**T.C.**
**MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI**

# BULANIK SAYI DEĞERLİ FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

**Yasin ÖZALP**

**Danışman**
**Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN**

**MANİSA-2019**

## TEZ ONAYI

**Yasin ÖZALP** tarafından hazırlanan **"Bulanık Sayı Değerli Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı"** adlı tez çalışması 14.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman** — **Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN**, Manisa Celal Bayar Üniversitesi ..............

**Jüri Üyesi** — **Prof. Dr. Mustafa KAZAZ**, Manisa Celal Bayar Üniversitesi ..............

**Jüri Üyesi** — **Dr. Öğr. Üyesi Faruk ÖZGER**, İzmir Katip Çelebi Üniversitesi ..............

**TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Yasin ÖZALP**

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar uzayı |
| $C_{\mathcal{F}}[a,b]$ | $[a,b]$ üzerinde sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların uzayı |
| $E^1$ | $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bulanık sayılarının uzayı |
| $F(X)$ | $X$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların lineer uzayı |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $st-\lim_n u_n$ | $(u_n)$ dizisinin istatistiksel limiti |
| $\|S\|$ | S kümesinin kardinalitesi |
| $\delta(M)$ | $M$ Doğal sayılar kümesinin doğal yoğunluğu |
| $\delta_j(K)$ | $K$ kümesinin $j$'inci kısmi yoğunluğu |
| $\Lambda$ | $P_1-P_3$ şartlarını sağlayan $(\alpha,\beta)$ ikililerinin kümesi |
| $f_k \to f(\alpha\beta^\gamma - st)$ | $(f_k)$ dizisinin $\gamma$ mertebeden $f$ ye noktasal $\alpha\beta-$ istatistiksel yakınsaklığı. |
| $f_k \rightrightarrows f(\alpha\beta - st)$ | $(f_k)$ dizisinin $\gamma$ mertebeden $f$ ye düzgün $\alpha\beta-$ istatistiksel yakınsaklığı |
| $f_k \twoheadrightarrow f\ (\alpha\beta^\gamma - st)$ | $(f_k)$ dizisinin $\gamma$ mertebeden $f$ ye eş $\alpha\beta-$ istatistiksel yakınsaklığı |
| $[u]_\lambda$ | $u$ bulanık sayısının $\lambda$-seviye kümesi |
| $\theta$ | Sıfır yoğunluğa sahip kümelerin ailesi |
| $\tilde{f}$ | Bulanık sayı değerli fonksiyon. |

**TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgilerinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN’a ve tezimin yazım aşamasında yardımını eksik etmeyen Araştırma Görevlisi Enes YAVUZ’a teşekkür ederim.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür etmeyi borç bilirim.

Yasin Özalp
Manisa, 2019

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**Bulanık Sayı Değerli Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı**

**Yasin ÖZALP**

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN**

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde reel sayı dizileri ve fonksiyon dizileri için çalışılan istatistiksel yakınsaklık türlerinden bahsedilmiştir. Daha sonra bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı üzerine yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

İkinci bölümde, öncelikle iyi bilinen istatistiksel yakınsaklık çeşitleri verilmiş ve ardından $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık, düzgün $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık, eş $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış ve bu yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremlerinin ispatları verilmiştir. Bulanık sayı teorisinin temel tanım ve kavramları verilmiş, bulanık sayı dizilerinin ve bulanık sayı değerli fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramları takdim edilmiştir.

Tezin orjinal kısmını oluşturan üçüncü bölümde ise bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri için eş $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış, bu yakınsaklığın özellikleri incelenmiş ve bu yakınsaklık kullanılarak bulanık Korovkin tipi bir yaklaşım teoremi ispatlanmıştır.



**Anahtar Kelimeler:** $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık, Fonksiyon dizileri, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, Bulanık sayı dizileri, Bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri, Bulanık pozitif lineer operatör.

**2019, 42 sayfa**

## ABSTRACT

**M. Sc. Thesis**

**Statistical Convergence of Sequences of Fuzzy Number Valued Functions**

**Yasin ÖZALP**

**Manisa Celal Bayar University**
**Graduate School of Applied and Natural Sciences**
**Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Hüsamettin Çoşkun**

This thesis consists of three chapters.

The first chapter is the introduction. In this chapter, different types of statistical convergence for sequences of real numbers and for sequences of real valued functions are given. Then, studies on statistical convergence of sequence of fuzzy numbers are summarized.

In the second chapter, well known types of statistical convergence are given and the concept of $\alpha\beta$-statistical convergence is introduced. $\alpha\beta$-statistical pointwise convergence, $\alpha\beta$-statistical uniform convergence, and $\alpha\beta$-equi-istatistical convergence of sequences of real valued functions are defined and Korovkin type approximation theorems are proved by means of these concepts. Then basic definitions and concepts of fuzzy number theory are given and the concept of statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and sequence of fuzzy number valued functions is presented.

Third Chapter consists of contributions to the literature. In this chapter we define the concept of $\alpha\beta$-equistatistical convergence for sequences of fuzzy number valued functions and properties of this type of convergence are investigated. Then a fuzzy Korovkin type approximation theorem is proved by means of $\alpha\beta$-equistatistical convergence.

**Keywords**: $\alpha\beta$-statistical convergence, Sequence of functions, Korovkin type approximation theorem, Sequences of fuzzy numbers, Sequences of fuzzy number valued functions, Fuzzy positive linear operator.

**2019, 42 pages**

# 1. GİRİŞ

Reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast [1] tarafından takdim edilmiştir. Daha sonra Šalát [2], Fridy [3] ve Connor [4] istatistiksel yakınsaklık üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Literatürde bir çok istatistiksel yakınsaklık çeşidi tanımlanmış ve çalışılmıştır. $\lambda$ istatistiksel yakınsaklık Murseleen [5] tarafından, Lacunary istatistiksel yakınsaklık Fridy ve Orhan [6] tarafından, negatif olmayan herhangi bir $A = (a_{nk})$ regüler matrisi yardımıyla $A$-istatistiksel yakınsaklık Kolk [7] tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Reel sayı dizileri için tanımlanan istatsitiksel yakınsaklık kavramı fonksiyon dizilerine de genelleştirilmiştir. Fonksiyon dizileri için eş istatistiksel yakınsaklık, noktasal istatistiksel yakınsaklık ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramları ilk olarak Balcerzak ve ark. tarafından takdim edilmiştir [8]. Fonksiyon dizileri için tanımlanan bu yakınsaklık çeşitleri kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri ispatlanmıştır. İlk kez Gadjiev ve Orhan Korovkin tipi yaklaşım teoreminin istatistiksel versiyonunu ispatlamışlardır [9]. Karakuş ve ark. eş istatistiksel yakınsaklık kavramının Korovkin tipi yaklaşım teorisindeki uygulamalarını çalışmışlardır [10]. Daha sonra Srivastava ve ark. bu sonuçları genelleştirmek için $\lambda$ istatistiksel yakınsaklığı kullanmışlar ve eş $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık notosyonunu uygulayarak bir Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlamışlardır [11]. Aktuğlu ve Gezer [12] tarafından Lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve Aktuğlu ve ark. [13] tarafından $A$-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak elde edilmiştir.

Yukarıda bahsedilen istatistiksel yakınsaklık çalışmalarının en genel hali Aktuğlu tarafından verilmiştir [14] . Aktuğlu özel hallerde istatistiksel yakınsaklık, $\lambda$ istatistiksel yakınsaklık ve Lacunary istatistiksel yakınsaklık tiplerini de kapsayan $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık ve $\gamma$ mertebeden $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlamıştır [14]. İlaveten bu yakınsaklık tipi kullanarak fonksiyon dizileri için yakınsaklık çeşitleri tanımlamış ve Korovkin tipi yaklaşım teoremi bu yakınsaklık yardımıyla ispatlanmıştır.

Bulanık küme teorisi 1965 yılında Zadeh [15] tarafından bulunmuş olup birçok dalda ilerlemiş ve birçok açıdan incelenmiştir. Bir bulanık sayı dizisinin yakınsaklığı ilk defa Matloka [16] tarafından tanımlandıktan sonra bulanık sayı dizileri için birçok yakınsaklık çeşidi çalışılmıştır. Bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı Nuray ve Savaş [17] tarafından çalışılmış ve bu çalışma reel sayı dizileri için tanımlanan istatistiksel yakınsaklık çeşitlerinin bulanık sayı dizileri için tanımlanmasına ve reel sayı dizileri için elde edilen bir çok sonucun bulanık sayı dizileri için elde edilmesine öncülük etmştir. Bulanık sayı dizilerinin farklı istatsitiksel yakınsaklık çeşitleri için [18–23] çalışmaları referans verilebilir.

Bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramına dayanarak bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri için istatistiksel yakınsaklık, düzgün istatistiksel yakınsaklık ve eş istatistiksel yakınsaklık kavramları Gong ve ark. tarafından tanımlanmış ve araştırılmıştır [24]. Daha sonra ise bu çalışma genelleştirilerek Karaisa ve Kadak [25] tarafından bulanık sayı değerli fonksiyon dizilerinin düzgün $\alpha\beta$ istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve bu yakınsaklık kullanılarak bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır.

Bizde bu tez çalışmasında öncelikle bulanık sayılar ve bulanık sayı değerli foksiyonlar ile ilgili temel kavramları tanıtıp bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri için istatistiksel yakınsaklık çeşitlerini vereceğiz. Tezin özgün kısmında ise bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri için $\gamma$ mertebeden eş $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayıp bu yakınsaklık tipinin temel özelliklerini ispatlayacağız. Bu yakınsaklık yardımıyla bulanık sayı değerli fonksiyonlar uzayında tanımlı pozitif lineer operatörler için bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlayacağız.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde reel sayı dizileri için verilmiş olan istatistiksel yakınsaklık çeşitlerini taktim edeceğiz. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, bildiğimiz anlamdaki yakınsaklığın bir genelleştirilmesidir ve Fast [1] tarafından ilk defa tanımlanmıştır.

$K$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. $K$ ' nın doğal yoğunluğu $\delta(K)$ ile gösterilir ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olmak üzere;

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} \tag{2.1}$$

ile tanımlanır.

$x = (x_k)$ reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [1, n] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

olacak şekilde bir $L$ sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi $L$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{n\to\infty} x_k = L$ veya $x_n \to L$ $(st)$ ile gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtıldıkdan sonra farklı tiplerde istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır.

Bir $\theta = \{k_n\}$ lacunary dizisinin, $n \to \infty$ iken $k_0 = 0$ ve $h_n = k_n - k_{n-1} \to \infty$ olacak şekilde artan bir tamsayı dizisi olduğunu hatırlayalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in (k_{n-1}, k_n] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_n} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı var ise $x$ dizisi $L$ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

$\lambda = (\lambda_n)$ dizisi

(i) $\lambda_n \to \infty, (n \to \infty)$,

(ii) $\lambda_1 = 1$,

(iii) $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$

şartlarını sağlayan pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [n - \lambda_n + 1, n] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{\lambda_n} = 0$$

olacak şekilde $L$ sayısı var ise $x$ dizisi $L$ sayısına $\lambda$-istatistiksel yakınsaktır denir.

Negatif olmayan herhangi bir $A = (a_{nk})$ regüler matrisi yardımıyla, İstatistiksel yakınsaklık Kolk [7] tarafından $A$ -istatistiksel yakınsaklığa genişletilmiştir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) := \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K(\varepsilon)} a_{nk} = 0$$

sağlanıyorsa $x$ dizisine "$L$ sayısına $A$-istatistiksel yakınsaktır" denir ve $st_A - \lim_{n\to\infty} x_n = L$ şeklinde gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık, $A$ - istatistiksel yakınsaklığın bilinen en iyi örnekleridir.

### 2.1. $\alpha\beta$-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümünün ana konusu $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık metotlarının tanıtılmasıdır. $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık metotları, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık metotları gibi regüler matris metotları dışında aynı zamanda regüler olmayan bazı matris metotlarını da içermektedir.

$\alpha(n)$ ve $\beta(n)$ dizileri

$P_1$: $\alpha$ ve $\beta$ azalmayan

$P_2$: $\beta(n) \geq \alpha(n)$

$P_3$: $\beta(n) - \alpha(n) \to \infty, (n \to \infty)$

şartlarını sağlayan pozitif sayıların iki dizisi olsun. $P_1 - P_3$ şartlarını sağlayan $(\alpha, \beta)$ ikililerinin kümesi $\Lambda$ ile gösterilsin.

$0 < \gamma \leq 1$ ve $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ olmak üzere $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin $\delta^{\alpha,\beta}(K, \gamma)$ yoğunluğu

$$\delta^{\alpha,\beta}(K, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K \cap P_n^{\alpha,\beta}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^{\gamma}} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $|S|$ ile S kümesinin kardinalitessini ve $P_n^{\alpha,\beta}$ ile $[\alpha(n), \beta(n)]$ kapalı aralığını gösterilmektedir.

(2.2) sonucu olarak aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

**Lemma 2.1.1.** $K$ ve $M$ , $\mathbb{N}$ 'nin iki alt kümesi ve $0 < \gamma \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu taktirde her $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ için;

(i) $\delta^{\alpha,\beta}(\emptyset, \gamma) = 0$,

(ii) $\delta^{\alpha,\beta}(\mathbb{N}, 1) = 1$,

(iii) Eğer $K$ sonlu bir küme ise bu taktirde $\delta^{\alpha,\beta}(K, \gamma) = 0$,

(iv) $K \subset M \Rightarrow \delta^{\alpha,\beta}(K, \gamma) \leq \delta^{\alpha,\beta}(M, \gamma)$,

(v) $\delta^{\alpha,\beta}(K, \lambda) \leq \delta^{\alpha,\beta}(K, \gamma)$ [14].

Şimdi bilinen anlamda yakınsaklığının genelleştirilmesini aşağıdaki gibi verelim.

**Tanım 2.1.1.** Her $\varepsilon > 0$ için;

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in P_n^{\alpha,\beta} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} = 0$$

oluyorsa $x$ dizisi $L$ sayısına $\gamma$ mertebeden $\alpha\beta-$ istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma} - \lim_{n\to\infty} x_n = L \text{ veya } x_n \to L\ (\alpha\beta^\gamma - st)$$

ile gösterilir. $\gamma = 1$ için $x$ dizisi $L$' ye $\alpha\beta-$ istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_{\alpha\beta} - \lim_{n\to\infty} x_n = L \text{ veya } x_n \to L\ (\alpha\beta - st)$$

ile gösterilir [14].

**Uyarı 2.1.1.** Eğer $0 < \gamma \leq \delta \leq 1$ ve

$$st_{\alpha\beta}^{\gamma} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

ise bu takdirde

$$st_{\alpha\beta}^{\delta} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

olduğu aşikardır [14].

Aşağıdaki Lemma, Lemma 2.1.1'in direkt bir sonucudur.

**Lemma 2.1.2.** Kabul edelim ki $x$ dizisi $L$ ' ye yakınsak (bildiğimiz anlamdaki yakınsak) ve $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ olsun. Bu taktirde

$$st_{\alpha\beta} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

olur [14].

Aşağıdaki örnek Tanım 2.1.1 de verilen $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığın basit olmayan bir genelleştirilmesi olduğunu göstermektedir.

**Örnek 2.1.1.** $0 < \gamma < 1$ sabit olmak üzere $\alpha(n) = 1$ ve $\beta(n) = n^{\frac{1}{\gamma}}$ şeklinde seçilirse

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [1, n^{\frac{1}{\gamma}}] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n}$$

ve özel olarak $\gamma = \frac{1}{2}$ için

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [1, n^2] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n}$$

olur.

$$x_n := \begin{cases} 1, & n = k^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım.

$$st - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olduğu aşikardır. Fakat her $\varepsilon > 0$ için;

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k| \geq \varepsilon\}, \frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [1, n^2] : |x_k| \geq \varepsilon\}|}{n} \neq 0$$

olduğundan dolayı

$$st^{\frac{1}{2}}_{\alpha\beta} - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ifadesi sağlanmaz [14].

Matris notasyonu kullanarak Örnek 2.1.1 'de verilen yakınsaklık

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & k \leq n^2 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diger durumlarda,} \end{cases}$$

olmak üzere $A = (a_{nk})$ matrisi için matris yakınsaklığına denktir ki bu regüler bir matris değildir. Bu da $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık metotlarının regüler olmayan bazı matris metodlarını da içerdiğini gösterir.

## 2.2. Fonksiyon Dizilerinin $\alpha\beta$-İstatistiksel Yakınsaklığı

$X$, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi ve $0 < \gamma \leq 1$ olsun. Bu takdirde bir $f_k : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi için aşağıdaki tanımları verebiliriz.

**Tanım 2.2.1.** Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in P_n^{\alpha,\beta} : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} = 0$$

oluyorsa $(f_k)$ foksiyon dizisi $\gamma$ mertebeden $X$ üzerinde $f$ fonksiyonuna noktasal $\alpha\beta-$istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$f_k \to f(\alpha\beta^\gamma - st)$$

ile gösterilir. $\gamma = 1$ için $X$ üzerinde $f$ fonksiyonuna noktasal $\alpha\beta$ istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_k \to f(\alpha\beta - st)$ ile gösterilir [14].

**Tanım 2.2.2.** Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : \|f_k(x) - f(x)\|_{C(X)} \geq \varepsilon, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in P_n^{\alpha,\beta} : \|f_k(x) - f(x)\|_{C(X)} \geq \varepsilon\}}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} = 0$$

oluyorsa $f_r$ fonksiyon dizisi $\gamma$ mertebeden X kümesi üzerinde $f$ fonksiyonuna düzgün $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_k \rightrightarrows f\ (\alpha\beta^\gamma - st)$ olarak gösterilir. $\gamma = 1$ için $f_r$ dizisi $X$ üzerinde $f$ fonksiyonuna düzgün $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_k \rightrightarrows f(\alpha\beta - st)$ ile gösterilir [14].

**Tanım 2.2.3.** Her bir $\varepsilon > 0$ için $(p_r^\gamma, \varepsilon)$ reel değerli fonksiyonların dizisi;

$$p_{n,\varepsilon}^\gamma(x) = \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma}$$

tanımlansın. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|p_{n,\varepsilon}^\gamma(\cdot)\|_{C(X)} = 0$$

oluyorsa $(f_k)$ fonksiyon dizisi $\gamma$ mertebeden $X$ üzerinde $f$ fonksiyonuna eş $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$f_k \twoheadrightarrow f\ (\alpha\beta^\gamma - st)$$

olarak gösterilir. $\gamma = 1$ için $(f_k)$ fonksiyon dizisi $X$ üzerinde $f$ fonksiyonuna eş $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$f_k \twoheadrightarrow f\ (\alpha\beta - st)$$

ile gösterilir [14].

Aşağıdaki lemma tanımların doğal bir sonucudur.

**Lemma 2.2.1.** $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ ikilisi ve $0 < \gamma \leq 1$ için

$$f_r \rightrightarrows f(\alpha\beta^\gamma - st) \Rightarrow f_r \twoheadrightarrow f(\alpha\beta^\gamma - st) \Rightarrow f_r \to f(\alpha\beta^\gamma - st).$$

Aşağıdaki örnekler bu çıkarımların tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

**Örnek 2.2.1.** $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ ve $0 < \gamma \leq 1$ olsun ve $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_r = \begin{cases} -4r^2(r+1)^2(x - \frac{1}{r})(x - \frac{1}{r+1}), & x \in (\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diger durumlar da} \end{cases}$$

olarak tanımlanan, $f_r : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarının dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için;

$$P^{\gamma}_{r,\varepsilon}(x) = \frac{|\{m \in P^{\alpha,\beta}_r : |f_m(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(r) - \alpha(r) + 1)^{\gamma}} \leq \frac{1}{(\beta(r) - \alpha(r) + 1)^{\gamma}}$$

eşitsizliği sağlandığından $x$'e göre düzgün olarak $P^{\gamma}_{r,\varepsilon}(x) \to 0(r \to \infty)$ sağlanır. Dolayısıyla $f_r \twoheadrightarrow 0(\alpha\beta^{\gamma} - st)$ olur. Bununla birlikte her $r \in \mathbb{N}$ için $\sup_{x\in[0,1]} |f_r(x)| = 1$ olduğundan $f_r \rightrightarrows 0(\alpha\beta^{\gamma} - st)$ ifadesi sağlanamaz [14].

**Örnek 2.2.2.** $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha(r) = 2^{r-1} + 1$, $\beta(r) = 2^r$ olsun. $f_r : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_r(x) = x^r$ fonksiyonlarını göz önüne alalım ve

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

alalım. Bu takdirde $f_r \to f(\alpha\beta^{\gamma} - st)$ olduğu aşikardır. Diğer taraftan her $0 < \gamma \leq 1$ için $f_r \twoheadrightarrow f(\alpha\beta^{\gamma} - st)$ sağlanamaz. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa bu taktirde her $N_0 \in \mathbb{N}$ için enaz bir $r > N_0$ öyle ki her $m \in P^{\alpha,\beta}_r = [2^{r-1} + 1, 2^r]$ ve $x \in (\sqrt[2^r]{\frac{1}{2}}, 1)$ için

$$|f_m(x)| = |x^m| \geq \left(\sqrt[2^r]{\frac{1}{2}}\right)^m \geq \left(\sqrt[2^r]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

olur. Diğer bir ifade ile her $x \in \left(\sqrt[2^r]{\frac{1}{2}}, 1\right)$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} P^{\gamma}_{r,\frac{1}{2}}(x) &= \frac{|\{m \in P^{\alpha,\beta}_r : |x^m| \geq \frac{1}{2}\}|}{(2^{r-1})^{\gamma}} \\ &= \frac{2^{r-1} - 1}{(2^{r-1})^{\gamma}} \end{aligned}$$

olur ki bu da

$$\lim_{r\to\infty} \|P^{\gamma}_{r,\varepsilon}(\cdot)\|_{C(X)} = 0$$

ifadesinin sağlanmadığı anlamına gelir [14].

Bundan sonraki kısımda ilk olarak reel değerli fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör tanımı ve Korovkin yaklaşım teoreminin ifadesi verilecektir. Daha sonra fonksiyon dizilerinin $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri ispatlanacaktır.

**Tanım 2.2.4.** $F(X)$ ve $F(Y)$ sırasıyla $X$ ve $Y$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların lineer uzayları olsun. $F(X)$ uzayından alınan herhangi bir $f$ fonksiyonuna $F(Y)$ uzayında bir ve yalnız bir $L$ kuralı varsa bu durumda $F(X)$ uzayından $F(Y)$ uzayına bir operatör tanımlanmıştır denir. Bir $x \in X$ noktasındaki $L(f)$ değeri $L(f(t); x)$ ile veya kısaca $L(f; x)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.2.5.** $f_1$ ve $f_2$ , $F(X)$ uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $x \in X$, her $a, b \in \mathbb{R}$ için $L$ operatörü

$$L(af_1 + bf_2; x) = aL(f_1; x) + bL(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyor ise bu takdirde $L$ operatörüne lineer operatör denir.

**Tanım 2.2.6.** $L : F(X) \to F(Y)$ lineer operatörü $F(X)$ tanım uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ koşulu sağlanıyor ise bu durumda $L$ operatörüne pozitif lineeer operatör denir.

Pozitif lineer operatörler için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) $f \leq g$ ise $L(f) \leq L(g)$,

(ii) $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$.

$C(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$ kompakt kümesi üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonların bir uzayı olsun. $g \in C[a, b]$ için

$$\|g\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |g(x)|$$

olacak şekilde alışılmış supremum normu ile birlikte $C(X)$ bir Banach uzayıdır. Şimdi yaklaşım teorisindeki Korovkin Teoremini verebiliriz.

**Teorem 2.2.1.** $L_n : C(X) \to C(X)$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Her $f \in C(X)$ için $\lim_{n\to\infty} \| L_n(f) - f \|_{C(X)} = 0$,

(ii) $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \| L_n(e_i) - e_i \|_{C(X)} = 0$ olur [26].

**Teorem 2.2.2.** $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ ve $0 < \gamma \leq 1$ olsun. $\upsilon = 0, 1, 2$ ve $e_\upsilon(x) = x^\upsilon$ olmak üzere

$$L_n(e_\upsilon, x) \twoheadrightarrow e_\upsilon(x) \; (\alpha\beta^\gamma - st) \tag{2.3}$$

şartını sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi

$$L_n : C(X) \to C(X)$$

olsun. Bu takdirde her $f \in C(X)$ için;

$$L_n(f) \twoheadrightarrow f(\alpha\beta^\gamma - st)$$

olur [14].

**İspat:** İspatın ilk aşamasında Korovkin Teoreminin ispatını göz önüne alacağız. Kabul edelim ki $f$, $C(X)$'in keyfi bir elemanı ve $x \in X$ sabit olsun. Bu takdirde $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$

var öyle ki $|y-x|<\delta$ ifadesini sağlayan her $y\in X$ için $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ olur. Şimdi $K_\delta := \{y\in\mathbb{R} : |y-x|<\delta\}$ olmak üzere $X_\delta := X\cap K_\delta$ alalım. Bu takdirde $M := \|f\|_{C(X)}$ olmak üzere;

$$|f(y)-f(x)| \le |f(y)-f(x)|\chi_{X_\delta}(y) + |f(y)-f(x)|\chi_{X\setminus X_\delta}(y) \le \varepsilon + 2M\chi_{X\setminus X_\delta}(y),$$

$$\chi_{X\setminus X_\delta}(y) \le \frac{1}{\delta^2}(y-x)^2$$

kullanılarak her $y\in X$ için

$$|f(y)-f(x)| \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2$$

elde edilir. $\{L_n\}$ nin pozitifliği ve lineerliği kullanılarak

$$B := \varepsilon + M + \frac{4M}{\delta^2}\left(\|x^2\|_{C(X)} + \|x\|_{C(X)} + 1\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x)-f(x)| &\le L_n(|f(y)-f(x)e_0|;x) + |f(x)||L_n(f_0;x)-e_0(x)| \\
&\le \varepsilon L_n(e_0;x) + \frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n\left((y-x)^2;x\right)\right\} + M|L_n(e_0;x)-e_0(x)| \\
&\le \varepsilon + (\varepsilon+M)|L_n(e_0;x)-e_0(x)| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n(e_2;x) - 2xL_n(e_1;x) + x^2L_n(e_0;x)\right\} \\
&\le \varepsilon + (\varepsilon+M)|L_n(e_0;x)-e_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2}x^2|L_n(e_2;x)-e_2(x)| \\
&\quad + \frac{4M}{\delta^2}|x|\,|L_n((e_1;x)-e_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2}x^2|L_n(e_0;x)-e_0(x)| \qquad (2.4)\\
&\le \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M\|x\|^2_{C(X)}}{\delta^2}\right)|L_n(e_0;x)-e_0(x)| \\
&\quad + \frac{4M\|x\|_{C(X)}}{\delta^2}\{|L_n(e_1;x)-e_1(x)|\} + \frac{2M}{\delta^2}|L_n(e_2;x)-e_2(x)| \\
&\le \varepsilon + B\sum_{\upsilon=0}^{2}|L_n(e_\upsilon;x)-e_\upsilon(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Verilen bir $s>0$ için $0<\varepsilon<s$ seçelim ve $\upsilon=0,1,2$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım;

$$K_s(x) := \{n\in\mathbb{N} : |L_n(f,x)-f(x)| \ge s\}$$
$$K_s^\upsilon(x) := \left\{n\in\mathbb{N} : |L_n(e_\upsilon,x)-e_\upsilon(x)| \ge \frac{s-\varepsilon}{3B}\right\}.$$

Bu takdirde (2.4) eşitsizliğinden açıkça

$$K_s(x) \subset \bigcup_{\upsilon=0}^{2} K_s^\upsilon(x).$$

ifadesini elde ederiz. İlaveten aşağıdaki reel değerli fonksiyonları tanımlayalım:

$$p_{n,s}^{\gamma}(x) := \frac{1}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^{\gamma}} \left|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : |L_m(f,x)-f(x)| \geq s\}\right|$$

ve $r = 0, 1, 2$ için

$$p_{n,s}^{\gamma,\upsilon}(x) := \frac{1}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^{\gamma}} \left|\left\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : |L_m(e_\upsilon,x)-e_\upsilon(x)| \geq \frac{s-\varepsilon}{3B}\right\}\right|.$$

Bu takdirde monotonluk ve (3.3) kullanılarak her $x \in X$ için

$$p_{n,s}^{\gamma}(x) \leq \sum_{\upsilon=0}^{2} p_{n,s}^{\gamma,\upsilon}(x)$$

elde edilir. Bu da

$$\|p_{n,s}^{\gamma}(.)\|_{C(X)} \leq \sum_{\upsilon=0}^{2} \|p_{n,s}^{\gamma,\upsilon}(.)\|_{C(X)} \tag{2.5}$$

olduğu anlamına gelir. $n \to \infty$ için (2.5) de limit alınırsa ve (2.3) kullanılırsa

$$\lim_n \|p_{n,s}^{\gamma}(.)\|_{C(X)} = 0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.2de $\gamma = 1$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.2.1.** $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ olsun. $\upsilon = 0, 1, 2$ ve $e_\upsilon(x) = x^\upsilon$ olmak üzere

$$L_n(e_\upsilon, x) \twoheadrightarrow e_\upsilon(x)(\alpha\beta^{\gamma} - st)$$

şartını sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $L_n : C(X) \to C(X)$ olsun. Bu takdirde her $f \in C(X)$ için

$$L_n(f) \twoheadrightarrow f(\alpha\beta - st)$$

olur [14].

**Teorem 2.2.3.** $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ ve $0 < \gamma \leq 1$ olsun. $\upsilon = 0, 1, 2$ için $e_\upsilon(x) = x^\upsilon$ olmak üzere

$$L_n(e_\upsilon, x) \rightrightarrows e_\upsilon(x)(\alpha\beta^{\gamma} - st)$$

şartını sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $L_n : C(X) \to C(X)$ olsun. Bu takdirde her $f \in C(X)$ için

$$L_n(f) \rightrightarrows f(\alpha\beta^{\gamma} - st)$$

olur [14].

**İspat:** : $B := \varepsilon + M + \frac{M}{\delta^2}(\|x^2\|_{C(X)} + \|x\|_{C(X)} + 1)$ olmak üzere

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + B\sum_{\upsilon=0}^{2} |L_n(e_\upsilon;x) - e_\upsilon(x)|$$

(2.4) eşitsizliği kullanılarak elde edilir. $X$ üzerinde supremum alınırsa

$$\|L_n(f) - f\|_{C(X)} \leq \varepsilon + B\sum_{\upsilon=0}^{2} \|L_n(e_\upsilon) - e_\upsilon\|_{C(X)}$$

elde edilir. Verilen bir $s > 0$ için $0 < \varepsilon < s$ seçelim ve aşağıdaki kümeleri tanımlayalım

$$\begin{aligned} D_s(x) &:= \{n \in \mathbb{N} : \|L_n(f) - f\|_{C(X)} \geq s\} \\ D_s^\upsilon(x) &:= \left\{n \in \mathbb{N} : \|L_n(e_\upsilon) - e_\upsilon\|_{C(X)} \geq \frac{s-\varepsilon}{3B}\right\}, \upsilon = 0,1,2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Bu takdirde (2.6) den açıkca

$$D_s(x) \subset \bigcup_{\upsilon=0}^{2} D_s^\upsilon(x)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.3 de $\gamma$=1 alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.2.2.** $(\alpha,\beta) \in \Lambda$, $\upsilon = 0,1,2$ ve $e_\upsilon(x) = x^\upsilon$ olmak üzere

$$L_n(e_\upsilon, x) \rightrightarrows e_\upsilon(x)(\alpha\beta - st)$$

şartını sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $L_n : C(X) \to C(X)$ olsun. Bu takdirde her $f \in C(X)$ için

$$L_n(f,x) \rightrightarrows f(\alpha\beta - st)$$

olur [14].

Şimdi $\alpha(n)$ ve $\beta(n)$ dizilerinin özel seçimiyle diğer istatsitiksel yakınsaklıkların nasıl elde edildiğini görelim.

(1) $\alpha(n) = 1$, $\beta(n) = n$ ve $\gamma = 1$ alalım. Bu takdirde $P_n^{\alpha,\beta} = [1,n]$ ve

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n}$$

olur. Bu da $\alpha(n) = 1$, $\beta(n) = n$ ve $\gamma = 1$ olması durumunda $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklığa dönüştüğünü gösterir. Bu durumda Teorem 2.2.2 ile [10, Teorem2.1] ve Teorem 2.2.3 ile [9, Teorem 2.1] sonuçlarına ulaşılır.

(2) $\alpha(n) = 1$, $\beta(n) = n$ ve $0 < \gamma < 1$ alalım. Bu takdirde $P_n^{\alpha,\beta} = [1, n]$ ve

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n^\gamma}$$

olması bize $\gamma$ mertebeden eş istatistiksel yakınsaklığı verir. Bu sebeple Teorem 2.2.2, $\gamma$ mertebeden istatistiksel yakınsaklık aracığıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremine ve Teorem 2.2.3, $\gamma$ mertebeden düzgün istatistiksel yakınsaklık aracılığıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremine dönüşür.

(3) $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ ve $\lambda_1 = 1$ olacak şekilde sonsuza giden pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun. Eğer $\alpha(n) = n - \lambda_n + 1$, $\beta(n) = n$, $\gamma = 1$ seçilirse $P_n^{\alpha,\beta} = [n - \lambda_n + 1, n]$ olur. Ayrıca

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [n - \lambda_n + 1, n] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{\lambda_n}$$

elde edilir ki bu da $\alpha(n) = n - \lambda_n + 1$ ve $\beta(n) = n$ olması durumunda $\gamma$ mertebeden $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığın $\lambda$-istatistiksel yakınsaklığa dönüştüğünü gösterir.
Bu sebeple eğer $\alpha(n) = n - \lambda_n + 1$, $\beta(n) = n$ ve $\gamma = 1$ seçilirse Teorem 2.2.2, [11]'deki Teorem 1'e dönüşür. Benzer olarak Teorem 2.2.3, [13]'deki Teorem 3.1' in özel bir durumudur.

(4) $\alpha(n) = n - \lambda_n + 1$, $\beta(n) = n$ ve $0 < \gamma < 1$ için

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [n - \lambda_n + 1, n] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{\lambda_n^\gamma}$$

olur. Bu da $\gamma$ mertebeden $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığın $\gamma$ mertebeden $\lambda$-istatistiksel yakınsaklığa dönüştüğü anlamına gelir. Bu sebeple Teorem 2.2.2, $\gamma$ mertebeden eş $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık aracılığıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremine ve Teorem 2.2.3 de $\gamma$ mertebeden $\lambda$-istatistiksel düzgün yakınsaklık aracılığıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremine dönüşür.

(5) Hatırlatalım ki bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi,

$$k_0 = 0 \text{ ve } h_r := k_r - k_{r-1}$$

olacak şekilde artan bir tamsayı dizisidir. $\alpha(r) = k_{r-1} + 1$, $\beta(r) = k_r$ ve $\gamma = 1$ alınırsa $P_r^{\alpha,\beta} = [k_{r-1} + 1, k_r]$ olur. Bununla birlikte

$$(k_{r-1}, k_r] \cap \mathbb{N} = [k_{r-1} + 1, k_r] \cap \mathbb{N}$$

olduğundan

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}, \gamma) \;\; = \;\; \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [k_{r-1} + 1, k_r] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in (k_{r-1}+1, k_r] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_r}$$

elde edilir ki bu da $\alpha(r) = k_{r-1}+1$, $\beta(r) = k_r$ ve $\gamma = 1$ olması durumunda $\gamma$ mertebeden $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığın lacunary istatistiksel yakınsaklık ile denk düştüğünü göstermektedir. Eğer biz $\alpha(r) = k_{r-1}+1$, $\beta(r) = k_r$ ve $\gamma = 1$ alırsak bu taktirde Teorem 2.2.2, [13]'daki Teorem 3.1'e dönüşür ve Teorem 2.2.3 de [12]'deki Teorem 3.1'in özel bir durumudur.

(6) $\alpha(r) = k_{r-1}+1$, $\beta(r) = k_r$ ve $0 < \gamma < 1$ için;

$$\begin{aligned}
\delta^{\alpha,\beta}(\{k : |x_k - L \geq \varepsilon\}, \gamma) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [k_{r-1}+1, k_r] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_r^{\gamma}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in (k_{r-1}, k_r] : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{h_r^{\gamma}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple Teorem 2.2.2, $\gamma$ mertebeden lacunary eşistatistiksel yakınsaklık aracılığıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremine ve Teorem 2.2.3, $\gamma$ mertebeden lacunary istatistiksel düzgün yakınsaklık aracılığıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremine dönüşür.

### 2.3. Bulanık Sayı Dizileri

Bu bölümde bulanık sayıları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.3.1.** Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{R}$ üzerindeki

$$u : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

fonksiyonuna bir bulanık sayısı denir:

1. $u$, normaldir. Yani en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $u(x_0) = 1$'dir.
2. $u$, bulanık konvekstir. Yani $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için,

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\big\{u(x), u(y)\big\}.$$

3. $u$, üstten yarı süreklidir.
4. $[u]_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ kompakt bir kümedir [30].

Burada $\overline{A}$, A kümesinin kapanışı anlamındadır.

Bir $u$ bulanık sayısının $\lambda$-seviye kümesi,

$$[u]_\lambda = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\}, & 0 < \lambda \leq 1 \text{ ise}, \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}, & \lambda = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $r$ reel sayısı

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1 \ , & t = r \text{ ise} \\ 0 \ , & t \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $\tilde{r}$ bulanık sayısı gibi düşünülür. $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün bulanık sayılarının kümesi $E^1$ ile gösterilir ve bulanık sayı uzayı olarak isimlendirilir.

**Not 2.3.1.** Açık olarak $u \in E^1$ olması için gerek ve yeter şart her bir $\lambda \in [0,1]$ için $[u]_\lambda$ kümesinin boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir aralık olmasıdır. Bu aralık $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ ile gösterilir.

Bir bulanık sayının $\lambda$-seviye kümelerinin uç noktaları ile temsil edilebileceği Goetschel ve Voxman tarafından ispatlanmıştır [27]. Bu teorem bulanık sayılarının temsil teoremi olarak bilinir.

**Teorem 2.3.1.** $u \in E^1$ ve her bir $\lambda \in [0,1]$ için $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ olsun. Bu durumda,

1. $u^-(\lambda)$; $(0,1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.
2. $u^+(\lambda)$; $(0,1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve artmayan bir fonksiyondur.
3. $u^-(\lambda)$ ve $u^+(\lambda)$ fonksiyonları, $\lambda = 0$ noktasında sağdan süreklidir.
4. $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Tersine; $\gamma$ ve $\beta$, $(1)-(4)$ şartlarını sağlayan iki fonksiyon ise

$$[u]_\lambda = [\gamma(\lambda), \beta(\lambda)]$$

olacak şekilde bir tek $u \in E^1$ vardır. $\gamma$ ve $\beta$'ya karşılık gelen $u$ bulanık sayısı

$$u : \mathbb{R} \to [0,1], \ \ u(x) = \sup\{\lambda : \gamma(\lambda) \leq x \leq \beta(\lambda)\}$$

olarak tanımlanır [27].

Bundan sonraki kısımda, bulanık sayılar üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı ve cebirsel işlemler verilecektir.

**Tanım 2.3.2.** $u, v \in E^1$ olsun. Eğer $\forall x \in \mathbb{R}$ için $u(x) = v(x)$ ise $u$ ile $v$ bulanık sayıları eşittir denir ve $u = v$ yazılır. Bu tanım seviye kümeleri yardımıyla

$$u = v \Leftrightarrow \forall\lambda \in [0,1] \text{ için } [u]_\lambda = [v]_\lambda$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 2.3.3.** $E^1$ üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı; $u, v \in E^1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u \preceq v &\Leftrightarrow \forall\lambda \in [0,1] \text{ için } [u]_\lambda \preceq [v]_\lambda \\ &\Leftrightarrow \forall\lambda \in [0,1] \text{ için } u^-(\lambda) \leq v^-(\lambda) \text{ ve } u^+(\lambda) \leq v^+(\lambda) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$u \prec v \Leftrightarrow u \preceq v \text{ ve } \exists\lambda_0 \in [0,1] \text{ için } u^-(\lambda_0) < v^-(\lambda_0) \text{ veya } u^+(\lambda_0) < v^+(\lambda_0)$$

şeklindedir [21] .

Eğer $u \preceq v$ ve $u \succeq v$ bağıntılarından her ikisi de gerçekleşmiyorsa, $u$ ve $v$ bulanık sayıları kıyaslanamaz denir ve $u \not\sim v$ yazılır.

$u, v \in E^1$ iki bulanık sayı olsun. Bu bulanık sayılarının

(i) $u + v$ cebirsel toplamları

$$\begin{aligned} u + v = w &\Leftrightarrow [w]_\lambda = [u]_\lambda + [v]_\lambda \\ &\Leftrightarrow w^-(\lambda) = u^-(\lambda) + v^-(\lambda) \text{ ve } w^+(\lambda) = u^+(\lambda) + v^+(\lambda), \end{aligned}$$

(ii) $u - v$ farkları

$$\begin{aligned} u - v = w &\Leftrightarrow [w]_\lambda = [u]_\lambda - [v]_\lambda \\ &\Leftrightarrow w^-(\lambda) = u^-(\lambda) - v^+(\lambda) \text{ ve } w^+(\lambda) = u^+(\lambda) - v^-(\lambda), \end{aligned}$$

(iii) $u \cdot v$ çarpımları

$$uv = w \Leftrightarrow [w]_\lambda = [u]_\lambda [v]_\lambda,$$

her $\lambda \in [0,1]$ için

$$w^-(\lambda) = \min\{u^-(\lambda)v^-(\lambda), u^-(\lambda)v^+(\lambda), u^+(\lambda)v^-(\lambda), u^+(\lambda)v^+(\lambda)\}$$

ve

$$w^+(\lambda) = \max\{u^-(\lambda)v^-(\lambda), u^-(\lambda)v^+(\lambda), u^+(\lambda)v^-(\lambda), u^+(\lambda)v^+(\lambda)\},$$

(iv) $u$ sayısının $k$ skaları ile çarpımı

$$[ku]_\lambda = k[u]_\lambda$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $u \in E^1$ ve $0 \notin \{t \in \mathbb{R} : u(t) > 0\}$ ise

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{-}(\lambda) = \frac{1}{u^{+}(\lambda)} \text{ ve } \left(\frac{1}{u}\right)^{+}(\lambda) = \frac{1}{u^{-}(\lambda)}$$

biçiminde tanımlıdır.

Yukarıda verilen tanımlara göre bulanık sayılarının sahip olduğu bazı cebirsel özellikler aşağıda not edilmiştir.

**Teorem 2.3.2.** (i) Toplama işlemine göre birim eleman $\tilde{0}$ dır.

(ii) Toplama işlemine göre her $u \neq \tilde{r}, r \in \mathbb{R}$ bulanık sayılarının ters elemanı yoktur.

(iii) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ olsun. Eğer $a, b \geq 0$ veya $a, b \leq 0$ ise o zaman

$$(a + b)u = au + bu$$

eşitliği geçerlidir. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için bu eşitlik geçerli olmayabilir.

(iv) Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in E^1$ için

$$a(u + v) = au + av$$

eşitliği geçerlidir.

(v) Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ için

$$a(bu) = (ab)u$$

eşitliği geçerlidir [28].

$E^1$ üzerindeki kısmi sıralama bağıntısının bazı özellikleri aşağıda not edilmiştir.

**Lemma 2.3.1.** $u, v, w, e \in E^1$ olsun.

(i) Eğer $u \preceq v$ ve $v \preceq w$ ise $u \preceq w$ olur.

(ii) Eğer $u \preceq w$ ve $v \preceq e$ ise $u + v \preceq w + e$ olur.

(iii) Eğer $u \succeq \tilde{0}$ ve $v \succ w$ ise $uv \succeq uw$ olur [29].

Bir bulanık sayı dizisinin limitini tanımlamak için öncelikle bulanık sayıları üzerindeki metriği tanımlamak gerekir. Önce bu metrik, daha sonra ise bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı ile ilgili tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

$u, v \in E^1$ olsun. Bu durumda $u$ ile $v$ arasındaki $D(u, v)$ uzaklığı,

$$D(u, v) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\}$$

şeklinde tanımlanır. $D$ metriğinin tanımından

$$D(u, \tilde{0}) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u^-(\lambda)|, |u^+(\lambda)|\} = \max\{|u^-(0)|, |u^+(0)|\}$$

olduğu görülür. $D$ metriği aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**Teorem 2.3.3.** $u, v, w, z \in E^1$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman,

(i) $(E^1, D)$ tam metrik uzaydır,

(ii) $D(ku, kv) = |k| D(u, v)$,

(iii) $D(u + v, w + v) = D(u, w)$,

(iv) $D(u + v, w + z) \leq D(u, w) + D(v, z)$,

(v) $|D(u, \tilde{0}) - D(v, \tilde{0})| \leq D(u, v) \leq D(u, \tilde{0}) + D(v, \tilde{0})$ [28].

### 2.4. Bulanık Sayı Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda ilk önce bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı tanıtılacaktır.

**Tanım 2.4.1.** Bir bulanık sayı dizisi; tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, yani $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, ve değer kümesi $E^1$ bulanık sayı uzayı olan bir fonksiyondur [16].

**Tanım 2.4.2.** $(u_n) \subset E^1$ bir bulanık sayı dizisi ve $v_0 \in E^1$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her $n > n_0$ iken $D(u_n, v_0) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyor ise, $(u_n)$ dizisi $v_0$'a yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n \to \infty} u_n = v_0 \text{ veya } u_n \to v_0, \ (n \to \infty)$$

yazılır [16] .

**Tanım 2.4.3.** $u = (u_n)$ bulanık sayılarının bir dizisi ve $\mu_0$ bir bulanık sayısı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : D(u_n, \mu_0) \geq \varepsilon\}) = 0$$

önermesi sağlanıyorsa, yani $(u_n)$ dizisi $\mu_0$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim_{n \to \infty} u_n = \mu_0 \ \text{ veya } \ u_n \longrightarrow \mu_0(st)$$

ile gösterilir [17].

**Not 2.4.1.** $st - \lim_{n\to\infty} u_n = \mu_0$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\delta(M) = 0$ olacak şekilde bir $M \subset \mathbb{N}$ alt kümesi vardir öyleki her $n \notin M$ için $D(u_n, \mu_0) < \varepsilon$ dir.

Bundan sonraki kısımda kolaylık olması açısından

$$\theta = \{K \subset \mathbb{N} : \delta(K) = 0\}$$

sıfır yoğunluk kümesi gösterimi kullanılacaktır.

Açık olarak $\lim_{n\to\infty} u_n = \mu_0$ ise $\{n \in \mathbb{N} : D(u_n, \mu_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olacağından

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : D(u_n, \mu_0) \geq \varepsilon\}) = 0$$

bulunur ve dolayısıyla

$$st - \lim_{n\to\infty} u_n = \mu_0$$

elde edilir. Bunun karşıtı genel olarak doğru değildir.

**Örnek 2.4.1.** $u = (u_k)$ bulanık sayısı dizisini doğal sayıların tam karelerinde

$$u_k(t) := \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, k-1) \cup (k+1, \infty) \\ t - (k-1), & t \in [k-1, k] \\ -t + (k+1), & t \in (k, k+1] \end{cases}$$

ve diğer durumlarda

$$\mu(t) := \begin{cases} 0 & , \ t \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty), \\ t & , \ t \in [0, 1], \\ -t + 2 & , \ t \in (1, 2], \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda her $\varepsilon \in (0, 1)$ için

$$K = \{k \in \mathbb{N} : D(u_k, \mu) \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\} \text{ ve } \delta(K) = 0$$

olduğundan, $u = (u_k)$ dizisi $\mu$ bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Fakat $u = (u_k)$ dizisi $\mu$ sayısına yakınsak değildir [22].

### 2.5. Bulanık Sayı Değerli Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri için istatistiksel yakınsaklık, düzgün istatistiksel yakınsaklık ve eş istatistiksel yakınsaklık tanımlarını vereceğiz. bu yakınsaklık çeşitlerinin temel özelliklerinden bahsedilecek ve aralarındaki ilişkiler gösterilecektir.

Şimdi bulanık sayı değerli fonksiyonlardan bahsedeceğiz. $\tilde{f} : [a, b] \to E^1$ bulanık sayı değerli fonksiyonu $\lambda \in [0, 1]$ için

$$[\tilde{f}(x)]_\lambda = [f_\lambda^-(x), f_\lambda^+(x)],$$

parametrik gösterimine sahiptir.

**Tanım 2.5.1.** $\tilde{f} : [a, b] \to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı var öyleki $|x - x_0| < \delta$ olan her $x \in [a, b]$ için $D(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x_0)) < \varepsilon$ kalıyorsa $\tilde{f}$ bulanık sayı değerli fonksiyonu $x_0 \in [a, b]$ da süreklidir denir. Eğer $\tilde{f}$, her bir $x \in [a, b]$ noktasında sürekli ise $\tilde{f}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde süreklidir denir. $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların kümesi $C_{\mathcal{F}}[a, b]$ ile gösterilir.

$C_{\mathcal{F}}[a, b]$ kümesi üzerindeki metrik

$$\begin{aligned} D^*(\tilde{f}, \tilde{g}) &= \sup_{x \in [a,b]} D(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) \\ &= \sup_{x \in [a,b]} \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|f_\lambda^-(x) - g_\lambda^-(x)|, |f_\lambda^+(x) - g_\lambda^+(x)|\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.5.2.** $\tilde{f} : [a, b] \to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n : [a, b] \to E^1$ $(n \in \mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer herbir $x \in [a, b]$, her $n \in \mathbb{N} \backslash M_x$ için $D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $M_x$ kümesi varsa, $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi $\tilde{f}$ fonksiyonuna yakınsaktır denir. Bu takdirde

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x)$$

yazılır [24].

**Tanım 2.5.3.** $\tilde{f} : [a, b] \to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n : [a, b] \to E^1$ $(n \in \mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $x \in [a, b]$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}) = 0$$

önermesi sağlanıyorsa yani;

$$\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists M_x \in \theta, \forall n \in \mathbb{N} \backslash M_x, D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$$

ise bulanık sayı değerli fonksiyonların bir $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi, bulanık sayı değerli $\tilde{f}$ fonksiyonuna noktasal istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(st)$$

yazılır [24].

**Teorem 2.5.1.** Bulanık sayı değerli fonksiyonların bir $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi, bulanık sayı değerli bir $\tilde{f}$ fonksiyonuna noktasal istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $[\tilde{f}_n]_\lambda$ nın $\lambda$ ya göre $[\tilde{f}]_\lambda$ e düzgün istatistiksel yakınsaktır [24].

**İspat:** $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(st)$ olsun. Bu durumda herbir $x_0 \in [a,b]$ için, $\tilde{f}_n(x_0) \to \tilde{f}(x_0)(st)$ olur. Bu durumda verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $M_{x_0} \in \theta$ kümesi vardır öyleki her $n \in \mathbb{N} \backslash M_{x_0}$ için $D(\tilde{f}_n(x_0), \tilde{f}(x_0)) < \varepsilon$ olur, yani

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|(f_n(x_0))_\lambda^- - f_\lambda^-(x_0)|, |(f_n(x_0))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x_0)|\} < \varepsilon$$

olur. Bu sebeple her $\lambda \in [0,1]$ için $|(f_n(x_0))_\lambda^- - f_\lambda^-(x_0)| < \varepsilon$ ve $|(f_n(x_0))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x_0)|\} < \varepsilon$ olur.

$$[\tilde{f}_n(x)]_\lambda = [(f_n(x_0))_\lambda^-, |(f_n(x_0))_\lambda^+], \ [\tilde{f}(x_0)]_\lambda = [f_\lambda^-(x_0), f_\lambda^+(x_0)]$$

olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için $[\tilde{f}_n(x)]_\lambda$ dizisi $[\tilde{f}(x_0)]_\lambda$'a $\lambda$' ya göre düzgün istatistiksel yakınsaktır.

Tersine, her $x_0 \in [a,b]$ ve her $\varepsilon > 0$, her $n \in N \backslash M'_{x_0}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$|(f_n(x_0))_\lambda^- - f_\lambda^-(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M'_{x_0} \in \theta$ kümesi vardır. Aynı zamanda, her $n \in \mathbb{N} \backslash M''_{x_0}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$|(f_n(x_0))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $M''_{x_0} \in \theta$ kümesi vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N} \backslash M_{x_0}$ için

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|(f_n(x_0))_\lambda^- - f_\lambda^-(x_0)|, |(f_n(x_0))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x_0)|\} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M_{x_0} = M'_{x_0} \cup M''_{x_0} \in \theta$ kümesi bulunabilir. Böylece her $n \in \mathbb{N} \backslash M_{x_0}$ için $D(\tilde{f}_n(x_0), \tilde{f}(x_0)) < \varepsilon$ sağlanır, yani $\tilde{f}_n(x_0) \to \tilde{f}(x_0)(st)$ elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar. ■

**Teorem 2.5.2.** $\{\tilde{f}_n\}$, Bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun, bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $(\tilde{f}_n)$, $\tilde{f}$' ye istatistiksel yakınsaktır.

(2) Her $x \in [a,b]$ için $\tilde{f}_n(x) = \tilde{g}_n(x) + \tilde{h}_n(x), \ \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) = \tilde{f}(x)$ ve $\tilde{h}_n(x) \to \tilde{0}(st)$ olacak şekilde bulanık sayı değerli fonksiyonların $\{\tilde{g}_n\}$ ve $\{\tilde{h}_n\}$ dizileri vardır.

(3) $\delta(K)=1$ ve $k\to\infty$ iken $D(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\to 0$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ in bir $K=\{n_k\}$ altdizisi vardır [24].

**İspat:** $(1)\Rightarrow(2)$: $\tilde{f}_n(x_0)\to\tilde{f}(x_0)(st)$ den, verilen $x\in[a,b]$ ve $\varepsilon>0$, bir $N\in\mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki her $n>N$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n: D(\tilde{f}_k(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\right\}\right|<\varepsilon$$

kalır. $\varepsilon=\frac{1}{j}, j\in\mathbb{N}$ seçersek her $n\in N_j$ için

$$\frac{1}{n}\left\{k\leq n: D(\tilde{f}_k(x),\tilde{f}(x))\geq\frac{1}{j}\right\}<\frac{1}{j}$$

olacak şekilde bir $N_1<N_2<N_3<\ldots$ inşaa edilebilir. Şimdi verilen bir $x\in[a,b]$ için $\{\tilde{g}_n(x)\}$ ve $\{\tilde{h}_n(x)+\tilde{f}(x)\}$'i aşağıdaki gibi tanımlayalım.
$0<n\leq N_1$ ve $\tilde{h}_n(x)+\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x)$ ve $\tilde{g}_n(x)=\tilde{f}(x)$ olsun. $j\geq 1$ ve $N_j<n\leq N_{j+1}$ olacak şekilde aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$\tilde{g}_n(x)=\begin{cases}\tilde{f}_n(x), & D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{j}\text{ ise,}\\ \tilde{f}(x), & D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\frac{1}{j}\text{ ise}\end{cases}$$

ve

$$\tilde{h}_n(x)+\tilde{f}(x)=\begin{cases}\tilde{f}_n(x), & D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{j}\text{ ise,}\\ \tilde{f}(x), & D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\frac{1}{j}\text{ ise.}\end{cases}$$

Bu durumda $\tilde{f}_n(x)+\tilde{f}(x)=\tilde{g}_n(x)+\tilde{h}_n(x)+\tilde{f}(x)$ olduğunu görmek zor değildir. Buradan $\tilde{f}_n(x)=\tilde{g}_n(x)+\tilde{h}_n(x)$ elde edilir.

Şimdi her $x\in[a,b]$ için $\lim_{n\to\infty}\tilde{g}_n(x)=\tilde{f}(x)$ olduğunu ispatlayalım. Verilen $x\in[a,b]$ ve $\varepsilon>0$ için $\frac{1}{j}<\varepsilon$ olacak şekilde $j\in N$ alalım. $K>N_j$ için eğer $D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{j}$ ise

$$D(\tilde{g}_n(x),\tilde{f}(x))=D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{j}<\varepsilon$$

ve eğer $D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\frac{1}{j}$ ise

$$D(\tilde{g}_n(x),\tilde{f}(x))=0$$

olur. Böylece $D(\tilde{g}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon$ olur.

İkinci olarak, $\tilde{h}_n(x)\to\tilde{0}(st)$ ve $\tilde{h}_n(x)+\tilde{f}(x)\to\tilde{f}(x)(st)$ olduğunu gösterelim. $N_j$' nin inşasından ve $\tilde{h}_n(x)+\tilde{f}(x)$' nin tanımından $N_j<k\leq N_{j+1}$ ve $D(\tilde{f}_k(x),\tilde{f}(x))\geq$

$\frac{1}{j}$ eşitsizlikleri $D(\tilde{h}_k(x), \tilde{f}(x)) \geq \frac{1}{j}$ eşitsizliği elde edilir. Bu da gösterir ki eğer $N_j < k \leq N_{j+1}$ ise

$$\left\{k \leq n : D(\tilde{h}_k(x) + \tilde{f}(x), \tilde{f}(x)) \geq \frac{1}{j}\right\} \subset \left\{k \leq n : D(\tilde{f}_k(x), \tilde{f}(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}$$

kapsaması vardır ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : D(\tilde{h}_k(x) + \tilde{f}(x), \tilde{f}(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right| &\leq \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : D(\tilde{f}_k(x), \tilde{f}(x)) \geq \frac{1}{j}\right\}\right| \\ &< \frac{1}{j} < \delta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{h}_n(x) + \tilde{f}(x) \rightarrow \tilde{f}(x)(st)$ olur. Teorem 2.5.1'e göre $x \in [a, b]$ ve verilen $\varepsilon > 0$ için, her $\alpha \in [a, b]$ için $|(h_n(x))^-_\lambda + f^-_\lambda(x) - f^-_\lambda(x)| < \varepsilon$ ve $|(h_n(x))^+_\lambda + f^+_\lambda(x) - f^+_\lambda(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $M_x \in \theta$ vardır. Bu sebeple $|(h_n(x))^-_\lambda| < \varepsilon$ ve $|(h_n(x))^+_\lambda| < \varepsilon$ olur. Böylece

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|(h_n(x))^-_\lambda - 0|, |(h_n(x))^+_\lambda - 0|\} < \varepsilon$$

elde edilir, yani $D(\tilde{h}_n(x), \tilde{0}) < \varepsilon$ olur. Böylece, $\tilde{h}_n(x) \rightarrow \tilde{0}(st)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): Verilen bir $x \in [a, b]$ ve $\varepsilon > 0$ için, her $n \in \mathbb{N} \backslash M_x$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{h}_n(x), \tilde{0}) \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir $M_x \in \theta$ kümesi var olduğundan dolayı $n \in K$ için $\tilde{h}_n(x) = \overline{0}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$'nin $K = \{n_k\} \subseteq N \backslash M_x$ alt dizisi tanımlanabilir. Bu sebeple,

$$\delta(K) = \delta(\mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{h}_n(x), \overline{0}) \geq \varepsilon\}) = 1$$

olur. Herbir $k \in \mathbb{N}$ ve $D(\tilde{g}_n(x), \tilde{f}(x)) \rightarrow 0$ için $\tilde{f}_{n_k}(x) = \tilde{g}_{n_k}(x)$ olduğundan $D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \rightarrow 0$ olduğu sonucu çıkar ki böylece (3) sağlanır.

(3) $\Rightarrow$ (1): Her $x \in [a, b]$ için, eğer (3) kabul edilirse, bu takdirde verilen $\varepsilon > 0$ için $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olması ile birlikte $\mathbb{N}$' nin bir $K = \{n_k\}$ altdizisi vardır. Böylece her $k \geq m$ için $D(\tilde{f}_{n_k}(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$ ve

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}) \leq \delta(\mathbb{N} - \{n_k : k > m\}) = 1 - \delta(\{n_k : k > m\}) = 0$$

elde edilir ki bu da her $x \in [a, b]$ için $\{\tilde{f}_n(x)\}$' in $\tilde{f}(x)$' e istatistiksel yakınsak olmasını gerektirir. Böylece (1) sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

**Tanım 2.5.4.** $\tilde{f}:[a,b]\to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n:[a,b]\to E^1$ $(n\in\mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\delta(\{n\in\mathbb{N}:\sup_{x\in[a,b]} D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\})=0$$

önermesi sağlanıyorsa yani;

$$\forall\varepsilon>0,\exists M\in\theta,\forall n\in\mathbb{N}\backslash M,\forall x\in[a,b],D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon$$

ise bulanık sayı değerli fonksiyonların bir $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi bulanık sayı değerli $\tilde{f}$ fonksiyonuna $[a,b]$'de düzgün istatistiksel yakınsaktır denir ve $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ yazılır [24].

**Not 2.5.1.** Eğer $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ ise bu takdirde $\tilde{f}_n\to\tilde{f}(st)$ olur.

**Not 2.5.2.** $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ olması için gerek ve yeter şart $\sup_{x\in[a,b]}D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\to 0(st)$ olmasıdır.

**Önerme 2.5.1.** Kabul edelim ki $\{\tilde{f}_n\}$, $[a,b]$ üzerinde eşsürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi ve $\tilde{f}$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde $\tilde{f}_n\to\tilde{f}(st)$ ise bu taktirde $\tilde{f}$ süreklidir ve $[a,b]$ üzerinde $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ dir [24].

**İspat:** İlk olarak $\tilde{f}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ispat edeceğiz. $\varepsilon>0$ ve $x_0\in[a,b]$ olsun. $\{\tilde{f}_n\}$ dizisinin eşsürekliliğinden her $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$ için, $D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_n(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $\eta>0$ vardır. Her $x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$ için $\tilde{f}_n(x)\to\tilde{f}(x)(st)$ olduğundan

$$\left\{n\in\mathbb{N}:D(\tilde{f}_n(x_0),\tilde{f}(x_0))\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\}\cup\left\{n\in\mathbb{N}:D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\}\in\theta$$

olur. Böylece

$$D(\tilde{f}_n(x_0),\tilde{f}(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}\text{ ve }D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ vardır.

$$\begin{aligned}D(\tilde{f}(x_0),\tilde{f}(x)) &\leq D(\tilde{f}(x_0),\tilde{f}_n(x_0))+D(\tilde{f}_n(x_0),\tilde{f}_n(x))+D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir ve $\tilde{f}$'nin sürekliliği ispatlanır.

Şimdi de $[a,b]$ üzerinde $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ olduğunu gösterelim. $\tilde{f}$, $[a,b]$ de sürekli olduğundan $[a,b]$' de $\{\tilde{f}_n\}$ eş düzgün sürekli ve $\tilde{f}$ düzgün süreklidir. Böylece her $x,x'\in$

$[a,b]$ için ve $|x-x^{'}|<\eta$ olacak şekilde $\eta>0$ seçilirse $D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_n(x^{'}))<\frac{\varepsilon}{3}$ ve $D(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x^{'}))<\frac{\varepsilon}{3}$. Sonlu örtü teoreminden, $[a,b]$' nin örtüsünden

$$(x_1-\eta,x_1+\eta),(x_2-\eta,x_2+\eta),...,(x_k-\eta,x_k+\eta)$$

sonlu açık örtülerini seçelim. $\tilde{f}_n(x)\to\tilde{f}(x)(st)$ kullanılarak her $n\notin M_{x_i}$ ve $i\in\{1,2,...,k\}$ için $D(\tilde{f}_n(x_i),\tilde{f}(x_i))<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $M_{x_i}\in\theta$ kümesi vardır. $n\notin M_{x_i}$ ve $x\in[a,b]$ olsun. Böylece bazı $i\in\{1,2,...,k\}$'ler için $x\in(x_i-\eta,x_i+\eta)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x)) &\leq D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_n(x_i)+D(\tilde{f}_n(x_i),\tilde{f}(x_i))+D(\tilde{f}(x_i),\tilde{f}(x))\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

olur ki bu da $[a,b]$ üzerinde $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ olduğunu ispatlar. ■

**Tanım 2.5.5.** $K\subset\mathbb{N}$ ve $j\in\mathbb{N}$ için

$$\delta_j(K)=\frac{|K\cap\{1,2,...,j\}|}{j}$$

biçiminde tanımlanan $\delta_j(K)$ sayısına $K$ kümesinin $j$'inci kısmi yoğunluğu denir.

**Tanım 2.5.6.** $\tilde{f}:[a,b]\to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n:[a,b]\to E^1$ $(n\in\mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer verilen $\varepsilon>0$ için

$$g_{j,\varepsilon}(x)=\delta_j(\{n\in\mathbb{N}:D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\})$$

reel değerli fonksiyonu $x\in[a,b]$ üzerinde sıfır fonksiyonuna düzgün yakınsak ise bulanık sayı değerli fonksiyonların $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi $\tilde{f}$ fonksiyonuna eş istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\tilde{f}_n\twoheadrightarrow\tilde{f}(st)$$

yazılır [24].

**Not 2.5.3.** $\tilde{f}_n\twoheadrightarrow\tilde{f}(st)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\forall\varepsilon,\sigma>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ \ \forall j\geq k,\ \ \forall x\in[a,b],\ \ \delta_j(\{n\in\mathbb{N}:D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\})<\sigma$$

olmasıdır.

**Not 2.5.4.** Eğer $\tilde{f}_n\twoheadrightarrow\tilde{f}(st)$ ise bu takdirde $\tilde{f}_n\to\tilde{f}(st)$ sağlanır.

**Not 2.5.5.** Eğer $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ ise bu takdirde $\tilde{f}_n\twoheadrightarrow\tilde{f}(st)$ dir.

Not 2.5.3 ve Not 2.5.4'ün doğruluğunu görmek kolaydır. Şimdi, Not 2.5.5'in doğruluğunu ispat edelim. Kabul edelim ki $\tilde{f}_n\rightrightarrows\tilde{f}(st)$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}\backslash M$ ve her $x \in [a,b]$ için $D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $M \in \theta$ kümesi mevcuttur. $M \in \theta$ olduğundan, her $j \geq k$ için $\delta_j(M) < \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. $x \in [a,b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Böylece $D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon$ olması $n \in M$ olmasını gerektirir. Böylece her $j \geq k$ için;

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}) \leq \delta_j(M) < \varepsilon$$

elde edilir ki bu da $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(st)$ olduğunu gösterir.

**Teorem 2.5.3.** Bulanık sayı değerli fonksiyonların bir $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi, bulanık sayı değerli bir $\tilde{f}(x)$ fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsaktır gerek ve yeter şart $[\tilde{f}_n(x)]_\lambda$ dizisi $\lambda$ ve $x$'e göre $[\tilde{f}(x)]_\lambda$ dizisine düzgün istatistiksel yakınsaktır [24].

**İspat:** $\tilde{f}_n \rightrightarrows \tilde{f}(st)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}\backslash M$ ve $x \in [a,b]$ için $D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$, yani

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)|, |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)|\} < \varepsilon$$

olacak şekilde $M \in \theta$ kümesi vardır. Yani, her $n \in \mathbb{N}\backslash M$ ve $x \in [a,b]$ için $|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)| < \varepsilon$ ve $|(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)| < \varepsilon$ eşitsizlikleri sağlanır. Diğer taraftan

$$[\tilde{f}_n(x)]_\lambda = [(f_n(x))^-_\lambda, (f_n(x))^+_\lambda], \quad [\tilde{f}(x)]_\lambda = [f^-_\lambda(x), f^+_\lambda(x)]$$

olduğundan $[\tilde{f}_n(x)]_\lambda$ dizisinin $\lambda$ ve $x$'e göre $[\tilde{f}(x)]_\lambda$'e düzgün istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Tersine, her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x \in [a,b]$ için, $[\tilde{f}_n(x)]_\lambda$ dizisi $\lambda$ ve $x$' e göre $[\tilde{f}(x)]_\lambda$'e düzgün istatistiksel yakınsak olsun. Böylece verilen $\varepsilon > 0$ için bir $M_1 \in \theta$ kümesi vardır öyleki her $n \in \mathbb{N}\backslash M_1$, $x \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [a,b]$ için $|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)| < \varepsilon$ olur. Benzer şekilde bir $M_2 \in \theta$ kümesi vardır öyleki her $n \in \mathbb{N}\backslash M_2$ için ve her $x \in [a,b]$ ve $\lambda \in [a,b]$ için $|(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)| < \varepsilon$ olur. $M = M_1 \cup M_2$ tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}\backslash M$, her $x \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [a,b]$ için

$$|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)| < \varepsilon \text{ ve } |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)|, |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)|\} < \varepsilon$$

yani, $D(\tilde{f}_n(x_0), \tilde{f}(x_0)) < \varepsilon$ olur. Buda ispatı tamamlar. ■

**Teorem 2.5.4.** $\tilde{f} : [a,b] \to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n : [a,b] \to E^1$ $(n \in \mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. $x_0 \in [a,b]$ seçelim. Eğer $[a,b]$ üzerinde $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(st)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{f}_n$ fonksiyonları $x_0$ noktasında sürekli ise $\tilde{f}$ fonksiyonu da $x_0$ noktasında süreklidir [24].

**İspat:** $\varepsilon > 0$ olsun. $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(st)$ olduğundan her $x \in [a,b]$ için

$$\delta_k\left(\left\{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. $x \in [a,b]$ için

$$E(x) = \left\{n \leq k : D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

tanımlayalım. Böylece, her $x \in [a,b]$ için $\delta_k(E(x)) > \frac{1}{2}$ olur. $x_0$ noktasında $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, ..., \tilde{f}_k$ fonksiyonlarının sürekliliğinden $x_0$'ın bir $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ komşuluğu vardır öyleki her $i \in 1, 2, ..., k$ ve her $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ için $D(\tilde{f}_i(x), \tilde{f}_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ seçelim. $\delta_k(E(x)) > \frac{1}{2}$ ve $\delta_k(E(x_0)) > \frac{1}{2}$ olduğundan $p \in E(x) \cap E(x_0)$ bulabiliriz. Böylece,

$$D(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x_0)) \leq D(\tilde{f}(x), \tilde{f}_p(x) + D(\tilde{f}_p(x), \tilde{f}_p(x_0)) + D(\tilde{f}_p(x_0), \tilde{f}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bu sebeple, her $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ için $D(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x_0)) < \varepsilon$ olur, buradan $\tilde{f}$ fonksiyonunun $x_0$ da sürekli olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar. ■

**Teorem 2.5.5.** Bulanık sayı değerli fonksiyonların bir $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi, bulanık sayı değerli bir $\tilde{f}$ fonksiyonuna eş istatistiksel yakınsaktır gerek ve yeter şart $[\tilde{f}_n(x)]_\lambda$ dizisi $[a,b]$ üzerinde $\lambda \in [0,1]$ ya göre düzgün olarak $[\tilde{f}(x)]_\lambda$ fonksiyonuna eş istatistiksel yakınsaktır [24].

**İspat:** $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(st)$ olsun. Her $\varepsilon$ ve $\sigma > 0$ için $k \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $j \geq k$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N}, D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

olur. Böylece, her $x \in [a,b]$ için

$$\delta_j\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)|, |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)|\} \geq \varepsilon\right\}\right) < \sigma$$

olur. Bu takdirde, her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : |(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

ve

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

elde edilir. Her $\lambda \in [0,1]$ için

$$[\tilde{f}_n(x)]_\lambda = [(f_n(x))^-_\lambda, (f_n(x))^+_\lambda] \text{ ve } [\tilde{f}(x)]_\lambda = [f^-_\lambda(x), f^+_\lambda(x)]$$

olduğundan $[a,b]$ üzerinde, $[\tilde{f}_n(x)]_\lambda$ dizisi $[\tilde{f}(x)]_\lambda$ dizisine $\lambda$ ya göre düzgün olarak eş istatistiksel yakınsaktır.

Tersine, $\varepsilon > 0$ ve $\sigma > 0$ olsun. Her $j \geq k_1$, her $x \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N}, |(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Benzer olarak, her $j \geq k_2$, her $x \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu takdirde, $k = \max\{k_1, k_2\}$ olarak seçilirse her $j \geq k$, her $x \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : |(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

ve

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

elde edilir. Böylece

$$\delta_j\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|(f_n(x))^-_\lambda - f^-_\lambda(x)|, |(f_n(x))^+_\lambda - f^+_\lambda(x)|\} \geq \varepsilon\right\}\right) < \sigma$$

yani,

$$\delta_j(\{n \in \mathbb{N} : D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}) < \sigma$$

olur. Buda ispatı tamamlar. ■

**Örnek 2.5.1.** Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için Bulanık sayı değerli $\tilde{f}(x)$ fonksiyonu ve bulanık sayı değerli fonksiyonların $\{\tilde{f}_n(x)\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\tilde{f}(x)(s) = \begin{cases} 0, & s \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty), \\ s+1, & -1 \leq s \leq 0, \\ -s+1, & 0 < s \leq 1. \end{cases}$$

$$\tilde{f}_n(x)(s) = \begin{cases} \mu_k(x)(s), & k = n^2, n = 1,2,3,... \\ \nu_k(x)(s), & k \neq n^2, n = 1,2,3,... \end{cases}$$

$$\mu_k(x)(s) = \begin{cases} 0, & s \in (-\infty, k-1) \cup (k+1, +\infty), \\ s-k+1, & k-1 \le s \le k, \\ -s+k+1, & k < s \le k+1. \end{cases}$$

$$\nu_k(x)(s) = \begin{cases} 0, & s \in \left(-\infty, \frac{2kx}{1+k^2x^2} - 1\right) \cup \left(\frac{2kx}{1+k^2x^2} + 1, +\infty\right), \\ s + \frac{(1-kx)^2}{1+k^2x^2}, & \frac{2kx}{1+k^2x^2} - 1 \le s \le \frac{2kx}{1+k^2x^2}, \\ \frac{(1+kx)^2}{1+k^2x^2} - s, & \frac{2kx}{1+k^2x^2} < s \le \frac{2kx}{1+k^2x^2} + 1. \end{cases}$$

Bu takdirde $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x)(st)$ olur ama $\tilde{f}_n(x)$ dizisi $\tilde{f}(x)$ fonksiyonuna eş istatistiksel yakınsak değildir. Aslında, yukarıdaki tanımdan, $x \in [a,b]$ seçelim ve $k \neq n^2$ olduğu zaman,

$$\begin{aligned} D(\tilde{f}_k(x), \tilde{f}(x)) &= D(\nu_k(x), \tilde{f}(x)) \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|(\nu_k(x))_\lambda^- - f_\lambda^-(x)|, |(\nu_k(x))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x)|\} \\ &= \sup_{\lambda[0,1]} \max\left\{ \left|\frac{2kx}{1+k^2x^2} - (1-\lambda) - (\lambda - 1)\right|, \right. \\ &\quad \left. \left|\frac{2kx}{1+k^2x^2} + (1-\lambda) - (1-\lambda)\right| \right\} \\ &= \frac{2kx}{1+k^2x^2} \to 0 \ \ (k \to \infty). \end{aligned}$$

Yani, $\varepsilon > 0$ için bir $N_1$ vardır öyleki her $k > N_1$ ve $k \neq n^2$ için $D(\tilde{f}_k(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$ olur. Böylece, olacak şekilde

$$M_x = M' \cup M'' = \{k : k = n^2\} \cup \{k \le N_1\} \in \theta$$

tanımlarsak her $n \in \mathbb{N} \backslash M_x$ için $D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$ kalır. Bu ise, $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x)(st)$ olması demektir.

Diğer taraftan, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ olsun. $x = \frac{1}{x}$ seçersek, her $k \neq n^2 \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \delta_j\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \left|\left(f_k\left(\frac{1}{k}\right)\right)_\lambda^+ - f_\lambda^+\left(\frac{1}{k}\right)\right| \ge \varepsilon_0\right\}\right) \\ = \ & \delta_j\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \left|\left(\nu_k\left(\frac{1}{k}\right)\right)_\lambda^+ - f_\lambda^+\left(\frac{1}{k}\right)\right| \ge \frac{1}{2}\right\}\right) \\ = \ & \delta_j\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \left|\frac{2k\frac{1}{k}}{1+k^2(\frac{1}{k})^2} + (1-\lambda) - (1-\lambda)\right| = 1 \ge \frac{1}{2}\right\}\right) \\ = \ & 1 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olacak şekilde $j \geq k$ vardır. Aynı yolla

$$\delta_j\left(\left\{k\in\mathbb{N}\left|\left(f_k\left(\frac{1}{k}\right)\right)^-_\lambda - f^-_\lambda\left(\frac{1}{k}\right)\right|\geq\varepsilon_0\right\}\right)=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

olduğunu ispatlayabiliriz. Böylece, $(f_k(x))^+_\lambda$ ve $(f_k(x))^-_\lambda$ fonksiyon diziler düzgün eş istatistiksel yakınsak değildir. Teorem 2.5.5 göz önünde bulundurarak $\{\tilde{f}_n\}$ bulanık fonksiyon dizisinin $\tilde{f}$ fonksiyonuna eş istatistiksel yakınsak olmadığı görülür [24].

**Örnek 2.5.2.** Her $x\in[0,1]$ için bulanık sayı değerli fonksiyon $\tilde{f}(x)=\tilde{0}$ ve bulanık sayı değerli fonksiyonların $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\tilde{f}_n(x)(s)=\begin{cases}\mu_n(x)(s), & x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right],\\ \nu_n(x)(s), & x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right],\\ \tilde{0}, & x\notin\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right].\end{cases}$$

$$\mu_n(x)(s)=\begin{cases}0, & s\in\left(-\infty,2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})-1\right)\cup\left(2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+1,\infty\right),\\ s-2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+1, & 2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})-1\leq s\leq 2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n}),\\ -s+2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+1, & 2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})<s\leq 2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+1.\end{cases}$$

$$\nu_n(x)(s)=\begin{cases}0, & s\in\left(-\infty,-2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})-1\right)\cup\left(-2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+1,\infty\right),\\ s+2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+1, & -2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})-1\leq s\leq -2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}}),\\ -s-2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+1, & -2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})<s\leq -2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+1.\end{cases}$$

Bu $\tilde{f}_n\to\tilde{f}(st)$ olduğunu gösterir, ama $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi $\tilde{f}$ fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak değildir. Aslında, her $x\in[0,1]$ için, $\{n\in\mathbb{N}:\tilde{f}_n(x)\neq\tilde{0}\}$ kümesinin kardinalitesi 1'e eşit veya 1' den küçüktür. Böylece $\varepsilon>0$ olsun ve $\frac{1}{k}<\varepsilon$ olacak şekilde $k\in\mathbb{N}$ bulalım. Bu takdirde her $j\geq k$ ve $x\in[0,1]$ için;

$$\delta_j(\{n\in\mathbb{N}:D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\})\leq\frac{|\{n\in\mathbb{N}:\tilde{f}_n(x)\neq\tilde{0}\}\cap\{1,2,...,\}|}{j}\leq\frac{1}{j}<\frac{1}{k}<\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\tilde{f}_n\twoheadrightarrow\tilde{f}(st)$'dir.

Diğer taraftan, her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[0,1]}D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\\ =&\sup_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]}D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\\ =&\sup_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]}D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\vee\sup_{x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right]}D(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]} \sup_{\lambda\in[0,1]} \{|(f_n(x))^-_\lambda|, |(f_n(x))^+_\lambda\} \\
&\quad \vee \sup_{x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right]} \sup_{\lambda\in[0,1]} \{|(f_n(x))^-_\lambda|, |(f_n(x))^+_\lambda\} \\
&= \sup_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]} \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\{|2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})-(1+\lambda)|, |2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+(1-\lambda)|\right\} \\
&\quad \vee \sup_{x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right]} \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\{|2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+(1+\lambda)|, |-2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+(1-\lambda)|\right\} \\
&= \sup_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]} \left(2^{n+1}(x-\frac{1}{2^n})+1\right) \vee \sup_{x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right]} \left(-2^{n+1}(x-\frac{1}{2^{n-1}})+1\right) \\
&= 2 \nrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu takdirde Not 2.5.2' den $\{\tilde{f}_n\}$'in $\tilde{f}$'e düzgün istatistiksel yakınsak olmadığı elde edilir [24].

### 2.6. Bulanık Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

Bu kısımda bulanık pozitif lineer operatörlere ilşkin bazı temel tanımlar verilip, bu operatörlerin dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri sunulacaktır.

**Tanım 2.6.1.** $\tilde{L} : C_{\mathcal{F}}[a,b] \to C_{\mathcal{F}}[a,b]$ bir operatör olsun. Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C_{\mathcal{F}}[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ için

$$\tilde{L}(\lambda_1\tilde{f}_1 + \lambda_2\tilde{f}_2; x) = \lambda_1\tilde{L}(\tilde{f}_1; x) + \lambda_2\tilde{L}(\tilde{f}_2; x)$$

eşitliğini sağlanıyor ise $\tilde{L}$ operatörüne bulanık lineer operatördür denir. Her $x \in [a,b]$ için $\tilde{f}(x) \preceq \tilde{g}(x)$ olan $\tilde{f}, \tilde{g} \in C_{\mathcal{F}}[a,b]$ fonksiyonları için $\tilde{L}(\tilde{f}; x) \preceq \tilde{L}(\tilde{g}; x)$ koşulu gerçekleniyor ise bu durumda $\tilde{L}$ operatörüne bulanık pozitif lineer operatördür denir.

Bulanık pozitif lineer operatörler için bulanık Korovkin tipi yaklaşım teoremi ilk olarak Anastassiou [31] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tez boyunca test fonksiyonları $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$ olarak alınacaktır.

**Teorem 2.6.1.** $\tilde{L}_n : C_{\mathcal{F}}[a,b] \to C_{\mathcal{F}}[a,b]$ ile tanımlı bulanık pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{\tilde{L}_n\}$ olsun. $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$, her $x \in [a,b], \lambda \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ ve $\tilde{f} \in C_{\mathcal{F}}[a,b]$ için

$$\left\{\tilde{L}_n(\tilde{f}; x)\right\}^{\pm}_{\lambda} = L_n(f^{\pm}_{\lambda}; x) \tag{2.7}$$

özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir $\{L_n\}$ dizisinin mevcut olduğunu varsayalım. Her bir $i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(e_i) - e_i \|_{C[a,b]} = 0$$

ise o zaman her $\tilde{f} \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} D^*(\tilde{L}_n(\tilde{f}), \tilde{f}) = 0$$

sağlanır [31].

Bu teoremin istatistiksel benzeri de Anastassiou ve Duman [32] tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

**Teorem 2.6.2.** $\tilde{L}_n : C_{\mathcal{F}}[a, b] \to C_{\mathcal{F}}[a, b]$ ile tanımlı bulanık pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{\tilde{L_n}\}$ olsun. $L_n : C[a, b] \to C[a, b]$, her $x \in [a, b], \lambda \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ ve $\tilde{f} \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ için

$$\left\{\tilde{L_n}(f; x)\right\}_{\lambda}^{\pm} = L_n(f_{\lambda}^{\pm}; x)$$

özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir $\{\tilde{L}_n\}$ dizisinin mevcut olduğunu varsayalım. Her bir $i = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \| L_n(e_i) - e_i \|_{C[a,b]} = 0$$

ise o zaman her $f \in C_{\mathcal{F}}[a, b]$ fonksiyonu için

$$st - \lim_{n\to\infty} D^*(\tilde{L}_n(\tilde{f}), \tilde{f}) = 0$$

sağlanır [32].

# 3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde bulanık sayı değerli fonksiyonların $\gamma$ mertebeden eş $\alpha\beta-$istatistiksel yakınsaklığı kavramı tanımlanacak ve bu yakınsaklık yardımıyla $C_{\mathcal{F}}[a,b]$ üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanacaktır. Burada aksi söylenmedikçe $(\alpha,\beta)\in\Lambda$ ve $0<\gamma\leq 1$ alınacaktır.

## 3.1. Bulanık Sayı Değerli Fonksiyon Dizilerinin $\alpha\beta$-istatistiksel Yakınsaklığı

**Tanım 3.1.1.** $\tilde{f}:[a,b]\to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n:[a,b]\to E^1$ $(n\in\mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve her bir $x\in X$ için

$$\delta^{\alpha,\beta}(\{k:D(\tilde{f}_k(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\},\gamma)=\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\in P_n^{\alpha,\beta}:D(\tilde{f}_k(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^{\gamma}}=0$$

oluyorsa $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi $\tilde{f}$ fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde $\gamma$ mertebeden noktasal $\alpha\beta-$istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\tilde{f}_n\to\tilde{f}(\alpha\beta^{\gamma}-st)$$

ile gösterilir.

**Tanım 3.1.2.** $\tilde{f}:[a,b]\to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n:[a,b]\to E^1$ $(n\in\mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k\in P_n^{\alpha,\beta}:\sup_{x\in[a,b]}D(\tilde{f}_k(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^{\gamma}}=0$$

sağlanıyor ise $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi $\tilde{f}$ fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde $\gamma$ mertebeden düzgün $\alpha\beta-$istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\tilde{f}_n\rightrightarrows f(\alpha\beta^{\gamma}-st)$$

yazılır [25].

**Tanım 3.1.3.** $\tilde{f}:[a,b]\to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n:[a,b]\to E^1$ $(n\in\mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer verilen $\varepsilon>0$ için

$$p_{n,\varepsilon}^{\gamma}(x)=\frac{|\{m\in P_n^{\alpha,\beta}:D(\tilde{f}_m(x),\tilde{f}(x))\geq\varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^{\gamma}}$$

reel değerli fonksiyonu $x \in [a, b]$ üzerinde sıfır fonksiyonuna düzgün yakınsak ise bulanık sayı değerli fonksiyonların $\{\tilde{f}_n\}$ dizisi $\tilde{f}$ fonksiyonuna $\gamma$ mertebeden eş $\alpha\beta-$istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st).$$

yazılır.

Yukarıdaki tanımlardan

$$\tilde{f}_n \rightrightarrows \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st) \Rightarrow \tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st) \Rightarrow \tilde{f}_n \to \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$$

gerektirmeleri aşikardır. Şimdi bu gerektirmelerin tersinin geçerli olmadığını gösteren örnekleri verelim.

**Örnek 3.1.1.** $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dizileri Örnek 2.2.1 deki gibi tanımlansın. $\mu \in E^1$ bulanık sayısı

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & t \in [0, 1] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $\tilde{f}_n : [0, 1] \to E^1, \tilde{f}_n(x) = \mu f(x)$ bulanık sayı değerli fonksiyon dizisini tanımlayalım. Her $x \in [0, 1]$ için

$$D(\tilde{f}_n(x), \tilde{0}) = D(\mu f(x), \tilde{0}) = D(\mu, \tilde{0})|f(x)| = |f(x)|$$

ve $f_n \twoheadrightarrow 0(\alpha\beta^\gamma - st)$ olduğundan $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{0}(\alpha\beta^\gamma - st)$ olur. Bununla birlikte her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x \in [0,1]} D(\tilde{f}_n(x), \tilde{0}) = D(\mu, \tilde{0}) = 1$$

olduğundan $\tilde{f}_n \rightrightarrows \tilde{0}(\alpha\beta^\gamma - st)$ sağlanmaz.

**Örnek 3.1.2.** $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha(r) = 2^{n-1} + 1$, $\beta(n) = 2^n$ olsun. $\nu \in E^1$ bulanık sayısını

$$\nu(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $\tilde{f}_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_n(x) = \nu x^n$ bulanık fonksiyonlarını göz önüne alalım ve

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{0}, & x \in [0, 1) \\ \nu, & x = 1 \end{cases}$$

bulanık fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde

$$D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) = \begin{cases} D(\mu, \tilde{0})x^n, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^n, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

bulunur. Açık olarak $\tilde{f}_r \to \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$ olur. Örnek 2.2.2 daki adımlara benzer adımlarla $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$ yakınsamasının gerçekleşmediği görülür.

**Teorem 3.1.1.** $\tilde{f}, \tilde{g} : [a,b] \to E^1$ bulanık sayı değerli fonksiyonlar, $\tilde{f}_n, \tilde{g}_n : [a,b] \to E^1$ $(n \in \mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st) \text{ ve } \tilde{g}_n \twoheadrightarrow \tilde{g}(\alpha\beta^\gamma - st)$$

ise, o zaman

(i) $\tilde{f}_n + \tilde{g}_n \twoheadrightarrow \tilde{f} + \tilde{g}\ (\alpha\beta^\gamma - st)$

(ii) $c\tilde{f}_n \twoheadrightarrow c\tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$

olur.

**İspat:** (i): Her $x \in [a,b]$ için

$$D(\tilde{f}_n(x) + \tilde{g}_n(x), \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)) \leq D(\tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)) + D(\tilde{g}_n(x), \tilde{g}(x))$$

olduğundan herhangibir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} & \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{f}_m(x) + \tilde{g}_m(x), \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)) \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} \\ \leq\ & \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{f}_m(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon/2\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} + \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{g}_m(x), \tilde{g}(x)) \geq \varepsilon/2\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ için limit alırsak $\tilde{f}_n + \tilde{g}_n \twoheadrightarrow \tilde{f} + \tilde{g}\ (\alpha\beta^\gamma - st)$ elde edilir.

(ii): Her $x \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(c\tilde{f}_m(x), c\tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} \leq \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{f}_m(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon/|c|\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma}$$

olur. Burada $n \to \infty$ için limit alırsak $c\tilde{f}_n \twoheadrightarrow c\tilde{f}\ (\alpha\beta^\gamma - st)$ elde edilir. ■

**Teorem 3.1.2.** $\tilde{f} : [a,b] \to E^1$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\tilde{f}_n : [a,b] \to E^1$ $(n \in \mathbb{N})$ bulanık sayı değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. O zaman $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in [0,1]$ ya göre düzgün olarak

$$(f_n)_\lambda^- \twoheadrightarrow f_\lambda^-(\alpha\beta^\gamma - st) \text{ ve } (f_n)_\lambda^+ \twoheadrightarrow f_\lambda^+(\alpha\beta^\gamma - st)$$

olmasıdır.

**İspat:** $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$ olsun. Her $\varepsilon$ ve $\sigma > 0$ için $k \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n \geq k$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$p_{n,\varepsilon}^\gamma(x) = \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{f}_m(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^\gamma} < \sigma$$

olur. Böylece

$$\frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : \sup_{\lambda\in[0,1]} |(f_m(x))_\lambda^- - f_\lambda^-(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^\gamma} < \sigma$$

ve

$$\frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : \sup_{\lambda\in[0,1]} |(f_m(x))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^\gamma} < \sigma$$

elde edilir. Bu ise $[a,b]$ üzerinde, $\lambda$ ya düzgün olarak $(f_n)_\lambda^- \twoheadrightarrow f_\lambda^-(\alpha\beta^\gamma - st)$ ve $(f_n)_\lambda^+ \twoheadrightarrow f_\lambda^+(\alpha\beta^\gamma - st)$ olması demektir.

Tersine, $\lambda \in [0,1]$ ya göre düzgün olarak $(f_n)_\lambda^- \twoheadrightarrow f_\lambda^-(\alpha\beta^\gamma - st)$ ve $(f_n)_\lambda^+ \twoheadrightarrow f_\lambda^+(\alpha\beta^\gamma - st)$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\sigma > 0$ verilsin. Bu durumda her $n \geq k_1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : \sup_{\lambda\in[0,1]} |(f_m(x))_\lambda^- - f_\lambda^-(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^\gamma} < \sigma \tag{3.1}$$

olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Benzer olarak, her $n \geq k_2$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : \sup_{\lambda\in[0,1]} |(f_m(x))_\lambda^+ - f_\lambda^+(x)| \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^\gamma} < \sigma \tag{3.2}$$

olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu takdirde, $k = \max\{k_1, k_2\}$ olarak seçilirse her $n \geq k$ ve her $x \in [a,b]$ için (3.1) ve (3.2) elde edilir. Böylece

$$p_{n,\varepsilon}^\gamma(x) = \frac{|\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{f}_m(x), \tilde{f}(x)) \geq \varepsilon\}|}{(\beta(n)-\alpha(n)+1)^\gamma} < \sigma$$

elde edilir, yani,

$$\lim_{n\to\infty} \|p_{n,\varepsilon}^\gamma()\|_{C(X)} = 0$$

olur. Buda $\tilde{f}_n \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^\gamma - st)$ olması demektir. ■

Şimdi $\gamma$ mertebeden eş $\alpha\beta-$istatistiksel yakınsaklık yardımıyla $C_{\mathcal{F}}[a,b]$ üzerinde bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlayacağız.

**Teorem 3.1.3.** $\tilde{L}_n : C_{\mathcal{F}}[a,b] \to C_{\mathcal{F}}[a,b]$ ile tanımlı bulanık pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $\{\tilde{L}_n\}$ olsun. $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$, her $x \in [a,b], \lambda \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ ve $\tilde{f} \in C_{\mathcal{F}}[a,b]$ için

$$\left\{\tilde{L}_n(\tilde{f};x)\right\}_\lambda^\pm = L_n(f_\lambda^\pm;x)$$

özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir $\{L_n\}$ dizisinin mevcut olduğunu varsayalım. Her bir $v = 0,1,2$ için

$$L_n(e_v) \twoheadrightarrow e_v(\alpha\beta^\gamma - st) \tag{3.3}$$

ise her $\tilde{f} \in C_{\mathcal{F}}[a,b]$ fonksiyonu için

$$\tilde{L}_n(\tilde{f}) \twoheadrightarrow \tilde{f}(\alpha\beta^{\gamma} - st)$$

dır.

**İspat:** $\tilde{f} \in C_{\mathcal{F}}[a,b], x \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Hipotezden, $f_{\lambda}^{\pm} \in C[a,b]$ gereğince her $\varepsilon > 0$ için, $\delta > 0$ vardır öyleki; $|y-x| < \delta$ olan her $y \in [a,b]$ için $\mid f_{\lambda}^{\pm}(y) - f_{\lambda}^{\pm}(x) \mid < \varepsilon$ gerçeklenir. $M := \sup_{x\in[a,b]} D(\tilde{f}(x), \tilde{0})$ tanımlarsak Teorem 2.2.2'in ispatından her $y \in [a,b]$ için

$$|f_{\lambda}^{\pm}(y) - f_{\lambda}^{\pm}(x)| \leq \varepsilon + 2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

sağlanır. Şimdi $L_n$ operatörlerin lineerliğini ve pozitifliğini kullanarak, her $n \in \mathbb{N}$ için (2.4) kullanarak $B := \varepsilon + M + \frac{M}{\delta^2}(\|x^2\|_{C(X)} + \|x\|_{C(X)} + 1)$ olmak üzere;

$$|L_n(f_{\lambda}^{\pm}; x) - f_{\lambda}^{\pm}(x)| \leq \varepsilon + B\sum_{\upsilon=0}^{2} |L_n(e_{\upsilon}; x) - e_{\upsilon}(x)|$$

ifadesine sahip oluruz. $\lambda \in [0,1]$ üzerinde supremum alınırsa

$$\begin{aligned} D\left(\tilde{L}_n(\tilde{f}; x), \tilde{f}(x)\right) &= \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\left\{\left|L_n(f_{\lambda}^{-}; x) - f_{\lambda}^{-}(x)\right|, \left|L_n(f_{\lambda}^{+}; x) - f_{\lambda}^{+}(x)\right|\right\} \\ &\leq \varepsilon + B\sum_{\upsilon=0}^{2} |L_n(e_{\upsilon}; x) - e_{\upsilon}(x)| \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Verilen bir $s > 0$ için $0 < \varepsilon < s$ seçelim ve aşağıdaki kümeleri tanımlayalım

$$\begin{aligned} K_s(x) : &= \left\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D\left(\tilde{L}_m(\tilde{f}; x), \tilde{f}(x)\right) \geq s\right\} \\ K_s^{\upsilon}(x) : &= \left\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : |L_m(e_{\upsilon}; x) - e_{\upsilon}(x)| \geq \frac{s-\varepsilon}{3B}\right\}, \end{aligned}$$

$\upsilon = 0, 1, 2$. Bu takdirde (3.4) eşitsizliğinden açıkça

$$K_s(x) \subset \bigcup_{\upsilon=0}^{2} K_s^{\upsilon}(x) \quad (3.5)$$

ifadesini elde ederiz. Ayrıca

$$p_{n,s}^{\gamma}(x) := \frac{1}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^{\gamma}} \left|\left\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : D(\tilde{L}_m(\tilde{f}; x), \tilde{f}(x)) \geq s\right\}\right|$$

ve $\upsilon = 0, 1, 2$ için

$$p_{n,s}^{\gamma,\upsilon}(x) := \frac{1}{(\beta(n) - \alpha(n) + 1)^{\gamma}} \left|\left\{m \in P_n^{\alpha,\beta} : |L_m(e_{\upsilon}; x) - e_{\upsilon}(x)| \geq \frac{s-\varepsilon}{3B}\right\}\right|$$

reel değerli fonksiyonları tanımlayalım. Bu takdirde (3.5) kullanılarak her $x \in [a,b]$ için

$$p_{n,s}^{\gamma}(x) \leq \sum_{\upsilon=0}^{2} p_{n,s}^{\gamma,\upsilon}(x)$$

elde edilir. Bu da

$$\|p_{n,s}^{\gamma}(\cdot)\|_{C([a,b])} \leq \sum_{\upsilon=0}^{2} \|p_{n,s}^{\gamma,\upsilon}(\cdot)\|_{C([a,b])} \tag{3.6}$$

olduğu anlamına gelir. (3.6) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa ve (3.3) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|p_{n,s}^{\gamma}(\cdot)\|_{C([a,b])} = 0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

■

# 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bulanık sayı değerli fonksiyon dizileri için eş $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır. Eş $\alpha\beta$-istatistiksel istatistiksel yakınsak bulanık sayı değerli fonksiyon dizilerinin özellikleri araştırılmıştır. Bu yakınsaklık metodunun bir uygulaması olarak bulanık pozitif lineer operatör dizileri için bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır.

Bu tezde elde edilen sonuçlar birçok istatistiksel yakınsaklık yönteminin genel bir halidir. Mohiuddine ve ark. [33] bulanık sayı değerli fonksiyonların çift dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve tek diziler için Gong ve ark. [24] tarafından elde edilen sonuçları çift dizilere taşımışlardır. Aynı fikirden hareketle, bulanık sayı değerli fonksiyonların çift dizilerinin $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklığı tanımlanabilir ve bu tezdeki sonuçların benzerleri bulanık sayı değerli fonksiyonların çift dizileri için elde edilebilir.

## KAYNAKLAR


[1] Fast, H. Sur la convergence statistique. Colloquium Mathematicum. 1951, 2, 241–244.

[2] Šalát, T. On statistically convergent sequences of real numbers. Mathematica Slovaca. 1980, 30, 139–150.

[3] Fridy, J.A. On statistical convergence. Analysis. 1985, 5, 301–313.

[4] Connor, S. The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. Analysis. 1988, 8, 47–63.

[5] Mursaleen, M. $\lambda$-statistical convergence. Mathematica Slovaca. 2000, 50, 111–115.

[6] Fridy, J.A., Orhan, C. Lacunary statistical convergence. Pacific Journal of Mathematic. 1993, 160, 43–51.

[7] Kolk, E. Matrix summability of statistically convergent sequences. Analysis. 1993, 13, 77–83.

[8] Balcerzak, M., Dems, K., Komisarski, A. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007, 328, 715–729.

[9] Gadjiev, A.D., Orhan, C. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2002, 32(1), 129–138.

[10] Karakuş, S., Demirci, K., Duman, O. Equi-statistical convergence of positive linear operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008, 339, 1065–1072.

[11] Srivastava, H.M., Mursaleen, M., Khan, A. Generalized equi-statistical convergence of positive linear operators and associated approximation theorems. Mathematical and Computer Modelling. 2012, 55(9-10), 2040–2051.

[12] Aktuğlu, H., Gezer, H. Lacunary equistatistical convergence of positive linear operators. Central European Journal of Mathematics. 2009, 7, 558–567.

[13] Aktuğlu, H., Özarslan, M.A., Gezer, H. A-equistatistical convergence of positive linear operators. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010, 12 (1), 24–36.

[14] Aktuğlu, H. Korovkin type approximation theorems proved via $\alpha\beta$-statistical convergence. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014, 259, 174–181

[15] Zadeh, L.A. Fuzzy sets. Information and Control. 1965, 8, 29–44.

[16] Matloka, M. Sequence of fuzzy numbers. BUSEFAL. 1986, 28, 28–37.

[17] Nuray, F., Savaş, E. Statistical convergence of fuzzy numbers. Mathematica Slovaca. 1995, 45(3), 269–273.

[18] Nuray, F. Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems. 1998, 99(3), 353–355.

[19] Mursaleen, M., Srivastava H.M., Sharmad, S.K. Generalized statistically convergent sequences of fuzzy numbers. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2014, 26, 1909–1917.

[20] Karakaş, A., Altın, Y., Altınok, H. On generalized statistical convergence of order $\beta$ of sequences of fuzzy numbers. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2014, 26, 1909–1917.

[21] Aytar, S., Mammadov, M., Pehlivan, S. Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems. 2006, 157(7), 976–985.

[22] Aytar, S. Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers. Information Sciences. 2004, 165, 129–138.

[23] Savaş, E. On strongly $\lambda$-summable sequences of fuzzy numbers. Information Sciences. 2000, 125(14), 181–186.

[24] Gong, Z., Zhang, L., Zhu, X. The statistical convergence for sequences of fuzzy-number-valued functions. Information Sciences. 2015, 295, 182–195,

[25] Karaisa, A., Kadak, U. On $\alpha\beta$-Statistical Convergence for Sequences of Fuzzy Mappings and Korovkin Type Approximation Theorem. Filomat. 2017, 31(12), 3749–3760

[26] Korovkin, P.P. On convergence of linear positive operators in the space of continuos functions. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1953, 90, 961–964.

[27] Goetschel, R., Voxman, W. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems. 1986, 18, 31–43.

[28] Bede, B. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013, 65–170.

[29] Li, H., Wu, C. The integral of a fuzzy mapping over a directed line. Fuzzy Sets and Systems. 2007, 158, 2317–2338.

[30] Fang, J.-X., Huang, H. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems. 2004, 147, 417–415.

[31] Anastassiou, G.A. On basic fuzzy Korovkin theory. Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica. 2005, 50, 3–10.

[32] Anastassiou, G.A., Duman, O. Statistical fuzzy approximation by fuzzy positive linear operators. Computers and Mathematics with Applications. 2008, 55, 573–580.

[33] Mohiuddine, S.A., Hazarika, B., Alotaibia, A. On statistical convergence of double sequences of fuzzy valued functions. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2017, 32, 4331–4342

**ÖZGEÇMİŞ**

| | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | : | Yasin Özalp |
| Doğum Yeri ve Yılı | : | Manisa, 1991 |
| Yabancı Dili | : | İngilizce |
| E-posta | : | yasin.zalp@gmail.com |

**Eğitim Durumu**

| | | |
|---|---|---|
| Lise | : | Muradiye Lisesi, 2009 |
| Lisans | : | Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015 |
| Yüksek Lisans | : | Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2019 |