

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**İKİ DEĞİŞKENLİ KİSMİ İNTEGRO DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN HERMİTE POLİNOMLARINA DAYALI  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI**

**Elif YALÇIN**

**Danışman  
Prof. Dr. Mehmet SEZER**



**MANİSA-2019**

## TEZ ONAYI

Elif YALÇIN tarafından hazırlanan " İki Değişkenli Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemlerin Hermite Polinomlarına Dayalı Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları" adlı tez çalışması 24/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman**                      **Prof. Dr. Mehmet SEZER**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**                      **Prof. Dr. Mehmet ÇEVİK**  
İzmir Katip Çelebi Üniversitesi

**Jüri Üyesi**                      **Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL**  
Dokuz Eylül Üniversitesi

**Jüri Üyesi**                      **Dr. Öğr. Üyesi Gökşen BACAĞ TURAN**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**                      **Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Elif YALÇIN**



# İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	III
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IV
TABLO DİZİNİ.....	V
TEŞEKKÜR .....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT .....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER .....	3
2.1 Kaynak Özetleri.....	3
2.2 Kısmi Diferansiyel Denklemler.....	7
2.3 İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	7
2.3.1 Hiperbolik Tip Denklemler.....	8
2.3.2 Parabolik Tip Denklemler.....	10
2.3.3 Eliptik Tip Denklemler .....	11
2.3.4 Başlangıç Değer Problemi (Cauchy Problemi) .....	11
2.3.5 Sınır Değer Problemi.....	12
2.4 Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler .....	13
2.5 Hermite Polinomları.....	15
2.5.1 Hermite Polinomlarının Özellikleri.....	16
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	20
3.1 Materyal .....	20
3.2 Yöntem.....	20
3.2.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler için Hermite Sıralama Yöntemi .....	21
3.2.1.1 Temel Matris Bağlıntıları .....	22
3.2.1.2 Çözüm Yöntemi.....	25
3.2.1.3 Hata Analizi .....	27
3.2.2. Bir Boyutlu Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Problemleri İçin Hermite Sıralama Metodu.....	30
3.2.2.1 Temel Matris Bağlıntıları .....	30
3.2.2.2 Çözüm Yöntemi.....	31
3.2.2.3 Hata Analizi .....	32

3.2.3 İki Boyutlu İntegral ve Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemler için Hermite-Taylor Sıralama Metodu.....	33
3.2.3.1 Temel Matris Bağlıntıları.....	34
3.2.3.2 Fonksiyonel Sınırlı Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Hermite-Taylor Sıralama Metodu	
3.2.3.2 Çözüm Yöntemi.....	42
3.2.3.3 Çözümün Doğruluğu.....	43
3.2.5 Bir Boyutlu Gecikmeli Parabolik Volterra Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Hermite Sıralama Metodu .....	43
3.2.5.1 Temel Matris Bağlıntıları.....	44
3.2.5.2 Birleştirilmiş Matris Çözüm Metodu .....	46
3.2.6 Birinci Mertebeden Doğrusal Olmayan Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Birleştirilmiş Hermite-Taylor Sıralama Metodu.....	47
3.2.6.1 Temel Matris Bağlıntıları.....	48
3.2.6.2 Çözüm Yöntemi.....	49
3.2.6.3 Çözümün Doğruluğu.....	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA .....	52
4.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler .....	52
4.2 Bir Boyutlu Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Problemleri ile ilgili Örnekler	62
4.3 İki Boyutlu İntegral ve Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler.....	66
4.4 Bir Boyutlu Gecikmeli Parabolik Volterra Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler .....	88
4.5 Birinci Mertebeden Doğrusal Olmayan Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler .....	93
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	101
KAYNAKLAR.....	103
ÖZGEÇMİŞ .....	113

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<b>DTM</b>	The differential transform method
$E_N(x, t)$	Mutlak Hata Fonksiyonu
<b>HCM</b>	Hermite collocation method (Hermite sıralama methodu)
$H_{n,m}(x, t)$	İki değişkenli Hermite Polinomları
$H_n(x)$	Tek değişkenli Hermite Polinomları
<b>KDD</b>	Kısmi diferansiyel Denklem
<b>PIDE</b>	Partial integro-differential equations (Kısmi integro-diferansiyel denklem)
<b>RBFM</b>	Radial basis function method (Radyal taban fonksiyonu methodu)
<b>RDTM</b>	The reduced differential transform method
$R_N(x, t)$	$u_N$ Hermite polinom çözümü için Rezidüel hata fonksiyonu
<b>TCM</b>	Taylor collocation method (Taylor sıralama metodu)
$u_N(x, t)$	N kesme sınırı için Hermite polinom çözümü
$u(x, t)$	Problemlere ait tam çözüm
$(x_i, t_j)$	Sıralama noktaları
$\Omega$	Kısmi diferansiyel denklemlerin ele alındığı bölge
$\partial\Omega$	$\Omega$ bölgesi sınırı

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Charles Hermite (1822, Dieuze, Fransa- 1901, Paris, Fransa) .....	166
Şekil 2.2 Hermite Polinomları .....	177
Şekil 4.1 Örnek 4.2'nin $0 \leq x, y \leq 1$ aralığı için tam çözümü .....	56
Şekil 4.2 Örnek 4.2'nin $N=11$ için $0 \leq x, y \leq 1$ aralığına ait Taylor polinom çözümü .....	57
Şekil 4.3 Örnek 4.2'nin $N=11$ için $0 \leq x, y \leq 1$ aralığına ait Hermite polinom çözümü .....	57
Şekil 4.4 Örnek 4.2'nin $N=11$ ve $y=0.5$ için Hermite ve Taylor metoduna ait mutlak hata grafiklerinin karşılaştırılması .....	58
Şekil 4.5 Örnek 4.3'ün $y=0.5$ ve farklı $N$ değerleri için mutlak hata ve rezidüel hata fonksiyonlarının karşılaştırılması .....	60
Şekil 4.6 Tablo 4.4'te verilen farklı metotlara ait mutlak hata sonuçlarının grafiği...61	
Şekil 4.7 Örnek 4.4'ün $0 \leq x, t \leq 1$ için tam çözümü .....	63
Şekil 4.8 Örnek 4.4'ün $N=11$ için mutlak hata fonksiyonu .....	<b>Hata! Yer işareti tanımlanmamış.4</b>
Şekil 4.9 Örnek 4.4'ün $N=12$ için mutlak hata fonksiyonu .....	655
Şekil 4.10 $t = 0.5$ ve $\epsilon = 4.10 - 2$ için Örnek 4.4'ün $N=11$ ve $N=12$ için mutlak hata grafikleri .....	65
Şekil 4.11 Örnek 4.7'in $0 \leq x, y \leq 1$ için tam çözümü .....	80
Şekil 4.12 Örnek 4.7'in $N=5$ için Hermite-Taylor polinom çözümü .....	81
Şekil 4.13 Örnek 4.7'in $N=6$ için Hermite-Taylor polinom çözümü .....	81
Şekil 4.14 Örnek 4.7'in $N=7$ için Hermite-Taylor polinom çözümü .....	82
Şekil 4.15 $y = 0.5$ için Örnek 4.7'nin $N=5,6$ ve $7$ için mutlak hata ve rezidüel hata grafikleri .....	833
Şekil 4.16 Örnek 4.8'in $0 \leq x, y \leq 1$ için tam çözümü .....	85
Şekil 4.17 Örnek 4.8'in $N=8$ için Hermite-Taylor polinom çözümü .....	85
Şekil 4.18 Örnek 4.8'in $N=9$ için Hermite-Taylor polinom çözümü .....	86
Şekil 4.19 $y = 0.5$ için Örnek 4.8'in $N=8$ ve $N=9$ için mutlak hata ve rezidüel hata fonksiyonu grafikleri .....	87

## TABLO DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Tablo 4.1 Örnek 4.2'nin $N=11$ için Taylor ve Hermite sıralama metoduna ait mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması .....	56
Tablo 4.2 Farklı $N$ değerleri için Örnek 4.3'ün yaklaşık çözümleri .....	59
Tablo 4.3 Örnek 4.3'nin farklı $N$ değerleri için hata analizleri .....	60
Tablo 4.4 $N=9$ için Örnek 4.3'ün mutlak hatalarının farklı metotlarla karşılaştırılması .....	61
Tablo 4.5 Örnek 4.4'ün farklı $N$ değerleri için yaklaşık çözümleri .....	633
Tablo 4.6 Örnek 4.4'ün farklı $N$ değerleri için mutlak hata değerleri .....	644
Tablo 4.7 Örnek 4.4'ün $t = 1$ ve $\epsilon = 4 \cdot 10^{-2}$ için $R_N(x_i, 1)$ rezidüel hata değerleri..	66
Tablo 4.8 Örnek 4.7'nin farklı $N$ değerleri için yaklaşık çözümleri .....	80
Tablo 4.9 Örnek 4.7'nin farklı $N$ değerleri için mutlak hata değerleri .....	82
Tablo 4.10 Örnek 4.7'in $N=7$ için elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması .....	83
Tablo 4.11 Örnek 4.8'in farklı $N$ değerleri için yaklaşık çözümleri .....	844
Tablo 4.12 Örnek 4.8'in farklı $N$ değerleri için hata analizleri .....	86
Tablo 4.13 Örnek 4.8'in farklı yöntemlerle mutlak hatalarının karşılaştırılması .....	87



## TEŞEKKÜR

Doktora öğrencilik hayatım boyunca, desteğini benden esirgemeyen, her türlü çalışmamda bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, çalışma azmi ve isteğiyle beni teşvik eden, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve her zaman örnek olan değerli Hocam Prof. Dr. Mehmet Sezer'e çok teşekkür ederim. Ayrıca akademik hayatım süresince, desteğini gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, çalışmalarımaya katkı sağlayan, üzerimde emeği olan tüm hocalarıma yürekten teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana destek olan, eğitimim için her türlü fedakârlıkta bulunan bugünlere gelmeme vesile olan canım annem ve canım babama çok teşekkür ederim. Göstermiş oldukları sabır, destek, anlayış ve ilgileri için sevgilim eşim ve oğlumaya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Elif YALÇIN  
Manisa, 2019



## ÖZET

### Doktora Tezi

### İki Değişkenli Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemlerin Hermite Polinomlarına Dayalı Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları

Elif YALÇIN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Bu çalışmada, kısmi diferansiyel denklemler, bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemleri, iki boyutlu integral denklemleri, iki boyutlu kısmi integro diferansiyel denklemler, bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemler ve bir boyutlu doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Hermite sıralama metodu geliştirilmiştir. Hermite sıralama metodu, Hermite polinomlarının matris formlarını kullanarak, ele alınan denklemde ve koşullarda her bir teriminin matris formunda yazımını sağlayarak, denklemi ve koşulları matris formuna dönüştürür. Sıralama noktalarının denklemde ve koşullarda kullanılmasıyla, Hermite katsayılarına sahip cebirsel denklemler sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle, Hermite polinom çözümleri elde edilmektedir.

Çalışmada, her bir denklem tipine ait örnekler ele alınarak, yöntemin doğruluğu ve etkinliği incelenmiştir. Örneklere ait Hermite polinom çözümleri ile tam çözümler tablo ve şekiller aracılığıyla karşılaştırılmıştır. Ayrıca mutlak hata fonksiyonu ve rezidüel hata fonksiyonu tablo ve şekiller yardımıyla karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu test edilmiştir.

Çalışmada ele alınan problemlerin çözümü ve analizi için MATLAB programında geliştirilen kodlar kullanılmıştır. Hermite sıralama metodunun kolay programlanabilen, hızlı ve güvenilir sonuçlar vermesi yöntemin en büyük avantajlarından biridir.

**Anahtar Kelimeler:** Hermite-Taylor polinomları, Matris sıralama metodu, Kısmi diferansiyel denklemler, İntegral denklemler, Gecikmeli ve lineer olmayan kısmi integro diferansiyel denklemler.

**2019, 114 sayfa**

## **ABSTRACT**

**Phd Thesis**

**Numerical Solutions Based on Hermite Polynomials of Partial Integro  
Differential Equations with Two Independent Variables and Their Applications**

**Elif YALÇIN**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER**

In this study, Hermite collocation method is developed for approximate solution of partial differential equations, one dimensional parabolic convection-diffusion problems, two-dimensional integral equations, two-dimensional partial integro differential equations, one-dimensional delayed parabolic Volterra partial integro-differential equations and one-dimensional nonlinear partial integro-differential equations. The Hermite collocation method, using the matrix forms of the Hermite polynomials, provides the matrix form of each term in the equation and conditions under consideration and transforms the equation and conditions into a matrix form. The method reduces the solution of the given problem to the solution of a matrix equation corresponding to algebraic equations system with unknown Hermite coefficients. By solving this system of equations, Hermite polynomial solutions are obtained.

In study, the method has been applied to examples of each type of equations in order to reveal to the correctness and validity of it. Absolute solutions have been compared to Hermite polynomial solutions through tables and figures. Also, the absolute error function and the residual error function have been tested by comparing with the help of tables and figures.

The codes developed in MATLAB program have been used for the solution and analysis of the problems discussed in the study. Hermite collocation method is easy to program, gives fast and reliable results. This is also the biggest advantages of the proposed method.

**Keywords:** Hermite and Taylor polynomials, Matrix-collocation method, Partial Differential Equations, Integral Equations, Delay and nonlinear partial integro differential equations.

**2019, 114 pages**

## 1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu farklı fizik alanlarından (akustik, optik, elastisite hidro ve aerodinamik, elektromanyetizma, kuantum mekaniği, sismoloji vb.) geldiğinden, genellikle matematiksel fizik denklemleri olarak adlandırılmaktadırlar. Kuantum kimyası, kimyasal kinetik gibi diğer bilim alanlarında da görülen kısmi diferansiyel denklemler, ekonomi, finansal matematik ve bilgisayar bilimleri gibi birçok bilim dalında karşımıza çıkmaktadır [1].

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD), pek çok fiziksel, kimyasal ve biyolojik olayın matematiksel modelinin temelinin oluşturmaktadır. Son zamanlarda kullanımı ekonometri, finansal tahminler, görüntü işleme ve diğer alanlarda da yayılmıştır. Bu tür olayların KDD modellerinin tahminlerini araştırmak için genellikle basit özel durumların analizi ile birlikte yaklaşık nümerik çözümlerini de elde etmek gerekmektedir [2].

Fiziksel olayları modellemek için kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerin neredeyse birçoğunu çözmek zordur; bunlardan çok azı tamamen anlaşılabilir. Pek çok durumda, bu denklemlerin çözümlerini hesaplamamanın ve anlamamanın tek yolu, kendi başına önemli ve aktif bir konu olan, sofistike nümerik metotların geliştirilmesidir. Fakat denklemlerin temel analitik özelliklerinin derinlemesine anlaşılması sağlanmadan, nümerik çözümlerinde ilerleme sağlanamaz. Bu sebeple çözümlerin elde edilmesinde, analitik ve sayısal yaklaşımlar ayrılmaz bir şekilde iç içe geçmiş durumdadır [3].

Uygulamalı bilimlerde karşımıza çıkan denklem türlerinin çoğu zaman çözümünü bulmak mümkün olmamaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan metotlarda sınırlıdır. Bazı durumlarda ise analitik çözüm elde edilse bile, fonksiyonun karmaşıklığından dolayı işlemek zor olmaktadır. Bu sebeple, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde sık sık nümerik yöntemler kullanılmaktadır [4].

Bu çalışmada, fizik, mühendislik, mekanik, biyoloji, kuantum mekaniği vb. birçok alanda karşımıza çıkan kısmi diferansiyel denklemler, bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemleri, iki boyutlu integral denklemleri, iki boyutlu kısmi integro diferansiyel denklemler, bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemler ve bir boyutlu doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denklem tipleri ele alınmıştır. Başlangıç sınır veya karışık koşullar altında ele alınan denklem tipleri için Hermite sıralama metoduna dayalı yeni bir Hermite matris metodu geliştirilmiştir. Yöntem ele alınan denklem tiplerini bir matris denklem sistemine dönüştürmeye dayanmaktadır. Elde edilen matris denklemi, doğrusal denklemler için bilinmeyen Hermite katsayılarından oluşan bir matris denklem sistemine, doğrusal olmayan denklemlerde ise sıralama noktaları yardımıyla oluşturulan doğrusal olmayan cebirsel denklem sistemine karşılık gelmektedir. Bu sistemlerin çözümünden bulunan Hermite katsayıları aracılığıyla, ele alınan denklem türlerinin (kısmi diferansiyel denklemler, bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemleri, iki boyutlu integral denklemleri, iki boyutlu kısmi integro diferansiyel denklemleri, bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemler ve bir boyutlu doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denklemler) Hermite seri formuna dayalı yaklaşık çözümü elde edilmektedir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı ele alınan kısmi diferansiyel denklem ve kısmi integro-diferansiyel denklem sınıfları için Hermite polinomları kullanılarak, matris işlemlerine dayalı Hermite sıralama metodu geliştirmektir. Giriş kısmının birinci bölümde yer aldığı çalışmanın ikinci bölümünde ise kısmi diferansiyel denklemlere ve Hermite polinomlarına ilişkin genel bilgiler yer almaktadır. Üçüncü bölümde, ise her bir denklem tipine uygun geliştirilen Hermite sıralama metoduna yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde önerilen metodun etkinliğini ve tutarlılığını göstermek amacıyla nümerik örneklere yer verilmiştir. Elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırılarak mutlak ve rezidüel hata analizi yapılmıştır. Ayrıca literatürde yer alan diğer metotlarla karşılaştırması yapılmıştır. Beşinci ve son bölümde ise sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, öncelikle çalışmanın temelini oluşturan iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem ve kısmi integro-diferansiyel denklemlerin gelişimi ve nümerik çözümleri ile birlikte Hermite sıralama yöntemine ilişkin literatür incelemesi yapılmıştır. Ardından kısmi diferansiyel denklemler ve kısmi integro-diferansiyel denklemlere ilişkin genel bilgilere yer verilerek, sınıflandırılmaları incelenmiştir. Son olarak Hermite polinomlarına ilişkin genel bilgilere yer verilerek, yaygın kullanılan özellikleri sunulmaktadır.

### 2.1 Kaynak Özetleri

Bilim dünyasında büyük devrim olan, Isaac Newton'un kurucusu olduğu kalkülüsün keşfi ile kısmi diferansiyel denklemlerin matematik ve birçok matematik uygulamalarında önemli bir rol oynadığı ortaya çıkmıştır. Kısmi diferansiyel denklemler aracılığıyla modellenen temel fiziksel olayların birçoğu isimlerini denklemleri keşfeden veya keşfinden öncelik edenlerden almıştır. Örneğin, kuantum mekaniği (Schrodinger, Dirac), görelilik (Einstein), elektromanyetizma (Maxwell), optik (eikonal, Maxwell – Bloch, doğrusal olmayan Schrodinger), akışkanlar mekaniği (Euler, Navier-Stokes, Korteweg de Vries, Kadomstev – Petviashvili), süper iletkenlik Ginzburg-Landau), plazmalar (Vlasov), magneto-hidrodinamik (Navier – Stokes + Maxwell), esneklik (Lam'e, von Karman), termodinamik (ısı), kimyasal reaksiyonlar (Kolmogorov – Petrovsky – Piskounov), finans (Black – Scholes), sinirbilim (FitzHugh - Nagumo) bunlardan bazılarıdır [3].

Kısmi diferansiyel denklemlere ait çalışmalar 18. yüzyılda Euler, d'Alembert, Lagrange ve Laplace'ın çalışmalarında merkezi bir araç olarak sürekli ortamlar mekaniğinin tanımlanmasında, fizik bilimindeki modellerin analitik olarak incelenmesiyle başlamıştır. Fiziksel modellerin analizi, KDD'lerin gelişimini yakından izleyerek günümüze kadar devam etmiştir. 19. yüzyılın ortalarından itibaren, özellikle Riemann'ın çalışmasıyla kısmi diferansiyel denklemler matematiğin diğer dallarında da önemli bir araç haline gelmiştir [5].

KDD, sürekli medya fiziğinde modellerin geliştirilmesi bağlamında ortaya çıkmıştır. Örneğin, titreşimli teller, elastikiyet, Newton'un genişletilmiş madde çekim

alanı, elektrostatik, akışkan akışı ve daha sonra ısı iletimi, elektrik ve manyetizma teorileri. Bunlara ilave olarak, diferansiyel geometrideki Monge\_Ampe\_re denklemi ve minimum yüzey denklemleri gibi denklemler, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin meydana gelmesine neden olmuştur. Euler-Lagrange prensibi şeklindeki klasik varyasyonlar kalkülüsü KDD'lere ve Hamilton-Jacobi teorisine yol açmıştır. Mekanikte ortaya çıkan bu durum ise birinci mertebeden KDD'lerin analizinin yapılmasına neden olmuştur. 18 yüzyılda, birinci mertebeden KDD teorisinin temelleri ve adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmesi gerçekleştirilmiştir. Daha sonraki gelişmeler için paradigma görevi gören klasik KDD'ler de 18. ve 19. yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır [5].

Bir boyutlu dalga denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d'Alembert tarafından 1752'de titreşimli bir yayın modelini tanımlamak için kullanılmış ve analiz edilmiştir. Bu çalışma, Euler tarafından (1759) genişletilmiş, sonrasında ise D. Bernoulli (1762) akustik dalgalar çalışmasında 2 ve 3 boyutlu dalga denklemine genişletmiştir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad \text{burada} \quad \Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Laplace denklemi;

$$\Delta u = 0$$

Laplace tarafından ilk olarak 1780'li yıllarda yerçekimi potansiyel alanlarında çalışılmıştır. Isı denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

Fourier tarafından (1810-1822), "Analitik Isı Teorisi" ile tanıtılmıştır [5].

Birçok önemli matematik düşüncesi fiziksel bilim çerçevesinde geliştirilmiştir. Örneğin, calculus kökeni vücut hareketini doğru bir şekilde tanımlama çabalarına dayanmaktadır. Matematiksel denklemler her zaman fizikte kavramları formüle etmek için bir bağlam sağlamıştır. Örneğin, Maxwell'in denklemleri elektrodinamik olayları, Newton'un denklemleri mekanik sistemleri, Schrödinger'in denklemi ise kuantum mekaniğinin yönlerini tanımlamaktadır. Ancak son yıllarda, matematikçiler ve bilim insanları bu tür bağlantıları, bilim ve teknolojinin neredeyse tüm alanlarını kapsayacak şekilde genişletti ve matematiksel modelleme adı verilen yeni bir alan ortaya çıktı. Matematiksel bir model, çözümü ilgili bir fiziksel sistemin fiziksel davranışını tanımlayan bir denklem veya denklem setidir [6].

İkinci mertebeden KDD'nin hiperbolik, eliptik ve parabolik tip üç ana örneği, 19. yüzyılın ilk on yılında tanıtılmasına rağmen, KDD'lerin sınıflandırılmasındaki merkezi rolü ve ilgili sınır değer problemleri bu yüzyılın sonuna kadar net bir şekilde formüle edilmemiştir [5]. Bilim ve mühendislikte yaşanan hızlı gelişmeler, kısmi diferansiyel denklem modellerinin daha iyi anlaşılmasını ve çözümlerinin daha geniş araştırılması ihtiyacını doğurmuştur. Kısmi diferansiyel denklemlere ait teori ve uygulamalar geliştikçe, yanıtlanması gereken sorularla birlikte çözülmesi gereken yeni problemler ortaya çıkmıştır. Bu sebeple kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için birçok farklı metot geliştirilmiştir. Fakat kısmi diferansiyel denklemlere ait birçok çalışma yapılmasına rağmen analitik çözümlerini veren yöntemler sınırlıdır. Bu sebeple nümerik çözüm metotlarına gereksinim duyulmuştur [7].

KDD'lerin yaklaşık çözümleri için birçok çalışma yapılmış ve farklı tipteki kısmi diferansiyel denklemler için farklı çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Son yıllarda ikinci mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler sayısal çözümleri birçok farklı metot geliştirilmiştir [7–12]. Telgraf denklemi için Chebyshev Tau metodu [13], Adomian ayrıştırma metodu [14], Spline Radyal taban fonksiyonuna dayalı nümerik metot [15], Chebyshev Cardinal fonksiyonlarına dayalı nümerik metot [16], enterpolasyonlu ölçeklendirme fonksiyonlarına dayalı nümerik metot [17], polinom olmayan spline metodu [18], Rothe metodu [19], Varyasyonel iterasyon metodu [20, 21], Legendre multiwavelet Galerkin metodu [22] literatürde yer alan bazı metotlardandır.



Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon problemlerine bilim ve mühendisliğin birçok farklı alanında model olarak rastlanmaktadır. Örneğin, nehir şebekelerinde su kalitesinin modellenmesi [23], hareketli ortamlarda elektromanyetik alan problemi [24] ve türbülans modeli [25] bunlardan bazılarıdır. Bu problemlerin çözümü için literatürde farklı metotlar geliştirilmiştir. Sonlu farklar metodu [26], Galerkin metodu [27], B-spline sıralama metodu [28, 29], Crank–Nicolson metodu [30], Rasyonel spektral sıralama metodu [31], parçalı analitik yöntem [32], Bessel sıralama metodu [33], Laguerre sıralama metodu [34, 35] bunlardan bazılarıdır. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Taylor matris metodu [36], spectral sıralama metodu [37], Galerkin metodu [38], Laguerre-Galerkin metodu [39], Spektral sıralama ve dalga şekli gevşeme metotları [40] uygulanmıştır.

Kısmi diferansiyel denklemler, mühendislik ve fizikte zaman ve uzay değişkenlerini içeren sistemlerin çeşitli alanlarındaki sayısız problemin modellenmesi için önemli bir araçtır [41]. Sistemin "hafızasının" etkilerini göz önüne almamız gerektiğinde, modellemede bilinmeyen fonksiyonu içeren integralli terim yer almaktadır. Bu sebeple, kısmi integro diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve integralli terimin birleşiminden oluşmaktadır [41]. Kısmi diferansiyel denklemler birçok farklı yöntemle çözüldüğü için, kısmi integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de bazı nümerik metotlar ele alınmıştır [41–50].

Tek boyutlu integral denklemleri; sıralama metodu [51], Taylor serisi genişletme metodu [52], Gauss tipi integrasyon metodu [53], spektral metotlar [54], Chebyshev sıralama metodu [55], Tau metodu [56], sinüs-kosinüs dalgacıkları metodu [57], Monte Carlo metodu [58], Haar fonksiyonları metodu [59] ve azaltılmış diferansiyel dönüşüm metodu (RDTM) ve diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) [60], geleneksel spektral metotlar (sıralama, Tau ve Galerkin yöntemi) ve Radyal taban fonksiyonu methodu (RBFM) [61], Gauss radyal taban fonksiyonu [62] gibi birçok farklı metotla çözülmüştür.

Doğrusal olmayan kısmi integro diferansiyel denklemler için radyal taban fonksiyonları metodu [41], Taylor seri açılımı metodu [63], pseudo-spectral Legendre–Galerkin metodu [64], Laguerre sıralama metodu [65], Galerkin sonlu

elemanlar metodu [66], Tau metodu [67], Bernoulli matris metodu [68] literatürde yer alan metotlardan bazılarıdır.

## 2.2 Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerinden oluşan bir denklemdir. Eğer bilinmeyen fonksiyon birden fazla değişkene bağlı ise “kısmi diferansiyel denklem” olarak adlandırılırlar, çünkü bilinmeyen fonksiyonun türevleri kısmi türevlerdir [69].

$x, t$  bağımsız değişkenleri ve bağımlı  $u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyonu için en genel ikinci mertebe kısmi diferansiyel denklem

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada,  $F; x, t, u, u_x, u_t \dots$  değişkenlerinin verilmiş bir fonksiyonu ve

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \dots$$

biçimindedir [70]. Bir kısmi diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesi, kısmi diferansiyel denklemin mertebesi olarak tanımlanmaktadır.

## 2.3 İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Adi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması, denklemin derecesine ve mertebesine bağlı şekilde, doğrusal ve doğrusal olmaması durumuna göre yapılmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ise denklemin mertebesinin ve doğrusallığının yanısıra kısmi diferansiyel denklemin yapısına göre yapılmaktadır. Çünkü çözümlerin özellikleri denklemin yapısına göre değişmektedir [71].

$u$  bağımlı değişken,  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenler ve  $L$  lineer diferansiyel operatör olmak üzere ikinci mertebeden hemen-hemen lineer

$$Lu \equiv A(x, t)u_{xx} + 2B(x, t)u_{xt} + C(x, t)u_{tt} + F(x, t, u, u_x, u_t) = 0 \quad (2.2)$$

kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$  ve  $C(x, t)$ ,  $x$ - $t$ -düzleminin bir  $\Omega$  bölgesinde tanımlı  $x$  ve  $t$ 'nin iki defa türevlenebilir sürekli fonksiyonlarıdır. Burada, üçünün birden aynı anda sıfır olmadığı kabul edilmektedir.  $AD_x^2 + 2BD_xD_t + CD_t^2$ 'ye  $L$  operatörünün esas kısmı denir. Bu kısım denklemin çözümlerinin özelliklerini belirlemektedir. Aşağıdaki,

$$\Delta(x, t) = B^2(x, t) - A(x, t)C(x, t)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon  $L$  diferansiyel operatörünün (denklem (2.2)'nin) diskriminantı olarak tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.1**  $\Omega$ 'nın bir  $(x_0, t_0)$  noktasında

- $\Delta(x_0, t_0) > 0$  ise (2.2) denkleminde bu noktada hiperboliktir,
- $\Delta(x_0, t_0) = 0$  ise (2.2) denkleminde bu noktada paraboliktir,
- $\Delta(x_0, t_0) < 0$  ise (2.2) denkleminde bu noktada eliptiktir,

şeklinde tanımlanmaktadır [6, 72].

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD), katı ve akışkanlar mekaniği, popülasyonların ve hastalığın evrimi ve matematiksel fizik gibi fiziksel sistemleri tanımlamaktadırlar. Kısmi diferansiyel denklemlerin birçok farklı türü, farklı özellik göstermektedirler. Örneğin, ısı denklemi ısıya ileten bir ortamda yayılmasını tarif eder, zaman ilerledikçe sıcaklığın mekansal dağılımını düzleştir; konsantrasyon hem mekanda hem de zaman içinde değiştiğinden, bir katının çözeltisinin moleküler difüzyonunu modellemektedir [18].

### 2.3.1 Hiperbolik Tip Denklemler

Hiperbolik tip kısmi diferansiyel denklemlerin sınıfına titreşim olayları ve cisimlerin dinamik hareketleri ile ilgili problemler girmektedir [73]. Bu tip denklemlere genellikle mekanik ve fizik alanlarındaki uygulamalarda karşılıılır. Çoğunlukla zamana bağlı olan bu denklemler, bir ortam içerisinde titreşimlerin ve

özellikle dalgaların nasıl yayıldığını tanımlamaktadırlar. Bu sebeple “dalga denklemleri” olarak adlandırılmakta ve en önemli örneği dalga denklemi olarak bilinmektedir. Fizik ve mühendislik alanlarında en çok karşılaşılan hiperbolik tip denklemler, dalga denklemi, telgraf denklemi ve lineer Klein-Gordon denklemleridir [71, 74].

- Bir boyutlu homojen dalga denklemi,  $a$  pozitif bir sabit olmak üzere,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [2]. Homojen olmayan bir boyutlu dalga denklemi ise,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada  $F$  dalgaya etki eden bilinen bir dış kuvveti,  $x$  değişkeni yer,  $t$  değişkeni ise zamanı belirtmektedir. Dolayısıyla denklemde  $x$  noktasının  $t$  anındaki dalga hareketi açıklanmaktadır [75]. Dalga denklemi, ses dalgaları, su dalgaları, elastik dalgalar, elektromanyetik dalgalar vb. sürekli ortamdaki titreşimleri ve dalgaları tanımlamaktadır [3].

- Bir boyutlu telgraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

şeklinde. Burada  $\alpha, \beta$  bilinen sabit katsayılar,  $F$  bilinen bir fonksiyondur [13]. Sabit katsayılı ikinci mertebeden telgraf denklemi olarak adlandırılan denklem difüzyon ve dalga denklemi karışımından oluşmaktadır. Sonlu hızın standart ısıya veya kütle taşıma denkleminde etkisini oluşturan terimi tanımlamaktadır [76]. Telgraf denklemi, elektrik sinyallerinin iletimi ve yayılması için sinyal analizinde yaygın olarak kullanılmasına rağmen farklı alanlarda da uygulamalara sahiptir [77].

- **Klein Gordon Denklemleri**

Doğrusal ve doğrusal olmayan olmak üzere iki çeşittir ve farklı fiziksel alanlarda kullanılmaktadırlar.  $a$  ve  $b > 0$  fiziksel sabit olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu$$

ile verilen denklem doğrusal Klein Gordon denklemidir.

Doğrusal olmayan Klein Gordon Denklemleri matematiksel fizikte önemli bir rol oynarlar [78,79]. Birçok doğrusal olmayan olayların tanımlanmasında karşımıza çıkan Klein Gordon denklemi katı hal fiziği, doğrusal olmayan optik ve kuantum alan teorisi gibi birçok bilimsel uygulamada önemli bir rol oynamaktadır [80]. Bir boyutlu doğrusal olmayan Klein Gordon denklemi;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(u) = F(x, t)$$

şeklindedir. Burada,  $u = u(x, t)$ ,  $x$  (yer) ve  $t$  (zaman) anında dalga yer değiştirmesini belirtirken  $a$ , bilinen bir sabittir ve  $h(u)$  doğrusal olmayan kuvvettir [81].

### 2.3.2 Parabolik Tip Denklemler

Hem ısı hem de daha genel difüzyon denklemleri parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin örnekleridir [4]. Fizikte katı bir cismin içinde veya homojen bir ortamda ısının iletiminde karşımıza sıklıkla çıktıkları için en çok karşılaşılan parabolik tip denklem ısı denklemleridir [4]. Isı denklemi, katılarda termal enerji, sıvılarda çözünen maddeler ve biyolojik popülasyonlar dahil olmak üzere difüzyon işlemlerini modellemektedir [3].

- Isı Denklemi

$k > 0$  ısı yayılım katsayısını,  $u$  ise  $x$  noktasındaki  $t$  anındaki sıcaklığı belirtmek üzere bir boyutlu homojen ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Denklem zamana bağlı ısı yayılımını göstermektedir. Bir boyutlu homojen olmayan ısı denklemi ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

ile tanımlanmaktadır. Isı denklemlerinde, başlangıç değerinde iletkenin sıcaklığı bilindiği için, ve bazılarında ısı iletimi iletkenin bir ucunda başladığından veya bittiğinden dolayı bu denklemler başlangıç ve sınır değer problemleri olarak bilinmektedirler [4].

### 2.3.3 Eliptik Tip Denklemler

Eliptik tip kısmi diferansiyel denklemlerin en önemli denklemleri Laplace ve Poisson Denklemleridir.  $u$ ;  $x$  ve  $y$  değişkenlerinin bir fonksiyonu olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

homojen doğrusal denklemine iki boyutlu Laplace denklemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$$

homojen olmayan doğrusal denklemine de Poisson denklemi denir [70]. Poisson denklemi denge mekaniğini yönetir ve Laplace denkleminin homojen olmayan karşılığıdır. İki denklemde matematik ve fizikte esneklik ve katı mekaniği, akışkanlar mekaniği, elektromanyetizma, potansiyel teori, termomekanik, geometri, olasılık, sayı teorisi ve diğer birçok alanda karşımıza çıkmaktadır [3].

### 2.3.4 Başlangıç Değer Problemi (Cauchy Problemi)

Genel formu (2.1)'de verilen kısmi diferansiyel denkleminin

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = m(x)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin aranması problemine “başlangıç değer problemi” adı verilmektedir [34]. A, B ve C xy- düzleminin bir  $\Omega$  bölgesinde x,y değişkenlerinin sürekli fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli hemen-hemen doğrusal

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.3)$$

kısmi diferansiyel denklemini verilsin. Burada  $\Gamma_0$ ,  $\Omega$  bölgesinde

$$x = x_0(\tau), \quad y = y_0(\tau), \quad a < \tau < b$$

parametrik denkleminle tanımlı bir eğri olmak üzere  $x_0$  ve  $y_0$  sürekli türevlenebilir fonksiyonlar ve

$$[x_0'(\tau)]^2 + [y_0'(\tau)]^2 \neq 0$$

dır.  $u_0(\tau)$  ve  $h(\tau)$ ,  $a < \tau < b$  aralığında birinci mertebeden sürekli türevlenebilir verilmiş fonksiyonlar olmak üzere, (2.3) denkleminin

$$\emptyset(x_0(\tau), y_0(\tau)) = u_0(\tau)$$

$$\emptyset_n(x_0(\tau), y_0(\tau)) = h(\tau)$$

koşullarını sağlayan  $u = \emptyset(x, y)$  integral yüzeyinin belirtilmesi problemine (2.3) denklemini için “Cauchy Problemi” denir. Burada  $\mathbf{n}$ ,  $\Gamma_0$  eğrisinin normalidir [70].

### 2.3.5 Sınır Değer Problemi

Kısmi diferansiyel denklemlerin uygun sınır koşulları ile birlikte kombinasyonu sınır değer problemi olarak adlandırılır [3]. Kısmi diferansiyel denklemlerin sağlandığı  $\Omega$  bölgesinin  $\partial\Omega$  sınırının üzerindeki noktalarda sağlanması gereken koşullar sınır koşullarıdır [82]. Uygulamaların çoğunda ortaya çıkan üç ana sınır değer problemi vardır. Çözümün etki alanı sınırındaki değerini belirlemek Dirichlet sınır koşulu olarak adlandırılır; çözümün normal türevinin sınır boyunca belirtilmesi, Neumann sınır koşuluyla adlandırılır. Fonksiyonun sınır boyunca

tanımlanması ve geri kalanı boyunca normal türev kullanılması, karışık bir sınır değer problemi ile adlandırılır [3].

Dirichlet sınır koşulu,  $x \in \partial\Omega$  ve  $t > 0$  olmak üzere,

$$u(x, t) = f(x, t)$$

ile verilir. Neumann sınır koşulu  $x \in \partial\Omega$  ve  $t > 0$  olmak üzere,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = f(x, t)$$

şeklindedir. Karışık sınır koşulu ise  $x \in \partial\Omega$  ve  $t > 0$  olmak üzere,

$$u(x, t) + \beta(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = f(x, t)$$

şeklindedir. Burada “n”, dış birim normal vektörünü belirtmektedir [82].

## 2.4 Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bir integro-diferansiyel denklem, bilinmeyen  $f(x)$  fonksiyonunu,  $f$  üzerinde hem türev hem de integral işlemleri ile birlikte içeren fonksiyonel bir denklem olarak tanımlanmaktadır. Türev her zaman bir değişkene göre alındığında, integro-diferansiyel denklem adi olarak adlandırılır. Diğer taraftan, eğer denklem farklı değişkenlere göre türev içeriyorsa kısmi integro-diferansiyel denklemler olarak adlandırılırlar. Bu denklemler sıklıkla matematiksel fizikte karşımıza çıkmaktadır [83].

Kısmi integro-diferansiyel denklemler, poro-viskoelastik ortamın sıkıştırılması [84], reaksiyon difüzyon problemleri [85], nükleer reaktör dinamikleri [86–88], jeofizik [89], plazma fiziği [90] ve elektromanyetik teori [91] gibi bazı fiziksel durumları tanımlamaktadırlar.

Kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen, uzay ve zaman değişkenlerini içeren sistemler olarak formüle edilmiş, mühendislik, biyoloji, fizik gibi çeşitli alanlarda birçok olay bulunmaktadır. Sistemin “hafızasının” etkilerini göz önüne almamız gerektiğinde, model bilinmeyen fonksiyonu içeren integral terimini içerir. Bu nedenle, elde edilen kısmi integro-diferansiyel denklem (partial integro-differential equations-PIDE), kısmi türevlerden ve integralli terimden oluşmaktadır [92]. Kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan ve bilinmeyen fonksiyonun birden fazla



bağımsız değişkene bağlı olduğu kısmi integro-diferansiyel denklemler, doğrusal ve doğrusal olmayan olmak üzere iki çeşittir [83, 93]. Bu denklemlerde kendi içlerinde farklı formlardan oluşmaktadır. Bu kesimde, çalışmada ele alınan kısmi-integro diferansiyel denklemlerin genel formlarına yer verilmiştir.

- İki boyutlu ikinci mertebeden bir kısmi integro-diferansiyel denklemin genel formu:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ + \mu \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \theta u(x, y) \\ + \int_a^{b(x)} \int_c^{d(y)} K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt = G(x, y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a \leq x, t \leq b, \quad c < y, s \leq d,$$

biçimindedir. Burada  $a, b, c, d$  sabitler,  $u(s, t)$  bilinmeyen bir fonksiyon ve  $K(x, y, s, t)$  integral denkleminin çekirdek fonksiyonudur. Burada,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \theta, G(x, y)$  ve  $u(x, y)$  'nin genellikle  $[a, b]$  ve  $[c, d]$  aralığında sürekli olduğu varsayılmaktadır [83, 94].

(2.4) denkleminde integral işaretinin üst sınırları ( $b(x)$  ve  $d(y)$ ) sırasıyla  $x$  ve  $y$ 'ye bağlı değilse, (2.4) denklemi Fredholm doğrusal kısmi integro-diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer  $b(x) = x$  ve  $d(y) = y$  ise (2.4) denklemi Volterra doğrusal kısmi integro-diferansiyel denklem olarak adlandırılır [83, 94].

Bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denkleminin genel formu;

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + P_1(x, t)u_x(x, t) + P_2(x, t)u_{xx}(x, t) \\ + P_3(x, t)u(\alpha x + \beta, \lambda t + \mu) \\ = G(x, t) + \int_0^t K(t, s)u(x, s)ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T$$

şeklindedir. Burada, Burada  $P_1(x, t)$ ,  $P_2(x, t)$ ,  $P_3(x, t)$ ,  $G(x, t)$ ,  $K(t, s)$  sürekli fonksiyonlar.  $u(x, s)$ , bilinmeyen fonksiyon,  $K(t, s)$  integral denkleminin çekirdek fonksiyonudur.

- Birinci mertebeden doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denkleminin genel formu;

$$u_t(x, t) = g(x, t) + P_1(x, t)u_x(x, t)u(x, t) + P_2(x, t)u^2(x, t) \quad (2.6) \\ + \int_0^t K(t, s)u(x, s)ds, \quad a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T$$

şeklindedir. Burada yer alan  $g$ ,  $P_1$  ve  $P_2$  ve  $K$  çekirdek fonksiyonu sürekli fonksiyonlardır.

## 2.5 Hermite Polinomları

Ortogonal polinomlar, matematik, fizik ve mekanik gibi bilim dallarının çeşitli alanlarında kullanılan önemli fonksiyonlardır. İyi bir yakınsama özelliğine sahip olan ve bir fonksiyonun ağırlık dağılımını kesin bir ağ üzerinde, iyi bir şekilde temsil etmesinden dolayı kolay kullanıma sahiptirler. Bu sebeple diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, kısmi integro-diferansiyel denklemler de dahil olmak üzere birçok denklemin çözümünü elde etmek amacıyla geliştirilen sayısal yöntemlerin temelinde yer almaktadırlar. Söz konusu denklemlerin çözümü elementer yöntemlerle de elde edilebilir; ancak bu yöntemlerle çoğu zaman tam çözümü elde etmek zor olmasından dolayı genellikle seri çözümlerinden yararlanılmaktadır. Bu seri çözümlerinden biri de Hermite polinomlarına dayalı seri çözümlerdir [95].

Klasik ortogonal polinomlardan biri olan Hermite polinomları Fransız Matematikçi Charles Hermite tarafından bulunmuştur. Charles Hermite, 1822'de Dieuze, Fransa'da doğmuştur. 1901'de Paris'te vefat etmiştir. Çalışmalarından en önemlisi,  $e$ 'nin tamsayı değerleri ile polinomal bir fonksiyon olamayacağını yani transcendental (aşkın) olduğunu ispatlamasıdır. Eliptik ve modüler fonksiyonlara da katkıda bulunan Hermite, yavaş yavaş tanınmış ve 1870 yılında Sorbonne'de profesör olmuştur [96].



**Şekil 2.1** Charles Hermite (1822, Dieuze, Fransa- 1901, Paris, Fransa)

Hermite, Abelian fonksiyonlarında öncü çalışmalar yapmıştır. Kariyeri boyunca, genç matematikçilere yardımlarını esirgememiştir. Cebirsel değişmezler üzerinde çalışan Hermite şimdilerde Hermite diferansiyel denklemi olarak bilenen diferansiyel denklem sınıfı üzerine çalışmıştır. Bu denklemin daha sonra basit harmonik osilatörün kuantum mekanik davranışlarında ortaya çıktığı bulunmuştur. Bu çözümler Hermite polinomlarıdır. Hermitian matrislerin bazı özelliklerini keşfeden Hermite, sonrasında eliptik modüler fonksiyonları kullanarak genel quintic denklemini çözmüştür [97].

Hermite, dünyanın en büyük matematikçileri arasında yer alan Emile, Picard, Gaston Darboux, Paul Appel, Emile Borel, Paul Painleve ve Henri Poincare gibi birçok ünlü matematikçiyi yetiştirmiştir. 14 ocak 1901'de vefat eden Hermite, ardında koca bir matematik ordusu bırakmıştır. Bu onun gerçekleştirdiği en büyük hizmettir [98].

### 2.5.1 Hermite Polinomlarının Özellikleri

Hermite polinomları,  $-\infty < x < \infty$  aralığında tanımlanan ve

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinden biri  $y = H_n(x)$  olan bir fonksiyondur;

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! 2^{n-2k}}{(n-2k)! k!} x^{n-2k} \quad (2.7)$$

açık formu ile gösterilir [99]. (2.7) eşitliği yardımıyla ilk birkaç Hermite polinomu;

$$n = 0 \text{ için; } H_0(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 0! (2x)^{2k}}{(-2k)! k!} = \frac{(-1)^0 0! (2x)^0}{(0)! 0!} = 1$$

$$n = 1 \text{ için; } H_1(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 1! (2x)^{1-2k}}{(1-2k)! k!} = \frac{(-1)^0 1! 2x}{(1)! 0!} = 2x$$

$$n = 2 \text{ için; } H_2(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2! (2x)^{2-2k}}{(2-2k)! k!} = \frac{(-1)^0 2! (2x)^2}{0! 2!} + \frac{(-1)^1 2! (2x)^0}{1! 0!}$$

$$= 4x^2 - 2$$

$$n = 3 \text{ için; } H_3(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 3! (2x)^{3-2k}}{(3-2k)! k!} = \frac{(-1)^0 3! (2x)^3}{0! 3!} + \frac{(-1)^1 3! 2x}{1! 1!}$$

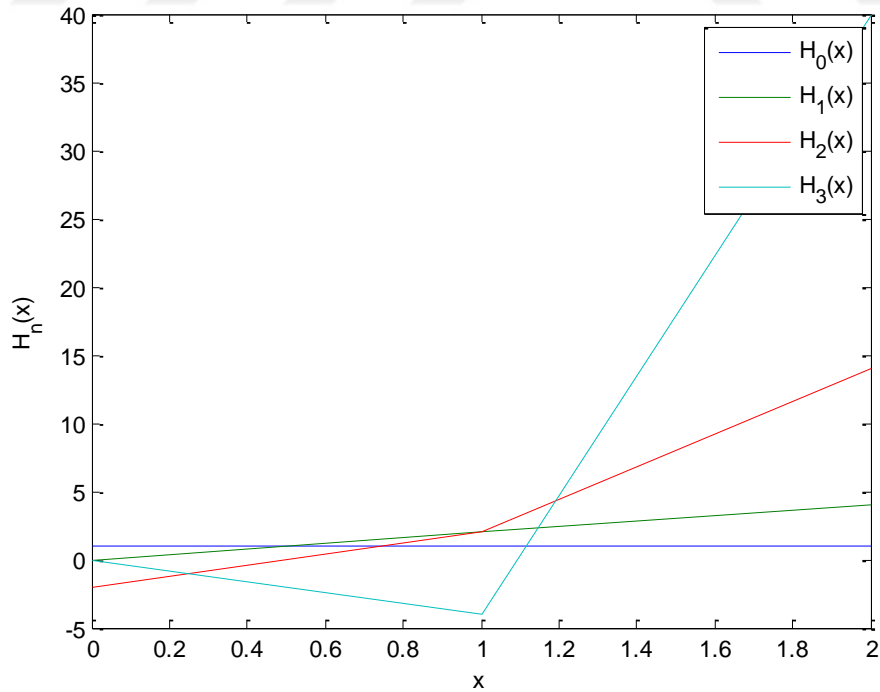
$$= 8x^3 - 12x$$

$$n = 4 \text{ için; } H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$n = 5 \text{ için; } H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$n = 6 \text{ için; } H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

şeklinde açılır.



Şekil 2.2 Hermite Polinomları

Hermite polinomları  $(-\infty, +\infty)$  aralığında;

$$w(x) = e^{-x^2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Burada üstel fonksiyon her  $x^m$  kuvvetinden daha hızlı sıfıra gider ve ıraksaklığı önler [100]. Ve  $m, n \in \mathbb{N}_0$  ve  $m \neq n$  olmak üzere;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0$$

bağıntısını gerçekler [101]. Hermite polinomları,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Rodriquez formülü ile tanımlanmaktadır [102]. Üç terimli rekürans bağıntısı ise  $H_0(x) = 1$  ve  $H_1(x) = 2x$  olmak üzere;

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

şeklindedir. Bağıntının türevinin alınması sonucu,

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N} \text{ ve } x \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Buradan;

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \text{ ve } x \in \mathbb{R}$$

olur [103].

Hermite polinomlarının üreten fonksiyonu;

$$H(x, t) = e^{2xt-t^2}, \quad |t| < \infty, \quad |x| < \infty \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Hermite polinomlarının serisel ifadesi bu bağıntıdan faydalanılarak elde edilmektedir. (2.8) eşitliğinde yer alan  $f(x, t) = e^{2xt-t^2}$ , nin t'ye göre türevi alındığında;

$$f'(t) = (2x - 2t)e^{2xt-t^2}$$

$$f''(t) = 2x(2x - 2t)e^{2xt-t^2} - 2e^{2xt-t^2} - 2t(2x - 2t)e^{2xt-t^2}$$

$$f'''(t) = (x - t)e^{2xt-t^2} \{2[4(x - t)^2 - 2] - 8\}$$

⋮

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 2x$$

$$f''(0) = 4x^2 - 2$$

$$f'''(0) = 8x^3 - 12x$$

olduğundan  $f(t)$  fonksiyonunun seri açılımı,

$$f(t) = 1 + \frac{2xt}{1!} + (-2 + 4x^2) \frac{t^2}{2!} + \frac{(-12x + 8x^3)t^3}{3!} + \dots$$

şeklinde elde edilir. Buradan Hermite polinomlarının serisel ifadesi;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}$$

biçimindedir [100, 101].

### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

#### 3.1 Materyal

Bu bölümde kısmi diferansiyel denklemler, bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemleri, iki boyutlu integral denklemleri, iki boyutlu kısmi integro-diferansiyel denklemler, bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemler ve bir boyutlu doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denklemler için Hermite sıralama yöntemi materyal olarak açıklanmaktadır. Denklemlere ait matris bağıntıları, Hermite polinomu ve sıralama noktaları kullanılarak ele alınan problem cebirsel denklem sistemine dönüştürülerek çözümünün hesaplanması temel alınmıştır. Oluşturulan bu cebirsel denklem sisteminin çözümüyle birlikte yaklaşık çözümler elde edilecektir. Ayrıca çözümlerin tutarlılığının araştırılması için norm değerleri ve rezidüel fonksiyon yardımıyla hata analizi yapılacaktır.

#### 3.2 Yöntem

Bu kesimde iki değişkenli kısmi integro diferansiyel denklemlerin Hermite polinomlarına dayalı nümerik çözümleri için geliştirilen Hermite sıralama yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntem;

$$u(x, y) \cong u_N(x, y)$$

$$u_N(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_{m,n} H_{n,m}(x, y), \quad H_{n,m}(x) = H_n(x)H_m(y) \quad (3.1)$$

sonlu Hermite seri formuna dayanmaktadır. Burada  $u_N(x, y)$  Hermit seri açılımına bağlı yaklaşık çözüm olarak elde edilecek bilinmeyen bir fonksiyonu,  $a_{m,n}$  ise bilinmeyen Hermite katsayılarını,  $H_n(x)$  ve  $H_m(y)$  ise Hermit polinomlarını belirtmektedir. Burada

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! 2^{n-2k}}{(n-2k)! k!} x^{n-2k} \quad (3.2)$$

şeklindedir [104, 105].  $H_n(x)$ , n. dereceden Hermit polinomunu ifade etmektedir ve ilk birkaç Hermite polinomu;

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (3.3)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Hermite polinomlarına ait genel bilgiler Kesim 2.5'de ayrıntılı biçimde ele alınmıştır.

### 3.2.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler için Hermite Sıralama Yöntemi

Bu kesimde kısmi diferansiyel denklemler için Hermite sıralama yöntemi ele alınacaktır. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin genel formu

$$\begin{aligned} P_1(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + P_2(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} + P_3(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ + P_4(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + P_5(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + P_6(x, y) u(x, y) = G(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir. (3.4) genelleştirilmiş kısmi diferansiyel denkleminin başlangıç koşulları,

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3.5)$$



$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = m(x), \quad x \in [0, 1]$$

sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u(0, y) &= h(y), & y \in [0, Y] \\ u(1, y) &= k(y), & y \in [0, Y] \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.  $P_1(x, y)$ ,  $P_2(x, y)$ ,  $P_3(x, y)$ ,  $P_4(x, y)$ ,  $P_5(x, y)$ ,  $P_6(x, y)$  ve  $G(x, y)$  belirtilen aralıklarda tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere, (3.4)-(3.6) problemine ait (3.1) yaklaşık çözümü, (3.2) sonlu Hermite polinomu cinsinden Hermite sıralama yöntemi ile elde edilecektir.

### 3.2.1.1 Temel Matris Bağlılıları

(3.4) kısmi diferansiyel denkleminin belirtilen (3.5)-(3.6) koşulları altında (3.1) sonlu Hermite serisi formunda yaklaşık bir çözümün olduğu kabul edilsin. Bu yaklaşık çözümün matris formu;

$$u(x, y) \cong u_N(x, y) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilmektedir. Burada;

$$\mathbf{H}(x) = [H_0(x) \ H_1(x) \ \cdots \ H_N(x)]$$

$$\mathbf{H}(y) = [H_0(y) \ H_1(y) \ \cdots \ H_N(y)]$$

$$\bar{\mathbf{H}}(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{H}(y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = [A_0 \ A_1 \ \cdots \ A_N]^T$$

$$A_i = [a_{i0} \ a_{i1} \ \cdots \ a_{iN}]^T \quad i = 0, \dots, N$$

$$\mathbf{A} = [a_{0,0} \ a_{0,1} \ \cdots \ a_{0,N} \ a_{10} \ a_{11} \ \cdots \ a_{1N} \ \cdots \ a_{N0} \ a_{N1} \ \cdots \ a_{NN}]^T$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada tanımlanan  $H_0(x) H_1(x) \cdots H_N(x)$  ifadeleri Denklem (3.3)'te tanımlanan Hermite polinomlarıdır. Hermite polinomlarının özelliklerinden,

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}, \quad \mathbf{H}(y) = \mathbf{X}(y)\mathbf{F} \quad (3.8)$$

olur. Buradaki matrisler

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \dots \quad x^N], \quad \mathbf{X}(y) = [1 \quad y \quad \dots \quad y^N]$$

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0 0! 2^0}{0!0!} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0 1! 2^1}{0!1!} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^1 2! 2^0}{1!0!} & 0 & \frac{(-1)^0 2! 2^2}{0!2!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{N/2} N! 2^0}{\left(\frac{N}{2}\right)!0!} & 0 & \frac{(-1)^{\frac{N}{2}-1} N! 2^2}{\left(\frac{N}{2}-1\right)!2!} & 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)^0 N! 2^N}{0!N!} \\ 0 & \frac{(-1)^{(N-1)/2} N! 2^1}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!1!} & 0 & \frac{(-1)^{(N-1)/2} N! 2^3}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!3!} & \dots & 0 & \frac{(-1)^0 N! 2^N}{0!N!} \end{bmatrix}$$

$N$  çift ise  $\leftarrow$

$N$  tek ise  $\leftarrow$

biçimindedir. Benzer şekilde;

$$\bar{\mathbf{H}}(y) = \bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}} \quad (3.9)$$

olur. Burada;

$$\bar{\mathbf{X}}(y) = \text{diag}[\mathbf{X}(y), \mathbf{X}(y), \dots, \mathbf{X}(y)]$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \text{diag}[\mathbf{F}, \mathbf{F}, \dots, \mathbf{F}]$$

biçimindedir. Yine Hermite polinomlarının özelliklerinden;

$$\mathbf{H}^{(k)}(x) = \mathbf{H}(x)(\mathbf{M})^k, \quad \mathbf{H}^{(k)}(y) = \mathbf{H}(y)(\mathbf{M})^k, \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.10)$$

yazılabilir. Buradan  $\mathbf{H}(x)$  ve  $\bar{\mathbf{H}}(y)$ 'nin türevlerinin oluşturduğu matrisler,

$$\mathbf{H}'(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}, \quad \mathbf{H}''(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2 \quad (3.11)$$

$$\bar{\mathbf{H}}'(y) = \bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}, \quad \bar{\mathbf{H}}''(y) = \bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}^2 \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2.1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2N & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}, \dots, \mathbf{M})$$

dır. Böylece buradan,

$$u(x, y) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{A} \quad (3.13)$$

$$u_x(x, y) = \mathbf{H}'(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\mathbf{M}\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{A} \quad (3.14)$$

$$u_{xx}(x, y) = \mathbf{H}''(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} \quad (3.15)$$

$$= \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{A}$$

$$u_{xy}(x, y) = \mathbf{H}'(x)\bar{\mathbf{H}}'(y)\mathbf{A} = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} \quad (3.16)$$

$$= \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\mathbf{M}\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A}$$

$$u_y(x, y) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}'(y)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
u_{yy}(x, y) &= \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}^2 \mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}^2 \mathbf{A} \\
&= \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(y) \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{M}}^2 \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitlikleri elde edilmektedir. Aynı şekilde (3.5) ve (3.6) koşulları içinde matris gösterimleri aşağıdaki gibi benzer şekilde elde edilir.

$$u(x, 0) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(0)\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(0)\mathbf{F}\mathbf{A} = f(x) \tag{3.19}$$

$$u_y(x, 0) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(0)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} = m(x) \tag{3.20}$$

$$u(0, y) = \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = \mathbf{X}(0)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{A} = h(y) \tag{3.21}$$

$$u(1, y) = \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = \mathbf{X}(1)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(y)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{A} = k(y) \tag{3.22}$$

Elde edilen (3.13)-(3.18) matris bağıntıları (3.4) denkleminde yerine yazılarak  $0 \leq x \leq 1 < \infty$ ,  $0 < y \leq Y < \infty$  için,

$$\left\{ \begin{array}{l}
P_1 \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2 \bar{\mathbf{H}}(y) + P_2 \mathbf{H}(x)\mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}} \\
+ P_3 \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y) \bar{\mathbf{M}}^2 + P_4 \mathbf{H}(x)\mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(y) \\
+ P_5 \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}} + P_6 \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)
\end{array} \right\} \mathbf{A} = G(x, y) \tag{3.23}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{W(x,y)}$

genel matris eşitliği elde edilir.

### 3.2.1.2 Çözüm Yöntemi

(3.23) genel matris denkleminde,

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N}\right)i, \quad y_j = c + \left(\frac{d-c}{N}\right)j; \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.24)$$

sıralama (collocation) noktaları yerine yazıldığında;

$$\mathbf{W}(x_i, y_j)\mathbf{A} = \mathbf{G}(x_i, y_j) \quad (3.25)$$

matris denklem sistemi elde edilir. Burada;

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(x_0, y_0) \\ W(x_0, y_1) \\ \vdots \\ W(x_0, y_N) \\ W(x_1, y_0) \\ W(x_1, y_1) \\ \vdots \\ W(x_1, y_N) \\ \vdots \\ W(x_N, y_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_0, y_0) \\ G(x_0, y_1) \\ \vdots \\ G(x_0, y_N) \\ G(x_1, y_0) \\ G(x_1, y_1) \\ \vdots \\ G(x_1, y_N) \\ \vdots \\ G(x_N, y_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}]$$

genelleştirilmiş matrisi elde edilir. Benzer biçimde (3.24) sıralama noktaları (3.5) ve (3.6) başlangıç ve sınır koşullarında yerine yazılırsa,

$$u(x_i, 0) = \mathbf{H}(x_i)\bar{\mathbf{H}}(0)\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{X}(x_i)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{F}}}_{U_1}\mathbf{A} = f(x_i)$$

$$\mathbf{U}_1\mathbf{A} = \mathbf{f} \quad (3.26)$$

$$u_y(x_i, 0) = \underbrace{\mathbf{X}(x_i)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{M}}_{U_2}\mathbf{A} = m(x_i)$$

$$U_2 A = m$$

ve

$$u(0, y_j) = \underbrace{X(0)F\bar{X}(y_j)\bar{F}}_{U_3} A = h(y_j)$$

$$U_3 A = h, \quad (3.27)$$

$$u(1, y_j) = \underbrace{X(1)F\bar{X}(y_j)\bar{F}}_{U_4} A = k(y_j)$$

$$U_4 A = k,$$

elde edilir. Koşullara ait bu değerler (3.25) denklem sisteminin son satırları ile yer değiştirildiğinde,

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} W & ; & G \\ U_1 & ; & f \\ U_2 & ; & m \\ U_3 & ; & h \\ U_4 & ; & k \end{bmatrix} \text{ yani } \tilde{W} A = \tilde{G} \rightarrow A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} \quad (3.28)$$

artırılmış matrisi elde edilir. (3.28) cebirsel denklem sistemi  $(N + 1)^2$  bilinmeyene sahip ve  $(N + 1)^2$  denklemden oluşmaktadır. Burada  $\det(\tilde{W}) \neq 0$  ise yani  $\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W}; \tilde{G}] = (N + 1)^2$  ise (3.28) denklem sistemi çözümlenerek Hermit katsayılarından oluşan  $A$  matrisi elde edilir. Bu matris (3.1) sonlu Hermit seri formunda yerine yazılarak, (3.4)-(3.6) probleminin Hermite polinomlarına dayalı nümerik çözümü elde edilmektedir.

### 3.2.1.3 Hata Analizi

Bu kesimde, (3.4)-(3.6) probleminin çözümü için önerilen Hermite sıralama yönteminin, işlerliği ve tutarlılığı için mutlak hata ve rezidüel hata değerleri elde edilecektir.

Problemin Hermite sıralama yöntemi ile elde edilen  $u_N(x, y)$  yaklaşık çözümünün mutlak hatası

$$E_N(x_p, y_q) = |u(x_p, y_q) - u_N(x_p, y_q)|$$

biçiminde elde edilmektedir. (3.4)-(3.6) probleminin elde edilen (3.7) yaklaşık çözümü ve onun türevleri denklem (3.4)'de yerine yazıldığında,  $x_p \in [0, 1]$  ve  $y_q \in [0, Y]$ ,  $p = 0, 1, \dots, P$ ;  $q = 0, 1, \dots, Q$  için, (3.4)-(3.6) probleminin rezidüel fonksiyonunun değerleri;

$$\begin{aligned} R_N(x_p, y_q) = & \left| P_1 \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_p, y_q) + P_2 \frac{\partial^2 u_N}{\partial y \partial x}(x_p, y_q) \right. \\ & + P_3 \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2}(x_p, y_q) + P_4 \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_p, y_q) \\ & \left. + P_5 \frac{\partial u_N}{\partial y}(x_p, y_q) + P_6 u_N(x_p, y_q) - G(x_p, y_q) \right| \cong 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Eğer  $R_N(x_p, y_q) \leq 10^{-k_{pq}}$  ( $k_{pq}$  pozitif tamsayıdır) veya  $\max(10^{-k_{pq}}) = 10^{-k}$  ( $k$  pozitif tamsayıdır) olarak belirlenirse, böylece  $N$  kesme sınırı arttıkça  $R_N(x_p, y_q)$ 'nin, her noktada, önceden belirlenmiş  $10^{-k}$  değerinden küçük olması beklenmektedir [36].

$u(x, y)$ , (3.4)-(3.6) probleminin çözümü olmak üzere,  $u_N(x, y)$  Hermite polinom çözümü için  $e_N(x, y)$  hata fonksiyonu

$$e_N(x, y) = u(x, y) - u_N(x, y) \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.29)'da tanımlanan hata fonksiyonu (3.4)-(3.6) probleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
& P_1(x, y) \frac{\partial^2 e_N(x, y)}{\partial x^2} + P_2(x, y) \frac{\partial^2 e_N(x, y)}{\partial y \partial x} + P_3(x, y) \frac{\partial^2 e_N(x, y)}{\partial y^2} \\
& + P_4(x, y) \frac{\partial e_N(x, y)}{\partial x} + P_5(x, y) \frac{\partial e_N(x, y)}{\partial y} \\
& + P_6(x, y) e_N(x, y) = -R_N(x, y) \tag{3.30} \\
& e_N(x, 0) = 0 \\
& \frac{\partial e_N(x, 0)}{\partial y} = 0 \\
& e_N(0, y) = 0 \\
& e_N(1, y) = 0
\end{aligned}$$

homojen koşullara sahip hata problemi elde edilir. Kesim 3.2.1’de sunulan yöntem ile (3.30) problemi çözüldüğünde;  $e_N(x, y)$  hata fonksiyonu için  $e_{N,M}(x, y)$  hata yaklaşımı elde edilir. Burada M, hata probleminin Hermite polinom çözümü için belirlenen kesme sınırını göstermektedir. Eğer ele alınan problemin tam çözümü bilinmiyorsa,  $e_{N,M}(x, y)$  yaklaşımı kullanılarak, hata fonksiyonu tahmini yapılabilmektedir [7, 71].

(3.4)-(3.6) probleminin (3.1) yaklaşık çözümü rezidüel hata fonksiyonu tahmini ile iyileştirilmesi için öncelikle  $e_N(x, y)$  hata fonksiyonu için  $e_{N,M}(x, y)$  hata yaklaşımı elde edilir. Ardından (3.1) ile hata fonksiyonunun yaklaşımı toplandığında;

$$u_{N,M}(x, y) = u_N(x, y) + e_{N,M}(x, y)$$

iyileştirilmiş yaklaşık çözüm elde edilir. Ayrıca, İyileştirilmiş Hermite polinom çözümü için, iyileştirilmiş hata fonksiyonu

$$e_{N,M}^*(x, y) = e_N(x, y) - e_{N,M}(x, y)$$

ile elde edilir [106].



### 3.2.2. Bir Boyutlu Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Problemleri İçin

#### Hermite Sıralama Metodu

Bu kesimde, bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemlerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için Hermite sıralama metodu açıklanmıştır. Ele alınan denklemin genel formu;

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + P_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + P_2(x)u(x, t) = G(x, t), \quad (3.31)$$

$$0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T$$

şeklindedir. Bu denklem,

$$u(x, 0) = m(x), \quad 0 \leq x \leq \ell < \infty \quad (3.32)$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, t) = n(t), \quad u(\ell, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T < \infty \quad (3.33)$$

sınır koşulları altında ele alınmıştır. Burada,  $G(x, t)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $m(x)$ ,  $n(t)$  ve  $h(t)$   $[0, \ell] \times [0, T]$  üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere,  $T$  ve  $\ell$  uygun sabitlerdir. (3.31)-(3.33) probleminin (3.1) formundaki yaklaşık çözümü Hermite polinomları cinsinden elde edilecektir.

#### 3.2.2.1 Temel Matris Bağlıları

Öncelikle (3.31)-(3.33) probleminin Hermite polinomları cinsinden yaklaşık çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. Bu çözüm matris formunda

$$u(x, t) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} \quad (3.34)$$

biçiminde yazılır. (3.34) ve (3.10) eşitliklerinden yaklaşık çözümünün elde edilmesinde gerekli olan matris formları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x, t) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A}$$

(3.35)

$$u_t(x, t) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}} \mathbf{A}$$

$$u_x(x, t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A}$$

$$u_{xx}(x, t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A}.$$

(3.35) eşitlikleri, (3.31) parabolik konveksiyon-difüzyon denkleminin genel formunda yerine yazılarak, denklemin genel matris formu

$$\{\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}} - \epsilon \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(t) \quad (3.36)$$

$$+ P_1(x)\mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)+P_2(x)\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\} \mathbf{A} = [G(x, t)]$$

$$W(x, t)\mathbf{A} = G(x, t)$$

şeklinde elde edilir. Benzer adımlar (3.32)-(3.33) koşulları için uygulandığında koşulların matris gösterimi,

$$u(x, 0) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(0)\mathbf{A} = m(x),$$

$$u(0, t) = \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} = n(t), \quad (3.37)$$

$$u(l, t) = \mathbf{H}(l)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} = h(t)$$

biçiminde elde edilir.

### 3.2.2.2 Çözüm Yöntemi

(3.24) sıralama noktaları (3.36) denkleminde yerine yazıldığında,

$$W(x_i, t_j)\mathbf{A} = G(x_i, t_j), \quad i, j = 0, 1, \dots, N \quad (3.38)$$

$$\{\mathbf{H}(x_i)\bar{\mathbf{H}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} - \epsilon \mathbf{H}(x_i)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(t_j)$$

$$+ P_1(x_i)\mathbf{H}(x_i)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t_j)+P_2(x_i)\mathbf{H}(x_i)\bar{\mathbf{H}}(t_j)\} \mathbf{A}$$

$$= [G(x_i, t_j)]$$

matris denklemler sistemi elde edilir. Kısaca (3.38) denklemi;

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.39)$$

biçiminde yazılır. Benzer şekilde, (3.37) başlangıç ve sınır koşullarında, kullanılmayan (3.24) sıralama noktaları yerine yazıldığında

$$\mathbf{UA} = \mathbf{C} \rightarrow [\mathbf{U}; \mathbf{C}] \quad (3.40)$$

koşullar matrisi elde edilir. Burada

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U(x_i, 0) \\ U(b, t_j) \\ U(a, t_j) \end{bmatrix}, \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} m(x_i) \\ n(t_j) \\ h(t_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (3.40) koşullar matrisi, (3.39) denklem sisteminin son satırlarıyla yer değiştirilerek,

$$\bar{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \check{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{A} = (\bar{\mathbf{W}})^{-1}\check{\mathbf{G}} \quad (3.41)$$

artırılmış matris elde edilir. (3.41) matris sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen Hermite katsayılarından oluşan  $\mathbf{A}$  matrisi elde edilir. Bu matris (3.1) kesilmiş Hermite seri formunda yerine yazılarak, yaklaşık çözüm elde edilir.

### 3.2.2.3 Hata Analizi

Bu kesimde, (3.31)-(3.33) probleminin çözümü için önerilen Hermite sıralama yönteminin, işlerliği ve tutarlılığı için mutlak hata analizi ve rezidüel hata değerleri elde edilecektir. Mutlak hata değeri Kesim 3.2.1.3'de verildiği gibi bulunmaktadır.

(3.31)-(3.33) probleminin elde edilen  $u_N(x, t)$  yaklaşık çözümü ve onun türevleri denklem (3.31)'de yerine yazıldığında, (3.31)-(3.33) probleminin rezidüel fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
& R_N(x_p, t_q) \\
&= \frac{\partial u_N}{\partial t}(x_p, t_q) \\
&- \epsilon \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_p, t_q) P_1(x_p) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_p, t_q) + P_2(x_p) u_N(x_p, t_q) - G(x_p, t_q) \\
&\cong 0, \\
& \quad x_p \in [a, b] \text{ ve } t_q \in [0, T],
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Eğer  $R_N(x_p, t_q) \leq 10^{-k_{pq}}$  ( $k_{pq}$  pozitif tamsayıdır) veya  $\max(10^{-k_{pq}}) = 10^{-k}$  ( $k$  pozitif tamsayıdır) olarak belirlenirse, böylece  $N$  kesme sınırı arttıkça  $R_N(x_p, t)$ 'nin, her noktada, önceden belirlenmiş  $10^{-k}$  değerinden küçük olması beklenmektedir [36].

### 3.2.3 İki Boyutlu İntegral ve Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemler için Hermite-Taylor Sıralama Metodu

Bu kesimde kısmi integro-diferansiyel denklemler için Hermite-Taylor sıralama yöntemi ele alınacaktır. Öncelikle genel formu;

$$\begin{aligned}
& \alpha \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\
& \quad + \mu \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \theta u(x, y) \\
& \quad + \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt = G(x, y) \\
& \quad a \leq x, t \leq b, \quad c < y, s \leq d,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde olan kısmi integro diferansiyel denklemi başlangıç ve/veya sınır koşulları altında

$$\begin{aligned}
& u(x, c) = f(x), \quad u_y(x, c) = m(x), \quad a \leq x \leq b \\
& u(a, y) = h(y), \quad u(b, y) = k(y), \quad c \leq y \leq d
\end{aligned} \tag{3.43}$$

yaklaşık çözümü Hermite polinomları cinsinden, Hermite-Taylor sıralama yöntemi aracılığıyla elde edilecektir. Burada,  $K(x,y,s,t)$ ,  $M := \{(x,y,s,t): a \leq x, s \leq b, c \leq t \leq y \leq d\}$  üzerinde  $G(x,y)$  ise  $L: [a, b][c, d]$  üzerinde tanımlı bilinen fonksiyonlardır.

### 3.2.3.1 Temel Matris Bağlıları

(3.42) kısmi integro diferansiyel denklemi göz önüne alındığında, problemin çözümü için integralin hesaplanması haricinde kalan diğer gerekli matris formlarına Kesim 3.2.1.1 başlığı altında yer verildiğinden bu başlık altında tekrardan değinilmeyecektir. Burada integralin hesaplanması için gerekli olan bağıntılar ele alınmıştır. Öncelikle  $K(x,y,s,t)$  çekirdek fonksiyonu, sonlu Taylor serisi formunda (oriijinde) iki farklı biçimde açılabilir:

- **Birinci Yol:**

$$\begin{aligned}
 K(x,y,s,t) &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N k_{mnpq} x^m y^n s^p t^q \\
 &= (k_{0000} x^0 y^0 s^0 t^0 + \dots + k_{NNNN} x^N y^N s^N t^N)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. Burada,

$$k_{m,n,p,q} = \frac{1}{m!n!p!q!} \frac{\partial^{m+n+p+q} K(0,0,0,0)}{\partial x^m \partial y^n \partial s^p \partial t^q},$$

$N=1$  için (3.44) eşitliği

$$\begin{aligned}
 K(x,y,s,t) &= \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 k_{mnpq} x^m y^n s^p t^q \\
 &= \sum_{n=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (k_{0npq} x^0 y^n s^p t^q + k_{1npq} x^1 y^n s^p t^q) \\
 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 (k_{00pq} x^0 y^0 s^p t^q + k_{10pq} x^1 y^0 s^p t^q + k_{01pq} x^0 y^1 s^p t^q + k_{11pq} x^1 y^1 s^p t^q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=0}^1 (k_{000q}x^0y^0s^0t^q + k_{100q}x^1y^0s^0t^q + k_{010q}x^0y^1s^0t^q \\
&\quad + k_{110q}x^1y^1s^0t^q + k_{001q}x^0y^0s^1t^q \\
&\quad + k_{101q}x^1y^0s^1t^q + k_{011q}x^0y^1s^1t^q \\
&\quad + k_{111q}x^1y^1s^1t^q) \\
&= k_{0000}x^0y^0s^0t^0 + k_{1000}x^1y^0s^0t^0 + k_{0100}x^0y^1s^0t^0 \\
&\quad + k_{1100}x^1y^1s^0t^0 + k_{0010}x^0y^0s^1t^0 + k_{1010}x^1y^0s^1t^0 \\
&\quad + k_{0110}x^0y^1s^1t^0 + k_{1110}x^1y^1s^1t^0 + k_{0001}x^0y^0s^0t^1 \\
&\quad + k_{1001}x^1y^0s^0t^1 + k_{0101}x^0y^1s^0t^1 + k_{1101}x^1y^1s^0t^1 \\
&\quad + k_{0011}x^0y^0s^1t^1 + k_{1011}x^1y^0s^1t^1 + k_{0111}x^0y^1s^1t^1 \\
&\quad + k_{1111}x^1y^1s^1t^1
\end{aligned} \tag{3.45}$$

biçiminde açılır. Buradan (3.45) eşitliği yardımıyla,  $K(x, y, s, t)$ ;

$$K(x, y, s, t) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix} \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \tag{3.46}$$

$$= [1 \quad y \quad x \quad xy] \underbrace{\begin{bmatrix} k_{00}^{00} & k_{01}^{00} & k_{10}^{00} & k_{11}^{00} \\ k_{00}^{01} & k_{01}^{01} & k_{10}^{01} & k_{11}^{01} \\ k_{00}^{10} & k_{01}^{10} & k_{10}^{10} & k_{11}^{10} \\ k_{00}^{11} & k_{01}^{11} & k_{10}^{11} & k_{11}^{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ s \\ st \end{bmatrix}$$

matris formunda yazılır.  $K(x, y, s, t)$ 'nin genel matris formu;

$$K(x, y, s, t) = \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{X}^T(s) \tag{3.47}$$

biçiminde olduğu görülmektedir. Burada;

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{00}^{00} & k_{01}^{00} & \dots & k_{0N}^{00} & k_{10}^{00} & k_{11}^{00} & \dots & k_{1N}^{00} & \dots & k_{N0}^{00} & k_{N1}^{00} & \dots & k_{NN}^{00} \\ k_{00}^{01} & k_{01}^{01} & \dots & k_{0N}^{01} & k_{10}^{01} & k_{11}^{01} & \dots & k_{1N}^{01} & \dots & k_{N0}^{01} & k_{N1}^{01} & \dots & k_{NN}^{01} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{00}^{0N} & k_{01}^{0N} & \dots & k_{0N}^{0N} & k_{10}^{0N} & k_{11}^{0N} & \dots & k_{1N}^{0N} & \dots & k_{N0}^{0N} & k_{N1}^{0N} & \dots & k_{NN}^{0N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{00}^{NN} & k_{01}^{NN} & \dots & k_{0N}^{NN} & k_{10}^{NN} & k_{11}^{NN} & \dots & k_{1N}^{NN} & \dots & k_{N0}^{NN} & k_{N1}^{NN} & \dots & k_{NN}^{NN} \end{bmatrix}$$

dır. Örneğin, N=1 için (3.47) eşitliği,

$$K(x, y, s, t) = \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{X}^T(s)$$

$$\begin{aligned} &= [1 \quad x] \begin{bmatrix} [1 & y] \\ [0 & 0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0 & 0] \\ [1 & y] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} k_{00}^{00} & k_{01}^{00} & k_{10}^{00} & k_{11}^{00} \\ k_{00}^{01} & k_{01}^{01} & k_{10}^{01} & k_{11}^{01} \\ k_{00}^{10} & k_{01}^{10} & k_{10}^{10} & k_{11}^{10} \\ k_{00}^{11} & k_{01}^{11} & k_{10}^{11} & k_{11}^{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} [1] \\ [t] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [1] \\ [t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1] \\ [s] \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad y \quad x \quad xy] \underbrace{\begin{bmatrix} k_{00}^{00} & k_{01}^{00} & k_{10}^{00} & k_{11}^{00} \\ k_{00}^{01} & k_{01}^{01} & k_{10}^{01} & k_{11}^{01} \\ k_{00}^{10} & k_{01}^{10} & k_{10}^{10} & k_{11}^{10} \\ k_{00}^{11} & k_{01}^{11} & k_{10}^{11} & k_{11}^{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} [1] \\ [t] \\ [s] \\ [st] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

olur. Elde edilen (3.48) eşitliği, (3.46) eşitliğini vermektedir.

**İkinci yol:**  $K(x, y, s, t)$ 'nin seri açılımı

$$\begin{aligned} K(x, y, s, t) &= \sum_{n=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 k_{npq}(x) y^n s^p t^q \\ &= \sum_{n=0}^1 \sum_{p=0}^1 k_{np0}(x) y^n s^p t^0 + k_{np1}(x) y^n s^p t^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^1 k_{n00}(x)y^n s^0 t^0 + k_{n01}(x)y^n s^0 t^1 + k_{n10}(x)y^n s^1 t^0 \\
&\quad + k_{n11}(x)y^n s^1 t^1 \\
&= k_{000}(x)y^0 s^0 t^0 + k_{001}(x)y^0 s^0 t^1 + k_{010}(x)y^0 s^1 t^0 \\
&\quad + k_{011}(x)y^0 s^1 t^1 + k_{100}(x)y^1 s^0 t^0 + k_{101}(x)y^1 s^0 t^1 \\
&\quad + k_{110}(x)y^1 s^1 t^0 + k_{111}(x)y^1 s^1 t^1 \\
&= [1 \quad y] \begin{bmatrix} k_{000}(x) & k_{001}(x) & k_{010}(x) & k_{011}(x) \\ k_{100}(x) & k_{101}(x) & k_{110}(x) & k_{111}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ s \\ st \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$K(x, y, s, t) = \sum_{n=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 k_{npq}(x) y^n s^p t^q$$

$$k_{n,p,q}(x) = \frac{1}{n! p! q!} \frac{\partial^{n+p+q} K(x, 0, 0, 0)}{\partial x^n \partial y^p \partial s^q}, \quad n, p, q = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,

$$K(x, y, s, t) = \mathbf{X}(y) \mathbf{K}^*(x) \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \quad (3.49)$$

$$\mathbf{K}^*(x) = [k_{n,p,q}(x)], \quad n, p, q = 0, 1, \dots, N$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\mathbf{K}^*(x) = \begin{bmatrix} k_{000}(x) & k_{001}(x) & \cdots & k_{0NN}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N00}(x) & k_{N01}(x) & \cdots & k_{NNN}(x) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 (N+1)}$$

şeklindedir. (3.13) bağıntısından,



$$u(s, t) = \mathbf{H}(s)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} \quad (3.50)$$

dır. (3.42) denklemi içinde yer alan integralli kısım,

$$V(x, y) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt \quad (3.51)$$

şeklinde tanımlansın. Bu eşitlik iki farklı yol ile matris formunda yazılır.

- **Birinci yol:** (3.51) denklemi (3.50) ve (3.47) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt \\ &= \int_a^b \int_c^d \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(s) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} ds dt \\ &= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \int_a^b \int_c^d \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(s) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} ds dt \\ &= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.52)$$

biçiminde matris formunda yazılır. Burada

$$\mathbf{I} = \int_a^b \int_c^d \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(s) \bar{\mathbf{H}}(t) ds dt = \int_a^b \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{Q} \bar{\mathbf{H}}(t) dt$$

$$\mathbf{Q} = \int_c^d \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(s) ds.$$

dır.

- **İkinci yol:** (3.51) eşitliği, (3.50), (3.47) ve (3.9) eşitliği yardımıyla,

$$V(x, y) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_c^d \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} ds dt \\
&= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \int_a^b \int_c^d \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} ds dt \\
&= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

biçiminde matris formunda yazılır. Burada,

$$I = \int_a^b \int_c^d \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}(t) ds dt = \int_a^b \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}(t) dt$$

ve

$$\mathbf{Q} = \int_c^d \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) ds, \quad \mathbf{Q} = [q_{ij}]; \quad q_{ij} = \frac{a^{i+j+1} - b^{i+j+1}}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

dır. (3.13)-(3.18) matris bağıntıları ile (3.52) matris bağıntısı (veya (3.53)), (3.42) genel denklemde yerine yazıldığında;

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \mathbf{H}(x) (\mathbf{M})^2 \bar{\mathbf{H}}(y) + \beta \mathbf{H}(x) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(y) \bar{\mathbf{M}} \\ + \gamma \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(y) \bar{\mathbf{M}}^2 + \delta \mathbf{H}(x) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(y) \\ + \mu \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(y) \bar{\mathbf{M}} + \theta \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(y) + \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{I} \end{array} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x, y) \tag{3.54}$$

$$\mathbf{W}(x, y) \mathbf{A} = \mathbf{G}(x, y)$$

genel matris denklemini elde edilir. (3.13)-(3.18) matris bağıntıları kullanılarak benzer adımlar, başlangıç ve sınır koşulları (3.43) için de izlendiğinde;

$$\begin{aligned}
u(x, c) &= \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(c) \mathbf{A} = f(x), \\
u_y(x, c) &= \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(c) \bar{\mathbf{M}} \mathbf{A} = m(x) \\
u(a, y) &= \mathbf{H}(a) \bar{\mathbf{H}}(y) \mathbf{A} = h(y),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$u(b, y) = \mathbf{H}(b)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} = k(y).$$

elde edilir.

### 3.2.3.2 Fonksiyonel Sınırlı Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Hermite-Taylor Sıralama Metodu

İkinci mertebeden değişken (fonksiyonel) sınırlara sahip doğrusal kısmi integro-diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,i+j \leq 2} P_{i,j}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} & \quad (3.56) \\ & = G(x, y) + \lambda \int_c^{\beta(y)} \int_a^{\alpha(x)} K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt, \\ & \quad i, j = 0, 1, 2; \quad a \leq x, s \leq b, \quad c < y, t \leq d, \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada  $\alpha(x), \beta(y)$   $K(x, y, s, t)$  and  $G(x, y)$   $L: [a, b] \times [c, d]$  üzerinde tanımlı bilinen fonksiyonlardır. (3.56) denklemini kısaca,

$$D[u(x, y)] = G(x, y) + \lambda I(x, y);$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

- Denklem (3.56)'nın kısmi diferansiyel kısmı

$$\begin{aligned} D[u(x, y)] & = P_{20}(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + P_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} + P_{02}(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ & \quad + P_{10}(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + P_{01}(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + P_{00}(x, y) u(x, y), \end{aligned}$$

- Denklem (3.56)'nın integral kısmı

$$I(x, y) = \int_c^{\beta(y)} \int_a^{\alpha(x)} K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt;$$

şeklindedir. Denklem (3.56)'nın matris formunda yazılması için gerekli olan bağıntılara Kesim 3.2.1'de yer verildiğinden tekrardan değinilmeyecektir. İntegralli

kısmın matris formunda yazımında ise Kesim 3.2.3.1'de (3.52) eşitliğine benzer biçimde;

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \int_c^{\beta(y)} \int_a^{\alpha(x)} K(x, y, s, t) u(s, t) ds dt \\
&= \int_c^{\beta(y)} \int_a^{\alpha(x)} \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(s) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} ds dt \\
&= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \int_a^{\beta(y)} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \left\{ \int_a^{\alpha(x)} \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) ds \right\} \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{F}} \mathbf{A} dt \\
&= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \int_c^{\beta(y)} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{C}(x) \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(t) dt (\bar{\mathbf{F}}) \mathbf{A} \\
&= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{B}(x, y) \bar{\mathbf{F}} \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

elde edilir. Burada;

$$B(x, y) = \int_c^{\beta(y)} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{C}(x) \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(t) dt; \quad \mathbf{C}(x) = \int_a^{\alpha(x)} \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) ds.$$

$$\mathbf{C}(x) = [c_{ij}(x)]; \quad c_{ij}(x) = \frac{(\alpha(x))^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

şeklindedir. (3.13)-(3.18) matris bağıntıları ile (3.57) matris bağıntısı, (3.56) genel denklemde yerine yazıldığında;

$$\left\{ \sum_{i,j,i+j \leq 2} P_{i,j}(x, y) \mathbf{X}(x) \mathbf{F} \mathbf{M}^i \bar{\mathbf{X}}(y) \bar{\mathbf{F}} \mathbf{M}^j - \lambda \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{B}(x, y) \bar{\mathbf{F}} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x, y)$$

genel matris denkleminde elde edilir.

### 3.2.3.3 Çözüm Yöntemi

(3.54) matris denkleminde (3.24) sıralama noktaları yerine yazıldığında;

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \mathbf{H}(x_i)(\mathbf{M})^2 \bar{\mathbf{H}}(y_j) + \beta \mathbf{H}(x_i) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(y_j) \bar{\mathbf{M}} \\ + \gamma \mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(y_j) \bar{\mathbf{M}}^2 + \delta \mathbf{H}(x_i) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(y_j) \\ + \mu \mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(y_j) \bar{\mathbf{M}} + \theta \mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(y_j) + \mathbf{X}(x_i) \bar{\mathbf{X}}(y_{j_i}) \mathbf{K} \mathbf{I} \end{array} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x_i, y_j) \quad (3.58)$$

$$\mathbf{W}(x_i, y_j) \mathbf{A} = \mathbf{G}(x_i, y_j) \rightarrow \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}]$$

temel matris denklemleri bulunur. Ayrıca, (3.24) sıralama noktaları (3.55) başlangıç ve sınır koşullarında yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} u(x_i, c) &= \underbrace{\mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(c)}_{\mathbf{U}_1} \mathbf{A} = f(x_i), & \mathbf{U}_1 \mathbf{A} &= \mathbf{f} \\ u_y(x_i, c) &= \underbrace{\mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(c) \bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{U}_2} \mathbf{A} = m(x_i), & \mathbf{U}_2 \mathbf{A} &= \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$u(a, y_i) = \underbrace{\mathbf{H}(a) \bar{\mathbf{H}}(y_j)}_{\mathbf{U}_3} \mathbf{A} = h(y_j), \quad \mathbf{U}_3 \mathbf{A} = \mathbf{h}$$

$$u(b, y_j) = \underbrace{\mathbf{H}(b) \bar{\mathbf{H}}(y_j)}_{\mathbf{U}_4} \mathbf{A} = k(y_j), \quad \mathbf{U}_4 \mathbf{A} = \mathbf{k}$$

koşullar matrisi şeklinde bulunur. Elde edilen (3.59) koşullar matrisi (3.58) matris denkleminin son satırları silinerek yerine yazıldığında

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] \text{ veya } \bar{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{G}} \quad (3.60)$$

artırılmış matrisi elde edilir. (3.60) matris denkleminin çözümü ile Hermite polinom katsayılarından oluşan  $\mathbf{A}$  matrisi elde edilecektir. Elde edilen katsayılar (3.1)

kesilmiş Hermite seri formunda yerine yazılarak, (3.42)-(3.43) probleminin çözümü sonlu Hermite polinomları cinsinden elde edilir.

### 3.2.3.4 Çözümün Doğruluğu

Bu kesimde, (3.42)-(3.43) probleminin çözümü için önerilen Hermite sıralama yönteminin, işlerliği ve tutarlılığı için mutlak hata ve rezidüel hata değerleri elde edilecektir. Mutlak hata değeri Kesim 3.2.1.3'de verildiği gibi bulunmaktadır.

(3.42)-(3.43) probleminin elde edilen  $u_N(x,y)$  yaklaşık çözümü ve onun türevleri denklemde yerine yazıldığında probleminin rezidüel fonksiyon değerleri

$$R_N(x_p, y_q) = \left| \alpha \frac{\partial^2 u_N(x_p, y_q)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u_N(x_p, y_q)}{\partial y \partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u_N(x_p, y_q)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u_N(x_p, y_q)}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_N(x_p, y_q)}{\partial y} + \theta u_N(x_p, y_q) + V(x_p, y_q) - G(x_p, y_q) \right| \cong 0$$

$$\rightarrow R_N(x_p, y_q) \leq 10^{-k_{pq}}.$$

olarak elde edilir.

Eğer  $R_N(x_p, y_q) \leq 10^{-k_{pq}}$  ( $k_{pq}$  pozitif tamsayı) veya  $\max(10^{-k_{pq}}) = 10^{-k}$  ( $k$  pozitif tamsayı) olarak belirlenmişse, böylece  $N$  kesme sınırı arttıkça  $R_N(x_p, y_q)$  'nin her noktadaki değerlerinin  $10^{-k}$  değerinden küçük olması beklenmektedir [36, 107].

### 3.2.5 Bir Boyutlu Gecikmeli Parabolik Volterra Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Hermite Sıralama Metodu

Bu kesimde, genel formu;

$$u_t(x, t) + P_1(x, t)u_x(x, t) + P_2(x, t)u_{xx}(x, t) + P_3(x, t)u(ax + \beta, \lambda t + \mu) = G(x, t) + \int_0^t K(t, s)u(x, s)ds, \quad (3.61)$$

$$a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T$$

biçiminde olan bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemi,

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.62)$$

$$u(a, t) = k(t), \quad u(b, t) = l(t) \quad t \in [0, T]$$

başlangıç ve sınır koşulları altında ele alınmıştır. Burada  $P_1(x, t)$ ,  $P_2(x, t)$ ,  $P_3(x, t)$ ,  $G(x, t)$ ,  $K(t, s)$ ,  $f(x)$ ,  $k(t)$  ve  $l(t)$  bilinen, sürekli fonksiyonlardır.

### 3.2.5.1 Temel Matris Bağlıları

Bu kesimde, (3.61) ile tanımlanan bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemi göz önüne alınacak ve problemin çözümü için gerekli matris bağlantılarından bazıları Kesim 3.2.1.1 de verildiğinden bunlara tekrar değinilmeyecektir. Burada (3.61) denklemi içinde yer alan integralli kısmın hesaplanması için gerekli olan bağlantılar ile gecikmeli terim için gerekli bağlantılara yer verilmiştir.  $K(t, s)$  çekirdek fonksiyonu ve bilinmeyen fonksiyon olan  $u(x, s)$ , Taylor matris metodu ve (3.7) yardımıyla;

$$K(t, s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{K}\mathbf{X}^T(s); \quad \mathbf{K} = [k_{pq}], \quad (3.63)$$

$$k_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K(0,0)}{\partial t^p \partial s^q}, \quad p, q = 0, 1, \dots, N$$

ve

$$u(x, s) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(s)\mathbf{A} \quad (3.64)$$

$$= \mathbf{X}(x)\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(s)\bar{\mathbf{F}}\mathbf{A}$$

şeklinde elde edilir [108]. Burada

$$\mathbf{X}(t) = [1 \quad t \quad \dots \quad t^N], \quad \bar{\mathbf{X}}(s) = \text{diag}[\mathbf{X}(s) \quad \mathbf{X}(s) \quad \dots \quad \mathbf{X}(s)]$$

dır. Son olarak (3.61) denkleminde  $u(\alpha x + \beta, \lambda t + \mu)$  gecikmeli terimini, (3.7) ve (3.8) eşitlikleri yardımıyla, matris formunda yazıldığında;

$$u(\alpha x + \beta, \lambda t + \mu) = \mathbf{H}(\alpha x + \beta)\bar{\mathbf{H}}(\lambda t + \mu)\mathbf{A}$$

(3.65)

$$= \mathbf{X}(\alpha x + \beta) \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(\lambda t + \mu) \bar{\mathbf{F}} \mathbf{A}$$

$$= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}(\lambda, \mu) \bar{\mathbf{F}} \mathbf{A}$$

elde edilir [109]. Burada,

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha^0 \beta^0 & \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 & \binom{2}{0} \alpha^0 \beta^2 & \dots & \binom{N}{0} \alpha^0 \beta^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 & \binom{2}{1} \alpha^1 \beta^1 & \dots & \binom{N}{1} \alpha^1 \beta^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha^2 \beta^2 & \dots & \binom{N}{2} \alpha^2 \beta^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \alpha^N \beta^0 \end{bmatrix}$$

dır. (3.61) denkleminde, (3.35), (3.63)-(3.65) eşitlikleri yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(t) \bar{\mathbf{M}} + P_1(x, t) \mathbf{H}(x) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(t) + P_2(x, t) \mathbf{H}(x) \mathbf{M}^2 \bar{\mathbf{H}}(t) \\ & + P_3(x, t) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}(\lambda, \mu) \bar{\mathbf{F}} \\ & - \mathbf{X}(t) \mathbf{K} \mathbf{Q}(x, t) \} \mathbf{A} = G(x, t) \end{aligned} \quad (3.66)$$

genel matris denklemini elde edilir. Burada

$$Q(x, t) = \int_0^t \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(s) ds.$$

dır. Benzer biçimde (3.62) koşullarının matris formları aşağıdaki gibi olur:

$$u(x, 0) = \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(0) \mathbf{A} = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a, t) = \mathbf{H}(a) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} = k(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.67)$$

$$u(b, t) = \mathbf{H}(b) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} = l(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$



### 3.2.5.2 Birleştirilmiş Matris Çözüm Metodu

(3.24) sıralama noktaları (3.66) genel matris denkleminde yerine yazıldığında;

$$W(x_i, t_j)A = G(x_i, t_j), \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} & \{H(x_i)\bar{H}(t_j)\bar{M} + P_1(x_i, t_j)H(x_i)MH(t_j) + P_2(x_i, t_j)H(x_i)M^2\bar{H}(t) \\ & + P_3(x_i, t_j)X(x_i)B(\alpha, \beta)F\bar{X}(t_j)\bar{B}(\lambda, \mu)\bar{F} \\ & - X(t)KQ(x_i, t_j)\}A = G(x_i, t_j) \end{aligned}$$

sistemi veya

$$WA = G \rightarrow [W; G] \quad (3.68)$$

temel matris denklemini elde edilir. Benzer şekilde, (3.24) sıralama noktaları (3.67) koşullarında yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} u(x_i, 0) &= \underbrace{H(x_i)\bar{H}(0)}_{U_1} A = f(x_i), \quad U_1 A = f \\ u(a, t_j) &= \underbrace{H(a)\bar{H}(t_j)}_{U_2} A = k(t_j), \quad U_2 A = k \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$u(b, t_j) = \underbrace{H(b)\bar{H}(t_j)}_{U_3} A = l(t_j), \quad U_3 A = l$$

matris denklemlerine ulaşılır. Sonuç olarak, (3.69) koşullar matrisi, (3.68) temel matris denkleminin uygun satırları ile yer değiştirildiğinde  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  artırılmış matris elde edilir. Bu denklemin çözümü ile bilinmeyen Hermite katsayılarından oluşan  $A$  matrisi bulunur. Elde edilen bu matris (3.1) kesilmiş Hermite seri formunda yazılarak Hermite polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm elde edilir.

### 3.2.5.3 Çözümün Doğruluğu

Bu kesimde, (3.61)-(3.62) probleminin çözümü için önerilen Hermite sıralama yönteminin, işlerliğini ve tutarlılığını göstermek için mutlak hata ve rezidüel hata değerleri elde edilecektir. Mutlak hata değeri Kesim 3.2.1.3'de verildiği gibi bulunmaktadır.

(3.61)-(3.62) probleminin elde edilen  $u_N(x, y)$  yaklaşık çözümü ve onun türevleri, denklem (3.61)'de yerine yazıldığında, problemim rezidüel fonksiyonu

$$R_N(x_p, t_q) = \left| \frac{\partial u_N}{\partial t}(x_p, t_q) + P_1(x_p, t_q) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_p, t_q) + P_2(x_p, t_q) \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x_p, t_q) + P_3(x_p, t_q) u_N(\alpha x_p + \beta, \lambda t_q + \mu) - I(x_p, t_q) - G(x, t) \right| \cong 0$$

olarak belirlenir. Burada

$$I(x_p, t_q) = \int_0^t K(t, s) u_N(x, s) ds$$

dır. Eğer  $R_N(x_p, t_q) \leq 10^{-k_{pq}}$  ( $k_{pq}$  pozitif tamsayıdır) veya  $\max(10^{-k_{pq}}) = 10^{-k}$  ( $k$  pozitif tamsayıdır) olarak tanımlanırsa, böylece  $N$  kesme sınırı arttıkça  $R_N(x_p, y)$ 'nin her noktada arzu edilen  $10^{-k}$  değerinden küçük olması beklenmektedir [110].

### 3.2.6 Birinci Mertebeden Doğrusal Olmayan Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Birleştirilmiş Hermite-Taylor Sıralama Metodu

Bu kesimde, genel formu;

$$u_t(x, t) = G(x, t) + P_1(x, t) u_x(x, t) u(x, t) + P_2(x, t) u^2(x, t) + \int_0^t K(t, s) u(x, s) ds, \quad a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T \quad (3.70)$$

biçiminde olan lineer olmayan kısmi integro-diferansiyel denklemi,

$$u(x, 0) = f(x), x \in [a, b],$$

$$u_t(x, 0) = h(x), x \in [a, b], \quad (3.71)$$

$$u(a, t) = k(t), t \in [0, T],$$

$$u(b, t) = l(t), t \in [0, T].$$

başlangıç ve Diriclet sınır koşulları altında ele alınarak, birleştirilmiş Hermite-Taylor sıralama metodu aracılığıyla yaklaşık olarak çözülmektedir. Burada,  $G, P_1$  ve  $P_2$  sürekli fonksiyonlar;  $K$  çekirdek fonksiyonu sürekli;  $f, h, k$  ve  $l$  koşullarla ilgili bilinen sürekli fonksiyonlardır.

### 3.2.6.1 Temel Matris Bağlıları

(3.70)-(3.71) probleminin yaklaşık çözümü için gerekli matris bağlantılarının büyük bir kısmı Kesim 3.2.2.1 ve Kesim 3.2.5.1'de verildiğinden bu kesimde tekrardan değinilmeyecektir. Burada ilk olarak  $u_x(x, t)u(x, t)$  ve  $u^2(x, t)$  doğrusal olmayan terimlerinin matris formu ele alınacaktır. (3.7) ve (3.8) yardımıyla;

$$[u^2(x, t)] = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{H}}^*\bar{\mathbf{A}} \quad (3.72)$$

$$[u_x(x, t)u(x, t)] = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{H}}^*\bar{\mathbf{A}}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{\mathbf{H}}(t) = \text{diag}[\bar{\mathbf{H}}(t), \bar{\mathbf{H}}(t), \dots, \bar{\mathbf{H}}(t)], \quad \bar{\mathbf{H}}^* = \text{diag}(\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{H}}, \dots, \bar{\mathbf{H}}),$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_{00}\mathbf{A} \ a_{01}\mathbf{A} \ \dots \ a_{0N}\mathbf{A} \ a_{10}\mathbf{A} \ a_{11}\mathbf{A} \ \dots \ a_{1N}\mathbf{A} \ \dots \ a_{N0}\mathbf{A} \ a_{N1}\mathbf{A} \ \dots \ a_{NN}\mathbf{A}]^T$$

dır. (3.35), (3.63), (3.64) ve (3.72) eşitlikleri (3.70) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}} - \mathbf{X}(t)\mathbf{K}\mathbf{Q}(x, t)\}\mathbf{A} \\ & + \{-P_1(x, t)\mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{H}}^*(t) \\ & - P_2(x, t)\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{H}}(x)\bar{\mathbf{H}}^*(t)\}\bar{\mathbf{A}} = G(x, t) \end{aligned} \quad (3.73)$$

genel matris denklemi elde edilir. Burada,

$$\mathbf{Q}(x, t) = \int_0^t \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(s) ds$$

dır. Benzer adımlar (3.71) koşulları için de uygulandığında;

$$u(x, 0) = \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(0) \mathbf{A} = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$u_t(x, 0) = \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(0) \bar{\mathbf{M}} \mathbf{A} = h(x), \quad a \leq x \leq b$$

(3.74)

$$u(a, t) = \mathbf{H}(a) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} = k(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(b, t) = \mathbf{H}(b) \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} = l(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

elde edilir.

### 3.2.6.2 Çözüm Yöntemi

(3.24) sıralama noktaları (3.73) denkleminde yerine yazılarak elde edilen matris denklem sistemi basit bir biçimde

$$\mathbf{W}(x_i, t_j) \mathbf{A} + \mathbf{Z}(x_i, t_j) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}(x_i, t_j), \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(x_i, t_j) = \mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(t_j) \bar{\mathbf{M}} - \mathbf{X}(t_j) \mathbf{K} \mathbf{Q}(x_i, t_j), \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(x_i, t_j)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(x_i, t_j)$$

$$= -P_1(x_i, t_j) \mathbf{H}(x_i) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(t_j) \bar{\mathbf{H}}(x_i) \bar{\mathbf{H}}^*(t_j) - P_2(x_i, t_j) \mathbf{H}(x_i) \bar{\mathbf{H}}(t_j) \bar{\mathbf{H}}(x_i) \bar{\mathbf{H}}^*(t_j)$$

olarak verilmektedir. Dolayısıyla temel matris denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{Z} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{Z}; \mathbf{G}]; \quad (3.74)$$

biçiminde de yazılabilir. Ayrıca, (3.67) koşullarında kullanılmayan özel  $(x_i, t_j)$  sıralama noktaları (3.74) sisteminde yerine yazıldığında, koşullar için temel matris denklemini

$$\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{O}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{S} \rightarrow [\mathbf{U}; \mathbf{O}; \mathbf{S}] \quad (3.76)$$

şeklinde olur. Burada  $\mathbf{O} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$  (sıfır matris) ;  $\mathbf{U}$  ve  $\mathbf{S}$  ise,

$$\underbrace{\mathbf{H}(x_i)\bar{\mathbf{H}}(0)}_{\mathbf{U}_1} \mathbf{A} = f(x_i), \quad a < x_i < b \quad \mathbf{U}_1 \mathbf{A} = f$$

$$\underbrace{\mathbf{H}(x_i)\bar{\mathbf{H}}(0)\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{U}_2} \mathbf{A} = h(x_i), \quad a < x_i < b \quad \mathbf{U}_2 \mathbf{A} = h$$

$$\underbrace{\mathbf{H}(a)\bar{\mathbf{H}}(t_j)}_{\mathbf{U}_3} \mathbf{A} = k(t_j), \quad 0 < t_j < T \quad \mathbf{U}_3 \mathbf{A} = k$$

$$\underbrace{\mathbf{H}(b)\bar{\mathbf{H}}(t_j)}_{\mathbf{U}_4} \mathbf{A} = l(t_j), \quad 0 < t_j < T \quad \mathbf{U}_4 \mathbf{A} = l$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} f \\ h \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

sistemi aracılığıyla tanımlanmaktadır. Sonuç olarak, (3.76) koşullar matrisi ile, (3.75) temel denkleminin son satırları yer değiştirildiğinde  $[\bar{\mathbf{W}}; \check{\mathbf{Z}}; \check{\mathbf{G}}]$  artırılmış matrisi veya

$$\bar{\mathbf{W}}\mathbf{A} + \check{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{A}} = \check{\mathbf{G}}$$

sonuç matris denklemini elde edilir. Buna karşı gelen doğrusal olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü ile bilinmeyen Hermite katsayılarının oluşturduğu  $\mathbf{A}$  matrisi belirlenir. Böylece, (3.1) kesilmiş Hermite seri formunda yaklaşık çözüm elde edilir.

### 3.2.6.3 Çözümün Doğruluğu

Bu kesimde, (3.70)-(3.71) probleminin çözümü için önerilen Hermite sıralama yönteminin, işlerliği ve tutarlılığı için mutlak hata analizi ve rezidüel hata değerleri elde edilecektir. Mutlak hata değeri Kesim 3.2.1.3’de verildiği gibi bulunmaktadır.

(3.70)-(3.71) probleminin elde edilen  $u_N(x, y)$  yaklaşık çözümü ve onun türevleri denklem (3.70)’de yerine yazıldığında, (3.70)-(3.71) probleminin rezidüel fonksiyon değerleri

$$R_N(x_p, t_q) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x_p, t_q) - P_1(x_p, t_q) \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_p, t_q) u_N(x_p, t_q) - P_2(x_p, t_q) u_N^2(x_p, t_q) - I(x_p, t_q) - G(x_p, t_q) \cong 0$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada

$$I(x, t) = \int_0^t K(t, s) u_N(x, s) ds$$

dır. Eğer  $R_N(x_p, t_q) \leq 10^{-k_{pq}}$  ( $k_{pq}$  pozitif tamsayıdır) veya  $\max(10^{-k_{pq}}) = 10^{-k}$  ( $k$  pozitif tamsayıdır) olarak belirlenirse, bu durumda,  $N$  kesme sınırı arttıkça  $R_N(x_p, t_q)$  ’nin her noktasında arzu edilen  $10^{-k}$  değerinden küçük olması beklenmektedir [36].

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, üçüncü bölümde önerilen yönteme ait bulgulara yer verilmiştir. Farklı denklem tiplerinde önerilen metot kullanılarak, yöntemin işlerliği gösterilmiştir. Ele alınan problemlerin çözümünde MATLAB 2013 programı kullanılmıştır. Ayrıca problemlerin hata analizleri yapılarak, literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçları ile karşılaştırması yapılmıştır.

##### 4.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler

**Örnek 4.1** Öncelikle;  $0 \leq x, y \leq 1$  için, ikinci mertebe

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = y^2 - x^2 \quad (4.1)$$

kısmi diferansiyel denklemini,

$$u(0, y) = 0 \text{ ve } u(1, y) = \frac{y^2}{2} \quad (4.2)$$

sınır koşulları altında ele alalım.  $u_{xx}(x, y)$  ve  $u_{yy}(x, y)$  ifadelerinin matris bağıntıları, (3.15) ve (3.18) bağıntılarından,

$$u_{xx}(x, y) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A}; \quad u_{yy}(x, y) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}^2\mathbf{A} \quad (4.3)$$

şeklindedir. (4.2) koşulları, (3.21) ve (3.22) bağıntılarından;

$$u(0, y) = \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A}; \quad u(1, y) = \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} \quad (4.4)$$

şeklinde açılır. (4.3) matris eşitlikleri (4.1) denklemde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) &= \mathbf{H}(x)\mathbf{M}^2\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} - \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\bar{\mathbf{M}}^2\mathbf{A} \\ &= G(x, y) \end{aligned} \quad (4.5)$$

genel matris denklemi elde edilir. N=2 için (3.24) sıralama noktaları

$$(x_0, y_0) = (0,0), (x_0, y_1) = \left(0, \frac{1}{2}\right), (x_0, y_2) = (0,1), \quad (4.6)$$

$$(x_1, y_0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right), (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (x_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$(x_2, y_0) = (1,0), (x_2, y_1) = (1,1/2), (x_2, y_2) = (1,1).$$

şeklinde elde edilir. (4.6) sıralama noktaları (4.5) genel matris denkleminde yerine yazılmasıyla;

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \rightarrow [\mathbf{W}: \mathbf{G}] \quad (4.7)$$

temel matris denklemi elde edilir. Burada,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 128 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -16 & 8 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -16 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -16 & 8 & 32 & 96 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -16 & 8 & 0 & -128 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -16 & 8 & 16 & -96 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -16 & 8 & 32 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dır. (4.6) sıralama noktaları (4.4) koşullarında yerine yazıldığında;

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & 4 & 14 & 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & -28 \end{bmatrix}; \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & -4 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 14 & 2 & 8 & 28 & 2 & 8 & 28 \end{bmatrix}; \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. (4.7) matris denkleminin son satırları  $\mathbf{U}_1$  ve  $\mathbf{U}_2$  matrisleri ile yer değiştirilerek,  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  artırılmış matrisi elde edilir. Bu matris denkleminin çözülmesiyle bilinmeyen Hermite katsayılarından oluşan  $\mathbf{A}$  matrisi;

$$\mathbf{A} = [1/8 \quad 0 \quad 1/16 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/16 \quad 0 \quad 1/32]^T$$

bulunur.  $\mathbf{A}$  matrisi  $N=2$  için (3.1) kesilmiş Hermite seri formunda yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_{00}H_0(x)H_0(y) + a_{02}H_0(x)H_2(y) + a_{21}H_2(x)H_0(y) \\ &\quad + a_{22}H_2(x)H_2(y) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16}(4y^2 - 2) + \frac{1}{16}(4x^2 - 2)0 + \frac{1}{32}(4x^2 - 2)(4y^2 - 2) \\ &= \frac{x^2y^2}{2} \end{aligned}$$

tam çözümü elde edilir.

#### Örnek 4.2 Birinci mertebe

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = (1+x)e^y, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (4.8)$$

kısmi diferansiyel denklemini,

$$u(0, y) = 0 \quad (4.9)$$

$$u(x, 0) = x$$

koşulları altında ele alalım. (4.8)-(4.9) probleminin tam çözümü  $u(x, y) = xe^y$  şeklindedir. Kesim 3.2.1'de sunulan benzer adımlar uygulanarak  $N=5$  için elde edilen yaklaşık çözüm;

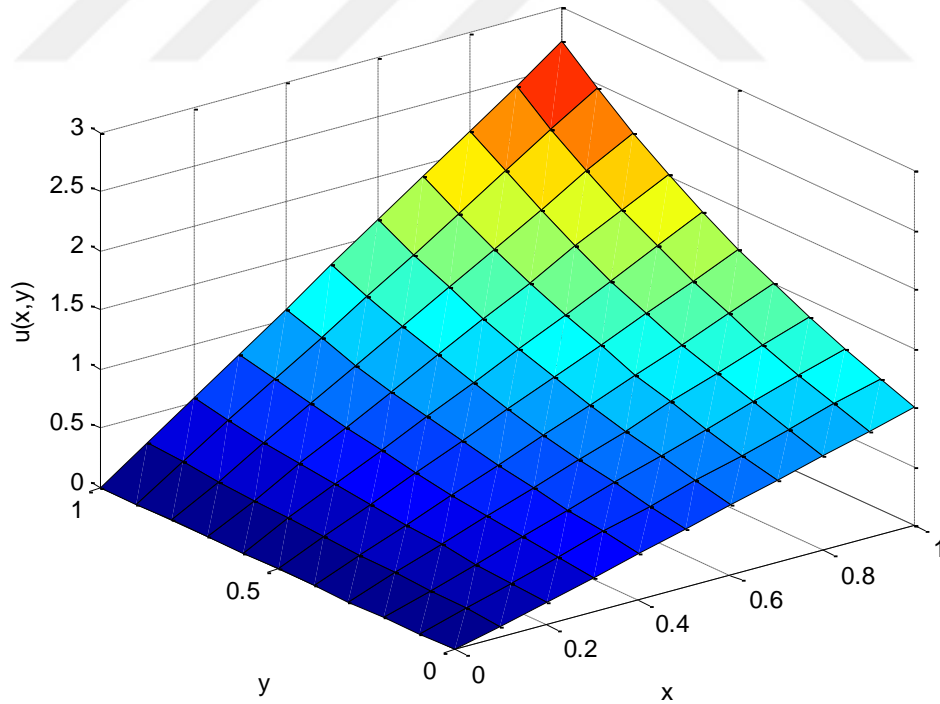
$$\begin{aligned}
u_5(x, y) = & 1.27568423x - 0.893822272y + 0.357769875(4y^2 - 2)(32x^5 \\
& - 160x^3 + 120x) - 15747232(4y^2 - 2)(16x^4 - 48x^2 + 12) \\
& - 0.907625342(4x^2 - 2)(16y^4 - 48y^2 + 12) \\
& + 0.000541182749(4x^2 - 2)(32y^5 - 160y^3 + 120y) \\
& + 154.849678xy - 22.8579691y(-8x^3 + 12x) \\
& - 12.4700371x(-8y^3 + 12y) + 55.1938988x(4y^2 - 2) \\
& - 35.8552208y(4x^2 - 2) + 0245496903(32x^5 - 160x^3 \\
& + 120x)(16y^4 - 48y^2 + 12) - 0736490709(16x^4 - 48x^2 \\
& + 12)(16y^4 - 48y^2 + 12) + 1.61759764e - 16(16x^4 - 48x^2 \\
& + 12)(32y^5 - 160y^3 + 120y) + 1.85009562(-8x^3 \\
& + 12x)(-8y^3 + 12y) - 8.1646139(-8x^3 + 12x)(4y^2 - 2) \\
& + 2.91388999(-8y^3 + 12y)(4x^2 - 2) - 13124433(4x^2 - 2) \\
& * (4y^2 - 2) - 1.43805213x^2 + 9.2429284x^3 \\
& - 19.6984926x^4 + 13.470191x^5 - 8.63070703y^2 \\
& - 23.8501194y^3 - 14.9033893y^4 + 0034635696y^4 \\
& + 10628002y(32x^5 - 160x^3 + 120x) - 2.92120239y \\
& * (16x^4 - 48x^2 + 12) + 3.81120872x(16y^4 - 48y^2 + 12) \\
& + 000432946199x(32y^5 - 160y^3 + 120y) \\
& - 0813422546(-8y^3 + 12y)(32x^5 - 160x^3 + 120x) \\
& - 0.562916034(-8x^3 + 12x)(16y^4 - 48y^2 + 12) \\
& + 0.237389983(-8y^3 + 12y)(16x^4 - 48x^2 + 12) \\
& + 55866899e - 16(-8x^3 + 12x) * (32y^5 - 160y^3 + 120y) \\
& + 15.4928955
\end{aligned}$$

şeklinde olur.  $N=11$  için (4.8)-(4.9) probleminin Taylor sıralama metodu [82] ve Hermite sıralama metoduna ilişkin mutlak hata değerleri Tablo 4.1’de verilmiştir.

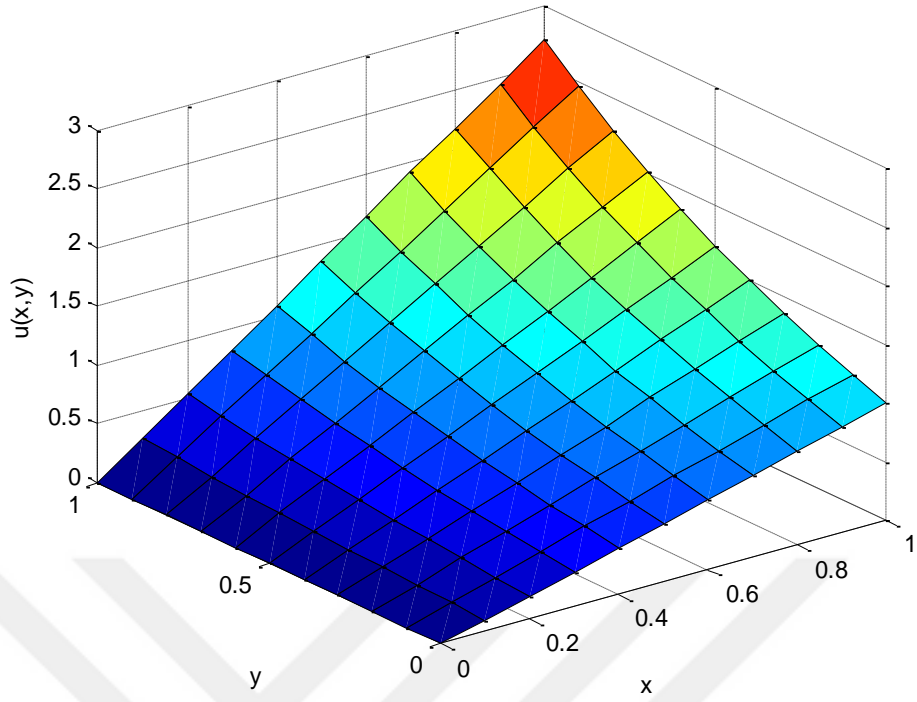
Şekil 4.1’de (4.8)-(4.9) probleminin tam çözümü, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’te ise  $N = 11$  için sırasıyla Taylor sıralama metodu ve Hermite sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümleri gösterilmektedir. Ayrıca Şekil 4.4’te ise  $N = 11$  ve  $y = 0.5$  için Hermite ve Taylor metoduna ait mutlak hata grafiklerinin karşılaştırılması yer almaktadır.

**Tablo 4.1** Örnek 4.2'nin  $N = 11$  için Taylor ve Hermite sıralama metoduna ait mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

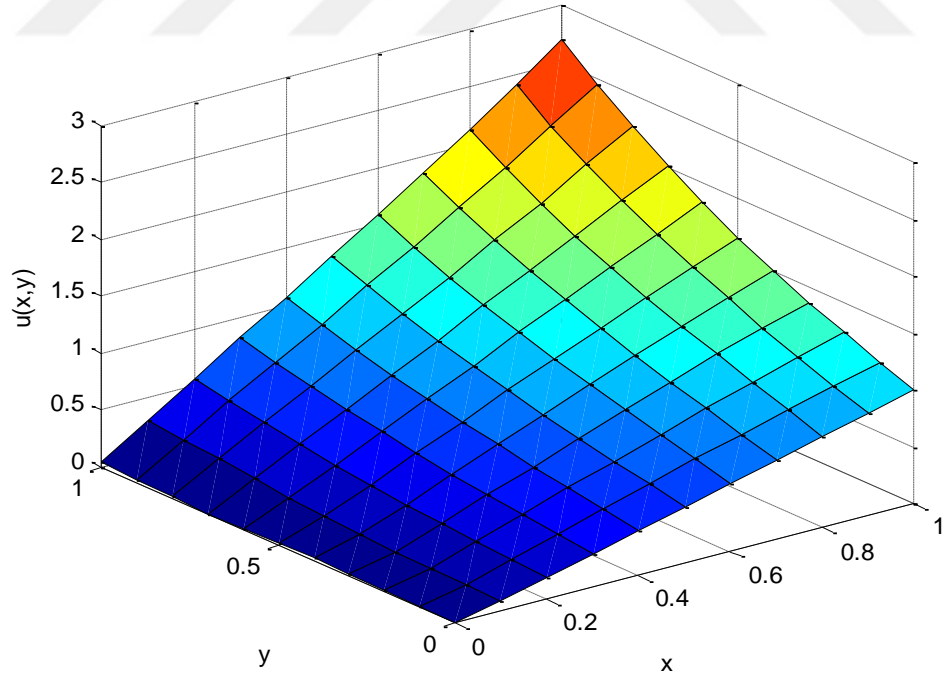
(x,y)	N=11 için Taylor sıralama metodu (TCM)	N=11 için Hermite sıralama metodu (HCM)
(0.0, 0.0)	0	2.96225E-36
(0.1, 0.1)	6.13977E-13	3.13702E-14
(0.2, 0.2)	2.10978E -12	8.04590E-13
(0.3, 0.3)	3.17818E -12	2.92469E-13
(0.4, 0.4)	2.26551E-12	1.74818E-12
(0.5, 0.5)	7.56129E-11	3.26086E-12
(0.6, 0.6)	8.10755E-10	3.15709E-11
(0.7, 0.7)	9.87857E-09	4.04170E-10
(0.8, 0.8)	1.93320E-07	7.87452E-09
(0.9 0.9)	1.79385E-05	7.24126E-07
(1.0, 1.0)	8.75446E-04	3.46014E-05



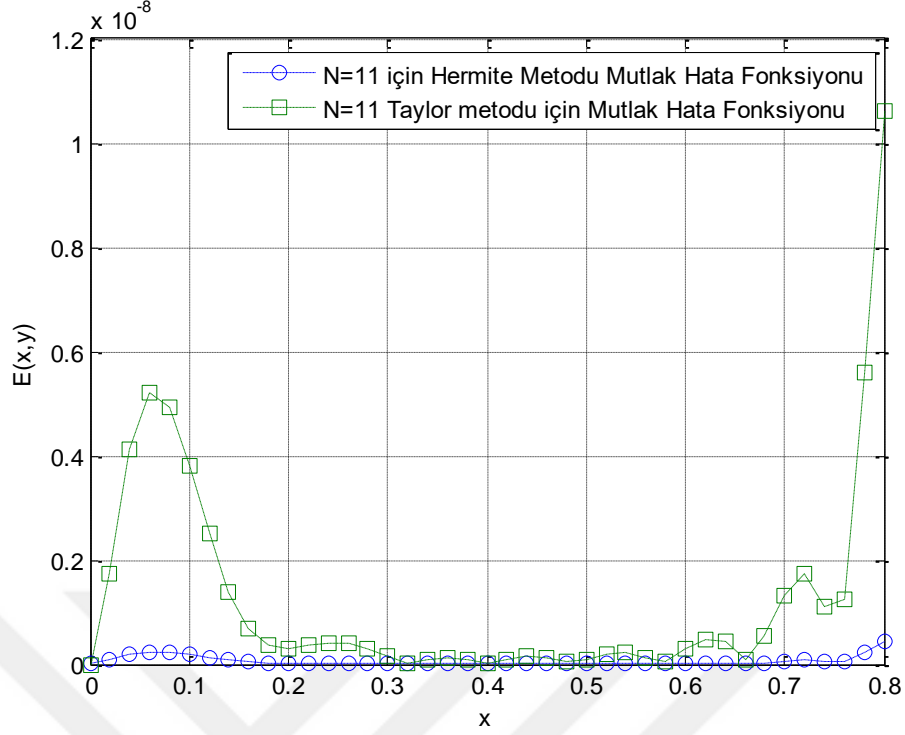
**Şekil 4.1** Örnek 4.2'nin  $0 \leq x, y \leq 1$  aralığı için tam çözümü



Şekil 4.2 Örnek 4.2'nin  $N=11$  için  $0 \leq x, y \leq 1$  aralığına ait Taylor polinom çözümü



Şekil 4.3 Örnek 4.2'nin  $N=11$  için  $0 \leq x, y \leq 1$  aralığına ait Hermite polinom çözümü



**Şekil 4.4** Örnek 4.2'nin N=11 ve y=0.5 için Hermite ve Taylor metoduna ait mutlak hata grafiklerinin karşılaştırılması

**Örnek 4.3** Doğrusal hiperbolik

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + 2u(x,y) - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.10)$$

Telgraf denklemi,

$$u(x,0) = \sin(x) \text{ ve } \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = -\sin x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (4.11)$$

başlangıç koşulları altında ele alınmıştır. Hermite polinomları cinsinden yaklaşık çözümü elde edilecek olan (4.10)-(4.11) probleminin tam çözümü;

$$u(x,y) = e^{-y} \sin x$$

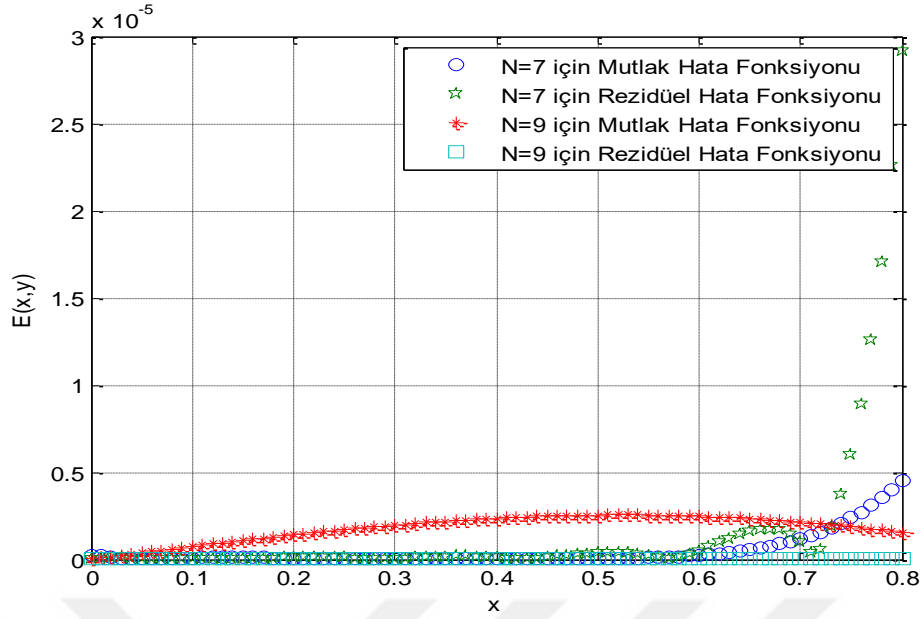
dır [12]. Kesim 3.2.1'de izlenen benzer adımlar uygulandığında, denklem (4.10)'un genel matris denklemi;

$$\underbrace{\begin{cases} H(x_i) \cdot \bar{H}(y_j) \bar{M}^2 + 4H(x_i) \cdot \bar{H}(y_j) \bar{M} \\ + 2H(x_i) \cdot \bar{H}(y_j) - H(x_i) \cdot M^2 \bar{H}(y_j) \end{cases}}_w \mathbf{A} = [0] \rightarrow [\mathbf{W}: \mathbf{0}]$$

biçiminde elde edilir. (4.10)-(4.11) probleminin yaklaşık çözümleri  $N=7$  ve  $N=9$  için elde edilmiştir; bunlar Tablo 4.2’de yer almaktadır. Ayrıca bu  $N$  değerleri için mutlak hata ve residüel hata değerlerine Tablo 4.3’de;  $y=0.5$  ve farklı  $N$  değerleri için mutlak hata ve residüel hata fonksiyonlarının karşılaştırılmasına Şekil 4.5 de; farklı metotlara ait mutlak hata sonuçlarının grafiğine Şekil 4.6 da yer verilmiştir.

**Tablo 4.2** Farklı  $N$  değerleri için Örnek 4.3’ün yaklaşık çözümleri

(x,y)	Tam Çözüm	$N=7$ için Yaklaşık Çözüm	$N=9$ için Yaklaşık Çözüm
(0.0, 0.0)	0.000000	-1.14E-41	-5.90E-12
(0.1, 0.1)	0.090333	0.090333	0.090333
(0.2, 0.2)	0.162657	0.162657	0.162657
(0.3, 0.3)	0.218927	0.218927	0.218927
(0.4, 0.4)	0.261035	0.261035	0.261035
(0.5, 0.5)	0.290786	0.290786	0.290786
(0.6, 0.6)	0.309882	0.309881	0.309882
(0.7, 0.7)	0.319909	0.319899	0.319908
(0.8, 0.8)	0.322329	0.322266	0.322328
(0.9 0.9)	0.318477	0.318186	0.318475
(1.0, 1.0)	0.309560	0.309447	0.309553



**Şekil 4.5** Örnek 4.3'ün  $y = 0.5$  ve farklı  $N$  değerleri için mutlak hata ve rezidüel hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

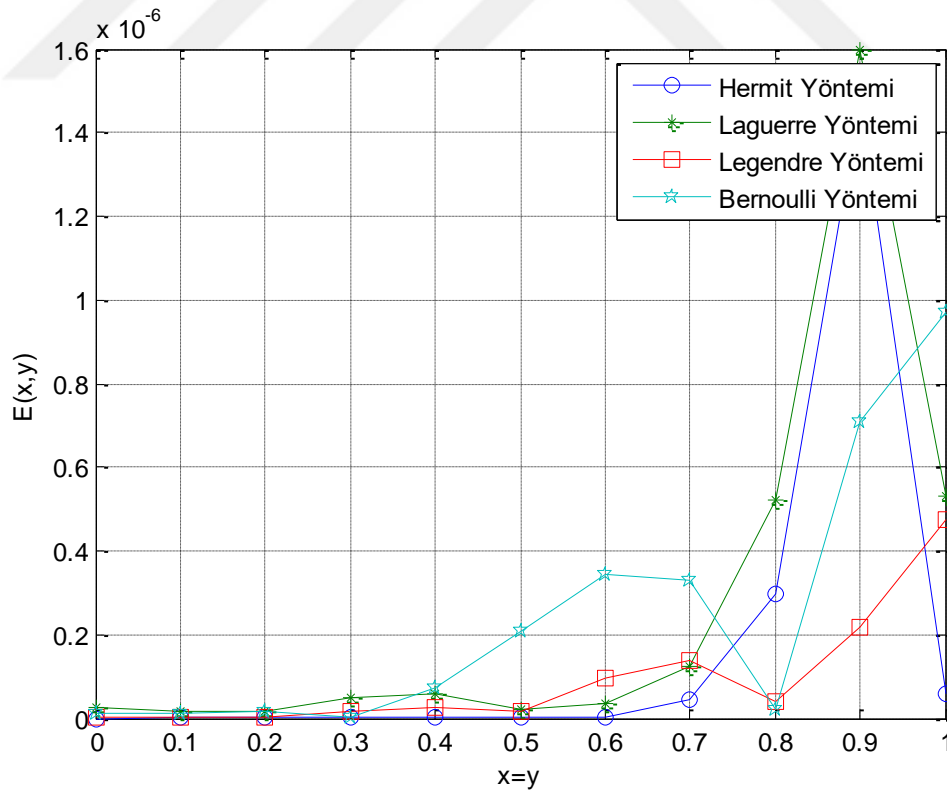
**Tablo 4.3** Örnek 4.3'nin farklı  $N$  değerleri için hata analizleri

(x,y)	N=7 için Mutlak Hata	$R_7(x_p, y_q)$	N=9 için Mutlak Hata	$R_9(x_p, y_q)$
(0.0, 0.0)	1.1479E-41	4.1633E-17	2.8698E-42	6.5919E-17
(0.1, 0.1)	3.3918E-10	6.9733E-08	7.3381E-13	3.1809E-07
(0.2, 0.2)	5.8765E-11	1.2986E-08	3.1514E-14	1.1247E-06
(0.3, 0.3)	6.8338E-12	1.1869E-08	5.1372E-13	1.1246E-06
(0.4, 0.4)	4.1373E-12	6.9733E-08	2.1881E-14	2.5792E-06
(0.5, 0.5)	3.4426E-08	3.6730E-07	1.0547E-10	2.4254E-06
(0.6, 0.6)	9.7091E-07	7.7096E-07	3.6902E-09	1.5461E-06
(0.7, 0.7)	1.0074E-05	8.0707E-05	4.2817E-08	2.7577E-07
(0.8, 0.8)	6.3221E-05	8.0707E-05	2.9481E-07	6.3409E-07
(0.9, 0.9)	2.9091E-04	7.3237E-04	1.4771E-06	1.9501E-06
(1.0, 1.0)	1.0817E-03	3.7291E-03	5.9542E-06	2.4280E-05

Son olarak, önerilen metodun literatürde yer alan diğer metotlarla karşılaştırılmasına Tablo 4.4'de yer verilmiştir.

**Tablo 4.4**  $N = 9$  için Örnek 4.3'ün mutlak hatalarının farklı metotlarla karşılaştırılması

$(x, y)$	Hermite Method [111]	Laguerre Method [106]	Legendre Method [12]	Bernoulli Method [12]
(0.0, 0.0)	2.86985E-42	0.24265E-7	1.21E-09	9.8E-09
(0.1, 0.1)	7.33811E-13	0.15689E-7	2.87E-09	1.15E-08
(0.2, 0.2)	3.15149E-14	0.16217E-7	1.31E-09	1.41E-08
(0.3, 0.3)	5.13721E-13	0.48391E-7	1.68E-08	1.86E-09
(0.4, 0.4)	2.18812E-14	0.59066E-7	2.48E-08	7.21E-08
(0.5, 0.5)	1.05477E-10	0.20736E-7	1.56E-08	2.08E-07
(0.6, 0.6)	3.69021E-09	0.35270E-7	9.62E-08	3.46E-07
(0.7, 0.7)	4.28176E-08	0.12576E-6	1.37E-07	3.30E-07
(0.8, 0.8)	2.94817E-07	0.52324E-6	3.79E-08	2.10E-08
(0.9, 0.9)	1.47710E-06	0.15979E-5	2.18E-07	7.08E-07
(1.0, 1.0)	0.59542E-07	0.52961E-6	4.74E-07	9.69E-07



**Şekil 4.6** Tablo 4.4'te verilen farklı metotlara ait mutlak hata sonuçlarının grafiği



## 4.2 Bir Boyutlu Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Problemleri ile İlgili Örnekler

**Örnek 4.4** Önce, bir boyutlu

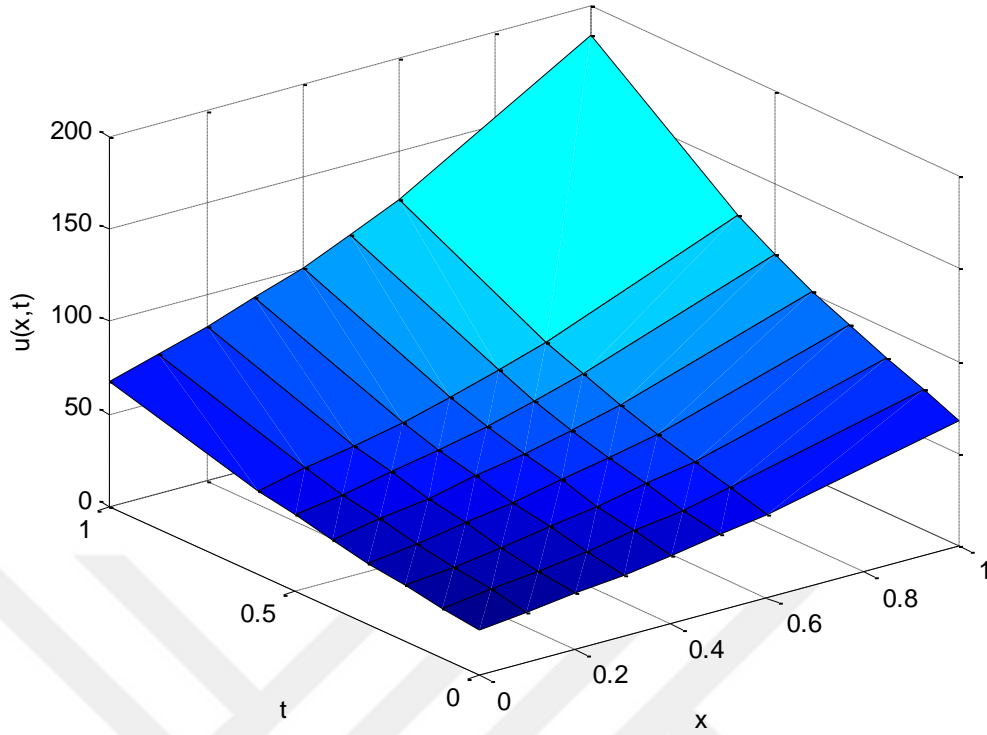
$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \epsilon u_{xx}(x, t) + (2x + 1)u_x + x^2 u(x, t) & \quad (4.12) \\ & = \frac{e^{x+t}}{\epsilon} (x^2 + 2x + 2 - \epsilon), \\ & \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

parabolic konveksiyon-difüzyon problemini,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{e^x}{\epsilon}, \quad x \in [0, 1] & (4.13) \\ u(0, t) &= \frac{e^t}{\epsilon}, \quad u(1, t) = \frac{e^{1+t}}{\epsilon}, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

başlangıç ve sınır koşulları altında ele alalım. (4.12)-(4.13) probleminin tam çözümü  $u(x, t) = \frac{e^{x+t}}{\epsilon}$  şeklindedir [33].

Kesim 3.2.2'de yer alan adımlar  $N = 11$  ve  $N = 12$  için (4.12)-(4.13) problemine uygulandığında elde edilen sonuçlar Tablo 4.5'de yer almaktadır. Tablo 4.6'da ise bu değerlere ait mutlak hata değerleri verilmiştir. problemin tam çözümü Şekil 4.7'de verilmiştir. Şekil 4.8 ve 4.9'da ise mutlak hata fonksiyonları yer alırken, Şekil 4.10'da mutlak hata grafiklerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Son olarak,  $t = 1$  ve  $\epsilon = (4)10^{-2}$  için (4.12)-(4.13) problemine ait  $R_N(x_i, 1)$  residüel hata değerleri Tablo 4.7'de gösterilmiştir [112].



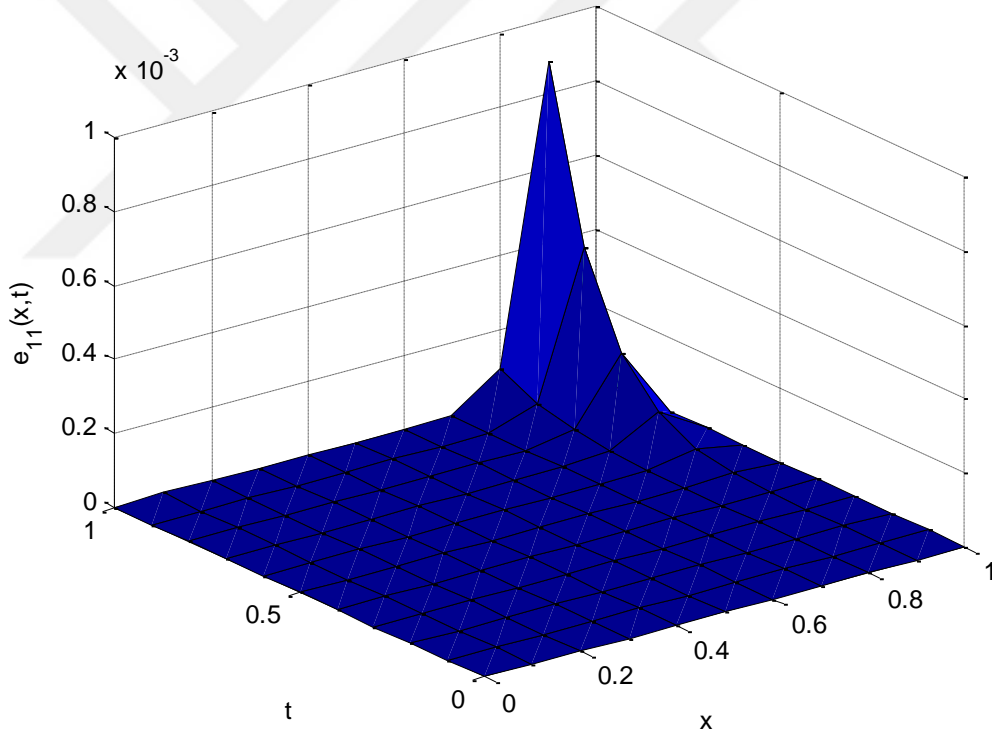
Şekil 4.7 Örnek 4.4'ün  $0 \leq x, t \leq 1$  için tam çözümü

Tablo 4.5 Örnek 4.4'ün farklı  $N$  değerleri için yaklaşık çözümleri

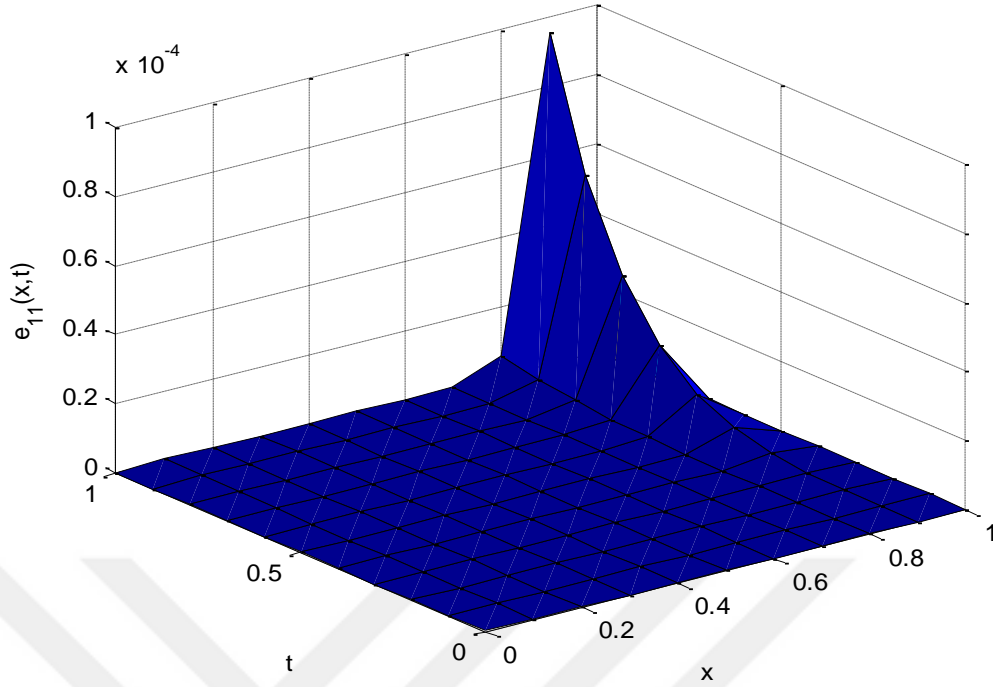
$(x,y)$	$\epsilon = 4 \cdot 10^{-2}$ için Tam Çözüm	$\frac{e^{x+t}}{\epsilon}$ için N=11 için Yaklaşık Çözüm	N=12 için Yaklaşık Çözüm
(0,0)	25	25	25
(0.1,0.1)	30.535068	30.535068	30.535068
(0.2,0.2)	37.295617	37.295617	37.295617
(0.3,0.3)	45.552970	45.552970	45.552970
(0.4,0.4)	55.638523	55.638523	55.638523
(0.5,0.5)	67.957046	67.957046	67.957046
(0.6,0.6)	83.002923	83.002923	83.002923
(0.7,0.7)	101.379999	101.379998	101.37800
(0.8,0.8)	123.825811	123.825832	123.82581
(0.9,0.9)	151.241187	151.241621	151.241127
(1,1)	184.726402	184.726402	184.726402

**Tablo 4.6** Örnek 4.4'ün farklı N değerleri için mutlak hata değerleri

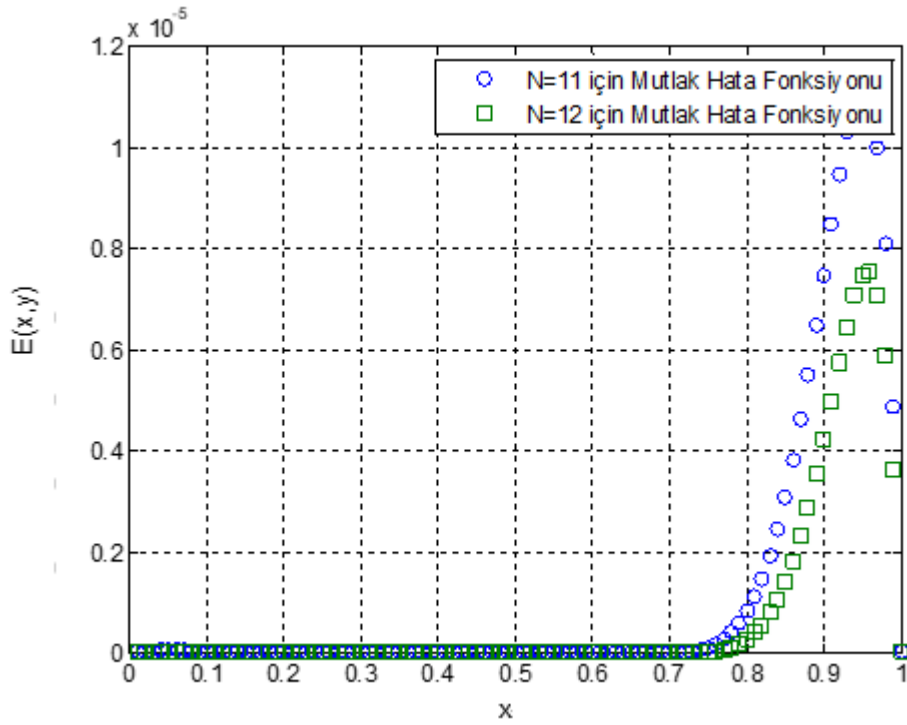
(x,y)	N=11 için Mutlak Hata	N=12 için Mutlak Hata
(0,0)	0	0
(0.1, 0.1)	3.794172e-12	1.428437e-11
(0.2, 0.2)	2.189117e-11	4.374347e-11
(0.3, 0.3)	7.210020e-11	1.083495e-10
(0.4, 0.4)	1.013060e-11	5.722874e-10
(0.5, 0.5)	1.495414e-09	7.447865e-10
(0.6, 0.6)	1.721931e-08	1.986301e-09
(0.7, 0.7)	2.114950e-07	2.807688e-08
(0.8, 0.8)	2.098576e-05	2.114908e-06
(0.9, 0.9)	4.340099e-04	5.936754e-05
(1,1)	7.105427e-15	7.105427e-15



**Şekil 4.8** Örnek 4.4'ün  $N = 11$  için mutlak hata fonksiyonu



Şekil 4.9 Örnek 4.4'ün  $N = 12$  için mutlak hata fonksiyonu



Şekil 4.10  $t = 0.5$  ve  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-2}$  için Örnek 4.4'ün  $N = 11$  ve  $N = 12$  için mutlak hata grafikleri

**Tablo 4.7** Örnek 4.4'ün  $t = 1$  ve  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-2}$  için  $R_N(x_i, 1)$  rezidüel hata değerleri

(x)	Mutlak Hata	$R_{10}(x_p, t_q)$
(0.0)	8.8817E-15	1.9744E-15
(0.2)	3.5182E-04	7.2975E-06
(0.4)	1.5232E-04	3.1518E-06
(0.6)	8.4647E-06	1.7487E-07
(0.8)	2.0993E-02	4.7112E-04
(1.0)	7.1054E-15	5.1706E-15

### 4.3 İki Boyutlu İntegral ve Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemler ile İlgili

#### Örnekler

##### Örnek 4.5 Doğrusal iki boyutlu

$$u_y(x, y) - u_{xx}(x, y) + u(x, y) = xy + y + 6 \int_0^1 \int_0^1 (xs - yt) u(s, t) ds dt \quad (4.14)$$

Fredholm kısmi integro diferansiyel denklemini,

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0 \text{ ve } u_y(x, 0) = x, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (4.15)$$

başlangıç ve sınır koşulları altında ele alalım. (4.14)-(4.15) probleminin öncelikle Taylor sıralama metodu ile yaklaşık çözümü elde edilecek, ardından Hermite-Taylor sıralama metodu aracılığıyla yaklaşık çözümü elde edilecektir.

➤ **Taylor Sıralama Yöntemi için Çözüm Yolu:** Bu yöntemde (4.14) denkleminde yer alan ifadelerin tümü Taylor polinomları cinsinden açılarak eşitlikte yazılmıştır. Bu amaçla, önce integralli kısım göz önüne alındığında

$$6V(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) \bar{\mathbf{X}}(t) \mathbf{A} ds dt$$

$$6V(x, y) = 6 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) \bar{\mathbf{X}}(t) \mathbf{A} ds dt$$

$$= 6 \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{I} \mathbf{A};$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) ds = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{Q} \bar{\mathbf{X}}(t) dt =$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ve böylece

$$6 V(x, y) = 6 \begin{bmatrix} 1 & y & x & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= \begin{bmatrix} -3y + 3x & -2y + 3x/2 & -\frac{3y}{2} + 2x & -y + x \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

elde edilir. Sonra denklem 4.14'ün diferansiyel parçasında yer alan  $u(x, t)$  ve türevlerinin matris formları [113],

$$u_y(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & x \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad , \quad u_{xx}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad , \quad u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & y & x & xy \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

olarak belirlenir. Dolayısıyla, gerekli düzenleme ile 4.14 denkleminin matris formu, açıkça,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & x \end{bmatrix} + 0 + \begin{bmatrix} 1 & y & x & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y - 3x & 2y - 3x/2 & \frac{3y}{2} - 2x & y - x \end{bmatrix} \right\} \mathbf{A} = \underbrace{xy + y}_{G(x,y)}$$

veya kısaca

$$\mathbf{W}(x, y)\mathbf{A} = G(x, y) \quad (4.16)$$

olarak yazılır. Burada

$$\mathbf{W}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 + 3y - 3x & 1 + 3y - 3x/2 & \frac{3y}{2} - x & y + xy \end{bmatrix}$$

dır.  $N=1$  için (3.24) sıralama noktaları  $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ , (4.16) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\mathbf{W}(0,0) = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad G(0,0) = 0$$

$$\mathbf{W}(0,1) = [4 \quad 4 \quad 3/2 \quad 1], \quad G(0,1) = 1$$

$$\mathbf{W}(1,0) = [-2 \quad -1/2 \quad -1 \quad 0], \quad G(1,0) = 0$$

$$\mathbf{W}(1,1) = [1 \quad 5/2 \quad 1/2 \quad 1], \quad G(1,1) = 2$$

olmak üzere,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

temel matrisi denklemini elde edilir. Benzer şekilde koşullar için de (3.24) sıralama noktaları yerine yazıldığında

- $u(x, 0) = 0 \rightarrow \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(0)\mathbf{A} = 0$ ;  $x_0 = 1$  için

$$\mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(0)\mathbf{A} = 0 \rightarrow [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0 \rightarrow [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{A} = 0.$$

- $u(0, y) = 0 \rightarrow \mathbf{X}(0)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{A} = 0$ ;  $y_1 = 1$  için

$$\mathbf{X}(0)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{A} = 0 \rightarrow [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0 \rightarrow [1 \ 1 \ 0 \ 0] \mathbf{A} = 0.$$

- $u_y(x, 0) = x \rightarrow \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\mathbf{A} = x: x_1 = 1$  için

$$\mathbf{X}(1)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\mathbf{A} = 1, [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 1, [0 \ 1 \ 0 \ 1] \mathbf{A} = 1$$

olur ve koşullar matrisi

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \boldsymbol{\theta} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

olarak elde edilir. (4.17) matrisinin son satırları ile (4.18) koşullar matrisi yer değiştirirse;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden  $\mathbf{A}$  bilinmeyen katsayıları;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Elde edilen katsayılar kesilmiş Taylor serisi formunda yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{X}(y)\mathbf{A} \\ &= a_{00} + a_{01}y + a_{10}x + a_{11}xy \end{aligned}$$



$$u(x, y) = xy$$

tam çözümlü elde edilir.

- **Hermit-Taylor Sıralama Metodu için Çözüm Yolu:**  $N = 1$  için Hermite ve Taylor polinomları aracılığıyla,

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 a_{mn} \mathbf{H}_m(x) \mathbf{H}_n(y), \quad (4.19)$$

$$= a_{00} \mathbf{H}_0(x) \mathbf{H}_0(y) + a_{10} \mathbf{H}_1(x) \mathbf{H}_0(y) + a_{01} \mathbf{H}_0(x) \mathbf{H}_1(y) + a_{11} \mathbf{H}_1(x) \mathbf{H}_1(y)$$

biçiminde yaklaşık çözümünü arayacağız. Kesim 3.2.3'de uygulanan benzer adımlar izlenerek,

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \underbrace{\mathbf{H}(s) \bar{\mathbf{H}}(t)}_{\mathbf{X}(s) \mathbf{F}} \mathbf{A} ds dt \\ &= \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{X}}(y) \mathbf{K} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \int_0^1 \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(s) \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}(t) ds dt = \int_0^1 \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{F} \bar{\mathbf{H}}(t) dt$$

$$K(x, y, s, t) = xs - yt; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{00}^{00} & k_{01}^{00} & k_{10}^{00} & k_{11}^{00} \\ k_{00}^{01} & k_{01}^{01} & k_{10}^{01} & k_{11}^{01} \\ k_{00}^{10} & k_{01}^{10} & k_{10}^{10} & k_{11}^{10} \\ k_{00}^{11} & k_{01}^{11} & k_{10}^{11} & k_{11}^{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/3 & 4/9 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} V(x, y) \\ = \left[ -y/2 + x/2 \quad -2y/3 + x/2 \quad -y/2 + 2x/3 \quad -2y/3 + 2x/3 \right] \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. (3.13)-(3-18)'den

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(y) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 4x] \mathbf{A} \\ u_{xx}(x, y) &= \mathbf{H}(x) \mathbf{M}^2 \bar{\mathbf{H}}(y) \mathbf{A} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{A} \\ u(x, y) &= \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(y) \mathbf{A} = [1 \quad 2y \quad 2x \quad 4xy] \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. (4.21) ve (4.22) eşitlikleri yardımıyla (4.14) denkleminin genel matris bağıntısı;

$$[1 + 3y - 3x \quad 2 + 6y - 3x \quad -2x + 3y \quad 4xy + 4y] \mathbf{A} = G(x, y)$$

$$\mathbf{W}(x, y) \mathbf{A} = G(x, y) \quad (4.23)$$

olur. N=1 için (3.24) sıralama noktaları ,  $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$  olarak elde edilir. Bu sıralama noktaları (4.23) matris denkleminde yerine yazıldığında;

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

denklem sistemi elde edilir. Benzer şekilde sıralama noktaları (4.15) koşullarında yerine konduğunda; koşullar matris denklem sistemi;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\tilde{U}} \mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\theta}} \rightarrow \mathbf{U}\mathbf{A} = \boldsymbol{\theta} \quad (4.25)$$

elde edilir. Son olarak, (4.25) satır matrisleri, (4.24) genel matris denkleminin uygun satırları ile yer değiştirilerek, artırılmış matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow [\tilde{W}; \tilde{G}] \text{ or } \tilde{W}\mathbf{A} = \tilde{G}$$

olarak elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle  $\mathbf{A}$  Hermite katsayıları matrisi elde edilir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Elde edilen  $\mathbf{A}$  matrisi, (3.1) kesilmiş Hermite seri formunda yerine yazıldığında;

$$u(x, y) = \frac{1}{4} (\mathbf{H}_1(x)\mathbf{H}_1(y)) = \frac{1}{4} (2x)(2y) = xy$$

tam çözüm elde edilir.

**Örnek 4.6** Şimdi aşağıdaki Fredholm integral denklemini ele alalım:

$$u(x, y) = xy - x + y + 6 \int_0^1 \int_0^1 (xs - yt) u(s, t) ds dt. \quad (4.25)$$

Öncelikle, (4.25) integral denkleminin Taylor sıralama metodu ile yaklaşık çözümü elde edilecek, ardından Hermite-Taylor sıralama metodu aracılığıyla yaklaşık çözümü elde edilecektir.

- **Taylor Sıralama Metodu için Çözüm Yolu:** (4.25) integral denkleminde yer alan ifadelerin matris bağıntıları

$$u(x, y) = \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{A}$$

$$u(s, t) = \mathbf{X}(s)\mathbf{X}(t)\mathbf{A}$$

$$K(x, y, s, t) = \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{X}^T(s)$$

biçimindedir. Burada;

$$K(x, y, s, t) = xs - yt; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (xs - yt) u(s, t) ds dt$$

olmak üzere;

$$V(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{X}^T(s)\mathbf{X}(s)\bar{\mathbf{X}}(t)\mathbf{A} ds dt$$

$$= \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K} \underbrace{\int_0^1 \bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{Q}\bar{\mathbf{X}}(t) dt}_{\mathbf{I}} \mathbf{A}$$

dır. Burada

$$\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{X}^T(s)\mathbf{X}(s) ds = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & X(t) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -t & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece,

$$6V(x, y) = 6\mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{I}\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
&= [1 \quad y \quad x \quad xy] 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\
&= [-3y + 3x \quad -2y + 3x/2 \quad -3y/2 + 2x \quad -y + x] \mathbf{A}
\end{aligned}$$

olur. (4.25) denklemi  $G(x, y) = xy - x + y$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= G(x, y) + 6V(x, y) \\
\mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{A} - 6V(x, y) &= G(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ [X_0(x) \quad X_1(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{X}(y) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(y) \end{bmatrix} \right\} \mathbf{A} \\
&\quad - [-3y + 3x \quad -2y + 3x/2 \quad -3y/2 + 2x \quad -y + x] \mathbf{A} = G(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{[1 \quad 2y \quad 2x \quad 4xy] + [-3y + 3x \quad -2y + 3x/2 \quad -3y/2 + 2x \quad -y + x]\} \mathbf{A} \\
& = G(x, y) \\
& \underbrace{[1 + 3y - 3x \quad 3y - 3x/2 \quad 3y/2 - x \quad xy + y - x]}_{W(x,y)} \mathbf{A} = G(x, y) \\
& \mathbf{W}(x, y) \mathbf{A} = G(x, y) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir. Elde edilen (4.26) denkleminde, (3.24) sıralama noktaları yerine yazıldığında;

$$\mathbf{W}(0,0) \mathbf{A} = G(0,0)$$

$$\mathbf{W}(0,1) \mathbf{A} = G(0,1)$$

$$\mathbf{W}(1,0) \mathbf{A} = G(1,0)$$

$$\mathbf{W}(1,1) \mathbf{A} = G(1,1)$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3/2 & 1 \\ -2 & -3/2 & -1 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden  $\mathbf{A}$  bilinmeyen Taylor katsayıları,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Elde edilen katsayılar kesilmiş Taylor serisi açılımında yerine yazıldığında;

$$u(x, y) = \mathbf{X}(x) \mathbf{X}(y) \mathbf{A}$$

$$= a_{00} + a_{01}y + a_{10}x + a_{11}xy$$

$$= xy$$

tam çözümü elde edilir.

- **Hermit-Taylor Sıralama Metodu için Çözüm Yolu:**  $N = 1$  için Hermite ve Taylor polinomları aracılığıyla yaklaşık çözümünü arayacağız. (4.25) denkleminde yer alan ifadeler,

$$u(x, y) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A}$$

$$G(x, y) = xy - x + y$$

$$u(s, t) = \mathbf{H}(s)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} = \mathbf{X}(s)\mathbf{F}\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A}$$

$$K(x, y, s, t) = \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{X}^T(s)$$

dır. Burada;

$$K(x, y, s, t) = xs - yt; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 (xs - yt) u(s, t) ds dt$$

olmak üzere;

$$V(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{X}^T(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{F}\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} ds dt$$

$$= \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K} \underbrace{\int_0^1 \bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{H}(t)dt}_{\mathbf{I}} \mathbf{A}$$

dir. Burada,

$$\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{X}^T(s)\mathbf{X}(s)ds = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \bar{\mathbf{X}}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 2/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/3 & 4/9 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x, y) &= \mathbf{X}(x)\bar{\mathbf{X}}(y)\mathbf{K}\mathbf{I}\mathbf{A} \\ &= \begin{bmatrix} -y/2 + x/2 & -2y/3 + x/2 & -y/2 + 2x/3 & -2y/3 + 2x/3 \end{bmatrix} \mathbf{A} \end{aligned}$$

olur. (4.25) denklemi,

$$u(x, y) = G(x, y) + 6V(x, y)$$

$$\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(y)\mathbf{A} - 6V(x, y) = G(x, y)$$

$$\{[1 \quad 2y \quad 2x \quad 4xy] + [3y - 3x \quad 4y - 3x \quad 3y - 4x \quad 4y - 4x]\}\mathbf{A} = G(x, y)$$

$$\underbrace{[1 + 3y - 3x \quad 6y - 3x \quad 3y - 2x \quad 4xy + 4y - 4x]}_{\mathbf{W}(x,y)} \mathbf{A} = G(x, y)$$

$$\mathbf{W}(x, y)\mathbf{A} = G(x, y) \tag{4.27}$$



şeklinde düzenlenir. Elde edilen (4.27) denkleminde (3.24) sıralama noktaları yerine yazıldığında;

$$\mathbf{W}(0,0)\mathbf{A} = G(0,0)$$

$$\mathbf{W}(0,1)\mathbf{A} = G(0,1)$$

$$\mathbf{W}(1,0)\mathbf{A} = G(1,0)$$

$$\mathbf{W}(1,1)\mathbf{A} = G(1,1)$$

olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler sisteminin çözümünden  $\mathbf{A}$  bilinmeyen Hermite katsayıları;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

bulunur. Elde edilen bu katsayılar (3.1) kesilmiş Hermite serisi formunda yerine yazıldığında;

$$u(x, y) = \mathbf{H}(x)\mathbf{H}(y)\mathbf{A}$$

$$= [H_0(x) \ H_1(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{H}(y) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(y) \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [H_0(x)\mathbf{H}(y) \ H_1(x)\mathbf{H}(y)]$$

$$= [H_0(x)H_0(y) \ H_0(x)H_1(y) \ H_1(x)H_0(y) \ H_1(x)H_1(y)]\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{00}H_0(x)H_0(y) + a_{10}H_1(x)H_0(y) + a_{01}H_0(x)H_1(y) + a_{11}H_1(x)H_1(y) \\
&= \frac{1}{4}(H_1(x)H_1(y)) = \frac{1}{4}(2x)(2y) = xy
\end{aligned}$$

tam çözümü elde edilir.

#### Örnek 4.7 Volterra–Fredholm integral Denklemi

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= y^2 \exp(x) - \frac{2}{3}x^2y^3 + \int_0^y \int_{-1}^1 x^2 \exp(-s) u(s, t) ds dt; \quad (4.28) \\
&0 \leq y \leq 1
\end{aligned}$$

ele alalım. (4.28) integral denkleminin tam çözümü  $u(x, y) = y^2 \exp(x)$  şeklindedir [114].

Farklı  $N$  değerleri için Kesim 3.2.3’de yer alan benzer adımlar izlenerek elde edilen sonuçlara Tablo 4.8’de yer verilmiştir. Ayrıca bu çözümlere ait mutlak hata değerleri Tablo 4.9’da yer almaktadır [115]. Tablo 4.9 incelendiğinde  $N$  kesme sınırının artmasıyla birlikte yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir.

Şekil 4.11, 4.12, 4.13 ve 4.14’te sırasıyla (4.28) probleminin tam çözümü, ve  $N=5,6$  ve  $7$  için Hermite-Taylor polinom çözümü yer alırken, Şekil 4.15’te  $y = 0.5$  ve  $0 \leq x \leq 1$  aralığında  $N=5,6$  ve  $7$  için mutlak hata ve rezidüel hata grafiklerinin karşılaştırılması yapılmıştır.

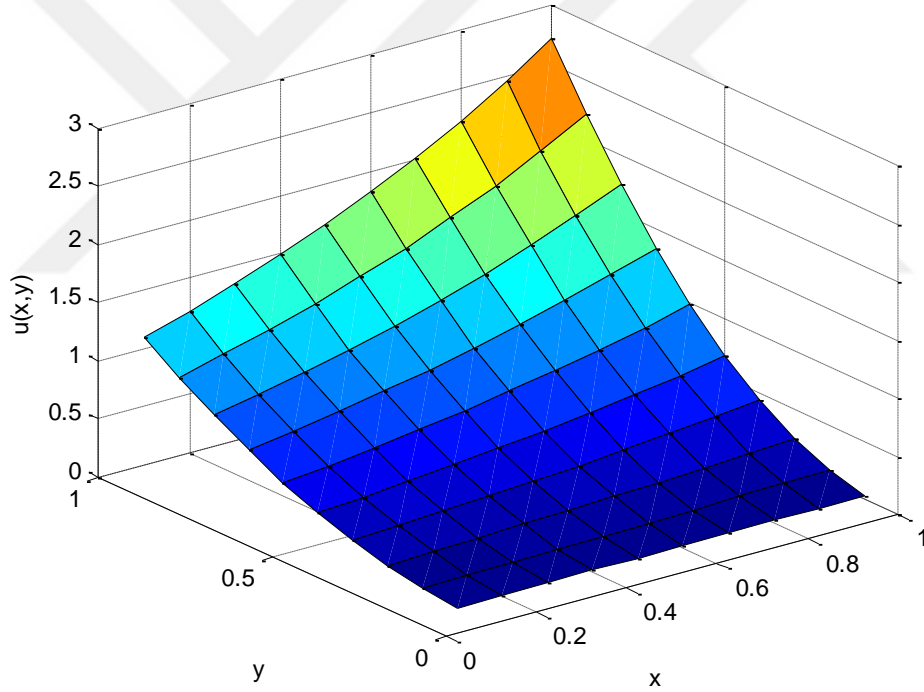
Tablo 4.10’da  $N = 7$  için

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), y_j = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)\right); \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

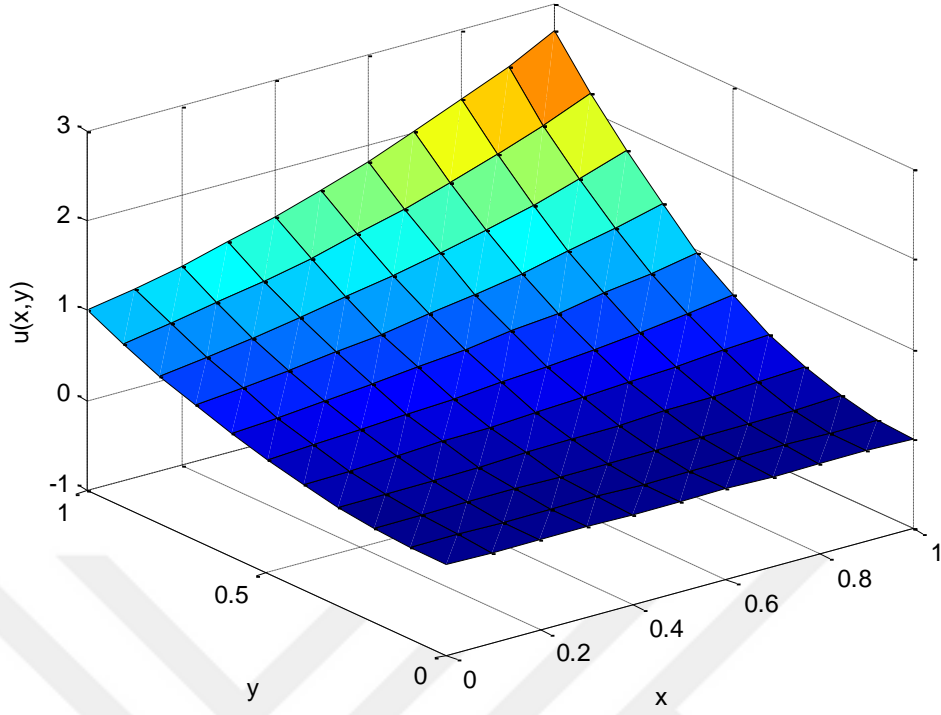
sıralama noktaları ele alındığında Hermite-Taylor sıralama metodu ve iki değişenli Chebyshev sıralama metoduna ait mutlak hata değerleri yer almaktadır.

**Tablo 4.8** Örnek 4.7'nin farklı N değerleri için yaklaşık çözümleri

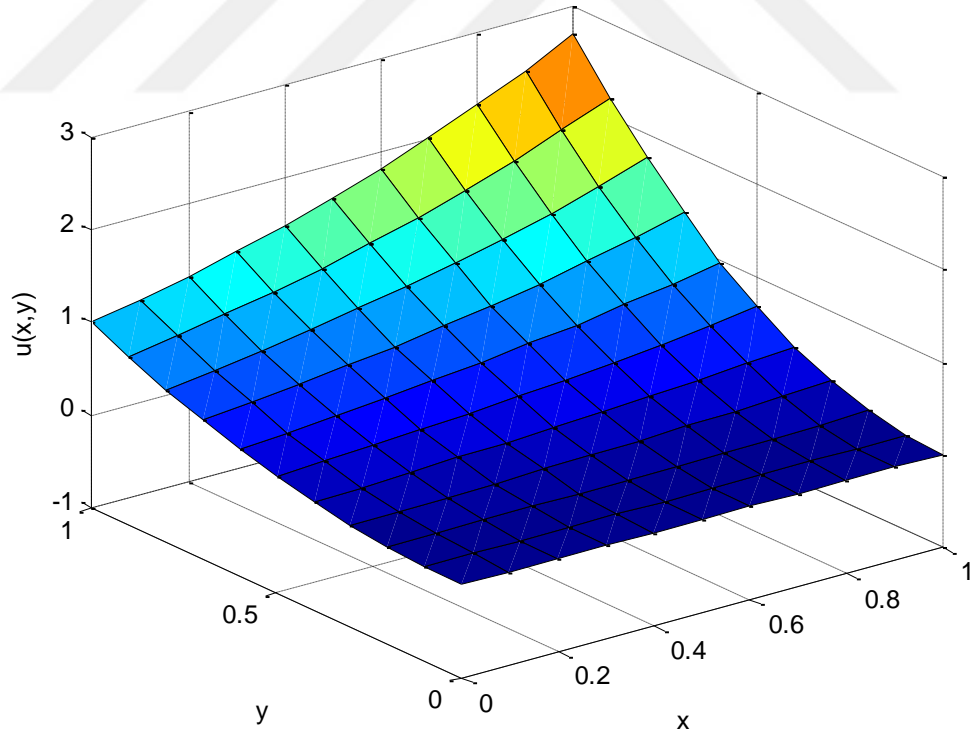
(x,y)	Tam Çözüm $= y^2 \exp(x)$	N = 5 için Yaklaşık Çözüm	N = 6 için Yaklaşık Çözüm	N = 7 için Yaklaşık Çözüm
(0,0)	0	1.5210E-40	1.3775E-40	-2.001E-40
(0.1, 0.1)	0.01105170	0.01105171	0.01105171	0.01105170
(0.2, 0.2)	0.04885611	0.04885509	0.04885630	0.04885608
(0.3, 0.3)	0.12148729	0.12147930	0.12148876	0.12148704
(0.4, 0.4)	0.23869195	0.23865779	0.23869829	0.23869088
(0.5, 0.5)	0.41218031	0.41207374	0.41220012	0.41217696
(0.6, 0.6)	0.65596276	0.65569091	0.65601324	0.65595423
(0.7, 0.7)	0.98673882	0.98613665	0.98685054	0.98671993
(0.8, 0.8)	1.42434619	1.42314407	1.42456936	1.42430845
(0.9, 0.9)	1.99227852	1.99006020	1.99227852	1.99220881
(1,1)	2.71828182	2.71442713	2.71899749	2.71816081



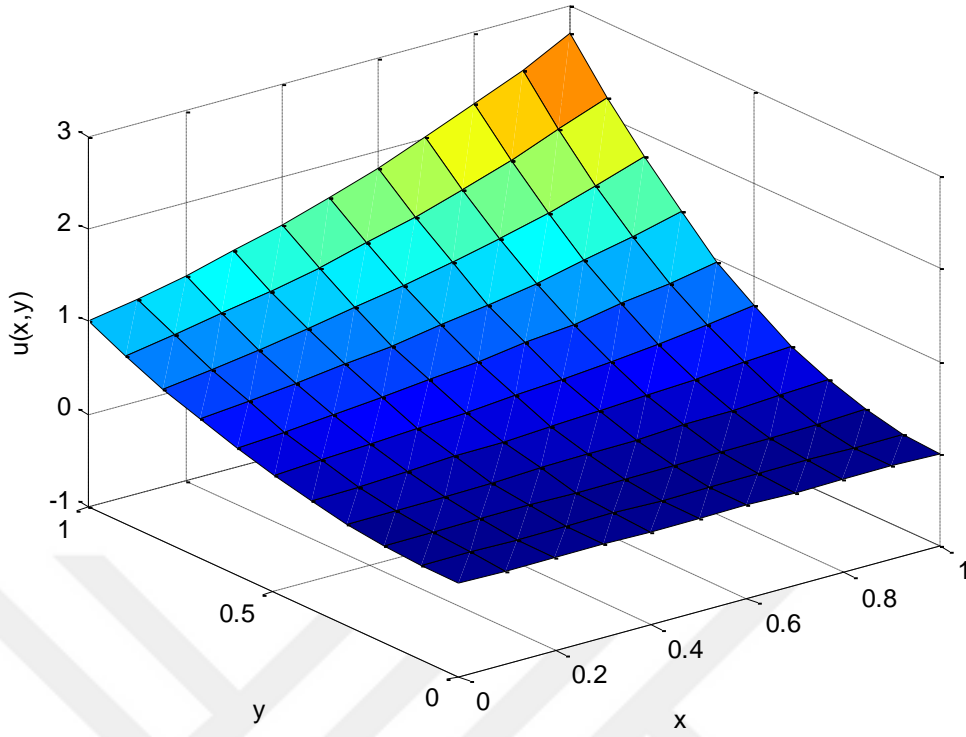
**Şekil 4.11** Örnek 4.7'in  $0 \leq x, y \leq 1$  için tam çözümü



Şekil 4.12 Örnek 4.7'in  $N = 5$  için Hermite-Taylor polinom çözümü



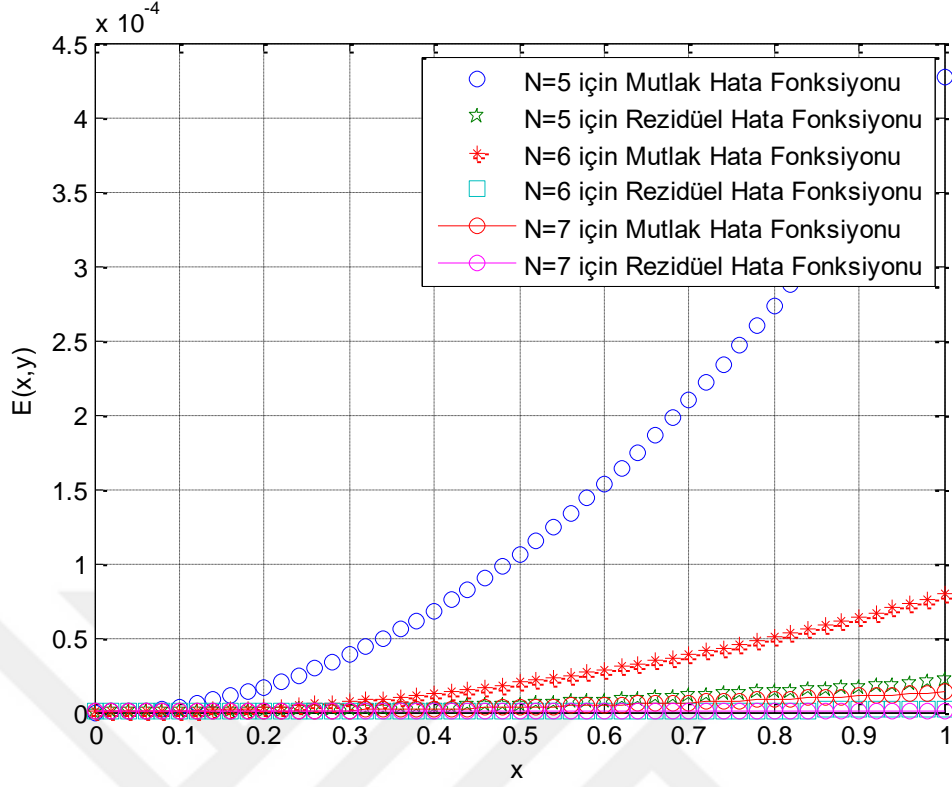
Şekil 4.13 Örnek 4.7'in  $N = 6$  için Hermite-Taylor polinom çözümü



**Şekil 4.14** Örnek 4.7'in  $N = 7$  için Hermite-Taylor polinom çözümü

**Tablo 4.9** Örnek 4.7'nin farklı  $N$  değerleri için mutlak hata değerleri

(x,y)	N=5 için Mutlak Hata	N=6 için Mutlak Hata	N=7 için Mutlak Hata
(0,0)	1.52E-40	1.37E-40	2.001E-40
(0.1, 0.1)	1.08E-08	5.05E-09	9.57E-10
(0.2, 0.2)	1.02E-06	1.90E-07	3.20E-08
(0.3, 0.3)	7.98E-06	1.47E-06	2.48E-07
(0.4, 0.4)	3.41E-05	6.33E-06	1.07E-06
(0.5, 0.5)	1.06E-04	1.99E-05	3.34E-06
(0.6, 0.6)	2.72E-04	5.05E-05	8.53E-06
(0.7, 0.7)	6.02E-04	1.12E-04	1.89E-05
(0.8, 0.8)	1.20E-03	2.23E-04	3.77E-05
(0.9, 0.9)	2.21E-03	4.12E-04	6.97E-05
(1,1)	3.85E-03	7.15E-04	1.21E-04



Şekil 4.15  $y = 0.5$  için Örnek 4.7'nin  $N = 5,6$  ve  $7$  için mutlak hata ve rezidüel hata grafikleri

Tablo 4.10 Örnek 4.7'in  $N = 7$  için elde edilen Yaklaşık Çözümlerinin Karşılaştırılması

$i = j$	$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)$	$y_j = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)\right)$	Hermite Sıralama Metodu	İki değişenli Chebyshev Sıralama Metodu [114]
0	1	1	0.1E-05	0.6E-08
1	0.900969	0.950484	0.8E-06	0.1E-08
2	0	0.811745	0.8E-06	0.1E-08
3	0.222521	0.611261	0.1E-07	0.7E-09
4	-0.22252	0.388739	0.4E-08	0.1E-09
5	-0.62349	0.188255	0.2E-07	0.15E-09
6	-0.900969	0.049516	0.1E-07	0.47E-09
7	-1	0	0.6E-33	0

**Örnek 4.8** Aşağıdaki Fredholm-integral denklemini,

$$u(x, y) - \int_0^1 \int_0^1 (xs + ye^t) u(s, t) ds dt = g(x, y) \quad (4.29)$$

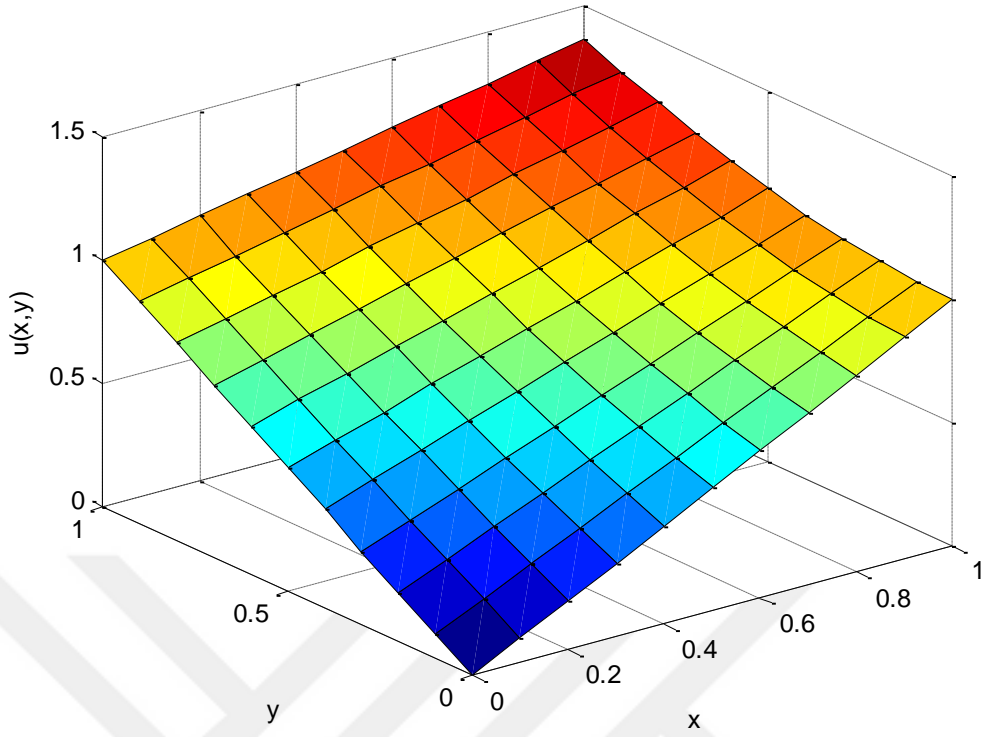
ele alalım. Burada,  $g(x, y) = xe^{-y} + \left(\frac{1}{3}e^{-1} - \frac{7}{12}\right)x - \frac{1}{2}y$  ve tam çözümü,  $u(x, y) = xe^{-y} + y$  şeklindedir [61].

Kesim 3.2.3’de izlenen adımlar uygulanarak  $N = 8$  ve  $N = 9$  için (4.29) problemine ait yaklaşık çözümler Tablo 4.11’de yer almaktadır. Ayrıca, Tablo 4.12’de mutlak hata değerleri ve  $R_N(x_q, y_p)$  residüel hata değerlerine yer verilmiştir.

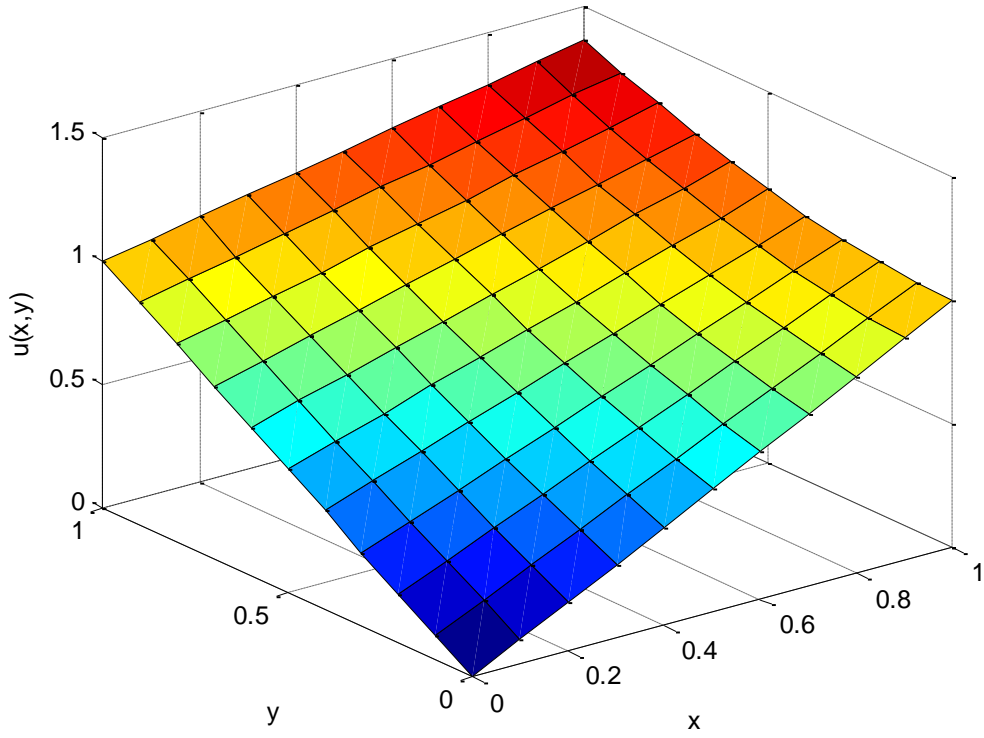
Örnek 4.8’in farklı  $N$  değerleri göz önüne alınarak elde edilen Hermite-Taylor sıralama metoduna ait sonuçları, Tablo 4.13’de Chebyshev Sıralama Metodu ve Radyal taban fonksiyonu metodu ile karşılaştırılmıştır. Tablo incelendiğinde Hermite-Taylor sıralama metodunun diğer metotlara göre daha küçük hata sonuçları verdiği görülmektedir.

**Tablo 4.11** Örnek 4.8’in farklı  $N$  değerleri için yaklaşık çözümleri

(x,y)	Tam Çözüm $= xe^{-y} + y$	N=8 için Yaklaşık Çözüm	N=9 için Yaklaşık Çözüm
(0,0)	0	1.516841E-39	-3.156845E-41
(0.1,0.1)	0.19048374	0.19048388	0.19048375
(0.2,0.2)	0.36374615	0.36374643	0.36374617
(0.3,0.3)	0.52224546	0.52224589	0.52224550
(0.4,0.4)	0.66812801	0.66812859	0.66812807
(0.5,0.5)	0.80326532	0.80326604	0.80326539
(0.6,0.6)	0.92928698	0.92928784	0.92928705
(0.7,0.7)	1.04760971	1.04761071	1.04760980
(0.8,0.8)	1.15946317	1.15946432	1.15946327
(0.9,0.9)	1.26591269	1.26591398	1.26591281
(1,1)	1.36787944	1.36788087	1.36787957

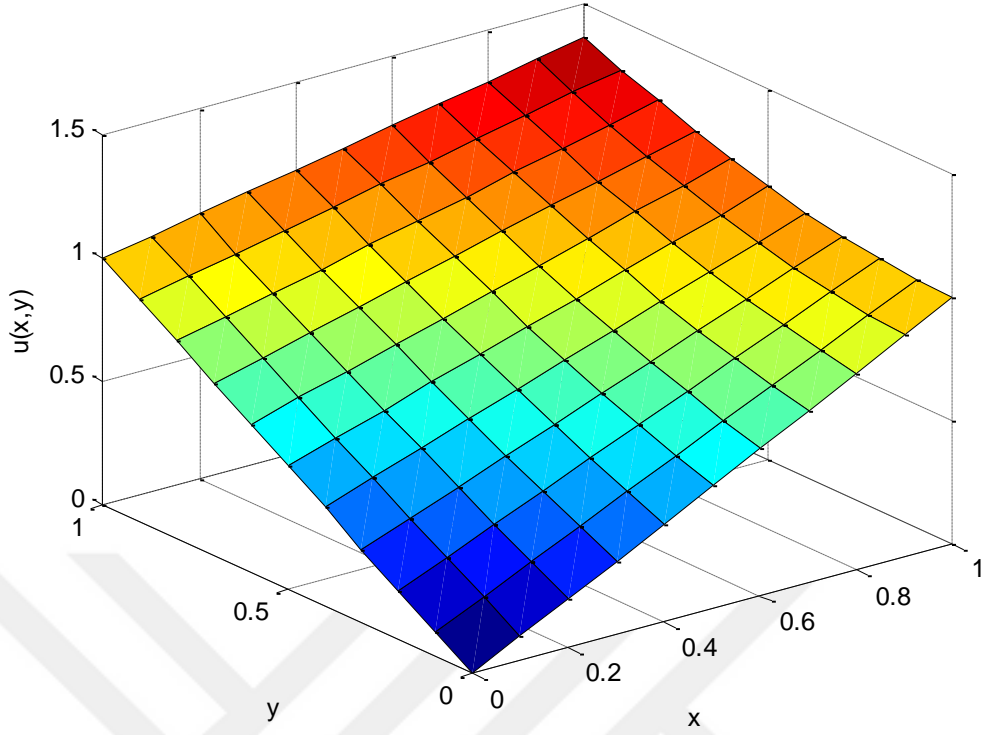


Şekil 4.16 Örnek 4.8'in  $0 \leq x, y \leq 1$  için tam çözümü



Şekil 4.17 Örnek 4.8'in  $N = 8$  için Hermite-Taylor polinom çözümü

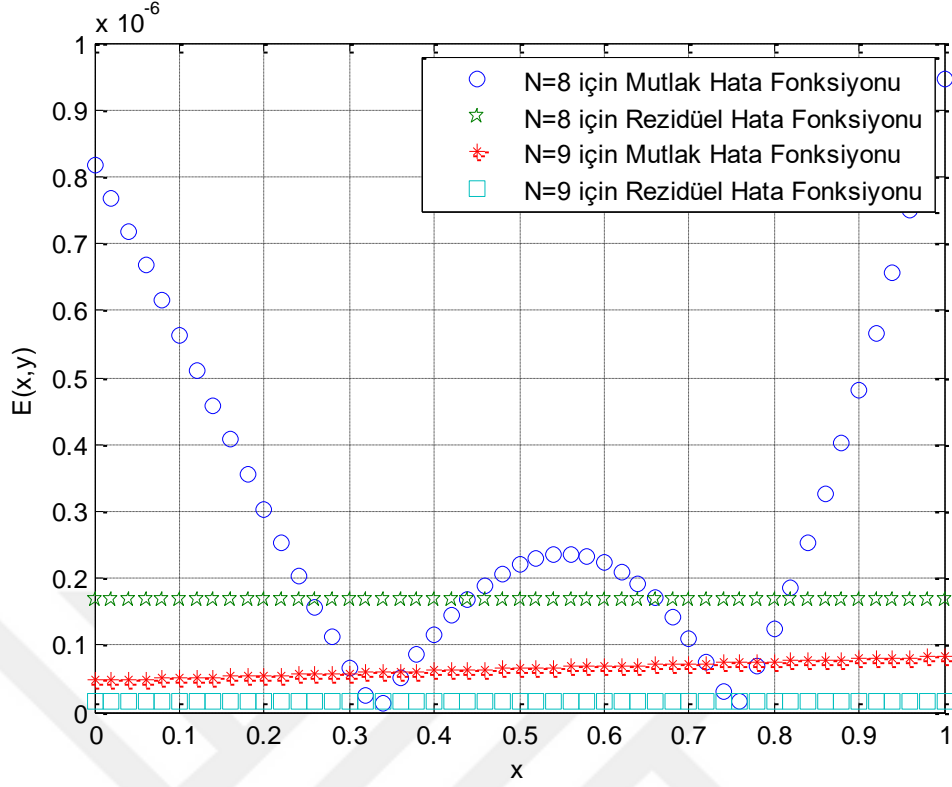




Şekil 4.18 Örnek 4.8'in  $N = 9$  için Hermite-Taylor polinom çözümü

Tablo 4.12 Örnek 4.8'in farklı  $N$  değerleri için hata analizleri

$(x,y)$	$N=8$ İçin Mutlak Hata	$R_8(x_q, y_p)$	$N=9$ için Mutlak Hata	$R_9(x_q, y_p)$
(0,0)	1.52E-39	2.01E-21	3.16E-41	8.45E-18
(0.1, 0.1)	1.44E-07	3.37E-08	1.30E-08	3.05E-09
(0.2, 0.2)	2.87E-07	6.73E-08	2.60E-08	6.10E-09
(0.3, 0.3)	4.31E-07	1.01E-07	3.90E-08	9.15E-09
(0.4, 0.4)	5.75E-07	1.35E-07	5.21E-08	1.22E-08
(0.5, 0.5)	7.19E-07	1.68E-07	6.51E-08	1.53E-08
(0.6, 0.6)	8.62E-07	2.02E-07	7.81E-08	1.83E-08
(0.7, 0.7)	1.01E-06	2.35E-07	9.11E-08	2.14E-08
(0.8, 0.8)	1.15E-06	2.69E-07	1.04E-07	2.44E-08
(0.9, 0.9)	1.29E-06	3.03E-07	1.17E-07	2.75E-08
(1,1)	1.44E-06	3.37E-07	1.30E-07	3.05E-08



**Şekil 4.19**  $y = 0.5$  için Örnek 4.8'in  $N = 8$  ve  $N = 9$  için mutlak hata ve rezidüel hata fonksiyonu grafikleri

**Tablo 4.13** Örnek 4.8'in farklı yöntemlerle mutlak hatalarının karşılaştırılması

N	Hermite-Taylor Sıralama Metodu	Chebyshev Sıralama Metodu	Radyal taban fonksiyonu Metodu
2	2.27E-03	6.23E-03	1.42E-02
4	7.44E-06	1.98E-05	1.61E-05
6	1.30E-08	1.23E-07	2.62E-08
8	1.40E-10	1.18E-07	2.50E-11

#### 4.4 Bir Boyutlu Gecikmeli Parabolik Volterra Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler

**Örnek 4.9** Aşağıdaki,

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + u_x(x, t) + u_{xx}(x, t) + u(x, t - 1) \\ = G(x, t) + \int_0^t ts u(x, s) ds, \end{aligned} \quad (4.30)$$

bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel denklemini,

$$u(x, 0) = x, \quad x \in [0,1] \quad (4.31)$$

$$u(0, t) = -t, \quad u(1, t) = 1 - t, \quad t \in [0,1]$$

başlangıç ve sınır koşulları altında ele alalım. Burada,  $G(x, t) = 1 + x - t - \frac{1}{2}xt^3 + \frac{1}{3}t^4$ ,  $P_1(x) = 1$ ,  $P_2(x) = -1$ ,  $P_3(x) = 1$ ,  $K(t, s) = ts$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = -1$ ,  $a = 0$ ,  $b = T = 1$  şeklindedir [116]. (4.30)-(4.31) probleminin tam çözümü  $u(x, t) = x - t$ .

$N = 1$  için (3.24) sıralama noktaları;

$$\begin{aligned} (x_0, t_0) = (0,0), \quad (x_0, t_1) = (0,1), \quad (x_1, t_0) = (1,0), \\ (x_1, t_1) = (1,1) \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklindedir. (3.35), (3.61)- (3.63) bağıntılarından,

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} = [H_0(x) \quad H_1(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} \\ &= [H_0(x)\mathbf{H}(t) \quad H_1(x)\mathbf{H}(t)]\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} \\ &= [H_0(x)[H_0(t) \quad H_1(t)] \quad H_1(x)[H_0(t) \quad H_1(t)]\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} \end{aligned}$$

(4.33)

$$= [H_0(x)H_0(t) \quad H_0(x)H_1(t) \quad H_1(x)H_0(t) \quad H_1(x)H_1(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [0 \quad 2H_0(x)H_0(t) \quad 0 \quad 2H_1(x)H_0(t)] \mathbf{A}$$

$$= [0 \quad 2 \quad 0 \quad 4x] \mathbf{A}$$

$$u_x(x, t) = \mathbf{H}(x) \mathbf{M} \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} \quad (4.34)$$

$$= [H_0(x) \quad H_1(x)] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [0 \quad 0 \quad 2H_0(x)H_0(t) \quad 2H_0(x)H_1(t)] \mathbf{A}$$

$$= [0 \quad 0 \quad 2 \quad 4t] \mathbf{A}$$

$$u_{xx}(x, t) = \mathbf{H}(x) \mathbf{M}^2 \bar{\mathbf{H}}(t) \mathbf{A} \quad (4.35)$$

$$= [H_0(x) \quad H_1(x)] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{A}$$

$$u(x, t - 1) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(1, 0) \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}(1, -1) \bar{\mathbf{F}} \mathbf{A} \quad (4.36)$$

)

$$= [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(1, -1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(1, -1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [1 \quad t \quad 2x \quad 2xt] \begin{bmatrix} \mathbf{B}(1, -1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(1, -1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [1 \quad t \quad 2x \quad 2xt] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [1 \quad -2 + 2t \quad 2x \quad -4x + 4xt] \mathbf{A}$$

$$I(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{Q}(x, t)$$

$$= [1 \quad x] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t^2 & 2xt & 2xt^2 \\ \frac{t^2}{2} & \frac{2t^3}{3} & xt^2 & \frac{4xt^3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & \frac{2t^4}{3} & xt^3 & \frac{4xt^4}{3} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x, t) &= \int_0^t \mathbf{X}^T(s) \mathbf{H}(x) \bar{\mathbf{H}}(s) ds = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 2sx \\ s & 2sx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(s) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(s) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} t & t^2 & 2xt & 2xt^2 \\ \frac{t^2}{2} & \frac{2t^3}{3} & xt^2 & \frac{4xt^3}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. (4.33)-(4.37) bağıntıları denklem (4.30)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}(x, t) \mathbf{A} \\ &= \left\{ [0 \quad 2 \quad 0 \quad 4x] + [0 \quad 0 \quad 2 \quad 4t] + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \right. \\ &+ [1 \quad -2 + 2t \quad 2x \quad -4x + 4xt] - \left. \begin{bmatrix} t^3 & \frac{2t^4}{3} & xt^3 & \frac{4xt^4}{3} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{A} \quad (4.38) \\ &= \left[ 1 - \frac{t^3}{2} \quad 2t - \frac{2t^4}{3} \quad 2 + 2x - xt^3 \quad 4t + 4xt - \frac{4xt^4}{3} \right] \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}(x, t) \mathbf{A} = \mathbf{G}(x, t) \rightarrow \mathbf{W}(x, t); \mathbf{G}(x, t)$$

genel matris denklemi elde edilir. (3.24) sıralama noktaları (4.38) genel matris denkleminde yerine yazıldığında;

$$[\mathbf{W}(x_i, t_j); \mathbf{G}(x_i, t_j)], \quad i, j = 0, 1;$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(0,0) \\ W(0,1) \\ W(1,0) \\ W(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 4/3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & 4/3 & 3 & 20/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 1/2 & 4/3 & 2 & 4 & ; & 1/3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & ; & 2 \\ 1/2 & 4/3 & 3 & 20/3 & ; & 5/6 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

elde edilir. Benzer adımlar (4.31) koşulları için uygulandığında;

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = x \\ u(0, t) = -t \\ u(1, t) = 1 - t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(0)\mathbf{A} = x \\ \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} = -t \\ \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A} = 1 - t \end{array} \quad (4.40)$$

olur. Kullanılmayan sıralama noktaları (4.40)'da yerine yazıldığında,

$$u(1,0) = 1, \quad \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(0)\mathbf{A} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 1 \\ [1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 1];$$

$$u(0,1) = -1, \quad \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(1)\mathbf{A} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = -1, \\ [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad ; \quad -1];$$

$$u(1,1) = 1 - 1, \quad \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(1)\mathbf{A} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0,$$

$$[1 \ 2 \ 2 \ 4 \ ; \ 0];$$

$$[\mathbf{U}; \mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

koşullar matris denklemi elde edilir. Son olarak bilinmeyen Hermite katsayılarının oluşturduğu  $\mathbf{A}$  matrisini elde etmek için, (4.39) matris denkleminin son satırları ile (4.42) koşulların matris denkleminin satırları yer değiştirilerek artırılmış matris  $[\widetilde{\mathbf{W}}; \check{\mathbf{G}}]$  elde edilir.

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \check{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & ; & 0 \\ 1/2 & 4/3 & 3 & 20/3 & ; & 5/6 \end{bmatrix}$$

Bu matris denklemine karşigelen sistemin çözümü;

$$\left. \begin{array}{l} a_{00} + 2a_{10} = 1 \\ a_{00} + 2a_{01} = -1 \\ a_{00} + 2a_{01} + 2a_{10} + 4a_{11} = -1 \\ a_{00}/2 + 4a_{01}/3 + 3a_{10} + 20a_{11}/3 = 5/6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{00} = 0 \\ a_{01} = -1/2 \\ a_{10} = 0 \\ a_{11} = 0 \end{array}$$

olduğundan; (4.30)-(4.31) probleminin tam çözümü ,

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}H_0(x)H_1(t) + \frac{1}{2}H_1(x)H_0(t) = x - t$$

elde edilir.

## 4.5 Birinci Mertebeden Doğrusal Olmayan Kısmi İntegro-Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler

**Örnek 4.10** Birinci mertebeden,

$$u_t(x, t) = g(x, t) - u_x(x, t)u(x, t) + u^2(x, t) - 2 \int_0^t u(x, s) ds \quad (4.42)$$

doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denklemini,

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.43)$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 1 + t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

başlangıç ve Dirichlet sınır koşulları altında ele alalım [117]. Burada  $g(x, t) = 1 + x + t - x^2$  ve (4.42)-(4.43) probleminin tam çözümü  $u(x, t) = x + t$  dir.

Kesim 3.2.6'da yer alan adımlar (4-42)-(4.43) problemine benzer şekilde uygulanacaktır. Öncelikle  $N = 1$  için (3.24) sıralama noktaları;

$$(x_0, t_0) = (0,0), \quad (x_0, t_1) = (0,1), \quad (x_1, t_0) = (1,0), \quad (x_1, t_1) = (1,1) \quad (4.44)$$

elde edilir. (3.35) ve (3.66) bağıntılarından,  $u_t(x, t)$ ,  $u_x(x, t)u(x, t)$  ve  $-2 \int_0^t u(x, s) ds$  matris formuna dönüştürülür.

$$\bullet \quad u_t(x, t) = \mathbf{H}(x)\overline{\mathbf{H}}(t)\overline{\mathbf{M}}\mathbf{A}$$

$$= [H_0(x) \quad H_1(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$= [0 \quad 2H_0(x) \quad 0 \quad 2H_1(x)] \mathbf{A}$$

(4.45)

$$= [0 \quad 2 \quad 0 \quad 4x] \mathbf{A}$$



- $u_x(x, t)u(x, t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned}
&= [1 \quad 2x] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} \\
&= [0 \quad 0 \quad 2H_0(x) \quad 2H_1(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}(x) \end{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} \tag{4.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4x \quad 4t \quad 8xt] \bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4t & 4x & 8xt & 4t & 8t^2 & 8xt & 16xt^2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

- $u^2(x, t) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned}
&= [H_0(x) \quad H_1(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}(t) & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{H}}(t) \end{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} \\
&= [1 \quad 2x \quad 2t \quad 4xt \quad 2x \quad 4x^2 \quad 4xt \quad 8x^2] \bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} \tag{4.47}
\end{aligned}$$

$$= [1 \quad 2t \quad 2x \quad 4xt \quad 2t \quad 4t^2 \quad 4xt \quad 8xt^2 \quad 2x \quad 4xt \quad 4x^2 \quad 8x^2t \quad 4xt \quad 8xt^2 \quad 8x^2t \quad 16x^2t^2] \bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}}$$

ve

$$\begin{aligned}
-2 \int_0^t u(x, s) ds &= 2\mathbf{H}(x) \int_0^t \bar{\mathbf{H}}(t) ds \mathbf{A} \\
&= 2\mathbf{H}(x) \int_0^t \begin{bmatrix} \mathbf{H}(s) & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(s) \end{bmatrix} ds \mathbf{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2[H_0(x) \quad H_1(x)] \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 2s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2s \end{bmatrix} ds \mathbf{A} \\
&= 2[1 \quad 2x] \begin{bmatrix} t & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & t^2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [2t \quad 2t^2 \quad 4xt \quad 4xt^2] \mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. Burada;

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{00}A \\ a_{01}A \\ a_{10}A \\ a_{11}A \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.45)-(4.48) bağıntıları Denklem (4.42)'de yerine yazıldığında genel matris denklemini,

$$u_t(x, t) = g(x, t) - u_x(x, t)u(x, t) + u^2(x, t) - 2 \int_0^t u(x, s) ds \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} &= g(x, t) - \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\bar{\mathbf{A}} \\
&\quad - \mathbf{I}(x)\mathbf{A}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu genel matris denklemini,

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{I}(x)\right)\mathbf{A} + \left(\mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t) - \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)\right)\bar{\mathbf{A}} \\
&= g(x, t)
\end{aligned}$$

veya kısaca

$$\mathbf{W}(x, t)\mathbf{A} + \mathbf{Z}(x, t)\bar{\mathbf{A}} = g(x, t) \tag{4.49}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada

$$\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{I}(x)$$

$$\mathbf{Z}(x, t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t) - \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)$$

dır. (4.44) sıralama noktaları Denklem (4.49)'da yerine yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0, t_0) \\ \mathbf{W}(x_0, t_1) \\ \mathbf{W}(x_1, t_0) \\ \mathbf{W}(x_1, t_1) \end{bmatrix} \mathbf{A} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x_0, t_0) \\ \mathbf{Z}(x_0, t_1) \\ \mathbf{Z}(x_1, t_0) \\ \mathbf{Z}(x_1, t_1) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} g(x_0, t_0) \\ g(x_0, t_1) \\ g(x_1, t_0) \\ g(x_1, t_1) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{WA} + \mathbf{Z}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{W}(x, t) = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 4x] + [2t \quad 2t^2 \quad 4xt \quad 4xt^2]$$

$$= [2t \quad 2t^2 + 2 \quad 4xt \quad 4x + 4xt^2],$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(x, t) = \mathbf{H}(x)\mathbf{M}\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t) - \mathbf{H}(x)\bar{\mathbf{H}}(t)\bar{\bar{\mathbf{H}}}(x)\bar{\bar{\mathbf{H}}}^*(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4t & 4x & 8xt & 4t & 8t^2 & 8xt & 16xt^2 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2t & 2x & 4xt & 2t & 4t^2 & 4xt & 8xt^2 & 2x & 4xt & 4x^2 & 8x^2t & 4xt & 8xt^2 & 8x^2t & 16x^2t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2t & -2x & -4xt & -2t & -4t^2 & -4xt & -8xt^2 & 2-2x & 4t-4xt & 4x-4x^2 & 8xt-8x^2t & 4t-4xt & 8t^2-8xt^2 & 8xt-8x^2t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & -2 & -4 & -4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer şekilde koşullar,  $g(x, t) = 1 + x + t - x^2$  için,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0,0) \\ g(0,1) \\ g(1,0) \\ g(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olduğundan temel matris denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 2 & 0 & 0; & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0; & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0; & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4; & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8; & -1 & -2 & -2 & -4 & -2 & -4 & -4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 2 \end{array} \right]_{\mathbf{G}}$$

$x_1 = 1$ ,  $t_1 = 1$  gibi özel sıralama noktaları alınarak (4.43) koşullarında yerine yazıldığında;

$$\left. \begin{array}{l} u(1,0) = 1, \\ u_t(1,0) = 1 \\ u(0,1) = 1 \\ u(1,1) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(0)\mathbf{A} = [1 \ 0 \ 2 \ 0]\mathbf{A} = 1 \\ \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(0)\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A} = [0 \ 2 \ 0 \ 4]\mathbf{A} = 1 \\ \mathbf{H}(0)\bar{\mathbf{H}}(1)\mathbf{A} = [1 \ 2 \ 0 \ 0]\mathbf{A} = 1 \\ \mathbf{H}(1)\bar{\mathbf{H}}(1)\mathbf{A} = [1 \ 2 \ 2 \ 4]\mathbf{A} = 2 \end{array}$$

elde edilir. Böylece, koşullar için temel matris denklemi (4.51)'de verilmiştir.

$$\mathbf{UA} + \mathbf{O}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{S} \rightarrow [\mathbf{U}; \mathbf{O}; \mathbf{S}] \quad (4.51)$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 2 \end{array} \right]$$

(4.42)-(4.43) probleminin çözümü üç farklı yol ile elde edilebilir. Öncelikle, başlangıç koşullarının oluşturduğu satır matrisleri, (4.50) denkleminin son satırları ile yer değiştirdiğinde, elde edilen  $[\widetilde{W}; \widetilde{Z}; \widetilde{G}]$  artırılmış matrisinin çözümü ile başlangıç koşullarına göre çözüm elde edilecektir.

- $\begin{cases} u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = 1 \end{cases}$  **Başlangıç koşullarına göre çözüm:**

$$\widetilde{W}A + \widetilde{Z}\bar{A} = \widetilde{G} \rightarrow [\widetilde{W}; \widetilde{Z}; \widetilde{G}];$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0; & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0; & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0; & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \end{bmatrix}.$$

Elde edilen bu doğrusal olmayan sistemin çözülmesiyle,

$$2a_{01} - a_{00}a_{00} + 2a_{10}a_{00} = 1$$

$$2a_{00} + 4a_{01} - a_{00}a_{00} - 2a_{00}a_{01} - 2a_{01}a_{00} - 4a_{01}a_{01} + 2a_{10}a_{00} + 4a_{10}a_{01} + 4a_{11}a_{00} + 8a_{11}a_{01} = 2$$

$$a_{00} + 2a_{10} = 1$$

$$2a_{01} + 4a_{11} = 1$$

Hermite katsayıları,

$$\left\{ a_{00} = 0, \quad a_{01} = \frac{1}{2}, \quad a_{10} = \frac{1}{2}, \quad a_{11} = 0 \right\}$$

elde edilir. Böylece (3.1) formunda yaklaşık çözüm,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}H_0(x)H_1(t) + \frac{1}{2}H_1(x)H_0(t) = t + x$$

elde edilir.

İkinci olarak, sınır koşullarının oluşturduğu satır matrisleri, (4.44) denkleminin son satırları ile yer değiştirdiğinde, elde edilen  $[\tilde{W}; \tilde{Z}; \tilde{G}]$  artırılmış matrisinin çözümü ile sınır koşullarına göre çözüm elde edilecektir.

- $\left. \begin{array}{l} u(0, t) = t \\ u(1, t) = t + 1 \end{array} \right\}$  **Sınır koşullarına göre çözüm:**

$$t_1 = 1 \text{ için } \left. \begin{array}{l} u(0,1) = 1 \\ u(1,1) = 2 \end{array} \right\}$$

$$UA + 0\bar{A} = S \rightarrow [U; 0; S]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}A + \tilde{Z}\bar{A} = \tilde{G} \rightarrow [\tilde{W}; \tilde{Z}; \tilde{G}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0; & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0; & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0; & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; & 2 \end{bmatrix}$$

Elde edilen doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümünden  $A = [0 \ 1/2 \ 1/2 \ 0]^T$  matrisi elde edilir. Böylece tam çözüm  $u(x, t)$ ,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}H_0(x)H_1(t) + \frac{1}{2}H_1(x)H_0(t) = t + x$$

elde edilir.

Son olarak, başlangıç ve Dirichlet koşullarının oluşturduğu satır matrisleri, (4.50) denkleminin son satırları ile yer değiştirdiğinde, elde edilen  $[\bar{W}; \bar{Z}; \bar{G}]$  artırılmış matrisinin çözümü ile başlangıç ve Dirichlet koşullarına göre çözüm elde edilecektir.

$$\bullet \left. \begin{array}{l} u(x, 0) = x \\ u(0, t) = t \\ u(1, t) = t + 1 \end{array} \right\} \text{Başlangıç ve Dirichlet koşullarına göre çözüm:}$$

$$x_0 = 0, t_1 = 1 \text{ için } \begin{array}{l} u(0,0) = 0 \\ u(0,1) = 1 \\ u(1,1) = 2 \end{array}$$

$$UA + 0\bar{A} = S \rightarrow [U; 0; S]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}A + \bar{Z}\bar{A} = \bar{G} \rightarrow [\bar{W}; \bar{Z}; \bar{G}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0; & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Elde edilen doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümünden  $A = [0 \ 1/2 \ 1/2 \ 0]^T$  matrisi elde edilir. Böylece (4.42)-(4.43) probleminin tam çözümü;

$$u(x, t) = \frac{1}{2}H_0(x)H_1(t) + \frac{1}{2}H_1(x)H_0(t) = t + x$$

şeklinde elde edilir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fizik ve mühendislik başta olmak üzere birçok farklı alandaki problemlerin modellenmesinde karşımıza çıkan denklem türlerinin çoğu zaman çözümünü bulmak oldukça güç olmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan metotlarda sınırlıdır. Bazı durumlarda ise analitik çözüm elde edilse bile, fonksiyonun karmaşıklığından dolayı işlemek zor olmaktadır. Bu sebeple, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde sık sık nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında kısmi diferansiyel denklemlerin bazı sınıflarının nümerik çözümü için Hermite polinomlarına dayalı Hermite sıralama metodu geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem; başlangıç ve sınır koşullu ikinci mertebe kısmi diferansiyel denklem problemlerine, başlangıç ve sınır koşullu bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemlerine, iki boyutlu integral denklemlerine, başlangıç ve sınır koşullu iki boyutlu kısmi integro diferansiyel denklemlere, başlangıç ve sınır koşullu bir boyutlu gecikmeli parabolik Volterra kısmi integro-diferansiyel problemlerine ve başlangıç ve Dirichlet sınır koşullu bir boyutlu doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel denklem sınıflarına uygulanmıştır.

Ele alınan her bir denklem sınıfı için algoritmalar geliştirilmiştir. Oluşturulan algoritmalar MATLAB bilgisayar programı aracılığıyla ilgili problemlere uygulanmıştır. Hermite sıralama metoduna dayalı elde edilen tam çözüm veya farklı  $N$  değerleri için elde edilen polinom çözümleri tablo ve grafikler aracılığıyla verilmiştir. Ayrıca yöntemin doğruluğu ve etkinliği hata analizi teknikleri ile incelenmiştir. Farklı  $N$  değerleri için elde edilen polinom çözümlerinin mutlak ve rezidüel hata analizleri yapılarak çözümlere ve hata analizlerine ait grafikler çizilmiştir. Bu grafiklerde  $N$  kesme sınırının artmasıyla tam çözüme daha çok yaklaşıldığı görülmüştür. Fakat  $N$  kesme sınırının çok büyük seçilmesi durumunda, matris boyutlarının büyük oranda artması sonucunda, bilgisayar işlem yükü arttığından program daha yavaş sonuç verecektir. Bunlara ek olarak  $N$  değerinin artmasıyla programdan kaynaklı hatalarda artar. Bu sebeple  $N$  kesme sınırını artırmak kullanışlı olmayacaktır.  $N$  kesme sınırını yeteri kadar büyük seçildiğinde, tam çözüme oldukça yakın çözümler elde edilecektir.



Uygulamalı bilimlerde karşımıza çıkan problemler için kullanılan çözüm yönteminin dışında önerdiğimiz Hermite polinomlarına dayalı sıralama metodunun en önemli avantajı oluşturulan algoritmanın nümerik işlemlerden oluşması ve kolay programlanabilir olmasıdır. MATLAB programlama dili kullanılarak oluşturulan yazılımlar çözülen tüm problemler için hızlı sonuç vermektedir.

Bu çalışmada önerilen Hermite polinomlarına dayalı sıralama metodu, ele alınan denklem sınıflarında ki uygulamalarında yöntemin doğruluğu ve etkinliği gösterilmiştir. Yöntem basit modifikasyonlar yapılarak farklı tipteki kısmi diferansiyel denklem tiplerine de uygulanabilir.



## KAYNAKLAR

- [1] Ivrii, V. Partial Differential Equations. Toronto, Canada, 2017, 302 s.
- [2] Morton, K. W., Mayers, D. F. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, UK, 2005, 273 s.
- [3] Olver, P. J. Introduction to Partial Differential Equations. Springer, Switzerland, 2014, 635 s.
- [4] Yüksel, G. İkinci Mertebe Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Chebyshev Polinom Çözümleri. Muğla Sıtkı Kocaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2011, 95 s.(Doktora Tezi).
- [5] Brezis, H., Browder, F. Partial Differential Equations in the 20th Century. Advances in Mathematics. 1998, 135(1), 76-144.
- [6] Logan, J. D. Applied Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, New York, 2004, 209 s.
- [7] Kurt Bahşi, A. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Fibonacci Sıralama (Collocation) Metodu ve Residüel Hata Analizi. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017, 115 s. (Doktora Tezi).
- [8] Gao F., Chi, C. Unconditionally stable difference schemes for a one-space-dimensional linear hyperbolic equation. Applied Mathematics and Computation. 2007, 187(2), 1272-1276.
- [9] Saadatmandi A., Dehghan, M. Numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal. 2007, 23(2), 282-292.
- [10] Mohanty, R. K., Jain, M. K., George K. On the use of high order difference methods for the system of one space second order nonlinear hyperbolic equations with variable coefficients. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1996, 72(2), 421-431.
- [11] Mohebbi A., Dehghan, M. High order compact solution of the one-space-dimensional linear hyperbolic equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal. 2008, 24(5), 1222-1235.
- [12] Tohidi, E. Legendre Approximation for Solving Linear HPDEs and Comparison with Taylor and Bernoulli Matrix Methods. Applied Mathematics. 2012, 3, 410-416.

- [13] Saadatmandi A., Dehghan, M. Numerical Solution of Hyperbolic Telegraph Equation Using the Chebyshev Tau Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 2010, 26(1), 239-252.
- [14] Abdou, M. A. Adomian decomposition method for solving the telegraph equation in charged particle transport. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2005, 95(3), 407-414.
- [15] Dehghan M., Shokri, A. A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 2008, 24(4), 1080-1093.
- [16] Dehghan M., Lakestani, M. The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second-order one-dimensional telegraph equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2009, 25(4), 931-938.
- [17] Lakestani M., Saray, B. N. Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions. *Computers & Mathematics with Applications*. 2010, 60(7), 1964-1972.
- [18] Ding, H. , Zhang, Y., Cao, J., Tian J. A class of difference scheme for solving telegraph equation by new non-polynomial spline methods. *Applied Mathematics and Computation*. 2012, 218(9), 4671-4683.
- [19] Guezane-Lakoud A., Belakroum, D. Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2009, 70(11), 3842-3853.
- [20] Biazar, J., Ebrahimi, H., Ayati, Z. An approximation to the solution of telegraph equation by variational iteration method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2009, 25(4), 797-801.
- [21] Dehghan, M. , Yousefi, S. A., Lotfi, A. The use of He's variational iteration method for solving the telegraph and fractional telegraph equations. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2011, 27(2), 219-231.
- [22] Yousefi, S. A. Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic telegraph equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 2010, 26(3), 535-543.
- [23] Baumert, H., Braun, P. Glos, E., Müller, W. D., Stoyan, G. Modelling and computation of water quality problems in river networks. *Optimization Techniques*, Springer, Berlin, 1980, 482-491 s.
- [24] Hahn, S., Bigeon, J., Sabonnadiere, J. An 'upwind' finite element method for

electromagnetic field problems in moving media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987, 24(11), 2071-2086.

[25] Launder B. E., Spalding, D. B. *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, 1972.

[26] Lenferink, W. A second order scheme for a time-dependent, singularly perturbed convection–diffusion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002, 143(1), 49-68.

[27] El-Gamel, M. A Wavelet-Galerkin method for a singularly perturbed convection-dominated diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2006, 181(2), 1635-1644.

[28] Kadalbajoo M. K. Gupta, V. Numerical solution of singularly perturbed convection–diffusion problem using parameter uniform B-spline collocation method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 355(1), 439-452.

[29] Kadalbajoo, M. K., Gupta, V. Awasthi, A. A uniformly convergent B-spline collocation method on a nonuniform mesh for singularly perturbed one-dimensional time-dependent linear convection–diffusion problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 220(1), 272-289.

[30] Kadalbajoo M. K., Awasthi, A. A parameter uniform difference scheme for singularly perturbed parabolic problem in one space dimension. *Applied mathematics and computation*. 2006, 183(1), 42-60.

[31] Du, L., Wu, X. H., Chen, S. A novel mathematical modeling of multiple scales for a class of two dimensional singular perturbed problems. *Applied Mathematical Modelling*. 2011, 35(9), 4589-4602.

[32] Ramos, J. I. A piecewise-analytical method for singularly perturbed parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 161(2), 501-512.

[33] Yüzbaşı Ş., Şahin, N. Numerical solutions of singularly perturbed one-dimensional parabolic convection-diffusion problems by the Bessel collocation method. *Applied Mathematics and Computation*. 2013, 220, 305-315.

[34] Gürbüz B., Sezer, M. Numerical solutions of one-dimensional parabolic convection-diffusion problems arising in biology by the Laguerre collocation method. *Biomat Communications*. 2017, 1-5.

[35] Gürbüz B., Sezer, M. Modified Laguerre collocation method for solving 1-dimensional parabolic convection-diffusion problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018, 41(18), 8481-8487.

- [36] Bülbül B., Sezer, M. A new approach to numerical solution of nonlinear Klein-Gordon equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2-9.
- [37] Dehghan M., Fakhar-Izadi, F. The spectral collocation method with three different bases for solving a nonlinear partial differential equation arising in modeling of nonlinear waves. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 53(9), 1865-1877.
- [38] Matthies H. G., Keese, A. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(12), 1295-1331.
- [39] Guo B.Y., Shen, J. Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval. *Numerische Mathematik*. 2000, 86(4), 635-654.
- [40] Jackiewicz Z., Zubik-Kowal, B. Spectral Collocation and Waveform Relaxation Methods with Gegenbauer Geconstruction for Nonlinear Conservation Laws. *Computational Methods in Applied Mathematics Computational Methods Applied Mathematics*. 2005, 5(1), 51-71.
- [41] Avazzadeh, Z., Rizi, Z. B., Ghaini, F. M. M., Loghmani, G. B. A numerical solution of nonlinear parabolic-type Volterra partial integro-differential equations using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012, 36, 881-893.
- [42] Yan, Y., Fairweathe, G. Orthogonal spline collocation methods for some partial integrodifferential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1992, 29(3), 755-768.
- [43] Fakhar-izadi, F., Dehghan, M. Journal of Computational and Applied The spectral methods for parabolic Volterra integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011, 235, 4032-4046.
- [44] Kauthen, P. The method of lines for parabolic partial integro-differential equations. *Journal of Integral Equations and Applications*, 1992, 4(1), 69-81.
- [45] Ma, J. Finite element methods for partial Volterra integro-differential equations on two-dimensional unbounded spatial domains. *Applied Mathematics and Computation*. 2007, 186, 598–609.
- [46] Larsson, S., Thomee, V., Wahlbin, L. B. Numerical solution of parabolic integro-differential equations by the discontinuous galerkin method. *Mathematics of Computation*. 1998, 67(221), 45-71.
- [47] Greenwell-Yanik C. E., Fairweather, G. Analyses of spline collocation methods for parabolic and hyperbolic problems in two space variables”, *SIAM Journal*

on Numerical Analysis. 1986, 23(2), 282-296.

[48] Sachs E. W., Strauss, A. K. Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance. *Applied Numerical Mathematics*, 2008, 58(11), 1687-1703.

[49] Yanik, E. G. Finite element methods for parabolic and hyperbolic partial integro-differential equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. 1988, 12(8), 785-809.

[50] Zacher, R. Journal of Mathematical Analysis and Applications Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008, 348, 137-149.

[51] Brunner, H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. Cambridge University Press, UK, 2004.

[52] Huabsomboon, P., Novaprteep, B., Kaneko, H. On Taylor-series expansion methods for the second kind integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010, 234, 1466-1472.

[53] Kaneko H., Xu, Y. Gauss-type quadratures for weakly singular integrals and their application to fredholm integral equations of the second kind. *Mathematics of Computation*. 1994, 62(206), 739-753.

[54] Jiang, Y.J. On spectral methods for Volterra-type integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009, 230(2), 333-340.

[55] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Sezer M. Chebyshev polynomial solutions of systems of higher-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equation. *Journal of the Franklin Institute*. 2005, 342(6), 688-701.

[56] Hosseini S. M., Shahmorad, S. Numerical solution of a class of Integro-Differential equations by the Tau Method with an error estimation. *Applied Mathematics and Computation*. 2003, 136(2), 559-570.

[57] Kajani, M. T., Ghasemi, M., Babolian, E. Numerical solution of linear integro-differential equation by using sine–cosine wavelets. *Applied Mathematics and Computation*. 2006, 180(2), 569-574.

[58] Farnoosh R., Ebrahimi, M. Monte Carlo method for solving Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*. 2008, 195(1), 309-315.

[59] Maleknejad K., Mirzaee, F. Numerical solution of integro-differential

equations by using rationalized Haar functions method. *Kybernetes*. 2006, 35(10), 1735-1744.

[60] Abazari R., Kiliçman, A. Numerical study of two-dimensional Volterra integral equations by RDTM and comparison with DTM. *Abstract and Applied Analysis*. 2013, 1-10.

[61] Avazzadeha, Z., Heydarib, M., Loghmania, G. A Comparison between Solving Two Dimensional Integral Equations by the Traditional Collocation Method and Radial Basis Functions. *Applied Mathematical Sciences*. 2011,5(23), 1145-1152.

[62] Alipanah A., Esmaeili, S. Numerical solution of the two-dimensional Fredholm integral equations using Gaussian radial basis function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011, 235(18), 5342-5347.

[63] Darania P., Ivaz, K. Numerical solution of nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2008, 56(9), 2197-2209.

[64] Fakhar-Izadi F., Dehghan, M. An efficient pseudo-spectral Legendre-Galerkin method for solving a nonlinear partial integro-differential equation arising in population dynamics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2013, 36(12), 1485-1511.

[65] Gürbüz B., Sezer, M. A new computational method based on Laguerre polynomials for solving certain nonlinear partial integro differential equations. *Acta Physica Polonica A*. 2017, 132(3), 561-563.

[66] Sharma N., Sharma, K. K. Unconditionally stable numerical method for a nonlinear partial integro-differential equation. *Computers & Mathematics with Applications*. 2014, 67(1), 62-76.

[67] Ebadi, G., Rahimi-Ardabili, M. Y., Shahmorad, S. Numerical solution of the nonlinear Volterra integro-differential equations by the Tau method. *Applied Mathematics and Computation*. 2007,188(2), 1580-1586.

[68] Bhrawy, A. H., Tohidi, E., Soleymani, F. A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals, *Applied Mathematics and Computation*. 2012, 219(2), 482-497.

[69] Bleecker D., Csordas, G. *Basic Partial Differential Equations*. CRC Press, 2018,676 s.

[70] Çağlıyan M. ve Çelebi, O. *Kısmi Diferensiyel Denklemler*. Dora, Bursa, Türkiye, 2010, 264 s.

- [71] Yüzbaşı, Ş. İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri İçin Bessel Sıralama (Collocation) Metodu. Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2012, 204 s.(Doktora Tezi).
- [72] Levy M., Rachel, S. Partial Differential Equations An Introduction to Theory and Applications. Princeton University Press, New Jersey, 2015,299 s.
- [73] Aliyev, G. G. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler. Milli Eğitim Basımevi, 1995, 231 s.
- [74] Yükselen, M. A. Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları: Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü Ders Notları. 2018, 30s.
- [75] Weinberger, H. F. A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods. Dover Publications, New York, 1995, 442 s.
- [76] El-Azab, M. S., El-Gamel, M. A numerical algorithm for the solution of telegraph equations. Applied Mathematics and Computation. 2007, 190, 757-764.
- [77] Roussy G., Pearcy, J. A. Foundations and industrial applications of microwaves and radio frequency fields. Wiley, 1995.
- [78] El-Sayed, S. M. The decomposition method for studying the Klein – Gordon equation. Chaos, Solitons and Fractals. 2003, 18(5), 1025-1030.
- [79] Wazwaz, A. The tanh and the sine – cosine methods for compact and noncompact solutions of the nonlinear Klein – Gordon equation. Applied Mathematics and Computation. 2005, 167(2), 1179-1195.
- [80] Wazwaz, A. New travelling wave solutions to the Boussinesq and the Klein – Gordon equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2008, 13(5), 889-901.
- [81] Dehghan M., Shokri, A. Numerical solution of the nonlinear Klein–Gordon equation using radial basis functions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009, 230, 400-410.
- [82] Bülbül, B. İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri. Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2011, 88 s. (Doktora Tezi).
- [83] Salman, Z. A. N. Partial Integro-Differential Equations: Classification & Solutions. Al-Rafidain University College For Sciences. 2006, 19 157–167.
- [84] Habetler G. J., Schiffman, R. L. A finite difference method for analyzing the



- compression of poro-viscoelastic media. *Computing*. 1970, 6( 3–4), 342–348.
- [85] Engler, H. On some parabolic integro-differential equations: Existence and asymptotics of solutions. In *Equadiff 82*. Springer, Berlin, Germany, 1983, 161–167 s.
- [86] Pachpatte, B. G. On a nonlinear diffusion system arising in reactor dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1983, 94(2),501–508.
- [87] Pao, C. V Solution of a nonlinear integrodifferential system arising in nuclear reactor dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1974, 48(2), 470–492..
- [88] Pao, C. V, Payne, L., Amann, H. Bifurcation analysis on a nonlinear diffusion system in reactor dynamics. *Applicable Analysis*. 1979, 9(2), 107–119.
- [89] Grasselli, M., Kabanikhin, S. I., Lorenzi, A. An inverse hyperbolic integrodifferential problem arising in geophysics II. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1990, 15(3), 283–298.
- [90] Meleshko, S. V, Grigoriev, Y. N., Ibragimov, N. K., Kovalev, V. F. *Symmetries of integro-differential equations: with applications in mechanics and plasma physics*, Springer Science & Business Media. 2010,806.
- [91] Bloom, F. *Ill-posed problems for integrodifferential equations in mechanics and electromagnetic theory*, c. 3. Siam, 1981.
- [92] Avazzadeh, Z., Rizi, Z. B., Ghaini, F. M. M., Loghmani, G. B. A semi-discrete scheme for solving nonlinear hyperbolic-type partial integro-differential equations using radial basis functions. *Journal of Mathematical Physics*.2011, 52(6), 063520.
- [93] Avazzadeh, Z., Heydari, M., Chen, W., Loghmani, G. Smooth solutio of partial integro-differential equations using radial basis functions. *The Journal of Applied Analysis and Computation*. 2014, 4(2),115–127.
- [94] Hashim H. E., Elzaki, T. M. Solving Singular Partial Integro-Differential Equations Using Taylor Series. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*. 2015,4(2), 501-506.
- [95] Akgönüllü Pirim, N. Kesirli Mertebeden Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklem Ve Denklem Sistemlerinin Hermite Collacation Yöntemi İle Yaklaşık Çözümleri. Gazi Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 2014, 84 s.(Doktora Tezi).
- [96] Weber H. J., Arfken, G. B. *Hermite and Laguerre Polynomials*. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. ISE, Elsevier, 638-662.

- [97] Charles Hermite (1822-1901) <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Hermite.html>, 2019.
- [98] Charles Hermite, <http://nedircevap.com/charles-hermite>, 2019.
- [99] Szego, G. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications. Providence, RI:American Mathematical Society/AMS, 1975, 423 s.
- [100] Rainville, E. D. Special functions. The Macmillan Company. New York, 1960, 365 s.
- [101] Uzel, E. Hermite Polinomları. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sakarya, 2008, 52 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [102] Dominici, D. Asymptotic analysis of the Hermite polynomials from their differential-difference equation. Journal of Difference Equations and Applications. 2007, 13(12), 1115-1128.
- [103] Çelikleş, F. Adi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin Klasik Ortogonal Polinom Tabanlı Teknikler. Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, 2015, 51 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [104] Akgönüllü, N. Şahin, N., Sezer, M. A Hermite collocation method for the approximate solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2011, 27(6), 1707-1721.
- [105] Batahan, R. S. A new extension of Hermite matrix polynomials and its applications. Linear Algebra and Its Applications. 2006, 419(1), 82-92.
- [106] GÜRBÜZ, B. Kısmi Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinomlarına Dayalı Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017, 100 s. (Doktora Tezi).
- [107] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E. N., Sezer, M. A novel collocation method based on residual error analysis for solving integro-differential equations using hybrid Dickson and Taylor polynomials. Sains Malaysiana. 2017, 46(2), 335-347.
- [108] Karamete A. Sezer, M. A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations. International Journal of Computer Mathematics, 2002, 79(9), 987-1000.
- [109] Gökmen, E., Gürbüz, Sezer, M. A numerical technique for solving functional integro-differential equations having variable bounds. Computational and Applied Mathematics, 2018, 1-15.

- [110] Baykus N., Sezer, M. Solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2011, 27(5), 1327-1339.
- [111] Yalçın E., Sezer, M. Hermite polynomial approach for solving partial differential equations. II. *Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu Tam Metin Bildiriler Kitabı*, 2018, 411-421.
- [112] Yalçın E., Sezer, M. Hermite Polynomial Solutions of the One-Dimensional Parabolic Convection – Diffusion Problems by Using Matrix-Collocation Hermite Polynomial Solutions of the One-Dimensional Parabolic Convection – Diffusion Problems by Using Matrix-Collocation Method. *Uluslararası Bilim ve Akademi Kongresi'18 Bildiriler Kitabı*. 2018, 4, 1043-1050.
- [113] Bülbül B., Sezer, M. İntegral koşullu hiperbolik tip kısmi diferansiyel denklemlerin Taylor polinom çözümleri. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. 2012, 28(5), 413-420.
- [114] Hadizadeh M., Asgary, M. An efficient numerical approximation for the linear class of mixed integral equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2005, 167(2), 1090-1100.
- [115] Yalçın E., Sezer, M. A new computational method for solving two dimensional integral and partial integro-differential equations by means of hermite and taylor polynomials. II. *Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu Tam Metin Bildiriler Kitabı*. 2018, 397-410.
- [116] Yalçın E., Sezer, M. Hermite polynomial solutions of one dimensional parabolic-type volterra partial integro-differential equations with mixed delays by using matrix-collocation method. II. *Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu Tam Metin Bildiriler Kitabı*, 2018, 423-433.
- [117] Yalçın E., Sezer, M. Combined Hermite-Taylor Matrix Method for Solving a Class of First Order Nonlinear Partial Integro-Differential Equations. *Uluslararası Bilim ve Akademi Kongresi'18 Bildiriler Kitabı*. 2018, 4, 1030-1042.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Elif YALÇIN

Doğum Yeri ve Yılı: Ayvalık, 1988

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: elfylcn10@gmail.com

### **Eğitim Durumu:**

Lise: Özcan Anadolu Lisesi, 2006

Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü 2010

Yüksek Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü / Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı 2012

Pedagojik Formasyon: Denizli Pamukkale Üniversitesi, 2011

Yüksek Lisans: Dumlupınar Üniversitesi Ekonometri Bölümü/ İstatistik Anabilim Dalı 2016

### **Yayımları**

#### **Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında (Proceedings) Basılan Bildiriler**

Yalçın E., Sezer, M. Hermite polynomial approach for solving partial differential equations. II. Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu Tam Metin Bildiriler Kitabı, 2018, 411-421.

Yalçın E., Sezer, M. Hermite Polynomial Solutions of the One-Dimensional Parabolic Convection – Diffusion Problems by Using Matrix-Collocation Hermite Polynomial Solutions of the One-Dimensional Parabolic Convection – Diffusion Problems by Using Matrix-Collocation Method. Uluslararası Bilim ve Akademi Kongresi'18 Bildiriler Kitabı. 2018, 4, 1043-1050.

Yalçın E., Sezer, M. A new computational method for solving two dimensional integral and partial integro-differential equations by means of hermite and taylor

polynomials. II. Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu Tam Metin Bildiriler Kitabı. 2018, 397-410.

Yalçın E., Sezer, M. Hermite polynomial solutions of one dimensional parabolic-type volterra partial integro-differential equations with mixed delays by using matrix-collocation method. II. Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu Tam Metin Bildiriler Kitabı, 2018, 423-433.

Yalçın E., Sezer, M. Combined Hermite-Taylor Matrix Method for Solving a Class of First Order Nonlinear Partial Integro-Differential Equations. Uluslararası Bilim ve Akademi Kongresi'18 Bildiriler Kitabı. 2018, 4, 1030-1042.

