T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

TRANSFORMASYON GRAFLARIN PAKETLEME BOYAMA SAYISI

Huriye Büşra DÖRTOK

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN

MANİSA–2019

Huriye Büşra
DÖRTOK

TRANSFORMASYON GRAFLARIN PAKETLEME BOYAMA SAYISI

2019

TEZ ONAYI

Huriye Büşra DÖRTOK tarafından hazırlanan **"Transformasyon Grafların Paketleme Boyama Sayısı"** adlı tez çalışması 25/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Şahlar MEHERREM** Yaşar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Huriye Büşra DÖRTOK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{G}$	Graf
$\boldsymbol{V(G)}$	G Grafının Tepeler Kümesi
$\boldsymbol{E(G)}$	G Grafının Ayrıtlar Kümesi
$\boldsymbol{deg(u)}$	u Tepesinin Derecesi
$\boldsymbol{d(u,v)}$	u ile v Arası Uzaklık
$\boldsymbol{e(v)}$	v Tepesinin Dışmerkezliği
$\boldsymbol{diam(G)}$	G Grafının Çapı
$\boldsymbol{K_n}$	n Tepeli Tam Graf
$\boldsymbol{C_n}$	n Tepeli Çevre Graf
$\boldsymbol{P_n}$	n Tepeli Yol Graf
$\boldsymbol{W_n}$	n Tepeli Tekerlek Graf
$\boldsymbol{K_{1,n-1}}$	n Tepeli Yıldız Graf
$\boldsymbol{\alpha(G)}$	G Grafının Bağımsızlık Sayısı
$\boldsymbol{\beta(G)}$	G Grafının Örtü Sayısı
$\boldsymbol{\chi(G)}$	G Grafının Boyama Sayısı
$\boldsymbol{\chi_p(G)}$	G Grafının Paketleme Boyama Sayısı
$\boldsymbol{G^{xyz}}$	Transformasyon Graf

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLO DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN' a, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli eşim Adem DÖRTOK' a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan babam H. Tayfun ÖZEN, annem Dilay ÖZEN ve kardeşlerim Esra ve Kübra ÖZEN'e yürekten teşekkür ederim.

Huriye Büşra DÖRTOK
Manisa, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Transformasyon Grafların Paketleme Boyama Sayısı

Huriye Büşra DÖRTOK

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Derya DURGUN

Graflarda boyama probleminin temelleri 1852'de Francis Guthrie tarafından atılmıştır. Uygulamada harita üzerindeki komşu şehirlerin farklı renklerle boyanması en yaygın örneğidir. Bu örneğin graftaki karşılığı komşu tepelerin farklı renklerle boyanmasıdır. Benzer şekilde bitişik ayrıtların farklı renklerle boyanması ile de ayrıt boyama tanımlanır. Bu tür boyama klasik boyama olarak adlandırılır. Bir grafın tepe ve ayrıtlarının klasik boyanmasına indirgenemeyen pek çok problem için klasik olmayan boyama modelleri tanımlanmıştır. Her boyama modeli için çözümün en iyisi ve geçerliliği üzerine çeşitli kurallar vardır. Bu tezde, klasik boyama problemi modeli üzerine tanımlanmış olan paketleme boyama üzerine çalışılmıştır. Paketleme boyama problemi NP sınıfından olduğundan hesaplama yapmak oldukça zordur. Bu çalışmada, bazı özel graf sınıflarının transformasyon grafları elde edilmiş ve bunların paketleme boyama sayıları genelleştirilmeye çalışılmıştır. Çalışmanın tamamında, bağlantılı, basit ve yönsüz graflarla çalışılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde Graf Teorinin ortaya çıkışı olan Königsberg Köprülerinden bahsedilmiştir. Daha sonra Graf Teorinin ilk teoremi olan El Sıkışma Teoremine değinilmiştir. Ardından dört renk problemi anlatılmış ve paketleme boyama probleminin ortaya çıkış şeklinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Üçüncü bölümde, paketleme boyama sayısı tanımı verilmiş ve transformasyon graflar açıklanmıştır. Bu bölümde, bir transformasyon grafın paketleme boyama sayısının bulunuşu örnek olarak verilmiştir. Dördüncü bölümde, G grafı yol, çevre, tekerlek, tam ve star graflar olmak üzere G^{---}, G^{+--}, G^{-+-} ve G^{++-} transformasyon graflarının paketleme boyama sayıları teoremler ile ifade edilmiş ve ispatları verilmiştir. Bu bölümün sonunda, çalışmaya ait sonuçlar bir tablo halinde verilmiştir. Beşinci ve en son bölümde ise yapılan çalışma öneriler ile birlikte değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Boyama, Paketleme Boyama, Transformasyon Graf

2019, 75 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

On The Packing Chromatic Number Of Transformation Graphs

Huriye Büşra DÖRTOK

Manisa Celal Bayar University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Derya DURGUN

The foundations of the coloring problem in graphs were laid by Francis Guthrie in 1852. In practice, the most common example of coloring is coloring the neighbor cities on the map with different colors. This corresponds to assignment of different colors to adjacent vertices. Similarly, the coloring of adjacent edges with different colors is also described. This type of coloring is called classical coloring. Non-classical coloring models have been described for many problems that cannot be reduced to the classical coloring of the vertex and edges of a graph. There are various rules for the best and validity solution for each coloring models. In this thesis, packing coloring which is defined on classical coloring problem model has been studied. It is very difficult to make a calculation because the packing coloring problem is NP class. In this study, transformation graphs of some special graph classes is obtained and their packing coloring numbers is tried to be generalized. Throughout the study simple, undirected and connected graphs are studied.

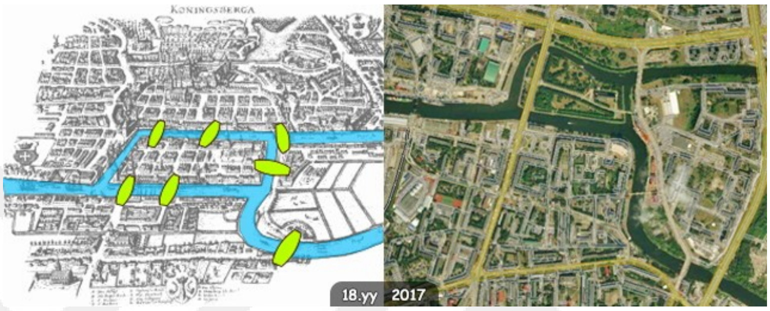
This thesis consists of five chapters. In the first chapter, Königsberg bridges, which are emergence of the graph theory, are mentioned and the history of the Graph Theory are mentioned. Then, the first theorem of graph theory, (the handshake theorem) is given. Then, The four color problem and of packing coloring problem is mentioned. In the second chapter, the basic definations and theorems used in the thesis are given in details. In the third chapter, the defination of transformation graphs and the packing coloring number is given. In this section, the example of the packing coloring number of a transformation graph is given. In the Fourth chapter, Packing chromatic number of G^{---}, G^{+--}, G^{-+-} and G^{++-} transformation graphs, where G, path, cycle, wheel, complete and star graphs, are given by theorem and their proofs. At the end of the chapter, the results of the study are given as a table. In the fifth chapter, the study is evaluated with suggestions.

Keywords: Coloring, Packing Coloring, Transformation Graph

2019, 75 pages

1. GİRİŞ

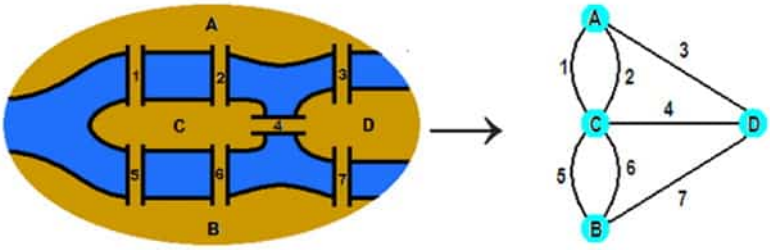
Graf Teorinin temellerini 18. yüzyılda Königsberg köprülerinden ilham alınarak ortaya atılan bir matematik problemi oluşturmuştur. Königsberg kentinde Eski ve Yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregel nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler, şehri dört bölüme ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır. Merak edilen ise bütün köprülerden bir ve yalnız bir defa geçmek koşuluyla bir yürüyüş yapılabilir mi?



Şekil 1.1. Königsberg'in Köprüleri

Bu sorunun cevabı 1736'da Leonhard Euler tarafından verilmiştir. Euler çözümü yaparken köprüleri yürümek yerine problemi kağıt ve kalemle çözmeyi denemiştir. Nehrin iki yakasını ve adaları birer nokta yani tepe ile köprüleri de çizgi yani ayrıt ile göstererek köprüleri graf ile modellemiştir. Bu graf Şekil 1.2'de verilmiştir. Yararlandığı kavramlardan biri de bir tepede bitişik ayrıtların sayısı yani o tepenin derecesi olmuştur. Euler'in teorisine göre bir şehirdeki köprülerin her birinin üzerinden yalnızca bir kez geçilebilmesi için en fazla iki noktanın derecesinin tek olması gerekmektedir. Fakat Königsberg köprüsünü temsil eden grafı incelediğimizde her bir tepenin derecesinin tek olduğu görülür. Bu durum her bir köprüden bir ve yalnız bir defa geçen bir yürüyüşün yapılmasının imkansız olduğunu gösterir. Bu problemin çözümü Graf Teorinin temellerini oluşturmuştur.

Şekil 1.1 ile Königsberg köprüsünün 18. yüzyıl ve 2017 yıllarındaki hali gösterilmiştir. Günümüzde bu köprülerden beşi yıkılılarak yerine üç yeni köprü yapılmıştır.



Şekil 1.2. Königsberg Köprülerinin Graf Modeli

Bundan sonra ortaya atılan bir başka problem de “El Sıkışma Teoremi” denilen problemdir. Bir topluluktaki kişilerden bazıları el sıkışmış bazıları el sıkışmamışlardır. Bu durumda önceki problemden hareketle tek sayıda kişiyle el sıkışmış insan sayısını bulmamız gerekir. Tek sayıda kişiyle el sıkışmış insan sayısı çift sayı olmalıdır. Çünkü sonlu bir grafta derecesi tek olan tepe sayısı çifttir. Bu teorem graf teorisinin ilk teoremidir.

Graf Teori grafları inceleyen bilim dalıdır. Graf, tepeler ve bu tepeleri birbirine bağlayan ayrıtlardan oluşan bir tür ağ yapısıdır. Ağlarda iletişimin aralıksız olarak devam etmesi istenmektedir. Bu nedenle, Graf Teoride grafın güvenilirliğini ya da sağlamlığını ölçmek için pek çok parametre mevcuttur. Bunlardan en bilineni bağlantılılık (connectivity) sayısıdır. Diğer bilinen parametrelerden bazıları bütünlük (integrity), dayanıklılık (toughness), kararlılık (tenacity), baskınlık (domination) dır. Yine Graf Teoride yer alan önemli bir problem türü graf boyama (coloring) problemidir.

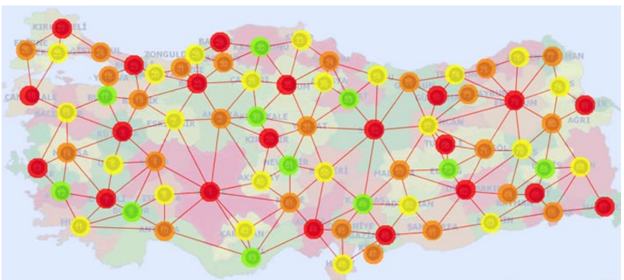
Graf Teorinin günlük hayatta, pek çok alanda sayısız uygulamaları mevcuttur. Bu nedenle, karşımıza farklı Graf Teori problemleri çıkar. Bunlardan bazıları, en kısa yol problemi, gezgin satıcı problemi ve dört renk problemidir. Bu çalışma, boyamanın bir türü olan paketleme boyama üzerine olduğu için boyamanın ortaya çıkışı olan dört renk problemi hakkında bilgiler aşağıda verilmiştir.

Graf boyamanın kökenleri 1852 yılına dayanmaktadır. De Morgan arkadaşı olan Hamilton’a, bir mektup yazarak öğrencilerinden birinin, İngiltere idari haritasının ilçelerinin, komşu her ilçe farklı renk ile boyanmak koşulu ile sadece 4 renk kullanarak boyanabileceğini gözlemlediği bilgisini vermiştir. Daha teorik olarak, mektupta ortaya konulan problem aşağıdaki gibidir:

Düz bir yüzeyde herhangi bir haritayı boyamak için kullanılması gereken en az renk nedir?

Bu problem 1878 yılında Cayley tarafından bir bulmaca olarak yayınlanmıştır. İlk ispat 4 renk problemi olarak Kempe tarafından sunulmuştur. Kempe'nin makalesinin yayınlanmasından sonraki on yıl için 4 renk problemi çözülmüş olarak kabul edilmiştir. Aradan geçen onca süreden sonra Heawood, Kempe'nin ispatında çok ciddi bir hata keşfetti. Heawood makalesinde Kempe'nin ispat tekniğinin her haritayı 4 renk ile boyamak şeklinde genelleştirilemeyeceğini bir örnek ile göstermiş ve Kempe'nin ispat tekniği ile 5 renk kullanarak her haritanın boyanabileceğini gösterdi. 1913 yılında Birkhoff, belli yapılandırmalarla haritanın bir kısmının 4 renk ile boyanabilmesinin tüm haritanın 4 renk ile boyanabileceği anlamına geldiğini göstermiştir. Bu indirgenebilirlik fikri, teoremin nihai ispatı için oldukça önemlidir. 1876 yılında Appel ve Haken ispatı tamamlayıp yayınlamışlardır. Fakat ispat, gelişen teknoloji ile birlikte bilgisayar yardımı ile çözülmüştür. Bu durum matematik dünyasını ikiye ayırmıştır. Bir kısım matematikçiler bilgisayar yardımı ile yapılan bu ispatı kabul ederken, bir kısım matematikçiler ise ispat geleneksel yollar ile yapılmadığı için kabul etmemektedirler. Fakat günümüzde hala daha bilgisayar kullanmadan bu problemin çözümüne ulaşılamamaktadır.

Aşağıda Türkiye'nin şehirlerinin 4 renk kullanılarak boyanması gösterilmiştir.



Şekil 1.3. Türkiye'nin Şehirlerinin 4 Renk ile Boyanması

Birleştirilmiş bir grafın tepe ve ayrıtlarının klasik boyanmasına indirgenemeyen pek çok problem için daha genel olan klasik olmayan boyama modelleri tanımlanmıştır. Genellikle bir grafın boyanması grafın tepelerine, ayrıtlarına, düzlemsel grafın yüzeylerine veya bunların herhangi bir kombinasyonlarına renk atamaktan ibarettir. Her bir boyama modelinin en iyi çözümü için çeşitli kurallar mevcuttur. Klasik olmayan boyama modelleri her bir elemana birden fazla renk kullanmanın mümkün olabildiği, renkleri parçalara veya bölgelere bölmeye müsaade eden ilave şartlar getirirler [10].

Genel olarak, literatürde anlatılan birkaç düzine graf boyama modeli vardır. Bunlara klasik boyama (classical coloring), liste boyama (list coloring), yol boyama (path coloring), T-boyama (T-coloring), dairesel boyama (circular coloring), güçlü boyama (strong coloring), paketleme boyama (packing coloring) örnek verilebilir. Graf boyama modellerinden birçoğu tepe boyama ve ayrıt boyama ile ilgilenirler. Fakat bazıları sadece tepe boyama veya sadece ayrıt boyamayı tanımlarlar [10].

Graf boyama günümüzde pek çok alanda kullanılmaktadır. Bunlara örnek olarak harita boyama, ders veya sınav programı ayarlama, işlemcilerin işlem sırasını belirleme, uçakların iniş ve kalkış saatlerini düzenleme verilebilir.

Literatürde anlatılan graf boyama modellerinden biri de paketleme boyama problemidir. Paketleme boyama probleminin ortaya çıkış şekli aşağıda verilmiştir.

USA Federal İletişim Komisyonu, radyo istasyonlarına frekans atanmasına ilişkin çok sayıda kural ve düzenleme yayınlamıştır. Özellikle, aynı yayın frekansına sahip iki radyo istasyonu için birbirlerinin yayınlarını kesmemesi açısından birbirlerinden uzak konumlandırılması gerekmektedir. Aynı yayın frekansına sahip iki istasyonun aralarındaki coğrafi uzaklık yayın sinyalinin gücüyle doğrudan ilişkilidir [9].

Frekans ve kanal atama düzenlemeleri pek çok farklı graf boyama problemi için ilham kaynağı olmuştur. 2006 yılında Dunbar ve arkadaşları yayın boyama (broadcast coloring) tanımını vermiştir [7]. 2008 yılında ise Goddard ve arkadaşları yayın boyama sayısı adı altında paketleme boyama sayısı tanımını vermişlerdir [9].

Bu çalışmada, basit, yönsüz ve bağlantılı özel grafların transformasyon grafları ele alınmıştır. Bu grafların paketleme boyama sayıları için genel sonuçlar elde edilip, ispatları ile birlikte verilmiştir. Bu tez çalışması ile literatürde eksik olduğu görülen bazı grafların transformasyon graflarının paketleme boyama sayıları verilerek daha sonra yapılacak olan çalışmalara yol gösterici olması hedeflenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1: Bir G grafında V ile gösterilen sonlu boş olmayan kümeye tepe (vertex) kümesi ve V tepesinin 2-elemanlı alt kümesi olan ve E ile gösterilen kümeye de ayrıt (edge) kümesi denir. Bir grafta ayrıt kümesi boş olabilir. Tepeler bazen nokta veya düğüm olarak, ayrıtlar da bazen kenar veya bağlantı olarak gösterilebilir. Bu çalışmada tepe ve ayrıt olarak kullanılmıştır. Bir G grafında V tepeler kümesi ve E ayrıtlar kümesi $G = (V, E)$ olarak yazılır. Bazen V, $V(G)$ ve E de $E(G)$ olarak gösterilebilir. G grafının her $\{u, v\}$ ayrıtı genellikle uv veya vu olarak gösterilir [4].

Tanım 2.2: uv, G grafının ayrıtı ise u ve v tepeleri bitişiktir (adjacent) denir. İki bitişik tepe birbirleriyle komşudur. İki komşu tepe birbirinin komşuluğundadır. v tepesinin komşularının kümesi v'nin açık komşuluğudur (daha basit ifadeyle v'nin komşuluğu) ve $N_G(v)$ veya $N(v)$ ile gösterilir. $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ ise v tepesinin kapalı komşuluğudur. uv ve vw, G grafının farklı iki ayrıtları ise uv ve vw ayrıtları bitişiktir denir. u tepesi ve uv ayrıtı birbirleriyle ilişkilidir (incident) denir. Aynı şekilde v ve uv de ilişkilidir [4].

Tanım 2.3: Bir ayrıt bitiş tepesi ile ilişkili ise o ayrıta sarkık ayrıt (pendant edge) denir [4].

Tanım 2.4: Bir G grafında v tepesinin derecesi G grafındaki v tepesinin komşu olduğu tepelerin sayısıdır. Böylece, v tepesinin derecesi onun $N(v)$ komşuluğundaki tepelerin sayısıdır. Aynı şekilde v tepesinin derecesi, v tepesinin ilişkili olduğu ayrıtların sayısıdır. v tepesinin derecesi $deg_G(v)$ veya $deg(v)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.5: Bir G grafındaki u ve v tepeleri (farklı olmaları gerekmiyor) için G grafındaki W $u - v$ yürüyüşü (walk) , u ile başlayıp v ile biten öyle ki G grafındaki ardışık tepeler G grafında komşudur. G grafındaki bir W yürüyüşü $0 \leq i \leq k-1$, $v_i v_{i+1} \in E(G)$ için $W = (u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$ yi ifade eder. (W yürüyüşü genellikle $W: u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$ ile gösterilir.) Bir G grafındaki yürüyüşte hiçbir ayrıt tekrar edilmezse buna G grafında zincir (trail) denir. Eğer G grafındaki yürüyüşte hiçbir tepe tekrar edilmezse buna yol (path) denir. Bir G grafındaki her u ve v tepe çifti için bir $u - v$ yolu mevcut ise grafa bağlantılıdır (connected) denir[4].

Tanım 2.6: Bağlantılı bir G grafında u tepesinin v tepesine uzaklığı (distance) G grafındaki en kısa mesafeli $u - v$ yoludur. $d_G(u, v)$ ile veya $d(u, v)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.7: Bağlantılı bir G grafındaki bir v tepesinin dış merkezliği (eccentricity) v tepesinden en uzak olan tepenin uzaklığıdır ve $e(v)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.8: Bağlantılı bir G grafındaki tepeler arasında en büyük dış merkezliğine G grafının çapı (diameter), en küçük dış merkezliğine yarıçapıdır (radius) denir. Sırasıyla $diam(G)$, $rad(G)$ şeklinde gösterilirler [4].

Tanım 2.9: G_1 ve G_2 ayrık tepe kümeleri olan iki graf olsun. G_1 ve G_2 graflarının $G = G_1 + G_2$ birleşimi, $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ tepe kümesine ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ ayrıt kümesine sahiptir [4].

Tanım 2.10: Bütün tepelerin birbirine komşu olduğu grafa tam graf (complete graph) denir ve K_n ile gösterilir [4].

Tanım 2.11: $n \geq 3$ olmak üzere, n tepeli, n ayrıtlı ve $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ile etiketlenen tepeler ve $i = 1,2, \ldots, n-1$ için v_1v_n ve v_iv_{i+1} ayrıtlarından meydana gelen grafa çevre graf (cycle graph) denir ve C_n ile gösterilir [4].

Tanım 2.12: $n \geq 4$ için n tepeli W_n tekerlek grafı $C_{n-1} + K_1$ gibi tanımlanan 1 tepeli K_1 tam grafı ile $n - 1$ tepeli C_{n-1}çevre grafının birleşimidir [8].

Tanım 2.13: $n \geq 1$ olmak üzere, n adet tepeli, $n - 1$ ayrıtlı ve $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ile etiketlenen tepeler ve $i = 1,2, \ldots, n-1$ için v_iv_{i+1} ayrıtlarından meydana gelen grafa yol graf (path graph) denir ve P_n ile gösterilir [4].

Tanım 2.14: Eğer $V(G)$, U ve W kümesi şeklinde iki parçaya ayrılabilirse, G grafı iki parçalı tam graftır. Bu nedenle, $u \in U$ ve $w \in W$ ancak ve ancak uw, G grafının bir ayrıtıdır. Eğer $|u| = s$ ve $|w| = t$ ise bu iki parçalı tam graf $s + t$ tepe ve st ayrıta sahiptir ve $K_{s,t}$ (veya $K_{t,s}$) ile gösterilir. $K_{1,t}$ iki parçalı tam grafına star graf da denir [4].

Tanım 2.15: Bir G grafındaki tepelerin U kümesi için eğer U kümesindeki iki tepe komşu değilse bağımsızdır. G grafının bağımsız kümelerindeki tepelerin maksimum sayısına tepe bağımsızlık sayısı veya daha basitçe bağımsızlık sayısı (independent number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.16: Bir G grafında, bir tepe ve bir ayrıt ilişkili iseler birbirlerini örterler (cover each other) denir. G grafında, grafın bütün ayrıtlarını örten tepeler kümesine G grafının bir tepe örtüsü (vertex cover) denir. G grafının, bütün tepelerini örten ayrıtlar kümesine grafın bir ayrıt örtüsü (edge cover) denir. Grafın tepe örtü kümelerinin minimum eleman sayısına grafın tepe örtü sayısı (vertex covering number) denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, ayrıt örtü kümelerinin minimum eleman sayısına grafın ayrıt örtü sayısı (edge covering number) denir ve $\beta'(G)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.17: Bir G grafında her bir tepeye bir renk atanmasına grafın bir tepe boyaması (vertex coloring) denir. Bitişik olan tepeleri farklı renk ile boyamaya uygun tepe boyama (proper vertex coloring) denir. Renkler herhangi bir kümenin elemanı olacağından renkler için genellikle k bir pozitif tam sayı olmak üzere $1,2,\ldots,k$ şeklinde pozitif tamsayılar kullanılır. Bir uygun boyama, kısaca boyama, u ve v tepeleri G grafında bitişik ise $c(u) \neq c(v)$ olacak şekilde bir $c: V(G) \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$, pozitif tamsayılar kümesi olmak üzere) fonksiyonu olarak göz önüne alınabilir. Eğer verilen k rengin her biri kullanılmış ise, bu taktirde boyamaya $k - boyama$ (k-coloring) denir. Bir $k - boyama$ da $1,2,\ldots,k$ renklerinin kullanıldığı kabul edilir. Bir G grafı k renk ile boyanabiliyorsa grafa $k - boyanabilir$ (k-colorable) denir. Diğer bir deyişle, G grafının bir $k - boyaması$ mevcut ise G, $k - boyanabilirdir$. $k - boyanabilir$ bir G grafı için en küçük pozitif tamsayıya G grafının boyama sayısı (chromatic number) denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir [4].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Paketleme Boyama Sayısı

Dunbar ve arkadaşları, eğer her $u \in V$ için

i) $b(u) \leq e(u)$ ve

ii) $b(v) > 0$ ve $d(u, v) \leq b(u)$ olmak üzere $b(u) = 0$ ise bir $v \in V$ tepesi mevcuttur şeklinde bir $b: V \rightarrow \{0,1, \dots\}$ fonksiyonunu bir baskın yayını fonksiyonu (dominating broadcast) olarak tanımlamışlardır [5]. Paketleme boyama terimi sonradan Bresar ve arkadaşları [2] tarafından tasarlanmıştır. Paketleme boyama sayısının belirlenmesi hesaplama açısından zordur. Genel graflar için paketleme boyama sayısının hesaplanmasının NP-zor olduğu Goddard tarafından gösterilmiştir [9].

Tanım 3.1: Aşağıdaki kısıtlamalara göre bir G grafındaki tepe kümelerinin $X_1, X_2, \dots, X_k$ ayrık tepelere bölünmesi istenir. Her bir X_i renk sınıfı bir $i-paketleme$ olmalıdır yani herhangi iki farklı $u, v \in X_i$ tepe çifti $d(u, v) > i$ şartını sağlayacak şekilde tepelerin bir kümesi olmalıdır. Burada, $d(u, v)$, u ve v tepeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğudur. Bu şekilde k sınıfa parçalanış, X_i 'lerden bazıları boş olsa bile bir $k - boyama\, paketleme$ (packing k-coloring) olarak adlandırılır. G grafının bir $k - boyama\, paketlemesi$ mevcut iken bu en küçük k tamsayısına G grafının paketleme boyama sayısı (packing chromatic number) denir ve $\chi_p(G)$ ile gösterilir [7].

Önerme 3.1: G grafının çapı 2 ise her G grafı için

$$\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1 \tag{3.1}$$

eşitliği sağlanır [9].

Teorem 3.1: n tepeli bir G grafı için,

$$\alpha(G) + \beta(G) = n \tag{3.2}$$

şeklindedir [4].

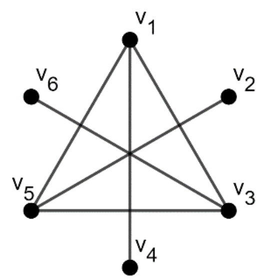
3.2. Transformasyon Graflar

Tanım 3.2.1: $G = (V(G), E(G))$ bir graf ve x, y, z $+$ veya $-$ değerini alabilen üç değişken olsun. G^{xyz} transformasyon grafı (transformation graph) tepeler kümesi $V(G) \cup E(G)$ olan ve $u, v \in V(G) \cup E(G)$ olmak üzere u ve v nın G^{xyz}de komşu olması için gerek ve yeter koşul

1. $u, v \in V(G)$ olmak üzere $x = +$ ise u ve v G grafında komşudur; $x = -$ ise G grafında komşu değildir.
2. $u, v \in E(G)$ olmak üzere $y = +$ ise u ve v G grafında komşudur; $y = -$ ise G grafında komşu değildir.
3. $u \in V(G)$, $v \in E(G)$ olmak üzere $z = +$ ise u ve v , G grafında ilişkilidir; $z = -$ ise u ve v , G grafında ilişkili değildir [1].

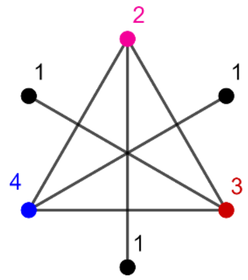
Bir transformasyon grafın paketleme boyama sayısının nasıl bulunduğuna dair bir örnek aşağıda verilmiştir. Örnekte tam grafın transformasyon grafı kullanılmış olup tanım gereği transformasyon grafın tepeleri tam grafın tepe ve ayrıtlarından oluşmaktadır. Transformasyon grafın tepeleri, K_3 grafındaki tepeler v_1, v_3 , v_5 ve ayrıtlar $v_2 = v_1v_3$, $v_4 = v_3v_5$, $v_6 = v_1v_5$ olmak üzere etiketlenmiştir. Etiketleme Şekil 3.1 ile gösterilmiştir.

Örnek 3.1: K_3 tam grafının, K_3^{+--} transformasyon grafının paketleme boyama sayısı aşağıdaki gibi bulunur:



Şekil 3.1. K_3^{+--} grafı

K_3^{+--} grafının paketleme boyama sayısını bulmak için ilk önce 1 uzaklıklı tepeler birinci renk ile boyanmalıdır. Bu boyama yapılırken bağımsızlık sayısı dikkate alınmalıdır. $\alpha(K_3^{+--}) = 3$ olduğundan 3 adet tepe birinci renk ile boyanır. Birinci renk ile boyama bittikten sonra ikinci renge geçilir. $diam(K_3^{+--}) = 2$ olduğundan iki tepe arası uzaklık çaptan fazla olamaz. Bu nedenle, ikinci renk ile sadece bir tepe boyanır. Aynı şekilde diğer tepeler de üçüncü ve dördüncü renk ile boyanır. Sonuç olarak paketleme boyama sayısı 4 olur. K_3^{+--} grafının dört renk ile paketleme boyamasına bir örnek Şekil 3.2 ile verilmiştir.



Şekil 3.2. $\chi_p(K_3^{+--}) = 4$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Bazı Transformasyon Grafların Paketleme Boyama Sayısı

Bir G grafının sekiz farklı transformasyon grafı mevcuttur. Bu graflar G^{---}, G^{+--}, G^{-+-}, G^{--+}, G^{++-}, G^{+-+}, G^{-++} ve G^{+++} graflarıdır. Bu tezde G^{---}, G^{+--}, G^{-+-} ve G^{++-} transformasyon grafları göz önüne alınmıştır.

4.1.1. G^{---} Transformasyon Graflarının Paketleme Boyama Sayısı

Çalışmanın bu bölümünde P_n^{---}, C_n^{---}, W_n^{---}, K_n^{---} graflarının paketleme boyama sayıları genelleştirilmiş ve teorem olarak ispatları ile birlikte verilmiştir. Ancak, $K_{1,n}^{---}$ grafı bağlantılı olmadığından bu grafın paketleme boyama sayısı bulunamamaktadır.

Teorem 4.1: P_n^{---}, $2n-1$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. P_n^{---} grafının paketleme boyama sayısı

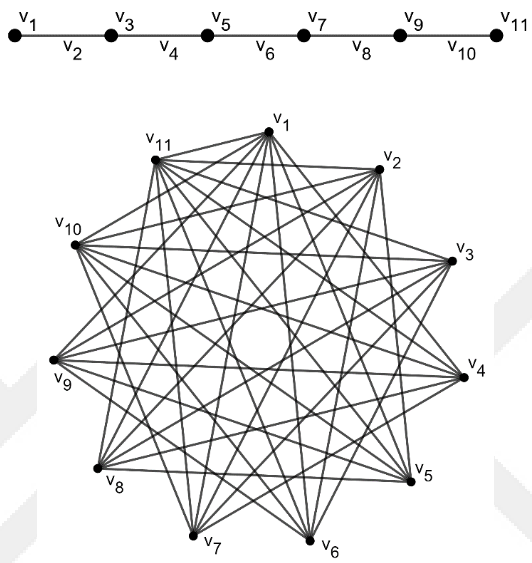
$$\chi_p(P_n^{---}) = 2n-3 \tag{4.1}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2n-1} \in V(P_n^{---})$ olsun. Burada $v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2n-1} \in V(P_n)$ ve $v_2, v_4 \ldots, v_{2n-2} \in E(P_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından $v_i, v_j \in V(P_n^{---})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, P_n^{---} grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(P_n^{---})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. P_n^{---} grafının tanımından, P_n grafındaki bir tepe, P_n grafında komşu olduğu bir tepe ile P_n^{---} grafında komşu olamaz, aynı şekilde P_n grafındaki bir tepe yine P_n grafında ilişkili olduğu bir ayrıtın P_n^{---} grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Buradan $\alpha(P_n^{---}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. P_n^{---} grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini iki farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum P_n grafının uç tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan sarkık ayrıtların P_n^{---} grafındaki karşılığı olan tepelerdir. İkinci durum ise P_n grafında ilk durumun içerisinde yer almayan tepe ve ayrıtların P_n^{---} grafındaki karşılıkları olan tepelerdir.

Şekil 4.1 ile P_6 grafı ve $P_{\boldsymbol{6}}^{---}$ grafı gösterilmiştir. Bu graflar üzerinde $P_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesine örnek teşkil etmesi açısından etiketleme yapılmıştır.



Şekil 4.1. P_6 grafı ve $P_{\boldsymbol{6}}^{---}$ grafı

Durum 1: $v_1,\ v_{2n-1} \in V(P_n^{---})$, P_n grafındaki uç tepeler ve $v_2,\ v_{2n-2} \in V(P_n^{---})$, P_n grafındaki sarkık ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin P_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2,\ d(v_1, v_3) = 2,\ d(v_1, v_4) = 1,$$

$$d(v_1, v_5) = 1, \ldots, d(v_1, v_{2n-1}) = 1 \qquad (4.2)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-1} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Benzer şekilde, P_n^{---} grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin P_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2,\ d(v_2, v_4) = 2,\ d(v_2, v_5) = 1,$$
$$d(v_2, v_6) = 1, \dots, d(v_2, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.3}$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-2} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 2: $v_3, v_4, \dots ,\ v_{2n-4}, v_{2n-3} \in V(P_n^{---})$ olsun. $v_3, v_5, \dots, , v_{2n-3} \in V(P_n^{---})$ tepelerinden v_3 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_3, v_4) = 2,\ d(v_3, v_5) = 2,\ d(v_3, v_6) = 1,$$
$$d(v_3, v_7) = 1, \dots, d(v_3, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.4}$$

olduğu görülür. $v_3, v_5, \dots, , v_{2n-3} \in V(P_n^{---})$ tepeleri P_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

$v_4, v_6, \dots, , v_{2n-4} \in V(P_n^{---})$ tepelerinden v_4 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_4, v_5) = 2,\ d(v_4, v_6) = 2,\ d(v_4, v_7) = 1,$$
$$d(v_4, v_8) = 1, \dots, d(v_4, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.5}$$

şeklinde elde edilir. $v_4, v_6, \dots, , v_{2n-4} \in V(P_n^{---})$ tepeleri P_n grafında aynı özelliklere sahiptir. Dolayısıyla, uzaklıklar benzer şekilde elde edilir.

Böylece, Durum 1 ve Durum 2'den $diam(P_n^{---}) = 2$ olarak bulunur. $diam(P_n^{---}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(P_n^{---})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, P_n^{---} grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 4 + 1 \tag{4.6}$$

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 3 \tag{4.7}$$

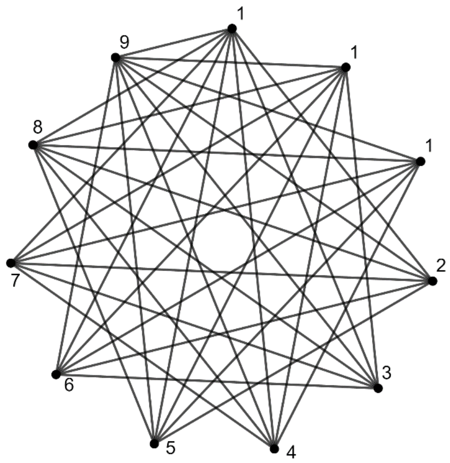
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda, $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 3$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2n - 4$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 4$ renk ile yapılabilir. $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3$ olduğundan $P_{\boldsymbol{n}}^{---}$grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 4 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2n - 3$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.2 ile $P_{\boldsymbol{6}}^{---}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.2. $\chi_p(P_6^{---}) = 9$

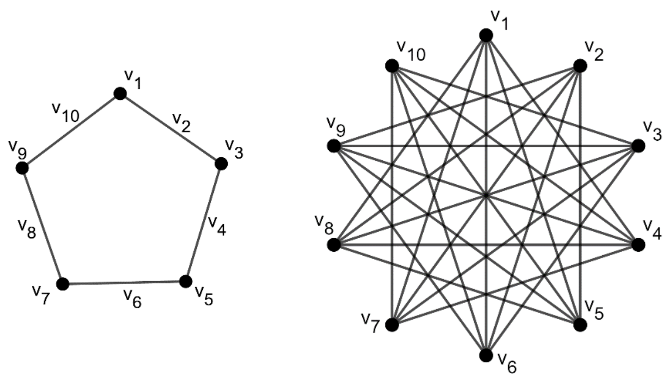
Teorem 4.2: $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$, $2n$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(C_n^{---}) = 2n - 2 \tag{4.8}$$

olur.

İspat:
$v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{---})$ olsun. Burada $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n)$ ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in E(C_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(C_n^{---})$ olmak üzere, $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{---})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının tanımından, C_n grafındaki bir tepe, C_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında komşu olamaz, aynı şekilde ilişkili olduğu bir ayrıt ile $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında o ayrıtın karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Buradan $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için, C_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir.

Şekil 4.3 ile C_5 grafı ve C_5^{---} grafı gösterilmiştir. Bu graflar üzerinde $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesine örnek teşkil etmesi açısından etiketleme yapılmıştır.



Şekil 4.3. C_5 grafı ve C_5^{---} grafı

$v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n^{---})$, C_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{---})$ C_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin C_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 1, \dots,$$

$$d(v_1, v_{2n-2}) = 1\ d(v_1, v_{2n-1}) = 2, d(v_1, v_{2n}) = 2 \tag{4.9}$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n^{---})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Benzer şekilde, C_n^{---} grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin C_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 1, \dots,$$

$$d(v_2, v_{2n-2}) = 1, d(v_2, v_{2n-1}) = 1, d(v_2, v_{2n}) = 2 \tag{4.10}$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{---})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, $diam(C_n^{---}) = 2$ olarak bulunur. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(C_n^{---})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, C_n^{---} grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 3 + 1 \tag{4.11}$$

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 2 \tag{4.12}$$

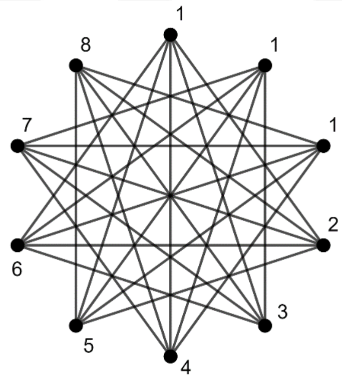
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 2$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2n - 3$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 3$ renk ile yapılabilir. $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3$ olduğundan $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 3 + 1 = 2n - 2$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2n - 2$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.4 ile $C_{\boldsymbol{5}}^{---}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.4. $\chi_p(C_5^{---}) = 8$

Teorem 4.3: $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$, $3n - 2$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 5$ olsun. O halde,

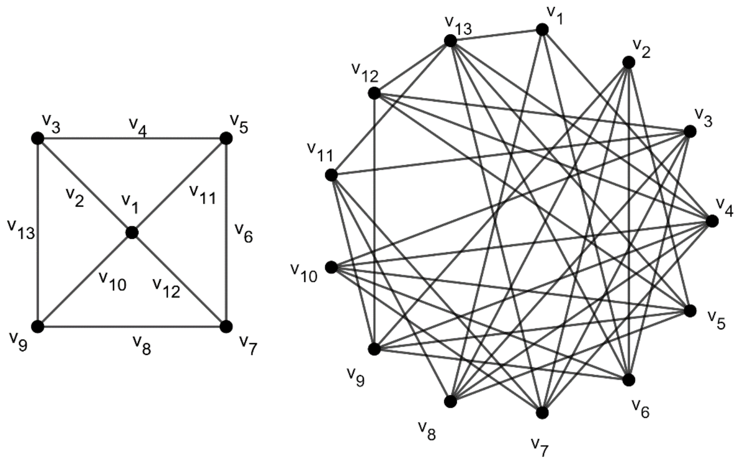
$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3n - 4 \tag{4.13}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{---})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(W_n)$, $v_2, v_4 \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in E(W_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{---})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{---})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının tanımından, W_n grafındaki bir tepe, W_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında komşu olamaz, aynı şekilde W_n grafındaki bir tepe yine W_n grafında ilişkili olduğu bir ayrıtın $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Buradan $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, W_n grafında diğer tüm tepelere komşu tepedir (bu tepe v_1 olsun). İkinci durum, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Üçüncü durum, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepelerdir. Dördüncü durum ise W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtların $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında karşılığı olan tepelerdir.

Şekil 4.5 ile W_5 grafı ve $W_{\boldsymbol{5}}^{---}$ grafı gösterilmiştir. Bu graflar üzerinde $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesine örnek teşkil etmesi açısından etiketleme yapılmıştır.



Şekil 4.5. W_5 grafı ve $W_{\mathbf{5}}^{---}$ grafı

Durum 1: $v_1 \in V(W_n^{---})$, W_n grafında tüm tepelere komşu tepe olsun. Bu tepenin W_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 2, d(v_1, v_6) = 1,$$
$$d(v_1, v_7) = 2, d(v_1, v_8) = 1, d(v_1, v_9) = 2, d(v_1, v_{10}) = 2, d(v_1, v_{11}) = 2,$$
$$d(v_1, v_{12}) = 2, d(v_1, v_{13}) = 1 \qquad (4.14)$$

şeklindedir. O halde, tüm tepelere komşu olan v_1 tepesi W_n grafında komşu olduğu tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtları karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır.

Durum 2: $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots,\ v_{3n-2} \in V(W_n^{---})$, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_2 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 1, d(v_2, v_7) = 1,$$
$$d(v_2, v_8) = 1, d(v_2, v_9) = 1, d(v_2, v_{10}) = 2, d(v_2, v_{11}) = 2, d(v_2, v_{12}) = 2,$$
$$d(v_2, v_{13}) = 2 \qquad (4.15)$$

şeklindedir. O halde, W_n grafında v_2 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{---})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 3: $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_n^{---})$, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepeler olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_3, v_4) = 2, d(v_3, v_5) = 2, d(v_3, v_6) = 1, d(v_3, v_7) = 1, d(v_3, v_8) = 1,$$
$$d(v_3, v_9) = 2, d(v_3, v_{10}) = 1, d(v_3, v_{11}) = 1, d(v_3, v_{12}) = 1, d(v_3, v_{13}) = 2 \tag{4.16}$$

şeklindedir. O halde, W_n grafında v_3 tepesi, W_n grafında komşu olduğu tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_n^{---})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 4: $v_4, v_6, v_8, \dots, v_{2n-2} \in V(W_n^{---})$ W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtların $\boldsymbol{W_n^{---}}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_4, v_5) = 2, d(v_4, v_6) = 2, d(v_4, v_7) = 1, d(v_4, v_8) = 1, d(v_4, v_9) = 1,$$
$$d(v_4, v_{10}) = 1, d(v_4, v_{11}) = 2, d(v_4, v_{12}) = 1, d(v_4, v_{13}) = 1 \tag{4.17}$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_4, v_6, v_8, \dots, v_{2n-2} \in V(W_n^{---})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, Durum 1, Durum 2, Durum 3 ve Durum 4'den $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olarak bulunur. $diam(\mathrm{W}_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(W_n^{---})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, W_n^{---} grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 3n - 5 + 1 \tag{4.18}$$

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 3n - 4 \tag{4.19}$$

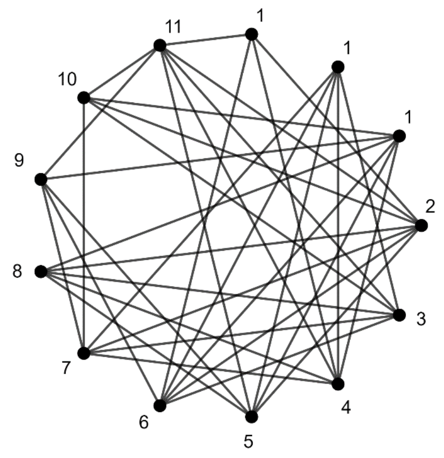
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 3n - 4$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3n - 5$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $3n - 5$ renk ile yapılabilir. $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3$ olduğundan $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $3n - 5 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 3n - 4$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.6 ile $W_{\boldsymbol{5}}^{---}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.6 . $\chi_p(W_5^{---}) = 11$

Teorem 4.4: $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$, $\frac{n^2+n}{2}$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. O halde,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = \frac{n^2-n+2}{2} \tag{4.20}$$

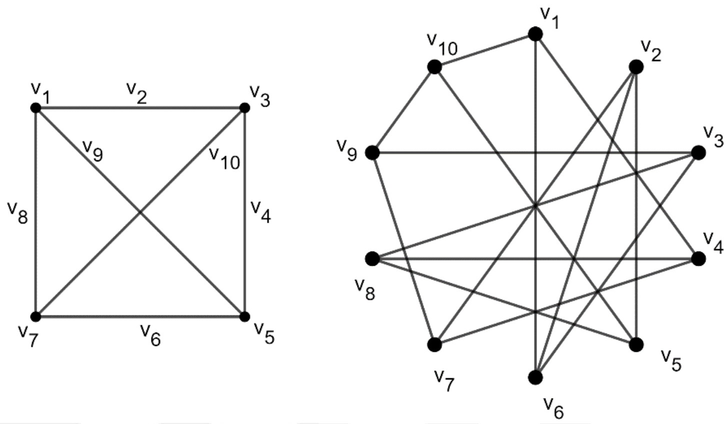
olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{---})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n)$, $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in E(K_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{---})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{---})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının tanımından, K_n grafındaki bir tepe, K_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında komşu olamaz, aynı şekilde K_n grafındaki bir tepe yine K_n grafında ilişkili olduğu bir ayrıtın $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. K_n grafı tam graf olduğundan tüm tepeleri komşudur. O halde, $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında bu tepeler komşu olamaz. Buradan $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = n$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = n$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$

grafındaki uzaklıkları bulmak için, K_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir.

Şekil 4.7 ile K_4 grafı ve $K_{\boldsymbol{4}}^{---}$ grafı gösterilmiştir. Bu graflar üzerinde $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesine örnek teşkil etmesi açısından etiketleme yapılmıştır.



Şekil 4.7. K_4 grafı ve $K_{\boldsymbol{4}}^{---}$ grafı

$v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n^{---})$, K_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{---})$, K_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin K_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2,\ d(v_1, v_3) = 2,\ d(v_1, v_4) = 1,\ d(v_1, v_5) = 2, d(v_1, v_6) = 1,$$
$$d(v_1, v_7) = 2,\ d(v_1, v_8) = 2,\ d(v_1, v_9) = 2,\ d(v_1, v_{10}) = 1 \qquad (4.21)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi, K_n^{---} grafında, K_n grafındaki tüm tepeler ile ilişkili olduğu ayrıtları karşılığı olan tepelerle 2 uzaklıklıdır. $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n^{---})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Benzer şekilde, K_n^{---} grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin K_n^{---} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 1, d(v_2, v_7) = 1,$$

$$d(v_2, v_8) = 2, d(v_2, v_9) = 2, d(v_2, v_{10}) = 2 \qquad (4.22)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi, K_n grafındaki komşu oldukları ayrıtlar ve ilişkili olduğu tepeler ile $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_4, \ldots, v_{2n}, v_{2n+1}, \ldots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{---})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olarak bulunur. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(K_n^{---})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, K_n^{---} grafının paketleme boyaması için sadece n tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq \frac{n^2+n}{2} - n + 1 \qquad (4.23)$$

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq \frac{n^2-n+2}{2} \qquad (4.24)$$

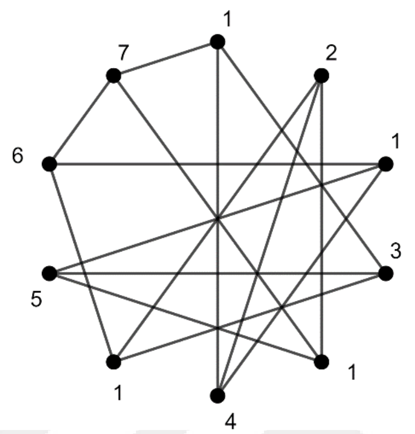
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq \frac{n^2-n+2}{2}$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = \frac{n^2-n}{2}$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $\frac{n^2-n}{2}$ renk ile yapılabilir. $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = n$ olduğundan $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafındaki n tepe birinci renk ile boyanır. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $\frac{n^2-n}{2} + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{---}) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.8 ile $K_{\boldsymbol{4}}^{---}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.8. $\chi_p(K_4^{---}) = 7$

4.1.2. G^{+--} Transformasyon Graflarının Paketleme Boyama Sayısı

Bu bölümde P_n^{+--}, C_n^{+--}, W_n^{+--}, K_n^{+--} ve $K_{1,n-1}^{+--}$ graflarının paketleme boyama sayıları genelleştirilmiştir.

Teorem 4.5: $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$, $2n-1$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$. \chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 3 \tag{4.25}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{2n-1} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(P_n)$, $v_2, v_4 \dots, v_{2n-2} \in E(P_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in$

$V(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının tanımından, P_n grafındaki bir tepe, P_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olabilir fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında o karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Aynı şekilde P_n grafındaki bir ayrıt, yine P_n grafında komşu olduğu bir ayrıt ile $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olamaz. Buradan $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, P_n grafının uç tepeleridir. İkinci durum, P_n grafının sarkık ayrıtlarıdır. Üçüncü durum, P_n grafının uç tepeler dışındaki tepeleridir. Dördüncü durum ise sarkık ayrıtlar dışındaki ayrıtlardır. İspat yapılırken $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ üzerindeki etiketlemeler $P_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafıyla aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1,\ v_{2n-1} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, P_n grafındaki uç tepeler olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_4) = 1, (v_1, v_6) = 1, d(v_1, v_8) = 1, \ldots\ d(v_1, v_{2n-2}) = 1$$

$$d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_5) = 2, d(v_1, v_7) = 2, \ldots, d(v_1, v_{2n-3}) = 2, d(v_1, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.26}$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-1} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 2: $v_2,\ v_{2n-2} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, P_n grafındaki sarkık ayrıtlar olsun. v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin P_n^{+--} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2,v_3)=2,\, d(v_2,v_5)=1,\, d(v_2,v_7)=1,\ldots,\, d(v_2,v_{2n-3})=1,$$

$$d(v_2,v_{2n-1})=2,\; d(v_2,v_4)=2,\, d(v_2,v_6)=1,$$

$$d(v_2,v_8)=1,\ldots,\, d(v_2,v_{2n-2})=1 \qquad (4.27)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-2} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 3: $v_3, v_{5,} \ldots, v_{2n-3} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, P_n grafının uç tepeler dışındaki tepeleri olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin P_n^{+--} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_3,v_4)=2,\, d(v_3,v_6)=1,\, d(v_3,v_8)=1,\ldots,\, d(v_3,v_{2n-2})=1$$

$$d(v_3,v_5)=2,\, d(v_3,v_7)=2,\, d(v_3,v_9)=2,\ldots,\, d(v_3,v_{2n-1})=2$$

$$(4.28)$$

şeklindedir. O halde, v_3 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_3, v_{5,} \ldots, v_{2n-3} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 4: $v_4, v_6 \ldots, v_{2n-4} \in V(P_n^{+--})$, P_n grafının sarkık ayrıtlar dışındaki ayrıtları olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin P_n^{+--} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_4,v_5)=2,\, d(v_4,v_6)=2,\, d(v_4,v_7)=1,\, d(v_4,v_8)=1,$$

$$d(v_4,v_9)=1,\ldots,\, d(v_4,v_{2n-1})=1 \qquad (4.29)$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_4, v_6 \ldots, v_{2n-4} \in V(P_n^{+--})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, yukarıdaki dört durumdan $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})=2$ olarak bulunur. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{+--})=2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(P_n^{+--})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, P_n^{+--} grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 4 + 1 \tag{4.30}$$

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 3 \tag{4.31}$$

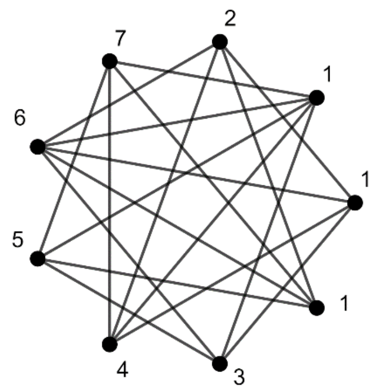
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 3$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 4$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 4$ renk ile yapılabilir. $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 3$ olduğundan $P_{\boldsymbol{n}}^{+--}$grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 4 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 3$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.9 ile P_5^{+--} grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.9. $\chi_p(P_5^{+--}) = 7$

Teorem 4.6: $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$, $2n$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(C_n^{+--}) = 2n - 2 \tag{4.32}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{+--})$ olsun. Burada $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n)$, $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in E(C_n)$ dir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(C_n^{+--})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının tanımından, C_n grafındaki bir tepe, C_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Aynı şekilde C_n grafındaki bir ayrıt, yine C_n grafında komşu olduğu bir ayrıt ile $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olamaz. Buradan $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için, C_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki karşılığı olan tepelerinin birbirine olan uzaklıklarını bulmak gerekir. Bu ispatta $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

$v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, C_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_6) = 1, \dots, d(v_1, v_{2n-2}) = 1, d(v_1, v_{2n}) = 2$$

$$d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_5) = 2, \dots, d(v_1, v_{2n-3}) = 2, d(v_1, v_{2n-1}) = 1 \quad (4.33)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Benzer şekilde, $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_5) = 1, , \dots, d(v_2, v_{2n-1}) = 1,$$

$$d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_6) = 1, \dots, d(v_2, v_{2n-2}) = 1, d(v_2, v_{2n}) = 2 \quad (4.34)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olarak bulunur. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(C_n^{+--})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 3 + 1 \quad (4.35)$$

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 2 \quad (4.36)$$

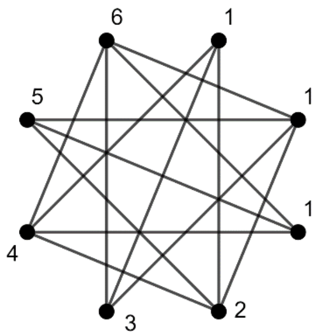
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{---}) \leq 2n - 2$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 3$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 3$ renk ile yapılabilir. $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 3$ olduğundan $C_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 3 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 2$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.10 ile $C_{\boldsymbol{4}}^{+--}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.10. $\chi_p(C_4^{+--}) = 6$

Teorem 4.7: $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$, $3n - 2$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 5$ olsun. O halde, $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 1 \tag{4.37}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{+--})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(W_n)$, $v_2, v_4 \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in E(W_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının tanımından, W_n grafındaki bir tepe, W_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Aynı şekilde W_n grafındaki bir ayrıt, yine W_n grafında komşu olduğu bir ayrıt ile $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olamaz. Bu nedenle, tüm tepelerle komşu olan v_1 tepesinin W_n grafında ilişkili olduğu ayrıtların sayısı ve v_1, $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olamayacağı için bu tepelerin toplam sayısı bağımsızlık sayısını verir. Buradan $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = n$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = n$ olur Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, W_n grafında diğer tüm tepelere komşu tepedir (bu tepe v_1 olsun). İkinci durum, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Üçüncü durum, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepelerdir. Dördüncü durum ise W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Bu ispatta $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1 \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ grafında tüm tepelere komşu tepe olsun. Bu tepenin $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 1, d(v_1, v_6) = 1,$$

$$d(v_1, v_7) = 1, d(v_1, v_8) = 1, d(v_1, v_9) = 1, d(v_1, v_{10}) = 2, d(v_1, v_{11}) = 2,$$

$$d(v_1, v_{12}) = 2, \ d(v_1, v_{13}) = 1 \qquad (4.38)$$

şeklindedir. O halde, tüm tepelere komşu olan v_1 tepesi, W_n grafında ilişkili olduğu ayrıtları karşılığı olan tepeler ile $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır.

Durum 2: $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots,\ v_{3n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_2 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 1, d(v_2, v_7) = 1,$$

$$d(v_2, v_8) = 1, d(v_2, v_9) = 1, d(v_2, v_{10}) = 2, d(v_2, v_{11}) = 2, d(v_2, v_{12}) = 2,$$

$$d(v_2, v_{13}) = 2 \tag{4.39}$$

şeklindedir. O halde, W_n grafında v_2 tepesi, kendisi ile ilişkili olan tepeler ve komşu olan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots,\ v_{3n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 3: $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepeler olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_3, v_4) = 2, d(v_3, v_5) = 1, d(v_3, v_6) = 1, d(v_3, v_7) = 2, d(v_3, v_8) = 1,$$

$$d(v_3, v_9) = 1, d(v_3, v_{10}) = 1, d(v_3, v_{11}) = 1, d(v_3, v_{12}) = 1, d(v_3, v_{13}) = 2 \tag{4.40}$$

şeklindedir. O halde, W_n grafında v_3 tepesi, kendisiyle komşu olmayan tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 4: $v_4, v_6, v_8, \dots,\ v_{2n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_4, v_5) = 2, d(v_4, v_6) = 2, d(v_4, v_7) = 1, d(v_4, v_8) = 1, d(v_4, v_9) = 1,$$

$$d(v_4, v_{10}) = 2, d(v_4, v_{11}) = 1, d(v_4, v_{12}) = 1, d(v_4, v_{13}) = 2 \qquad (4.41)$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_4, v_6, v_8, \dots,$ $v_{2n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, yukarıdaki dört durumdan $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olarak bulunur. $diam(\mathrm{W}_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(W_n^{+--})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının paketleme boyaması için sadece n tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 3n - 2 - n + 1 \qquad (4.42)$$

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 1 \qquad (4.43)$$

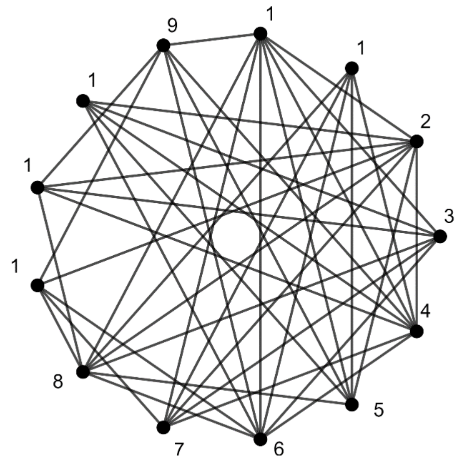
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 1$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(W_n^{+--}) = 2n - 2$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 2$ renk ile yapılabilir. $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = n$ olduğundan $W_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki n tepe birinci renk ile boyanır. $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 2 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2n - 1$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.11 ile $W_{\mathbf{5}}^{+--}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.11. $\chi_p(W_5^{+--}) = 9$

Teorem 4.8: $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$, $\frac{n^2+n}{2}$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. O halde, $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = \frac{n^2-n+2}{2} \tag{4.44}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{+--})$ olsun. Burada, $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(K_n)$ ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in E(K_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{+--})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının tanımından, K_n grafındaki bir tepe K_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Aynı şekilde K_n grafındaki bir ayrıt, yine K_n grafında komşu olduğu bir ayrıt ile $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında komşu olamaz. K_n grafı tam graf olduğundan tüm tepeleri komşudur. Bu sebepten ötürü tüm tepelerle komşu olan v_1 tepesinin K_n grafında ilişkili olduğu ayrıtların sayısı $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının bağımsızlık sayısını verir. Buradan $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = n$ olduğu görülür. Dolayısıyla $|X_1| = n$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için, K_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir. Bu ispatta $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

$v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{+--})$, K_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{+--})$, K_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 1, d(v_1, v_6) = 1,$$
$$d(v_1, v_7) = 1, d(v_1, v_8) = 2, d(v_1, v_9) = 2, d(v_1, v_{10}) = 1 \qquad (4.45)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi, K_n grafında ilişkili olduğu ayrıtları karşılığı olan tepeler ile $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n^{+--})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Benzer şekilde, $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 1\ , d(v_2, v_7) = 1,$$

$$d(v_2, v_8) = 2, d(v_2, v_9) = 2, d(v_2, v_{10}) = 2 \qquad (4.46)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi, K_n grafındaki komşu oldukları ayrıtlar ve ilişkili olduğu tepeler ile $K_{\boldsymbol{n}}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{+--})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olarak bulunur. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(K_n^{+--})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, K_n^{+--} grafının paketleme boyaması için sadece n tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq \frac{n^2+n}{2} - n + 1 \qquad (4.47)$$

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq \frac{n^2-n+2}{2} \qquad (4.48)$$

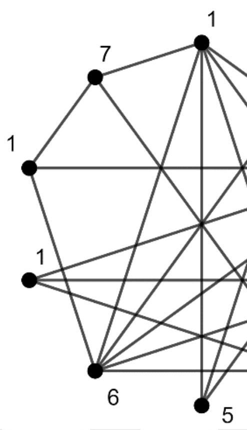
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq \frac{n^2-n+2}{2}$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(K_n^{+--}) = \frac{n^2-n}{2}$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $\frac{n^2-n}{2}$ renk ile yapılabilir. $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = n$ olduğundan K_n^{+--} grafındaki n tepe birinci renk ile boyanır. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{+--}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $\frac{n^2-n}{2} + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(K_n^{+--}) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.12 ile K_4^{+--} grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.12. $\chi_p(K_4^{+--}) = 7$

Teorem 4.9: $K_{1,n-1}^{+--}$, $2n-1$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. $K_{1,n-1}^{+--}$ grafının paketleme boyama sayısı

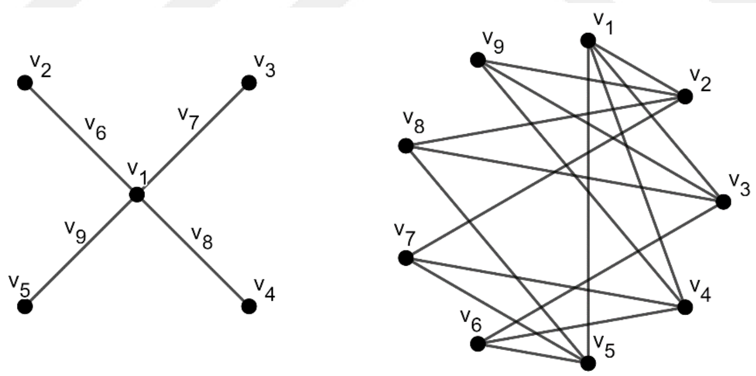
$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) = n \quad (4.49)$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1} \in V(K_{1,n-1}^{+--})$ olsun. Burada $v_1, v_{2,} \ldots, v_n \in V(K_{1,n-1})$ ve $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n-1}, \in E(K_{1,n-1})$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(K_{1,n-1}^{+--})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $K_{1,n-1}^{+--}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(K_{1,n-1}^{+--})$

bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $K_{1,n-1}^{+--}$ grafının tanımından, $K_{1,n-1}$ grafındaki bir tepe, $K_{1,n-1}$ grafında komşu olduğu bir tepe ile $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Aynı şekilde $K_{1,n-1}$ grafındaki bir ayrıt, yine $K_{1,n-1}$ grafında komşu olduğu bir ayrıt ile $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında komşu olamaz. $K_{1,n-1}$ grafında v_1, $K_{1,n-1}$ grafında tüm tepelerle komşu olan tepe olsun. Bu tepenin $K_{1,n-1}$ grafında ilişkili olduğu ayrıtların sayısı ile bu tepenin toplamı bağımsızlık sayısını verir. O halde, $\alpha(K_{1,n-1}^{+--}) = n$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = n$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $K_{1,n-1}^{+--}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini üç farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, $K_{1,n-1}$ grafında diğer tüm tepelere komşu tepedir (bu tepe v_1 olsun). İkinci durum, , $K_{1,n-1}$ grafında v_1 tepesi dışındaki tepelerdir. Üçüncü durum $K_{1,n-1}$ grafındaki ayrıtları $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Şekil 4.13 ile $K_{1,4}$ grafı ve $K_{1,4}^{+--}$ grafı gösterilmiştir. Bu graflar üzerinde $K_{1,n-1}^{+--}$ grafının etiketlenmesine örnek teşkil etmesi açısından etiketleme yapılmıştır.



Şekil 4.13. $K_{1,4}$ grafı ve $K_{1,4}^{+--}$ grafı

Durum 1: $v_1 \in V(K_{1,n-1}^{+--})$ grafında tüm tepelere komşu tepe olsun. Bu tepenin $K_{1,n-1}^{+--}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 1,\, d(v_1, v_3) = 1, \ldots, d(v_1, v_n) = 1,\, d(v_1, v_{n+1}) = 2, \ldots, (v_1, v_{2n-1}) = 2 \quad (4.50)$$

şeklindedir. O halde, tüm tepelere komşu v_1 tepesi, $K_{1,n-1}$ grafındaki ilişkili olduğu ayrıtları karşılığı olan tepeler ile $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır.

Durum 2: $v_2, v_3, \ldots, v_n \in V(K_{1,n-1}^{+--})$, $K_{1,n-1}$ grafında v_1 tepesi dışındaki tepeler olsun. Bu tepelerden v_2 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_2, v_3) = 2,\, d(v_2, v_4) = 2, \ldots, d(v_2, v_{n+1}) = 2,$$
$$d(v_2, v_{n+2}) = 1, \ldots, d(v_2, v_{2n-1}) = 1 \quad (4.51)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi, $K_{1,n-1}$ grafında kendisiyle komşu olmayan tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların $K_{1,n-1}$ grafında karşılığı olan tepeler ile $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_3, \ldots, v_n \in V(K_{1,n-1}^{+--})$ tepeleri, $K_{1,n-1}$ grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 3: $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n-1}, \in V(K_{1,n-1}^{+--})$, $K_{1,n-1}$ grafındaki ayrıtları $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_{n+1} tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_{\mathrm{n+1}}, v_{n+2}) = 2, \ldots\, d(v_{\mathrm{n+1}}, v_{2n-1}) = 2 \quad (4.52)$$

şeklindedir. O halde, $K_{1,n-1}$ grafında v_{n+1} tepesi, $K_{1,n-1}$ grafında kendisi ile ilişkili olan tepeler ve komşu olan ayrıtların $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında karşılığı olan tepeler ile $K_{1,n-1}^{+--}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n-1}, \in V(K_{1,n-1}^{+--})$ tepeleri $K_{1,n-1}$ grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, yukarıdaki üç durumdan $diam(\mathrm{K}_{1,n-1}^{+--}) = 2$ olarak bulunur. $diam(\mathrm{K}_{1,n-1}^{+--}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(K_{1,n-1}^{+--})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $K_{1,n-1}^{+--}$ grafının paketleme boyaması için sadece n tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) \leq 1 + 2n - 1 - n \tag{4.53}$$

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) \leq n \tag{4.54}$$

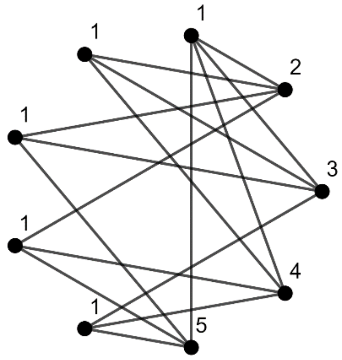
olarak elde edilir. Aynı zamanda Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) \leq 2n - 1$ ifadesinin doğruluğu kesindir

$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) = n - 1$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $n - 1$ renk ile yapılabilir. $\alpha(K_{1,n-1}^{+--}) = n$ olduğundan $K_{1,n-1}^{+--}$ grafındaki n tepe birinci renk ile boyanır. $diam(K_{1,n-1}^{+--}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $n - 1 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) = n$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.14 ile$K_{1,4}^{+--}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.14. $\chi_p\left(K_{1,4}^{+--}\right) = 5$

4.1.3. G^{-+-} Transformasyon Graflarının Paketleme Boyama Sayısı

Bu bölümde, $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$, $C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$, $W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ ve $K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ graflarının paketleme boyama sayıları genelleştirilmiştir. $K_{1,n-1}^{-+-}$ grafı bağlantılı olmadığından paketleme boyama sayısı bulunamamaktadır.

Teorem 4.10: $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$, $2n-1$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2n-3 \tag{4.55}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{2n-1} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(P_n)$ ve $v_2, v_4 \dots, v_{2n-2} \in E(P_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ olmak üzere, $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının tanımından, P_n grafındaki bir tepe, P_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafında komşu olamaz aynı şekilde P_n grafındaki bir tepe ilişkili olduğu bir ayrıt ile $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafında o ayrıtın karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Fakat P_n grafındaki ayrıt ile yine P_n grafında komşu olduğu ayrıt ile $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafında komşu olabilir. Buradan $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, P_n grafının uç tepeleridir. İkinci durum, P_n grafının sarkık ayrıtlarıdır. Üçüncü durum, P_n grafının uç tepeler dışındaki tepeleridir. Dördüncü durum ise sarkık ayrıtlar dışındaki ayrıtlardır. İspat yapılırken $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ üzerindeki etiketlemeler $P_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafıyla aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1,\ v_{2n-1} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$, P_n grafındaki uç tepeler olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2,\ d(v_1, v_3) = 2,\ d(v_1, v_4) = 1,\ d(v_1, v_5) = 1, \ldots, d(v_1, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.56}$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-1} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 2: $v_2,\ v_{2n-2} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$, P_n grafındaki sarkık ayrıtlar olsun. v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2,\ d(v_2, v_5) = 1,\ d(v_2, v_7) = 1, \ldots,\ d(v_2, v_{2n-1}) = 1$$

$$d(v_2, v_4) = 1,\ d(v_2, v_6) = 2,\ d(v_2, v_8) = 2, \ldots, d(v_2, v_{2n-2}) = 2 \tag{4.57}$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-2} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 3: $v_3, v_{5,} \ldots, v_{2n-3} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$, P_n grafının uç tepeler dışındaki tepeleri olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_3, v_4) = 2, d(v_3, v_5) = 2, d(v_3, v_6) = 1, d(v_3, v_7) = 1, \ldots\ d(v_3, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.58}$$

şeklindedir. O halde, v_3 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_3, v_{5,} \ldots, v_{2n-3} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 4: $v_4, v_6 \ldots, v_{2n-4} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$, P_n grafının sarkık ayrıtlar dışındaki ayrıtları olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_4, v_5) = 2, d(v_4, v_7) = 1, d(v_4, v_9) = 1, \ldots,, d(v_4, v_{2n-1}) = 1$$

$$d(v_4, v_6) = 1, d(v_4, v_8) = 2, d(v_4, v_{10}) = 2, \ldots, d(v_4, v_{2n-2}) = 2 \quad (4.59)$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_4, v_6 \ldots, v_{2n-4} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, yukarıdaki dört durumdan $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(P_n^{-+-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 2n - 4 + 1 \quad (4.60)$$

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 2n - 3 \quad (4.61)$$

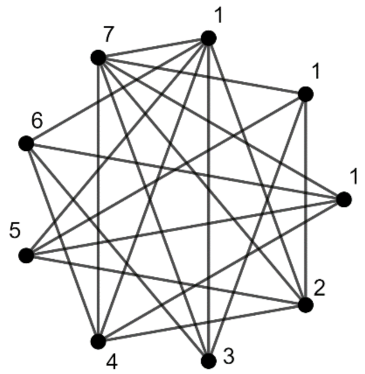
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 2n - 3$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2n - 4$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 4$ renk ile yapılabilir. $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3$ olduğundan $P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 4 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2n - 3$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.15 ile $P_{\boldsymbol{5}}^{-+-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.15. $\chi_p(P_{\boldsymbol{5}}^{-+-}) = 7$

Teorem 4.11: $C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$, $2n$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. $C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2n - 2 \tag{4.62}$$

olur.

İspat:
$v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{-+-})$ olsun. Burada $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n)$ ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in E(C_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(C_n^{-+-})$ olmak üzere, $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, C_n^{-+-} grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının tanımından, C_n grafındaki bir tepe, C_n grafında komşu olduğu bir tepe ile C_n^{-+-} grafında komşu olamaz, aynı şekilde ilişkili olduğu bir ayrıtın C_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Fakat C_n grafındaki bir ayrıt ile komşu olan bir ayrıt C_n^{-+-} grafında bu ayrıtları karşılığı olan tepeler ile komşu olabilir. Buradan

$\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. C_n^{-+-} grafındaki uzaklıkları bulmak için, C_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların C_n^{-+-} grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir. Bu ispatta C_n^{-+-} grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

$v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n^{-+-})$, C_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{-+-})$, C_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin C_n^{-+-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2,\ d(v_1, v_3) = 2,\ d(v_1, v_4) = 1,\ d(v_1, v_5) = 1, \dots,$$
$$d(v_1, v_{2n-2}) = 1,\ d(v_1, v_{2n-1}) = 2,\ d(v_1, v_{2n}) = 2 \tag{4.63}$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n^{-+-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Benzer şekilde, C_n^{-+-} grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin C_n^{-+-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_5) = 1, , \dots, d(v_2, v_{2n-1}) = 1$$
$$d(v_2, v_4) = 1,\ d(v_2, v_6) = 2, \dots, d(v_2, v_{2n-2}) = 2,\ d(v_2, v_{2n}) = 1 \tag{4.64}$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{-+-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(C_n^{-+-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, C_n^{-+-} grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 2n - 3 + 1 \tag{4.65}$$

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 2n - 2 \tag{4.66}$$

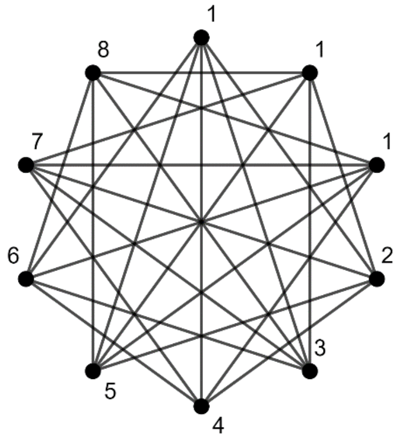
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 2n - 2$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2n - 3$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 3$ renk ile yapılabilir. $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3$ olduğundan C_n^{-+-} grafındaki üç tepe birinci renk ile boyanır. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 3 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(C_n^{-+-}) = 2n - 2$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.16 ile $C_{\boldsymbol{5}}^{-+-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.16. $\chi_p(C_5^{-+-}) = 8$

Teorem 4.12: $W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$, $3n-2$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 5$ olsun. O halde, $W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3n - 4 \qquad (4.67)$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{-+-})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(W_n)$ ve $v_2, v_4 \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in E(W_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(W_n^{-+-})$ olmak üzere, $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, W_n^{-+-} grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. W_n^{-+-} grafının tanımından, W_n grafındaki bir tepe, W_n grafında komşu olduğu bir tepe ile W_n^{-+-} grafında komşu olamaz, aynı şekilde ilişkili olduğu bir ayrıtın W_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Fakat W_n grafında bir ayrıt W_n grafında komşu olduğu bir ayrıtla W_n^{-+-} grafında o ayrıtın karşılığı olan tepe ile komşu olabilir. Buradan $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 3$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. W_n^{-+-} grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, W_n grafında diğer tüm tepelere komşu tepedir (bu tepe v_1 olsun). İkinci durum, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları W_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepelerdir. Üçüncü durum, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepelerdir. Dördüncü durum ise W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtları W_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepelerdir. Bu ispatta W_n^{-+-} grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1 \in V(W_n^{-+-})$, W_n grafında tüm tepelere komşu tepe olsun. Bu tepenin W_n^{-+-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 2, d(v_1, v_6) = 1,$$

$$d(v_1, v_7) = 2, d(v_1, v_8) = 1, d(v_1, v_9) = 2, d(v_1, v_{10}) = 2, d(v_1, v_{11}) = 2,$$

$$d(v_1, v_{12}) = 2, d(v_1, v_{13}) = 1 \tag{4.68}$$

şeklindedir. O halde, tüm tepelere komşu olan v_1 tepesi, W_n grafında komşu olduğu tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile W_n^{-+-} grafında 2 uzaklıklıdır.

Durum 2: $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{-+-})$, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları W_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_2 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 1, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 2, d(v_2, v_7) = 1,$$

$$d(v_2, v_8) = 2, d(v_2, v_9) = 1, d(v_2, v_{10}) = 1, d(v_2, v_{11}) = 1, d(v_2, v_{12}) = 1,$$

$$d(v_2, v_{13}) = 1 \tag{4.69}$$

şeklindedir. O halde, W_n^{-+-} grafında v_2 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olmayan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{-+-})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 3: $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_n^{-+-})$, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepeler olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_3, v_4) = 2, d(v_3, v_5) = 2, d(v_3, v_6) = 1, d(v_3, v_7) = 1, d(v_3, v_8) = 1,$$

$$d(v_3, v_9) = 2, d(v_3, v_{10}) = 1, d(v_3, v_{11}) = 1, d(v_3, v_{12}) = 1, d(v_3, v_{13}) = 2 \tag{4.70}$$

şeklindedir. O halde, W_n^{-+-} grafında v_3 tepesi, W_n grafında komşu olduğu tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_3, v_5, \dots, , v_{2n-1} \in V(W_n^{-+-})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 4: $v_4, v_6, v_8, \dots, v_{2n-2} \in V(W_n^{-+-})$ W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtları W_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_4, v_5) = 2, d(v_4, v_6) = 1, d(v_4, v_7) = 1, d(v_4, v_8) = 2, d(v_4, v_9) = 1,$$

$$d(v_4, v_{10}) = 2, d(v_4, v_{11}) = 2, d(v_4, v_{12}) = 1, d(v_4, v_{13}) = 1 \quad (4.71)$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olmayan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile W_n^{-+-} grafında 2 uzaklıklıdır. $v_4, v_6, v_8, \dots, v_{2n-2} \in V(W_n^{-+-})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, yukarıda göz önüne alınan durumlardan $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(W_n^{-+-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, W_n^{-+-} grafının paketleme boyaması için sadece üç tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 3n - 5 + 1 \quad (4.72)$$

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq 3n - 4 \quad (4.73)$$

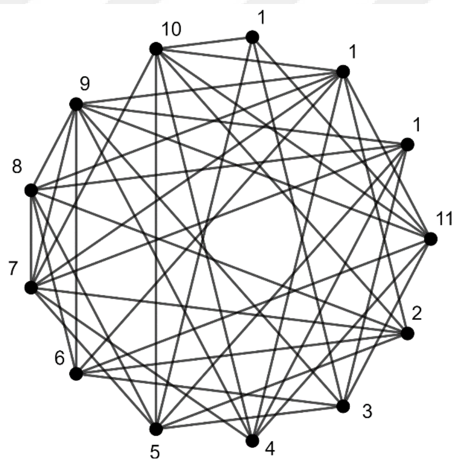
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(W_n^{-+-}) \leq 3n - 4$ ifadesinin doğruluğu kesindir

$\chi_p(W_n^{-+-}) = 3n-5$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $3n-5$ renk ile yapılabilir. $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3$ olduğundan W_n^{-+-} grafındaki 3 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $3n-5+1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 3n-4$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.17 ile $W_{\boldsymbol{5}}^{-+-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.17. $\chi_p(W_{\boldsymbol{5}}^{-+-}) = 11$

Teorem 4.13: $K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$, $\frac{n^2+n}{2}$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. O halde, $K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = \frac{n^2-n+2}{2} \tag{4.74}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{-+-})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n)$ ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in E(K_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(K_n^{-+-})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, K_n^{-+-} grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(\boldsymbol{K_n^{-+-}})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. K_n^{-+-} grafının tanımından, K_n grafındaki bir tepe, K_n grafında komşu olduğu bir tepe ile K_n^{-+-} grafında komşu olamaz, aynı şekilde ilişkili olduğu bir ayrıtın K_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. Fakat K_n grafında bir ayrıt K_n grafında komşu olduğu bir ayrıtın K_n^{-+-} grafında karşılığı olan tepe ile komşu olabilir. K_n grafı tam graf olduğundan tüm tepeleri komşudur. O halde, $\boldsymbol{K_n^{-+-}}$ grafında bu tepeler komşu olamaz. Buradan $\alpha(\boldsymbol{K_n^{-+-}}) = n$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = n$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. K_n^{-+-} grafındaki uzaklıkları bulmak için, K_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların K_n^{-+-} grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir. Bu ispatta K_n^{-+-} grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $\boldsymbol{K_n^{---}}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

$v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n^{-+-})$, K_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{-+-})$, K_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin K_n^{-+-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 2, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 2, d(v_1, v_6) = 1,$$
$$d(v_1, v_7) = 2, d(v_1, v_8) = 2, d(v_1, v_9) = 2, d(v_1, v_{10}) = 1 \qquad (4.75)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi, K_n grafındaki tüm tepeler ile ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile K_n^{-+-} grafında 2 uzaklıklıdır.$v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n^{-+-})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Benzer şekilde, K_n^{-+-} grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin K_n^{-+-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 1, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 2, d(v_2, v_7) = 1,$$
$$d(v_2, v_8) = 1, d(v_2, v_9) = 1, d(v_2, v_{10}) = 1 \quad (4.76)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi K_n grafında komşu olduğu ayrıtlar ve ilişkili olmadığı tepeler ile K_n^{-+-} grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{-+-})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(K_n^{-+-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, K_n^{-+-} grafının paketleme boyaması için sadece n tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq \frac{n^2+n}{2} - n + 1 \quad (4.77)$$

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq \frac{n^2-n+2}{2} \quad (4.78)$$

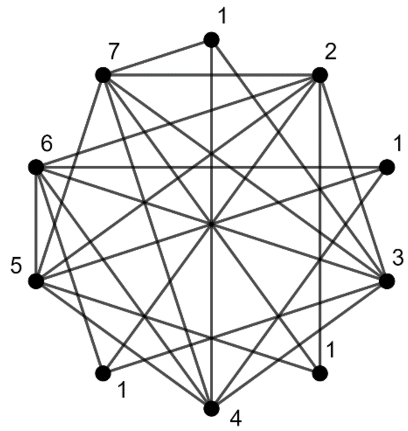
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) \leq \frac{n^2-n+2}{2}$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(K_n^{-+-}) = \frac{n^2-n}{2}$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $\frac{n^2-n}{2}$ renk ile yapılabilir. $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = n$ olduğundan K_n^{-+-} grafındaki n tepe birinci renk ile boyanır. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $\frac{n^2-n}{2}+1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{-+-}) = \frac{n^2-n+2}{2}$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.18 ile $K_{\boldsymbol{4}}^{-+-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.18. $\chi_p(K_{\boldsymbol{4}}^{-+-}) = 7$

4.1.4. G^{++-} Transformasyon Graflarının Paketleme Boyama Sayısı

Bu bölümde, $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $C_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ ve $K_{1,n-1}^{++-}$ graflarının paketleme boyama sayıları genelleştirilmiştir.

Teorem 4.14: **:** $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $2n-1$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad (4.79)$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{2n-1} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(P_n)$ ve $v_2, v_4 \dots, v_{2n-2} \in E(P_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ olmak üzere, $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak. $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile demektir. Dolayısıyla, $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının tanımından, P_n grafındaki bir tepe, P_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında komşu olabilir fakat P_n grafındaki bir tepe, ilişkili olduğu bir ayrıtın $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. P_n grafındaki ayrıt ile yine P_n grafında komşu olduğu ayrıt $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında komşu olabilir. P_n grafında bağımsızlık sayısını bulurken P_n grafının tepelerinin sayısı $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$grafında bağımsızlık sayısını verir. Bu durumda P_n grafında çift tepelilerde $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının bağımsızlık sayısı $\frac{n}{2}$ ve tek tepelilerde $\frac{n+1}{2}$dir. Yani, $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, P_n grafının uç tepeleridir. İkinci durum, P_n grafının sarkık ayrıtlarıdır. Üçüncü durum, P_n grafının uç tepeler dışındaki tepeleridir. Dördüncü durum ise sarkık ayrıtlar dışındaki ayrıtlardır. İspat yapılırken $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ üzerindeki etiketlemeler $P_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafıyla aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1,\ v_{2n-1} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, P_n grafındaki uç tepeler olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, ,d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_6) = 1, d(v_1, v_8) = 1, \dots\ d(v_1, v_{2n-2}) = 1$$

$$d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_5) = 2, d(v_1, v_7) = 2, \dots, d(v_1, v_{2n-1}) = 2 \qquad (4.80)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-1} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 2: $v_2,\ v_{2n-2} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, P_n grafındaki sarkık ayrıtlar olsun. v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_7) = 1, \ldots,, d(v_2, v_{2n-1}) = 1$$

$$d(v_2, v_4) = 1, d(v_2, v_6) = 2, d(v_2, v_8) = 2, \ldots, d(v_2, v_{2n-2}) = 2 \qquad (4.81)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip v_{2n-2} tepesinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 3: $v_3, v_{5,} \ldots, v_{2n-3} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, P_n grafının uç tepeler dışındaki tepeleri olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_3, v_4) = 2, d(v_3, v_6) = 1, d(v_3, v_8) = 1, \ldots, d(v_3, v_{2n-2}) = 1$$

$$d(v_3, v_5) = 1, d(v_3, v_7) = 2, d(v_3, v_9) = 2, \ldots, d(v_3, v_{2n-1}) = 2 \qquad (4.82)$$

şeklindedir. O halde, v_3 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_3, v_{5,} \ldots, v_{2n-3} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Durum 4: $v_4, v_6 \ldots, v_{2n-4} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, P_n grafının sarkık ayrıtlar dışındaki ayrıtları olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_4, v_5) = 2, d(v_4, v_7) = 1, d(v_4, v_9) = 1, \ldots, d(v_4, v_{2n-1}) = 1$$

$$d(v_4, v_6) = 1, d(v_4, v_8) = 2, d(v_4, v_{10}) = 2, \ldots, d(v_4, v_{2n-2}) = 2 \qquad (4.83)$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_4, v_6 \ldots, v_{2n-4} \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, yukarıdaki dört durumdan $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(P_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyaması için sadece $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 1 + 2n - 1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{4.84}$$

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{4.85}$$

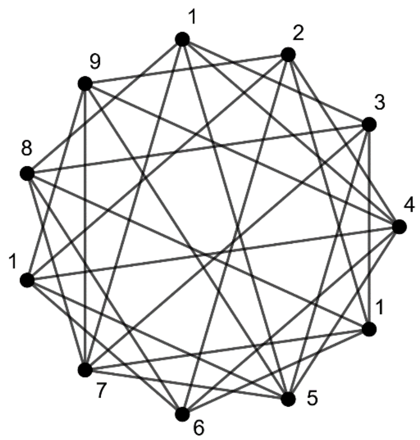
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ renk ile yapılabilir. $\alpha(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ olduğundan $P_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ tepe birinci renk ile boyanır. $diam(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(P_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.19 ile $P_{\boldsymbol{6}}^{++-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.19. $\chi_p(P_{\boldsymbol{6}}^{++-}) = 9$

Teorem 4.15: $C_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $2n$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. $C_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2n - 1 \tag{4.86}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{++-})$ olsun. Burada $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n)$ ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(C_n^{++-})$ olmak üzere, $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, C_n^{++-} grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $C_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının tanımından, C_n grafındaki bir tepe, C_n grafında komşu olduğu bir tepe ile C_n^{++-} grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın C_n^{++-} grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. C_n grafındaki bir ayrıt ile komşu olan bir ayrıt, C_n^{++-} grafında bu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile komşu olabilir. Buradan $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 2$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. C_n^{++-} grafındaki uzaklıkları bulmak için, C_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların C_n^{++-} grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir. Bu ispatta C_n^{++-} grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $C_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

$v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n^{++-})$, C_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{++-})$, C_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin C_n^{++-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_4) = 1,\ d(v_1, v_6) = 1, \dots, d(v_1, v_{2n-2}) = 1, d(v_1, v_{2n}) = 2$$

$$d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_5) = 2, \dots, d(v_1, v_{2n-3}) = 2, d(v_1, v_{2n-1}) = 1 \quad (4.87)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_1, v_3, \dots, v_{2n-1} \in V(C_n^{++-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Benzer şekilde, C_n^{++-} grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin C_n^{++-} grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_5) = 1, , \dots, d(v_2, v_{2n-1}) = 1$$

$$d(v_2, v_4) = 1, d(v_2, v_6) = 2, \dots, d(v_2, v_{2n-2}) = 2, d(v_2, v_{2n}) = 1 \quad (4.88)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi ile aynı özelliklere sahip $v_2, v_4, \dots, v_{2n} \in V(C_n^{++-})$ tepelerinin de diğer tepelere olan uzaklıkları aynıdır.

Böylece, $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(C_n^{++-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, C_n^{++-} grafının paketleme boyaması için sadece iki tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 2n - 2 + 1 \quad (4.89)$$

$$\chi_p(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 2n - 1 \quad (4.90)$$

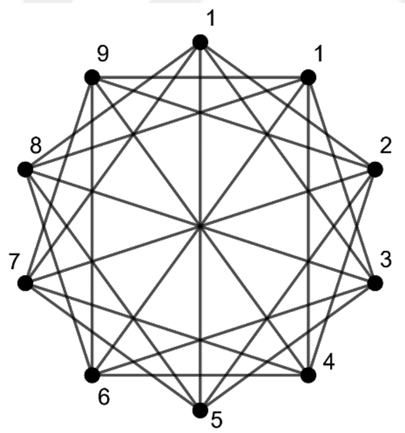
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(C_n^{-+-}) \leq 2n - 1$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(C_n^{++-}) = 2n - 2$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $2n - 2$ renk ile yapılabilir. $\alpha(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan C_n^{++-} grafındaki 2 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(C_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $2n - 2 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(C_n^{++-}) = 2n - 1$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.20 ile $C_{\boldsymbol{5}}^{++-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.20. $\chi_p(C_5^{++-}) = 9$

Teorem 4.16: $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $3n-2$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. O halde, $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 3n - 3 \tag{4.91}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{3n-2} \in V(W_n^{++-})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(W_n)$ ve $v_2, v_4 \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{3n-2} \in E(W_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının tanımından, W_n grafındaki bir tepe, W_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. W_n grafındaki bir ayrıt ile komşu olan bir ayrıt W_n^{++-} grafında bu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile komşu olabilir. Bu sebepten ötürü bağımsızlık sayısı bir tepe ve onunla W_n grafında ilişkili olan ayrıtı alarak bulunabilir. Buradan $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 2$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini dört farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, W_n grafında diğer tüm tepelere komşu tepedir (bu tepe v_1 olsun). İkinci durum, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Üçüncü durum, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepelerdir. Dördüncü durum ise W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Bu ispatta $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $W_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1 \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ grafında tüm tepelere komşu tepe olsun. Bu tepenin $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2,\ d(v_1, v_3) = 1,\ d(v_1, v_4) = 1,\ d(v_1, v_5) = 1,\ d(v_1, v_6) = 1,$$

$$d(v_1, v_7) = 1,\ d(v_1, v_8) = 1,\ d(v_1, v_9) = 1,\ d(v_1, v_{10}) = 2,\ d(v_1, v_{11}) = 2,$$

$$d(v_1, v_{12}) = 2,\ \ d(v_1, v_{13}) = 1 \tag{4.92}$$

şeklindedir. O halde, tüm tepelere komşu olan v_1 tepesi, W_n grafında ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır.

Durum 2: $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots,\ v_{3n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_2 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_2, v_3) = 2,\ d(v_2, v_4) = 1,\ d(v_2, v_5) = 1,\ d(v_2, v_6) = 2,\ d(v_2, v_7) = 1,$$

$$d(v_2, v_8) = 2,\ d(v_2, v_9) = 1,\ d(v_2, v_{10}) = 1,\ d(v_2, v_{11}) = 1,\ d(v_2, v_{12}) = 1,$$

$$d(v_2, v_{13}) = 1 \tag{4.93}$$

şeklindedir. O halde, $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında v_2 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olmayan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots,\ v_{3n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 3: $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, W_n grafında v_1 tepesi dışındaki tepeler olsun. Bu tepelerden v_3 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_3, v_4) = 2,\ d(v_3, v_5) = 1,\ d(v_3, v_6) = 1,\ d(v_3, v_7) = 2,\ d(v_3, v_8) = 1,$$

$$d(v_3, v_9) = 1, d(v_3, v_{10}) = 1,\ d(v_3, v_{11}) = 1,\ d(v_3, v_{12}) = 1,\ d(v_3, v_{13}) = 2$$

$$\tag{4.94}$$

şeklindedir. O halde, $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında v_3 tepesi, W_n grafında kendisiyle komşu olmayan tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepeler ile

2 uzaklıklıdır. $v_3, v_5, \dots,, v_{2n-1} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 4: $v_4, v_6, v_8, \dots,\ v_{2n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ W_n grafında v_1 tepesi ile ilişkili ayrıtların dışındaki ayrıtları $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_4 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_4, v_5) = 2, d(v_4, v_6) = 1, d(v_4, v_7) = 1, d(v_4, v_8) = 2, d(v_4, v_9) = 1,$$

$$d(v_4, v_{10}) = 2, d(v_4, v_{11}) = 2, d(v_4, v_{12}) = 1,\ d(v_4, v_{13}) = 1 \quad (4.95)$$

şeklindedir. O halde, v_4 tepesi, W_n grafında kendisiyle ilişkili olan tepeler ve komşu olmayan ayrıtların karşılığı olan tepeler ile $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_4, v_6, v_8, \dots,\ v_{2n-2} \in V(W_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepeleri W_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, yukarıdaki dört durumdan $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(W_n^{++-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $W_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyaması için sadece iki tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 3n - 2 - 2 + 1 \quad (4.96)$$

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq 3n - 3 \quad (4.97)$$

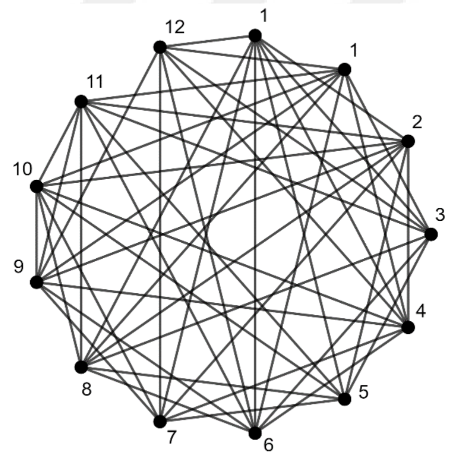
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{+--}) \leq 2n - 1$ ifadesinin doğruluğu kesindir

$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 3n - 4$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $3n - 4$ renk ile yapılabilir. $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan $\alpha(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ grafındaki 2 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $3n - 4 + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(W_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 3n - 3$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.21 ile $W_{\boldsymbol{5}}^{++-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.21. $\chi_p(W_{\boldsymbol{5}}^{++-}) = 12$

Teorem 4.17: $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$, $\frac{n^2+n}{2}$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 3$ olsun. O halde, $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = \frac{n^2+n-2}{2} \tag{4.98}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_n^{++-})$ olsun. Burada $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_n)$ ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in E(K_n)$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için $d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak demektir. Dolayısıyla, $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının tanımından, K_n grafındaki bir tepe K_n grafında komşu olduğu bir tepe ile $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. K_n grafındaki bir ayrıt ile komşu olan bir ayrıt K_n^{++-} grafında bu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile komşu olabilir. K_n grafı tam graf olduğundan tüm tepeleri komşudur. Bu sebepten ötürü bağımsızlık sayısı, bir tepe ve onunla K_n'de ilişkili olan ayrıtı alarak bulunabilir. Buradan $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = 2$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için, K_n grafının tepeleri ve bu tepelerle ilişkili olan ayrıtların $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki karşılığı olan tepelerin birbirine olan uzaklıklarının bulmak gerekir. Bu ispatta $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $K_{\boldsymbol{n}}^{---}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

$v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, K_n grafındaki tepeler ve $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$, K_n grafındaki ayrıtlar olsun. v_1 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_4) = 1, d(v_1, v_5) = 1, d(v_1, v_6) = 1,$$

$$d(v_1, v_7) = 1, d(v_1, v_8) = 2, d(v_1, v_9) = 2, d(v_1, v_{10}) = 1 \qquad (4.99)$$

şeklindedir. O halde, v_1 tepesi, K_n grafında ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_1, v_{3,} \dots, v_{2n-1} \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Benzer şekilde, $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki v_2 tepesi göz önüne alınırsa, bu tepenin $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 1, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 2,\ d(v_2, v_7) = 1,$$
$$d(v_2, v_8) = 1, d(v_2, v_9) = 1, d(v_2, v_{10}) = 1 \qquad (4.100)$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi, K_n grafındaki komşu olmadığı ayrıtlar ve ilişkili olduğu tepeler ile $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_4, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}, \dots, v_{\frac{n^2+n}{2}} \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ tepeleri K_n grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(K_{\boldsymbol{n}}^{++-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafının paketleme boyaması için sadece 2 tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq \frac{n^2+n}{2} - 2 + 1 \qquad (4.101)$$

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq \frac{n^2+n-2}{2} \qquad (4.102)$$

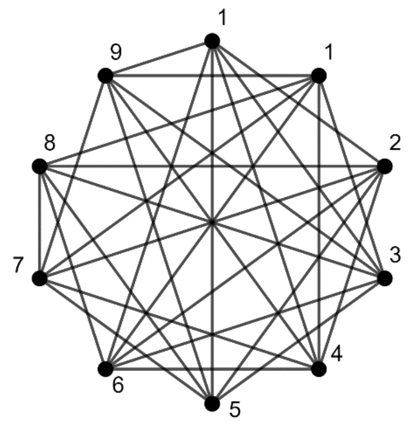
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) \leq \frac{n^2+n-2}{2}$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = \frac{n^2+n-4}{2}$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması $\frac{n^2+n-4}{2}$ renk ile yapılabilir. $\alpha(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan $K_{\boldsymbol{n}}^{++-}$ grafındaki 2 tepe birinci renk ile boyanır. $diam(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $\frac{n^2+n-4}{2}+1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p(K_{\boldsymbol{n}}^{++-}) = \frac{n^2+n-2}{2}$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.22 ile $K_{\boldsymbol{4}}^{++-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.22. $\chi_p(K_{\boldsymbol{4}}^{++-}) = 9$

Teorem 4.18: $K_{\boldsymbol{1,n-1}}^{++-}$, $2n-1$ tepeli bir transformasyon graf ve $n \geq 4$ olsun. $K_{\boldsymbol{1,n-1}}^{++-}$ grafının paketleme boyama sayısı

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{++-}\right) = n+1 \tag{4.103}$$

olur.

İspat:

$v_1, v_2, \dots, v_{2n-1} \in V(K_{1,n-1}^{++-})$ olsun. Burada $v_1, v_{2,} \dots, v_n \in V(K_{1,n-1})$ ve $v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n-1}, \in E(K_{1,n-1})$ şeklindedir. Paketleme boyama tanımından, $v_i, v_j \in V(K_{1,n-1}^{++-})$ olmak üzere , $d(v_i, v_j) > i$ olan tepeler aynı X_i kümesinde yer alır yani i rengi ile boyanırlar. Buradan birinci renk ile boyanacak tepeler için

$d(v_i, v_j) > 1$ olmalıdır. $d(v_i, v_j) > 1$ koşulunu sağlayan tepeleri bulmak, $K_{1,n-1}^{++-}$ grafının bağımsızlık sayısını bulmak ile aynı anlama gelir. Dolayısıyla, $\alpha(K_{1,n-1}^{++-})$ bulununca $|X_1|$ değeri bulunmuş olur. $K_{1,n-1}^{++-}$ grafının tanımından, $K_{1,n-1}$ grafındaki bir tepe $K_{1,n-1}$ grafında komşu olduğu bir tepe ile $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında komşu olabilir, fakat ilişkili olduğu bir ayrıtın $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepe ile komşu olamaz. $K_{1,n-1}$ grafındaki bir ayrıt ile komşu olan bir ayrıt $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında bu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile komşu olabilir. Buradan tüm tepelerle komşu olan v_1 tepesi dışındaki tepelerin sayısı bağımsızlık sayısını verir. Bu sebepten dolayı $\alpha(K_{1,n-1}^{++-}) = n-1$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $|X_1| = n-1$ olur. Geriye kalan tepelerin paketleme boyama sayısını bulmak için grafın çapının bulunması gerekir. $K_{1,n-1}^{++-}$ grafındaki uzaklıkları bulmak için grafın tepelerini üç farklı durumda göz önüne almak yeterlidir. İlk durum, $K_{1,n-1}$ grafında diğer tüm tepelere komşu tepedir (bu tepe v_1 olsun). İkinci durum, $K_{1,n-1}$ grafında v_1 tepesi dışındaki tepelerdir. Üçüncü durum $K_{1,n-1}$ grafındaki ayrıtları $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepelerdir. Bu ispatta $K_{1,n-1}^{++-}$ grafının etiketlenmesi daha önce gösterilen $K_{1,n-1}^{+--}$ grafının etiketlenmesi ile aynı şekilde yapılmıştır.

Durum 1: $v_1 \in V(K_{1,n-1}^{++-})$ grafında tüm tepelere komşu tepe olsun. Bu tepenin $K_{1,n-1}^{++-}$ grafındaki diğer tepelere olan uzaklıkları,

$$d(v_1, v_2) = 1, d(v_1, v_3) = 1, \ldots, d(v_1, v_n) = 1, d(v_1, v_{n+1}) = 2, \ldots, (v_1, v_{2n-1}) = 2 \tag{4.104}$$

şeklindedir. O halde, tüm tepelere komşu v_1 tepesi $K_{1,n-1}$ grafındaki ilişkili olduğu ayrıtların karşılığı olan tepeler ile $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır.

Durum 2: $v_2, v_3, \ldots, v_n \in V(K_{1,n-1}^{++-})$, $K_{1,n-1}$ grafında v_1 tepesi dışındaki tepeler olsun. Bu tepelerden v_2 tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 2,\ldots,d(v_2, v_{n+1}) = 2,$$

$$d(v_2, v_{n+2}) = 1,\ldots, d(v_2, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.105}$$

şeklindedir. O halde, v_2 tepesi, $K_{1,n-1}$ grafında kendisiyle komşu olmayan tepeler ve ilişkili olduğu ayrıtların $K_{1,n-1}$ grafında karşılığı olan tepeler ile $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_2, v_3, \ldots, v_n \in V(K_{1,n-1}^{++-})$tepeleri, $K_{1,n-1}$ grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Durum 3: $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n-1}, \in V(K_{1,n-1}^{++-})$, $K_{1,n-1}$ grafındaki ayrıtları $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında karşılığı olan tepeler olsun. Bu tepelerden v_{n+1} tepesi göz önüne alınırsa,

$$d(v_{\mathrm{n}+1}, v_{n+2}) = 1,\ldots\ d(v_{\mathrm{n}+1}, v_{2n-1}) = 1 \tag{4.106}$$

şeklindedir. O halde, $K_{1,n-1}$ grafında v_{n+1} tepesi, $K_{1,n-1}$ grafında kendisi ile ilişkili olan tepeler ile $K_{1,n-1}^{++-}$ grafında 2 uzaklıklıdır. $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n-1}, \in V(K_{1,n-1}^{++-})$ tepeleri $K_{1,n-1}$ grafında aynı özelliklere sahip olduğundan, uzaklıklar aynı şekilde elde edilir.

Böylece, Durum 1, Durum 2, Durum 3'den $diam(K_{1,n-1}^{++-}) = 2$ olarak bulunur. $diam(K_{1,n-1}^{++-}) = 2$ olduğundan diğer renk sınıflarının her birinde sadece birer eleman mevcuttur. Yani, $v_i, v_j \in V(K_{1,n-1}^{++-})$ olmak üzere $d(v_i, v_j) \ngtr 2$ olduğundan herhangi farklı iki v_i, v_j tepeleri aynı renk sınıfında olamazlar. Böylece, $K_{1,n-1}^{++-}$ grafının paketleme boyaması için sadece n tepenin aynı renk ile boyanması söz konusudur. Dolayısıyla,

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) \leq 1 + 2n - 1 - (n - 1) \tag{4.107}$$

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) \leq n + 1 \tag{4.108}$$

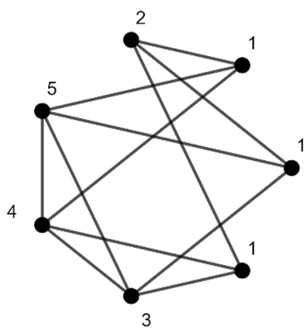
olarak elde edilir. Aynı zamanda, Önerme 3.1 ve Teorem 3.1'den $diam(G) = 2$ olduğunda $\chi_p(G) \leq \beta(G) + 1$ ve $\beta(G) = n - \alpha(G)$ olduğundan $\chi_p\left(K_{1,n-1}^{+--}\right) \leq n + 1$ ifadesinin doğruluğu kesindir.

$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{++-}\right) = n$ olsun. Bu durumda grafın paketleme boyaması n renk ile yapılabilir. $\alpha(K_{1,n-1}^{++-}) = n - 1$ olduğundan $K_{1,n-1}^{++-}$ grafındaki $n - 1$ tepe birinci renk ile boyanır. $diam(K_{1,n-1}^{++-}) = 2$ olduğundan geriye kalan her tepe farklı renk ile boyanmalıdır. Paketleme boyama sayısı için gerekli minimum renk sayısı $n + 1$ olarak görülür. Dolayısıyla, kabulümüz yanlıştır. Böylece,

$$\chi_p\left(K_{1,n-1}^{++-}\right) = n + 1$$

olarak elde edilir. □

Aşağıda Şekil 4.23 ile $K_{1,3}^{++-}$ grafı için bir paketleme boyama örneği verilmiştir.



Şekil 4.23. $\chi_p\left(K_{1,3}^{++-}\right) = 5$

Çalışmanın bu bölümünde G^{---}, G^{+--}, G^{-+-} ve G^{++-} transformasyon grafları için paketleme boyama sayıları elde edilerek genelleştirilmiş, teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Teoremlerden elde edilen sonuçlar Tablo 4.1'de yer almaktadır.

Tablo 4.1. Bazı transformasyon grafların paketleme boyama sayıları

Graflar	$\chi_p(G)$
$\chi_p(P_n^{---}), n \geq 4$	$2n-3$
$\chi_p(C_n^{---}), n \geq 4$	$2n-2$
$\chi_p(W_n^{---}), n \geq 5$	$3n-4$
$\chi_p(K_n^{---})\ n \geq 4$	$\frac{n^2-n+2}{2}$
$\chi_p(P_n^{+--}), n \geq 3$	$2n-3$
$\chi_p(C_n^{+--}), n \geq 3$	$2n-2$
$\chi_p(W_n^{+--}), n \geq 5$	$2n-1$
$\chi_p(K_n^{+--}), n \geq 3$	$\frac{n^2-n+2}{2}$
$\chi_p(K_{1,n-1}^{+--}), n \geq 4$	n
$\chi_p(P_n^{-+-}), n \geq 4$	$2n-3$
$\chi_p(C_n^{-+-}), n \geq 3$	$2n-2$
$\chi_p(W_n^{-+-}), n \geq 5$	$3n-4$
$\chi_p(K_n^{-+-}), n \geq 4$	$\frac{n^2-n+2}{2}$
$\chi_p(P_n^{++-}), n \geq 3$	$2n-\alpha$
$\chi_p(C_n^{++-}), n \geq 3$	$2n-1$
$\chi_p(W_n^{++-}), n \geq 4$	$3n-3$
$\chi_p(K_n^{++-}), n \geq 3$	$\frac{n^2+n-2}{2}$
$\chi_p(K_{1,n-1}^{++-}), n \geq 4$	$n+1$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, graflar üzerinde önemli bir yer tutan boyama sayısının bir türü olan paketleme boyama sayısı bazı özel graf sınıflarında ele alınmıştır. G grafı yol, çevre, tekerlek, tam ve star graflar olmak üzere G^{---}, G^{+--}, G^{-+-} ve G^{++-} transformasyon graflarının paketleme boyama sayıları teoremler ile ifade edilmiş ve ispatları verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.1 ile gösterilmiştir. Çalışmada yer almayan $K_{1,n-1}^{---}$ve $K_{1,n-1}^{-+-}$ grafları bağlantısız olduklarından paketleme boyama sayıları hesaplanamamıştır. Paketleme boyama sayısı NP problemidir. Problemin motivasyonu frekans atama problemleridir. Bu çalışmada incelenen graf sınıfları ile literatürde eksiklik görülen kısımlar tamamlanmaya çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Baoyindureng, W., Jixiang M. Basic Properties of Total Transformation Graphs, Journal of Mathematical Study, 2001, (34), 109-116

[2] Bresar, B., Klavlar, S., Rall, D.F. On the Packing Chromatic Number of Cartesian Products, Hexagonal Latice and Trees. Discrete Applied Mathematics. 2007, (155), 2303-2311

[3] Buckley, F., Harary, F. Distance in Graphs. Ed: Allan M. Wylde, Addison-Wesley Pub. Co, Michigan, Amerika, 1990, 335

[4] Chartrand, G., Lesniak, L., Zhang, P. Graphs and Digraphs, Chapman and Hall/CRC., New York, USA, 2016, 628

[5] Dunbar, J., Erwin, D., Haynes, T.W., Hedetniemi, S.M., Hedetniemi, S.T. Broadcast in Graphs, Discrete Applied Mathematics. 2006, (154), 59-75

[6] Ekstein, J., Holub, P., Lidicky, B. Packing Chromatic Number of Distance Graphs. Discrete Applied Mathematics. 2012, (160), 512-524

[7] Fiala, J., Golovach P.A. Complexity of the Packing Coloring Problem for Trees, Discrete Applied Mathematics. 2008, (158), 771-778

[8] Fukuchı, Y. Edge-Magic Labeling of Wheel Graphs, Tokyo J. Math, 2001, (24), 153-167

[9] Goddard,W., Hedetniemi, S.M., Hedetniemi, S.T., Harris, J.M., Rall, D.F. Broadcast Chromatic Numbers of Graphs, Ars Combinatoria. 2008, (86), 33-49

[10] Kubale M. Contemporary Mathematics-Graph Colorings, Ed:Dennis Deturck, American Mathematical Society, Rhode Island,America, 2004, 210.

[11] Skiena, S. Cycles, Stars and Whells. Implementing Discrete Mathematics: Combinatories and Graph Theory with Mathematica. MA: Addison-Wesley, Cambridge, UK, 1990, 193

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Huriye Büşra DÖRTOK
Doğum Yeri ve Yılı	: Konak, 1991
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: busraaozen@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Urla Hakan Çeken Anadolu Lisesi, 2009
Lisans	: Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013
Lisans	: Anadolu Üniversitesi, İşletme Bölümü, 2014

Mesleki Deneyim

S.M.M.M. Yasemin Özcan	2013-2014
Orkunoğlu Koleji	2014-2015
S.M.M.M. Yasemin Özcan	2015-…….. (halen)

Konferanslar ve Sempozyumlar

DOĞAN DURGUN Derya, ÖZEN Huriye Büşra, Dönüşüm Çizgelerin Paketleme Boyama Sayısı, International Students Science Conference, 5-6 May 2017 – Kâtip Çelebi Üniversitesi, İzmir, TURKEY