{\sqrt{11}}{8} \left[63\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^5 - 70\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^3 + 15\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)\right] \\
&+ c_{06} \frac{\sqrt{13}}{16} \left[231\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^6 - 315\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^4 + 105\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^2 - 5\right] \\
&\hspace{15em} (4.4.66)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bunun yanında  $y'(t)$  başlangıç koşulunda  $y'(t)$  fonksiyonunu elde etmek için

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{11} & 0 & 2\sqrt{55} & 0 & 6\sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{39} & 0 & 2\sqrt{91} & 0 & 2\sqrt{143} & 0 \end{bmatrix}$$

7x7 tipindeki  $D$  matrisi kullanılarak

$$y'(t) = C^T D \psi(t)$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{11} & 0 & 2\sqrt{55} & 0 & 6\sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{39} & 0 & 2\sqrt{91} & 0 & 2\sqrt{143} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{13}}{16}[231(2t-1)^6-315(2t-1)^4+105(2t-1)^2-5] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}6\sqrt{5}(2t-1) + c_{03}(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7}[3(2t-1)^2-1]) \\ &\quad + c_{04}(18(2t-1) + 21[5(2t-1)^3-3(2t-1)]) \\ &\quad + c_{05}(2\sqrt{11} + 5\sqrt{11}[3(2t-1)^2-1] \\ &\quad + \frac{9}{4}\sqrt{11}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3]) \\ &\quad + c_{06}(6\sqrt{13}(2t-1) + 7\sqrt{13}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ &\quad + \frac{11}{4}\sqrt{13}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)]) \end{aligned} \quad (4.4.67)$$

denklemleri bulunur. Benzer şekilde  $y''(t)$  başlangıç fonksiyonunu elde etmek için ise

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56\sqrt{33} & 0 & 36\sqrt{77} & 0 & 0 & 0 \\ 84\sqrt{13} & 0 & 72\sqrt{65} & 0 & 132\sqrt{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7x7 boyutundaki  $D^2$  matrisi kullanılarak

$$y''(t) = C^T D^2 \psi(t)$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56\sqrt{33} & 0 & 36\sqrt{77} & 0 & 0 & 0 \\ 84\sqrt{13} & 0 & 72\sqrt{65} & 0 & 132\sqrt{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{13}}{16}[231(2t-1)^6-315(2t-1)^4+105(2t-1)^2-5] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}(2t-1) + c_{04}(120 + 210[3(2t-1)^2-1]) \\ &\quad + c_{05}(168\sqrt{11}(2t-1) + 126\sqrt{11}[5(2t-1)^3-3(2t-1)]) \\ &\quad + c_{06}\left(84\sqrt{13} + 180\sqrt{13}[3(2t-1)^2-1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{99}{2}\sqrt{13}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3]\right) \end{aligned} \quad (4.4.68)$$

denklemini elde edilir. Bulunan bu fonksiyon değerleri (4.4.63) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& \left( c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}60\sqrt{7}(2t - 1) + c_{04}(120 + 210[3(2t - 1)^2 - 1]) \right. \\
& \quad + c_{05}(168\sqrt{11}(2t - 1) + 126\sqrt{11}[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) \\
& \quad + c_{06} \left( 84\sqrt{13} + 180\sqrt{13}[3(2t - 1)^2 - 1] \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{99}{2}\sqrt{13}[35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3] \right) \right) \\
& + 2 \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1] \right. \\
& \quad + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2} [5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)] \\
& \quad + c_{04}\frac{3}{8} [35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3] \\
& \quad + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8} [63(2t - 1)^5 - 70(2t - 1)^3 + 15(2t - 1)] \\
& \quad \left. + c_{06}\frac{\sqrt{13}}{16} [231(2t - 1)^6 - 315(2t - 1)^4 + 105(2t - 1)^2 - 5] \right) \\
& - \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1] \right. \\
& \quad + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2} [5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)] \\
& \quad + c_{04}\frac{3}{8} [35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3] \\
& \quad + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8} [63(2t - 1)^5 - 70(2t - 1)^3 + 15(2t - 1)] \\
& \quad \left. + c_{06}\frac{\sqrt{13}}{16} [231(2t - 1)^6 - 315(2t - 1)^4 + 105(2t - 1)^2 - 5] \right)^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}\left(\frac{t^3}{4} - 1\right) + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2} \left[ 3\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^2 - 1 \right] \right. \\
& + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2} \left[ 5\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^3 - 3\left(\frac{t^3}{4} - 1\right) \right] \\
& + c_{04}\frac{3}{8} \left[ 35\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^4 - 30\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^2 + 3 \right] \\
& + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8} \left[ 63\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^5 - 70\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^3 + 15\left(\frac{t^3}{4} - 1\right) \right] \\
& + c_{06}\frac{\sqrt{13}}{16} \left[ 231\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^6 - 315\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^4 + 105\left(\frac{t^3}{4} - 1\right)^2 - 5 \right] \\
& \left. - \sin t + \sin^2 t - \sin\left(\frac{t^3}{8}\right) = 0 \right. \tag{4.4.69}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan  $c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}, c_{05}, c_{06}$  bilinmeyen katsayılarını bulmak için  $2^k(M+1) = 7$  adet denkleme ihtiyaç duyulur. İlk iki denklem, (4.4.64) denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 + c_{05}(-\sqrt{11}) + c_{06}(\sqrt{13}) \\
&= 0 \tag{4.4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(0) &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) + c_{03}12\sqrt{7} + c_{04}(-60) + c_{05}30\sqrt{11} \\
&= 1 \tag{4.4.71}
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Geriye kalan 5 denklemi elde etmek için (4.4.69) denkleminde  $t$  yerine  $P_7 - 7$ . derece ötelenmiş Legendre polinomunun ilk beş kökü olan  $t = 0.02545$ ,  $t = 0.12923$ ,  $t = 0.29708$ ,  $t = 0.5$ ,  $t = 0.70292$  değerleri yerine konulur. Böylece  $7 \times 7$  tipinde lineer olmayan denklem sistemi bulunmuş olur. Bu lineer olmayan denklem sistemi MATLAB programı yardımıyla çözüldüğünde  $c_{nm}$  bilinmeyen katsayıları elde edilmiş olur. Sonuç olarak bulunan bu değerler ile yaklaşık çözüm fonksiyonu bulunmuş olur.

Aşağıda ise  $M = 5$  ve  $M = 6$  değerleri için gerçek çözüm ile nümerik çözüm arasındaki farkı gösteren mutlak hata tablosu yer almaktadır. Tablodan da anlaşılacağı gibi  $t$  değeri sıfıra yaklaştıkça nümerik çözüm gerçek çözüme yaklaşmakta,  $t$  değeri bire yaklaştığında ise nümerik çözüm gerçek çözümden uzaklaşmaktadır.

**Tablo 4.4.6.**  $M = 5$  ve  $M = 6$  için mutlak hata tablosu

$t_i$	$E_5$	$E_6$
0.1	$8.963065387e-09$	$3.389353381e-10$
0.2	$2.720358344e-08$	$3.618011279e-09$
0.3	$2.394278514e-08$	$3.060617093e-09$
0.4	$6.937304025e-08$	$7.998320783e-09$
0.5	$1.053035117e-07$	$7.465058682e-09$
0.6	$1.310158346e-07$	$1.884611267e-08$
0.7	$4.027837364e-07$	$2.564863577e-08$
0.8	$9.757849775e-07$	$3.424606509e-08$
0.9	$8.700010081e-06$	$6.393175213e-07$
1	$3.267790566e-05$	$3.926144182e-06$

**Problem 7.**

$$y'''(t) + 1 - 2y^2\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.4.72)$$

üçüncü dereceden lineer olmayan orantılı gecikmeli diferansiyel denklemi

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \quad (4.4.73)$$

başlangıç şartları ile verilmiş olsun. Bu problemin gerçek çözümü  $y(t) = \sin t$  dir. Eğer burada  $k = 0$ ,  $M = 6$  alınırsa  $y(t)$  fonksiyonu

$$y(t) = C^T \psi(t) = [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \\ \psi_{03} \\ \psi_{04} \\ \psi_{05} \\ \psi_{06} \end{bmatrix}$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{13}}{16}[231(2t-1)^6-315(2t-1)^4+105(2t-1)^2-5] \end{bmatrix}$$

$$= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[2t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1]$$

$$+ c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)]$$

$$+ c_{04}\frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3]$$

$$+ c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)]$$

$$+ c_{06}\frac{\sqrt{13}}{16}[231(2t-1)^6-315(2t-1)^4+105(2t-1)^2-5]$$

(4.4.74)

biçiminde elde edilir. Diğer yandan başlangıç koşulundaki  $y'''(t)$  fonksiyonunu elde edebilmek için

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 840\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 840\sqrt{11} & 0 & 504\sqrt{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1512\sqrt{39} & 0 & 792\sqrt{91} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olan 7x7 tipindeki  $D^3$  matrisi kullanılarak

$$y'''(t) = C^T D^3 \psi(t)$$

$$= [c_{00} \ c_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{04} \ c_{05} \ c_{06}] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 840\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 840\sqrt{11} & 0 & 504\sqrt{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1512\sqrt{39} & 0 & 792\sqrt{91} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2t-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2}[3(2t-1)^2-1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2}[5(2t-1)^3-3(2t-1)] \\ \frac{3}{8}[35(2t-1)^4-30(2t-1)^2+3] \\ \frac{\sqrt{11}}{8}[63(2t-1)^5-70(2t-1)^3+15(2t-1)] \\ \frac{\sqrt{13}}{16}[231(2t-1)^6-315(2t-1)^4+105(2t-1)^2-5] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}2520(2t-1) + c_{05}(840\sqrt{11} + 1260\sqrt{11}[3(2t-1)^2-1]) \\ &\quad + c_{06}(4536\sqrt{13}(2t-1) \\ &\quad + 2772\sqrt{13}[5(2t-1)^3-3(2t-1)]) \end{aligned} \quad (4.4.75)$$

denklemini bulunur. Şimdi ise (4.4.74) denkleminde  $t$  yerine  $\frac{t}{2}$  yazılır ve elde edilen (4.4.75) denklemini ile beraber problemde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& (c_{03}120\sqrt{7} + c_{04}2520(2t - 1) + c_{05}(840\sqrt{11} + 1260\sqrt{11}[3(2t - 1)^2 - 1]) \\
& \quad + c_{06}(4536\sqrt{13}(2t - 1) + 2772\sqrt{13}[5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]) + 1 \\
& - 2 \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[t - 1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(t - 1)^2 - 1] + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(t - 1)^3 - 3(t - 1)] \right. \\
& + c_{04}\frac{3}{8}[35(t - 1)^4 - 30(t - 1)^2 + 3] \\
& + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8}[63(t - 1)^5 - 70(t - 1)^3 + 15(t - 1)] \\
& \left. + c_{06}\frac{\sqrt{13}}{16}[231(t - 1)^6 - 315(t - 1)^4 + 105(t - 1)^2 - 5] \right)^2 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.4.76}$$

denklemini elde edilir. Diğer yandan  $c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}, c_{05}, c_{06}$  bilinmeyen katsayılarını bulabilmek için  $2^k(M + 1) = 7$  adet denkleme ihtiyaç vardır. (4.4.74) denkleminde ve  $D$  matrisi kullanılarak yazılan başlangıç koşullarından yararlanılarak

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 + c_{05}(-\sqrt{11}) + c_{06}(\sqrt{13}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(0) &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) + c_{03}12\sqrt{7} + c_{04}(-60) + c_{05}30\sqrt{11} \\
& \quad + c_{06}(-42\sqrt{13}) = 1
\end{aligned} \tag{4.4.77}$$

$$\begin{aligned}
y''(0) &= c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}(-60\sqrt{7}) + c_{04}540 + c_{05}(-420\sqrt{11}) + c_{06}(840\sqrt{13}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.4.78}$$

denklemleri bulunur. Geriye kalan 4 denklemini elde edebilmek için 4.4.76 denkleminde  $t$  yerine  $P_7 - 7$ . derece ötelenmiş Legendre polinomunun ilk dört kökü olan  $t = 0.02545$ ,  $t = 0.12923$ ,  $t = 0.29708$ ,  $t = 0.5$  değerleri sırası ile yerine

yazılır. Böylece 7 adet lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Bu lineer olmayan denklem sistemi MATLAB programı yardımıyla çözüldüğünde  $c_{nm}$  katsayıları bulunmuş olur ve bu katsayılar da yerine konularak  $y(t)$  yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

Bu problemin  $M = 5$  ve  $M = 6$  değerleri ile hesaplanan yaklaşık çözümleri, 13. derecen polinom kullanılarak uygulanan ayrıştırma metodu [42] ile ve 9. derece polinom alınarak hesaplanan Adomian ayrıştırma metodu [39] ile kıyaslaması yapılmış ve mutlak hata tablosu ise aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Tablo 4.4.7.** Mutlak hata tablosu

$t_i$	Nümerik Metot, $E_5$	Nümerik Metot, $E_6$	Ayrıştırma Metodu, $E_{13}$ [42]	Adomian Ayrıştırma Metodu, $E_9$ [39]
0.1	$2.54e-09$	$5.37e-10$	0.0	$1.02e-15$
0.2	$3.24e-09$	$1.39e-09$	0.0	$5.28e-13$
0.3	$2.11e-08$	$1.59e-09$	0.0	$2.02e-11$
0.4	$1.44e-08$	$7.06e-09$	0.0	$2.69e-10$
0.5	$1.21e-07$	$3.52e-09$	$2.61e-09$	$2.00e-09$
0.6	$1.42e-07$	$3.27e-08$	$1.04e-08$	$1.03e-08$
0.7	$2.48e-06$	$6.05e-08$	$4.07e-08$	$4.12e-08$
0.8	$1.11e-05$	$1.05e-06$	$1.38e-07$	$1.36e-07$
0.9	$3.47e-05$	$5.08e-06$	$4.00e-07$	$3.92e-07$
1	$8.87e-05$	$1.67e-05$	$1.03e-06$	$1.00e-06$

Tablodan da anlaşılacağı gibi düşük  $M$  değerleri alınarak uygulanan bu metot ile aynı başlangıç değer probleminde yüksek polinomlar alınmak sureti ile uygulanan metodun hemen hemen aynı hata oranına sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu yüzden, Legendre polinomları kullanılarak uygulanan dalgacık metodu, kıyaslanan her iki metottan da etkili olduğu söylenebilir.

**Problem 8.**

$$y^6(t) - 1 + 2y^2\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.4.79)$$

altıncı dereceden lineer olmayan orantılı gecikmeli diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0, \\ y^{(4)}(0) = 1, \quad y^{(5)}(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.80)$$

başlangıç koşulları ile ele alınsın. Problemin gerçek çözümü  $y(t) = \cos t$  dir ve çözüm olarak  $k = 0$ ,  $M = 6$  olarak ele alınsın. Bu problem altıncı mertebeden bir denklem içerdiğinden dolayı  $7 \times 7$  boyutundaki  $D, D^2, D^3, D^4, D^5$  ve  $D^6$  matrislerinin oluşturulması gerekmektedir.  $7 \times 7$  boyutundaki  $D, D^2$  ve  $D^3$  matrisleri önceki problemlerde elde edilmiştir. Aynı boyuttaki  $D^4, D^5$  ve  $D^6$  matrisleri ise

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5040\sqrt{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20160\sqrt{13} & 0 & 11088\sqrt{65} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30240\sqrt{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 110880\sqrt{39} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 665280\sqrt{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu takdirde  $y(t)$  ve  $y^{(6)}(t)$  fonksiyonları için

$$\begin{aligned} y\left(\frac{t}{2}\right) &= C^T \psi\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[t-1] + c_{02}\frac{\sqrt{5}}{2}[3(t-1)^2 - 1] + c_{03}\frac{\sqrt{7}}{2}[5(t-1)^3 - 3(t-1)] \\ &\quad + c_{04}\frac{3}{8}[35(t-1)^4 - 30(t-1)^2 + 3] \\ &\quad + c_{05}\frac{\sqrt{11}}{8}[63(t-1)^5 - 70(t-1)^3 + 15(t-1)] \\ &\quad + c_{06}\frac{\sqrt{13}}{16}[231(t-1)^6 - 315(t-1)^4 + 105(t-1)^2 - 5] \end{aligned} \quad (4.4.81)$$

$$\begin{aligned} y^{(6)}(t) &= C^T D^6 \psi(t) \\ &= c_{06}665280\sqrt{13} \end{aligned} \quad (4.4.82)$$

denklemleri bulunur. 4.4.80 ile ifade edilen başlangıç koşulları kullanılarak ise

$$\begin{aligned} y(0) &= C^T \psi(0) \\ &= c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 + c_{05}(-\sqrt{11}) + c_{06}(\sqrt{13}) = 1 \end{aligned} \quad (4.4.83)$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= C^T D \psi(0) \\ &= c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) + c_{03}12\sqrt{7} + c_{04}(-60) + c_{05}30\sqrt{11} + c_{06}(-42\sqrt{13}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.84)$$



$$\begin{aligned}
y''(0) &= C^T D^2 \psi(0) \\
&= c_{02} 12\sqrt{5} + c_{03}(-60\sqrt{7}) + c_{04} 540 + c_{05}(-420\sqrt{11}) + c_{06}(840\sqrt{13}) = -1
\end{aligned} \tag{4.4.85}$$

$$\begin{aligned}
y'''(0) &= C^T D^3 \psi(0) \\
&= c_{03} 120\sqrt{7} + c_{04}(-2520) + c_{05} 3360\sqrt{11} + c_{06}(-10080\sqrt{13}) = 0
\end{aligned} \tag{4.4.86}$$

$$\begin{aligned}
y^{(4)}(0) &= C^T D^4 \psi(0) \\
&= c_{04} 5040 + c_{05}(-15120\sqrt{11}) + c_{06} 75600\sqrt{13} = 1
\end{aligned} \tag{4.4.87}$$

$$\begin{aligned}
y^{(5)}(0) &= C^T D^5 \psi(0) \\
&= c_{05} 30240\sqrt{11} + c_{06}(-332640\sqrt{13}) = 0
\end{aligned} \tag{4.4.88}$$

denklemleri elde edilir. (4.4.81) ve (4.4.82) denklemleri (4.4.79) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& c_{06} 665280\sqrt{13} - 1 \\
& + 2 \left( c_{00} + c_{01}\sqrt{3}[t-1] + c_{02} \frac{\sqrt{5}}{2} [3(t-1)^2 - 1] \right. \\
& + c_{03} \frac{\sqrt{7}}{2} [5(t-1)^3 - 3(t-1)] \\
& + c_{04} \frac{3}{8} [35(t-1)^4 - 30(t-1)^2 + 3] \\
& + c_{05} \frac{\sqrt{11}}{8} [63(t-1)^5 - 70(t-1)^3 + 15(t-1)] \\
& \left. + c_{06} \frac{\sqrt{13}}{16} [231(t-1)^6 - 315(t-1)^4 + 105(t-1)^2 - 5] \right)^2 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.4.89}$$

denklemini bulunur. Diğer yandan  $c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}, c_{05}, c_{06}$  bilinmeyen katsayılarını bulmak için  $2^k(M+1) = 7$  adet denkleme ihtiyaç duyulur. İlk altı denklem (4.4.83) – (4.4.88) denklemlerinden elde edilir. Geriye kalan bir adet denklem ise (4.4.89) denkleminde  $t$  yerine  $P_7 - 7$ . derece ötelenmiş Legendre

polinomunun ilk kökü olan  $t = 0.02545$  değeri yerine yazılarak elde edilir. Böylece yedi adet lineer olmayan denklem sistemi elde edilmiş olur. Elde edilen bu denklem sistemi MATLAB programı yardımıyla çözülür ise  $y(t)$  yaklaşık fonksiyonu için gerekli olan bilinmeyen  $c_{mn}$  katsayılarını bulunur.

Aşağıdaki tabloda problemin gerçek çözümü, nümerik çözümü ve her iki çözüm arasındaki mutlak hata değerleri yer almaktadır. Tablodan da anlaşılacağı gibi altıncı dereceden bir probleme altıncı dereceden bir polinomla yaklaşıldığında bile noktadan sonra en az beş basamağa kadar gerçek çözüm ile nümerik çözüm aynı değeri almaktadır. Bu ise uygulanan metodun yüksek mertebeden lineer olmayan denklemlerin çözümü için dahi çok daha iyi sonuç verdiğini göstermektedir.

**Tablo 4.4.8.** Gerçek çözüm ile nümerik çözümün karşılaştırılması

$t_i$	Gerçek Çözüm $M = 6$	Nümerik Çözüm $M = 6$	Mutlak Hata $M = 6$
0.1	0.995004165278026	0.995004165278227	$2.01616501271928e-13$
0.2	0.980066577841242	0.980066577806563	$3.46787043525865e-11$
0.3	0.955336489125606	0.955336487827882	$1.29772448342891e-09$
0.4	0.921060994002885	0.921060979620032	$1.43828530196899e-08$
0.5	0.877582561890373	0.877582472305420	$8.95849524562564e-08$
0.6	0.825335614909678	0.825335220984428	$3.93925250197213e-07$
0.7	0.764842187284489	0.764840818192666	$1.36909182280043e-06$
0.8	0.696706709347165	0.696702695682056	$4.01366510993650e-06$
0.9	0.621609968270664	0.621599626525754	$1.03417449105470e-05$
1	0.540302305868140	0.540278227546903	$2.40783212364093e-05$

#### 4.5. Yakınsaklık Analizi

$L^2(\mathbb{R})$ , Hilbert uzayını temsil etmek üzere  $u(t)$  ve  $v(t)$ ,  $[0,1]$  aralığında  $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt$  iç çarpımı ile tanımlanan bu uzaydaki herhangi iki fonksiyon olsun. (3.1.2.1) denkleminde de bilindiği üzere  $\psi_{nm}(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t - n)$  fonksiyonu  $L^2(\mathbb{R})$  üzerinde ortonormal dalgacık bazını ifade etmektedir [63]. Bu da  $[0,1]$  kapalı aralığında tanımlı herhangi bir  $y(t)$  fonksiyonunun (4.3.1.3) ve (4.3.2.3) denklemindeki gibi dalgacık bazlarının sonsuz seri açılımı ile

genişletilebileceğini göstermektedir. Diğer yandan  $c_{1i} = \langle y(t), \psi_{1i}(t) \rangle$ ,  $k = 1$  için i çarpımı temsil etmek üzere

$$y(t) = \sum_{i=1}^M c_{1i} \psi_{1i}(t)$$

ifadesinin (4.3.1.1) ve (4.3.2.1) ile ifade edilen denklemlerin bir zm olsun.  $T_n$ , kısmi toplamlar dizisi olmak üzere serinin  $y(t)$ 'ye yakınsadığını gösterebilmek için  $T_n$  dizisinin Hilbert uzayı üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek gerekmektedir. Bunu ispat etmek için

$\psi_{1i}(t) = \psi(t)$  ve  $\alpha_j = \langle y(t), \psi(t) \rangle$  olarak alalım. Bunun yanında  $n \geq m$  olmak üzere

$$T_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(t_j), \quad T_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j \psi(t_j) \quad (4.5.1)$$

biçiminde ifade edilen kısmi toplam dizileri olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \langle y(t), T_n \rangle &= \langle y(t), \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(t_j) \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \langle y(t), \psi(t_j) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \alpha_j = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. te yandan (4.5.1) denkleminde

$$T_n - T_m = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(t_j) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \psi(t_j) = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \psi(t_j)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının normu alınırsa

$$\begin{aligned}\|T_n - T_m\|^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \psi(t_j) \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \psi(t_i), \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \psi(t_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle \psi(t_i), \psi(t_j) \rangle = \sum_{j=m+1}^n |\alpha_j|^2\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bessel eşitsizliğini kullanarak,  $n \rightarrow \infty$  iken  $\sum_{j=m+1}^n |\alpha_j|^2$  dizisinin yakınsaması nedeni ile  $T_n$  dizisinin, Hilbert uzayında yakınsak bir dizi olduğu açıkça görülür ve bu dizi bir  $T$  toplamına yakınsar. Böylece

$$\begin{aligned}\langle T - y(t), \psi(t_i) \rangle &= \langle T, \psi(t_i) \rangle - \langle y(t), \psi(t_i) \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \psi(t_i) \rangle - \alpha_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \psi(t_i) \rangle - \alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(t_j), \psi(t_i) \right\rangle - \alpha_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \psi(t_j), \psi(t_i) \rangle - \alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_i - \alpha_i) = 0\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak  $\langle T - y(t), \psi(t_i) \rangle = 0$ 'dır ve buradan  $T = y(t)$  elde edilir. Diğer bir deyişle  $y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi(t_j)$  olarak yazılır [51,68].

#### 4.6. Hata Sınırı

**Lemma 4.6.1.**  $y(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlı  $m$  kez türevlenebilen bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $\sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \psi(t)$  yaklaşımı  $y(t)$  fonksiyonu ile birlikte göz önüne alındığında

$$\|y - C^T \psi(t)\| \leq \frac{1}{m! 2^{mk}} \sup_{t \in [0,1]} |y^{(m)}(t)| \quad (4.6.1)$$

biçiminde bir ortalama hata sınırına sahiptir [58].

**İspat 4.6.1.** [58]  $[0,1]$  kapalı aralığını  $\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]$  biçiminde çok küçük aralıklara bölelim. Burada  $y(t)$ , bu alt aralıklardaki minimum ortalama hataya sahip  $m$ .dereceden  $C^T \psi(t)$  polinomu vasıtası ile yaklaşık olarak hesaplanır. Bu taktirde

maksimum hata tahmini,  $y(t)$  fonksiyonunu interpolate eden bu polinom için kullanılır. Böylece

$$\begin{aligned}
\|y - C^T \psi(t)\|^2 &= \int_0^1 [y(t) - C^T \psi(t)]^2 dt = \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} [y(t) - C^T \psi(t)]^2 dt \\
&\leq \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} [y(t) - y^*(t)]^2 dt \leq \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} \left[ \frac{1}{m! 2^{mk}} \sup_{t \in [0,1]} |y^{(m)}(t)| \right]^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \left[ \frac{1}{m! 2^{mk}} \sup_{t \in [0,1]} |y^{(m)}(t)| \right]^2 dt = \left[ \frac{1}{m! 2^{mk}} \sup_{t \in [0,1]} |y^{(m)}(t)| \right]^2 \quad (4.6.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $y^*(t)$ ,  $y(t)$ 'nin m.dereceden bir interpolasyonudur. Sonuçta (4.6.2) denkleminin her iki tarafının karekökünü alınırsa (4.6.1) denklemini bulunmuş olur.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada Legendre metodu, lineer ve lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklem tiplerinin her ikisine de uygulanmıştır. Legendre dalgacık türevleme matrisi kullanılarak, ele alınan problemlerdeki diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları ile cebirsel denklem sistemi elde edilmiş ve bu denklem sistemi bilinmeyen  $c_{mn}$  katsayıları için çözülmüştür. Denklem sistemlerinin çözümünde MATLAB programından yararlanılmıştır. Elde edilen bu çözümler, önceden tanımlanan çözüm fonksiyonunda yerine konularak yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

İlk üç problemde orantılı gecikmeli nötr diferansiyel denklemler ele alınmıştır. Sonuçlar hem analitik çözümlerle hem de literatürdeki diğer nümerik çözümlerle kıyaslanmıştır. İlk iki problemde, uygulanan nümerik metodun, polinom formunda çözüme sahip problemler için analitik çözüme eğilim gösterdiği gözlemlenmiştir. Üçüncü problemde ise sadece dördüncü mertebeden polinom kullanılarak yüksek doğrulukta sonuçlar bulunmuştur.

Son beş problemde ise Legendre dalgacık metodu, yüksek mertebeden lineer olmayan orantılı ve değişken gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Metodun yeterliliğini gösterebilmek adına denklemler altıncı dereceye kadar incelenmiştir. Yüksek mertebeden denklemlerin nümerik çözümleri için oldukça küçük  $M$  değerleri kullanılarak düşük hata payına sahip nümerik sonuçlara ulaşılmıştır.

Dolayısı ile Legendre dalgacık metodu, ele alınan bu denklem türlerine kesin ve yaklaşık çözümler üretebilmek için oldukça etkili, pratik ve uygun bir yaklaşımdır. Literatürdeki diğer metotlarla kıyaslandığında ise ele alınan bu metodun daha verimli olduğu gözlemlenmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Hansen, W. H. Fourier Transforms: Principles and Applications. Wiley & Sons, Inc. New Jersey, USA, 2014, 776 s.
- [2] Polikar R. The Wavelet Tutorial. 1999, <http://engineering.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>
- [3] Abbak, R. A. Jeodezide Zaman Dizilerinin Dalgacık(Wavelet) Analizi. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Anabilim Dalı, Konya, 2007 (Doktora Semineri).
- [4] Polikar, R. The Story of Wavelets. 1999, IMACS/IEEE CSCC'99 Proceedings, 5481-5486.
- [5] Öner, İ. V., Yeşilyurt, M. K., Yılmaz, E. Ç. Wavelet analiz tekniği ve uygulama alanları. Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi. 2017, 7(1), 42-56.
- [6] Graps, A. An Introduction to wavelets. IEEE Computational Science and Engineering. 1995, 2(2), 50-61.
- [7] Liu, C.L. A Tutorial of the Wavelet Transform. Ed:National Taiwan University, Electrical Engineering, Taiwan, 2010.
- [8] Jawerth, B., Sweldens, W. An Overview of wavelet based multiresolution analyses. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1994, 36(3), 377-412.
- [9] Razzaghi, M., Yousefi, S. Legendre wavelets direct method for variational problems. Mathematics and Computers in Simulation. 2000, 53 (3), 185–192.
- [10] Zheng, X.Y., Yang, X.F., Wu, Y. Technique for solving differential equation by extended Legendre wavelets. Proceedings of the 2008 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition. 30-31 Ağustos, 2008, Hong Kong.
- [11] Aghazadeh, N., Atani, Y.G., Noras, P. The Legendre wavelet method for solving singular integro-differential equations. Computational Methods for Differential Equations. 2014, 2(2), 62-68.
- [12] Yousefi, S., Razzaghi, M. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations. Mathematics and Computers in Simulation. 2005, 70(1), 1-8.
- [13] Yousefi, S.A. Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane–Emden type. Applied Mathematics and Computation. 2006, 181(2) 1417–1422.
- [14] Mohammadi, F., Hosseini, M.M. A comparative study of numerical methods for solving quadratic Riccati differential equations. Journal of the Franklin Institute. 2011, 348 (2) 156–164.

- [15] Mohammadi, F., Hosseini, M.M. A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations. *Journal of the Franklin Institute*. 2011, 348 (8), 1787–1796.
- [16] Mohammadi, F., Hosseini, M.M., Mohyud-Din, S.T. A new operational matrix for Legendre wavelets and its applications for solving fractional order boundary values problems. *International Journal of the Physical Sciences*. 2011, 6(32), 7371 – 7378.
- [17] Yin, F.K., Han, W.y., Song, J.Q., Cao, X.Q. Legendre wavelets-Picard iteration method for solution of nonlinear initial value problems. *International Journal of Applied Physics and Mathematics*. 2013, 3(2), 127-131.
- [18] Dizicheh, A.K., Ismail, F., Kajani, M.T., Maleki, M. A Legendre wavelet spectral collocation method for solving oscillatory initial value problems. *Journal of Applied Mathematics*. 2013. DOI:10.1155/2013/591636.
- [19] Ahmad, F.B., Alomari, A.K., Bataineh, A.S., Sulaiman, J., Hashim, I. On the approximate solutions of systems of ODEs by Legendre operational matrix of differentiation. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016, 36, 483-494.
- [20] Kumar, D., Upadhyay, S., Singh, S., Rai, K.N. Legendre wavelet collocation solution for system of linear and nonlinear delay differential equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2017, 3, 295-310.
- [21] Secer, A., Altun, S. A New Operational Matrix of Fractional Derivatives to Solve Systems of Fractional Differential Equations via Legendre Wavelets. 2018, 6(11), 238.
- [22] Chen, X., Wang, L. The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers & Mathematics with Applications*. 2010, 59(8), 2696–2702.
- [23] Ghaneai, H., Hosseini, M.M., Mohyud-Din, S.T. Modified variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 2012, 22(8), 1086–1095.
- [24] Abolhasani, M., Ghaneai, H., Heydari, M. Modified homotopy perturbation method for solving delay differential equations. *Applied Science Reports*. 2010, 16(2), 89–92.
- [25] Sakar, M.G. Numerical solution of neutral functional-differential equations with proportional delays. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*. 2017, 7(2), 186–194.
- [26] Biazar, J., Ghanbari, B. The homotopy perturbation method for solving neutral functional-differential equations with proportional delays. *Journal of King Saud University - Science*. 2012, 24(1), 33–37.



- [27] Rebenda, J., Šmarda, Z., Khan, Y. A Taylor method approach for solving of nonlinear systems of functional differential equations with delay. 2015, arXiv:1506.0564v1 [math.CA].
- [28] Bhrawy, A.H., Assas, L.M., Tohidi, E., Alghamdi, M.A. A Legendre–Gauss collocation method for neutral functional-differential equations with proportional delays. *Advances in Difference Equations*. 2013, 63.
- [29] Ghomanjani, F., Farahi, M.H. The Bezier control points method for solving delay differential equation. *Intelligent Control and Automation*. 2012, 3(02), 188–196.
- [30] Lv, X., Gao, Y. The RKHSM for solving neutral functional-differential equations with proportional delays. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2013, 36(6), 642–649.
- [31] Ibis, B., Bayram, M. Numerical solution of the neutral functional-differential equations with proportional delays via collocation method based on Hermite polynomials. *Communication in Mathematical Modeling and Applications*. 2016, 1(3), 22–30.
- [32] Bellen, A., Zennaro, M. *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2003, 416 s.
- [33] Wang, W., Li, S. On the one-leg-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2007, 193(1), 285–301.
- [34] Yüzbaşı, S., Sezer, M. Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations. *Applied Mathematical Modelling*. 2015, 39(21), 6529–6542.
- [35] Sedaghat, S., Ordokhani, Y., Dehghan, M. Numerical solution of delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012, 17(12), 4815–4830.
- [36] Aygün, M. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Farklı Tipte Nümerik Çözümleri. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2012, 43 s. (Yüksek Lisans Tezi)
- [37] Aboodh, K.S., Farah, R.A., Almarady, I.A., Osman, A.K. Solving delay differential equations by Aboodh transformation method. *International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences*. 2018, 7(2), 55-64.
- [38] Blanco-Cocom, L., Estrella, A.G., Avila-Vales, E. Solving delay differential systems with history functions by the Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*. 2012, 218(10), 5994-6011.

- [39] Evans, D.J., Raslan, K.R. The Adomian decomposition method for solving delay differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 2005, 82(1), 49-54.
- [40] Ogunfiditimi, F.O. Numerical solution of delay differential equations using the Adomian decomposition method. *The International Journal Of Engineering and Science*. 2015, 4(5), 18-23.
- [41] Brahim, B., Vazquez-Leal, H., Hernandez-Martinez, L. Procedure for exact solutions of nonlinear Pantograph delay differential equations. *British Journal of Mathematics & Computer Science*. 2014, 4(19), 2738-2751.
- [42] Taiwo, O.A., Odetunde, O.S. On the numerical approximation of delay differential equations by a decomposition method. *Asian Journal of Mathematics & Statistics*. 2010, 3(4), 237-243.
- [43] Mirzaee, F., Latifi, L. Numerical solution of delay differential equations by differential transform method. *Journal of Sciences (Islamic Azad University)*. 2011, 20(78/2), 83-88.
- [44] Khader, M.M. Numerical and theoretical treatment for solving linear and nonlinear delay differential equations using variational iteration method. *Arab Journal of Mathematical Sciences*. 2013, 19(2), 243-256.
- [45] Ali, I., Brunner, H., Tang, T.A. Spectral method for Pantograoh-type delay differential equations and its convergence analysis. *Journal of Computational Mathematics*. 2009, 27(2-39), 254-265.
- [46] Ravi-Kanth, A.S.V., Murali-Mohan Kumar, P.A. numerical technique for solving nonlinear singularly perturbed delay differential equations. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2018, 23(1), 64-78.
- [47] Oberle, H.J., Pesch H.J. Numerical treatment of delay differential equations by hermite interpolation. *Numerische Mathematik*. 1981, 37, 235-255.
- [48] Shakeri, F., Dehghan, M. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Mathematical and Computer Modelling*. 2008, 48, 486-498.
- [49] Abdullah, Z.A. Solution of nonlinear ordinary delay differential equations using variational approach. *Journal of Al-Nahrain University*. 2012, 15(4), 183-187.
- [50] Yüzbaşı S., Shifted Legendre method with residual error estimation for delay linear Fredholm integro-differential equations. *Journal of Taibah University for Science*. 2017, 11(2), 344-352.
- [51] Venkatesh, S.G., Ayyaswamy, S.K., Balachandar, S.R. Convergence Analysis of Legendre Wavelets Method for Solving Fredholm Integral Equations. *Applied Mathematical Sciences*. 2012, 6(46), 2289 – 2296.

- [52] Davaeifar, S., Rashidinia, J. Solution of a system of delay differential equations of multipantograph type. *Journal of Taibah University for Science*. 2017, 11, 1141-1157.
- [53] Benhammouda, B, Vazquez-Leal, H. A new multi-step technique with differential transform method for analytical solution of some nonlinear variable delay differential equations. *SpringerPlus*. 2016, 5(1), 1723.
- [54] Wang, Z.Q., Wang, L.L. A Legendre-Gauss collocation method for nonlinear delay differential equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2010, 13(3), 685-708
- [55] Ismail, F., Al-Khasawneh, R.A., Lwin, A.S., Suleiman, M. Numerical treatment of delay differential equations by Runge-Kutta method using Hermite interpolation. *Matematika*. 2002, 18(2), 79-90.
- [56] Gümgüm, S., Baykuş-Savaşaneril, N., Kürkcü, O.K., Sezer, M. Lucas polynomial solution of nonlinear differential equations with variable delays. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*. 2019, DOI: 10.15672/hujms.460975.
- [57] Karimi-Vanani, S., Aminataei, A. On the numerical solution of nonlinear delay differential equations. *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*. 2010, 8(4), 568-576.
- [58] Yousefi, S.A. Legendre scaling function for solving generalized Emden-Fowler equations. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2007, 3(2), 243-250.
- [59] Hafshejani, M.S., Vanani, S.K., Hafshejani, J.S. Numerical solution of delay differential equations using Legendre wavelet method. *World Applied Sciences Journal*. 2011, 13(Special Issue of Applied Math), 27-33.
- [60] Çınardalı, T. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri için Legendre Sıralama Yöntemi. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı, Manisa, 2018, 35 s. (Yüksek Lisans Tezi)
- [61] Altuntaş, A. G. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler için Legendre Sıralama Yöntemi. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı, Manisa, 2014, 81 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [62] Bakır, Y. Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Chebyshev Dalgacık Sıralama Metodu. Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul, 2018, 129 s. (Doktora Tezi).
- [63] Chui, K. C. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, USA, 1992, 266 s.
- [64] Young, R.K. *Wavelet Theory and Its Applications*. Springer US, 1993, 223 s.

- [65] Kessler, B.M., Payne, G.L., Polyzou, W.N. Wavelet Notes. 2003, arXiv: nucl-th/0305025.
- [66] Wojtaszczyk, P. A Mathematical Introduction to Wavelets. Cambridge University Press, New York, USA, 1997, 261 s.
- [67] Khader, M.M., Mahdy A.M.S., Shehata, M.M. An Integral Collocation Approach Based on Legendre Polynomials for Solving Riccati, Logistic and Delay Differential Equations. Applied Mathematics. 2014, 5, 2360-2369.
- [68] Gümgüm, S., Özdek, D.E., Özaltun, G. Legendre wavelet solution of high order nonlinear ordinary delay differential equations. Turkish Journal of Mathematics. 2019, 43(3), 1339-1352.
- [69] Razzaghi, M., Yousefi, S. Legendre wavelets method for the solution of nonlinear problems in the calculus of variations. Mathematical and Computer Modelling. 2001, 34(1-2), 45-54.
- [70] Gümgüm, S., Özdek, D.E., Özaltun, G., Bildik, N. Legendre wavelet solution of neutral differential equations with proportional delays. Journal of Applied Mathematics and Computing. 2019, DOI: 10.1007/s12190-019-01256-z.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gökçe ÖZALTUN  
Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1993  
Medeni Hali : Bekâr  
Yabancı Dili : İngilizce  
E-posta : gokce.ozaltun@ieu.edu.tr

### Eğitim Durumu

Lise : Dokuz Eylül Anadolu Lisesi, 2011  
Lisans : İzmir Ekonomi Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016

### Mesleki Deneyim

İzmir Ekonomi Üniversitesi 2017-...(halen)

### Yayınları

Gümgüm, S., Özdek, D.E., Özaltun, G., Bildik, N. Legendre wavelet solution of neutral differential equations with proportional delays. Journal of Applied Mathematics and Computing. 2019, DOI: 10.1007/s12190-019-01256-z.

Gümgüm, S., Özdek, D.E., Özaltun, G. Legendre wavelet solution of high order nonlinear ordinary delay differential equations. Turkish Journal of Mathematics. 2019, 43(3), 1339-1352.