T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

GRAFLARDA ZAYIF VE GÜÇLÜ BASKINLIK SAYISI ÜZERİNE

Berna LÖKÇÜ KURT

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN

MANİSA–2019

Berna LÖKÇÜ KURT

GRAFLARDA ZAYIF VE GÜÇLÜ BASKINLIK SAYISI ÜZERİNE

2019

TEZ ONAYI

Berna LÖKÇÜ KURT tarafından hazırlanan **"Graflarda Zayıf ve Güçlü Baskınlık Sayısı Üzerine"** adlı tez çalışması 25/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Şahlar MEHERREM** Yaşar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Berna LÖKÇÜ KURT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif Tamsayılar kümesi
$V(\mathrm{G})$	G grafının tepeler kümesi
$E(\mathrm{G})$	G grafının ayrıtlar kümesi
P_n	n tepeli yol graf
C_n	n tepeli çevre graf
K_n	n tepeli tam graf
W_n	n tepeli tekerlek graf
$K_{1,n}$	$n+1$ tepeli yıldız graf
$K_{\mathrm{m},n}$	İki parçalı tam graf
T	Ağaç graf
$C(\mathrm{n},\mathrm{a})$	n tepeli kuyruklu yıldız (double comet) graf
$DC(\mathrm{n},\mathrm{a},\mathrm{b})$	n tepeli çift kuyruklu yıldız (double comet) graf
$S(\mathrm{n},\mathrm{a})$	n tepeli çift yıldız graf
$N_G(\mathrm{v}), N(\mathrm{v})$	v tepesinin açık komşuluğu
$\deg_G v, \deg(v)$	G grafında v tepesinin derecesi
$\delta(\mathrm{G})$	G grafının minimum tepe derecesi
$\Delta(\mathrm{G})$	G grafının maksimum tepe derecesi
$d_G(\mathrm{u},\mathrm{v}), \mathrm{d}(\mathrm{u},\mathrm{v})$	u ve v tepeleri arasındaki uzaklık
$diam(\mathrm{G})$	G grafının çapı
K_n^{*}	K_n Diken (thorn) grafı
CL_n	Dairesel Merdiven (Circular Ladder) graf
$\theta(\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2,...,\mathrm{S}_n)$	Genelleştirilmiş theta graf
$P_{p,t}$	Dikenli Yol (Thorn rod) graf
P_n^{+}	$P_n \Theta K_1$ Tarak (Comb) graf
G^k	G grafının k. kuvveti
$S_{\mathrm{k},t}$	Dikenli Yıldız (Thorn Star) graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
G^{*}	G Diken (thorn) graf
$G+u$	G grafına u tepesinin eklenmesi
$G \square H$	G ile H graflarının kartezyen çarpım grafı
$\alpha(\mathrm{G})$	G grafının bağımsızlık sayısı
$\beta(G)$	G grafının örtü sayısı
$\gamma(\mathrm{G})$	Baskınlık sayısı

$\lvert S \rvert$	S Kümesinin eleman sayısı
$\lceil\ \rceil$	Üst tam değer fonksiyonu
$\lfloor\ \rfloor$	Alt tam değer fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, görüş ve önerileriyle önemli katkılar sağlayan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN' a, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli eşim Hayrettin Ufuk KURT' a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen babam Metin LÖKÇÜ, annem Şükran LÖKÇÜ' ye, hep yanımda olan değerli kardeşim Gökhan LÖKÇÜ' ye ve sevgili dostlarıma yürekten teşekkür ederim.

Berna LÖKÇÜ KURT

Manisa, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Graflarda Zayıf ve Güçlü Baskınlık Sayısı

Berna LÖKÇÜ KURT

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN

Bir iletişim ağında, iletişimin güvenilir, hızlı ve kesintisiz olması istenir.İletişim ağları graflarla modellenebilirler. Zedelenebilirlik bir iletişim ağında oluşabilecek hasarlara karşı iletişim ağının gösterdiği dayanma gücüdür. İletişim ağının kesintiye uğramaması önemlidir. Bu nedenle graf teoride zedelenebilirlik üzerine birçok çalışma yapılmış ve farklı ölçümler tanımlanmıştır.

Bu tezde, Graf Teori' de önemli bir yer tutan baskınlık sayısının türlerinden olan güçlü ve zayıf baskınlık üzerine çalışılmıştır. Bazı graf sınıfları için güçlü ve zayıf baskınlık sayıları hesaplanmış ve hesaplamalardan elde edilen sonuçlar genellenmiş ve genel sonuçlar ispatları ile birlikte verilmiştir. Çalışmanın tamamında, bağlantılı, yönsüz, basit graflar ele alınmıştır.

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Graf Teorinin ortaya çıkışı, çeşitli uygulama alanları ile Graf Teoride kullanılan zedelenebilirlik ölçümlerinden bazıları açıklanmıştır. Bu ölçümlerden birisi olan baskınlık sayısı ile güçlü ve zayıf baskınlık sayılarından bahsedilmiştir. Bu bölümde baskınlık sayısının çıkışı kabul edilen santranç problemi ile ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde graf teorinin temel tanım ve teoremleri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Üçüncü bölümde, materyal ve yöntemler ile graflarda baskınlık, güçlü ve zayıf baskınlık kavramları açıklanmış ve bir örnek verilmiştir. Dördüncü bölümde, yol graf, çevre graf, tam graf, iki parçalı tam graf, çevre grafın kuvveti, yol grafın kuvveti, kuyruklu yıldız graf, çift kuyruklu yıldız graf, çift yıldız graf, tarak graf, dairesel merdiven graf, rüzgar gülü grafı, dikenli yol graf, dikenli yıldız graf, diken graf, theta graf, tam ikilli ağaç graf ve tam k-lı ağaç graflarda güçlü ve zayıf baskınlık sayısı ile ilgili elde edilen sonuçlar, teoremler ve ispatları olarak verilmiştir. Beşinci ve son bölümde çalışmanın sonuçları ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf, baskınlık, zayıf baskınlık, güçlü baskınlık, zedelenebilirlik

2019, 78 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Weak and Strong Domination in Graphs

Berna LÖKÇÜ KURT

Manisa Celal Bayar University

Faculty of Arts and Science

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Derya DURGUN

In a communication network, communication is needs to be reliable, fast and uninterrupted. Communication networks can be modeled with graphs. Vulnerability is the durability of the communication network against damage that may occur in a communication network. It is important that the communication network is not interrupted. For this reason, many studies on vulnerability have been made in graph theory and different measurements have been defined.

In this thesis, the strong and weak dominations are studied which are important types of domination in graph theory. For some graph classes, the strong and weak domination numbers are calculated and the overall results obtained from the calculations are given with proofs. Throughout study, connected, undirected, simple graphs are studied.

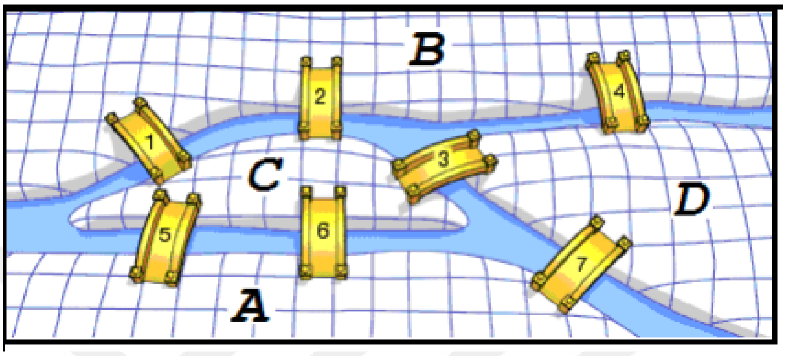
This thesis consists of five chapters. In the first chapter history of Graph Theory and its applications, some of vulnerability parameters which can be used in Graph Theory are explained. One of these parameters is domination, we mention about strong and weak domination numbers. We have also mention about the chess gave which is accepted as the beginning of domination concept in Graph Theory. In the second chapter, the basic definitions and theorems of graph theory are given in detail. In the third chapter, the concepts of domination, strong and weak domination are explained and an example is given with the materials and methods. In the fourth chapter, the results, theorems and proofs about the strong and weak domination number in path, cycles, complete, complete bipartite, power of cycle, power of path, comet, double comet, double star, comb, circular ladder, windmill, thorn rod, thorn star, thorn, theta, complete binary tree and complete k-ary tree graphs are given. In the fifth and the last chapter the results and recommendations of the study are given.

Keywords: Graph, domination, weak domination, strong domination, vulnerability.

2019, 78 pages

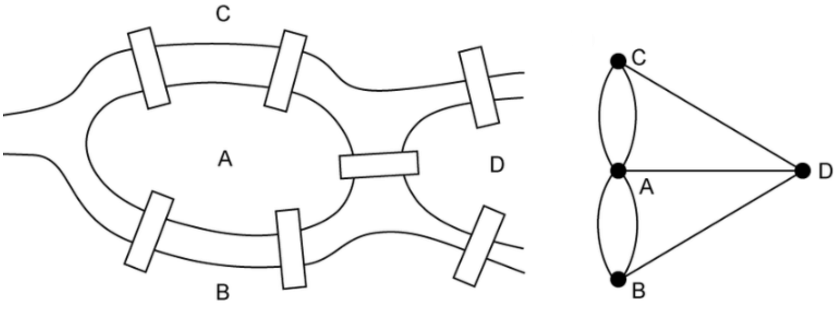
1. GİRİŞ

Matematiğin diğer alanlarından farklı olarak Graf Teorisi' nin başlangıcı 18. yüzyıla uzanır. 18. yüzyılda Prusya' daki Königsberg kasabası Pregel Nehri ile iki bölgeye ayrılmaktadır ve nehrin içinde iki adacık bulunmaktadır. Bu nehirdeki adaları kasabaya bağlayan yedi köprüye dair o bölgenin insanları arasında yayılan bir söylenti dolaşmaktadır. Bu söylentiye göre:



Şekil 1.1. Königsberg köprüleri

"Kasabanın bir yakasından gezinti yapmak için çıkan biri tüm köprüleri bir kez geçerek başladığı noktaya dönebilir". Bu söylentinin bir yalandan ibaret olduğu Leonhard Euler (1707-1783) tarafından gösterilmiştir. Leonhard Euler bu problemin çözümü için uğraşırken Graf Teori' nin ilk adımlarını ve temellerini atmıştır. Buradan şekil 1.1 deki gibi adalar arasındaki köprüler ele alınıp, adalar bir nokta ile temsil edilerek, eğer iki ada arasında bir köprü var ise bu iki adayı temsil eden noktalar bir çizgi ile birleştirilerek problem graf ile modellenmiştir. Örneğin A, B, C ve D adaları için A ile B, A ile D, C ile D, A ile C ve B ile D arasında bir köprü olsun. Bu köprüler şekil 1.2 deki gibi gösterilebilir. Bu şekilde bir grafın sonsuz farklı şekli çizilebilir.



Şekil 1.2. Köprülerin graf ile modellenmesi

Grafların uygulama alanları oldukça geniş olduğu için 18. yüzyıldan günümüze kadar graflar üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Graflar elektrik mühendisliği, kimya ve ekonomi gibi birbirinden bağımsız alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bugün ise graf teorisi, modern cebirin önemli kollarından biri olmuştur. Graf Teoride, bir iletişim ağı modeli olarak ele alınan grafın iletişimini kuvvetlendirmek amacıyla çeşitli ölçümlerinden yararlanılmaktadır. Bunlarda bazıları bağlantılılık (connectivity), sağlamlık (toughness), bütünlük (integrity), kararlılık (tenacity), bağımsızlık sayısı (independence number), örtü sayısı (vertex covering number), baskınlıktır (domination). Baskınlığın birçok türü vardır. Bunlardan ikisi güçlü baskınlık (strong domination) ve zayıf baskınlıktır (weak domination). Sözü edilen bu ölçümler grafın tüm tepeler ya da ayrıtlar kümesi üzerinden tanımlanırlar [2].

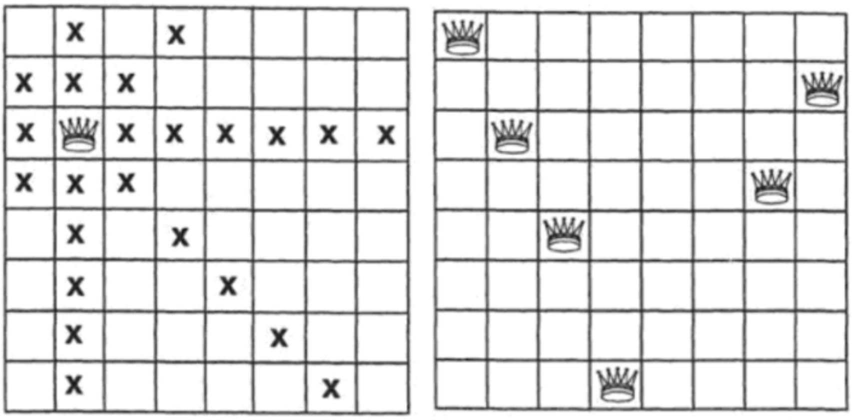
Bağlantılı bir G grafını, bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın bağlantılılığı (connectivity) denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir [9].

$D \subseteq V(G)$, bir G grafının tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. D kümesindeki tepeler ikişerli alındığında bu tepeler, G grafında bir ayrıta sahip değil ise D kümesine bağımsız küme denir. Bir G grafı birden fazla bağımsız kümeye sahip olabilir. Bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının bağımsızlık sayısı (independence number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir [10].

$D \subseteq V(G)$, bir G grafının tepeler kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G grafındaki her bir ayrıtın en az bir uç noktası D kümesinde ise bu kümeye örtü kümesi denir. Bir G grafı birden çok örtü kümesine sahip olabilir, bu kümeler içinde minimal olan kümenin eleman sayısına G grafının örtü sayısı (covering number) denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir [10].

Grafta en çok kullanılan ölçümlerden olan baskınlık kavramı ilk kez Reese T. Prosser (1959) tarafından yayınlanan bir makalede ele alındı [27]. Bu kavram zaman içinde büyük oranda önemli hale geldi ve geliştirildi. $G=(V,E)$ bir graf ve $u,v \in V$ olsun. G grafının herbir tepesi veya en az bir komşusu bir D kümesinde olacak şekildeki D tepeler kümesine bir baskın küme denir. Böyle kümelerden en az eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısı G grafının baskınlık sayısını verir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir [23]. Berge (1962) yaptığı yayında baskınlık sayısı için en genel alt sınır [3], Walikar ve arkadaşları (1979) yaptıkları yayında ise en genel üst sınır ifadesini verdiler [32]. Haynes, T.W. , Hedetniemi S.T. , Slater P.J. (1998) baskınlık kavramını genel anlamda incelediler [23].

Baskınlık, graf teoride geniş bir araştırma aktivitesine sahip bir alandır. Baskınlığın tarihi kökeninin satranç problemi olduğu söylenmektedir. Şekil 1.3 te gösterilen bir standart 8x8 satranç tahtası üzerine bir vezir yerleştirilir. Satranç kuralına göre bir vezir birçok kez karelerden yatay, dikey ve çapraz ilerleyerek hareket edebilir. Böylece şekil 1.3 deki vezir, karelerin tamamını bir X ile işaretleyerek hamle yapabilir ya da baskın olacak şekilde hareket edebilir. 1850 yılında Avrupa satranç meraklıları bütün kareler bir vezir ile hamle yapsın ya da bir vezir ile ele geçirilsin diye satranç tahtasına yerleştirilen minimum sayıda vezirleri belirleme problemini düşündüler. Şekil 1.3 tahta üzerinde her karede hamle ve baskın olan 6 vezir grubunu gösterir. 5 vezirinin bütün karelerde baskın olduğu görülür [23].



Şekil 1.3. Vezirler

$G=(V,E)$ bir graf ve $u,v \in V$ olsun. Eğer $i) uv \in E$ ve $ii) \deg u \geq \deg v$ ise u tepesi v tepesini güçlü bastırır, v tepesi u tepesini zayıf bastırır denir. Bir $D \subset V$ kümesi, $V-D$ kümesindeki her tepe D kümesinde en az bir tepe tarafından güçlü (zayıf) bastırılıyorsa G grafının bir güçlü baskın kümesi, kısaca sd-set (zayıf baskın kümesi, kısaca wd-set) denir. G grafının güçlü (zayıf) baskınlık sayısı $\gamma_s(\gamma_w)$, en az elemana sahip olan sd-set (wd-set) in eleman sayısıdır [23]. Sampathkumar ve Pushpa

Latha 1996 yılında yayınladıgı "Strong Weak Domination and Domination Balance in a Graph" adlı makalede güçlü ve zayıf baskınlık sayısını tanımlamışlardır [30]. Bir G grafının mertebesi n olmak üzere $\gamma \leq \gamma_s \leq n-\Delta$ ve $\gamma \leq \gamma_w \leq n-\delta$ olduğu Sampathkumar ve Pushpa Latha (1996) tarafından verilmiştir [30]. 2001 yılında Rautenback ve Zverovich tarafından perfect graflarda güçlü baskınlık üzerine çalışmıştır [29]. Herhangi bir düzenli (reguler) G grafı için $\gamma_s(G)=\gamma_w(G)=\gamma(G)$ ve düzenli olmayan (non reguler) graflar için belirli koşullar altında $\gamma_s(G)+\Delta(G)=n$ ve $\gamma_w(G)+\delta(G)=n$ olduğu 2003 yılında Swaminathan ve Thangaraju tarafından gösterilmiştir [30]. 2007 yılında Nagoor Gani ve Basheer Ahamed tarafından [25], 2010 yılında Natarajan ve Ayyaswamy tarafından fuzzy graflarda güçlü ve zayıf baskınlık sayıları üzerine çalışılmıştır [26].

Bu çalışmanın tamamında bağlantılı, basit ve yönsüz graflar ele alınmış ve çeşitli graf sınıfları üzerinde güçlü ve zayıf baskınlık sayıları için genel sonuçlar elde edilerek, ispatları verilmiştir. Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin graflar ile çözüme kavuşturulması klasik yöntemlere göre avantaj sağlamaktadır ve oldukça pratiktir. Bu durumlarda çözüm için kullanılacak ölçümler farklılık göstermek ile birlikte baskınlık, güçlü ve zayıf baskınlık kavramları kullanılabilecek ölçümler arasındadır [21, 23].

2. GENEL BİLGİLER

Çalışmanın bu bölümünde, graf teoride kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu çalışmada, G grafı basit, bağlantılı ve yönlendirilmemiş bir grafı göstermektedir.

Tanım 2.1: Bir G grafı, boştan farklı $V(\mathrm{G})$ tepeler kümesi, $E(G)$ ayrıtlar kümesi olmak üzere $G=(V(G),E(G))$ sıralı ikilisi ile gösterilir [6].

Tanım 2.2: Katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara basit (simple) graflar denir [10].

Tanım 2.3: Bir G grafının her tepe ikilisi arasında bir yol var ise bu grafa bağlantılı (connected) graf aksi halde bağlantısız graf denir [33].

Tanım 2.4: G grafının herhangi iki $u,v\in V(G)$ tepeleri G grafının bir $e=uv\in E(G)$ (ya da $e=vu$) ayrıtının uç tepeleri ise bu iki tepeye komşu tepeler denir [33].

Tanım 2.5: G grafının herhangi bir v tepesinin komşularının oluşturduğu kümeye v tepesinin açık komşuluğu denir ve $N_G(v)$ ya da $N(v)$ ile gösterilir. Bir tepenin komşularının sayısına o tepenin tepe derecesi denir ve $deg_G v$ ya da $deg(v)$ ile gösterilir. Yani, $deg(v)=|N(v)|$ [10].

Tanım 2.6: G grafının tepeleri arasında en büyük tepe derecesine sahip tepenin derecesine maksimum tepe derecesi, en küçük tepe derecesine sahip tepenin derecesine minimum tepe derecesi denir ve sırasıyla $\Delta(\mathrm{G})$ ve $\delta(\mathrm{G})$ ile gösterilir. Eğer $\Delta(\mathrm{G})=\delta(\mathrm{G})$ ise G grafına düzenli (regüler) graf denir. Grafın tüm tepelerinin derecesi r ise grafa $r-$düzenli graf denir [33].

Tanım 2.7: G grafının bir tepeler kümesindeki iki tepe birbirine komşu değil ise bu kümeye bağımsız küme denir. G grafında var olan bağımsız kümeler arasından maksimum eleman sayısına sahip kümenin eleman sayısına G grafının tepe bağımsızlık sayısı ya da kısaca bağımsızlık sayısı (independence number) denir ve $\alpha(\mathrm{G})$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.8: Bağlantılı bir G grafında herhangi iki u ve v tepeleri arasındaki yollardan minimum uzunluklu olanın uzunluğuna u ve v tepeleri arasındaki uzaklık denir ve $d_G(u,v)$ ya da kısaca $d(u, v)$ ile gösterilir [33].

Tanım 2.9: Bir G grafındaki herhangi iki tepe arasındaki uzaklığın en büyüğüne grafın çapı denir ve diam(G) ile gösterilir [33].

Tanım 2.10: : Bir G grafının u ve v tepelerini birleştiren yol uç tepeleri dışında ortak bir tepeye sahip değilse bu yola içten ayrık yol (internally disjoint path) denir [9].

Tanım 2.11: u ve v tepeleri G grafının (farklı olması gerekmeyen) iki tepesi olsun. Bir $u-v$ yürüyüşü (walk) G ' nin $W: u = u_0e_1u_1e_2u_2e_3...u_{k-1}e_ku_k = v$ başlangıç tepesi u bitiş tepesi v olan $e_i : u_{i-1}u_i$, $i = 1,2,3,...,k$ olacak şekildeki tepe ve ayrıtlar dizisidir [10].

Tanım 2.12: Tüm ayrıtları birbirinden farklı olan bir yürüyüşe zincir (trail), tüm tepeleri birbirinden farklı olan zincire yol (path) denir [9].

Tanım 2.13: $n \geq 1$ olmak üzere tepeleri $v_1, v_2, ..., v_n$ ve $i \in \{1,2,3,...,n-1\}$ olmak v_iv_{i+1} ile etiketlenen n tane tepe ve $n-1$ tane ayrıta sahip olan grafa yol (path) graf denir ve P_n ile gösterilir [10].

Tanım 2.14: r pozitif bir tamsayı olmak üzere bir G grafındaki tüm tepelerin dereceleri eşit ise yani $\forall v \in V(G)$ için $\deg(v) = r$ ise G grafına $r-$ düzenli ($r-$ regular) graf denir [33].

Tanım 2.15: $n \geq 3$ olmak üzere tepeleri $v_1, v_2, ..., v_n$ ve $i \in \{1,2,3,...,\mathrm{n}-1\}$ üzere ayrıtları v_1v_n ve v_iv_{i+1} ile etiketlenen n tane tepe ve n tane ayrıta sahip olan grafa çevre (cycle) graf denir ve C_n ile gösterilir [10].

Tanım 2.16: Bir C_{n-1} çevre grafına yeni bir tepe eklenmesiyle yani C_{n-1} grafındaki her tepenin bu yeni tepe ile birleştirilmesiyle oluşan yeni grafa n tepeli tekerlek (wheel) graf denir ve W_n ile gösterilir [6].

Tanım 2.17: Birbirinden farklı her tepesi komşu olan grafa tam (complete) graf denir ve K_n ile gösterilir [10].

Tanım 2.18: $n+1$ tepeli $K_{1,n}$ yıldız grafı, bir tepesi diğer tüm tepelerine komşu olan ağaç graftır. Derecesi maksimum olan tepeye merkez tepe, bir dereceli tepelere ise yaprak denir [33].

Tanım 2.19: Eğer G grafının $V(G)$ tepeler kümesi, $E(\mathrm{G})$ ayrıtlar kümesi olmak üzere $G=(V(\mathrm{G}),\mathrm{E(G)})$ grafının tepeler kümesi $V(G)=V_1(G)\cup V_2(G)$, $V_1(G)\cap V_2(G)=\varnothing$ ve $E(\mathrm{G})$ ayrıtlar kümesinin her bir uv ayrıtı $u\in V_1(\mathrm{G})$ ve $v\in V_2(\mathrm{G})$ den oluşuyorsa ve G grafı bağlantılı ise bu G grafına iki parçalı (bipartite) graf denir [33].

Tanım 2.20: İki parçalı bir grafta $V_1(G)$ kümesinin her bir tepesi $V_2(G)$ kümesinin her bir tepesi ile bitişik ise bu grafa iki parçalı tam (complete bipartite) graf denir ve $K_{m,n}$ ile gösterilir. $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafının ayrıt sayısı mn dir [33].

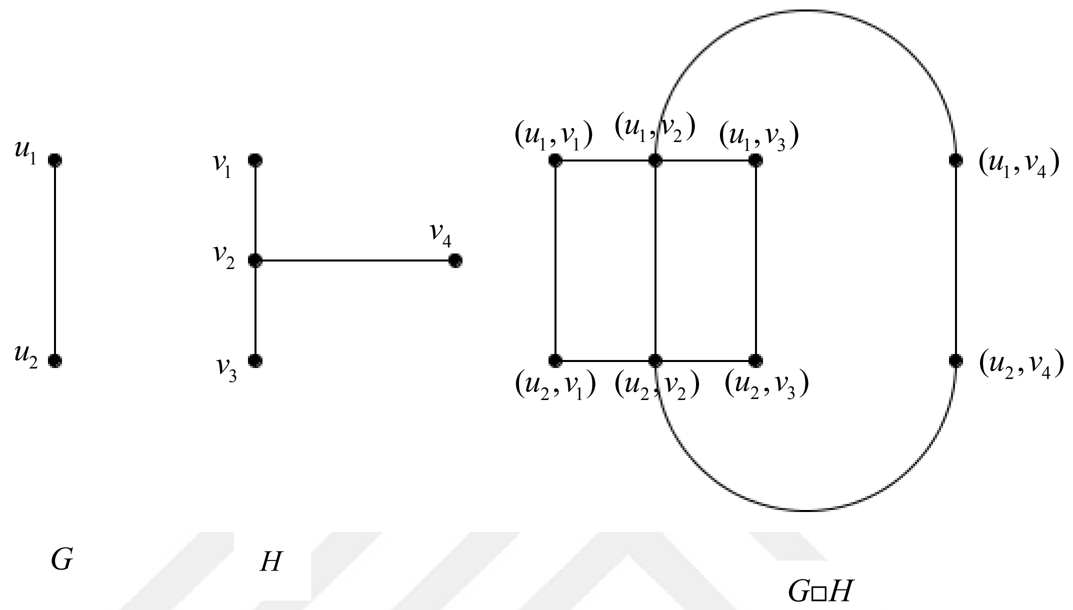
Tanım 2.21: k > 1 olmak üzere $V(\mathrm{G})$ tepeler kümesi, parçalanış kümeleri olarak isimlendirilen k tane $V_1,V_2,...,V_k$ alt kümeye parçalanan ve $E(\mathrm{G})$ ayrıtlar kümesindeki her ayrıt birbirinden farklı iki parçalanış kümesinden alınan tepelerin birleştirilmesiyle oluşan G grafına $k-$ parçalı graf denir [10].

Tanım 2.22: Bir $k-$ parçalı graftaki her bir tepe farklı parçalanış kümesindeki her tepeye komşu ise bu grafa $k-$ parçalı tam graf denir. $V_1,V_2,...,V_k$ parçalanış kümeleri ve $1\le i\le k$ için $|V_i|=n_i$ olmak üzere $k-$ parçalı tam graf $K_{n_1,n_2,...,n_k}$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.23: Çevre içermeyen bağlantılı grafa ağaç graf denir [33].

Tanım 2.24: G grafının tepe kümesi $V(\mathrm{G})$, H grafının tepe kümesi $V(\mathrm{H})$ olmak üzere $V(G)\times V(H)$ kartezyen kümesinden $x=(u_1,v_1)$ ile $y=(u_2,v_2)$ elemanlarını alalım. Eğer

i) $u_1 = u_2$ ve $v_1v_2 \in E(H)$ veya **ii)** $v_1 = v_2$ ve $u_1u_2 \in E(\mathrm{G})$ durumlarından biri sağlanıyorsa $x = (u_1, v_1)$ ile $y = (u_2, v_2)$ tepeleri komşudur. Bu şekilde oluşan grafa G ile H grafının kartezyen çarpımı denir ve $G \square H$ ile gösterilir [10]. Şekil 2.1 de G ve H graflarının kartezyen çarpımı gösterilmiştir.

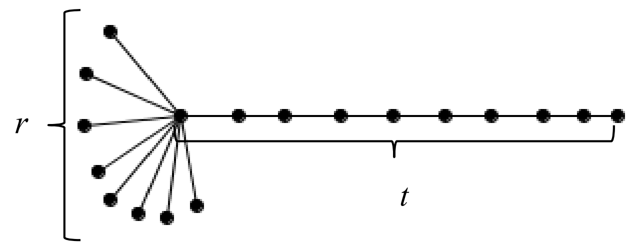


Şekil 2.1. G ve H Graflarının Kartezyen Çarpımı

Tanım 2.25: Bir G grafına, grafta yer almayan bir u tepesinin eklenmesi yani tepe ekleme (addition of the vertex) işlemi, eklenen u tepesi ile G grafının her bir tepesini bir ayrıtla birleştirme olup, $G + u$ biçiminde gösterilir [9].

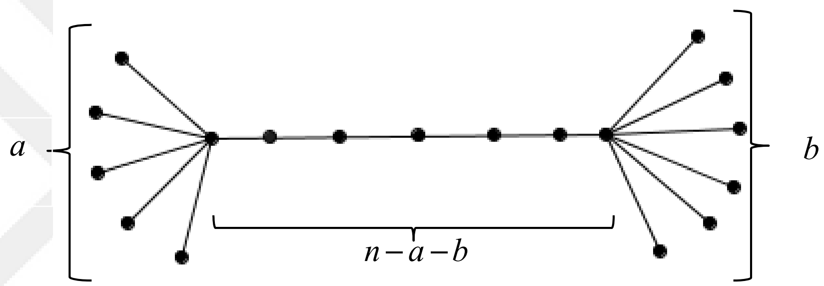
Tanım 2.26: Bir ayrıt bitiş tepesi ile ilişkili ise o ayrıta sarkık ayrıt (pendant edge) denir [10].

Tanım 2.27: $t \geq 2$ ve $r \geq 1$ olmak üzere $t + r$ tepeli $C_{t,r}$ kuyruklu yıldız (comet) grafı P_t yol grafının bir dereceli herhangi bir tepesinin $K_{1,r}$ yıldız grafın merkezini oluşturacak şekilde r tane tepe ile birleştirilmesiyle elde edilen bir ağaç graftır [1]. Şekil 2.2 de $C_{10,8}$ kuyruklu yıldız grafı gösterilmiştir.



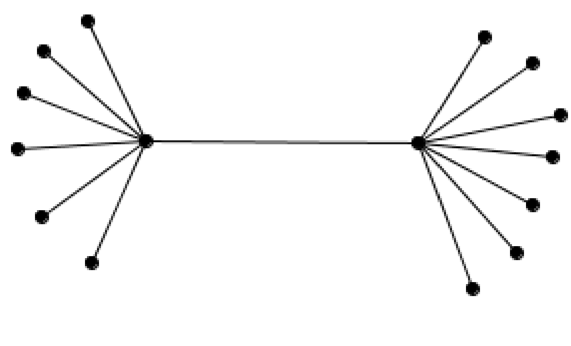
Şekil 2.2. $t = 10, r = 8$ olmak üzere $C_{10,8}$ kuyruklu yıldız (comet) grafı

Tanım 2.28: $a, b \geq 1$ ve $n \geq a + b + 2$ olmak üzere $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız (double comet) grafı $n - a - b$ tepeli bir yol grafın bir dereceli tepelerinden birinin a tane tepe ile diğer tepenin ise b tane tepe ile birleştirilmesiyle elde edilen bir ağaç graftır [13]. Şekil 2.3 de $DC(18,5,6)$ çift kuyruklu yıldız grafı gösterilmiştir.



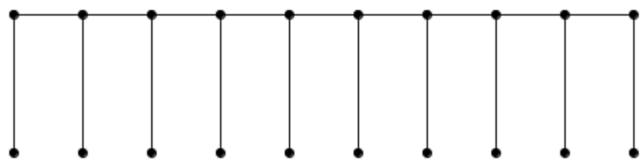
Şekil 2.3. $n = 18, a = 5, b = 6$ olmak üzere $DC(18,5,6)$ çift kuyruklu yıldız (double comet) grafı

Tanım 2.29: $a, b \geq 0$ olmak üzere $S(a, b)$ çift yıldız (double star) grafı iki tane $K_{1,a}$ ve $K_{1,\mathrm{b}}$ yıldız grafın merkez tepelerinin bir ayrıt ile birleştirilmesiyle elde edilen bir ağaç graftır [20]. Şekil 2. 4 te $\mathrm{S}(6,7)$ çift yıldız grafı gösterilmiştir.



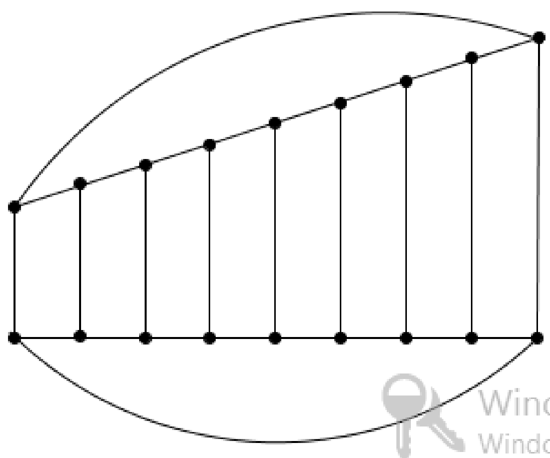
Şekil 2. 4. $a = 6, b = 7$ olmak üzere $\mathrm{S}(6,7)$ çift yıldız grafı

Tanım 2.30: $P_n \Theta K_1$ tarak (comb) grafı P_n yol grafının her bir tepesine bir sarkık ayrıt (pendent edge) eklenmesi ile elde edilen bir graftır ve P_n^+ ile gösterilir [19]. Şekil 2.5 te P_{10}^+ tarak grafı gösterilmiştir.



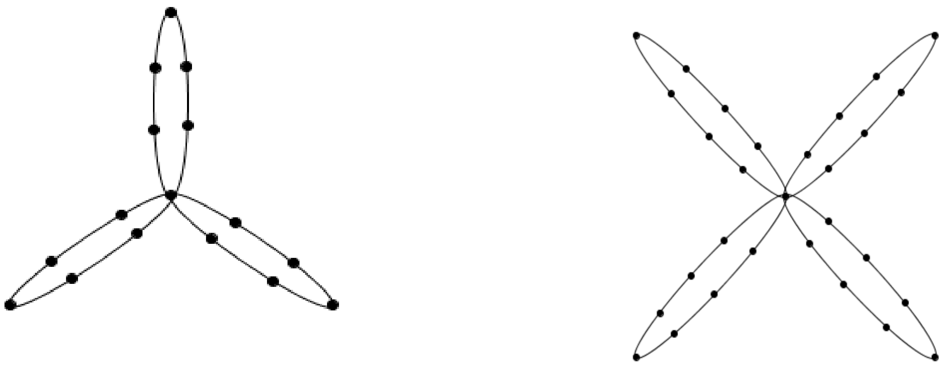
Şekil 2. 5. P_{10}^+ Tarak (Comb) Graf

Tanım 2.31: C_n , n tepeli bir çevre grafı ile K_2, 2 tepeli bir tam grafın $C_n \square K_2$ kartezyen çarpımı ile CL_n dairesel merdiven (circular ladder) grafı elde edilir. CL_n dairesel merdiven (circular ladder) grafı biri altta, diğeri üstte olmak üzere iki çevre içerir [11]. Şekil 2. 6 da CL_9 grafı gösterilmiştir.



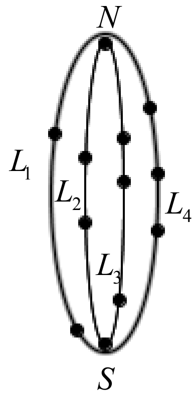
Şekil 2. 6. CL_9 Dairesel Merdiven (Circular Ladder) Graf

Tanım 2.32: C_n^m Rüzgar gülü (windmill) grafı bir ortak tepe ile C_n grafının m tane kopyasından oluşan bir graf ailesidir [19]. Şekil 2. 7 de C_6^3 ve C_8^4 grafları gösterilmiştir.



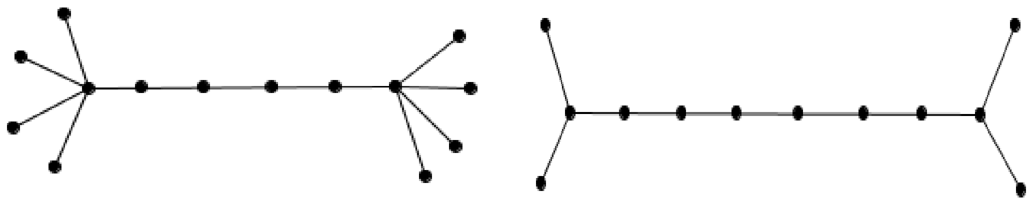
Şekil 2. 7. C_6^3 ve C_8^4 Rüzgar Gülü (Windmill) Grafı

Tanım 2.33: Genelleştirilmiş $\theta(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)$ theta grafı $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ karşılık gelen yollardaki iç tepe sayısını belirtmek üzere yollardaki iç tepe sayısını belirtmek üzere uzunlukları 1'den büyük olan n tane içten ayrık yolun bir çift uç tepe ile birleştirilmesiyle elde edilen bir graftır. Uç tepeler Kuzey Kutbu (N) ve Güney Kutbu (S) olarak adlandırılır. Kuzey Kutbu ve Güney Kutbu arasındaki bir yol boylam olarak adlandırılır ve L ile gösterilir. $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ karşılık gelen boylamlar sırasıyla $L_1, L_2, L_3, ..., L_n$ olarak adlandırılmıştır [5]. Şekil 2.8 de $\theta(2,2,3,3)$ genelleştirilmiş theta grafı gösterilmiştir.



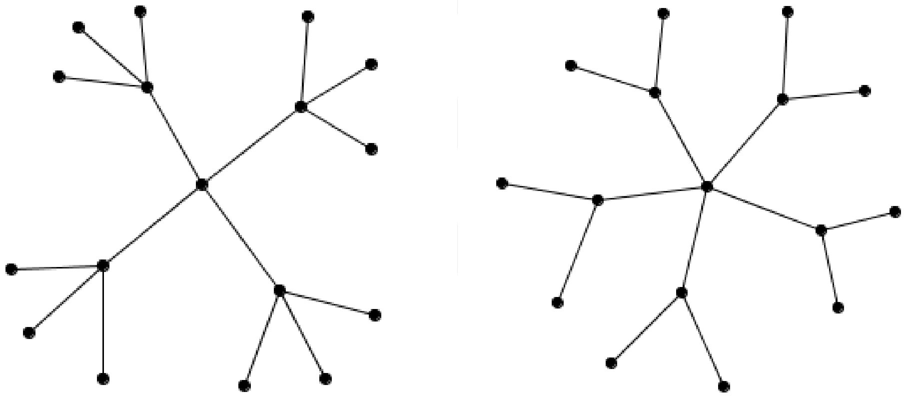
Şekil 2.8. Genelleştirilmiş Theta Graf $\theta(2,2,3,3)$

Tanım 2.34: Bir $P_{p,t}$ dikenli yol (thorn rod) grafı p tepeli bir zincir içerir ve zincirin her iki ucunun sonunda t dereceli birer tepe içeren bir graftır [7]. Şekil 2.9 da $P_{6,5}$ ve $P_{8,3}$ dikenli yol grafları gösterilmiştir.



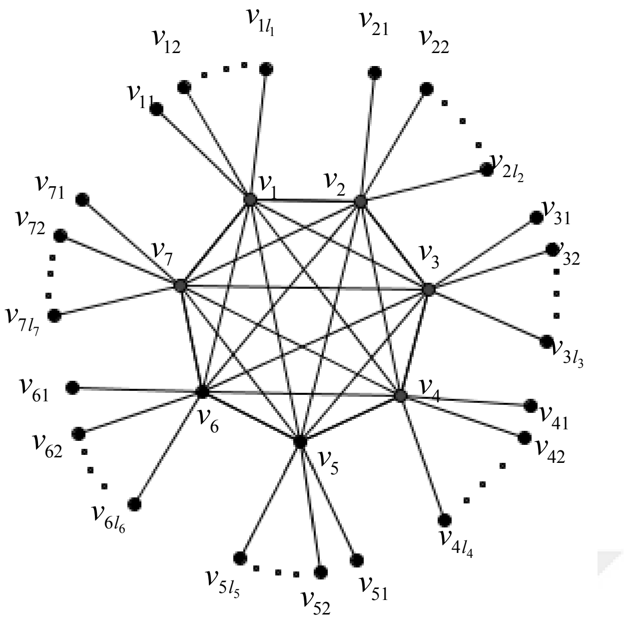
Şekil 2.9. $P_{6,5}(p=6,t=5)$ ve $P_{8,3}(p=8,t=3)$ Dikenli Yol Graflar

Tanım 2.35: Dikenli yıldız (Thorn star) graf yıldızın kollarına $t-1$ adet son tepenin eklenmesiyle elde edilen k kollu bir yıldız graftır ve $S_{k,t}$ ile gösterilir [7]. Şekil 2.10 da $S_{4.4}$ ve $S_{5,3}$ dikenli yıldız grafları gösterilmiştir.



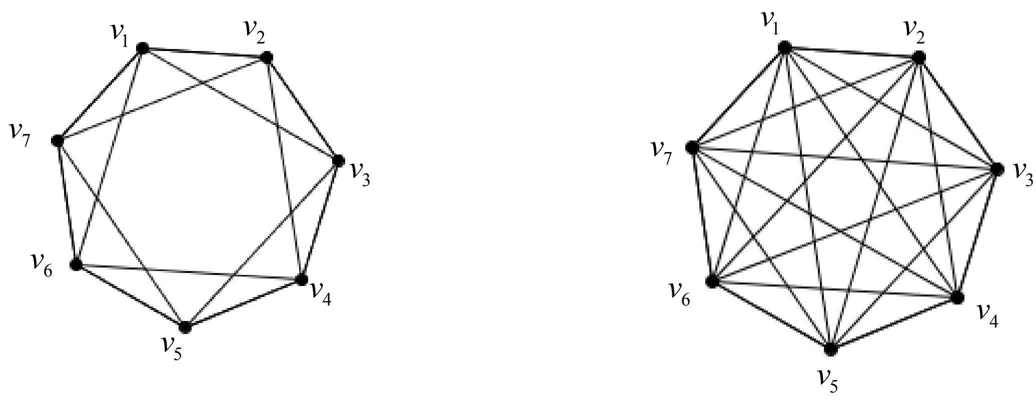
Şekil 2.10. $S_{4.4}\,(k=4,t=4)$ ve $S_{5,3}(k=5,t=3)$ Dikenli Yıldız Graflar

Tanım 2.36: Bir G grafında $l_1,l_2,l_3,...,l_n$ pozitif tamsayılar ve $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ tepeler kümesi olsun. Bir G thorn grafında $l_1,l_2,l_3,...,l_n$ parametreleri, $i\in\{1,2,3,...,n\}$ olmak üzere G grafında v_i tepelerine 1 dereceli l_i tepelerinin eklenmesiyle elde edilen graftır. G thorn grafı G^* veya $G^*(l_1,l_2,l_3,...,l_n)$ ile gösterilir [24]. Şekil 2.11 de K_7 diken grafı gösterilmiştir.



Şekil 2.11. K_7 Diken (Thorn) Graf

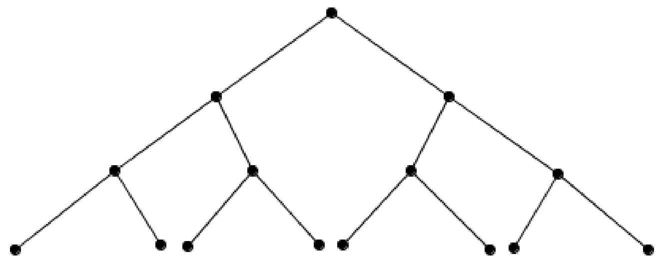
Tanım 2.37: $k \in Z^+$ olsun. G grafının k. kuvveti olan G^k grafı G grafı ile aynı tepelere sahip ve G grafında uzaklıkları en fazla k olan tepelerin birer ayrıt ile birleştirilmesiyle elde edilen bir graftır [4]. Şekil 2.12 de C_7^2 ve C_7^3 grafları gösterilmiştir.



C_7^2 C_7^3

Şekil 2.12. C_7^2 ve C_7^3 Grafları

Tanım 2.38: Ağaç grafların en uçta bulunan tepelerine yaprak tepe, başlangıçta bulunan tepesine kök tepe, bir tepenin altında bulunan tepelere çocuk tepe (child) denir. Bir ağacın derinliği, o ağacın kök tepesine en uzak olan yaprağının uzaklığı ile ölçülür. Her tepesinde iki çocuk tepe bulunan ağaca ikili ağaç (binary tree) denir. Tam ikili ağaçta, yaprak tepeler dışındaki tüm tepelerin iki çocuk tepesi bulunmaktadır [9].



Şekil 2.13. Tam İkili Ağaç

Tanım 2.39: n derinlikli bir tam k - lı ağaç ($k-ary\,tree$) grafta bütün yapraklar aynı derinlikte ve tüm iç tepelerde dahil tepe dereceleri k olan bir ağaç graftır. Bir k - lı ağaç ($k-ary\,tree$) grafta $\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$ tepe ve $\frac{k^{n+1}-1}{k-1}-1$ ayrıt bulunmaktadır [12].

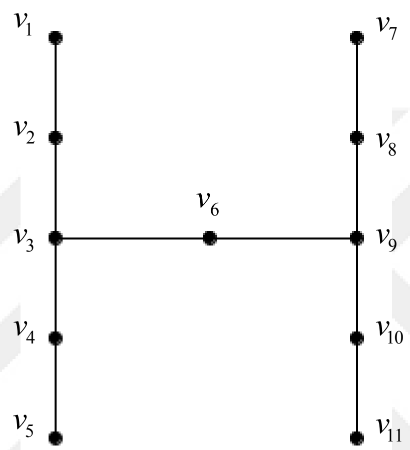
Teorem 2.40: Bir düzenli (regüler) G grafında $\gamma_s(G)=\gamma_w(G)=\gamma(G)$ dir [30].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Graflarda Baskınlık Sayısı

Tanım 3.1: $G=(V,E)$ bir graf ve $u,v \in V$ olsun. G grafının herbir tepesi veya en az bir komşusu bir D kümesinde olacak şekildeki D tepeler kümesine bir baskın küme denir. Böyle kümelerden en az eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısı G grafının baskınlık sayısını verir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir [23].

Örnek 3.2:



Şekil 3.1. G Grafı

Şekil 3.1'deki G grafında baskınlık sayısı için $D=\{v_2,v_4,v_6,v_8,v_{10}\}$ baskın küme olmak üzere $V-D$ kümesindeki tüm tepeler D kümesi tarafından bastırılır. Buradan baskın küme $D=\{v_2,v_4,v_6,v_8,v_{10}\}$ ve baskınlık sayısı $\gamma(\mathrm{G})=5$ olarak elde edilir.

3.2 Graflarda Güçlü ve Zayıf Baskınlık Sayısı

Tanım 3.3: $G=(V,E)$ bir graf ve $u,v \in V$ olsun. Eğer $i)\, uv \in E$ ve $ii)\, \deg u \geq \deg v$ ise u tepesi v tepesini güçlü bastırır, v tepesi u tepesini zayıf bastırır denir. Bir $D \subset V$ kümesi, $V-D$ kümesindeki her tepe D kümesinde en az bir tepe tarafından güçlü (zayıf) bastırılıyorsa G grafının bir güçlü baskın kümesi, kısaca sd-set (zayıf baskın kümesi, kısaca wd-set) denir. G grafının güçlü (zayıf) baskınlık sayısı $\gamma_s(\gamma_w)$, en az elemana sahip olan sd-set (wd-set) in eleman sayısıdır [23].

Şekil 3.1'deki G grafında güçlü baskınlık sayısı için $\deg(v_3)=\deg(v_9)>\deg(v_6)$, $\deg(v_3)>\deg(v_2)=\deg(v_4)$ ve $\deg(v_9)>\deg(v_8)=\deg(v_{10})$ olduğundan v_3 tepesi seçilerek v_2 ve v_4 tepeleri, v_9 tepesi seçilerek v_8 ve v_{10} tepeleri güçlü bastırılır. $\deg(v_2)=\deg(v_4)=\deg(v_8)=\deg(v_{10})>\deg(v_1)=\deg(v_5)=\deg(v_7)=\deg(v_{11})$ olduğundan v_8 tepesi seçilerek v_7 tepesi, v_{10} tepesi seçilerek v_{11} tepesi, v_4 tepesi seçilerek v_5 tepesi, v_2 tepesi seçilerek v_1 tepesi güçlü bastırılır. Buradan G grafında güçlü baskın küme $D=\{\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_8,\mathrm{v}_9,\mathrm{v}_{10}\}$ ve güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(G)=6$ olarak bulunur.

Şekil 3.1'deki G grafında zayıf baskınlık sayısı için $\deg(v_1)<\deg(v_2)$, $\deg(v_7)<\deg(v_8)$, $\deg(v_5)<\deg(v_4)$ ve $\deg(v_{11})<\deg(v_{10})$ olduğundan v_1 tepesi seçilerek v_2 tepesi, v_7 tepesi seçilerek v_8 tepesi, v_5 tepesi seçilerek v_4 tepesi, v_{11} tepesi ile v_{10} tepesi zayıf bastırılır. $\deg(v_6)<\deg(v_3)=\deg(v_9)$ olduğundan v_6 tepesi seçilerek v_3 ve v_9 tepeleri zayıf bastırılır. Buradan G grafında zayıf baskın küme $D=\{v_1,v_5,v_6,v_7,v_{11}\}$ ve güçlü baskınlık sayısı $\gamma_w(G)=5$ olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Bazı İyi Bilinen Graflarda Güçlü ve Zayıf Baskınlık Sayıları

Bu bölümde bazı iyi bilinen graf sınıflarının güçlü ve zayıf baskınlık sayıları bulunmuş ve ispatları ile birlikte verilmiştir. Önerme 4.1' de verilen yol grafın güçlü ve zayıf baskınlık sayılarına 2012 yılında Boutrig ve Chellali' nin makalesinde değinilmiş fakat ispatları verilmemiştir. Aynı şekilde önerme 4.2 ile verilen çevre grafın güçlü ve zayıf baskınlık sayılarına "A Note On Relation Between The Weak and Strong Domination Numbers Of a Graph" makalesinde değinilmiş ve ispatı verilmemiştir [8]. Bu çalışmada önermelere ispatları ile birlikte yer verilmiştir.

Önerme 4.1: Bir P_n yol grafında

$$i)\gamma_s(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \tag{4.1}$$

$$ii)\gamma_w(P_n) \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, & n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.2}$$

İspat: Bir P_n yol grafında $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V(P_n)$ olmak üzere $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$, $\deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_{n-1}) = 2$ ' dir.

$i)$ Güçlü baskınlık sayısı için

Durum 1: $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ olsun. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-4}, v_{n-1}\}$ güçlü baskın küme olsun. Buna göre yol grafı minimum sayıda tepe ile güçlü bastırmak için $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$ olduğundan komşuluğundaki v_2 ve v_{n-1} tepeleri güçlü baskın kümeye alınarak $\deg(v_1) = \deg(v_n) < \deg(v_2) = \deg(v_{n-1})$ olduğundan v_1 ve v_n tepeleri ile v_3 ve v_{n-2} tepeleri güçlü bastırılır. Geriye kalan $v_4 v_5 v_6 ... v_{n-3}$ yol grafı için mod 3'e göre bakılması gerekir. $\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{n-1})=2$ olduğundan her tepe kendisi ile birlikte üç tepeyi güçlü bastırır. Buradan $v_4v_5v_6...v_{n-3}$ yol grafı için her tepe kendisi ile birlikte üç tepe güçlü bastırıldığından grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında geriye kalan tepe olmadığından $\frac{n-6}{3}$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-6}{3}+2=\frac{n}{3}$ olmak üzere $\gamma_s(P_n)\leq\frac{n}{3}$ elde edilir. $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-4},v_{n-1}\}$ güçlü baskın küme olmasın. Bir tepe silinsin. Örneğin v_2 tepesi silinsin. v_1 tepesinin bastırılması için kendisinin kümeye alınması gerekir. Fakat buradan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(P_n)\geq\frac{n}{3}$ olarak bulunur. Buradan $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ için $\gamma_s(P_n)=\frac{n}{3}$ olarak elde edilir.

Durum 2: $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ olsun. $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-2},v_{n-1}\}$, $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-3},v_{n-1}\}$, $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-4},v_{n-1}\}$ kümelerinden herhangi birisi güçlü baskın küme olsun. $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-3},v_{n-1}\}$ güçlü baskın küme olsun. Buna göre yol grafı minimum sayıda tepe ile güçlü bastırmak için $\deg(v_1)=\deg(v_n)=1$ olduğundan komşuluğundaki v_2 ve v_{n-1} tepeleri güçlü baskın kümeye alınarak $\deg(v_1)=\deg(v_n)<\deg(v_2)=\deg(v_{n-1})$ olduğundan v_1 ve v_n tepeleri ile v_3 ve v_{n-2} tepeleri güçlü bastırılır. Geriye kalan $v_4v_5v_6...v_{n-3}$ yol grafı için mod 3'e göre bakılması gerekir. $\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{n-1})=2$ olduğundan $v_4v_5v_6...v_{n-3}$ yol grafı için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında geriye bir tepe kalmaktadır. Bunun için güçlü baskın kümeye bir tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-7}{3}+1$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-7}{3}+1+2=\frac{n+2}{3}=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ olmak üzere $\gamma_s(P_n)\leq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ elde edilir. $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-3},v_{n-1}\}$ güçlü baskın küme olmasın. Bir tepe silinsin. v_2 tepesi silinsin. v_1 tepesinin bastırılması için kendisinin kümeye alınması gerekir fakat buradan $\deg(v_1)<\deg(v_2)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(P_n)\geq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ olarak bulunur. Buradan $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ için $\gamma_s(P_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ olarak elde edilir.

Durum 3: $n \equiv 2(\bmod 3)$ olsun. Güçlü baskın küme $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-3}, v_{n-1}\}$ ya da $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-4}, v_{n-1}\}$ kümelerinden herhangi birisi olsun. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-4}, v_{n-1}\}$ güçlü baskın küme olsun. Buna göre yol grafı minimum sayıda tepe ile güçlü bastırmak için $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$ olduğundan komşuluğundaki v_2 ve v_{n-1} tepeleri güçlü baskın kümeye alınarak $\deg(v_1) = \deg(v_n) < \deg(v_2) = \deg(v_{n-1})$ olduğundan v_1 ve v_n tepeleri ile v_3 ve v_{n-2} tepeleri güçlü bastırılır. Geriye kalan $v_4 v_5 v_6 ... v_{n-2}$ yol grafı için mod 3'e göre bakılması gerekir. $\deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_{n-1}) = 2$ olduğundan $v_4 v_5 v_6 ... v_{n-3}$ yol grafı için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında geriye iki tepe kalmaktadır. Bunun için güçlü baskın kümeye bir tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-8}{3} + 1$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-8}{3} + 1 + 2 = \frac{n+1}{3} = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olmak üzere $\gamma_s(P_n) \le \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ elde edilir. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-4}, v_{n-1}\}$ güçlü baskın küme olmasın. Bir tepe silinsin. v_2 tepesi silinsin. v_1 tepesinin bastırılması için kendisinin kümeye alınması gerekir fakat buradan $\deg(v_1) < \deg(v_2)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(P_n) \ge \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak bulunur. Buradan $n \equiv 2(\bmod 3)$ için $\gamma_s(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir.

Buradan tüm durumlar için $\gamma_s(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ elde edilir. □

ii) Zayıf baskınlık sayısı için benzer şekilde üç durum söz konusudur.

Durum 4: Bir P_n yol grafında $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V(P_n)$ olmak üzere $n \equiv 0(\bmod 3)$ için $D = \{v_1, v_4, v_7, ..., v_{n-3}, v_n\}$ ya da $D = \{v_1, v_4, v_7, ..., v_{n-2}, v_n\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olarak alınsın. $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$, $\deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_{n-1}) = 2$ olduğundan v_1 ve v_n tepeleri seçilerek komşuluğundaki v_2 ve v_{n-1} tepeleri zayıf bastırılır. Geriye kalan $v_3 v_4 v_5 ... v_{n-2}$ yol graf için tepeler üçerli gruplandığında geriye kalan iki tepe için bir tepe seçilmesi yeterlidir.

Buradan $2+1+\frac{n-6}{3}=\frac{n+3}{3}=\frac{n}{3}+1$ olarak bulunur ve $\gamma_w(P_n)\leq\frac{n}{3}+1$ elde edilir. $n\equiv 0(\bmod 3)$ için $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-3},v_n\}$ ya da $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-2},v_n\}$ zayıf baskın küme olmasın ve bu kümelerden herhangi bir tepeyi silelim. Örneğin v_1 tepesini silelim. O halde v_1 tepesinin komşuluğundaki v_2 tepesi alınarak v_1, v_2 ve v_3 tepeleri güçlü bastırılmış olur. Buradan zayıf baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_w(P_n)\geq\frac{n}{3}+1$ elde edilir. Buradan $\gamma_w(P_n)=\frac{n}{3}+1$ olarak bulunur.

Durum 5: $n\equiv 1(\bmod 3)$ için $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-3},v_n\}$ ya da $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-2},v_n\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olarak alınsın. $1=\deg(v_1)=\deg(v_n)<\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{n-1})=2$ olduğundan v_1 ve v_n tepeleri seçilerek komşuluğundaki v_2 ve v_{n-1} tepeleri zayıf bastırılır. Geriye kalan $v_3v_4v_5...v_{n-2}$ yol graf için tepeler üçerli gruplandığında geriye kalan tepe olmadığı için zayıf baskınlık sayısı $\frac{n-4}{3}+2=\frac{n+2}{3}=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ elde edilir. Buradan $\gamma_w(P_n)\leq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ olarak bulunur. $n\equiv 1(\bmod 3)$ için $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-3},v_n\}$ ya da $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-2},v_n\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olmasın ve bu kümelerden herhangi bir tepeyi silelim. Örneğin v_1 tepesini silelim. O halde v_1 tepesinin komşuluğundaki v_2 tepesi alınarak v_1, v_2 ve v_3 tepeleri güçlü bastırılmış olur. Buradan zayıf baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_w(P_n)\geq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ elde edilir. Buradan $\gamma_w(P_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ olarak bulunur.

Durum 6: $n\equiv 2(\bmod 3)$ için $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-1},v_n\}$, $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-2},v_n\}$ ya da $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-3},v_n\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olarak alınsın.

$$1=\deg(v_1)=\deg(v_n)<\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{n-1})=2 \tag{4.3}$$

olduğundan v_1 ve v_n tepeleri seçilerek komşuluğundaki v_2 ve v_{n-1} tepeleri zayıf bastırılır. Geriye kalan $v_3v_4v_5...v_{n-2}$ yol graf için tepeler üçerli gruplandığında geriye kalan bir tepe için bir tepe seçmek yeterlidir. Buradan zayıf baskınlık sayısı $\frac{n-4}{3}+2+1=\frac{n+2}{3}+1=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$ elde edilir ve $\gamma_w(P_n)\leq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$ olarak bulunur. $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-1},v_n\}$, $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-2},v_n\}$ ya da $D=\{v_1,v_4,v_7,...,v_{n-3},v_n\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olmasın ve bu kümelerden herhangi bir tepeyi silelim. Örneğin v_1 tepesini silelim. O halde v_1 tepesinin komşuluğundaki v_2 tepesi alınarak v_1, v_2 ve v_3 tepeleri güçlü bastırılmış olur. Buradan zayıf baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_w(P_n)\geq\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$ elde edilir. Buradan $\gamma_w(P_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1$ olarak bulunur.

Buradan tüm durumlar için

$$\gamma_w(P_n)=\begin{cases}\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil, & n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\\ \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+1, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

elde edilir. □

Önerme 4.2: C_n çevre grafında $\gamma_s(C_n)=\gamma_w(C_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ ' dir.

İspat: C_n çevre grafında güçlü ve zayıf baskınlık sayısı için

Durum 1: $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ için $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-4},v_{n-1}\}$ kümesi güçlü (zayıf) baskın küme olsun. Buradan $\deg(v_1)=\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_n)=2$ olduğundan seçilen her tepe kendisi ile birlikte üç tepeyi güçlü (zayıf) bastırır. Grafın tepeleri üçerli gruplandığında geriye kalan tepe olmamaktadır. Buradan $\frac{n}{3}$ tepe seçilmesi yeterlidir ve $\gamma_s(C_n)=\gamma_w(C_n)\leq\frac{n}{3}$ olarak bulunur. $D=\{v_2,v_5,v_8,...,v_{n-4},v_{n-1}\}$ kümesi güçlü (zayıf) baskın küme olmasın. Bu kümeden herhangi bir tepe silinsin. v_2 tepesi silinsin. O halde v_2 tepesi komşuluğundaki v_1 ya da v_3 tepesi seçilerek güçlü (zayıf) bastırılabilir. Fakat v_2 tepesi komşuluğundaki tepelerden seçilmeyen tepe için bir tepe daha kümeye seçilmelidir. Buradan $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) \geq \frac{n}{3}$ olarak bulunur ve $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) = \frac{n}{3}$ olarak elde edilir.

Durum 2: $n \equiv 1(\bmod 3)$ için

$D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-4}, v_{n-1}\}$, $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-2}, v_{n-1}\}$ ve $D = \{v_1, v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-2}\}$ kümelerinden herhangi birisi güçlü (zayıf) baskın küme olsun. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-2}, v_{n-1}\}$ güçlü (zayıf) baskın küme olsun. Buradan $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_n) = 2$ olduğundan seçilen her tepe kendisi ile birlikte üç tepeyi güçlü (zayıf) bastırır. Grafın tepeleri üçerli gruplandığında bir tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepe için bir tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-2}, v_{n-1}\}$ güçlü (zayıf) baskın küme olmasın. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-2}, v_{n-1}\}$ kümesinden herhangi bir tepe silinsin. v_{n-1} tepesi kümeden silinsin. v_{n-1} tepesi komşuluğundaki v_n tepesi için v_n tepesi komşuluğundaki v_1 tepesi seçilerek ya da v_n tepesi seçilerek güçlü (zayıf) bastırılır. Buradan $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir. Buradan $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir.

Durum 3: $n \equiv 2(\bmod 3)$ için $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-3}, v_n\}$ ya da $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-3}, v_{n-1}\}$ kümelerinden herhangi birisi güçlü (zayıf) baskın küme olsun. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-3}, v_{n-1}\}$ güçlü (zayıf) baskın küme olsun. Buradan $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_n) = 2$ olduğundan seçilen her tepe kendisi ile birlikte üç tepeyi güçlü (zayıf) bastırır. Grafın tepeleri üçerli gruplandığında iki tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepe için kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin seçilmesi yeterlidir. Buradan $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak bulunur. $D = \{v_2, v_5, v_8, ..., v_{n-3}, v_{n-1}\}$ güçlü (zayıf) baskın küme olmasın. v_2 tepesi silinsin. O halde v_2 tepesinin güçlü (zayıf) bastırılabilmesi için v_2 tepesinin komşuluğundaki bir ya da iki tepenin kümeye eklenmesi gerekir. Buradan $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak bulunur. O halde $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir.

Buradan tüm durumlar için $\gamma_s(C_n) = \gamma_w(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir. □

Düzenli (regüler) graflarda güçlü ve zayıf baskınlık sayısının eşit olduğu teorem 2.40' ta belirtilmiştir.

Önerme 4.3: K_n tam grafında $\gamma_s(K_n) = \gamma_w(K_n) = 1$' dir.

İspat: Bir K_n tam grafında $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_n) = n-1$ olup $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, ..., \{v_n\}$ tepelerinden herhangi birisi seçilerek grafın tüm tepeleri güçlü (zayıf) bastırılır ve $\gamma_s(K_n) = \gamma_w(K_n) \leq 1$ olarak bulunur. $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, ..., \{v_n\}$ tepelerinden herhangi birisi seçilmesin. O halde graf güçlü (zayıf) bastırılamaz ve $\gamma_s(K_n) = \gamma_w(K_n) \geq 1$ elde edilir. Teorem 2.40' tan $\gamma_s(K_n) = \gamma_w(K_n) = 1$ olduğu açıktır.

□

Önerme 4.4: $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafta $m > n$ olmak üzere $\gamma_s(K_{m,n}) = n$ ve $\gamma_w(K_{m,n}) = m$ ve $m = n$ ise $\gamma_s(K_{m,n}) = \gamma_w(K_{m,n}) = 2$ 'dir.

İspat: $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafta S_1, m tepeli, S_2, n tepeli alt kümesi olsun.

Durum 1: $m > n$ olmak üzere $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafta güçlü baskınlık sayısı için: S_1 kümesindeki tepelerin dereceleri $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = ... = \deg(v_m) = n$, S_2 kümesindeki tepelerin dereceleri $\deg(u_1) = \deg(u_2) = \deg(u_3) = ... = \deg(u_n) = m$ dir. Buradan $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ güçlü baskın küme olmak üzere kümedeki herhangi bir tepe seçilerek komşuluğundaki n dereceli $v_1, v_2, ..., v_m$ tepeleri güçlü bastırılır ve grafın kalan tepeleri için kümeye $u_2, ..., u_n$ tepelerinin alınması gerekir. Buradan $\gamma_s(K_{m,n}) \leq n$ elde edilir. $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ güçlü baskın küme olmasın. u_1 tepesini silelim ve $D=\{u_2,u_3,...,u_n\}$ olsun. Kümedeki diğer tepeler ile n dereceli $v_1,v_2,...,v_m$ tepeleri güçlü bastırılır fakat u_1 tepesi güçlü bastırılamaz. $v_1,v_2,...,v_m$ tepelerinden herhangi birisi alınarak u_1 tepesi bastırılabilir fakat güçlü baskınlık şartı sağlanmaz. Buradan $\gamma_s(K_{m,n}) \geq n$ olarak bulunur. O halde $D=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ güçlü baskın küme ve $\gamma_s(K_{m,n})=n$ olarak elde edilir.

Durum 2: $m>n$ olmak üzere $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafta zayıf baskınlık sayısı için:

$D=\{v_1,v_2,v_3,...,v_m\}$ zayıf baskın küme olmak üzere kümedeki herhangi bir tepe seçilerek komşuluğundaki m dereceli $u_1,u_2,...,u_n$ tepeleri zayıf bastırılır. Grafın kalan tepeleri için kümeye $v_2,v_3,...,\mathrm{v}_m$ tepelerinin alınması gerekir. Buradan $\gamma_w(K_{m,n}) \leq m$ elde edilir. $D=\{v_1,v_2,v_3,...,v_m\}$ zayıf baskın küme olmasın. v_1 tepesini silelim ve $D=\{v_2,v_3,...,v_m\}$ olsun. Kümedeki diğer tepeler ile m dereceli $u_1,u_2,...,u_n$ tepeleri zayıf bastırılır fakat v_1 tepesi zayıf bastırılamaz. $u_1,u_2,...,u_n$ tepelerinden herhangi birisi alınarak v_1 tepesi bastırılabilir fakat zayıf baskınlık şartı sağlanmaz. Buradan $\gamma_w(K_{m,n}) \geq m$ olarak bulunur. O halde $D=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,...,\mathrm{v}_m\}$ zayıf baskın küme ve $\gamma_w(K_{m,n})=m$ olarak elde edilir.

Durum 3: $m=n$ olmak üzere $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafta güçlü (zayıf) baskınlık sayısı için:

$$\deg(v_1)=\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_m)=n=m \tag{4.4}$$

$$\deg(u_1)=\deg(u_2)=\deg(u_3)=...=\deg(u_n)=m=n \tag{4.5}$$

olduğundan sırasıyla S_1 ve S_2 kümelerinden birer tepe seçilerek iki tepe ile tüm graf güçlü (zayıf) bastırılır. Güçlü (zayıf) baskın küme

$D=\{u_1,v_1\}$, $D=\{u_1,v_2\}$, … , $D=\{u_2,v_1\}$, $D=\{u_2,v_2\}$, … , $D=\{u_n,v_m\}$ kümelerinden herhangi birisi seçilerek $K_{m,n}$ iki parçalı tam graf güçlü (zayıf) bastırılır ve buradan $\gamma_s(K_{m,n})=\gamma_w(K_{m,n}) \leq 2$ olarak elde edilir. Güçlü (zayıf) baskın küme $D=\{u_1,u_2\}$ olsun. Buradan S_2 kümesindeki tüm tepeler güçlü (zayıf) bastırılır fakat S_1 kümesindeki tepeler güçlü (zayıf) bastırılamaz ve buradan $\gamma_s(K_{m,n})=\gamma_w(K_{m,n}) \geq 2$

olarak bulunur. Teorem 2. 40’ tan $m=n$ ise $\gamma_s(K_{m,n})=\gamma_w(K_{m,n})=2$ olarak elde edilir. □

Teorem 4.5: Bir P_n^k grafında $\gamma_s(P_n^k)=\left\lceil \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1} \right\rceil$ dir.

İspat: Bir P_n^k grafında maksimum tepe derecesi $\Delta(P_n^k)$ olmak üzere güçlü baskın küme için iki tepe arasında tepe derecesi büyük olan tepe seçilir ve derecesi $\Delta(P_n^k)$ olan tepe seçildiğinde kendisi ile birlikte $\Delta(P_n^k)+1$ tepe güçlü bastırılır. Buradan grafın tepeleri $\Delta(P_n^k)+1$ ’ li gruplara ayrıldığında minimum elemana sahip güçlü baskın kümenin eleman sayısı $\frac{n}{\Delta(P_n^k)+1}$ olarak bulunur. Grafın tepeleri $\Delta(P_n^k)+1$ ’ li gruplara ayrıldığında her gruptaki $\Delta(P_n^k)-1$ sayıdaki tepeye kadar tepe güçlü bastırılmamış olabilir. Bu durumda güçlü baskın kümeye bir tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan, $\gamma_s(P_n^k)=\left\lceil \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1} \right\rceil$ olarak elde edilir. □

Teorem 4.6: Bir C_n^k grafında

n tek ve $n>3$ ise;

$$\gamma_s(C_n^k)=\gamma_w(C_n^k)=\begin{cases} \left\lceil \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1} \right\rceil, & \frac{n-1}{2}>k \\ 1, & \frac{n-1}{2}\le k \end{cases} \tag{4.6}$$

n çift ise ;

$$\gamma_s(C_n^k)=\gamma_w(C_n^k)=\begin{cases} \left\lceil \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1} \right\rceil, & \frac{n}{2}>k \\ 1, & \frac{n}{2}\le k \end{cases} \tag{4.7}$$

dir.

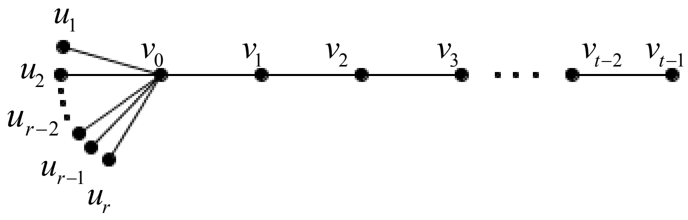
İspat: C_n^k grafında n tek sayı, k kuvvet ve $n>3$ olmak üzere grafın maksimum derecesi $\Delta(C_n^k)=n-1$ olduğunda graf K_n tam grafı olmaktadır ve güçlü ve zayıf baskınlık sayıları 1' dir. k uzaklıklı yollar birleştirildiğinde n tek sayı ve $\frac{n-1}{2} > k$ için C_n^k grafı düzenli (regüler) graf olduğundan maksimum (minimum) dereceye sahip tepelerden birisinin güçlü (zayıf) baskın kümeye alınmasıyla $\Delta(P_n^k)+1$ tepe güçlü (zayıf) bastırılır. O halde grafın tepeleri $\Delta(P_n^k)+1$ 'li gruplara ayrıldığında grafın tüm tepeleri güçlü (zayıf) bastırılır. Buradan, $\gamma_s(C_n^k) = \gamma_w(C_n^k) = \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1}$ olmaktadır. Grafın tepeleri $\Delta(P_n^k)+1$ 'li gruplara ayrıldığında geriye kalan tepeler için güçlü (zayıf) baskın kümeye bir tepe alınması yeterlidir. Buradan $\gamma_s(C_n^k) = \gamma_w(C_n^k) = \left\lceil \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1} \right\rceil$ elde edilir. Eğer $\frac{n-1}{2} \le k$ ise graf bir tam graf olur ve teorem 2.40' dan $\gamma_s(C_n^k) = \gamma_w(C_n^k) = 1$ olarak elde edilir. Benzer olarak n çift sayı ve $\frac{n}{2} > k$ için $\gamma_s(C_n^k) = \gamma_w(C_n^k) = \left\lceil \frac{n}{\Delta(P_n^k)+1} \right\rceil$ ve $\frac{n}{2} \le k$ için tam graf olup teorem 2.40' tan $\gamma_s(\mathrm{C}_n^k) = \gamma_w(\mathrm{C}_n^k) = 1$ olarak elde edilir. □

Teorem 4.7: $t \ge 2$ ve $r \ge 1$ olmak üzere $t+r$ tepeli $C_{t,r}$ kuyruklu yıldız (comet) grafında güçlü ve zayıf baskınlık sayısı;

$$i)\ \gamma_s(C_{t,r}) = \left\lceil \frac{t-2}{3} \right\rceil + 1 \tag{4.8}$$

$$ii)\ \gamma_w(C_{t,r}) = r + 1 + \left\lceil \frac{t-3}{3} \right\rceil \tag{4.9}$$

İspat: $t \geq 2$ ve $r \geq 1$ olmak üzere $t+r$ tepeli $C_{t,r}$ kuyruklu yıldız grafında



Şekil 4.1: $C_{t,r}$ Kuyruklu Yıldız (Comet) Grafı

$i)$ Güçlü baskınlık sayısı için üç durumda ele alınır.

Durum 1: $t \equiv 0(\bmod 3)$ için $D=\{v_0, v_3, v_6, ..., v_{t-2}\}$ veya $D=\{v_0, v_2, v_4, ..., v_{t-2}\}$ kümelerinden herhangi birisi seçilsin. $D=\{v_0, v_3, v_6, ..., v_{t-2}\}$ güçlü baskın küme olsun. v_0 tepesi seçilerek $u_1, u_2, ..., u_r$ ve v_1 tepeleri ve v_{t-2} tepesi seçilerek v_{t-1} ve v_{t-3} tepeleri güçlü bastırılır. Grafın diğer tepeleri için

$$\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{t-5})=\deg(v_{t-4})=2 \qquad (4.10)$$

olmak üzere kalan $v_2v_3v_4...v_{t-5}v_{t-4}$ yol grafındaki $t-5$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplandığında bir tepe bastırılamaz. Bu bir tepe ya da bu bir tepenin komşuluğundaki bir tepe seçilerek graf güçlü bastırılır. Buradan $\frac{t-6}{3}+1+2=\frac{t}{3}+1$ olmak üzere $\gamma_s(C_{t,r}) \leq \frac{t}{3}+1$ elde edilir. $D=\{v_0, v_3, v_6, ..., v_{t-2}\}$ güçlü baskın küme olmasın ve kümeden herhangi bir tepe silinsin. $v_0(v_3, v_6, ..., v_{t-2})$ tepesi silinsin. O halde v_0 tepesi komşuluğundaki $u_1, u_2, ..., u_r$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(\mathrm{u}_1)=\deg(\mathrm{u}_2)=...=\deg(\mathrm{u}_r)<\deg(v_0)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz. Buradan $\gamma_s(C_{t,r}) \geq \frac{t}{3}+1$ elde edilir.

Durum 2: $t \equiv 1(\bmod 3)$ için $D=\{v_0, v_3, v_6, ..., v_{t-3}, v_{t-2}\}$ ya da $D=\{v_0, v_3, v_6, ..., v_{t-4}, v_{t-2}\}$ kümelerinden herhangi birisi güçlü baskın küme olsun.

$D=\{v_0,v_3,v_6,...,v_{t-3},v_{t-2}\}$ güçlü baskın küme olsun. v_0 tepesi seçilerek $u_1, u_2,...,u_r$ ve v_1 tepeleri ve v_{t-2} tepesi seçilerek v_{t-1} ve v_{t-3} tepeleri güçlü bastırılır. Grafın diğer tepeleri için

$$\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{t-5})=\deg(v_{t-4})=2 \tag{4.11}$$

olmak üzere kalan $v_2v_3v_4...v_{t-5}v_{t-4}$ yol grafındaki $t-5$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplandığında iki tepe bastırılamaz. Bu iki tepe için bu tepelerden birinin kümeye alınması yeterdir. Buradan $\frac{t-7}{3}+1+2=\frac{t+2}{3}$ olmak üzere $\gamma_s(C_{t,r})\le\frac{t+2}{3}$ elde edilir. $D=\{v_0,v_3,v_6,...,v_{t-3},v_{t-2}\}$ güçlü baskın küme olmasın ve kümeden herhangi bir tepe silinsin. $v_0(v_3,v_6,...,v_{t-2})$ tepesi silinsin. O halde v_0 tepesi komşuluğundaki $u_1, u_2,...,u_r$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(\mathrm{u}_1)=\deg(\mathrm{u}_2)=...=\deg(\mathrm{u}_r)<\deg(v_0)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz. Buradan $\gamma_s(C_{t,r})\ge\frac{t+2}{3}$ elde edilir.

Durum 3: $t\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ için $D=\{v_0,v_3,v_6,...,v_{t-2}\}$ kümesi güçlü baskın küme olsun. v_0 tepesi seçilerek $u_1, u_2,...,u_r$ ve v_1 tepeleri ve v_{t-2} tepesi seçilerek v_{t-1} ve v_{t-3} tepeleri güçlü bastırılır. Grafın diğer tepeleri için

$$\deg(v_2)=\deg(v_3)=...=\deg(v_{t-5})=\deg(v_{t-4})=2 \tag{4.12}$$

olmak üzere kalan $v_2v_3v_4...v_{t-5}v_{t-4}$ yol grafındaki $t-5$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplandığında geriye kalan tepe olmamaktadır. Buradan $\frac{t-5}{3}+2=\frac{t+1}{3}$ olmak üzere $\gamma_s(C_{t,r})\le\frac{t+1}{3}$ elde edilir. $D=\{v_0,v_3,v_6,...,v_{t-3},v_{t-2}\}$ güçlü baskın küme olmasın ve kümeden herhangi bir tepe silinsin. $v_0(v_3,v_6,...,v_{t-2})$ tepesi silinsin. O halde v_0 tepesi komşuluğundaki $u_1, u_2,...,u_r$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(\mathrm{u}_1)=\deg(\mathrm{u}_2)=...=\deg(\mathrm{u}_r)<\deg(v_0)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz. Buradan $\gamma_s(C_{t,r})\ge\frac{t+1}{3}$ elde edilir.

Buradan tüm durumlar için $\gamma_s(C_{t,r}) = \left\lceil \frac{t-2}{3} \right\rceil + 1$ olarak elde edilir.

ii) Zayıf baskınlık sayısı için üç durum mevcuttur.

$C_{t,r}$ comet grafında zayıf baskınlık sayısı için $\deg(v_0) > \deg(u_1) = ... = \deg(u_r)$ olup $u_1, u_2, u_3, ..., u_r$ tepeleri arasında ayrıt olmadığı için zayıf baskın kümede $u_1, u_2, u_3, ..., u_r$ tepeleri bulunur. Bu tepeler ile $u_1, u_2, u_3, ..., u_r$ tepeleri ve v_0 tepesi zayıf bastırılır. v_{t-1} tepesi ile v_{t-2} tepesi $\deg(v_{t-1}) < \deg(v_{t-2})$ olduğundan zayıf bastırılır. Geriye kalan $v_1 v_2 v_3 ... v_{t-4} v_{t-3}$ yol graf için;

Durum 4: $t \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ için $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_r, v_2, v_5, ..., v_{t-4}, v_{t-1}\}$ zayıf baskın küme olsun. Buradan kalan $v_1 v_2 v_3 ... v_{t-4} v_{t-3}$ grafı için grafın tepeleri üçerli gruplandığında açıkta tepe kalmamaktadır ve $\frac{t-3}{3}$ tepe ile $v_1 v_2 v_3 ... v_{t-4} v_{t-3}$ grafı zayıf bastırılmaktadır. Buradan zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(C_{t,r}) \le r + 1 + \frac{t-3}{3}$ olarak bulunur. $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_r, v_2, v_5, ..., v_{t-4}, v_{t-1}\}$ zayıf baskın küme olmasın. Kümeden herhangi bir tepe silelim. u_1 tepesi silinsin. Buradan u_1 tepesi komşuluğundaki v_0 tepesi tarafından zayıf bastırılamaz. Buradan $\gamma_w(C_{t,r}) \ge r + 1 + \frac{t-3}{3}$ elde edilir ve $\gamma_w(C_{t,r}) = r + 1 + \frac{t-3}{3}$ olarak bulunur.

Durum 5: $t \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ için $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_r, v_2, v_5, v_8 ..., v_{t-3}, v_{t-1}\}$, $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_r, v_2, v_5, v_8 ..., v_{t-4}, v_{t-1}\}$, $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_r, v_2, v_5, v_8 ..., v_{t-2}, v_{t-1}\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olsun. $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_r, v_2, v_5, v_8 ..., v_{t-3}, v_{t-1}\}$ zayıf baskın küme olsun. Buradan kalan $v_1 v_2 v_3 ... v_{t-4} v_{t-3}$ grafı için grafın tepeleri üçerli gruplandığında bir tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepe için kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin seçilmesi yeterlidir. Burada $\frac{t-4}{3} + 1$ tepe ile $v_1 v_2 v_3 ... v_{t-4} v_{t-3}$ grafı zayıf bastırılmaktadır.

Buradan zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(C_{t,r}) \le r+1+\frac{t-1}{3}$ olarak bulunur. $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,...,v_{t-4},v_{t-1}\}$ zayıf baskın küme olmasın. Kümeden herhangi bir tepe silelim. u_1 tepesi silinsin. Buradan u_1 tepesi komşuluğundaki v_0 tepesi tarafından zayıf bastırılamaz. Buradan $\gamma_w(C_{t,r}) \ge r+1+\frac{t-1}{3}$ elde edilir ve $\gamma_w(C_{t,r}) = r+1+\frac{t-1}{3}$ olarak bulunur.

Durum 6: $t \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ için $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,v_8...,v_{t-3},v_{t-1}\}$ ya da $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,v_8...,v_{t-4},v_{t-1}\}$ kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olsun. $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,v_8...,v_{t-4},v_{t-1}\}$ zayıf baskın küme olsun. Buradan kalan $v_1v_2v_3...v_{t-4}v_{t-3}$ grafı için grafın tepeleri üçerli gruplandığında iki tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepe iki tepe için iki tepeden birisinin zayıf baskın kümeye seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{t-5}{3}+1$ tepe ile $v_1v_2v_3...v_{t-4}v_{t-3}$ grafı zayıf bastırılmaktadır. Buradan zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(C_{t,r}) \le r+1+\frac{t-2}{3}$ olarak bulunur. $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,...,v_{t-4},v_{t-1}\}$ zayıf baskın küme olmasın. Kümeden herhangi bir tepe silelim. $u_1,u_2,u_3,...,u_r$ tepelerinden herhangi birisi kümede olmasın. u_1 tepesi silinsin. $D=\{u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,...,v_{t-4},v_{t-1}\}$ olarak seçilsin. O halde u_1 tepesinin komşuluğundaki v_0 tepesi seçilerek u_1 tepesi $\deg(u_1) < \deg(v_0)$ olduğundan zayıf bastırılamaz. O halde, $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_r,v_2,v_5,...,v_{t-4},v_{t-1}\}$ minimal zayıf baskın kümedir. Buradan $\gamma_w(C_{t,r}) \ge r+1+\frac{t-2}{3}$ elde edilir ve $\gamma_w(C_{t,r}) = r+1+\frac{t-2}{3}$ olarak bulunur.

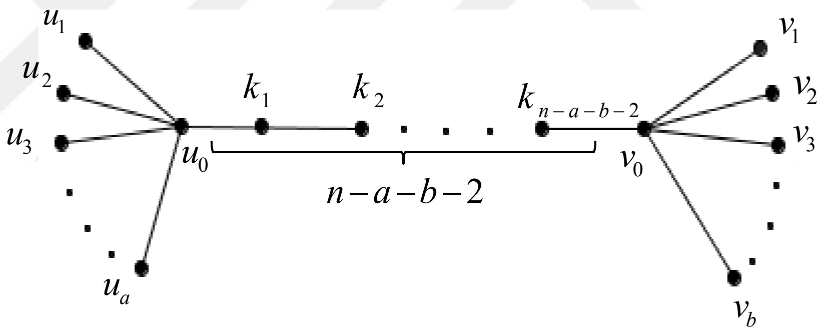
Buradan tüm durumlar için $\gamma_w(C_{t,r}) = \left\lceil \frac{t-3}{3} \right\rceil + r + 1$ elde edilir. □

Teorem 4.8: $a, b \geq 1$ ve $n \geq a+b+2$ olmak üzere $DC(n,a,b)$ çift kuyruklu yıldız (double comet) grafında güçlü ve zayıf baskınlık sayısı;

$$i)\gamma_s(DC(n,a,b)) = 2 + \left\lceil \frac{n-a-b-4}{3} \right\rceil \tag{4.13}$$

$$ii)\gamma_w(DC(n,a,b)) = a + b + \left\lceil \frac{n-a-b-2}{3} \right\rceil \tag{4.14}$$

İspat: $DC(n,a,b)$ çift kuyruklu yıldız grafında güçlü baskınlık sayısı için;



Şekil 4. 2. $DC(n,a,b)$ Çift Kuyruklu Yıldız (Double Comet) Grafı

$i)$ Güçlü baskınlık sayısı için;

Durum 1: $n-a-b-2 \equiv 0(\bmod 3)$ ise

$$D = \{u_0, v_0, k_3, k_6, \ldots k_{n-a-b-5}, k_{n-a-b-2}\} \tag{4.15}$$

$$D = \{u_0, v_0, k_3, k_6, \ldots k_{n-a-b-5}, k_{n-a-b-3}\} \tag{4.16}$$

$$D = \{u_0, v_0, k_3, k_6, \ldots k_{n-a-b-5}, k_{n-a-b-4}\} \tag{4.17}$$

kümelerinden herhangi birisi minimal güçlü baskın küme olsun. $D=\{u_0,v_0,k_3,k_6,...k_{n-a-b-5},k_{n-a-b-2}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun.

$$\deg(u_0)>\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_a) \tag{4.18}$$

olduğundan u_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $u_1,u_2,...,u_n,k_1$ tepeleri,

$$\deg(v_0)>\deg(v_1)=\deg(v_2)=...=\deg(v_b) \tag{4.19}$$

olduğundan v_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $v_1,v_2,v_3,...,v_n,k_{n-a-b-2}$ tepeleri güçlü bastırılır. Kalan $n-a-b-4$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında gruplanmayan bir tepe kalmaktadır. Bu tepenin güçlü bastırılması için tepenin kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin seçilmesi yeterlidir. Buradan $\dfrac{n-a-b-5}{3}+1+2=\dfrac{n-a-b+4}{3}$ olmak üzere $\gamma_s(DC(n,a,b))\leq\dfrac{n-a-b+4}{3}$ elde edilir.

$D=\{u_0,v_0,k_3,k_6,...k_{n-a-b-5},k_{n-a-b-2}\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. u_0 ve v_0 tepelerinden herhangi birisini atalım. u_0 tepesi kümeden atılsın. $D-\{u_0\}$ kümesi D^* olsun. $D^*=\{v_0,k_3,k_6,...k_{n-a-b-5},k_{n-a-b-2}\}$ minimal güçlü baskın küme olarak alınsın. O halde u_0 tepesinin güçlü bastırdığı k_1 ve $u_1,u_2,...,u_a$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_a)<\deg(u_0)$ ve $\deg(k_1)<\deg(u_0)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(DC(n,a,b))\geq\dfrac{n-a-b+4}{3}$ olarak bulunur. Buradan $\gamma_s(DC(n,a,b))=\dfrac{n-a-b+4}{3}$ olarak elde edilir.

Durum 2: $n-a-b-2\equiv 1(\bmod 3)$ ise

$$D=\{u_0,v_0,k_3,k_6,...k_{n-a-b-6},k_{n-a-b-3}\} \tag{4.20}$$

$$D=\{u_0,v_0,k_3,k_6,...k_{n-a-b-6},k_{n-a-b-4}\} \tag{4.21}$$

kümelerinden herhangi birisi minimal güçlü baskın küme olsun. $D=\{u_0,v_0,k_3,k_6,...k_{n-a-b-6},k_{n-a-b-3}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun.

$$\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) \tag{4.22}$$

olduğundan u_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $u_1, u_2, ..., u_n, k_1$ tepeleri,

$$\deg(v_0) > \deg(v_1) = \deg(v_2) = ... = \deg(v_b) \tag{4.23}$$

olduğundan v_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $v_1, v_2, v_3, ..., v_n, k_{n-a-b-2}$ tepeleri güçlü bastırılır. Kalan $n-a-b-4$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında gruplanmayan iki tepe kalmaktadır. Bu tepenin güçlü bastırılması için bu iki tepeden herhangi bir tepenin seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-a-b-6}{3}+1+2=\frac{n-a-b+3}{3}$ olmak üzere $\gamma_s(DC(n,a,b)) \leq \frac{n-a-b+3}{3}$ elde edilir.

$D=\{u_0, v_0, k_3, k_6, ...k_{n-a-b-6}, k_{n-a-b-3}\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. u_0 ve v_0 tepelerinden herhangi birisini atalım. u_0 tepesi kümeden atılsın. $D-\{u_0\}$ kümesi D^* olsun. $D^*=\{v_0, k_3, k_6, ...k_{n-a-b-6}, k_{n-a-b-3}\}$ minimal güçlü baskın küme olarak alınsın. O halde u_0 tepesinin güçlü bastırdığı k_1 ve $u_1, u_2, ..., u_a$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_a)<\deg(u_0)$ ve $\deg(k_1)<\deg(u_0)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(DC(n,a,b)) \geq \frac{n-a-b+3}{3}$ olarak bulunur. Buradan $\gamma_s(DC(n,a,b)) = \frac{n-a-b+3}{3}$ olarak elde edilir.

Durum 3: $n-a-b-2 \equiv 2(\bmod 3)$ ise $D=\{u_0, v_0, k_3, k_6, ...k_{n-a-b-7}, k_{n-a-b-4}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun.

$$\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) \tag{4.24}$$

olduğundan u_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $u_1, u_2, ..., u_n, k_1$ tepeleri,

$$\deg(v_0) > \deg(v_1) = \deg(v_2) = ... = \deg(v_b) \tag{4.25}$$

olduğundan v_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $v_1, v_2, v_3, ..., v_n, k_{n-a-b-2}$ tepeleri güçlü bastırılır. Kalan $n-a-b-4$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında gruplanmayan tepe kalmamaktadır. Buradan $\gamma_s(DC(n,a,b)) \le \dfrac{n-a-b+2}{3}$ elde edilir.

$D = \{u_0, v_0, k_3, k_6, ...k_{n-a-b-7}, k_{n-a-b-4}\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. u_0 ve v_0 tepelerinden herhangi birisini atalım. u_0 tepesi kümeden atılsın. $D-\{u_0\}$ kümesi D^* olsun. $D^* = \{v_0, k_3, k_6, ...k_{n-a-b-7}, k_{n-a-b-4}\}$ minimal güçlü baskın küme olarak alınsın. O halde u_0 tepesinin güçlü bastırdığı k_1 ve $u_1, u_2, ..., u_a$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) < \deg(u_0)$ ve $\deg(k_1) < \deg(u_0)$ olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(DC(n,a,b)) \ge \dfrac{n-a-b+2}{3}$ olarak bulunur. Buradan $\gamma_s(DC(n,a,b)) = \dfrac{n-a-b+2}{3}$ olarak elde edilir.

Buradan tüm durumlar için güçlü baskınlık sayısı

$$\gamma_s(DC(n,a,b)) = 2 + \left\lceil \frac{n-a-b-4}{3} \right\rceil$$

olarak elde edilir.

ii) Zayıf baskınlık sayısı için;

Durum 4: $n-a-b-2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ ise

$$D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, k_2, k_5, ..., k_{n-a-b-3}, v_1, v_2, ..., v_b\} \tag{4.26}$$

minimal zayıf baskın küme olsun.

$$\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) \tag{4.27}$$

$$\deg(v_0) > \deg(v_1) = \deg(v_2) = ... = \deg(v_b) \tag{4.28}$$

ve $u_1, u_2, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepelerinin aralarında ayrıt olmadığından $u_1, u_2, ..., u_a$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki u_0 tepesi, $v_1, v_2, ..., v_b$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki v_0 tepesi zayıf bastırılır. Kalan $n-a-b-2$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında gruplanmayan tepe kalmamaktadır. $\frac{n-a-b-2}{3}$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\gamma_w(DC(n,a,b)) \le a+b+\frac{n-a-b-2}{3}$ olarak bulunur. $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\}$ minimal zayıf baskın küme olmasın. $u_1,u_2,u_3,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepelerinden herhangi bir tepe kümeden çıkarılsın. u_1 ya da v_1 tepesi kümeden çıkarılsın. $D-\{u_1\}(D-\{v_1\})$ kümesi D^* olsun.

$$D^*=\{u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\} \tag{4.29}$$

ya da

$$D^*=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_2,...,v_b\} \tag{4.30}$$

minimal zayıf baskın küme olsun. Buradan u_0 ve v_0 tepelerinin zayıf bastırılması için komşuluğundaki sırasıyla k_1 ve $k_{n-a-b-2}$ tepelerinin seçilmesi yeterlidir. Fakat $u_1,u_2,u_3,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepelerinin aralarında ayrıt olmadığından zayıf bastırılamazlar. Zayıf baskın kümeye $u_1,u_2,u_3,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepeleri alınmalıdır. $k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3}$ tepelerinden herhangi birisi minimal zayıf baskın kümede olmasın. O halde bir ya da iki tepe daha zayıf baskın kümeye dahil edilmelidir. Bir tepe minimal zayıf baskın kümeyi değiştirmez fakat iki tepe kümenin minimal olmasıyla çelişir ve $\gamma_w(DC(n,a,b)) \ge a+b+\frac{n-a-b-2}{3}$ elde edilir. Buradan minimal zayıf baskın küme $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\}$ ve zayıf baskınlık sayısı

$$\gamma_w(DC(n,a,b)) = a+b+\frac{n-a-b-2}{3}$$

elde edilir.

Durum 5:

$n-a-b-2 \equiv 1(\bmod 3)$ için

$$D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\} \tag{4.31}$$

ya da

$$D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, k_2, k_5, ..., k_{n-a-b-2}, v_1, v_2, ..., v_b\} \tag{4.32}$$

kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olsun.

$$\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) \tag{4.33}$$

$$\deg(v_0) > \deg(v_1) = \deg(v_2) = ... = \deg(v_b) \tag{4.34}$$

ve $u_1, u_2, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepelerinin aralarında ayrıt olmadığından $u_1, u_2, ..., u_a$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki u_0 tepesi ve kendileri, $v_1, v_2, ..., v_b$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki v_0 tepesi ve kendileri zayıf bastırılır. Kalan $n-a-b-2$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında bir tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepe için kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin kümeye alınması yeterlidir. Buradan $\frac{n-a-b-3}{3} + 1 = \frac{n-a-b}{3}$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\gamma_w(DC(n,a,b)) \leq a + b + \frac{n-a-b}{3}$ olarak bulunur. $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, k_2, k_5, ..., k_{n-a-b-3}, v_1, v_2, ..., v_b\}$ minimal zayıf baskın küme olmasın. $u_1, u_2, u_3, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepelerinden herhangi bir tepe kümeden çıkarılsın. u_1 ya da v_1 tepesi kümeden çıkarılsın. $D - \{u_1\}(D - \{v_1\})$ kümesi D^* olsun.

$$D^* = \{u_2, u_3, ..., u_a, k_2, k_5, ..., k_{n-a-b-3}, v_1, v_2, ..., v_b\} \tag{4.35}$$

ya da

$$D^* = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, k_2, k_5, ..., k_{n-a-b-3}, v_2, ..., v_b\} \tag{4.36}$$

minimal zayıf baskın küme olsun. Buradan u_0 ve v_0 tepelerinin zayıf bastırılması için komşuluğundaki sırasıyla k_1 ve $k_{n-a-b-2}$ tepelerinin seçilmesi yeterlidir. Fakat $u_1, u_2, u_3, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepelerinin aralarında ayrıt olmadığından zayıf bastırılamazlar. Zayıf baskın kümeye $u_1, u_2, u_3, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepeleri alınmalıdır. $k_2, k_5, ..., k_{n-a-b-3}$ tepelerinden herhangi birisi minimal zayıf baskın kümede olmasın. O halde bir ya da iki tepe daha zayıf baskın kümeye dahil edilmelidir.

Bir tepe minimal zayıf baskın kümeyi değiştirmez fakat iki tepe kümenin minimal olmasıyla çelişir ve $\gamma_w(DC(n,a,b)) \geq a+b+\dfrac{n-a-b}{3}$ elde edilir. Buradan minimal zayıf baskın küme $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\}$ ve zayıf baskınlık sayısı

$$\gamma_w(DC(n,a,b)) = a+b+\frac{n-a-b}{3}$$

elde edilir.

Durum 6: $n-a-b-2 \equiv 2(\bmod 3)$ ise

$$D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\} \tag{4.37}$$

ya da

$$D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-2},v_1,v_2,...,v_b\} \tag{4.38}$$

kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olsun.

$$\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) \tag{4.39}$$

$$\deg(v_0) > \deg(v_1) = \deg(v_2) = ... = \deg(v_b) \tag{4.40}$$

ve $u_1,u_2,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepelerinin aralarında ayrıt olmadığından $u_1,u_2,...,u_a$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki u_0 tepesi ve kendileri, $v_1,v_2,...,v_b$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki v_0 tepesi ve kendileri zayıf bastırılır. Kalan $n-a-b-2$ tepe için grafın tepeleri üçerli gruplara ayrıldığında iki tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepe için iki tepeden bir tepenin kümeye alınması yeterlidir. Buradan $\dfrac{n-a-b-4}{3}+1=\dfrac{n-a-b-1}{3}$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan

$$\gamma_w(DC(n,a,b)) \leq a+b+\frac{n-a-b-1}{3}$$

olarak bulunur.

$D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\}$ minimal zayıf baskın küme olmasın. $u_1,u_2,u_3,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepelerinden herhangi bir tepe kümeden çıkarılsın. u_1 ya da v_1 tepesi kümeden çıkarılsın. $D-\{u_1\}(D-\{v_1\})$ kümesi D^* olsun.

$$D^*=\{u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\} \tag{4.41}$$

ya da

$$D^*=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_2,...,v_b\} \tag{4.42}$$

minimal zayıf baskın küme olsun. Buradan u_0 ve v_0 tepelerinin zayıf bastırılması için komşuluğundaki sırasıyla k_1 ve $k_{n-a-b-2}$ tepelerinin seçilmesi yeterlidir. Fakat $u_1,u_2,u_3,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepelerinin aralarında ayrıt olmadığından zayıf bastırılamazlar. Zayıf baskın kümeye $u_1,u_2,u_3,...,u_a$ ve $v_1,v_2,...,v_b$ tepeleri alınmalıdır. $k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3}$ tepelerinden herhangi birisi minimal zayıf baskın kümede olmasın. O halde bir ya da iki tepe daha zayıf baskın kümeye dahil edilmelidir. Bir tepe minimal zayıf baskın kümeyi değiştirmez fakat iki tepe kümenin minimal olmasıyla çelişir ve $\gamma_w(DC(n,a,b))\geq a+b+\dfrac{n-a-b-1}{3}$ elde edilir. Buradan minimal zayıf baskın küme $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_a,k_2,k_5,...,k_{n-a-b-3},v_1,v_2,...,v_b\}$ ve zayıf baskınlık sayısı

$$\gamma_w(DC(n,a,b))=a+b+\frac{n-a-b-1}{3}$$

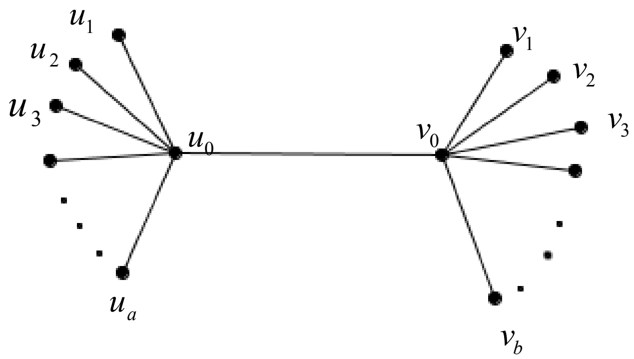
elde edilir.

Buradan tüm durumlar için zayıf baskınlık sayısı

$$\gamma_w(DC(n,a,b))=a+b+\left\lceil\frac{n-a-b-2}{3}\right\rceil$$

olarak bulunur. □

Teorem 4.9. $a,b \geq 0$ olmak üzere $S(\mathrm{a,b})$ çift yıldız grafında $\gamma_s(S(a,b)) = 2$ ve $\gamma_w(S(a,b)) = a+b$ ' dir.



Şekil 4. 3. $\mathrm{S(a,b)}$ Çift Yıldız Grafı

İspat: $D = \{u_0, v_0\}$ minimal güçlü baskın küme olmak üzere güçlü baskınlık sayısı için $\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_a) = 1$ olduğundan u_0 tepesi seçilerek komşuluğundaki $u_1, u_2, ..., u_a$ tepeleri yani $a+1$ tepe ve v_0 tepesi seçilerek $\deg(v_0) > \deg(v_1) = \deg(v_2) = ... = \deg(v_b) = 1$ olduğundan komşuluğundaki $v_1, v_2, ..., v_b$ tepeleri yani $b+1$ tepe güçlü bastırılır ve buradan $\gamma_s(S(a,b)) \leq 2$ elde edilir. $D = \{u_0, v_0\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. O halde $u_1, u_2, u_3, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepeleri arasında ayrıt olmadığından güçlü bastırılamazlar ve $\gamma_s(S(a,b)) \geq 2$ olarak bulunur. Buradan $\gamma_s(S(a,b)) = 2$ elde edilir.

$D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, v_1, v_2, ..., v_b\}$ minimal zayıf baskın küme olmak üzere zayıf baskınlık sayısı için $u_1, u_2, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepeleri aralarında ayrıt olmadığından ve u_0 ile v_0 tepelerini zayıf bastırdıkları için zayıf baskın kümede bulunurlar ve $\gamma_w(S(a,b)) \leq a+b$ bulunur. $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, v_1, v_2, ..., v_b\}$ minimal zayıf baskın küme olmasın. u_0 tepesi $u_1, u_2, ..., u_a$ ve v_0 tepesi $v_1, v_2, ..., v_b$ tepelerinden herhangi biri seçilerek zayıf bastırılabilir. Fakat $u_1, u_2, ..., u_a$ ve $v_1, v_2, ..., v_b$ tepelerinden seçilmeyen tepeler zayıf bastırılamaz ve $\gamma_w(S(a,b)) \geq a+b$ bulunur. Buradan $D = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_a, v_1, v_2, ..., v_b\}$ ve zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(S(a,b)) = a+b$ elde edilir. □

Önerme 4.10. $P_n \Theta K_1$ tarak (comb) grafında $\gamma_s(P_n^+) = n$ ve $\gamma_w(P_n^+) = n$ dir.

İspat : $P_n \Theta K_1$ tarak grafında P_n grafındaki n tepe güçlü baskın kümeyi ve bir dereceli uç tepeler zayıf baskın kümeyi oluşturur. Buradan teorem 2.40' tan $\gamma_s(P_n^+) = n$ ve $\gamma_w(P_n^+) = n$ elde edilir. □

Teorem 4.11. $n \geq 2$ olmak üzere dairesel merdiven (circular ladder) CL_n grafında

$$\gamma_s(CL_n) = \gamma_w(CL_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{4.43}$$

İspat: $n \geq 2$ olmak üzere 3 düzenli (regüler), $2n$ tepeli CL_n grafında güçlü (zayıf) baskınlık sayısı için $u_1, u_2, ..., u_{2n} \in V(CL_n)$ ve $k \in \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ olmak üzere $\forall u_k \in V(CL_n)$ tepesi kendisi ile birlikte dört tepeyi güçlü (zayıf) bastırır. Grafın tepeleri dörderli gruplandırıldığında geriye kalan bir, iki, ve üç tepe için bir tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\Delta(CL_n) = 3 = \delta(CL_n)$ olduğundan $\left\lfloor \frac{2n}{\Delta(CL_n)+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dir. Buradan $\gamma_s(CL_n) = \gamma_w(CL_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ elde edilir. □

C_n^m rüzgar gülü grafında güçlü ve zayıf baskınlık sayıları ile ilgili teorem aşağıda verilmiştir. C_n^m rüzgar gülü grafının güçlü baskınlık sayısı için 2017 yılında Vaidya ve Mehta yazarlarının "Strong Domination Number Of Some Cycle Related Graphs" adlı bir makalesinde bir sonuç olarak verilmiştir. Ancak burada teoremin ispatına farklı olarak yaklaşılmıştır [33].

Teorem 4.12. C_n^m rüzgar gülü (windmill) grafında

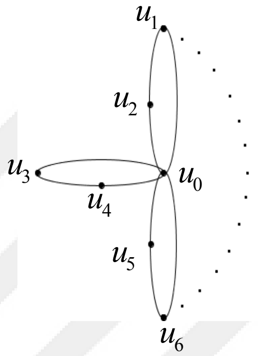
$i)$ $n = 3$ için $\gamma_s(C_3^m) = 1$ ve $\gamma_w(C_3^m) = m$ ' dir.

$ii)$ $n > 3$ olmak üzere C_n^m rüzgar gülü (windmill) grafında

$$\gamma_s(C_n^m) = m\left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil + 1 \qquad \text{ve} \qquad \gamma_w(C_n^m) = \begin{cases} m\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 & n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ m\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & \textit{diğer durumlarda} \end{cases} .$$

İspat:

$i)$ C_3^m grafında $n = 3$ için

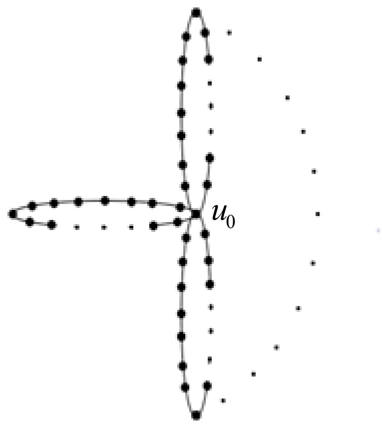


Şekil 4.4. C_3^m Rüzgar Gülü (windmill) Grafı

Güçlü baskınlık sayısı için $D_s = \{u_0\}$ minimal baskın küme olmak üzere u_0 tepesi seçilerek C_3^m grafının tüm tepeleri güçlü bastırılır ve $\gamma_s(C_3^m) \leq 1$ olarak bulunur. $D_s = \{u_0\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. Buradan $\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_{2m})$ olduğundan grafın diğer tepeleri güçlü bastırılamaz ve $\gamma_s(C_3^m) \geq 1$ elde edilir. Buradan $D_s = \{\mathrm{u}_0\}$ minimal güçlü baskın küme ve güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(C_3^m) = 1$ elde edilir.

Zayıf baskınlık sayısı için $D_w = \{u_1, u_3, u_6, .., u_{2m}\}$, $D_w = \{u_1, u_4, u_6, .., u_{2m}\}$, $D_w = \{u_2, u_4, u_6, .., u_{2m}\}$, $D_w = \{u_1, u_4, u_6, .., u_{2m-1}\}$, $D_w = \{u_1, u_4, u_5, .., u_{2m-1}\}$, $D_w = \{u_1, u_3, u_5, .., u_{2m-1}\}$, $D_w = \{u_2, u_3, u_5, .., u_{2m}\}$, $D_w = \{u_1, u_3, u_5, .., u_{2m}\}$ kümelerinden herhangi biri zayıf baskın küme olarak seçilebilir. $D_w = \{u_1, u_3, u_5, .., u_{2m-1}\}$ minimal zayıf baskın küme olsun. Zayıf baskınlık sayısı için m kopyadan (yapraktan) bir tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan m kopya için m tepe seçilir ve $\gamma_w(C_3^m) \le m$ elde edilir. D minimal zayıf baskın kümesi bu kümlerden herhangi birisi olmasın. O halde $D = \{u_0\}$ olmalıdır. $\deg(u_0) > \deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_{2m})$ olduğundan zayıf baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_w(C_3^m) \ge m$ elde edilir. Buradan $\gamma_w(C_3^m) = m$ olarak bulunur.

$ii)$ C_n^m grafında $n > 3$ olmak üzere;



Şekil 4.5. C_n^m Rüzgar Gülü (windmill) Grafı

Güçlü baskınlık sayısı için:

Durum 1: $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ ise

$$D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29} .., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-3)}\} \quad (4.44)$$

kümesi minimal güçlü baskın küme olsun. u_0 tepesi seçilerek

$$\deg(u_{11}) = \deg(u_{1(n-1)}) < \deg(u_0) \quad (4.45)$$
$$\deg(u_{21}) = \deg(u_{2(n-1)}) < \deg(u_0) \quad (4.46)$$
$$\deg(u_{31}) = \deg(u_{3(n-1)}) < \deg(u_0) \quad (4.47)$$
$$\vdots$$
$$\deg(u_{m1}) = \deg(u_{m(n-1)}) < \deg(u_0) \quad (4.48)$$

olduğundan m kopyadan iki tepe bastırılmış olur. Buradan $2m+1$ tepe güçlü bastırılmış olur. Her bir kopyada $n-3$ tepe kalır ve bu tepelerin dereceleri

$$\begin{gathered}
\deg(u_{12}) = \deg(u_{13}) = \deg(u_{14}) = ... = \deg(u_{1(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{1(n-2)}) = 2 \\
\deg(u_{22}) = \deg(u_{23}) = \deg(u_{24}) = ... = \deg(u_{2(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{2(n-2)}) = 2 \\
\deg(u_{32}) = \deg(u_{33}) = \deg(u_{32}) = ... = \deg(u_{3(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{3(n-2)}) = 2 \\
\vdots \\
\deg(u_{m2}) = \deg(u_{m3}) = \deg(u_{m4}) = ... = \deg(u_{\mathrm{m(n-3)}}) = \deg(u_{\mathrm{m}(n-2)}) = 2
\end{gathered}$$

olduğundan üçerli gruplara ayrıldığında gruplanmayan tepe kalmamaktadır. Buradan $\frac{n-3}{3}$ tepe tarafından güçlü bastırılır. m kopya için $m\left(\frac{n-3}{3}\right)$ olur ve buradan $\gamma_s(C_n^m) \le m\left(\frac{n-3}{3}\right)+1$ olarak bulunur.

$D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29} .., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-3)}\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. u_0 tepesi silinerek $D-\{u_0\}$ kümesi D^* olmak üzere $D^* = \{u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29} .., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-3)}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. Buradan u_0 tepesini güçlü bastırabilmek için $\{u_{11}, u_{1(n-1)}\}, \{u_{21}, u_{2(n-1)}\}, ..., \{u_{m1}, u_{m(n-1)}\}$ kümelerinin herhangi birisinden bir tepe seçilmesi u_0 tepesinin bastırılması için yeterlidir. Fakat

$$\deg(u_{11}) = \deg(u_{1(n-1)}) = \deg(u_{21}) = \deg(u_{2(n-1)}) = ... = \deg(u_{m1}) = \deg(u_{m(n-1)}) = 2 < \deg(u_0) = 2m$$

olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(C_n^m) \ge m\left(\frac{n-3}{3}\right)+1$ olarak bulunur.

Buradan $D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29} .., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-3)}\}$ minimal güçlü baskın küme olup güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(C_n^m) = m\left(\frac{n-3}{3}\right)+1$ elde edilir.

Durum 2: $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$

$$D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, ..., u_{1(n-2)}, u_{23}, u_{26}, u_{29} .., u_{2(n-2)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-2)}\} \quad (4.49)$$

kümesi minimal güçlü baskın küme olsun. u_0 tepesi seçilerek

$$\begin{gathered}\deg(u_{11})=\deg(u_{1(n-1)})<\deg(u_0)\\ \deg(u_{21})=\deg(u_{2(n-1)})<\deg(u_0)\\ \deg(u_{31})=\deg(u_{3(n-1)})<\deg(u_0)\\ \vdots\\ \deg(u_{m1})=\deg(u_{m(n-1)})<\deg(u_0)\end{gathered}$$

olduğundan m kopyadan iki tepe bastırılmış olur. Buradan $2m+1$ tepe güçlü bastırılmış olur. Her bir kopyada $n-3$ tepe kalır ve bu tepelerin dereceleri

$$\begin{gathered}\deg(u_{12})=\deg(u_{13})=\deg(u_{14})=...=\deg(u_{1(\mathrm{n}-3)})=\deg(u_{1(n-2)})=2\\ \deg(u_{22})=\deg(u_{23})=\deg(u_{24})=...=\deg(u_{2(\mathrm{n}-3)})=\deg(u_{2(n-2)})=2\\ \deg(u_{32})=\deg(u_{33})=\deg(u_{32})=...=\deg(u_{3(\mathrm{n}-3)})=\deg(u_{3(n-2)})=2\\ \vdots\\ \deg(u_{m2})=\deg(u_{m3})=\deg(u_{m4})=...=\deg(u_{\mathrm{m(n-3)}})=\deg(u_{\mathrm{m}(n-2)})=2\end{gathered}$$

olduğundan üçerli gruplara ayrıldığında bir tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepenin güçlü bastırılması için kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-4}{3}+1$ tepe tarafından güçlü bastırılır. m kopya için $m\left(\frac{n-4}{3}+1\right)$ olur ve buradan $\gamma_s(C_n^m)\le m\left(\frac{n-4}{3}+1\right)+1$ olarak bulunur.

$D=\{u_0,u_{13},u_{16},...,u_{1(n-2)},u_{23},u_{26},u_{29}..,u_{2(n-2)},...,u_{m3},u_{m6},...,u_{m(n-2)}\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. u_0 tepesi silinerek $D-\{u_0\}$ kümesi D^* olmak üzere $D^*=\{u_{13},u_{16},...,u_{1(n-2)},u_{23},u_{26},u_{29}..,u_{2(n-2)},...,u_{m3},u_{m6},...,u_{m(n-2)}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. Buradan u_0 tepesini güçlü bastırabilmek için $\{u_{11},u_{1(n-1)}\},\{u_{21},u_{2(n-1)}\},...,\{u_{m1},u_{m(n-1)}\}$ kümelerinin herhangi birisinden bir tepe seçilmesi u_0 tepesinin bastırılması için yeterlidir. Fakat

$$\deg(u_{11})=\deg(u_{1(n-1)})=\deg(u_{21})=\deg(u_{2(n-1)})=...=\deg(u_{m1})=\deg(u_{m(n-1)})=2<\deg(u_0)=2m$$

olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(C_n^m)\ge m\left(\frac{n-4}{3}+1\right)+1$ olarak bulunur. Buradan $D=\{u_0,u_{13},u_{16},...,u_{1(n-2)},u_{23},u_{26},u_{29}..,u_{2(n-2)},...,u_{m3},u_{m6},...,u_{m(n-2)}\}$

minimal güçlü baskın küme olup güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(C_n^m) = m\left(\frac{n-4}{3}+1\right)+1$

elde edilir.

Durum 3: $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ ise

$$D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29}.., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-2)}\} \quad (4.50)$$

$$D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29}.., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-3)}\} \quad (4.51)$$

kümelerinden herhangi birisi minimal güçlü baskın küme olsun.

$D = \{u_0, u_{13}, u_{16}, u_{19}, ..., u_{1(n-3)}, u_{23}, u_{26}, u_{29}.., u_{2(n-3)}, ..., u_{m3}, u_{m6}, ..., u_{m(n-3)}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. u_0 tepesi seçilerek

$$\begin{gathered}
\deg(u_{11}) = \deg(u_{1(n-1)}) < \deg(u_0) \\
\deg(u_{21}) = \deg(u_{2(n-1)}) < \deg(u_0) \\
\deg(u_{31}) = \deg(u_{3(n-1)}) < \deg(u_0) \\
\deg(u_{m1}) = \deg(u_{m(n-1)}) < \deg(u_0)
\end{gathered}$$

olduğundan m kopyadan iki tepe bastırılmış olur. Buradan $2m+1$ tepe güçlü bastırılmış olur. Her bir kopyada $n-3$ tepe kalır ve bu tepelerin dereceleri

$$\begin{gathered}
\deg(u_{12}) = \deg(u_{13}) = \deg(u_{14}) = ... = \deg(u_{1(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{1(n-2)}) = 2 \\
\deg(u_{22}) = \deg(u_{23}) = \deg(u_{24}) = ... = \deg(u_{2(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{2(n-2)}) = 2 \\
\deg(u_{32}) = \deg(u_{33}) = \deg(u_{32}) = ... = \deg(u_{3(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{3(n-2)}) = 2 \\
\vdots \\
\deg(u_{m2}) = \deg(u_{m3}) = \deg(u_{m4}) = ... = \deg(u_{\mathrm{m}(\mathrm{n}-3)}) = \deg(u_{\mathrm{m}(n-2)}) = 2
\end{gathered}$$

olduğundan üçerli gruplara ayrıldığında iki tepe açıkta kalmaktadır. Bu tepenin güçlü bastırılması için bu iki tepeden birisinin güçlü baskın kümeye seçilmesi yeterlidir. Buradan $\frac{n-5}{3}+1$ tepe tarafından güçlü bastırılır. m kopya için $m\left(\frac{n-5}{3}+1\right)$ olur ve buradan $\gamma_s(C_n^m) \leq m\left(\frac{n-5}{3}+1\right)+1$ olarak bulunur.

$$D=\{u_0,u_{13},u_{16},u_{19},...,u_{1(n-3)},u_{23},u_{26},u_{29}..,u_{2(n-3)},...,u_{m3},u_{m6},...,u_{m(n-3)}\}$$

minimal güçlü baskın küme olmasın. u_0 tepesi silinerek $D-\{u_0\}$ kümesi D^* olmak üzere $D^*=\{u_{13},u_{16},u_{19},...,u_{1(n-3)},u_{23},u_{26},u_{29}..,u_{2(n-3)},...,u_{m3},u_{m6},...,u_{m(n-3)}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. Buradan u_0 tepesini güçlü bastırabilmek için $\{u_{11},u_{1(n-1)}\},\{u_{21},u_{2(n-1)}\},...,\{u_{m1},u_{m(n-1)}\}$ kümelerinin herhangi birisinden bir tepe seçilmesi u_0 tepesinin bastırılması için yeterlidir. Fakat

$$\deg(u_{11})=\deg(u_{1(n-1)})=\deg(u_{21})=\deg(u_{2(n-1)})=...=\deg(u_{m1})=\deg(u_{m(n-1)})=2<\deg(u_0)=2m$$

olduğundan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(C_n^m)\geq m\left(\frac{n-5}{3}+1\right)+1$ olarak bulunur. Buradan

$$D=\{u_0,u_{13},u_{16},u_{19},...,u_{1(n-3)},u_{23},u_{26},u_{29}..,u_{2(n-3)},...,u_{m3},u_{m6},...,u_{m(n-3)}\}$$

minimal güçlü baskın küme olup güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(C_n^m)=m\left(\frac{n-5}{3}+1\right)+1$ elde edilir.

Tüm durumlar için güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(C_n^m)=m\left\lceil\frac{n-3}{3}\right\rceil+1$ olarak elde edilir.

Zayıf baskınlık sayısı için;

Durum 4: $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ ise $D=\{u_{12},u_{15},...,u_{1(n-1)},...,u_{m2},u_{m5},...,u_{m(n-1)}\}$ kümesi minimal zayıf baskın küme olsun.

$$\begin{gathered}\deg(u_{11})=\deg(u_{1(n-1)})<\deg(u_0)\\ \deg(u_{21})=\deg(u_{2(n-1)})<\deg(u_0)\\ \deg(u_{31})=\deg(u_{3(n-1)})<\deg(u_0)\\ \vdots\\ \deg(u_{m1})=\deg(u_{m(n-1)})<\deg(u_0)\end{gathered}$$

olduğundan $\{u_{11},u_{21},u_{31},...,u_{m1}\}$ ya da $\{u_{1(n-1)},u_{2(n-1)},u_{3(n-1)},...,u_{m(n-1)}\}$ kümelerindeki tepelerden herhangi birisi zayıf baskın kümeye alınarak u_0 tepesi zayıf bastırılır. u_0

tepesini zayıf bastıran tepe bulunduğu yaprakta u_0 ve komşuluğundaki bir tepeyi zayıf bastırır. u_0 tepesini zayıf bastıran yaprakta $n-3$ tepe diğer yapraklarda zayıf bastırılmamış $n-1$ tepe bulunmaktadır. C_n^m grafının u_0 tepesi hariç diğer tüm tepelerde $\deg(u_{11}) = \deg(u_{12}) = ... = \deg(u_{m(n-1)}) = 2$ olduğundan $n-3$ tepe üçerli gruplandığında zayıf bastırılmamış tepe bulunmamaktadır. $n-1$ tepe üçerli gruplandığında iki tepe zayıf bastırılamamaktadır. Bu iki tepe için bu tepelerden birisinin seçilmesi yeterlidir. Buradan $1+\frac{n-3}{3}+(\mathrm{m}-1)\left(1+\frac{n-3}{3}\right)=m\frac{n}{3}$ olmak üzere $\gamma_w(C_n^m) \le m\frac{n}{3}$ olarak elde edilir. $D = \{u_{12}, u_{15}, ..., u_{1(n-1)}, ..., u_{m2}, u_{m5}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümesi minimal zayıf baskın küme olmasın. $\{u_{11}, u_{21}, u_{31}, ..., u_{m1}\}$ ya da $\{u_{1(n-1)}, u_{2(n-1)}, u_{3(n-1)}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümelerinden minimal zayıf baskın kümeye eleman alınmasın. O halde u_0 tepesi zayıf bastırılamaz ve $\gamma_w(C_n^m) \ge m\frac{n}{3}$ olarak elde edilir. Buradan $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ için $\gamma_w(C_n^m) = m\frac{n}{3}$ olarak bulunur.

Durum 5: $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ için

$D = \{u_{12}, u_{15}, ..., u_{1(n-2)}, u_{21}, u_{22}, u_{25}, ..., u_{2(n-2)}, ..., u_{m2}, u_{m5}, ..., u_{m(n-2)}\}$ ya da u_{21} elemanı yerine $\{u_{1(n-1)}, u_{2(n-1)}, u_{3(n-1)}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümesindeki tepelerden herhangisi birisi seçilerek zayıf baskın küme elde edilir.

$D = \{u_{12}, u_{15}, ..., u_{1(n-2)}, u_{21}, u_{22}, u_{25}, ..., u_{2(n-2)}, ..., u_{m2}, u_{m5}, ..., u_{m(n-2)}\}$ kümesi minimal zayıf baskın küme olsun.

$$\begin{gathered}
\deg(u_{11}) = \deg(u_{1(n-1)}) < \deg(u_0) \\
\deg(u_{21}) = \deg(u_{2(n-1)}) < \deg(u_0) \\
\deg(u_{31}) = \deg(u_{3(n-1)}) < \deg(u_0) \\
\vdots \\
\deg(u_{m1}) = \deg(u_{m(n-1)}) < \deg(u_0)
\end{gathered}$$

olduğundan $\{u_{11}, u_{21}, u_{31}, ..., u_{m1}\}$ ya da $\{u_{1(n-1)}, u_{2(n-1)}, u_{3(n-1)}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümelerindeki tepelerden herhangi birisi zayıf baskın kümeye alınarak u_0 tepesi zayıf bastırılır. u_0

tepesini zayıf bastıran tepe bulunduğu yaprakta u_0 ve komşuluğundaki bir tepeyi zayıf bastırır. u_0 tepesini zayıf bastıran yaprakta $n-3$ tepe diğer yapraklarda zayıf bastırılmamış $n-1$ tepe bulunmaktadır. C_n^m grafının u_0 tepesi hariç diğer tüm tepelerde $\deg(u_{11}) = \deg(u_{12}) = ... = \deg(u_{m(n-1)}) = 2$ olduğundan $n-3$ tepe üçerli gruplandığında zayıf bastırılmamış bir tepe bulunmaktadır. Bu tepenin zayıf bastırılması için kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin zayıf baskın kümeye seçilmesi yeterlidir. $n-1$ tepe üçerli gruplandığında tüm tepeler zayıf bastırılmaktadır. Buradan $1+1+\frac{n-4}{3}+(\mathrm{m}-1)\left(\frac{n-1}{3}\right)=1+m\frac{n-1}{3}$ olmak üzere $\gamma_w(C_n^m) \leq 1+m\frac{n-1}{3}$ olarak elde edilir.

$D = \{u_{12}, u_{15}, ..., u_{1(n-2)}, u_{21}, u_{22}, u_{25}, ..., u_{2(n-2)}, ..., u_{m2}, u_{m5}, ..., u_{m(n-2)}\}$ kümesi minimal zayıf baskın küme olmasın. $\{u_{11}, u_{21}, u_{31}, ..., u_{m1}\}$ ya da $\{u_{1(n-1)}, u_{2(n-1)}, u_{3(n-1)}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümelerinden minimal zayıf baskın kümeye eleman alınmasın. O halde u_0 tepesi zayıf bastırılamaz ve $\gamma_w(C_n^m) \geq 1+m\frac{n-1}{3}$ olarak elde edilir. Buradan $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$ için $\gamma_w(C_n^m) = 1+m\frac{n-1}{3} = 1+m\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ olarak bulunur.

Durum 6: $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ ise

$$D = \{u_{11}, u_{13}, u_{16}, ..., u_{1(n-2)}, u_{21}, u_{23}, ..., u_{2(n-2)}, ..., u_{m1}, u_{m3}, ..., u_{m(n-2)}\} \tag{4.52}$$

ya da

$$D = \{u_{11}, u_{13}, u_{16}, ..., u_{1(n-1)}, u_{21}, u_{23}, ..., u_{2(n-1)}, ..., u_{m2}, u_{m3}, ..., u_{m(n-1)}\} \tag{4.53}$$

kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme olarak seçilebilir. Buradan $D = \{u_{11}, u_{13}, u_{16}, ..., u_{1(n-2)}, u_{21}, u_{23}, ..., u_{2(n-2)}, ..., u_{m1}, u_{m3}, ..., u_{m(n-2)}\}$ kümesi minimal zayıf baskın küme olsun.

$$\begin{gathered}\deg(u_{11}) = \deg(u_{1(n-1)}) < \deg(u_0) \\ \deg(u_{21}) = \deg(u_{2(n-1)}) < \deg(u_0) \\ \deg(u_{31}) = \deg(u_{3(n-1)}) < \deg(u_0) \\ \vdots \\ \deg(u_{m1}) = \deg(u_{m(n-1)}) < \deg(u_0)\end{gathered}$$

olduğundan $\{u_{11}, u_{21}, u_{31}, ..., u_{m1}\}$ ya da $\{u_{1(n-1)}, u_{2(n-1)}, u_{3(n-1)}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümelerindeki tepelerden herhangi birisi zayıf baskın kümeye alınarak u_0 tepesi zayıf bastırılır. u_0 tepesini zayıf bastıran tepe bulunduğu yaprakta u_0 ve komşuluğundaki bir tepeyi zayıf bastırır. u_0 tepesini zayıf bastıran yaprakta $n-3$ tepe diğer yapraklarda zayıf bastırılmamış $n-1$ tepe bulunmaktadır. C_n^m grafının u_0 tepesi hariç diğer tüm tepelerde

$$\deg(u_{11}) = \deg(u_{12}) = ... = \deg(u_{m(n-1)}) = 2$$

olduğundan $n-3$ tepe üçerli gruplandığında zayıf bastırılmamış iki tepe bulunmaktadır. Bu iki tepenin zayıf bastırılması için bu iki tepeden bir tepenin zayıf baskın kümeye seçilmesi yeterlidir. $n-1$ tepe üçerli gruplandığında bir tepe zayıf bastırılamamaktadır. Bu tepenin zayıf bastırılması için kendisi ya da komşuluğundaki bir tepenin zayıf baskın kümeye seçilmesi yeterlidir. Buradan tüm tepeler zayıf bastırılmaktadır. Buradan $1+1+\frac{n-5}{3}+(\mathrm{m}-1)\left(\frac{n-2}{3}+1\right) = m\frac{n+1}{3}$ olmak üzere $\gamma_w(C_n^m) \le m\frac{n+1}{3}$ olarak elde edilir.

$$D = \{u_{12}, u_{15}, ..., u_{1(n-2)}, u_{21}, u_{22}, u_{25}, ..., u_{2(n-2)}, ..., u_{m2}, u_{m5}, ..., u_{m(n-2)}\}$$

kümesi minimal zayıf baskın küme olmasın. $\{u_{11}, u_{21}, u_{31}, ..., u_{m1}\}$ ya da $\{u_{1(n-1)}, u_{2(n-1)}, u_{3(n-1)}, ..., u_{m(n-1)}\}$ kümelerinden minimal zayıf baskın kümeye eleman alınmasın. O halde u_0 tepesi zayıf bastırılamaz ve $\gamma_w(C_n^m) \ge m\frac{n+1}{3}$ olarak elde edilir.

Buradan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ için $\gamma_w(C_n^m) = m\frac{n+1}{3} = m\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ olarak bulunur.

Buradan tüm durumlar için zayıf baskınlık sayısı

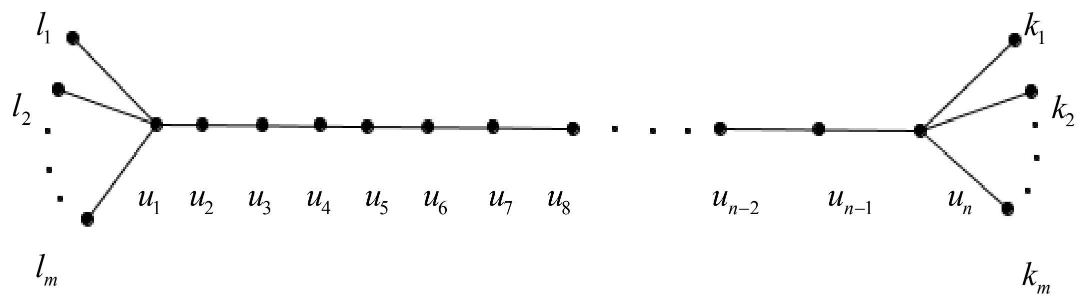
$$\gamma_w(C_n^m) = \begin{cases} m\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 & n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ m\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak elde edilir. □

Teorem 4.13. Bir $P_{\mathrm{p,t}}$ dikenli yol (thorn rod) grafında

$$i)\gamma_s(P_{p,t}) = 2 + \left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil \tag{4.54}$$

$$ii)\gamma_w(P_{p,t}) = 2m + \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil \tag{4.55}$$



Şekil 4.6. $p = n,\ t = m+1$ olmak üzere $P_{\mathrm{p,t}}$ dikenli yol (thorn rod) graf

İspat: $P_{\mathrm{p,t}}$ dikenli yol (thorn rod) grafında

$i)$ $p = n,\ t = m+1$ olmak üzere güçlü baskınlık sayısı için,

$D = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-3}, u_n\}$ ve $D = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-2}, u_n\}$ kümelerinden herhangi birisi seçilsin. $\deg(u_1) = \deg(u_n) = m+1$ olduğundan u_1 ve u_n tepeleri seçilerek komşuluklarındaki $m+1$ tepe ile u_1 ve u_n tepeleri güçlü bastırılır. $u_3 u_4 ... u_{n-2}$ yol grafı için önerme 4.1' den $\left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan $\gamma_s(P_{p,t}) \le 2 + \left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil$ bulunur.

$D = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-3}, u_n\}$ ve $D = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-2}, u_n\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. Bu kümelerden u_1 ya da u_n tepelerinden herhangi birisi olmasın. u_n tepesi güçlü baskın kümede olmasın. $D - \{u_n\}(D - \{u_1\})$ kümesi D^* olmak üzere $D^* = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-3}\}$ ya da $D^* = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n\text{-}2}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. O halde u_n tepesinin güçlü bastırdığı u_n komşuluğundaki u_{n-1} ya da $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ tepelerinin güçlü baskın kümeye alınması gerekir. Buradan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz. $u_4, u_7, ..., u_{n-3}$ ya da $u_4, u_7, ..., u_{n-2}$ tepelerinden herhangi birisi güçlü baskın kümede olmasın. O halde kümeden atılan o tepeyi bastırabilmek için komşuluğundaki bir ya da iki tepeyi güçlü baskın kümeye almamız gerekir. Bir tepe güçlü baskınlık sayımızı değiştirmez ama iki tepe alınması güçlü baskın kümenin minimal olmasıyla çelişir. Buradan $\gamma_s(P_{p,t}) \ge 2 + \left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil$ bulunur. $D = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-3}, u_n\}$ ve $D = \{u_1, u_4, u_7, ..., u_{n-2}, u_n\}$ minimal güçlü baskın küme ve güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(P_{p,t}) = 2 + \left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil$ olarak elde edilir.

ii) $P_{p,t}$ thorn rod grafında $p = n, \ t = m + 1$ olmak üzere zayıf baskınlık sayısı için,

$$D = \{l_1, l_2, ..., l_m, u_3, u_6, u_9, ..., u_{n-5}, u_{n-2}, k_1, k_2, k_3, ..., k_m\} \tag{4.56}$$

ya da

$$D = \{l_1, l_2, ..., l_m, u_3, u_6, u_9, ..., u_{n-4}, u_{n-1}, k_1, k_2, k_3, ..., k_m\} \tag{4.57}$$

kümelerinden birisi zayıf baskın küme olsun.

$$\deg(l_1) = \deg(l_2) = ... = \deg(l_m) < \deg(u_1) \tag{4.58}$$

$$\deg(k_1) = \deg(k_2) = ... = \deg(k_m) < \deg(u_n) \tag{4.59}$$

olduğundan $\{l_1,l_2,l_3,...,l_m\}$ kümesinden bir tepe seçilerek u_1 tepesi ve $\{k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$ kümesinden bir tepe seçilerek u_n tepesi zayıf bastırılır. Geriye kalan $u_2u_3u_4...u_{n-2}u_{n-1}$ yol grafı için önerme 4.1' den $\left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan

$$D=\{l_1,l_2,...,l_m,u_3,u_6,u_9,...,u_{n-5},u_{n-2},k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$$

ve

$$D=\{l_1,l_2,...,l_m,u_3,u_6,u_9,...,u_{n-4},u_{n-1},k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$$

kümeleri zayıf baskın küme ve $\gamma_w(P_{p,t}) \le 2m+\left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$ olarak bulunur.

$$D=\{l_1,l_2,...,l_m,u_3,u_6,u_9,...,u_{n-5},u_{n-2},k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$$

ya da

$$D=\{l_1,l_2,...,l_m,u_3,u_6,u_9,...,u_{n-4},u_{n-1},k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$$

kümeleri minimal zayıf baskın küme olmasın. $\{l_1,l_2,l_3,...,l_m\}$ ya da $\{k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$ tepelerinden herhangi birisi zayıf baskın kümede olmasın. k_m zayıf baskın kümede olmasın ve $D^*=\{l_1,l_2,...,l_m,u_3,u_6,u_9,...,u_{n-4},u_{n-1},k_1,k_2,k_3,...,k_{m-1}\}$ minimal zayıf baskın küme olsun. Buradan kümede bulunmayan k_m tepesinin komşuluğunda kendisinden daha büyük dereceli tepe bulunduğu için başka tepe seçilerek zayıf bastırılamaz. $u_3,u_6,u_9,...,u_{n-5},u_{n-2}$ ya da $u_3,u_6,u_9,...,u_{n-4},u_{n-1}$ tepelerinden herhangi birisi zayıf baskın kümede olmasın. O halde atılan tepeyi ve atılan tepenin komşuluğundaki tepeleri zayıf bastırabilmek için bir ya da iki tepenin zayıf baskın kümeye alınması gerekir. Bir tepe zayıf baskın kümenin eleman sayısını değiştirmezken iki tepe kümenin minimal oluşu ile çelişir. Buradan

$$D=\{l_1,l_2,...,l_m,u_3,u_6,u_9,...,u_{n-4},u_{n-1},k_1,k_2,k_3,...,k_m\}$$

minimal zayıf baskın küme ve $\gamma_w(P_{p,t}) \geq 2m + \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$ bulunur. Böylece zayıf baskınlık sayısı

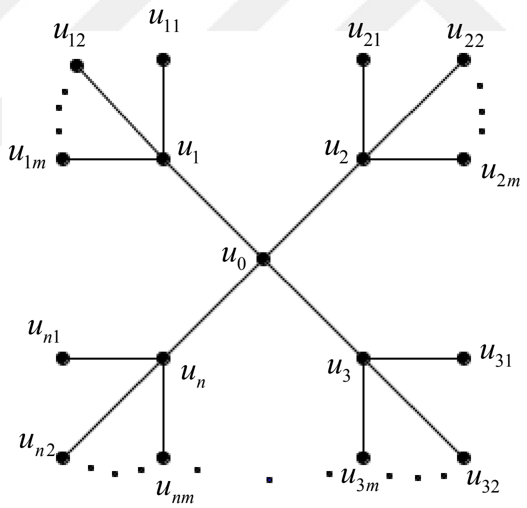
$$\gamma_w(P_{p,t}) = 2m + \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$$

olarak elde edilir. □

Teorem 4.14. $S_{k,t}$ Dikenli yıldız (thorn star) grafta $k = n$ ve $t = m+1$ olmak üzere

$$\gamma_s(S_{k,t}) = \begin{cases} n, & n \leq m+1 \\ n+1, & n > m+1 \end{cases} \tag{4.60}$$

$$\gamma_w(S_{k,t}) = mn+1 \tag{4.61}$$



Şekil 4.7. $S_{k,t}$ $(k = n, t = m+1)$ Dikenli Yıldız (Thorn Star) Graf

İspat:

Durum 1: $k = n$ ve $t = m+1$ olmak üzere $n = m+1$ ise $D = \{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\}$ kümesindeki tepelerin komşuluklarındaki bir dereceli tepelerin ve u_0 tepesinin güçlü bastırılabilmesi için

$$\begin{aligned}1=\deg(u_{11})=\deg(u_{12})=\deg(u_{13})=...=\deg(u_{1m})<\deg(u_1),\\1=\deg(u_{21})=\deg(u_{22})=\deg(u_{23})=...=\deg(u_{2m})<\deg(u_2),\\\vdots\\1=\deg(u_{n1})=\deg(u_{n2})=\deg(u_{n3})=...=\deg(u_{nm})<\deg(u_n)\end{aligned}\tag{4.62}$$

olduğundan $u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n$ tepeleri

$$u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},u_{n1},u_{n2},...,u_{nm}$$

tepelerini güçlü bastırdığından güçlü baskın kümede olması gerekir. Buradan güçlü baskınlık şartı sağlanır ve $\gamma_s(S_{k,t})\le n$ olarak bulunur. $D=\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ güçlü baskın küme olmasın ve kümedeki herhangi bir eleman kümeden çıkartılsın. $u_n(veya\,u_1,u_2,...,u_{n-1})$ minimal güçlü baskın kümede olmasın. $D^*=\{u_1,u_2,...,u_{n-1}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. Buradan u_n komşuluğundaki $u_{n1},u_{n2},...,u_{nm}$ tepeleri güçlü bastırılamaz ve $\gamma_s(S_{k,t})\ge n$ olarak bulunur. O halde $D=\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ minimal güçlü baskın küme ve $\gamma_s(\mathrm{S_{k,t}})=n$ olarak elde edilir.

Durum 2: $k=n$ ve $t=m+1$ olmak üzere $n>m+1$ ise $D=\{u_0,u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ minimal güçlü baskın küme olsun.

$$\begin{aligned}&\deg(u_0)>\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_{n-1})=\deg(u_n)\\&(\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_{n-1})=\deg(u_n)>\deg(u_{11})=\deg(u_{12})=\deg(u_{1m})=\deg(u_{21})\\&\quad=\deg(u_{22})=...=\deg(u_{2m})=...=\deg(u_{n1})=\deg(u_{n2})=...=\deg(u_{nm})=1)\end{aligned}$$

olduğundan u_0 tepesi seçilerek $\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ tepeleri seçilerek komşuluğundaki bir dereceli uç tepeler güçlü bastırılır. Buradan $\gamma_s(s_{k,t})\le n+1$ olarak bulunur. $D=\{u_0,u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın ve $D_s^*=\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. O halde u_0 tepesi için $\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_n)<\deg(u_0)$ olduğundan $u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n$ tepeleri güçlü bastırılamaz ve $\gamma_s(s_{k,t})\ge n+1$ olarak bulunur. Buradan $D=\{u_0,u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ minimal güçlü baskın küme ve $\gamma_s(S_{k,t})=n+1$ olarak elde edilir.

Durum 3: $k = n$ ve $t = m+1$ olmak üzere $n < m+1$ ise $D = \{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\}$ minimal güçlü baskın küme olsun.

$$\deg(u_1) = \deg(u_2) = ... = \deg(u_n) > \deg(u_0)$$

ve

$$\begin{gathered}
\deg(u_{11}) = \deg(u_{12}) = \deg(u_{13}) = ... = \deg(u_{1m}) < \deg(u_1), \\
\deg(u_{21}) = \deg(u_{22}) = \deg(u_{23}) = ... = \deg(u_{2m}) < \deg(u_2), \\
\vdots \\
\deg(u_{n1}) = \deg(u_{n2}) = \deg(u_{n3}) = ... = \deg(u_{nm}) < \deg(u_n)
\end{gathered}$$

olduğundan $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\}$ kümesindeki tepeler seçilerek tüm graf güçlü bastırılır. Buradan $\gamma_s(S_{k,t}) \le n$ olarak bulunur. $D = \{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\}$ minimal güçlü basın küme olmasın ve $u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n$ tepelerinden herhangi biri minimal güçlü baskın kümede bulunmasın. u_n (veya $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$) bu kümede olmasın ve $D^* = \{u_1, u_2, ..., u_{n-1}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. O halde $\deg(u_{n1}) = \deg(u_{n2}) = \deg(u_{n3}) = ... = \deg(u_{nm}) = 1$ olduğundan u_n tepsinin komşuluğundaki bir dereceli $u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}$ tepeleri güçlü bastırılamaz. Buradan güçlü baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_s(S_{k,t}) \ge n$ olarak bulunur. O halde güçlü baskınlık sayısı $\gamma_s(S_{k,t}) = n$ olarak elde edilir.

Durum 4: $k = n$ ve $t = m+1$ olmak üzere $n = m+1$ ise

$$\begin{gathered}
D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_0\}, \\
D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_1\}, \\
D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_2\}, \\
\vdots \\
D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_n\}
\end{gathered}$$

kümelerinden herhangi birisi minimal zayıf baskın küme olsun.

$$\begin{gathered}
\deg(u_{11}) = \deg(u_{12}) = \deg(u_{13}) = ... = \deg(u_{1m}) < \deg(u_1), \\
\deg(u_{21}) = \deg(u_{22}) = \deg(u_{23}) = ... = \deg(u_{2m}) < \deg(u_2), \\
\vdots \\
\deg(u_{n1}) = \deg(u_{n2}) = \deg(u_{n3}) = ... = \deg(u_{nm}) < \deg(u_n)
\end{gathered}$$

olduğundan $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n\}$ tepelerinin komşuluğundaki tepelerin

$$\begin{gathered}\deg(u_{11}) = \deg(u_{12}) = \deg(u_{13}) = ... = \deg(u_{1m}) = 1 \\ \deg(u_{21}) = \deg(u_{22}) = \deg(u_{23}) = ... = \deg(u_{2m}) = 1 \\ \vdots \\ \deg(u_{n1}) = \deg(u_{n2}) = \deg(u_{n3}) = ... = \deg(u_{nm}) = 1\end{gathered}$$

olduğundan uç tepeler alınarak $u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n$ tepeleri ve $u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n$ tepelerinden herhangi birisi alınarak u_0 zayıf bastırılmış olur. Buradan $\gamma_w(S_{k,t}) \le mn+1$ olarak bulunur.

$$\begin{gathered}D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_0\}, \\ D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_1\}, \\ D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_2\}, \\ \vdots \\ D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_n\}\end{gathered}$$

kümelerinden herhangi birisi minimal zayıf baskın küme olmasın. $D^* = \{u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_0\}$ minimal zayıf baskın küme olsun. O halde u_{11} tepesinin bastırılması için komşuluğundaki u_1 tepesinin kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(u_{11}) < \deg(u_1)$ olduğundan zayıf baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_w(S_{k,t}) \ge mn+1$ olarak bulunur. Buradan zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(S_{k,t}) = mn+1$ olarak elde edilir.

Durum 5: $k = n$ ve $t = m+1$ olmak üzere $n > m+1$ ise minimal zayıf baskın küme

$$\begin{gathered}D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_1\}, \\ D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_2\}, \\ D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_3\}, \\ \vdots \\ D = \{u_{11}, u_{12}, ..., u_{1m}, u_{21}, u_{22}, ..., u_{2m}, u_{31}, u_{32}, ..., u_{3m}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nm}, u_n\}\end{gathered}$$

kümelerinden herhangi birisi olsun.

$$\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_{n-1})=\deg(u_n)>\deg(u_{11})=\deg(u_{12})=\deg(u_{1m})=\deg(u_{21})$$
$$=\deg(u_{22})=...=\deg(u_{2m})=...=\deg(u_{n1})=\deg(u_{n2})=...=\deg(u_{nm})=1$$

olduğundan $\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ kümesindeki tepelerin komşuluğundaki bir dereceli tepeler seçilerek $\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ kümesindeki tepeler zayıf bastırılır. u_0 tepesini zayıf bastırabilmek için $\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ kümesindeki tepelerden herhangi birisini seçmek yeterlidir. Buradan $\gamma_w(S_{k,t})\le mn+1$ olarak bulunur. $\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ kümesindeki tepelerden herhangi birisi seçilmesin. O halde u_0 tepesi zayıf bastırılamaz. Ya da $\{u_1,u_2,...,u_{n-1},u_n\}$ bu kümedeki tepelerin komşuluğundaki tepelerden herhangi birisinin komşuluğundaki bir dereceli tepe zayıf baskın kümede bulunmasın. O halde bir dereceli tepenin komşuluğundaki tepe zayıf bastırılamaz. Buradan $\gamma_w(S_{k,t})\ge mn+1$ bulunur. O halde

$$D=\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_1\},$$
$$D=\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_2\},$$
$$D=\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_3\},$$
$$\vdots$$
$$D=\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_n\}$$

kümelerinden herhangi birisi zayıf baskın küme ve zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(S_{k,t})=mn+1$ olarak elde edilir.

Durum 6: $k=n$ ve $t=m+1$ olmak üzere $n<m+1$ ise $D=\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_0\}$ minimal zayıf baskın küme olsun.

$$1=\deg(u_{11})=\deg(u_{12})=\deg(u_{13})=...=\deg(u_{1m})<\deg(u_1),$$
$$1=\deg(u_{21})=\deg(u_{22})=\deg(u_{23})=...=\deg(u_{2m})<\deg(u_2),$$
$$\vdots$$
$$1=\deg(u_{n1})=\deg(u_{n2})=\deg(u_{n3})=...=\deg(u_{nm})<\deg(u_n)$$

ve

$\deg(u_1)=\deg(u_2)=...=\deg(u_n)>\deg(u_0)$ olduğundan

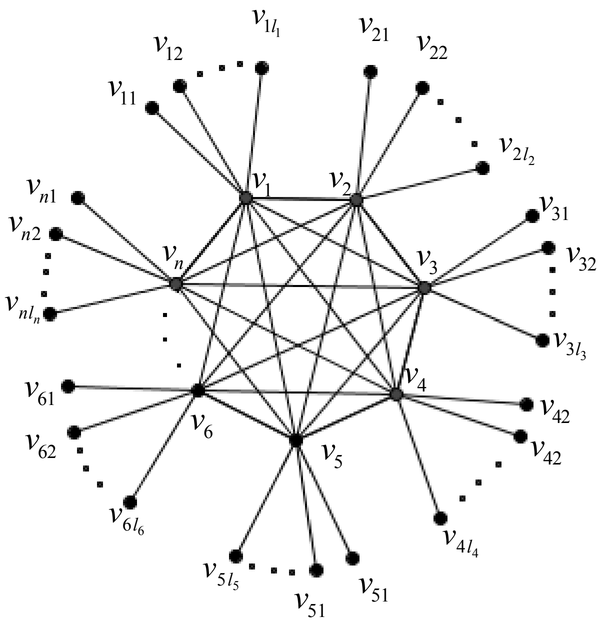
$\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_0\}$ tepeleri seçilerek grafın tüm tepeleri zayıf bastırılır. Buradan $\gamma_w(\mathrm{S_{k,t}}) \leq mn+1$ olarak bulunur. $D=\{u_{11},u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_0\}$ minimal zayıf baskın küme olmasın. $D-\{\mathrm{u}_{11}\}$ kümesi D^* olmak üzere $D^*=\{u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_0\}$ minimal zayıf baskın küme olsun. Kümeye alınmayan u_{11} tepesi komşuluğundaki u_1 tepesi ile $\deg(u_{11})<\deg(u_1)$ olduğundan zayıf bastırılamaz. O halde $D^*=\{u_{12},...,u_{1m},u_{21},u_{22},...,u_{2m},u_{31},u_{32},...,u_{3m},...,u_{n1},u_{n2},...,u_{nm},u_0\}$ minimal zayıf baskın küme olmaz ve $\gamma_w(S_{k,t}) \geq mn+1$ olarak bulunur. Buradan zayıf baskınlık sayısı $\gamma_w(\mathrm{S_{k,t}})=mn+1$ olarak elde edilir.

Buradan $S_{k,t}$ Dikenli yıldız (thorn star) grafta $k=n$ ve $t=m+1$ olmak üzere

$$\gamma_s(S_{k,t})=\begin{cases} n, & n \leq m+1 \\ n+1, & n > m+1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \gamma_w(S_{k,t})=mn+1$$

olarak elde edilir. □

Teorem 4.15. G grafı bir K_n tam grafı olsun. G ' nin diken (thorn) grafı G^* ve $l_1,l_2,l_3,...,l_n \in Z^+$ olmak üzere $\gamma_s(G^*)=n$ ve $\gamma_w(G^*)=l_1+l_2+...+l_n$ dir.



Şekil 4.8. K_n Diken (Thorn) Graf (G^*)

İspat: Bir G^* diken grafında $l_1, l_2, l_3, ..., l_n \in Z^+$ olmak üzere $D = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. $\deg(v_1) = n-1+l_1$, $\deg(v_2) = n-1+l_2, ..., \deg(v_n) = n-1+l_n$ olduğundan $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ tepeleri seçilerek bir dereceli uç tepeler ve kendilerini güçlü bastırmış olurlar. Buradan $\gamma_s(G^*) \leq n$ bulunur. $D = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ minimal güçlü baskın küme olmasın. Kümeden herhangi bir eleman çıkaralım. $D - \{v_n\}$ kümesi D^* olsun. $D^* = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{n-1}\}$ minimal güçlü baskın küme olsun. v_n komşuluğundaki $n-1+l_n$ tane tepe güçlü bastırılamaz ve $\gamma_s(G^*) \geq n$ olarak bulunur. Buradan $D = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ minimal güçlü baskın küme olup $\gamma_s(K_n^*) = n$ dir.

Bir G^* thorn grafında $l_1, l_2, l_3, ..., l_n \in Z^+$ olmak üzere $D = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, .., v_{1l_1}, v_{21}, v_{22}, ..., v_{2l_2}, v_{31}, v_{32}, ..., v_{3l_3}, ..., v_{n1}, v_{n2}, ..., v_{nl_6}\}$ minimal zayıf baskın küme olsun.

$$\begin{aligned} &\deg(v_{11}) = \deg(v_{12}) = ... = \deg(v_{1l_1}) = \deg(v_{21}) = \deg(v_{22}) = ... = \deg(v_{2l_2}) \\ &= ... = \deg(v_{n1}) = \deg(v_{n2}) = ... = \deg(v_{nl_n}) = 1 \end{aligned} \quad (4.63)$$

olduğundan $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, .., v_{1l_1}, v_{21}, v_{22}, ..., v_{2l_2}, v_{31}, v_{32}, ..., v_{3l_3}, ..., v_{n1}, v_{n2}, ..., v_{nl_n}\}$ kümesindeki tepeler seçilerek komşuluklarındaki tepeler zayıf bastırılır ve $\gamma_w(G^*) \leq l_1 + l_2 + ... + l_n$ olarak bulunur. Kümeden herhangi bir eleman çıkarılsın. $D - \{v_{11}\}$ kümesi D^* olmak üzere

$$D^* = \{v_{12}, v_{13}, .., v_{1l_1}, v_{21}, v_{22}, ..., v_{2l_2}, v_{31}, v_{32}, ..., v_{3l_3}, ..., v_{n1}, v_{n2}, ..., v_{nl_6}\}$$

minimal zayıf baskın küme olsun. Kümede bulunmayan v_{11} tepesinin zayıf bastırılması için komşuluğundaki v_1 tepesinin zayıf baskın kümeye alınması gerekir. Fakat $\deg(v_1) > \deg(v_{11})$ olduğundan zayıf baskınlık şartı sağlanmaz ve $\gamma_w(G^*) \geq l_1 + l_2 + ... + l_n$ olarak bulunur. Buradan $\gamma_w(G^*) = l_1 + l_2 + ... + l_n$ elde edilir. □

Teorem 4.16. $\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)$ grafında $n\geq 3$ ve L_1 boylamındaki tepeler $v_{11},v_{12},v_{13},...,v_{1s_1}$, L_2 boylamındaki tepeler $v_{21},v_{22},v_{23},...,v_{2s_2}$ ve L_n boylamındaki tepeler $v_{n1},v_{n2},v_{n3},...,v_{ns_n}$ olmak üzere güçlü ve zayıf baskınlık sayıları

$$i)\gamma_s(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n))=\begin{cases}2 & 1\leq s_1=s_2=s_3=...=s_n\leq 2\\ \left\lceil\frac{s_1-2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{s_2-2}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n-2}{3}\right\rceil+2 & 3\leq s_1\leq s_2\leq s_3\leq...\leq s_n\end{cases} \quad (4.64)$$

$$ii)\gamma_w(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n))=\begin{cases}1+\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil, & s_1=1,\ 1\leq s_2=s_3=...=s_n\leq 2\\ 2+\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil, & s_1=2,\quad 2<s_2=s_3=...=s_n\\ 2+\left\lceil\frac{s_1-2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil, & s_1>2,\quad 2<s_2\leq s_3\leq...\leq s_n\end{cases} \quad (4.65)$$

şeklindedir.

İspat:

i) $\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)$ grafında güçlü baskınlık sayısı için $n\geq 3$ olmak üzere iki durum göz önüne alınır.

Durum 1: $1\leq s_1=s_2=s_3=...=s_n\leq 2$ için güçlü baskınlık sayısı

$s_1=s_2=s_3=...=s_n=1$ ise

$$\begin{aligned}\deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{11})=\deg(v_{12})=\deg(v_{13})=...=\deg(v_{1s_1})\\ \deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{21})=\deg(v_{22})=\deg(v_{23})=...=\deg(v_{2s_2})\\ \vdots\\ \deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{n1})=\deg(v_{n2})=\deg(v_{n3})=...=\deg(v_{ns_n})\end{aligned} \quad (4.66)$$

olduğundan N tepesi alınarak, komşuluğundaki $v_{11},v_{12},v_{13},...,v_{1s_1}$ tepeleri güçlü bastırılır. S tepesinin güçlü bastırılması için kendisinin güçlü baskın kümeye alınması yeterlidir. Buradan güçlü baskın küme $D=\{N,S\}$ ve $\gamma_s(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n))\leq 2$ olarak elde edilir.

$D=\{N,S\}$ kümesinin minimal güçlü baskın küme olmadığını kabul edelim. Kümeden herhangi bir tepe çıkarılsın, yani S (veya N) tepesi silinsin. Buradan, S tepesi komşuluğundaki diğer tepeler ile güçlü bastırılamaz. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece, $\gamma_s(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\geq 2$ olarak elde edilir.

$s_1=s_2=s_3=...=s_n=2$ ise

$$\begin{gathered}\deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{11})=\deg(v_{12})=\deg(v_{13})=...=\deg(v_{1s_1})\\ \deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{21})=\deg(v_{22})=\deg(v_{23})=...=\deg(v_{2s_2})\\ \vdots\\ \deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{n1})=\deg(v_{n2})=\deg(v_{n3})=...=\deg(v_{ns_n})\end{gathered}$$

olmak üzere N tepesi alınarak komşuluğundaki $v_{11},v_{12},v_{13},...,v_{1s_1}$ tepeleri ve S tepesi alınarak komşuluğundaki $v_{n1},v_{n2},v_{n3},...,v_{ns_n}$ tepeleri güçlü bastırılır. Buradan güçlü baskın küme $D=\{N,S\}$ ve $\gamma_s(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\leq 2$ olarak elde edilir.

$D=\{N,S\}$ kümesinin minimal güçlü baskın küme olmadığını kabul edelim. Kümeden herhangi bir tepe çıkarılsın, yani S (veya N) tepesi silinsin. Buradan S tepesi komşuluğundaki $v_{n1},v_{n2},v_{n3},...,v_{ns_n}$ tepeleri komşuluklarındaki $v_{11},v_{12},v_{13},...,v_{1s_1}$ tepeleri ile güçlü bastırılırlar, dolayısıyla bu tepeler D kümesine alınmalıdır. Fakat bu durum kümenin eleman sayısını artıracağından kabulümüz ile çelişir. Buradan, $\gamma_s(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\geq 2$ olarak elde edilir.

Dolayısıyla, $\gamma_s(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))=2$ olarak bulunur.

Durum 2: $3\leq s_1\leq s_2\leq s_3\leq ...\leq s_n$ ise

$$\begin{gathered}\deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{11})=\deg(v_{12})=\deg(v_{13})=...=\deg(v_{1s_1})\\ \deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{21})=\deg(v_{22})=\deg(v_{23})=...=\deg(v_{2s_2})\\ \vdots\\ \deg(N)=\deg(S)>\deg(v_{n1})=\deg(v_{n2})=\deg(v_{n3})=...=\deg(v_{ns_n})\end{gathered}$$

olmak üzere N tepesi alınarak komşuluğundaki $v_{11}, v_{12}, v_{13}, ..., v_{1s_1}$ tepeleri ve S tepesi alınarak komşuluğundaki $v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, ..., v_{ns_n}$ tepeleri güçlü bastırılır. n tane boylamda $2n+2$ tepe güçlü bastırılır. Tüm boylamlarda sırasıyla

$$s_1 - 2, s_2 - 2, s_3 - 2, s_4 - 2, s_5 - 2, ..., s_n - 2$$

tepe kalmaktadır ve bu tepeler için sırasıyla $\left\lceil \frac{s_1 - 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{s_2 - 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{s_3 - 2}{3} \right\rceil, ..., \left\lceil \frac{s_n - 2}{3} \right\rceil$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan,

$$\gamma_s(\theta(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)) \leq 2 + \left\lceil \frac{s_1 - 2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2 - 2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n - 2}{3} \right\rceil$$

olarak elde edilir.

Güçlü baskın kümeden herhangi bir tepe çıkarılsın. $S(veya\ N)$ tepesi silinsin. Buradan S tepesi komşuluğundaki $v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, ..., v_{ns_n}$ tepeleri komşuluklarındaki tepeler ile güçlü bastırılırlar. Fakat bu durum kümenin eleman sayısını artıracağından kabulümüz ile çelişir. Buradan

$$\gamma_s(\theta(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)) \geq 2 + \left\lceil \frac{s_1 - 2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2 - 2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n - 2}{3} \right\rceil$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\gamma_s(\theta(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)) = \left\lceil \frac{s_1 - 2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2 - 2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n - 2}{3} \right\rceil + 2$$

elde edilir.

Buradan tüm durumlar için

$$\gamma_s(\theta(s_1, s_2, s_3, ..., s_n)) = \begin{cases} 2, & 1 \leq s_1 = s_2 = s_3 = ... = s_n \leq 2 \\ 2 + \left\lceil \frac{s_1 - 2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2 - 2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n - 2}{3} \right\rceil, & 3 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq ... \leq s_n \end{cases}$$

elde edilir.

$ii)$ Zayıf baskınlık sayısını bulmak için $\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)$ theta grafında $n\geq 3$ olmak üzere üç durum söz konusudur.

Durum 3: $s_1=s_2=s_3=...=s_n=1$ için $L_1,L_2,L_3,...,L_n$ boylamlarının herhangi birisinden bir tepe seçilerek N ve S tepeleri zayıf bastırılır. Diğer boylamlardaki tepeler için her boylamda bir tepe seçilerek tüm boylamdaki tepeler zayıf bastırılır. Buradan $\gamma_s(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\leq \mathrm{s}_1+\mathrm{s}_2+\mathrm{s}_3+...+\mathrm{s}_n$ elde edilir. $D=\{v_{11},v_{12},v_{13},...,v_{1s_1}\}$ kümesinde bir tepe çıkarılsın. v_{11} tepesi kümeden çıkarılsın. Bu durumda v_{11} tepesi komşuluğundaki bir tepe ile zayıf bastırılamaz ve $\gamma_w(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\geq \mathrm{s}_1+\mathrm{s}_2+\mathrm{s}_3+...+\mathrm{s}_n$ olarak elde edilir.

$s_1=1$ ve $s_2=s_3=...=s_n=2$ ise bu durumda L_1 boylamındaki bir tepe seçilerek N ve S tepeleri zayıf bastırılır. Diğer boylamlardaki tepeler için her boylamdan sırasıyla $\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{s_3}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{s_4}{3}\right\rceil,...,\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil$ tane tepe seçilerek boylamlardaki tepeler zayıf bastırılır. Buradan $\gamma_w(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\leq 1+\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{s_3}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil$ elde edilir. Zayıf nbaskın kümede bir tepe çıkarılsın. v_{11} tepesi kümeden çıkarılsın. Bu durumda v_{11} tepesi komşuluğundaki N ve S tepeleri diğer boylamlardaki N ve S tepeleri komşuluğundaki bir tepe ile zayıf bastırılabilir. Fakat v_{11} tepesi zayıf bastırılmaz ve kendisininde kümeye alınması gerekir. Bu durum kümenineleman sayısını artıracağından kümenin minimal oluşu ile çelişir. Buradan $\gamma_w(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))\geq 1+\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{s_3}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil$ olarak bulunur. Buradan $\gamma_w(\theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2,\mathrm{s}_3,...,\mathrm{s}_n))=1+\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{s_3}{3}\right\rceil+...+\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil$ elde edilir.

Durum 4: $s_1=2$ ve $2<s_2=s_3=...=s_n$ olmak üzere L_1 boylamındaki iki tepe seçilerek N ve S tepeleri zayıf bastırılır. Diğer boylamlarda arada kalan tepeler için her boylamdan sırasıyla $\left\lceil\frac{s_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{s_3}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{s_4}{3}\right\rceil,...,\left\lceil\frac{s_n}{3}\right\rceil$ tane tepe seçilerek boylamlardaki

tepeler zayıf bastırılır. Buradan $\gamma_s(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)) \le 2+\left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_3}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil$ elde edilir.

Zayıf baskın kümeden bir tepe çıkarılsın. Bu tepe kutuplardaki tepeleri (yani, N veya S tepelerini) zayıf bastıran bir tepe veya boylamlardaki tepeleri zayıf bastıran bir tepe olabilir. İlk olarak N (veya S) tepesini bastıran bir tepenin kümeden çıkarıldığını kabul edelim. Bu tepe v_{11} olsun. Bu durumda v_{11} tepesi komşuluğundaki N tepesinin zayıf bastırılabilmesi için diğer boylamlardaki N tepesinin komşuluğundaki başka bir tepe ile zayıf baskın kümeye dahil edilmelidir. Dolayısıyla, kümenin elemanları değişir fakat eleman sayısı aynı kalır. Benzer şekilde, çıkarılan tepe boylamlarda yer alan tepeleri (veya tepelerden birini) zayıf bastıran bir tepe olsun. Aynı yaklaşımla, çıkarılan tepenin zayıf bastırdığı tepeleri (veya tepeyi) zayıf bastırabilmek için zayıf baskınlık kümesine başka bir tepe alınmalıdır. Zayıf baskın kümenin elemanları değişirken, eleman sayısı aynı kalır. Bu da zayıf baskınlık sayısının $\gamma_w(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)) = 2+\left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_3}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil$ olduğunu gösterir.

Durum 5: $s_1 > 2$ ve $2 < s_2 \le s_3 \le ... \le s_n$ ise bu durumda N ve S tepelerinin komşuluğundaki herhangi bir boylamdan iki tepe seçilerek N ve S tepeleri zayıf bastırılsın. L_1 boylamında N ve S tepelerinin komşuluğundaki v_{11} ve v_{1s_1} tepeleri tarafından zayıf bastırılsın ve L_1 boylamında arada kalan tepeler için $\left\lceil \frac{s_1-2}{3} \right\rceil$ tane tepe seçilmesi yeterlidir. Diğer boylamdaki tepeler için sırasıyla $\left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{s_3}{3} \right\rceil, ..., \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil$ tepe seçilmesi yeterlidir. Buradan

$$\gamma_w(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)) \le 2+\left\lceil \frac{s_1-2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil$$

elde edilir.

Zayıf baskın kümeden bir tepe çıkarılsın. Bu tepe kutuplardaki tepeleri (yani, N veya S tepelerini) zayıf bastıran bir tepe veya boylamlardaki tepeleri zayıf bastıran bir tepe olabilir. İlk olarak N (veya S) tepesini bastıran bir tepenin kümeden çıkarıldığını kabul edelim. Bu tepe v_{11} olsun. Bu durumda v_{11} tepesi komşuluğundaki N tepesinin zayıf bastırılabilmesi için diğer boylamlardaki N tepesinin komşuluğundaki başka bir tepe ile zayıf baskın kümeye dahil edilmelidir. Dolayısıyla, kümenin elemanları değişir fakat eleman sayısı aynı kalır. Benzer şekilde, çıkarılan tepe boylamlarda yer alan tepeleri (veya tepelerden birini) zayıf bastıran bir tepe olsun. Aynı yaklaşımla, çıkarılan tepenin zayıf bastırdığı tepeleri (veya tepeyi) zayıf bastırabilmek için zayıf baskınlık kümesine başka bir tepe alınmalıdır. Zayıf baskın kümenin elemanları değişirken, eleman sayısı aynı kalır. Bu da zayıf baskınlık sayısının $\gamma_w(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)) = 2+\left\lceil \frac{s_1-2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil$ olduğunu gösterir.

Buradan tüm durumlar için zayıf baskınlık sayısı

$$\gamma_w(\theta(s_1,s_2,s_3,...,s_n)) = \begin{cases} 1+\left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil, & s_1 = 1,\ 1 \le s_2 = s_3 = ... = s_n \le 2 \\ 2+\left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil, & s_1 = 2, \quad 2 < s_2 = s_3 = ... = s_n \\ 2+\left\lceil \frac{s_1-2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_2}{3} \right\rceil + ... + \left\lceil \frac{s_n}{3} \right\rceil, & s_1 > 2, \quad 2 < s_2 \le s_3 \le ... \le s_n \end{cases}$$

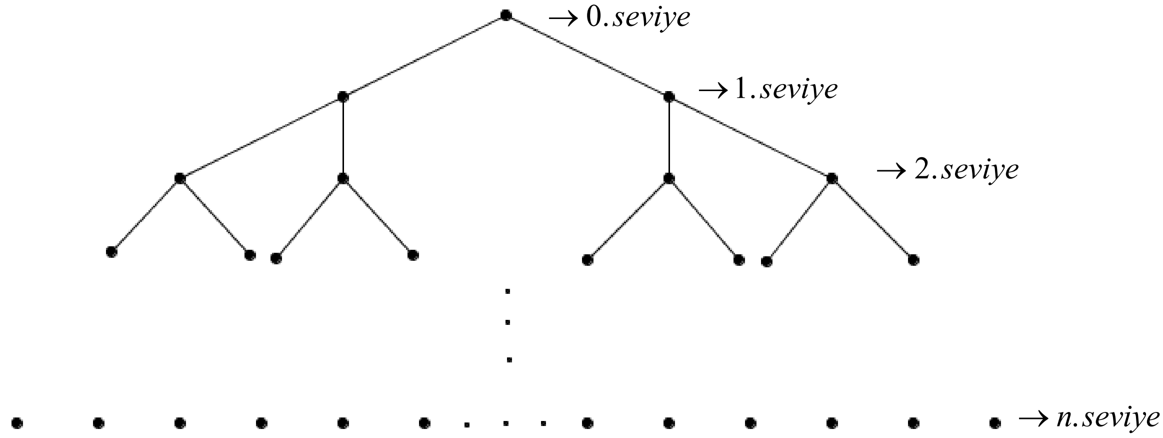
olarak bulunur. □

Teorem 4.17. G bir tam ikili ağaç (binary tree) graf ve $m,k,n \in Z^+$ olmak üzere

$$i)\gamma_s(G) = \begin{cases} \frac{2^{n+2}+3}{7}, & n \equiv 0 (\bmod 3) \\ \frac{2^{n+2}+6}{7}, & n \equiv 1 (\bmod 3) \\ \frac{2^{n+2}-2}{7}, & n \equiv 2 (\bmod 3) \end{cases} \tag{4.67}$$

$$ii)\gamma_w(G) = \begin{cases} \frac{2^{n+3}-1}{7}, & n \equiv 0 (\bmod 3) \\ \frac{2^{n+3}+5}{7}, & n \equiv 1 (\bmod 3) \\ \frac{2^{n+3}+3}{7}, & n \equiv 2 (\bmod 3) \end{cases} \tag{4.68}$$

şeklindedir.



Şekil 4. 9. Tam İkili Ağaç

$i)$ Bir tam ikili ağaç grafının güçlü baskınlık sayısı için:

0. seviyedeki tepenin derecesi iki, *n.* seviyedeki tepenin derecesi bir ve arada kalan tepelerin dereceleri üç olmak üzere $n-1$. seviyedeki 2^{n-1} tepenin güçlü baskın kümeye alınması ile 2^{n-1} tepe ile komşuluğundaki 2^{n-2} ve 2^{n} tepe güçlü bastırılır. $n-4$. seviyedeki 2^{n-4} tepe seçilerek komşuluğundaki 2^{n-3} ve 2^{n-5} tepe güçlü bastırılır. Sırasıyla devam edildiğinde $n-7$. seviyedeki 2^{n-7} tepe, $n-9$. seviyedeki 2^{n-9} tepe alınarak devam edildiğinde *n.* seviyedeki tepelerin dereceleri bir ve 0. seviyelerdeki tepenin derecesi iki olduğundan komşuluğundaki tepeler alınarak bir dereceli *n.* seviyedeki 2^{n} tane tepe ve 0. seviyedeki iki dereceli bir tepe güçlü bastırılır. *n.* seviye ve 0. seviyelerdeki tepeler arasında kalan tepelerin güçlü baskınlığı için $\mathrm{mod}\,3'e$ göre bakılması yeterlidir. Buradan,

$$n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \text{ için } \gamma_s(G) = 2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^7 ... + 2^{n-4} + 2^{n-1} \tag{4.69}$$

$$n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3) \text{ için } \gamma_s(G) = 2^1 + 2^3 + 2^6 + 2^9 ... + 2^{n-4} + 2^{n-1} \tag{4.70}$$

$$n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3) \text{ için } \gamma_s(G) = 2^1 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} ... + 2^{n-4} + 2^{n-1} \tag{4.71}$$

şeklindedir.

Buradan $n \equiv 0(\bmod 3)$ için

$$\gamma_s(G) = 2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^8 ... + 2^{n-4} + 2^{n-1} = 1 + 2^2(1 + 2^3 + 2^6 + ... + 2^{n-6} + 2^{n-3})$$
$$= 1 + 2^2(1 + 2^3 + (2^3)^2 + ... + (2^3)^{\frac{n-6}{3}} + (2^3)^{\frac{n-3}{3}})$$
$$= 1 + 2^2 \frac{1-(2^3)^{\frac{n-3}{3}+1}}{1-2^3} = 1 + 2^2 \frac{1-2^n}{1-2^3} = \frac{2^{n+2}+3}{7}$$

$n \equiv 1(\bmod 3)$ için

$$\gamma_s(G) = 2^1 + 2^3 + 2^6 + 2^9 ... + 2^{n-4} + 2^{n-1} = 2 + 2^3(1 + 2^3 + (2^3)^2 + ... + (2^3)^{\frac{n-7}{3}} + (2^3)^{\frac{n-4}{3}})$$
$$= 2 + 2^3 \frac{1-(2^3)^{\frac{n-4}{3}+1}}{1-2^3} = 2 + 2^3 \frac{1-2^{n-1}}{1-2^3} = \frac{2^{n+2}+6}{7}$$

$n \equiv 2(\bmod 3)$ için

$$\gamma_s(G) = 2^1 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} ... + 2^{n-4} + 2^{n-1} = 2(1 + 2^3 + 2^6 + ... + 2^{n-5} + 2^{n-2})$$
$$= 2(1 + 2^3 + (2^3)^2 + ... + (2^3)^{\frac{n-5}{3}} + (2^3)^{\frac{n-2}{3}})$$
$$= 2\frac{1-(2^3)^{\frac{n-2}{3}+1}}{1-2^3} = 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2^3} = \frac{2^{n+2}-2}{7}$$

elde edilir. Buradan

$$i)\gamma_s(G) = \begin{cases} \dfrac{2^{n+2}+3}{7}, & n \equiv 0(\bmod 3) \\ \dfrac{2^{n+2}+6}{7}, & n \equiv 1(\bmod 3) \\ \dfrac{2^{n+2}-2}{7}, & n \equiv 2(\bmod 3) \end{cases}$$

elde edilir.

$ii)$ Bir tam ikili ağaç grafta zayıf baskınlık sayısı için:

0. seviyedeki tepenin derecesi iki, *n*. seviyedeki tepenin derecesi bir ve arada kalan tepelerin dereceleri üç olmak üzere *n*. seviyedeki 2^n tepenin zayıf baskın kümeye alınmasıyla komşuluğundaki tepelerin dereceleri üç olduğundan komşuluğundaki

tepeleri zayıf bastırır. 0. seviyedeki tepenin derecesi iki olduğundan 0. seviyedeki tepeler zayıf baskın kümeye alınarak komşuluğundaki tepeler zayıf bastırılır. Arada kalan diğer tepeler için $\bmod 3$ ' e göre bakılması gerekir. Çünkü *n*. seviyedeki 2^n tepe seçilerek $(n-1)$. seviyedeki 2^{n-1} tepe, $(n-3)$. seviyedeki 2^{n-3} tepe seçilerek komşuluğundaki $2^{n-2}+2^{n-4}$ tepe, $(n-6)$. seviyedeki 2^{n-6} tepe seçilerek komşuluğundaki $2^{n-5}+2^{n-7}$ tepe zayıf bastırılır. Bu şekilde devam edildiğinde 0.seviye komşuluğundaki iki tepe zayıf bastırılmış durumdadır. Fakat bu iki tepenin komşuluğundaki tepeler ya bastırılmış ya da sadece kendileri kalmış olabilir. Buradan

$$n \equiv 0 (\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G) = 2^0 + 2^3 + 2^6 + \ldots + 2^{n-6} + 2^{n-3} + 2^n \tag{4.72}$$

$$n \equiv 1 (\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G) = 2^0 + 2^1 + 2^4 + 2^7 + \ldots + 2^{n-6} + 2^{n-3} + 2^n \tag{4.73}$$

$$n \equiv 2 (\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G) = 2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^8 + \ldots + 2^{n-6} + 2^{n-3} + 2^n \tag{4.74}$$

şeklindedir.

Buradan ,

$$n \equiv 0 (\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G) = 2^0 + 2^3 + 2^6 + \ldots + 2^{n-6} + 2^{n-3} + 2^n$$

$$\gamma_w(G) = 1 + (2^3)^1 + (2^3)^2 + \ldots + (2^3)^{\frac{n}{3}} = \frac{1-(2^3)^{\frac{n}{3}+1}}{1-2^3} = \frac{1-2^{n+3}}{1-2^3}.$$

$$n \equiv 1 (\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G) = 2^0 + 2^1 + 2^4 + 2^7 + \ldots + 2^{n-6} + 2^{n-3} + 2^n$$

$$\gamma_w(G) = 1 + 2(1 + 2^3 + (2^3)^2 + \ldots + (2^3)^{\frac{n-1}{3}}) = 1 + 2\frac{1-(2^3)^{\frac{n-1}{3}+1}}{1-2^3} = 1 + k\frac{1-2^{n+2}}{1-2^3}.$$

$$n \equiv 2 (\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G) = 2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^8 + \ldots + 2^{n-6} + 2^{n-3} + 2^n,$$

$$\gamma_w(G) = 1 + 2^2(1 + 2^3 + (2^3)^2 + \ldots + (2^3)^{\frac{n-2}{3}}) = 1 + 2^2\frac{1-(2^3)^{\frac{n-2}{3}+1}}{1-2^3} = 1 + 2^2\frac{1-2^{n+1}}{1-2^3}.$$

Buradan,

$$\gamma_w(G)=\begin{cases}\dfrac{2^{n+3}-1}{7}, & n\equiv 0(\bmod 3)\\ \dfrac{2^{n+3}+5}{7}, & n\equiv 1(\bmod 3)\\ \dfrac{2^{n+3}+3}{7}, & n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$$

elde edilir. □

Teorem 4.18. G bir tam k - lı ağaç ($k-ary\ \ Tree$) graf ve $m,k,n\in Z^{+}$ olmak üzere

$$i)\gamma_s(G)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+2}+k^3-k^2+1}{k^3-1} & n\equiv 0(\bmod 3)\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+2}+k^4-k^3-k}{k^3-1} & n\equiv 1(\bmod 3)\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+2}-k}{k^3-1} & n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases} \tag{4.75}$$

$$ii)\gamma_w(G)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+3}-1}{k^3-1} & n\equiv 0(\bmod 3)\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+3}+k^3-k-1}{k^3-1} & n\equiv 1(\bmod 3)\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+3}+k^3-k^2-1}{k^3-1} & n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases} \tag{4.76}$$

şeklindedir.

i) Bir tam k-lı ağaç grafın güçlü baskınlık sayısı için

$n-1$. seviyedeki k^{n-1} tepenin dereceleri $k+1$ olduğundan güçlü baskın kümeye alınarak komşuluğundaki k^{n-2} ve k^{n} tepe güçlü bastırılır. $n-4$. seviyedeki k^{n-4} tepe seçilerek komşuluğundaki k^{n-3} ve k^{n-5} tepe güçlü bastırılır. Sırasıyla devam edildiğinde $n-7$. seviyedeki k^{n-7} tepe, $n-9$. seviyedeki k^{n-9} tepe alınarak devam edildiğinde $n.$ seviyedeki tepelerin dereceleri bir ve $0.$ seviyedeki tepenin derecesi k olduğundan komşuluğundaki tepeler alınarak bir dereceli $n.$ seviyedeki k^n tane tepe ve 0. seviyedeki bir tepe güçlü bastırılır. $n.$ seviye ve 0. seviyelerdeki tepeler arasında kalan tepelerin güçlü baskınlığı için $\bmod 3'e$ göre bakılması yeterlidir. Buradan,

$$n \equiv 0(\bmod 3) \text{ için } \gamma_s(G) = k^0 + k^2 + k^5 + \ldots + k^{n-7} + k^{n-4} + k^{n-1} \tag{4.77}$$

$$n \equiv 1(\bmod 3) \text{ için } \gamma_s(G) = k^1 + k^3 + k^6 + k^9 + \ldots + k^{n-7} + k^{n-4} + k^{n-1} \tag{4.78}$$

$$n \equiv 2(\bmod 3) \text{ için } \gamma_s(G) = k^1 + k^4 + k^7 + k^{10} + \ldots\ldots + k^{n-7} + k^{n-4} + k^{n-1} \tag{4.79}$$

şeklindedir.

Buradan $n \equiv 0(\bmod 3)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_s(G) &= k^0 + k^2 + k^5 + k^8 \ldots + k^{n-4} + k^{n-1} \\
&= 1 + k^2(1 + k^3 + k^6 + \ldots + k^{n-6} + k^{n-3}) \\
&= 1 + k^2(1 + k^3 + (k^3)^2 + \ldots + (k^3)^{\frac{n-6}{3}} + (k^3)^{\frac{n-3}{3}}) \\
&= 1 + k^2 \frac{1-(k^3)^{\frac{n-3}{3}+1}}{1-k^3} = 1 + k^2 \frac{1-k^n}{1-k^3} = \frac{k^{n+2} + k^3 - k^2 + 1}{k^3 - 1}.
\end{aligned}$$

$n \equiv 1(\bmod 3)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_s(G) &= k^1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots + k^{n-4} + k^{n-1} = k + k^3(1 + k^3 + (\mathrm{k}^3)^2 + \ldots + (\mathrm{k}^3)^{\frac{n-7}{3}} + (\mathrm{k}^3)^{\frac{n-4}{3}}) \\
&= k + k^3 \frac{1-(\mathrm{k}^3)^{\frac{n-4}{3}+1}}{1-k^3} = k + k^3 \frac{1-k^{n-1}}{1-k^3} = \frac{k^{n+2} + k^4 - k^3 - k}{k^3 - 1}.
\end{aligned}$$

$n \equiv 2(\bmod 3)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_s(G) &= k^1 + k^4 + k^7 + k^{10} \ldots + k^{n-4} + k^{n-1} = k(1 + k^3 + k^6 + \ldots + k^{n-5} + k^{n-2}) \\
&= k(1 + k^3 + (\mathrm{k}^3)^2 + \ldots + (\mathrm{k}^3)^{\frac{n-5}{3}} + (\mathrm{k}^3)^{\frac{n-2}{3}}) \\
&= k \frac{1-(\mathrm{k}^3)^{\frac{n-2}{3}+1}}{1-k^3} = k \frac{1-k^{n+1}}{1-k^3} = \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma_s(G)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+2}+k^3-k^2+1}{k^3-1} & n\equiv 0(\bmod 3)\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+2}+k^4-k^3-k}{k^3-1} & n\equiv 1(\bmod 3)\\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{k^{n+2}-k}{k^3-1} & n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$$

elde edilir.

ii) Bir tam ikili k-lı ağaç grafın zayıf baskınlık sayısı için

n. seviyedeki k^n tepenin zayıf baskın kümeye alınmasıyla komşuluğundaki tepelerin dereceleri $k+1$ olduğundan 0. seviyedeki tepe derecesi k ve *n.* seviyedeki tüm tepelerin dereceleri bir olduğundan bu tepeler seçilerek komşuluklarındaki tepeler zayıf bastırılır. Arada kalan diğer tepeler için $\bmod 3$ ' e göre bakılması gerekir. Çünkü *n.* seviyedeki k^n tepe seçilerek $(\mathrm{n}-1)$. seviyedeki k^{n-1} tepe, $(\mathrm{n}-3)$. seviyedeki 2^{n-3} tepe seçilerek komşuluğundaki $2^{n-2}+2^{n-4}$ tepe, $(\mathrm{n}-6)$. seviyedeki k^{n-6} tepe seçilerek komşuluğundaki $k^{n-5}+k^{n-7}$ tepe zayıf bastırılır. Bu şekilde devam edildiğinde 0. seviyedeki tepenin komşuluğundaki k tane tepe zayıf bastırılmış durumdadır. Fakat bu k tane tepenin komşuluğundaki tepeler ya bastırılmış ya da sadece kendileri kalmış olabilir. Buradan

$$n\equiv 0(\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G)=k^0+k^3+k^6+\ldots+k^{n-6}+k^{n-3}+k^n \tag{4.80}$$

$$n\equiv 1(\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G)=k^0+k^1+k^4+k^7+\ldots+k^{n-6}+k^{n-3}+k^n \tag{4.81}$$

$$n\equiv 2(\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G)=k^0+k^2+k^5+k^8+\ldots+k^{n-6}+k^{n-3}+k^n \tag{4.82}$$

şeklindedir. Buradan

$$n\equiv 0(\bmod 3) \text{ için } \gamma_w(G)=k^0+k^3+k^6+\ldots+k^{n-6}+k^{n-3}+k^n$$

$$\begin{aligned}\gamma_w(G)&=1+(k^3)^1+(k^3)^2+\ldots+(k^3)^{\frac{n}{3}}\\ &=\frac{1-(\mathrm{k}^3)^{\frac{n}{3}+1}}{1-k^3}\\ &=\frac{1-\mathrm{k}^{n+3}}{1-k^3}.\end{aligned}$$

$n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ için $\gamma_w(G) = k^0 + k^1 + k^4 + k^7 + \ldots + k^{n-6} + k^{n-3} + k^n$

$$\begin{aligned}\gamma_w(G) &= 1 + k(1 + k^3 + (k^3)^2 + \ldots + (k^3)^{\frac{n-1}{3}}) \\ &= 1 + k\frac{1-(\mathrm{k}^3)^{\frac{n-1}{3}+1}}{1-k^3} \\ &= 1 + k\frac{1-\mathrm{k}^{n+2}}{1-k^3}.\end{aligned}$$

$n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ için $\gamma_w(G) = k^0 + k^2 + k^5 + k^8 + \ldots + k^{n-6} + k^{n-3} + k^n$

$$\begin{aligned}\gamma_w(G) &= 1 + k^2(1 + k^3 + (k^3)^2 + \ldots + (k^3)^{\frac{n-2}{3}}) \\ &= 1 + k^2\frac{1-(\mathrm{k}^3)^{\frac{n-2}{3}+1}}{1-k^3} \\ &= 1 + k^2\frac{1-\mathrm{k}^{n+1}}{1-k^3}.\end{aligned}$$

Buradan

$$\gamma_w(G) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{k^{n+3}-1}{k^3-1} & n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{k^{n+3}+k^3-k-1}{k^3-1} & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{k^{n+3}+k^3-k^2-1}{k^3-1} & n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3) \end{cases}$$

elde edilir. □

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, graflar üzerinde önemli yer tutan baskınlık sayısının türlerinden güçlü ve zayıf baskınlık sayıları, literatürde sıkça kullanılan bazı graf sınıflarında ele alınmıştır. Bunlar yol graf, çevre graf, tam graf, iki parçalı tam graf, çevre grafın kuvveti, yol grafın kuvveti, kuyruklu yıldız graf, çift kuyruklu yıldız graf, çift yıldız graf, tarak graf, dairesel merdiven graf, rüzgar gülü grafı,dikenli yol graf, dikenli yıldız graf, diken graf, theta graf, tam ikilli ağaç graf ve tam k-lı ağaç graflardır.Bu graf sınıfları uygulamada önemli yer tutan ağ modellerinden seçilmiştir.Burada incelenen graf sınıfları ile literatürde eksiklik görülen kısımlar tamamlanmaya çalışılmıştır. Daha sonra yapılacak olan çalışmalara yol gösterici olması amacıyla ortaya koyulan teoremler ve ispatlar bu şekilde ortaya çıkmıştır.

Kaynaklar

[1] Bagga, K.S. , Beineke ,L.W. ,Goddard, W. ,Lipman,M.J., and Pippert, R.E., A survey of integrity, Discrete Applied Mathematics, 1992, 37, 13-28

[2] Barefoot, C. A.- Entringer, R.- Swart, H., Vulnerability in Graphs-A Comparative Survey, J. Combin. Math. Combin. Comput, 1987, 1, 13-22 p.

[3] Berge, C., Theozy of Graphs and its Applications, Methuen, London, 1962.

[4] Brandstadt A., Chepoi. V. D., Dragan F. F., Perfect elimination orderings of chordal Powers of graphs, Discrete Mathematics 1996, 158(1-3),273-278.

[5] Bharati R., Rajasingh I., Venugopal P., Metric Dimension of Uniform and Quasi-uniform Theta Graphs,J.Comp.and Math.Sci., 2011, 2(1), 37-46.

[6] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. , Graph Theory with Applications, Elsevier, New York, 1976, 264p.

[7] Bonchev, D. , Klein, D. ,On the Wiener of Thorn Trees, Stars, Rings, and Rods, Croatıca Chemıca Acta, 2002, 75(2), 613-620.

[8] Boutring, R.,Chellali, M., A Note On Relation Between The Weak and Strong Domination Numbers Of a Graph, 2012, 2, 235-238.

[9] Buckley, F. and Harary, F., Distance in Graphs, Ed: Allan M. Wylde, Addison-Wesley Publication Company, Michigan, Amerika, 1990, 335.

[10] Chartrand, G., Lesniak, L., and Zhang, P., Graphs & Digraphs, Chapman and Hall/CRC., New York, USA, 2016, 39, 628.

[11] Chen Y., Gross J. L. and Mansour T., Total Embedding Distributions of Circular Ladders, J.Graph Theory. doi: 10.1002/jgt.21690.

[12] Cormen T., Leiserson C.E. and Rivest R.L., Introduction to algorithms, The MIT Press. (Fourth edition), 1990.

[13] Cygan, M., Pilipczuk , M., and Skrekovski, R., Relation between Randic index and avarege distance of trees ,Match Communications in Mathematical and Computer Chemistry, 2011, 66, 605-612.

[14] Dogan Durgun D., Altundag F.N., Liar’s Domination in Graphs, Bulletin of IMVI, 2017, 7, 407-415,

[15] Dogan Durgun D., Altundag F.N., 2-Rainbow Domination Number of Some Graphs , Manisa Celal Bayar Üniversitesi Journal of Science, 2016, 12(3), 363-366.

[16] Doğan Durgun D., Lökçü B., Strong Domination Number of Some Graphs, Manisa Celal Bayar Üniversitesi Journal of Science, 2015, 11(2), 89-91.

[17] Dogan D., Average Lower Domination Number for some Middle Graphs , International Journal of Mathematical Combinatorics, 2012, 4, 58-67.

[18] Dündar P., Turacı T., Dogan D., Weak and Strong Reinforcement Number of a Graph, International Journal of Mathematical Combinatorics, 2010, 3, 91-97.

[19] Gayathri B., Duraisamy M. and Selvi M.T., Proceedings of the international conference on mathematics and computer science, Chennai, India, ICMCS 2007, 1, 119-124.

[20] Grossman, J.W.Harary, F, and Klawe, M, Generalized ramsey theory for graphs, x:doule stars, Discrete Mathematics, 1979, 28(3), 247-254pp.

[21] Harary, F., Graph theory, Michigan Univ Ann Arbor Dept of Mathematics, 1969.

[22] Harray F., Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1971.

[23] Haynes, T.W.; Hedetniemi, S.T.; Slater, P.J. Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York,1998.

[24] Liu,Y. , Wang Z.,Rainbow Connection Number of the Thorn Graph, Applied Mathematical Sciences, 2014, 8(128), 6373- 6377

[25] Nagoor Gani A., Basheer Ahamed M., Strong and Weak Domination in Fuzzy graphs, East Asian Math. J., 2007, 23 (1), 1–8.

[26] Natarajan C., Ayyaswamy S.K., On Strong(Weak) domination in Fuzzy graphs, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences 2010, 4(7), 1035-1037.

[27] Prosser Reese T.,Applications of Boolean Matrices to the Analysis of Flow Diagrams, Proceedings Of The Eastern Joınt Computer Conference, 1959, 59, 133-138

[28] Rautenbacha D., Zverovich V.E., Perfect graphs of strong domination and independent strong domination ,Discrete Mathematics 2001, 226 (1-3), 297–311.

[29] Sampathkumar E. and Pushpa Latha L., Strong weak domination and domination balance in a graph, Discrete Math. 1996, 161 (1-3), 235-242.

[30] Swaminathan V., Thangaraju P., Strong and weak domination in graphs, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2003, 15, 213-215.

[31] Vaidya, S., K., Mehta R., N., Strong Domination Number Of Some Cycle Related Graphs, 2017, 3, 72-80.

[32] Walikar H.B., Sampathkumar E., The Connected Domination Number of a Graph, 1979, 6, 607-613.

[33] West, D.B., Introduction to graph the theory, Prentice Hall Upper Saddle River, 2001,2, 588p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Berna LÖKÇÜ KURT

Doğum Yeri ve Yılı : Lüleburgaz, 1992

Medeni Hali :Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : berna.lkc15@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Lefkoşa Türk Lisesi, 2010

Lisans :Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014

Lisans : Anadolu Üniversitesi, İşletme Bölümü, 2016

Mesleki Deneyim

Manisa Büyükşehir Belediyesi Eğitim Kurumları 2016-….(halen)

Yayınları

Doğan Durgun D. , Lökçü B., Strong Domination Number of Some Graphs, CBU Journal of Sci., Volume 11, Issue 2, p89-91, 2015.

Doğan Durgun D. , Lökçü B., Weak and Strong Domination in Thorn Graphs, Asian-European Journal of Mathematics, Accepted. DOI: 10.1142/S1793557120500710

Konferanslar ve Sempozyumlar

Doğan Durgun D, Lökçü B, Weak and Strong Domination in Graphs, 28.national Students Science Congress, 7-9 September 2015, Antalya, TURKEY

Doğan Durgun D, Lökçü B, Weak and Strong Domination in Graphs, 2. International Students Science Congress, 4-5 May 2018, İzmir, TURKEY