

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**LERCH VE PELL POLİNOMLARININ MATRİS ÖZELLİKLERİ VE
LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI**

Seda ÇAYAN

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER**



MANİSA-2019

Seda
ÇAYAN

**LERCH VE PELL POLİNOMLARININ MATRİS ÖZELLİKLERİ VE LINEER
KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI**

2019

TEZ ONAYI

Seda ÇAYAN tarafından hazırlanan "Lerch ve Pell Polinomlarının Matris Özellikleri ve Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları" adlı tez çalışması 15/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Prof. Dr. Mehmet SEZER**

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL**

Dokuz Eylül Üniversitesi

Jüri Üyesi **Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER**

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Seda ÇAYAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TABLO DİZİNİ	VI
TEŞEKKÜR	VII
ÖZET	VIII
ABSTRACT	IX
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerle İlgili Temel Kavramlar	3
2.2. Lerch Polinomlarıyla İlgili Temel Kavramlar	4
2.3. Pell Polinomlarıyla İlgili Temel Kavramlar	7
2.4. Tezin Amacı	8
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	9
3.1. Materyal	9
3.2. Yöntemler	9
3.2.1. Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Lerch Matris Sıralama Yöntemi	10
3.2.1.1. Temel Matris Bağlılıları	10
3.2.1.2. Çözüm Yöntemi	13
3.2.2. Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Pell Matris Sıralama Yöntemi	17
3.2.2.1. Temel Matris Bağlılıları	17
3.2.2.2. Çözüm Yöntemi	19
3.2.3. Çözümlerin Doğruluğu ve Hata Analizi	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	25
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	78
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	82

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$L_n(x, \lambda)$	Lerch Polinomları
$s(n, k)$	1. Tip Stirling Sayıları
$S(n, k)$	2. Tip Stirling Sayıları
$P_n(x)$	Pell Polinomları
$u(x, t)$	Tam Çözüm
$u_N(x, t, \lambda)$	Lerch Polinomlarına Dayalı Yaklaşık Çözüm
$u_N(x, t)$	Pell Polinomlarına Dayalı Yaklaşık Çözüm
$e(x, t)$	Mutlak Hata
N	Kesme Sınırı
x_γ	Sıralama Noktaları
t_μ	Sıralama Noktaları
B	Standart Geçiş Matrisi
C (λ)	Lerch Polinomlarının Geçiş Matrisi
S	Pell Polinomlarının Geçiş Matrisi
A	Bilinmeyen Katsayıların Matrisi
[W; G]	Temel Denklemin Arttırılmış Matrisi
[U_i; Φ_i]	Koşulların Arttırılmış Matrisi
[\tilde{W}; \tilde{G}]	Koşulların Kullanımıyla Elde Edilen Yeni Arttırılmış Matris
DQTFDS	Differential Quadrature in Time and Finite Difference in Space
FDTDQS	Finite Difference in Time and Differential Quadrature in Space
MANN	Modified Artificial Neural Network
NQS	Non-Polynomial Quintic Spline
OQS	Ordinary Quintic Spline
UANN	Usual Artificial Neural Network

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. $\lambda = 0.1$ için Lerch Polinomlarının Grafiği	6
Şekil 2.2. $\lambda = 1$ için Lerch Polinomlarının Grafiği	6
Şekil 2.3. $\lambda = 2$ için Lerch Polinomlarının Grafiği	6
Şekil 2.4. Pell Polinomlarının Grafiği	8
Şekil 4.1. Örnek 4.2'nin elde edilen yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması	30
Şekil 4.2. Örnek 4.2'nin analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması	31
Şekil 4.3. Örnek 4.2'nin analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması	31
Şekil 4.4. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları	32
Şekil 4.5. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları	32
Şekil 4.6. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları	32
Şekil 4.7. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları	33
Şekil 4.8. Örnek 4.3'ün analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması	34
Şekil 4.9. Örnek 4.3'ün analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması	34
Şekil 4.10. Örnek 4.3'ün yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ aralığında karşılaştırılması	35
Şekil 4.11. Örnek 4.3'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları	36
Şekil 4.12. Örnek 4.3'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları	36
Şekil 4.13. Örnek 4.3'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları	37
Şekil 4.14. Örnek 4.3'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları	37
Şekil 4.15. Örnek 4.5'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması	44
Şekil 4.16. Örnek 4.5'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması	44
Şekil 4.17. Örnek 4.5'in yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması	45
Şekil 4.18. Örnek 4.5'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları	46
Şekil 4.19. Örnek 4.5'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları	46
Şekil 4.20. Örnek 4.5'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları	46
Şekil 4.21. Örnek 4.5'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları	47

	Sayfa
Şekil 4.22. Örnek 4.6'nın analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması	48
Şekil 4.23. Örnek 4.6'nın analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması	48
Şekil 4.24. Örnek 4.6'nın yaklaşık çözümlerinin analitik çözümlerle karşılaştırılması	49
Şekil 4.25. Örnek 4.6'daki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	50
Şekil 4.26. Örnek 4.6'daki yaklaşık çözümlerin $x=2$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	50
Şekil 4.27. Örnek 4.6'daki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	50
Şekil 4.28. Örnek 4.6'daki yaklaşık çözümlerin $t=2$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	51
Şekil 4.29. (a) Neumann koşulları altında Laplace denklemi	51
Şekil 4.29. (b) Neumann koşulları altında Laplace denklemi	51
Şekil 4.30. Örnek 4.8'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması	58
Şekil 4.31. Örnek 4.8'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması	58
Şekil 4.32. Örnek 4.8'in yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması	59
Şekil 4.33. Örnek 4.8'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	59
Şekil 4.34. Örnek 4.8'deki yaklaşık çözümlerin $x=0.4$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	60
Şekil 4.35. Örnek 4.8'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	60
Şekil 4.36. Örnek 4.8'deki yaklaşık çözümlerin $t=0.4$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	60
Şekil 4.37. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için analitik ve yaklaşık çözümlerinin x 'in bazı değerlerinde karşılaştırılması	62
Şekil 4.38. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için analitik ve yaklaşık çözümlerinin x 'in bazı değerlerinde karşılaştırılması	62
Şekil 4.39. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.....	63
Şekil 4.40. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.....	63
Şekil 4.41. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması.....	64
Şekil 4.42. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması.....	64
Şekil 4.43. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	65
Şekil 4.44. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	66
Şekil 4.45. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	66

Şekil 4.46. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	66
Şekil 4.47. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	67
Şekil 4.48. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	68
Şekil 4.49. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	68
Şekil 4.50. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	68
Şekil 4.51. Örnek 4.11'in yaklaşık çözümlerinin analitik çözümlerle karşılaştırılması	74
Şekil 4.52. Örnek 4.11'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması	75
Şekil 4.53. Örnek 4.11'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması	75
Şekil 4.54. Örnek 4.11'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	76
Şekil 4.55. Örnek 4.11'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	77
Şekil 4.56. Örnek 4.11'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	77
Şekil 4.57. Örnek 4.11'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.....	77

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1. Örnek 4.2'nin mutlak hata karşılaştırmaları	30
Tablo 4.2. Örnek 4.3'ün mutlak hata karşılaştırmaları	35
Tablo 4.3. Örnek 4.3'ün mutlak hata karşılaştırmaları	36
Tablo 4.4. Örnek 4.4'ün N=3 için Lerch ve Pell matris sıralama metotlarıyla elde edilen yaklaşık çözümlerin yüzde hata karşılaştırmaları	43
Tablo 4.5. Örnek 4.5'in mutlak hata karşılaştırmaları	45
Tablo 4.6. Örnek 4.6'nın bağıl hata karşılaştırmaları	49
Tablo 4.7. Örnek 4.8'in bağıl hata karşılaştırmaları	57
Tablo 4.8. $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ iken ve $t = 1$ için Örnek 4.9'un mutlak hata karşılaştırmaları	65
Tablo 4.9. $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ iken ve $t = 1$ için Örnek 4.9'un mutlak hata karşılaştırmaları	67
Tablo 4.10. Örnek 4.11'in mutlak hata ve ortalama hatanın üst sınırı karşılaştırmaları	76

TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimleri ile çalıőmamın her aőamasında bana destek olup yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER' e ve maddi-manevi desteklerinden ötürü aileme teşekkür ederim.

Seda ÇAYAN
Manisa, 2019



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Lerch ve Pell Polinomlarının Matris Özellikleri ve Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Seda ÇAYAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Bu tezde, lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Cauchy, Dirichlet, Neumann veya Robin koşulları altında, yani Cauchy, Dirichlet, Neumann ya da Robin problemlerinin, yaklaşık çözümlerini bulmak için Lerch polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi ve Pell polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Kullanılan yöntemlerde, çözümün katsayıları matris formuna, yani karşı gelen cebirsel bir denklem sistemine, indirgenerek problemlerin yaklaşık çözümlerine ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlardan, önerilen yöntemlerin uygulanmasının etkili ve kolay olduğu gözlemlenmiştir.

Çalışmada ilk olarak, kısmi diferansiyel denklemlerin fen ve mühendislik alanlarındaki kullanımı, tarihsel gelişim süreci ve çözüm yöntemleri incelenmiştir. Daha sonra, kısmi diferansiyel denklemlerin genel bilgileri, Lerch polinomlarının tanımı ve grafikleri ile beraber Pell polinomlarının tanımı ve grafikleri verilmiştir. Ardından, Bahsedilen polinomların ve türevlerinin temel matris bağlantıları kullanılarak, lineer kısmi diferansiyel denklemler için, sırasıyla, Lerch matris sıralama yöntemi ve Pell matris sıralama yöntemi açıklanmıştır. Ayrıca, Laplace, Poisson, Helmholtz, telgraf, konveksiyon difüzyon, 1-boyutlu ısı, sönümlü dalga, titreşim gibi lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Cauchy, Dirichlet, Neumann veya Robin koşulları altındaki nümerik çözümleri için örnekler verilmiştir. Önerilen yöntemlerin etkinliğini ve güvenilirliğini göstermek için rezidüel hata analizi yapılarak, elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler ile açıklanmış; irdelenmiş ve yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi Diferansiyel Denklemler, Lerch Polinomları, Pell Polinomları, Matris Sıralama Yöntemi

2019, 82 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Matrix Properties of Lerch and Pell Polynomials and Applications to Linear Partial Differential Equations

Seda ÇAYAN

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

In this thesis, a matrix collocation method based on Lerch polynomials and a matrix collocation method based on Pell polynomials are developed to obtain the approximate solutions of linear partial differential equations under the Cauchy, Dirichlet, Neumann or Robin conditions, which correspond to Cauchy, Dirichlet, Neumann or Robin problems. In used methods, the coefficients are reduced to the matrix forms, which correspond to the system of algebraic equations and the approximate solution of the problem is reached. From the obtained results, it is observed that implementation of the proposed methods is efficient and easy.

In study, firstly, utilization in the fields of the science and engineering, the historical development process and the solution methods of the partial differential equations are examined. Thereafter, general information of partial differential equations, definition of Lerch polynomials and their graphics along with definition of Pell polynomials and their graphics are given. Behind, by using matrix relations of the mentioned polynomials and their derivatives, Lerch matrix collocation method and Pell matrix collocation method are explained for linear partial differential equations, respectively. Also, numerical examples are performed for linear partial differential equations as Laplace, Poisson, Helmholtz, telegraph, convection diffusion, 1-D heat, damped wave, vibration, under the Cauchy, Dirichlet, Neumann and Robin conditions. Some numerical examples together with residual error analysis are performed to illustrate the efficiency of the method and the obtained results are scrutinized and interpreted.

Keywords: Partial Differential Equations, Lerch Polynomials, Pell Polynomials, Matrix Collocation Method

2019, 82 pages

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler fen ve mühendislik alanlarında önemli bir rol oynar. Matematiksel fizik problemlerinin çoğu kısmi diferansiyel denklemleri içerir. Akışkanlar dinamiği, elektrik, manyetizma, mekanik ve ısı akışı gibi çoğu fiziksel fenomen kısmi diferansiyel denklemler ile açıklanır. Bu denklemlerden bazıları aşağıdaki gibidir [1-6]:

- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace denklemi)
- $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ (Tricomi denklemi)
- $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ (Poisson denklemi)
- $\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$, λ sabit (Helmholtz denklemi)
- $u_t - \alpha u_{xx} = 0$, α sabit (Isı denklemi)
- $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0$, α sabit (Dalga denklemi)
- $u_{tt} + ku_t = c^2 u_{xx}$, k, c sabit (Sönümlü dalga denklemi)
- $u_t = Du_{xx} - vu_x$, D, v sabit (Konveksiyon difüzyon denklemi)
- $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$, c, α, β sabit (Telgraf denklemi)
- $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t - \gamma u + F(x, t)$ (Telefon denklemi)
- $iu_t + u_{xx} = 0$, $i = \sqrt{-1}$ (Lineer Schrödinger denklemi)
- $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \mu^2 u$, c, μ sabit (Lineer Klein-Gordon denklemi)

Kısmi diferansiyel denklemler konusu Euler, D'Alembert, Lagrange ve Laplace'ın 18. yüzyılda yaptıkları çalışmalarına dayanmaktadır. Yayların titreşimi, sesin yayılması, sıvılarda dalgalanmalar ve yer çekimi ile ilgili çalışmalarda adi diferansiyel denklemlerin yetersiz kalması sonucunda ortaya çıkmıştır. Başlangıçta kısmi türevlerin hesabı 1734'te Euler tarafından yazılan hidrodinamik ile ilgili bir dizi makaleden sağlanmıştır ve 1744-1745 yıllarında D'Alembert tarafından dinamik ile ilgili çalışmalarıyla bağlantılı olarak genişletilmiştir [7,8].

Kısmi diferansiyel denklemlerin bazı durumlarda tam çözümlerinin elde edilememesi ya da tam çözümlerinin elde edilmesinin fazla karmaşık olması nedeniyle

doğru ve güvenilir sonuçların elde edilebileceği yaklaşık (nümerik) zmlere ihtiyaç duyulmuştur. 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren yüksek hızda işlem yapabilmeye olanak sağlayan bilgisayarların kullanımıyla nümerik üzümlerin elde edilmesi ciddi bir gelişme göstermiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik üzümlerini elde etmek için sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, spline sıralama yöntemi ve wavelet yöntemi gibi yöntemler kullanılmıştır [9,10].

Son yıllarda Sezer ve arkadaşları tarafından kısmi diferansiyel denklemlerin üzümlerini bulmak için; Taylor [11], Chebyshev [12], Laguerre [13], Legendre [14], Euler [15], Bernoulli [16] ve Bernstein [17] polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemleri kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında, Lerch ve Pell polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemleri kullanılarak lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Cauchy, Dirichlet, Neumann ve Robin gibi problemlerinin nümerik zmlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerle İlgili Temel Kavramlar

Bağımlı değişkenleri, bağımsız değişkenleri ve bir (ya da daha fazla) bağımlı değişkenin bir (ya da daha fazla) bağımsız değişkene göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren denklemlere diferansiyel denklemler denir. Bir diferansiyel denklemin bağımlı değişkeni eğer sadece bir bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ise adi diferansiyel denklem, eğer iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ise kısmi diferansiyel denklem adını alır. Bir kısmi diferansiyel denklemin, bağımlı değişkeni ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlerine göre türevlerinin herhangi birini içeren terimlerinin doğrusal olması durumunda denklem lineerdir; aksi halde lineer değildir. Eğer n . mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin katsayıları $m < n$ olacak şekilde m . mertebeden kısmi türevlere sahip ise, denklem quasi-lineerdir. u 'nun bağımlı değişken, x ve t 'nin ise bağımsız değişken olduğu n . mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0$$

olarak yazılır. A, B, C, D, E, F ve G sabit veya x ve t 'ye bağlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$$

biçiminde yazılabilir. $\Delta = B^2 - 4AC$ olmak üzere $\Delta = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda denklem parabolik, $\Delta > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda denklem hiperbolik ve $\Delta < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda denklem eliptik olarak adlandırılır [1-6,18].

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılırken genellikle denklemin özel çözümünü bulmayı sağlayan yardımcı koşullar kullanılır. Koşulların sayısı her bir bağımsız değişkenin en yüksek mertebeli türevine dayalı olarak belirlenir. Bu koşullar başlangıç koşulları ve/veya sınır koşulları olabilir. n . mertebeden bir lineer kısmi diferansiyel denklemin $a \leq x \leq b$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere; başlangıç koşulları (ya da Cauchy koşulları)

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ ve } u_t(x, 0) = \varphi_2(x);$$

Dirichlet sınır koşulları (ya da birinci tip sınır koşulları)

$$u(a, t) = \varphi_3(t) \text{ ve } u(b, t) = \varphi_4(t);$$

Neumann sınır koşulları (ya da ikinci tip sınır koşulları)

$$u_x(a,t) = \varphi_5(t) \text{ ve } u_x(b,t) = \varphi_6(t);$$

Robin sınır koşulları (ya da üçüncü tip sınır koşulları)

$$\alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = \varphi_7(t) \text{ ve } \alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = \varphi_8(t)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Burada $f_{i,j}(x,t)$, $g(x,t)$, α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$, $\varphi_5(t)$, $\varphi_6(t)$, $\varphi_7(t)$ ve $\varphi_8(t)$ sürekli fonksiyonlardır [19-22].

2.2. Lerch Polinomlarıyla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. (Üreteç Fonksiyonu): $G(x,t)$ fonksiyonu t 'nin kuvvetlerine göre

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde yazılabilir olsun. Bu durumda $G(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisinin bir üreteç fonksiyonu denir [23].

Tanım 2.2.2. (Stirling Sayıları): Stirling sayıları faktöriyel kuvvetler ile standart kuvvetler arasındaki bağlantıyı açıklamak için, James Stirling tarafından ortaya konulmuştur [24]. Bu sayılar aşağıda verilen bağıntılar ile tanımlanmıştır [25]:

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1), \quad (x)_0 = 1, \quad n \geq 1$$

olmak üzere

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n,k) x^k, \quad n \geq 0$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n,k) (x)_k, \quad n \geq 0.$$

Burada $s(n,k)$ 1. tip Stirling sayılarını, $S(n,k)$ 2. tip Stirling sayılarını göstermektedir. 1. tip Stirling sayıları $s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k)$ rekürans bağıntısı ile ifade edilir. 2. tip Stirling sayıları $S(n+1,k) = S(n,k-1) - kS(n,k)$ rekürans bağıntısı ile ifade edilir.

Bu çalışmada kullanılan 1. tip Stirling sayıları ile ilgili bazı özellikler aşağıdaki gibidir [25, 26]:

- $s(n,1) = (-1)^{n-1} (n-1)! , n \geq 0$
- $s(n,n) = 1 , n \geq 0$
- $s(n,n-1) = -\binom{n}{2} , n \geq 0$
- $s(n+1,0) = 0 , n \geq 0 .$

Tanım 2.2.3. (Lerch Polinomları) [27,28]: Lerch polinomları,

$$(1 - x \log(1+t))^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, \lambda) t^n$$

üreteç fonksiyonu tarafından tanımlanır. Burada üreteç fonksiyonunun bileşkesi $x \log(1+t)$ olup bu ifade $\frac{k!}{n!} s(n,k) x^k$ ifadesine eşittir ve $\left(\frac{1}{1-x}\right)^\lambda$ üreteç fonksiyonunun katsayıları $\binom{n+\lambda-1}{n}$ ifadesi ile belirlenir. Daha sonra standart metotlar kullanılarak $L_0(x, \lambda) = 1$ başlangıç değeri ve Lerch polinomlarının açık bağıntısı

$$L_n(x, \lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!} s(n,k) \binom{k+\lambda-1}{k} x^k \quad (2.1)$$

olarak elde edilir. Bu bağıntıdan elde edilen Lerch polinomlarının açık gösterimleri ve $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 2$ için Lerch polinomlarının grafikleri aşağıdaki gibidir:

$$L_0(x, \lambda) = 1$$

$$L_1(x, \lambda) = \lambda x$$

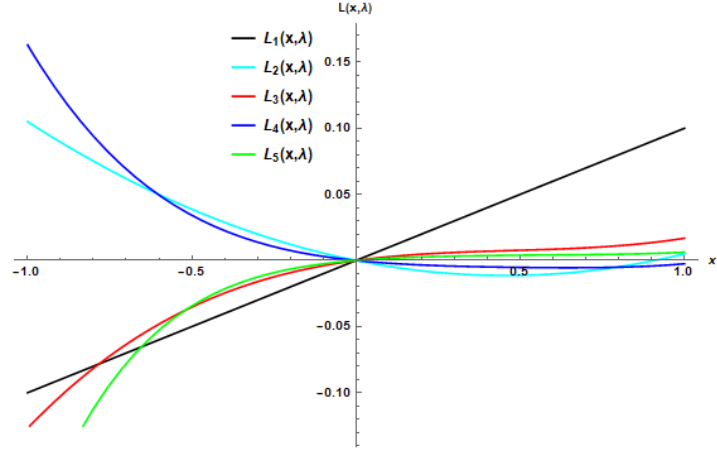
$$L_2(x, \lambda) = -\frac{\lambda}{2} x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} x^2$$

$$L_3(x, \lambda) = \frac{\lambda}{3} x - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} x^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{6} x^3$$

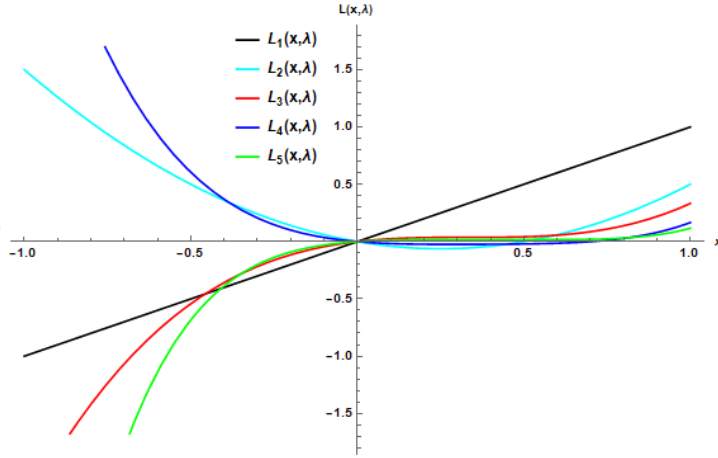
$$L_4(x, \lambda) = -\frac{\lambda}{4} x + \frac{11\lambda(\lambda+1)}{24} x^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{4} x^3 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{24} x^4$$

$$L_5(x, \lambda) = \frac{\lambda}{5} x - \frac{5\lambda(\lambda+1)}{12} x^2 + \frac{7\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{24} x^3 - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{12} x^4 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+5)}{120} x^5$$

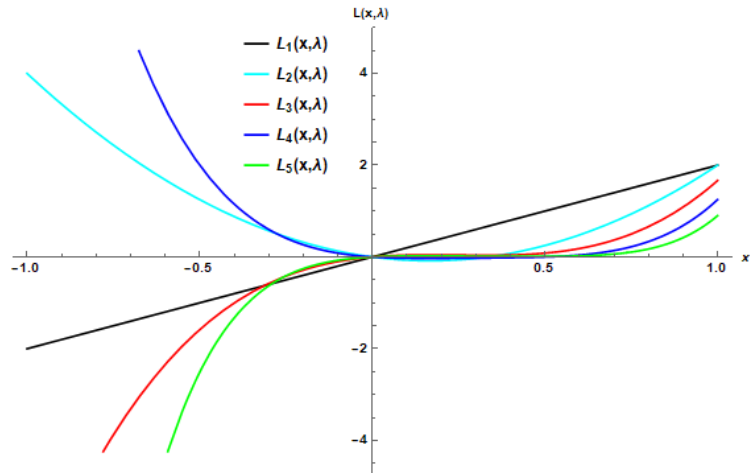
⋮



Şekil 2.1 $\lambda = 0.1$ için Lerch Polinomlarının Grafiği



Şekil 2.2 $\lambda = 1$ için Lerch Polinomlarının Grafiği



Şekil 2.3 $\lambda = 2$ için Lerch Polinomlarının Grafiği

2.3. Pell Polinomlarıyla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1. (Pell Polinomları) [29,30]: Pell polinomları aşağıdaki

$$(1 - 2xt - t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)t^n$$

üreteç fonksiyonu tarafından tanımlanır. $(1 - 2xt - t^2)^{-1}$ ifadesi t 'nin kuvvetleri cinsinden yazılıp, daha sonra t^n ile katsayılar karşılaştırılarak

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

ifadesi elde edilir. Buradan da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(n-1-k)!}{k!(n-1-2k)!} (2x)^{n-1-2k}$$
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k-1} \quad (2.2)$$

Pell polinomlarının açık bağıntısı elde edilir. Ayrıca Pell polinomlarının rekürans bağıntısı Horadam tarafından

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1$$

şeklinde tanımlanmıştır [29,30,31]. Bu bağıntılardan elde edilen Pell polinomlarının açık gösterimleri ve Pell polinomlarının grafiği aşağıdaki gibidir:

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = 1$$

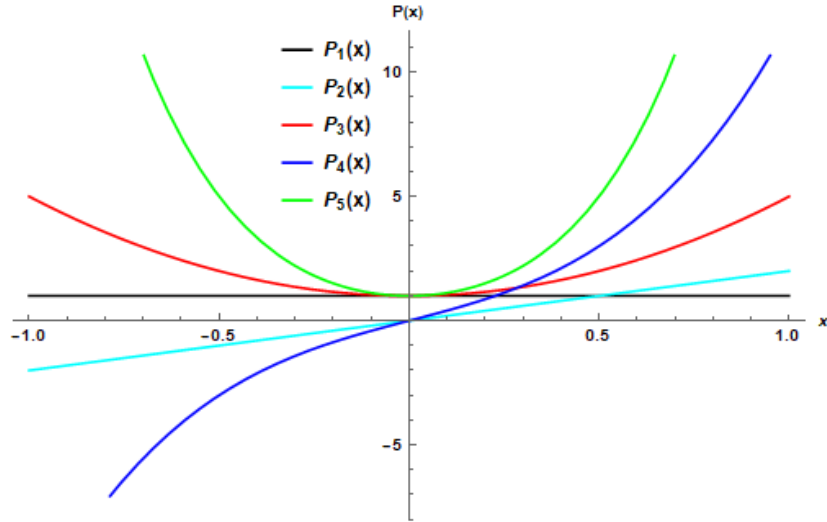
$$P_2(x) = 2x$$

$$P_3(x) = 1 + 4x^2$$

$$P_4(x) = 4x + 8x^3$$

$$P_5(x) = 1 + 12x^2 + 16x^4$$

⋮



Şekil 2.4 Pell Polinomlarının Grafiği

2.4. Tezin Amacı

Bu tezin amacı, (2.1) Lerch ve (2.2) Pell polinomlarının ve türevlerinin matris özellikleriyle beraber sıralama noktalarını kullanarak, lineer kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç, sınır veya karışık koşullar altında yaklaşık çözümlerini bulmak ve çözümlerin hata analizini yapmaktır. Dolayısıyla, lineer kısmi diferansiyel denklemlerin bahsedilen koşullar altındaki durumuna göre matris sıralama yöntemi kullanılarak yaklaşık çözümleri bulunmakta ve hata hesapları yapılmaktadır. Ayrıca bu konu üzerinde çalışılmış yöntemler ve ilgili çalışmalar göz önüne alınarak bu çalışmada geliştirilmiş olan Lerch ve Pell matris sıralama yöntemleri ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Materyal

Tezin materyali, çalışmanın temelini oluşturan Pell ve Lerch polinomları ile birlikte lineer kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili Cauchy, Dirichlet, Neumann ve Robin gibi problemleri içeren makaleler, kitaplar ve aynı zamanda matris ve sıralama yöntemlerini içeren bilimsel süreli yayınlardan oluşmaktadır.

3.2. Yöntemler

Bu bölümde, u bağımlı değişken, x ile t bağımsız değişken ve $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x,t) \frac{\partial^{i+j} u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} = g(x,t) \quad (3.1)$$

formundaki n . mertebeden bir lineer kısmi diferansiyel denklemin [3], $a \leq x \leq b$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere,

başlangıç koşulları (ya da Cauchy koşulları) için

$$u(x,0) = \varphi_1(x) \text{ ve } u_t(x,0) = \varphi_2(x); \quad (3.2)$$

Dirichlet sınır koşulları için

$$u(a,t) = \varphi_3(t) \text{ ve } u(b,t) = \varphi_4(t); \quad (3.3)$$

Neumann sınır koşulları için

$$u_x(a,t) = \varphi_5(t) \text{ ve } u_x(b,t) = \varphi_6(t); \quad (3.4)$$

Robin sınır koşulları için

$$\alpha_1 u(a,t) + \beta_1 u_x(a,t) = \varphi_7(t) \text{ ve } \alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = \varphi_8(t) \quad (3.5)$$

eşitlikleri ile tanımlanan başlangıç ve/veya sınır koşulları altındaki yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için (2.1) Lerch polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi ve (2.2) Pell polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi kullanılmaktadır.

(3.1)-(3.2) probleminin $u_N(x,t)$ yaklaşık çözümleri

$$u(x,t) \cong u_N(x,t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{m,n} L_{m,n}(x,t,\lambda)$$

$$u_N(x, t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{m,n} L_m(x, \lambda) L_n(t, \lambda) \quad (3.6)$$

kesilmiş Lerch serisi formunda ve

$$u(x, t) \cong u_N(x, t) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} P_{r+1,s+1}(x, t)$$

$$u_N(x, t) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} P_{r+1}(x) P_{s+1}(t) \quad (3.7)$$

kesilmiş Pell serisi formunda elde edilecektir. Burada $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $L_m(x, \lambda)$ ve $L_n(t, \lambda)$ Lerch polinomları, $a_{m,n}$ Lerch polinomlarının bilinmeyen katsayıları, $r, s = 0, 1, 2, \dots, N$ için $P_{r+1}(x)$ ve $P_{s+1}(t)$ Pell polinomları, $a_{r,s}$ Pell polinomlarının bilinmeyen katsayıları ve N kesme sınırı $N \geq 2$ olacak şekilde herhangi bir pozitif tamsayıdır.

3.2.1. Linear Kısmi Diferansiyel Denklemler için Lerch Matris Sıralama Yöntemi

3.2.1.1 Temel Matris Bağlıları

(2.1) ifadesi ile tanımlanan Lerch polinomları başlangıç değeri $L_0(x, \lambda) = 1$

ve $s(n, k)$ 1. tip Stirling sayıları olmak üzere

$$L_1(x, \lambda) = \frac{1!}{1!} s(1, 1) \binom{\lambda}{1} x^0$$

$$L_2(x, \lambda) = \frac{1!}{2!} s(2, 1) \binom{\lambda}{1} x^1 + \frac{2!}{2!} s(2, 2) \binom{\lambda+1}{2} x^2$$

$$L_3(x, \lambda) = \frac{1!}{3!} s(3, 1) \binom{\lambda}{1} x^1 + \frac{2!}{3!} s(3, 2) \binom{\lambda+1}{2} x^2 + \frac{3!}{3!} s(3, 3) \binom{\lambda+2}{3} x^3$$

⋮

$$L_N(x, \lambda) = \frac{1!}{N!} s(N, 1) \binom{\lambda}{1} x^1 + \frac{2!}{N!} s(N, 2) \binom{\lambda+1}{2} x^2 + \frac{3!}{N!} s(N, 3) \binom{\lambda+2}{3} x^3$$

$$+ \dots + \frac{N!}{N!} s(N, N) \binom{\lambda+N-1}{N} x^N$$

olup buradan matris formu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c} L_0(x, \lambda) \\ L_1(x, \lambda) \\ L_2(x, \lambda) \\ L_3(x, \lambda) \\ \vdots \\ L_N(x, \lambda) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{1!}{1!} s(1,1) \binom{\lambda}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{1!}{2!} s(2,1) \binom{\lambda}{1} & \frac{2!}{2!} s(2,2) \binom{\lambda+1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{1!}{3!} s(3,1) \binom{\lambda}{1} & \frac{2!}{3!} s(3,2) \binom{\lambda+1}{2} & \frac{3!}{3!} s(3,3) \binom{\lambda+2}{3} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \frac{1!}{N!} s(N,1) \binom{\lambda}{1} & \frac{2!}{N!} s(N,2) \binom{\lambda+1}{2} & \frac{3!}{N!} s(N,3) \binom{\lambda+2}{3} & \cdots & \frac{N!}{N!} s(N,N) \binom{\lambda+N-1}{N}
\end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^N \end{array} \right] \\
\hline
\underbrace{\mathbf{L}(x, \lambda)^T}_{\mathbf{L}(x, \lambda)^T} \quad \underbrace{\mathbf{C}(\lambda)^T}_{\mathbf{C}(\lambda)^T} \quad \underbrace{\mathbf{X}(x)^T}_{\mathbf{X}(x)^T}
\end{array}$$

Burada oluşturulan ifade düzenlenerek

$$\mathbf{L}(x, \lambda)^T = \mathbf{C}(\lambda)^T \mathbf{X}(x)^T \Rightarrow \mathbf{L}(x, \lambda) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda); \quad (3.8)$$

matris bağıntısı elde edilir. Daha sonra (3.8) bağıntısı (3.6) serisinde yerine yazılarak

$$u_N(x, t) = \mathbf{L}(x, \lambda) \bar{\mathbf{L}}(t, \lambda) \mathbf{A} \quad (3.9)$$

$$u_N(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A} \quad (3.10)$$

eşitliği bulunur; burada matrisler

$$\mathbf{L}(x, \lambda) = \left[L_0(x, \lambda) \quad L_1(x, \lambda) \quad L_2(x, \lambda) \quad L_3(x, \lambda) \quad \cdots \quad L_N(x, \lambda) \right]$$

$$\bar{\mathbf{L}}(t, \lambda) = \text{diag}[\mathbf{L}(t, \lambda), \mathbf{L}(t, \lambda), \mathbf{L}(t, \lambda), \dots, \mathbf{L}(t, \lambda)]$$

$$\mathbf{A} = \left[a_{0,0} \quad a_{0,1} \quad a_{0,2} \quad \cdots \quad a_{0,N} \quad a_{1,0} \quad a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,N} \quad \cdots \quad a_{N,0} \quad a_{N,1} \quad a_{N,2} \quad \cdots \quad a_{N,N} \right]^T$$

$$\mathbf{A}_i = \left[a_{i,0} \quad a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,N} \right]^T, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_0 \quad \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_N \right]^T$$

ve

$$\mathbf{X}(x) = \left[1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \cdots \quad x^N \right],$$

$$\bar{\mathbf{X}}(t) = \text{diag}[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t), \dots, \mathbf{X}(t)]$$

$$\mathbf{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1!}{1!} s(1,1) \binom{\lambda}{1} & \frac{1!}{2!} s(2,1) \binom{\lambda}{1} & \frac{1!}{3!} s(3,1) \binom{\lambda}{1} & \cdots & \frac{1!}{N!} s(N,1) \binom{\lambda}{1} \\ 0 & 0 & \frac{2!}{2!} s(2,2) \binom{\lambda+1}{2} & \frac{2!}{3!} s(3,2) \binom{\lambda+1}{2} & \cdots & \frac{2!}{N!} s(N,2) \binom{\lambda+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3!}{3!} s(3,3) \binom{\lambda+2}{3} & \cdots & \frac{3!}{N!} s(N,3) \binom{\lambda+2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{N!}{N!} s(N,N) \binom{\lambda+N-1}{N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\lambda)^0 = \mathbf{I} = \text{diag}[1,1,1,\dots,1], \quad \bar{\mathbf{C}}(\lambda) = \text{diag}[\mathbf{C}(\lambda), \mathbf{C}(\lambda), \mathbf{C}(\lambda), \dots, \mathbf{C}(\lambda)]$$

şeklinde. Öte yandan, $\mathbf{X}(x)$ matrisi ile $\mathbf{X}'(x)$, $\mathbf{X}''(x)$ ve $\mathbf{X}^{(i)}(x)$ türevleri ve $\bar{\mathbf{X}}(t)$ matrisi ile $\bar{\mathbf{X}}'(t)$, $\bar{\mathbf{X}}''(t)$ ve $\bar{\mathbf{X}}^{(j)}(t)$ türevleri arasındaki bağıntı

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{I} = \text{diag}[1,1,1,\dots,1], \quad \bar{\mathbf{B}} = \text{diag}[\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}]$$

olacak şekilde

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}, \quad \mathbf{X}''(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{B} = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2, \dots, \quad \mathbf{X}^{(i)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^i \quad (3.11)$$

$$\bar{\mathbf{X}}'(t) = \bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}, \quad \bar{\mathbf{X}}''(t) = \bar{\mathbf{X}}'(t)\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}^2, \dots, \quad \bar{\mathbf{X}}^{(j)}(t) = \bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}^j \quad (3.12)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Daha sonra (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j} u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} &\cong \frac{\partial^{i+j} u_N(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} = \mathbf{X}^{(i)}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}^{(j)}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A} \\ \frac{\partial^{i+j} u_N(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.13)$$

bağıntısı elde edilir.

3.2.1.2 Çözüm Yöntemi

(3.13) bağıntısı (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x,t) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A} = g(x,t)$$

denklemini bulunur. Elde edilen denklem

$$\mathbf{W}(x,t) = \sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x,t) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}(x,t) \mathbf{A} = g(x,t) \quad (3.14)$$

biçiminde kısaca yazılabilir. Daha sonra, $x \in [a,b]$ ve $t \in [0,T]$ olmak üzere

$$x_\gamma = a + \frac{b-a}{N} \gamma, \quad t_\mu = 0 + \frac{T-0}{N} \mu, \quad \gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

ile tanımlanan sıralama noktaları (3.14) denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{W}(x_\gamma, t_\mu) \mathbf{A} = g(x_\gamma, t_\mu), \quad \gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N$$

denklemler sistemi elde edilir. Elde edilen denklemler sistemi

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{W}(x_0, t_0) \mathbf{A} = g(x_0, t_0) \\ \mathbf{W}(x_0, t_1) \mathbf{A} = g(x_0, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(x_0, t_N) \mathbf{A} = g(x_0, t_N) \end{array} \right\} \mathbf{W}_0 \mathbf{A} = \mathbf{G}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{W}(x_1, t_0) \mathbf{A} = g(x_1, t_0) \\ \mathbf{W}(x_1, t_1) \mathbf{A} = g(x_1, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(x_1, t_N) \mathbf{A} = g(x_1, t_N) \end{array} \right\} \mathbf{W}_1 \mathbf{A} = \mathbf{G}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{W}(x_N, t_0) \mathbf{A} = g(x_N, t_0) \\ \mathbf{W}(x_N, t_1) \mathbf{A} = g(x_N, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(x_N, t_N) \mathbf{A} = g(x_N, t_N) \end{array} \right\} \mathbf{W}_N \mathbf{A} = \mathbf{G}_N$$

$$\Rightarrow \mathbf{W}_\gamma \mathbf{A} = \mathbf{G}_\gamma, \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

olup burada

$$\mathbf{W}_\gamma = \left[\mathbf{W}(x_\gamma, t_0) \quad \mathbf{W}(x_\gamma, t_1) \quad \cdots \quad \mathbf{W}(x_\gamma, t_N) \right]^T$$

ve

$$\mathbf{G}_\gamma = \left[\mathbf{G}(x_\gamma, t_0) \quad \mathbf{G}(x_\gamma, t_1) \quad \cdots \quad \mathbf{G}(x_\gamma, t_N) \right]^T$$

olarak tanımlanır. Buradan (3.16) denklemi,

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_0 \quad \mathbf{W}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{W}_N]^T \text{ ve } \mathbf{G} = [\mathbf{G}_0 \quad \mathbf{G}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{G}_N]^T$$

olmak üzere, kısaca

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.17)$$

biçiminde yazılabilir.

Ayrıca (3.2) başlangıç koşulları

$$u(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\mathbf{A} \text{ ve } u_t(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\mathbf{A}$$

matris denklemleriyle ifade edilebilir. Daha sonra bu ifadeler

$$\mathbf{U}_1(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) \text{ ve } \mathbf{U}_2(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_1(x,0)\mathbf{A} = \varphi_1(x) \text{ ve } \mathbf{U}_2(x,0)\mathbf{A} = \varphi_2(x)$$

şeklinde düzenlenip (3.15) de tanımlanan $\gamma = 0, 1, 2, \dots, N$ için x_γ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_1(x_\gamma, 0)\mathbf{A} = \varphi_1(x_\gamma) \text{ ve } \mathbf{U}_2(x_\gamma, 0)\mathbf{A} = \varphi_2(x_\gamma)$$

olup

$$\mathbf{U}_1\mathbf{A} = \Phi_1 \text{ ya da } [\mathbf{U}_1; \Phi_1] \text{ ve } \mathbf{U}_2\mathbf{A} = \Phi_2 \text{ ya da } [\mathbf{U}_2; \Phi_2]; \quad (3.18)$$

$$\mathbf{U}_1 = [\mathbf{U}_1(x_1, 0) \quad \mathbf{U}_1(x_2, 0) \quad \cdots \quad \mathbf{U}_1(x_N, 0)]^T, \mathbf{U}_2 = [\mathbf{U}_2(x_1, 0) \quad \mathbf{U}_2(x_2, 0) \quad \cdots \quad \mathbf{U}_2(x_N, 0)]^T,$$

$$\Phi_1 = [\varphi_1(x_1) \quad \varphi_1(x_2) \quad \cdots \quad \varphi_1(x_N)]^T \text{ ve } \Phi_2 = [\varphi_2(x_1) \quad \varphi_2(x_2) \quad \cdots \quad \varphi_2(x_N)]^T$$

elde edilir.

Aynı düzenlemeler (3.3) Dirichlet sınır koşulları için de yapılırsa;

$$u(a,t) = \mathbf{X}(a)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\mathbf{A} \text{ ve } u(b,t) = \mathbf{X}(b)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\mathbf{A}$$

ifadeleri

$$\mathbf{U}_3(a,t) = \mathbf{X}(a)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) \text{ ve } \mathbf{U}_4(b,t) = \mathbf{X}(b)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_3(a,t)\mathbf{A} = \varphi_3(t) \text{ ve } \mathbf{U}_4(b,t)\mathbf{A} = \varphi_4(t)$$

biçiminde düzenlenir ve (3.15) de tanımlanan $\mu = 0, 1, 2, \dots, N$ için t_μ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$\mathbf{U}_3(a, t_\mu)\mathbf{A} = \varphi_3(t_\mu) \text{ ve } \mathbf{U}_4(b, t_\mu)\mathbf{A} = \varphi_4(t_\mu)$$

olup

$$\mathbf{U}_3\mathbf{A} = \Phi_3 \text{ ya da } [\mathbf{U}_3; \Phi_3] \text{ ve } \mathbf{U}_4\mathbf{A} = \Phi_4 \text{ ya da } [\mathbf{U}_4; \Phi_4]; \quad (3.19)$$

$$\mathbf{U}_3 = [\mathbf{U}_3(a, t_1) \quad \mathbf{U}_3(a, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_3(a, t_N)]^T, \mathbf{U}_4 = [\mathbf{U}_4(b, t_1) \quad \mathbf{U}_4(b, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_4(b, t_N)]^T,$$

$$\Phi_3 = [\varphi_3(t_1) \quad \varphi_3(t_2) \quad \dots \quad \varphi_3(t_N)]^T \text{ ve } \Phi_4 = [\varphi_4(t_1) \quad \varphi_4(t_2) \quad \dots \quad \varphi_4(t_N)]^T$$

olur.

Aynı işlemler (3.4) Neumann sınır koşulları için de yapılırsa;

$$u_x(a, t) = \mathbf{X}(a)\mathbf{BC}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\mathbf{A} \text{ ve } u_x(b, t) = \mathbf{X}(b)\mathbf{BC}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\mathbf{A}$$

ifadeleri

$$\mathbf{U}_5(a, t) = \mathbf{X}(a)\mathbf{BC}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) \text{ ve } \mathbf{U}_6(b, t) = \mathbf{X}(b)\mathbf{BC}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_5(a, t)\mathbf{A} = \varphi_5(t) \text{ ve } \mathbf{U}_6(b, t)\mathbf{A} = \varphi_6(t)$$

biçiminde düzenlenir ve (3.15) de tanımlanan $\mu = 0, 1, 2, \dots, N$ için t_μ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa,

$$\mathbf{U}_5(a, t_\mu)\mathbf{A} = \varphi_5(t_\mu) \text{ ve } \mathbf{U}_6(b, t_\mu)\mathbf{A} = \varphi_6(t_\mu)$$

olup

$$\mathbf{U}_5\mathbf{A} = \Phi_5 \text{ ya da } [\mathbf{U}_5; \Phi_5] \text{ ve } \mathbf{U}_6\mathbf{A} = \Phi_6 \text{ ya da } [\mathbf{U}_6; \Phi_6]; \quad (3.20)$$

$$\mathbf{U}_5 = [\mathbf{U}_5(a, t_1) \quad \mathbf{U}_5(a, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_5(a, t_N)]^T, \mathbf{U}_6 = [\mathbf{U}_6(b, t_1) \quad \mathbf{U}_6(b, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_6(b, t_N)]^T,$$

$$\Phi_5 = [\varphi_5(t_1) \quad \varphi_5(t_2) \quad \dots \quad \varphi_5(t_N)]^T \text{ ve } \Phi_6 = [\varphi_6(t_1) \quad \varphi_6(t_2) \quad \dots \quad \varphi_6(t_N)]^T$$

elde edilir.

Son olarak aynı işlemler (3.5) Robin sınır koşulları için de yapılırsa;

$$\alpha_1 u(a, t) + \beta_1 u_x(a, t) = \{\alpha_1 \mathbf{X}(a)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \beta_1 \mathbf{X}(a)\mathbf{BC}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)\}\mathbf{A}$$

ve

$$\alpha_2 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = \{ \alpha_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \beta_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{B} \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \} \mathbf{A}$$

ifadeleri

$$\mathbf{U}_7(a,t) = \alpha_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \beta_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{B} \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

ve

$$\mathbf{U}_8(b,t) = \alpha_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \beta_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{B} \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_7(a,t) \mathbf{A} = \varphi_7(t) \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_8(b,t) \mathbf{A} = \varphi_8(t)$$

biçiminde düzenlenir ve (3.15) de tanımlanan $\mu = 0, 1, 2, \dots, N$ için t_μ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$\mathbf{U}_7(a, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_7(t_\mu) \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_8(b, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_8(t_\mu)$$

olup

$$\mathbf{U}_7 \mathbf{A} = \Phi_7 \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{U}_7; \Phi_7] \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_8 \mathbf{A} = \Phi_8 \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{U}_8; \Phi_8]; \quad (3.21)$$

$$\mathbf{U}_7 = [\mathbf{U}_7(a, t_1) \quad \mathbf{U}_7(a, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_7(a, t_N)]^T, \quad \mathbf{U}_8 = [\mathbf{U}_8(b, t_1) \quad \mathbf{U}_8(b, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_8(b, t_N)]^T,$$

$$\Phi_7 = [\varphi_7(t_1) \quad \varphi_7(t_2) \quad \dots \quad \varphi_7(t_N)]^T \quad \text{ve} \quad \Phi_8 = [\varphi_8(t_1) \quad \varphi_8(t_2) \quad \dots \quad \varphi_8(t_N)]^T$$

olur.

Daha sonra ise (3.1) denkleminin (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) koşulları altındaki çözümünü elde edebilmek için; (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) arttırılmış matrislerinin satır sayısı kadar (3.17) arttırılmış matrisinin herhangi satırları silinip yerine (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) arttırılmış matrisleri yazılarak, yeni arttırılmış matris

$$\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad \text{ya da} \quad [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$$

olarak elde edilir. Eğer $\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = \text{rank}([\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]) = (N+1)^2$ ise $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ arttırılmış matrisinin çözümü $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ şeklinde ve \mathbf{A} tek olarak bulunur. Böylece Lerch polinomlarının bilinmeyen katsayıları elde edilir ve dolayısıyla yaklaşık çözüm (3.6) formunda bulunmuş olur.

3.2.2. Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Pell Matris Sıralama Yöntemi

3.2.2.1 Temel Matris Bağlıları

(2.2) ifadesi ile tanımlanan Pell polinomlarının, $P_0(x)=0$ ve $P_1(x)=1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$P_2(x) = 2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^1$$

$$P_3(x) = 2^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x^0 + 2^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} x^2$$

$$P_4(x) = 2^1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x^1 + 2^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} x^3$$

$$P_5(x) = 2^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x^0 + 2^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x^2 + 2^4 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} x^4$$

⋮

$$P_N(x) = \begin{cases} 2^0 \begin{pmatrix} \frac{N-1}{2} \\ \frac{N-1}{2} \end{pmatrix} x^0 + 2^2 \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2} \\ \frac{N-3}{2} \end{pmatrix} x^2 + \dots + 2^{N-1} \begin{pmatrix} N-1 \\ 0 \end{pmatrix} x^{N-1}, N \text{ tek ise} \\ 2^1 \begin{pmatrix} \frac{N}{2} \\ \frac{N-2}{2} \end{pmatrix} x^1 + 2^3 \begin{pmatrix} \frac{N+2}{2} \\ \frac{N-4}{2} \end{pmatrix} x^3 + \dots + 2^{N-1} \begin{pmatrix} N-1 \\ 0 \end{pmatrix} x^{N-1}, N \text{ çift ise} \end{cases}$$

olup matris formu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c} P_1(x) \\ P_2(x) \\ P_3(x) \\ P_4(x) \\ P_5(x) \\ \vdots \\ P_N(x); \\ (N \text{ tek}) \\ P_N(x); \\ (N \text{ çift}) \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^1 \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^0 \binom{1}{1} & 0 & 2^2 \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^1 \binom{2}{1} & 0 & 2^3 \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 2^0 \binom{2}{2} & 0 & 2^2 \binom{3}{1} & 0 & 2^4 \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^0 \binom{N-1}{2} & 0 & 2^2 \binom{N+1}{2} & 0 & 2^4 \binom{N+3}{2} & \cdots & 2^{N-1} \binom{N-1}{0} \\ 0 & 2^1 \binom{N}{2} & 0 & 2^3 \binom{N+2}{2} & 0 & \cdots & 2^{N-1} \binom{N-1}{0} \end{array} \right]}_{\mathbf{S}^T} \underbrace{\left[\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^{N-1} \end{array} \right]}_{\mathbf{X}(x)^T} \\
\mathbf{P}(x)^T \qquad \qquad \qquad \mathbf{S}^T \qquad \qquad \qquad \mathbf{X}(x)^T
\end{array}$$

Burada oluşturulan ifade düzenlenerek

$$\mathbf{P}(x)^T = \mathbf{S}^T \mathbf{X}(x)^T \Rightarrow \mathbf{P}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \quad (3.22)$$

elde edilir. Daha sonra (3.22) denklemi (3.4) denkleminde yerine yazılarak

$$u_N(x, t) = \mathbf{P}(x) \bar{\mathbf{P}}(t) \mathbf{A} \quad (3.23)$$

$$u_N(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \quad (3.24)$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\mathbf{P}(x) = \left[P_1(x) \quad P_2(x) \quad P_3(x) \quad P_4(x) \quad \cdots \quad P_{N+1}(x) \right]$$

$$\bar{\mathbf{P}}(t) = \text{diag} \left[\mathbf{P}(t), \mathbf{P}(t), \mathbf{P}(t), \dots, \mathbf{P}(t) \right]$$

$$\mathbf{A} = \left[a_{0,0} \quad a_{0,1} \quad a_{0,2} \quad \cdots \quad a_{0,N} \quad a_{1,0} \quad a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,N} \quad \cdots \quad a_{N,0} \quad a_{N,1} \quad a_{N,2} \quad \cdots \quad a_{N,N} \right]^T$$

$$\mathbf{A}_i = \left[a_{i,0} \quad a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,N} \right]^T, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_0 \quad \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_N \right]^T$$

Ayrıca,

$$\mathbf{X}(x) = \left[1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \cdots \quad x^N \right], \quad \bar{\mathbf{X}}(t) = \text{diag} \left[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t), \dots, \mathbf{X}(t) \right]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^0 \binom{1}{1} & 0 & 2^0 \binom{2}{2} & \dots & 2^0 \binom{\frac{N-1}{2}}{\frac{N-1}{2}} & 0 \\ 0 & 2^1 \binom{1}{0} & 0 & 2^1 \binom{2}{1} & 0 & \dots & 0 & 2^1 \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N-2}{2}} \\ 0 & 0 & 2^2 \binom{2}{0} & 0 & 2^2 \binom{3}{1} & \dots & 2^2 \binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^3 \binom{3}{0} & 0 & \dots & 0 & 2^3 \binom{\frac{N+2}{2}}{\frac{N-4}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^4 \binom{4}{0} & \dots & 2^4 \binom{\frac{N+3}{2}}{\frac{N-5}{2}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \underbrace{2^{N-1} \binom{N-1}{0}}_{N \text{ tek}} & \underbrace{2^{N-1} \binom{N-1}{0}}_{N \text{ çift}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^0 = \mathbf{I} = \text{diag}[1,1,1,\dots,1], \quad \bar{\mathbf{S}} = \text{diag}[\mathbf{S},\mathbf{S},\mathbf{S},\dots,\mathbf{S}]$$

şeklindedir. Öte yandan, $\mathbf{X}(x)$ matrisi ile $\mathbf{X}'(x)$, $\mathbf{X}''(x)$ ve $\mathbf{X}^{(i)}(x)$ türevleri ve $\bar{\mathbf{X}}(t)$ matrisi ile $\bar{\mathbf{X}}'(t)$, $\bar{\mathbf{X}}''(t)$ ve $\bar{\mathbf{X}}^{(j)}(t)$ türevleri arasındaki ilişki (3.11) ve (3.12) eşitlikleri ile ifade edilir. Daha sonra (3.23), (3.24), (3.11) ve (3.12) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j} u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} &\cong \frac{\partial^{i+j} u_N(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} = \mathbf{X}^{(i)}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}^{(j)}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \\ \frac{\partial^{i+j} u_N(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.25)$$

bağıntısı elde edilir.

3.2.2.2 Çözüm Yöntemi

(3.25) bağıntısı (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x,t) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} = g(x,t)$$

denklemini bulunur. Elde edilen denklem

$$\mathbf{W}(x,t) = \sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x,t) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^j \mathbf{S}}$$

olacak şekilde

$$\mathbf{W}(x,t) \mathbf{A} = g(x,t) \quad (3.26)$$

biçiminde kısaca yazılabilir. Daha sonra, $x \in [a,b]$ ve $t \in [0,T]$ olmak üzere, (3.15) eşitlikleri ile tanımlanan sıralama noktaları (3.26) denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{W}(x_\gamma, t_\mu) \mathbf{A} = g(x_\gamma, t_\mu), \quad \gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N$$

denklemler sistemi elde edilir. Elde edilen denklemler sistemi (3.16) ifadesi ile aynı olup

$$\mathbf{W}_\gamma = [\mathbf{W}(x_\gamma, t_0) \quad \mathbf{W}(x_\gamma, t_1) \quad \dots \quad \mathbf{W}(x_\gamma, t_N)]^T$$

ve

$$\mathbf{G}_\gamma = [\mathbf{G}(x_\gamma, t_0) \quad \mathbf{G}(x_\gamma, t_1) \quad \dots \quad \mathbf{G}(x_\gamma, t_N)]^T$$

olarak tanımlanır. Buradan (3.16) denklemini,

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_0 \quad \mathbf{W}_1 \quad \dots \quad \mathbf{W}_N]^T \quad \text{ve} \quad \mathbf{G} = [\mathbf{G}_0 \quad \mathbf{G}_1 \quad \dots \quad \mathbf{G}_N]^T$$

olmak üzere, kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.27)$$

denklemini biçiminde yazılabilir.

Ayrıca (3.2) başlangıç koşulları

$$u(x,0) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \quad \text{ve} \quad u_t(x,0) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

matris denklemleriyle ifade edilebilir. Daha sonra bu ifadeler

$$\mathbf{U}_1(x,0) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{S}} \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_2(x,0) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{S}}$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_1(x,0) \mathbf{A} = \varphi_1(x) \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_2(x,0) \mathbf{A} = \varphi_2(x)$$

şeklinde düzenlenip (3.15) de tanımlanan $\gamma = 0, 1, 2, \dots, N$ için x_γ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_1(x_\gamma, 0) \mathbf{A} = \varphi_1(x_\gamma) \quad \text{ve} \quad \mathbf{U}_2(x_\gamma, 0) \mathbf{A} = \varphi_2(x_\gamma)$$

olup

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_1 \text{ ya da } [\mathbf{U}_1; \mathbf{\Phi}_1] \text{ ve } \mathbf{U}_2 \mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_2 \text{ ya da } [\mathbf{U}_2; \mathbf{\Phi}_2]; \quad (3.28)$$

$$\mathbf{U}_1 = [\mathbf{U}_1(x_1, 0) \quad \mathbf{U}_1(x_2, 0) \quad \cdots \quad \mathbf{U}_1(x_N, 0)]^T, \quad \mathbf{U}_2 = [\mathbf{U}_2(x_1, 0) \quad \mathbf{U}_2(x_2, 0) \quad \cdots \quad \mathbf{U}_2(x_N, 0)]^T,$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = [\varphi_1(x_1) \quad \varphi_1(x_2) \quad \cdots \quad \varphi_1(x_N)]^T \text{ ve } \mathbf{\Phi}_2 = [\varphi_2(x_1) \quad \varphi_2(x_2) \quad \cdots \quad \varphi_2(x_N)]^T$$

elde edilir.

Aynı düzenlemeler (3.3) Dirichlet sınır koşulları için de yapılırsa;

$$u(a, t) = \mathbf{X}(a) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \text{ ve } u(b, t) = \mathbf{X}(b) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

ifadeleri

$$\mathbf{U}_3(a, t) = \mathbf{X}(a) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \text{ ve } \mathbf{U}_4(b, t) = \mathbf{X}(b) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}}$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_3(a, t) \mathbf{A} = \varphi_3(t) \text{ ve } \mathbf{U}_4(b, t) \mathbf{A} = \varphi_4(t)$$

biçiminde düzenlenir ve (3.15) de tanımlanan $\mu = 0, 1, 2, \dots, N$ için t_μ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$\mathbf{U}_3(a, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_3(t_\mu) \text{ ve } \mathbf{U}_4(b, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_4(t_\mu)$$

olup

$$\mathbf{U}_3 \mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_3 \text{ ya da } [\mathbf{U}_3; \mathbf{\Phi}_3] \text{ ve } \mathbf{U}_4 \mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_4 \text{ ya da } [\mathbf{U}_4; \mathbf{\Phi}_4]; \quad (3.29)$$

$$\mathbf{U}_3 = [\mathbf{U}_3(a, t_1) \quad \mathbf{U}_3(a, t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{U}_3(a, t_N)]^T, \quad \mathbf{U}_4 = [\mathbf{U}_4(b, t_1) \quad \mathbf{U}_4(b, t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{U}_4(b, t_N)]^T,$$

$$\mathbf{\Phi}_3 = [\varphi_3(t_1) \quad \varphi_3(t_2) \quad \cdots \quad \varphi_3(t_N)]^T \text{ ve } \mathbf{\Phi}_4 = [\varphi_4(t_1) \quad \varphi_4(t_2) \quad \cdots \quad \varphi_4(t_N)]^T$$

olur.

Aynı işlemler (3.4) Neumann sınır koşulları için de yapılırsa;

$$u_x(a, t) = \mathbf{X}(a) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A} \text{ ve } u_x(b, t) = \mathbf{X}(b) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

ifadeleri

$$\mathbf{U}_5(a, t) = \mathbf{X}(a) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \text{ ve } \mathbf{U}_6(b, t) = \mathbf{X}(b) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}}$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_5(a, t) \mathbf{A} = \varphi_5(t) \text{ ve } \mathbf{U}_6(b, t) \mathbf{A} = \varphi_6(t)$$

biçiminde düzenlenir ve (3.15) de tanımlanan $\mu = 0, 1, 2, \dots, N$ için t_μ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$\mathbf{U}_5(a, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_5(t_\mu) \text{ ve } \mathbf{U}_6(b, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_6(t_\mu)$$

olup

$$\mathbf{U}_5 \mathbf{A} = \Phi_5 \text{ ya da } [\mathbf{U}_5; \Phi_5] \text{ ve } \mathbf{U}_6 \mathbf{A} = \Phi_6 \text{ ya da } [\mathbf{U}_6; \Phi_6]; \quad (3.30)$$

$$\mathbf{U}_5 = [\mathbf{U}_5(a, t_1) \quad \mathbf{U}_5(a, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_5(a, t_N)]^T, \quad \mathbf{U}_6 = [\mathbf{U}_6(b, t_1) \quad \mathbf{U}_6(b, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_6(b, t_N)]^T,$$

$$\Phi_5 = [\varphi_5(t_1) \quad \varphi_5(t_2) \quad \dots \quad \varphi_5(t_N)]^T \text{ ve } \Phi_6 = [\varphi_6(t_1) \quad \varphi_6(t_2) \quad \dots \quad \varphi_6(t_N)]^T$$

elde edilir.

Son olarak aynı işlemler (3.5) Robin sınır koşulları için de yapılırsa;

$$\alpha_1 u(a, t) + \beta_1 u_x(a, t) = \{\alpha_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \beta_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}}\} \mathbf{A}$$

ve

$$\alpha_2 u(b, t) + \beta_2 u_x(b, t) = \{\alpha_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \beta_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}}\} \mathbf{A}$$

ifadeleri

$$\mathbf{U}_7(a, t) = \alpha_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \beta_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}}$$

ve

$$\mathbf{U}_8(b, t) = \alpha_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \beta_2 \mathbf{X}(b) \mathbf{B} \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}}$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_7(a, t) \mathbf{A} = \varphi_7(t) \text{ ve } \mathbf{U}_8(b, t) \mathbf{A} = \varphi_8(t)$$

biçiminde düzenlenir ve (3.15) de tanımlanan $\mu = 0, 1, 2, \dots, N$ için t_μ sıralama noktaları denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$\mathbf{U}_7(a, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_7(t_\mu) \text{ ve } \mathbf{U}_8(b, t_\mu) \mathbf{A} = \varphi_8(t_\mu)$$

olup

$$\mathbf{U}_7 \mathbf{A} = \Phi_7 \text{ ya da } [\mathbf{U}_7; \Phi_7] \text{ ve } \mathbf{U}_8 \mathbf{A} = \Phi_8 \text{ ya da } [\mathbf{U}_8; \Phi_8]; \quad (3.31)$$

$$\mathbf{U}_7 = [\mathbf{U}_7(a, t_1) \quad \mathbf{U}_7(a, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_7(a, t_N)]^T, \quad \mathbf{U}_8 = [\mathbf{U}_8(b, t_1) \quad \mathbf{U}_8(b, t_2) \quad \dots \quad \mathbf{U}_8(b, t_N)]^T,$$

$$\Phi_7 = [\varphi_7(t_1) \quad \varphi_7(t_2) \quad \dots \quad \varphi_7(t_N)]^T \text{ ve } \Phi_8 = [\varphi_8(t_1) \quad \varphi_8(t_2) \quad \dots \quad \varphi_8(t_N)]^T$$

olur.

Daha sonra ise (3.1) denkleminin (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) koşulları altındaki çözümünü elde edebilmek için; (3.28), (3.29), (3.30) ve (3.31) arttırılmış matrislerinin satır sayısı kadar (3.27) arttırılmış matrisinin herhangi satırları silinip yerine (3.28), (3.29), (3.30) ve (3.31) arttırılmış matrisleri yazılarak

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \text{ ya da } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$$

yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Eğer $\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = \text{rank}([\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]) = (N+1)^2$ ise $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ arttırılmış matrisinin çözümü $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ şeklinde ve \mathbf{A} tek olarak bulunur. Böylece Pell polinomlarının bilinmeyen katsayıları elde edilmiş ve yaklaşık çözüm (3.7) formunda bulunmuş olur.

3.2.3. Çözümlerin Doğruluğu ve Hata Analizi

(3.6) denklemi ile verilen kesilmiş Lerch serisi ve (3.7) denklemi ile verilen kesilmiş Pell serisi, (3.1) denkleminin yaklaşık çözümleri olduğundan Lerch matris sıralama yönteminin yaklaşık çözümü olan $u_N(x, t, \lambda)$ ve Pell matris sıralama yönteminin yaklaşık çözümü olan $u_N(x, t)$ fonksiyonları ve türevleri (3.1) denkleminde yerine konulduğunda denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Bu sebeple $\gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $x = x_\gamma$, $a \leq x_\gamma \leq b$ ve $t = t_\mu$, $0 \leq t_\mu \leq T$ aralıklarında, sırasıyla, Lerch matris sıralama yöntemi ve Pell matris sıralama yöntemi için

$$R_N(x_\gamma, t_\mu) = \left| \sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x_\gamma, t_\mu) \frac{\partial^{i+j} u(x_\gamma, t_\mu, \lambda)}{\partial x^i \partial t^j} - g(x_\gamma, t_\mu) \right| \cong 0$$

ve

$$R_N(x_\gamma, t_\mu) = \left| \sum_{i,j,i+j \leq n} f_{i,j}(x_\gamma, t_\mu) \frac{\partial^{i+j} u(x_\gamma, t_\mu)}{\partial x^i \partial t^j} - g(x_\gamma, t_\mu) \right| \cong 0$$

olup, burada $R_N(x_\gamma, t_\mu) \leq 10^{-k_{\gamma\mu}}$ $k_{\gamma\mu} \in \mathbb{Z}^+$ sağlanmalıdır. Eğer $\max 10^{-k_{\gamma\mu}} = 10^{-k}$

$k \in \mathbb{Z}^+$ önceden belirlenmişse, o zaman noktaların her birinde $R_N(x_\gamma, t_\mu)$ farkı

önceden belirlenen 10^{-k} dan daha küçük olana kadar N kesme sınırı arttırılır. Öte yandan, $R_N(x,t)$ rezidüel fonksiyonu ve $|R_N(x,t)|$ fonksiyonunun ortalama değeri ile çözümlerin doğruluğu kontrol edilebilir ve hata analizi yapılabilir. Bunun için L lineer operatörü ve çift katlı integraller için ortalama değer teoremi kullanılarak, $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq T$ aralıklarında ortalama hatanın üst sınırı $\overline{R_N}$ aşağıdaki gibi tahmin edilebilir [11-17]:

$$R_N(x,t) = L[u_N(x,t)] - g(x,t); \quad L[u(x,t)] = g(x,t)$$

$$\left| \iint_D R_N(x,t) dA \right| \leq \iint_D |R_N(x,t)| dA$$

$$R_N(x_0, t_0) = \frac{\int_0^T \int_a^b R_N(x,t) dx dt}{(b-a)(T-0)}; \quad x_0 \in [a,b], \quad t_0 \in [0,T]$$

bağıntılarından

$$\left| \int_0^T \int_a^b R_N(x,t) dx dt \right| = |R_N(x_0, t_0)| (b-a)(T-0)$$

$$|R_N(x_0, t_0)| (b-a)(T-0) \leq \int_0^T \int_a^b |R_N(x,t)| dx dt$$

$$\Rightarrow |R_N(x_0, t_0)| \leq \frac{\int_0^T \int_a^b |R_N(x,t)| dx dt}{(b-a)(T-0)} = \overline{R_N}.$$

Ayrıca bu tez çalışmasında tam çözüm ve yaklaşık çözüm arasındaki farkı hesaplamak için,

$$\text{mutlak hata} = |\text{Tam çözüm} - \text{Yaklaşık çözüm}|;$$

mutlak hatanın tam çözüme oranını bulmak için,

$$\text{bağıl hata} = \left| \frac{\text{Tam çözüm} - \text{Yaklaşık çözüm}}{\text{Tam çözüm}} \right|;$$

ve bağıl hatayı yüzde olarak ifade edebilmek için,

$$\text{yüzde hata} = \left| \frac{\text{Tam çözüm} - \text{Yaklaşık çözüm}}{\text{Tam çözüm}} \right| \times 100\%$$

eşitliklerinden yararlanılmıştır [32,33].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Lerch Matris Sıralama Yönteminin ve Pell Matris Sıralama Yönteminin çeşitli örneklerle lineer kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları yapılmıştır. Ayrıca çözümlerin hata analizleri yapılarak elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerde verilmiştir.

Örnek 4.1. [34] $\alpha = \beta = 1$ ve $f(x, t) = x^2 + t - 1$ olacak şekilde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq 1$$

1-boyutlu hiperbolik telgraf denkleminin

$$u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulları altındaki çözümünü $N=2$ ve $\lambda = \frac{1}{5}$ için Lerch matris sıralama yöntemiyle ve $N=2$ için Pell matris sıralama yöntemiyle bulalım. Denklemin yaklaşık çözümünü $N=2$ ve $\lambda = \frac{1}{5}$ için (3.6) kesilmiş Lerch serisi formunda ve $N=2$ için (3.7) kesilmiş Pell serisi formunda araştıralım. Bunun için öncelikle

$$x_\gamma = a + \frac{b-a}{N} \gamma, \quad t_\mu = 0 + \frac{T-0}{N} \mu, \quad \gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N$$

eşitliklerinden

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\} \quad \text{ve} \quad \left\{ y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1 \right\}$$

sıralama noktalarını belirlenir. Daha sonra problemin sırasıyla Lerch matris sıralama yöntemi ve Pell matris sıralama yöntemi için oluşturulan temel matris denklemlerini kullanarak yaklaşık çözümleri bulalım. Problemin Lerch matris sıralama yönteminin temel matris denklemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda) \\ + \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) - \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) \end{array} \right\} \mathbf{A} = f(x,t)$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda) \\ + \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) - \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

ve buradaki matrisler

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\lambda = 1/5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1/10 \\ 0 & 0 & 3/25 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}[\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad \bar{\mathbf{B}}^2 = \text{diag}[\mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2],$$

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2], \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag}[\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x)],$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\lambda = 1/5) = \text{diag}\left[\mathbf{C}(\lambda = 1/5), \mathbf{C}(\lambda = 1/5), \mathbf{C}(\lambda = 1/5)\right] \quad \text{ve} \quad f(x,t) = x^2 + t - 1$$

şeklinde olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 7/50 & 0 & 0 & 0 & -6/25 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 1 & 3/10 & 6/25 & 0 & 0 & 0 & -6/25 & -3/125 & 3/625 & ; & -1/2 \\ 1 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 & -6/25 & -6/125 & -3/625 & ; & 0 \\ 1 & 1/5 & 7/50 & 1/10 & 1/50 & 7/500 & -13/50 & -1/250 & -7/2500 & ; & -3/4 \\ 1 & 3/10 & 6/25 & 1/10 & 3/100 & 3/125 & -13/50 & -3/100 & 0 & ; & -1/4 \\ 1 & 2/5 & 2/5 & 1/10 & 1/25 & 1/25 & -13/50 & -7/125 & -8/625 & ; & 1/4 \\ 1 & 1/5 & 7/50 & 1/5 & 1/25 & 7/250 & -11/50 & 1/250 & 7/2500 & ; & 0 \\ 1 & 3/10 & 6/25 & 1/5 & 3/50 & 6/125 & -11/50 & -9/500 & 6/625 & ; & 1/2 \\ 1 & 2/5 & 2/5 & 1/5 & 2/25 & 2/25 & -11/50 & -1/25 & 2/625 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından başlangıç koşulları için

$$U_1(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{C}}(\lambda), \quad U_2(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2$ için sıralama noktalarını da

kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -1/50 & 0 & 0 & ; & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/50 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & -1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1/5 & -1/10 & 0 & 1/50 & -1/100 & 0 & -1/250 & 1/500 & ; & 1 \\ 0 & 1/5 & -1/10 & 0 & 1/25 & -1/50 & 0 & 1/250 & -1/500 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin sondan altı satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 7/50 & 0 & 0 & 0 & -6/25 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 1 & 3/10 & 6/25 & 0 & 0 & 0 & -6/25 & -3/125 & 3/625 & ; & -1/2 \\ 1 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 & 0 & -6/25 & -6/125 & -3/625 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -1/50 & 0 & 0 & ; & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/50 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1/5 & -1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1/5 & -1/10 & 0 & 1/50 & -1/100 & 0 & -1/250 & 1/500 & ; & 1 \\ 0 & 1/5 & -1/10 & 0 & 1/25 & -1/50 & 0 & 1/250 & -1/500 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Lerch katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 25/6 & 0 & 0 & 25/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x, t, \lambda) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x, t) = u_3(x, t, \lambda) = x^2 + t$$

bulunur ve bulunan bu sonuç tam çözüme eşittir. Şimdi de Pell matris sıralama yöntemi ile problemin yaklaşık çözümünü bulalım. Problemin Pell matris sıralama yönteminin temel matris denklemini

$$\left\{ \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}} \right\} \mathbf{A} = f(x,t)$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}$$

olup buradaki matrislerden sadece \mathbf{S} ve $\bar{\mathbf{S}}$ matrisleri farklıdır ve bu matrisler

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } \bar{\mathbf{S}} = \text{diag}[\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}]$$

dir. Temel matris denkleminde matrisler yerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & -7 & 2 & 1 & ; & -1 \\ 1 & 3 & 14 & 0 & 0 & 0 & -7 & -5 & -2 & ; & -1/2 \\ 1 & 4 & 21 & 0 & 0 & 0 & -7 & -12 & -19 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 1 & 2 & 9 & -6 & 4 & 10 & ; & -3/4 \\ 1 & 3 & 14 & 1 & 3 & 14 & -6 & -2 & 12 & ; & -1/4 \\ 1 & 4 & 21 & 1 & 4 & 21 & -6 & -8 & 2 & ; & 1/4 \\ 1 & 2 & 9 & 2 & 4 & 18 & -3 & 10 & 37 & ; & 0 \\ 1 & 3 & 14 & 2 & 6 & 28 & -3 & 7 & 54 & ; & 1/2 \\ 1 & 4 & 21 & 2 & 8 & 42 & -3 & 4 & 65 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından başlangıç koşulları için

$$U_1(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{S}}, U_2(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}}$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & ; & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 & 0 & 5 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 10 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W};\mathbf{G}]$ matrisinin sondan altı satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}};\tilde{\mathbf{G}}]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & -7 & 2 & 1 & ; & -1 \\ 1 & 3 & 14 & 0 & 0 & 0 & -7 & -5 & -2 & ; & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 21 & 0 & 0 & 0 & -7 & -12 & -19 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & ; & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 & 0 & 3 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 10 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Pell katsayılar matrisi

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x,t)=\mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x,t)=u_3(x,t)=x^2+t$$

bulunur ve bulunan bu sonuç tam çözüme eşittir.

Örnek 4.2. [35] $c = \frac{1}{\pi}$ olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

1-boyutlu ısı denkleminin

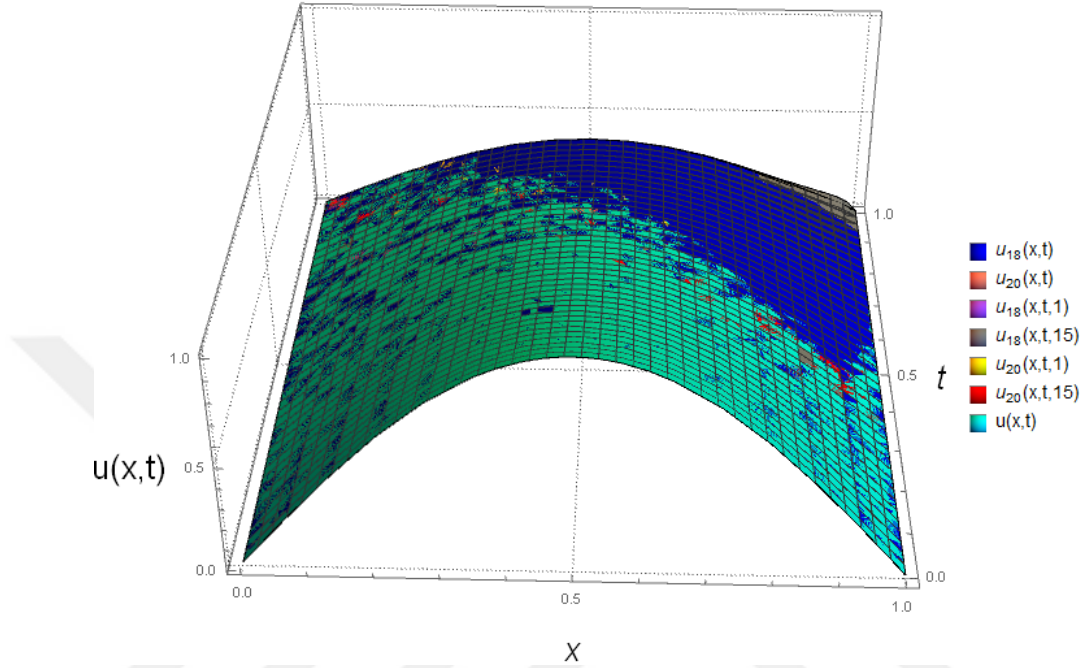
$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

sınır koşulları altındaki çözümünü bulalım. Bu problemin analitik çözümü

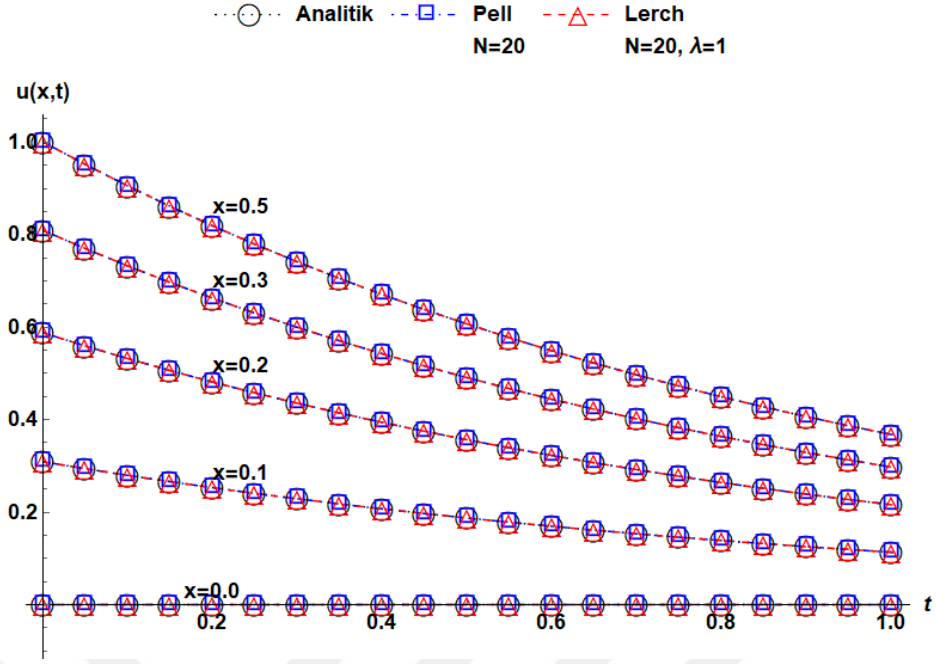
$u(x,t) = e^{-t} \sin(\pi x)$ dir. Problemin yaklaşık çözümleri $N=16$, $N=18$ ve $N=20$ değerleri için Pell matris sıralama yöntemi ve $N=18$, $N=20$, $\lambda=1$ ve $\lambda=15$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.1-7 ve Tablo 4.1 de gösterilmiştir.



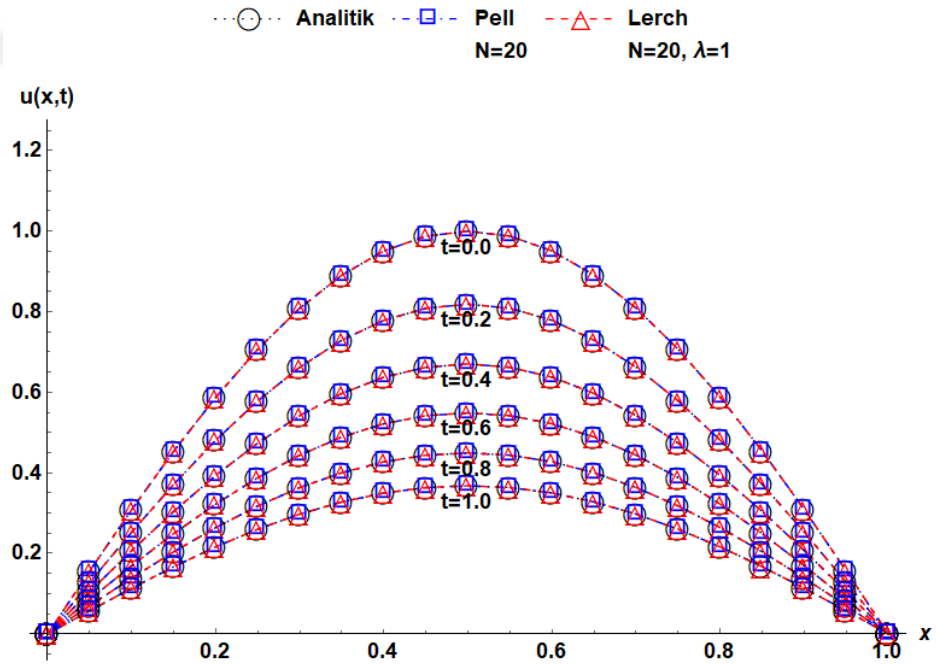
Şekil 4.1. Örnek 4.2'nin elde edilen yaklaşık çözümlerinin analitik çözümlere karşılaştırılması.

Tablo 4.1. Örnek 4.2'nin mutlak hata karşılaştırmaları.

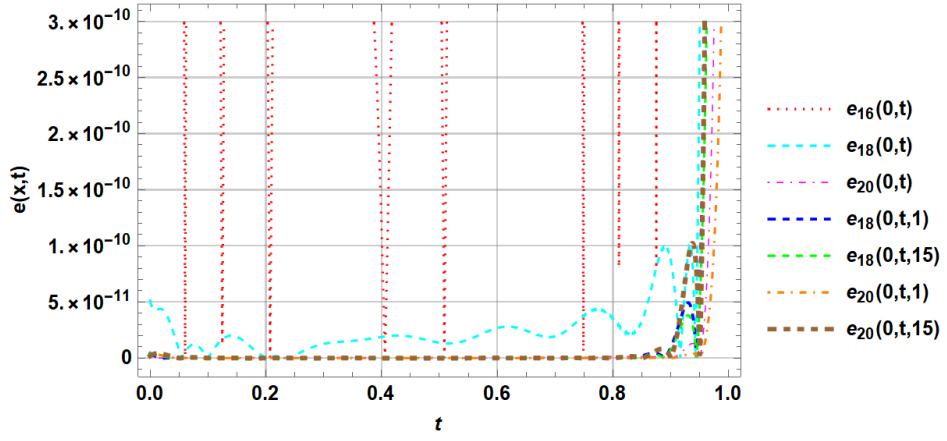
x	t	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm		Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			OQS [35]	NQS [35]
		N=18	N=20	N=18 $\lambda=1$	N=20 $\lambda=1$	N=20 $\lambda=15$		
0.125	0.01	3.02E-11	4.79E-13	4.33E-13	3.79E-14	1.78E-13	4.1E-7	3.0E-7
0.125	0.05	4.45E-11	2.93E-12	2.27E-12	1.43E-13	2.64E-13	8.0E-7	7.0E-7
0.25	0.01	7.43E-11	1.33E-12	2.80E-13	1.73E-13	4.20E-13	5.3E-7	4.9E-7
0.25	0.05	8.46E-11	7.07E-12	2.15E-12	6.92E-13	1.96E-12	1.0E-6	9.5E-7
0.5	0.01	9.88E-11	3.00E-12	6.63E-13	1.50E-13	1.88E-12	5.0E-7	4.9E-7
0.5	0.05	4.37E-11	1.39E-11	6.67E-12	5.91E-13	7.84E-12	1.0E-6	9.6E-7



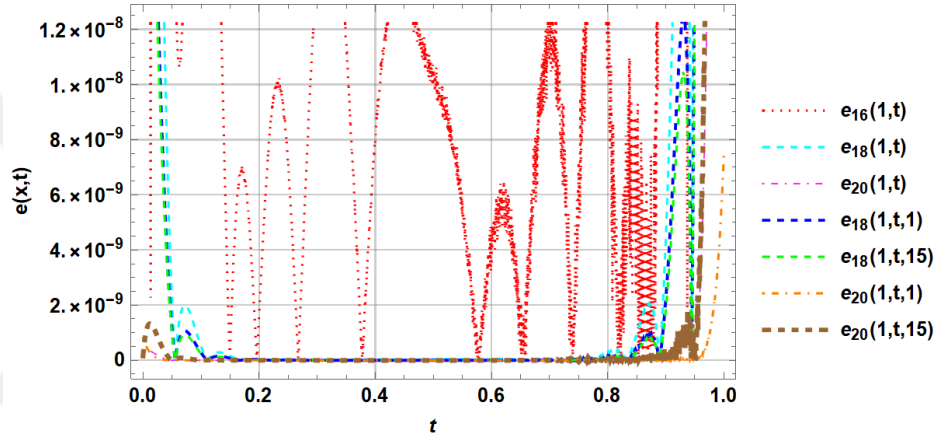
Şekil 4.2. Örnek 4.2'nin analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



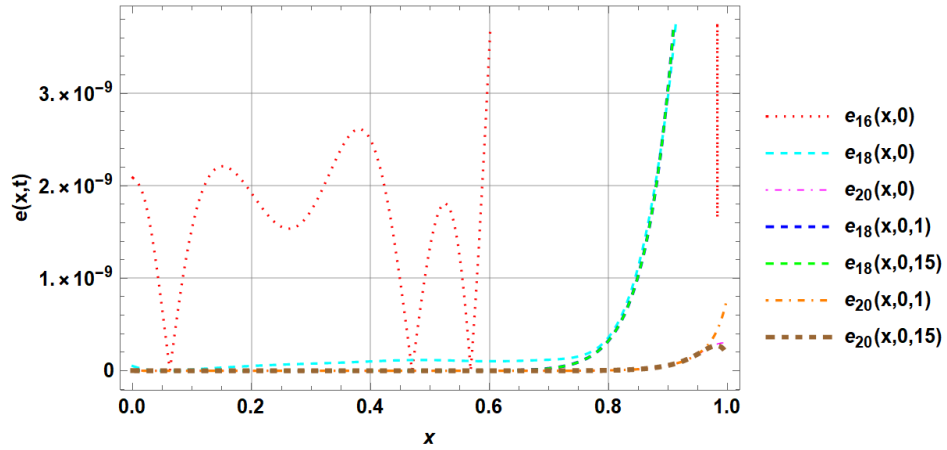
Şekil 4.3. Örnek 4.2'nin analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması



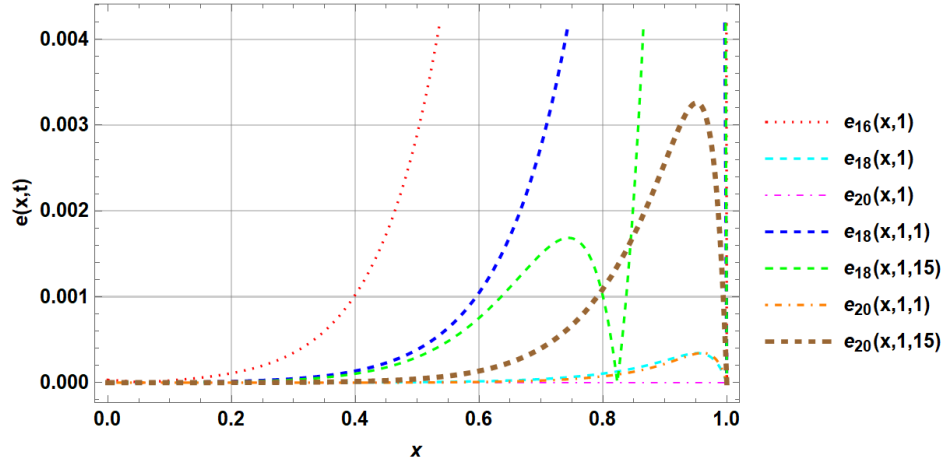
Şekil 4.4. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.5. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.6. Örnek 4.2'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.7. Örnek4.2'deki yaklaşık çözümlerin t=1 için mutlak hata karşılaştırmaları.

Örnek 4.3. [36] Difüzyon katsayısı $D = 0.05$ ve konveksiyon hızı $a = 1$ olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - D^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

konveksiyon difüzyon denkleminin

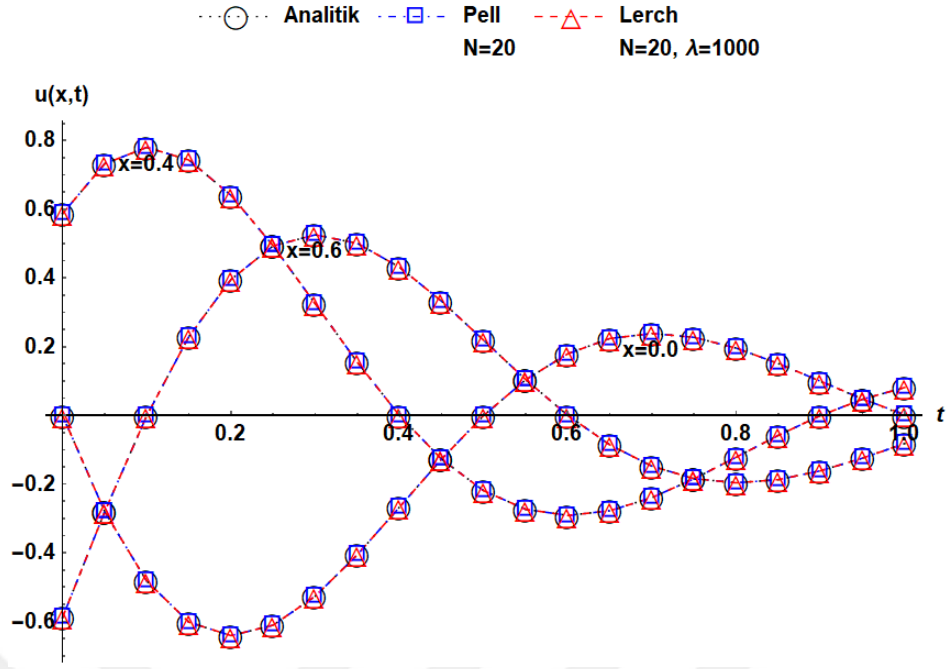
$$u(x,0) = \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulu ve

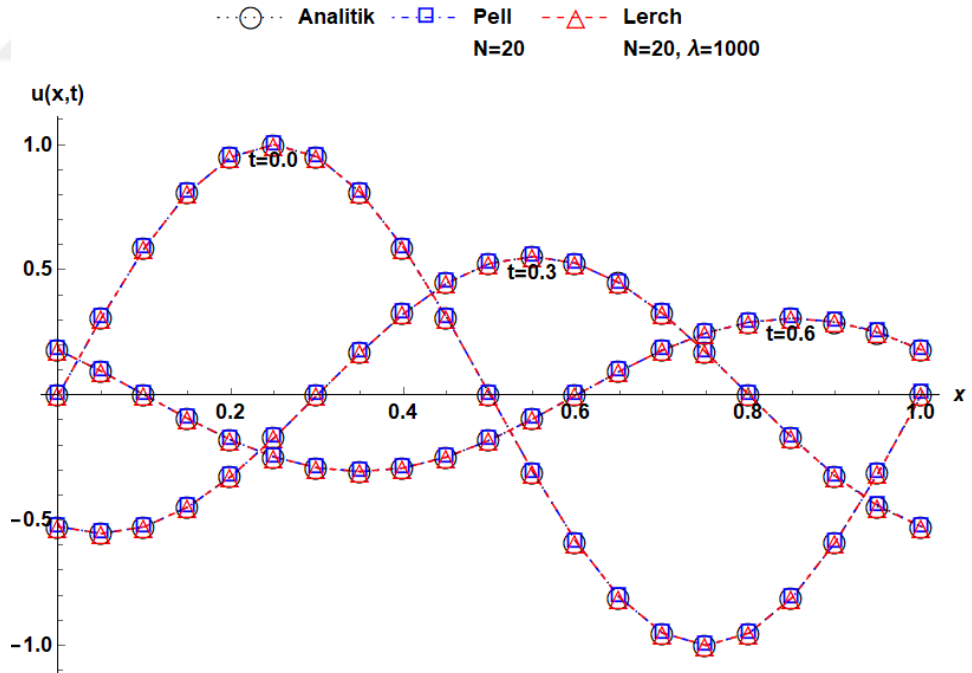
$$u(0,t) = \exp(-D4\pi^2 t) \sin(-2\pi at), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(1,t) = \exp(-D4\pi^2 t) \sin(2\pi(1-at)), \quad 0 \leq t \leq T$$

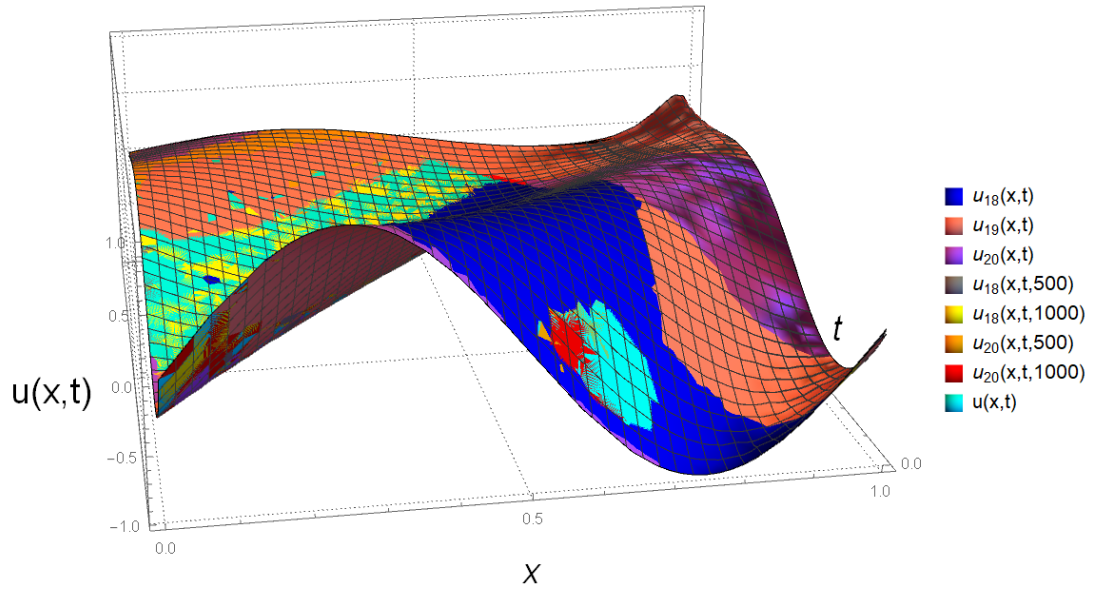
sınır koşulları altındaki çözümünü bulalım. Bu problemin analitik çözümü $u(x,t) = \exp(-D4\pi^2 t) \sin(2\pi(x-at))$ dir. Problemin yaklaşık çözümleri $N=18$, $N=19$ ve $N=20$ değerleri için Pell matris sıralama yöntemi ve $N=19$, $N=20$, $\lambda=500$ ve $\lambda=1000$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.8-14 ve Tablo 4.1-2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.8. Örnek 4.3'ün analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



Şekil 4.9. Örnek 4.3'ün analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.



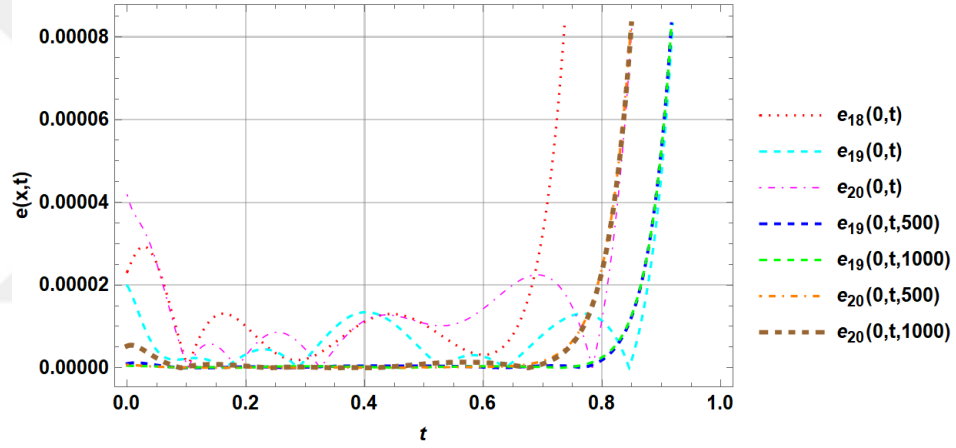
Şekil 4.10. Örnek 4.3'ün yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 1$ aralığında karşılaştırılması.

Tablo 4.2. Örnek4.3'ün mutlak hata karşılaştırmaları.

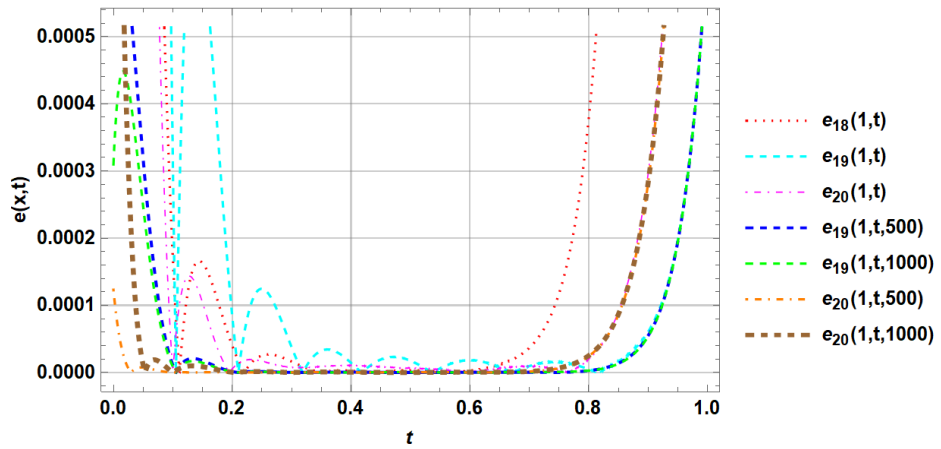
x	t	Pell polinomlarına dayalı	Lerch polinomlarına dayalı		FDTDQS	DQTFDS
		yaklaşık çözüm	yaklaşık çözüm			
		$N = 20$	$N = 20$	$N = 20$	[36]	[36]
			$\lambda = 500$	$\lambda = 1000$		
0.25	0.4	5.03E-6	2.85E-8	8.06E-7	1.1E-3	1.1E-2
0.25	0.6	1.38E-5	3.92E-7	3.50E-6	3.4E-3	1.2E-2
0.25	0.8	1.34E-5	1.68E-7	4.60E-6	2.1E-3	1.0E-2
0.25	1.0	8.94E-5	9.01E-5	8.56E-5	6.0E-4	1.3E-3
0.50	0.4	1.78E-5	4.62E-7	6.12E-7	1.0E-2	6.6E-2
0.50	0.6	2.02E-6	1.06E-7	1.04E-6	3.9E-3	5.4E-2
0.50	0.8	1.03E-5	1.26E-7	2.83E-6	3.4E-3	4.2E-3
0.50	1.0	8.04E-6	2.22E-6	1.54E-6	3.4E-3	2.5E-2
0.75	0.4	3.33E-5	1.89E-6	2.02E-5	2.9E-3	1.9E-2
0.75	0.6	1.07E-4	5.90E-6	3.68E-5	1.1E-2	2.7E-2
0.75	0.8	8.00E-5	9.16E-6	6.67E-5	6.4E-3	3.2E-2
0.75	1.0	9.55E-5	1.16E-5	2.70E-4	1.9E-3	6.3E-3

Tablo 4.3. Örnek4.3'in mutlak hata karşılaştırmaları.

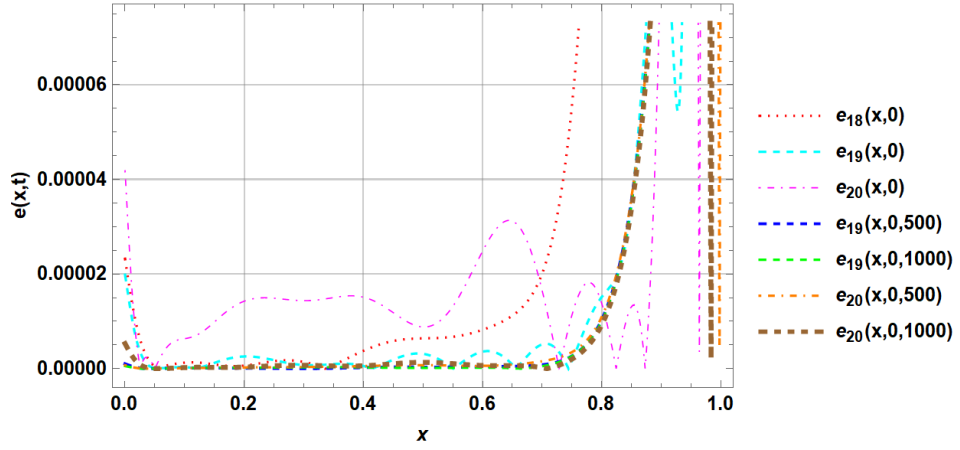
x	t	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			
		N=18	N=19	N=20	N=18 $\lambda = 500$	N=18 $\lambda = 1000$	N=20 $\lambda = 500$	N=20 $\lambda = 1000$
0.0	0.0	2.32E-5	1.98E-5	4.18E-5	1.02E-6	5.53E-7	7.29E-7	5.29E-6
0.2	0.2	3.69E-5	9.92E-6	1.88E-5	1.68E-7	1.17E-6	2.92E-7	7.61E-7
0.4	0.4	3.28E-5	1.67E-5	1.09E-5	8.25E-8	1.23E-6	2.99E-7	1.66E-7
0.6	0.6	2.75E-5	1.71E-5	7.22E-6	4.82E-7	1.13E-6	4.40E-7	4.83E-7
0.8	0.8	3.48E-4	8.20E-4	1.99E-4	4.31E-5	7.85E-5	2.79E-5	2.32E-4



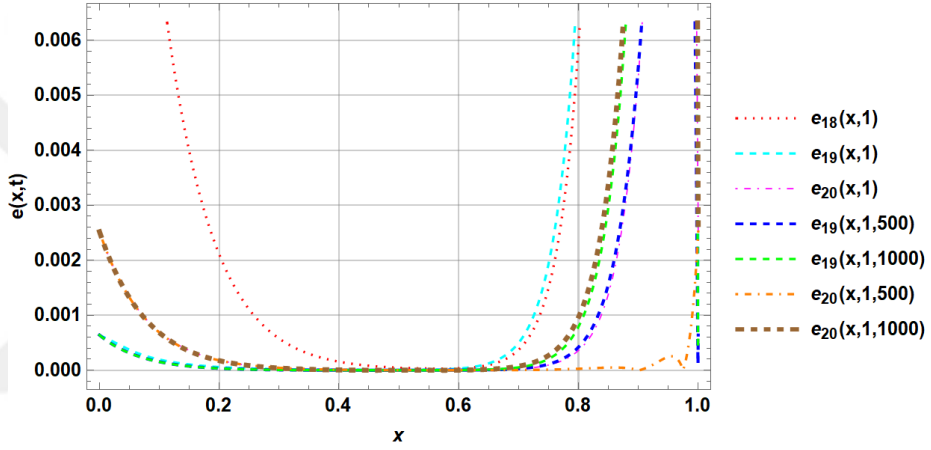
Şekil 4.11. Örnek4.3'deki yaklaşık çözümlerin x=0 için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.12. Örnek4.3'deki yaklaşık çözümlerin x=1 için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.13. Örnek4.3'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.14. Örnek4.3'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

Örnek 4.4. [37] Tam çözümlü $u(x,t) = xt$ olan

$$u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) = 0, \quad 0 < x, t < 1$$

Laplace denkleminin

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Dirichlet koşulları altındaki çözümünü $N=3$ ve $\lambda=2$ için Lerch matris sıralama yöntemiyle ve $N=3$ için Pell matris sıralama yöntemiyle bulalım. Denklemin yaklaşık çözümünü $N=3$ ve $\lambda=2$ için (3.6) kesilmiş Lerch serisi formunda

ve $N=3$ için (3.7) kesilmiş Pell serisi formunda araştıralım. Bunun için öncelikle

$$x_\gamma = a + \frac{b-a}{N} \gamma, \quad t_\mu = 0 + \frac{T-0}{N} \mu, \quad \gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N$$

eşitliklerinden

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\} \quad \text{ve} \quad \left\{ y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = 1 \right\}$$

sıralama noktalarını belirlenir. Daha sonra Laplace denklemin sırasıyla Lerch matris sıralama yöntemi ve Pell matris sıralama yöntemi için oluşturulan temel matris denklemlerini kullanarak yaklaşık çözümleri bulalım. Laplace denklemin Lerch matris sıralama yönteminin temel matris denklemleri

$$\left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \mathbf{C}}(\lambda) \right\} \mathbf{A} = g(x, t)$$

$$\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \mathbf{C}}(\lambda)$$

ve buradaki matrisler

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\lambda=2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag} \left[\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x) \right], \quad \overline{\mathbf{B}^2} = \text{diag} \left[\mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2 \right],$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\lambda=2) = \text{diag} \left[\mathbf{C}(\lambda=2), \mathbf{C}(\lambda=2), \mathbf{C}(\lambda=2), \mathbf{C}(\lambda=2) \right] \quad \text{ve} \quad g(x, t) = 0$$

şeklinde olup matrisler yerlerine konulur ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2, 3$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W};\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & \frac{2}{9} & -6 & -4 & 0 & -\frac{2}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 4 & \frac{16}{9} & -6 & -8 & -4 & -\frac{16}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 12 & 10 & -6 & -12 & -12 & -10 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 4 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 & \frac{4}{3} & 6 & 4 & 0 & \frac{2}{9} & 2 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 4 & \frac{20}{3} & 6 & 8 & 4 & \frac{16}{9} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{14}{9} & \frac{26}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 4 & 12 & 6 & 12 & 12 & 10 & 2 & 4 & \frac{38}{9} & 4 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 8 & -8 & 6 & 0 & 4 & -4 & 10 & 0 & \frac{16}{9} & -\frac{16}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 8 & \frac{8}{3} & 6 & 4 & 4 & \frac{14}{9} & 10 & \frac{20}{3} & \frac{16}{9} & \frac{26}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 8 & \frac{40}{3} & 6 & 8 & 8 & \frac{76}{9} & 10 & \frac{40}{3} & \frac{76}{9} & \frac{160}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 8 & 24 & 6 & 12 & 16 & 22 & 10 & 20 & \frac{196}{9} & 22 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 12 & -12 & 6 & 0 & 12 & -12 & 18 & 0 & 10 & -10 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 12 & 4 & 6 & 4 & 12 & \frac{38}{9} & 18 & 12 & 10 & 4 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 12 & 20 & 6 & 8 & 16 & \frac{196}{9} & 18 & 24 & 22 & 22 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 12 & 36 & 6 & 12 & 24 & 46 & 18 & 36 & 46 & 60 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından Dirichlet koşulları için

$$U_1(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{C}}(\lambda), U_2(x,1) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

$$U_3(0,t) = \mathbf{X}(0)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda), U_4(1,t) = \mathbf{X}(1)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1;\Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2;\Phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{10}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{5}{81} & ; & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{20}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{10}{9} & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{16}{27} & \frac{40}{81} & ; & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_3;\Phi_3] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_4;\Phi_4] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{27} & 2 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{27} & 2 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{27} & \frac{5}{3} & \frac{10}{9} & 0 & \frac{5}{81} & ; & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{27} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{16}{27} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{16}{27} & \frac{5}{3} & \frac{20}{9} & \frac{10}{9} & \frac{40}{81} & ; & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W};\mathbf{G}]$ matrisinin sondan sekiz satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & \frac{2}{9} & -6 & -4 & 0 & -\frac{2}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 4 & \frac{16}{9} & -6 & -8 & -4 & -\frac{16}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 12 & 10 & -6 & -12 & -12 & -10 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 4 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 & \frac{4}{3} & 6 & 4 & 0 & \frac{2}{9} & 2 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 4 & \frac{20}{3} & 6 & 8 & 4 & \frac{16}{9} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{14}{9} & \frac{26}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 0 & 0 & 4 & 12 & 6 & 12 & 12 & 10 & 2 & 4 & \frac{38}{9} & 4 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{10}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{5}{81} & ; & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{20}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{10}{9} & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{16}{27} & \frac{40}{81} & ; & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{27} & 2 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{27} & 2 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{27} & \frac{5}{3} & \frac{10}{9} & 0 & \frac{5}{81} & ; & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{27} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{16}{27} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{16}{27} & \frac{5}{3} & \frac{20}{9} & \frac{10}{9} & \frac{40}{81} & ; & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Lerch katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x, t, \lambda) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x, t) = u_3(x, t, \lambda) = xt$$

bulunur ve bulunan bu sonuç tam çözüme eşittir.

Şimdi de Pell matris sıralama yöntemi ile problemin yaklaşık çözümünü bulalım. Laplace denklemin Pell matris sıralama yönteminin temel matris denklemini

$$\left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{S}}} \right\} \mathbf{A} = g(x, t)$$

$$\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{S}}}$$

olup buradaki matrislerden sadece \mathbf{S} ve $\bar{\mathbf{S}}$ matrisleri farklıdır ve bu matrisler

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ ve } \bar{\mathbf{S}} = \text{diag}[\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}]$$

dir. Temel matris denkleminde matrisler yerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2, 3$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16/3 & 176/9 & 784/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32/3 & 272/9 & 1952/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 48 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16/3 & 0 & 8 & 0 & 176/9 & 0 & 16 & 0 & 784/27 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 16/3 & 32/3 & 8 & 16/3 & 208/9 & 976/27 & 16 & 32/3 & 976/27 & 1408/27 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 16/3 & 64/3 & 8 & 32/3 & 304/9 & 2336/27 & 16 & 64/3 & 1552/27 & 3584/27 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 48 & 0 & 0 & 16/3 & 32 & 8 & 16 & 464/9 & 496/3 & 16 & 32 & 2512/27 & 2432/9 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 32/3 & 0 & 8 & 0 & 272/9 & 0 & 32 & 0 & 1952/27 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 32/3 & 64/3 & 8 & 16/3 & 304/9 & 1552/27 & 32 & 64/3 & 2336/27 & 3584/27 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 32/3 & 128/3 & 8 & 32/3 & 400/9 & 3488/27 & 32 & 128/3 & 3488/27 & 8704/27 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 48 & 0 & 0 & 32/3 & 64 & 8 & 16 & 560/9 & 688/3 & 32 & 64 & 5408/27 & 5632/9 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 8 & 0 & 48 & 0 & 48 & 0 & 144 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 16 & 32 & 8 & 16/3 & 464/9 & 2512/27 & 48 & 32 & 496/3 & 2432/9 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 16 & 64 & 8 & 32/3 & 560/9 & 5408/27 & 48 & 64 & 688/3 & 5632/9 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 48 & 0 & 0 & 16 & 96 & 8 & 16 & 80 & 336 & 48 & 96 & 336 & 1152 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından Dirichlet koşulları için

$$U_1(x, 0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{S}}, \quad U_2(x, 1) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{S}}$$

$$U_3(0, t) = \mathbf{X}(0)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}, \quad U_4(1, t) = \mathbf{X}(1)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 & 0 & 13/9 & 0 & 13/9 & 0 & 44/27 & 0 & 44/27 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 4/3 & 0 & 25/9 & 0 & 25/9 & 0 & 136/27 & 0 & 136/27 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 12 & 2/3 & 4/3 & 10/3 & 8 & 13/9 & 26/9 & 65/9 & 52/3 & 44/27 & 88/27 & 220/27 & 176/9 & ; & 1/3 \\ 1 & 2 & 5 & 12 & 4/3 & 8/3 & 20/3 & 16 & 25/9 & 50/9 & 125/9 & 100/3 & 136/27 & 272/27 & 680/27 & 544/9 & ; & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{U}_3; \Phi_3] &= \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 13/9 & 44/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 13/9 & 44/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 4/3 & 25/9 & 136/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 25/9 & 136/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{U}_4; \Phi_4] &= \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 13/9 & 44/27 & 2 & 4/3 & 26/9 & 88/27 & 5 & 10/3 & 65/9 & 220/27 & 12 & 8 & 52/3 & 176/9 & ; & 1/3 \\ 1 & 4/3 & 25/9 & 136/27 & 2 & 8/3 & 50/9 & 272/27 & 5 & 20/3 & 125/9 & 680/27 & 12 & 16 & 100/3 & 544/9 & ; & 2/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin sondan sekiz satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16/3 & 176/9 & 784/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32/3 & 272/9 & 1952/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 48 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16/3 & 0 & 8 & 0 & 176/9 & 0 & 16 & 0 & 784/27 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 16/3 & 32/3 & 8 & 16/3 & 208/9 & 976/27 & 16 & 32/3 & 976/27 & 1408/27 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 16/3 & 64/3 & 8 & 32/3 & 304/9 & 2336/27 & 16 & 64/3 & 1552/27 & 3584/27 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 48 & 0 & 0 & 16/3 & 32 & 8 & 16 & 464/9 & 496/3 & 16 & 32 & 2512/27 & 2432/9 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 & 0 & 13/9 & 0 & 13/9 & 0 & 44/27 & 0 & 44/27 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 4/3 & 0 & 25/9 & 0 & 25/9 & 0 & 136/27 & 0 & 136/27 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 12 & 2/3 & 4/3 & 10/3 & 8 & 13/9 & 26/9 & 65/9 & 52/3 & 44/27 & 88/27 & 220/27 & 176/9 & ; & 1/3 \\ 1 & 2 & 5 & 12 & 4/3 & 8/3 & 20/3 & 16 & 25/9 & 50/9 & 125/9 & 100/3 & 136/27 & 272/27 & 680/27 & 544/9 & ; & 2/3 \\ 1 & 2/3 & 13/9 & 44/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 13/9 & 44/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 4/3 & 25/9 & 136/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 25/9 & 136/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 2/3 & 13/9 & 44/27 & 2 & 4/3 & 26/9 & 88/27 & 5 & 10/3 & 65/9 & 220/27 & 12 & 8 & 52/3 & 176/9 & ; & 1/3 \\ 1 & 4/3 & 25/9 & 136/27 & 2 & 8/3 & 50/9 & 272/27 & 5 & 20/3 & 125/9 & 680/27 & 12 & 16 & 100/3 & 544/9 & ; & 2/3 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Pell katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x, t) = u_3(x, t) = xt$$

bulunur ve bulunan bu sonuç tam çözüme eşittir.

Tablo 4.4. Örnek 4.4'ün N=3 için Lerch ve Pell matris sıralama metotlarıyla elde edilen yaklaşık çözümlerin Yüzde hata karşılaştırmaları.

x	t	Yüzde Hata		
		Lerch matris sıralama metodu	Pell matris sıralama metodu	Gauss-Seidel metodu [37]
0.2	0.2	0.000	0.000	0.217
0.4	0.2	0.000	0.000	0.142
0.6	0.2	0.000	0.000	0.076
0.8	0.2	0.000	0.000	0.028
0.2	0.6	0.000	0.000	0.076
0.4	0.6	0.000	0.000	0.050
0.6	0.6	0.000	0.000	0.027
0.8	0.6	0.000	0.000	0.010

Örnek 4.5. [38] $u_{xx} + u_{tt} = 0$, $x, t \in [0,1]$ Laplace denkleminin

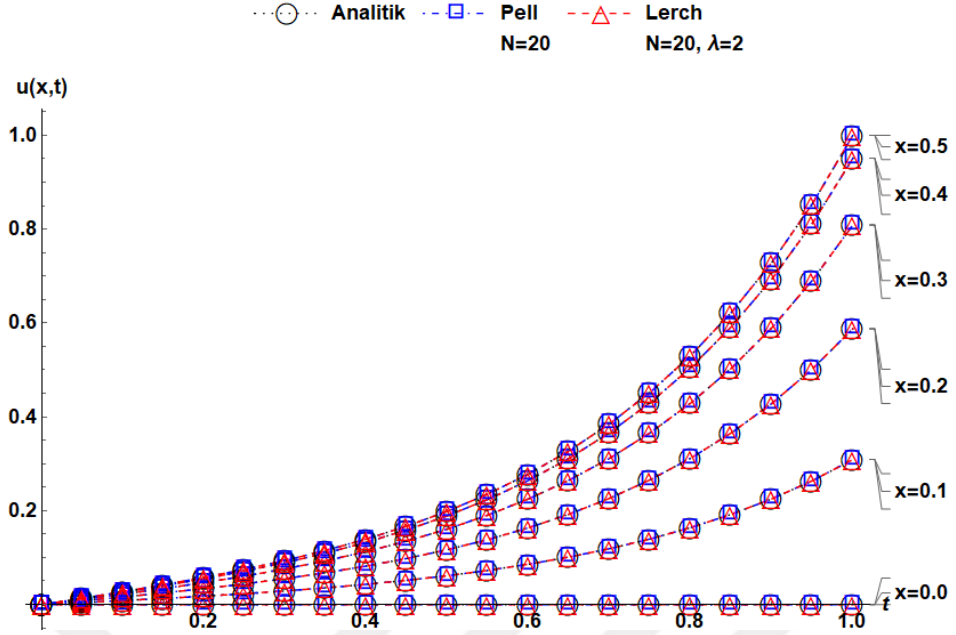
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$

Dirichlet sınır koşulları altındaki çözümünü bulalım. Bu problemin analitik çözümü

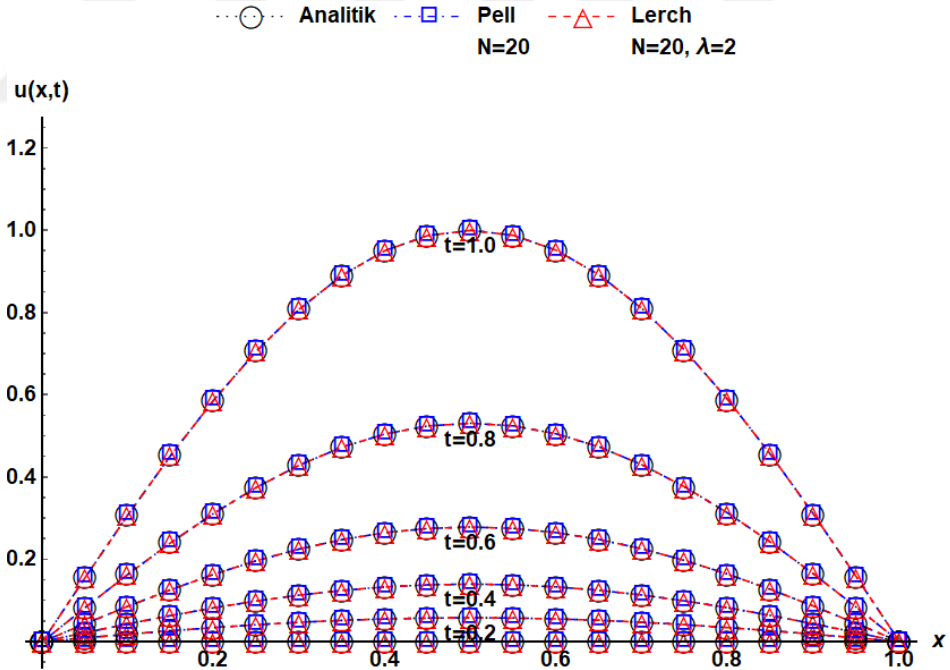
$$u(x,t) = \frac{\sin(\pi x) \sinh(\pi t)}{\sinh(\pi)}$$

dir. Problemin yaklaşık çözümleri $N=15$, $N=18$ ve

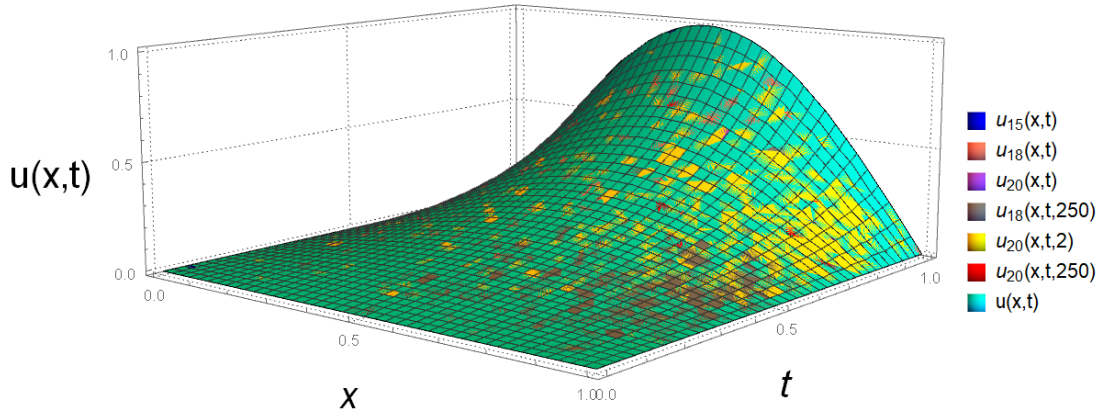
$N=20$ değerleri için Pell matris sıralama yöntemi ve $N=18$, $N=20$, $\lambda=2$ ve $\lambda=250$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.15-21 ve Tablo 4.5. de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. Örnek 4.5'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



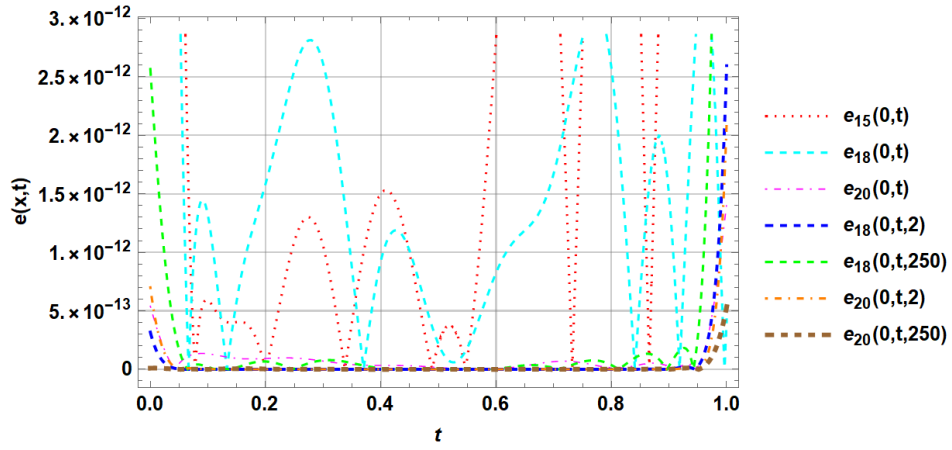
Şekil 4.16. Örnek 4.5'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.



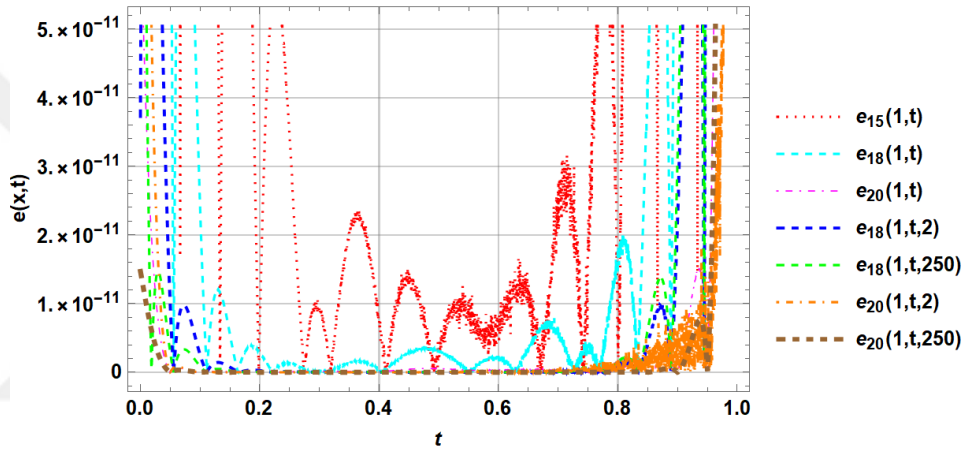
Şekil 4.17. Örnek 4.5'in yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması.

Tablo 4.5. Örnek 4.5'in mutlak hata karşıştırmaları.

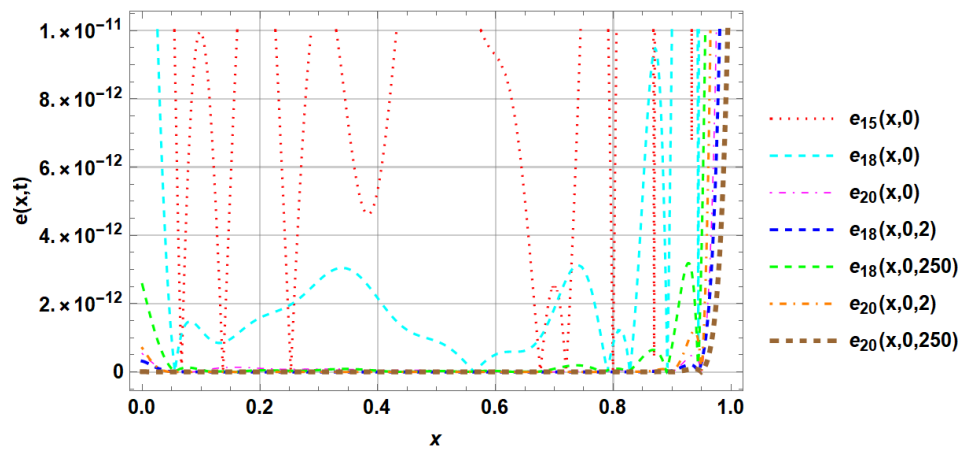
$x=t$	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			UANN [38]	MANN [38]
	$N=15$	$N=18$	$N=20$	$N=18$ $\lambda=250$	$N=20$ $\lambda=2$	$N=20$ $\lambda=250$		
0.1	6.85E-6	1.55E-8	4.11E-10	6.71E-9	3.48E-9	3.06E-10	1.23E-5	4.20E-8
0.2	2.73E-5	6.23E-8	1.65E-9	2.68E-8	1.40E-8	1.23E-9	2.24E-5	3.90E-8
0.3	6.12E-5	1.39E-7	3.74E-9	5.99E-8	3.25E-8	2.81E-9	4.80E-5	5.61E-7
0.4	1.07E-4	2.42E-7	6.78E-9	1.04E-7	6.25E-8	5.22E-9	8.11E-5	5.92E-7
0.5	1.63E-4	3.63E-7	1.10E-8	1.53E-7	1.12E-7	8.94E-9	2.31E-4	6.28E-7
0.6	2.22E-4	4.82E-7	1.73E-8	1.91E-7	1.94E-7	1.51E-8	4.55E-4	7.08E-7
0.7	2.72E-4	5.69E-7	2.69E-8	1.69E-7	3.29E-7	2.66E-8	6.58E-4	9.37E-7
0.8	2.89E-4	5.84E-7	4.17E-8	2.71E-8	5.37E-7	4.93E-8	7.88E-4	5.62E-6
0.9	2.22E-4	4.40E-7	5.30E-8	4.91E-7	7.70E-7	8.21E-8	4.55E-4	3.87E-6



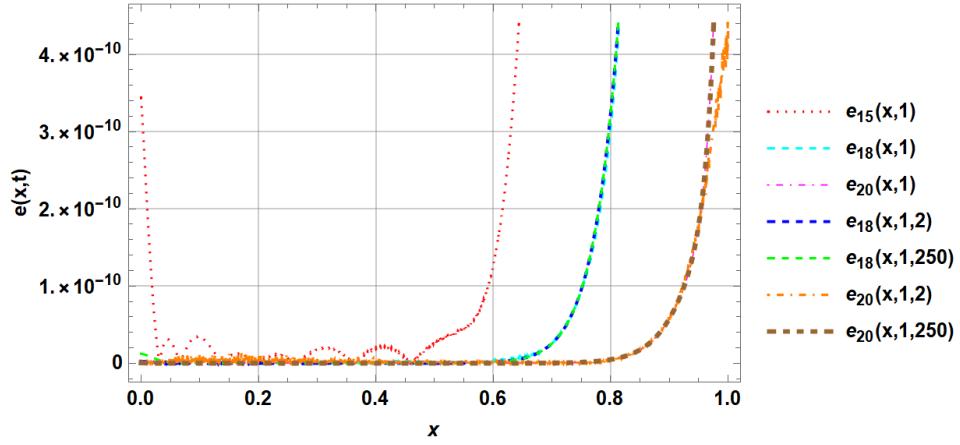
Şekil 4.18. Örnek4.5'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.19. Örnek4.5'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.20. Örnek4.5'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.21. Örnek4.5'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

Örnek 4.6. [39] Her iki ucu sabitlenmiş $L=2$ uzunluğundaki elastik bir yayı göz önüne alalım. Yayın başlangıç yer değiştirmesinin $f(x) = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, başlangıç hızının $g(x) = 0$ ve $\alpha = 1$ olduğunu varsayalım. $0 \leq x \leq L$ ve $0 \leq t \leq 2$ için yayın $u(x,t)$ yer değiştirmesini bulalım.

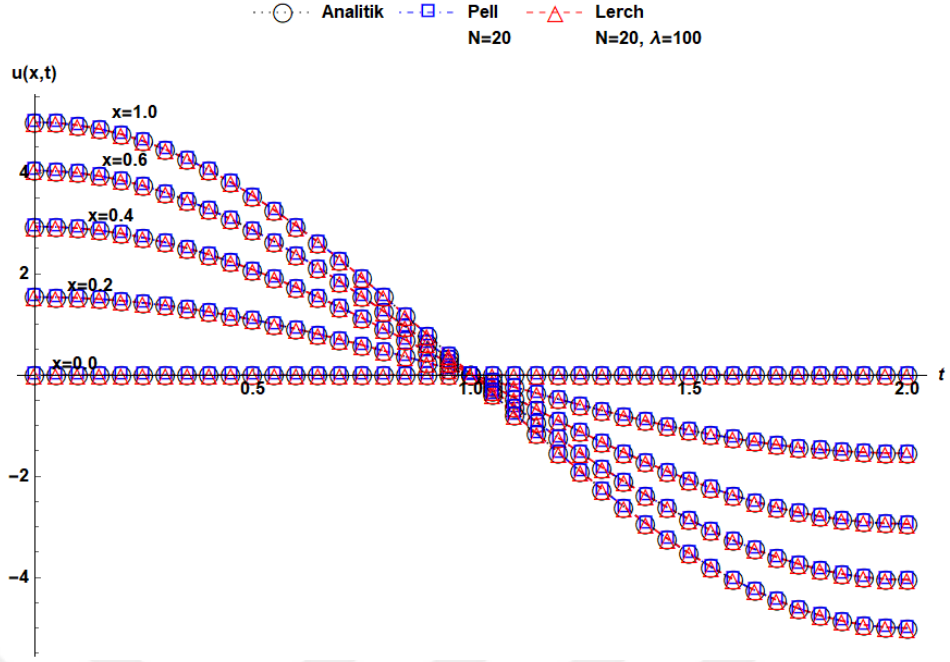
Yayın sadece başlangıç yer değiştirmesi $f(x)$ ve başlangıç hızı $g(x)$ ile hareket ettirildiğini varsayarsak, yayın serbest titreşimi

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \quad (\alpha = \text{sabit} > 0), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

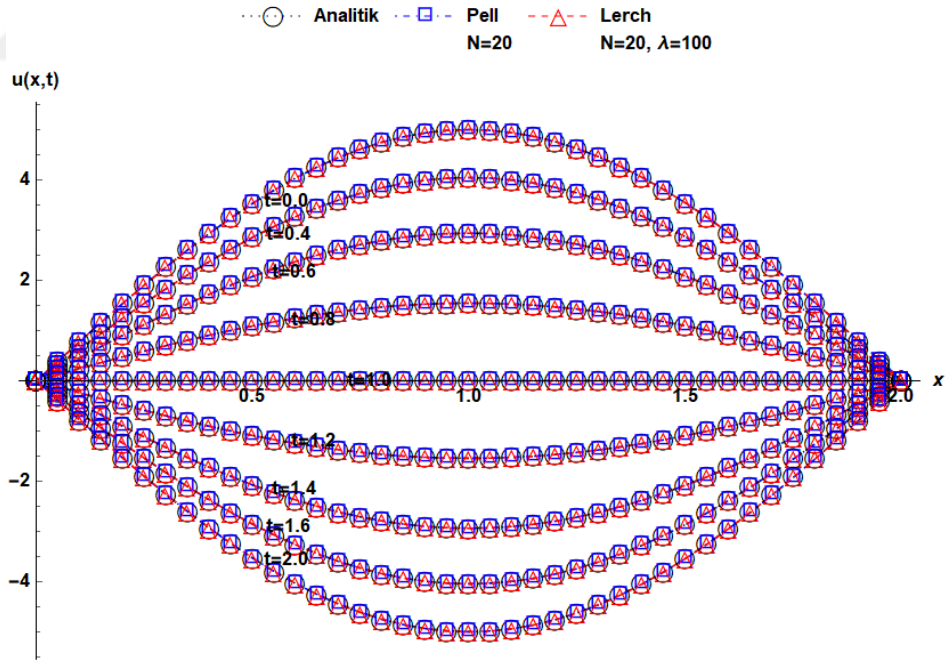
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

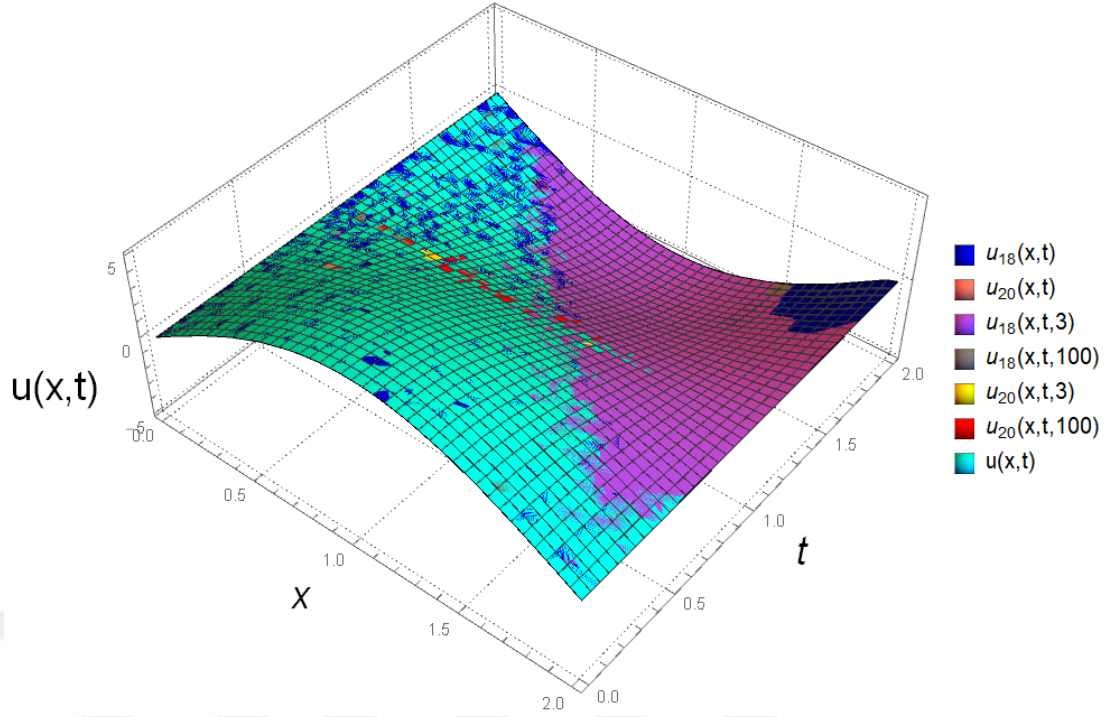
başlangıç-sınır değer problemi ile ifade edilebilir. Bu problemin analitik çözümü $u(x,t) = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ dir. Problemin yaklaşık çözümleri $N=18$ ve $N=20$ değerleri için, Pell matris sıralama yöntemi ve $N=18$, $N=20$, $\lambda=3$ ve $\lambda=100$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 1-3 ve Tablo 1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.22. Örnek 4.6'nın analitik ve yaklaşık çözümlerinin x ' in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



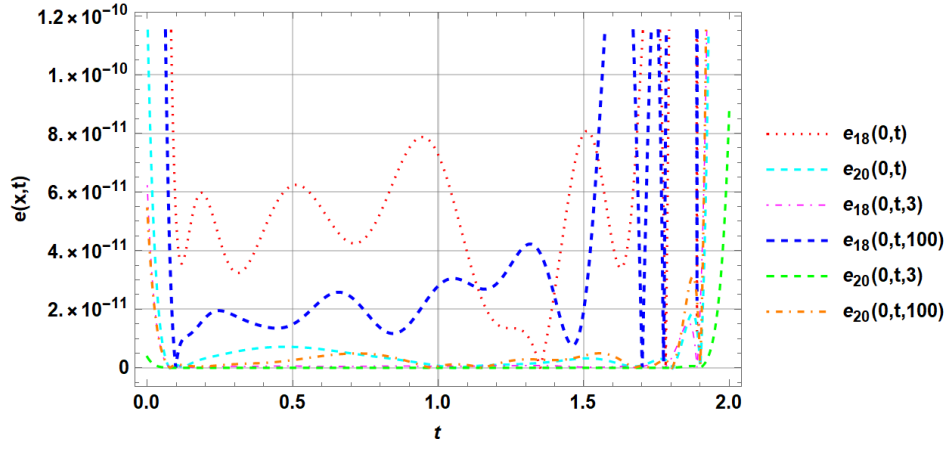
Şekil 4.23. Örnek 4.6'nın analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.



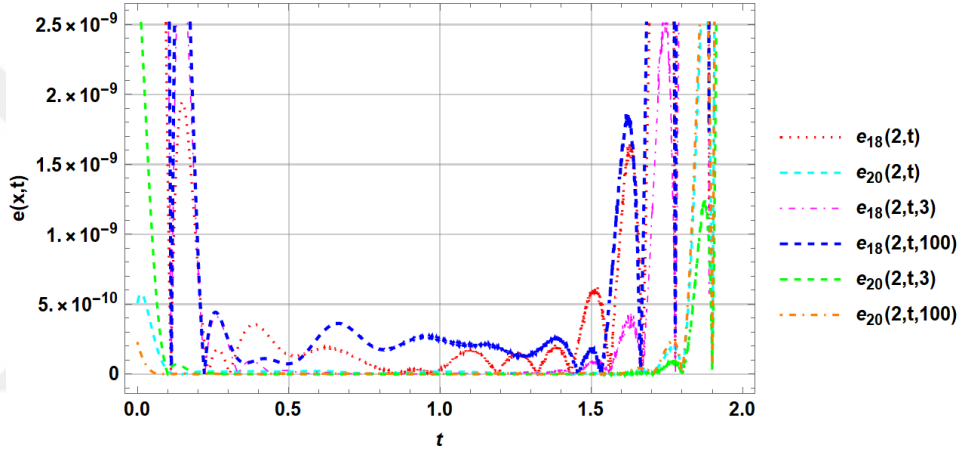
Şekil 4.24. Örnek 4.6'nin yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması.

Tablo 4.6. Örnek 4.6'nin bağıl hata karşılaştırmaları.

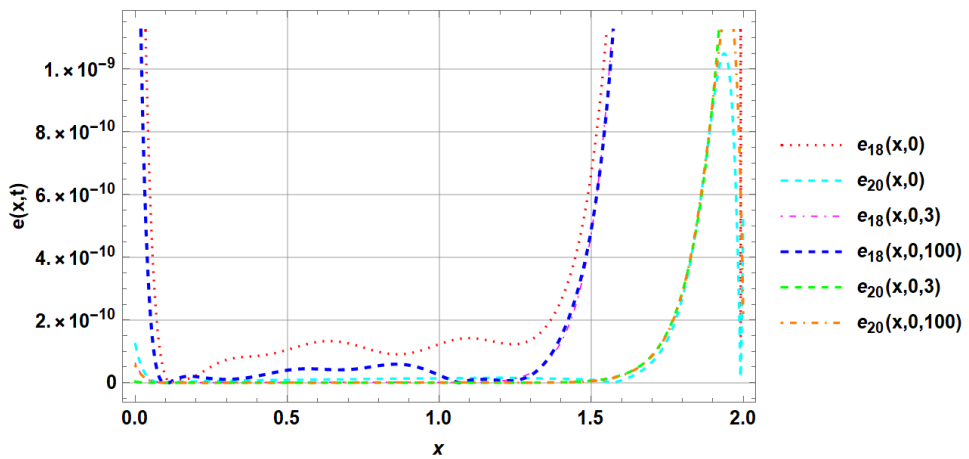
x	t	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm		Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			
		N=18	N=20	N=18 $\lambda=3$	N=18 $\lambda=100$	N=20 $\lambda=3$	N=20 $\lambda=100$
0.2	0.2	3.64E-11	3.13E-12	1.83E-12	1.69E-11	6.86E-14	1.06E-13
0.4	0.4	6.71E-11	8.44E-13	1.72E-12	9.21E-12	5.17E-14	9.26E-13
0.6	0.6	6.69E-12	3.98E-12	5.50E-13	8.79E-11	3.41E-14	2.39E-12
0.8	0.8	7.87E-10	1.22E-11	5.58E-10	8.87E-10	8.55E-12	2.40E-12
1.2	1.2	6.76E-06	1.08E-07	1.03E-05	8.09E-06	4.29E-09	2.24E-08
1.4	1.4	5.79E-05	4.85E-07	1.97E-04	6.16E-05	2.06E-07	1.72E-07
1.6	1.6	3.83E-04	4.97E-06	1.90E-03	1.01E-04	9.19E-06	2.38E-06
1.8	1.8	1.32E-02	2.57E-04	3.51E-03	6.24E-03	7.85E-04	6.03E-05



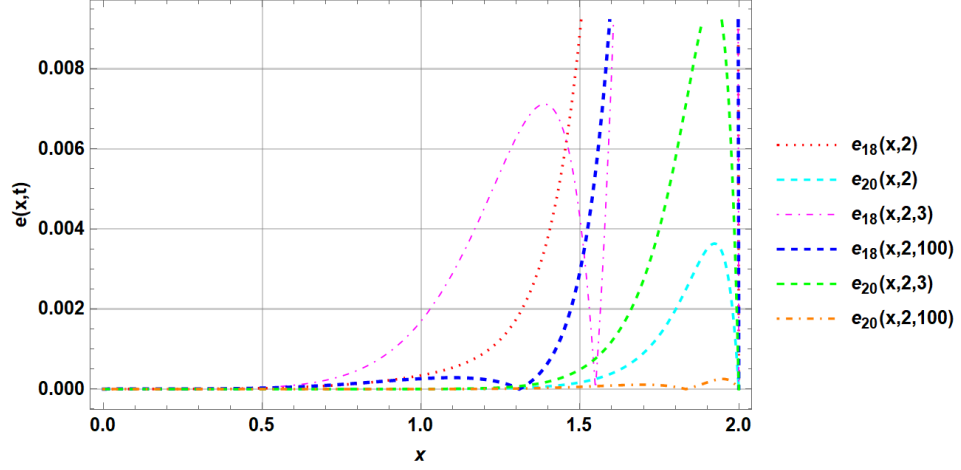
Şekil 4.25. Örnek 4.6'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.26. Örnek 4.6'deki yaklaşık çözümlerin $x=2$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

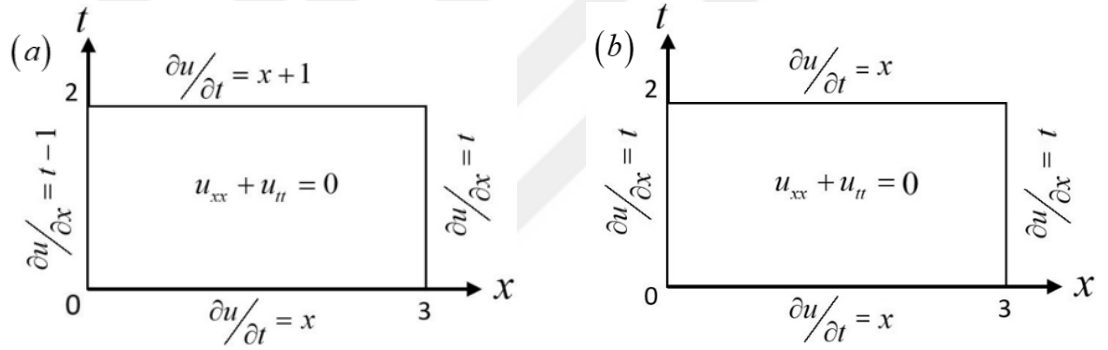


Şekil 4.27. Örnek 4.6'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.28. Örnek4.6'daki yaklaşık çözümlerin $t=2$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

Örnek 4.7. [39] Şekil 4.29.a da verilen Laplace denklemini ve Şekil 4.29.b de verilen Laplace denklemini göz önüne alalım.



Şekil 4.29. (a) Neumann koşulları altında Laplace denklemini. (b) Neumann koşulları altında Laplace denklemini.

Denklemlerin çözümüne geçmeden önce, denklemlerin verilmiş olan koşullar altında çözümlerinin olup olmadığı araştırılmalıdır. Neumann Probleminde çözümün varlığı tamamen sınırın farklı kısımları boyunca öngörülen $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ normal türevlere bağlıdır. Yani sınır üzerinde alınan normal türevlerin eğrisel integralleri sıfır olmadığı sürece çözüm mevcut değildir. Dolayısıyla çözümün olabilmesi için

$$\int_c \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

olmalıdır [39]. Şimdi sırayla Şekil 4.29.a da verilen Laplace denkleminin ve

Şekil4.29.b de verilen Laplace denkleminin çözümünün olup olmadığını araştıralım. Şekil 4.29.a da verilen Laplace denkleminin Neumann koşullarının eğrisel integrali

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^3 x dx + \int_0^2 t dt - \int_0^3 (x+1) dx - \int_0^2 (t-1) dt = -1 \neq 0$$

olduğundan çözüm mevcut değildir. Şekil 4.29.b de verilen Laplace denkleminin Neumann koşullarının eğrisel integrali

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^3 x dx + \int_0^2 t dt - \int_0^3 x dx - \int_0^2 t dt = 0$$

olup çözüm vardır. Bu denklemin

$$u_t(x,0) = x, u_t(x,2) = x, u_x(0,t) = t, u_x(x,3) = t$$

Neumann koşulları altındaki tam çözümü xt dir. Şimdi denklemin çözümünü $N=3$ ve $\lambda=5$ için Lerch matris sıralama yöntemiyle ve $N=3$ için Pell matris sıralama yöntemiyle bulalım. Denklemin yaklaşık çözümünü $N=3$ ve $\lambda=5$ için (3.6) kesilmiş Lerch serisi formunda ve $N=3$ için (3.7) kesilmiş Pell serisi formunda araştıralım. Bunun için öncelikle

$$x_\gamma = a + \frac{b-a}{N} \gamma, t_\mu = 0 + \frac{T-0}{N} \mu, \gamma, \mu = 0,1,2,\dots,N$$

eşitliklerinden

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\} \text{ ve } \{y_0 = 0, y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{4}{3}, y_3 = 2\}$$

sıralama noktaları belirleyelim. Daha sonra Laplace denklemin sırasıyla Lerch matris sıralama yöntemi ve Pell matris sıralama yöntemi için oluşturulan temel matris denklemlerini kullanarak yaklaşık çözümleri bulalım. Laplace denklemin Lerch matris sıralama yönteminin temel matris denklemi

$$\left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{C}}(\lambda)} \right\} \mathbf{A} = g(x,t)$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{C}}(\lambda)}$$

ve buradaki matrisler

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\lambda=5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}[\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad \bar{\mathbf{B}}^2 = \text{diag}[\mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2],$$

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3], \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag}[\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x)],$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\lambda=5) = \text{diag}[\mathbf{C}(\lambda=5), \mathbf{C}(\lambda=5), \mathbf{C}(\lambda=5), \mathbf{C}(\lambda=5)] \quad \text{ve} \quad g(x, t) = 0$$

şeklinde olup matrisler yerlerine konulur ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2, 3$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 100 & 150 & \frac{1300}{9} & -30 & -100 & -150 & -\frac{1300}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 200 & 700 & \frac{15800}{9} & -30 & -200 & -700 & -\frac{15800}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 390 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 300 & 1650 & 6700 & -30 & -300 & -1650 & -6700 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & 0 & 0 & 150 & -150 & 30 & 0 & 375 & -375 & 180 & 0 & 650 & -650 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 & 0 & 0 & 150 & 550 & 30 & 100 & 525 & \frac{13675}{9} & 180 & 600 & 1550 & 3250 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 250 & 0 & 0 & 150 & 1250 & 30 & 200 & 1075 & \frac{43925}{9} & 180 & 1200 & 4850 & 15950 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 390 & 0 & 0 & 150 & 1950 & 30 & 300 & 2025 & 11575 & 180 & 1800 & 10550 & 48650 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & 0 & 0 & 300 & -300 & 30 & 0 & 1650 & -1650 & 390 & 0 & 6700 & -6700 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 & 0 & 0 & 300 & 1100 & 30 & 100 & 1800 & \frac{55750}{9} & 390 & 1300 & 8650 & \frac{238000}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 250 & 0 & 0 & 300 & 2500 & 30 & 200 & 2350 & \frac{139550}{9} & 390 & 2600 & 15800 & \frac{707900}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 390 & 0 & 0 & 300 & 3900 & 30 & 300 & 3300 & 28150 & 390 & 3900 & 28150 & 174200 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & 0 & 0 & 450 & -450 & 30 & 0 & 3825 & -3825 & 600 & 0 & 24450 & -24450 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 & 0 & 0 & 450 & 1650 & 30 & 100 & 3975 & \frac{127525}{9} & 600 & 2000 & 27450 & \frac{832850}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 250 & 0 & 0 & 450 & 3750 & 30 & 200 & 4525 & \frac{302675}{9} & 600 & 4000 & 38450 & \frac{2149750}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 390 & 0 & 0 & 450 & 5850 & 30 & 300 & 5475 & 56425 & 600 & 6000 & 57450 & 451850 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından Neumann koşulları için

$$U_1(x, 0) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{C}}(\lambda), \quad U_2(x, 2) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(2) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

$$U_3(0, t) = \mathbf{X}(0) \mathbf{B} \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda), \quad U_4(3, t) = \mathbf{X}(3) \mathbf{B} \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olup matrisler yerlerine konulur ve $\gamma, \mu = 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & 25 & -\frac{25}{2} & \frac{25}{3} & 0 & \frac{125}{2} & -\frac{125}{4} & \frac{125}{6} & 0 & \frac{325}{3} & -\frac{325}{6} & \frac{325}{9} & ; & 1 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & 50 & -25 & \frac{50}{3} & 0 & 275 & -\frac{275}{2} & \frac{275}{3} & 0 & \frac{3350}{3} & -\frac{1675}{3} & \frac{3350}{9} & ; & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \frac{115}{2} & \frac{1085}{3} & 0 & 25 & \frac{575}{2} & \frac{5425}{3} & 0 & \frac{125}{2} & \frac{2875}{4} & \frac{27125}{6} & 0 & \frac{325}{3} & \frac{7475}{6} & \frac{70525}{9} & ; & 1 \\ 0 & 5 & \frac{115}{2} & \frac{1085}{3} & 0 & 50 & 575 & \frac{10850}{3} & 0 & 275 & \frac{6325}{2} & \frac{59675}{3} & 0 & \frac{3350}{3} & \frac{38525}{3} & \frac{726950}{9} & ; & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_3; \Phi_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{50}{3} & 25 & \frac{650}{27} & -\frac{5}{2} & -\frac{25}{3} & -\frac{25}{2} & -\frac{325}{27} & \frac{5}{3} & \frac{50}{9} & \frac{25}{3} & \frac{650}{81} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{100}{3} & \frac{350}{3} & \frac{7900}{27} & -\frac{5}{2} & -\frac{50}{3} & -\frac{175}{3} & -\frac{3950}{27} & \frac{5}{3} & \frac{100}{9} & \frac{350}{9} & \frac{7900}{81} & ; & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_4; \Phi_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{50}{3} & 25 & \frac{650}{27} & \frac{175}{2} & \frac{875}{3} & \frac{875}{2} & \frac{11375}{27} & \frac{2570}{3} & \frac{25700}{9} & \frac{12850}{3} & \frac{334100}{81} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{100}{3} & \frac{350}{3} & \frac{7900}{27} & \frac{175}{2} & \frac{1750}{3} & \frac{6125}{3} & \frac{138250}{27} & \frac{2570}{3} & \frac{51400}{9} & \frac{179900}{9} & \frac{4060600}{81} & ; & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin sondan sekiz satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 100 & 150 & \frac{1300}{9} & -30 & -100 & -150 & -\frac{1300}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 200 & 700 & \frac{15800}{9} & -30 & -200 & -700 & -\frac{15800}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 390 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 300 & 1650 & 6700 & -30 & -300 & -1650 & -6700 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -30 & 0 & 0 & 150 & -150 & 30 & 0 & 375 & -375 & 180 & 0 & 650 & -650 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 & 0 & 0 & 150 & 550 & 30 & 100 & 525 & \frac{13675}{9} & 180 & 600 & 1550 & 3250 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 250 & 0 & 0 & 150 & 1250 & 30 & 200 & 1075 & \frac{43925}{9} & 180 & 1200 & 4850 & 15950 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 390 & 0 & 0 & 150 & 1950 & 30 & 300 & 2025 & 11575 & 180 & 1800 & 10550 & 48650 & ; & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & 25 & -\frac{25}{2} & \frac{25}{3} & 0 & \frac{125}{2} & -\frac{125}{4} & \frac{125}{6} & 0 & \frac{325}{3} & -\frac{325}{6} & \frac{325}{9} & ; & 1 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & 50 & -25 & \frac{50}{3} & 0 & 275 & -\frac{275}{2} & \frac{275}{3} & 0 & \frac{3350}{3} & -\frac{1675}{3} & \frac{3350}{9} & ; & 2 \\ 0 & 5 & \frac{115}{2} & \frac{1085}{3} & 0 & 25 & \frac{575}{2} & \frac{5425}{3} & 0 & \frac{125}{2} & \frac{2875}{4} & \frac{27125}{6} & 0 & \frac{325}{3} & \frac{7475}{6} & \frac{70525}{9} & ; & 1 \\ 0 & 5 & \frac{115}{2} & \frac{1085}{3} & 0 & 50 & 575 & \frac{10850}{3} & 0 & 275 & \frac{6325}{2} & \frac{59675}{3} & 0 & \frac{3350}{3} & \frac{38525}{3} & \frac{726950}{9} & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{50}{3} & 25 & \frac{650}{27} & -\frac{5}{2} & -\frac{25}{3} & -\frac{25}{2} & -\frac{325}{27} & \frac{5}{3} & \frac{50}{9} & \frac{25}{3} & \frac{650}{81} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{100}{3} & \frac{350}{3} & \frac{7900}{27} & -\frac{5}{2} & -\frac{50}{3} & -\frac{175}{3} & -\frac{3950}{27} & \frac{5}{3} & \frac{100}{9} & \frac{350}{9} & \frac{7900}{81} & ; & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{50}{3} & 25 & \frac{650}{27} & \frac{175}{2} & \frac{875}{3} & \frac{875}{2} & \frac{11375}{27} & \frac{2570}{3} & \frac{25700}{9} & \frac{12850}{3} & \frac{334100}{81} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{100}{3} & \frac{350}{3} & \frac{7900}{27} & \frac{175}{2} & \frac{1750}{3} & \frac{6125}{3} & \frac{138250}{27} & \frac{2570}{3} & \frac{51400}{9} & \frac{179900}{9} & \frac{4060600}{81} & ; & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Lerch katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x, t, \lambda) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x,t) = u_3(x,t,\lambda) = xt$$

bulunur ve bulunan bu sonuç problemin tam çözümüne eşittir. Şimdi de Pell matris sıralama yöntemi ile problemin yaklaşık çözümünü bulalım. Laplace denklemin Pell matris sıralama yönteminin temel matris denklemleri

$$\left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \overline{\mathbf{S}}} \right\} \mathbf{A} = g(x,t)$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \overline{\mathbf{S}}}$$

olup buradaki matrislerden sadece \mathbf{S} ve $\overline{\mathbf{S}}$ matrisleri farklıdır ve bu matrisler

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ ve } \overline{\mathbf{S}} = \text{diag}[\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}]$$

dir. Temel matris denkleminde matrisler yerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2, 3$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{272}{9} & \frac{1952}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{64}{3} & \frac{656}{9} & \frac{6976}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 144 & 672 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 8 & 0 & 48 & 0 & 48 & 0 & 144 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 16 & 64 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{560}{9} & \frac{5408}{27} & 48 & 64 & \frac{688}{3} & \frac{5632}{9} & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 64 & 0 & 0 & 16 & 128 & 8 & \frac{64}{3} & \frac{944}{9} & \frac{13888}{27} & 48 & 128 & \frac{1456}{3} & \frac{17408}{9} & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 96 & 0 & 0 & 16 & 192 & 8 & 32 & 176 & 1056 & 48 & 192 & 912 & 4608 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 8 & 0 & 144 & 0 & 96 & 0 & 672 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 32 & 128 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{1424}{9} & \frac{15776}{27} & 96 & 128 & \frac{2528}{3} & \frac{25088}{9} & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 64 & 0 & 0 & 32 & 256 & 8 & \frac{64}{3} & \frac{1808}{9} & \frac{34624}{27} & 96 & 256 & \frac{4064}{3} & \frac{62464}{9} & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 96 & 0 & 0 & 32 & 384 & 8 & 32 & 272 & 2208 & 96 & 384 & 2208 & 13824 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 8 & 0 & 304 & 0 & 144 & 0 & 1968 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 48 & 192 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{2864}{9} & \frac{33056}{27} & 144 & 192 & 2224 & \frac{24064}{3} & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 64 & 0 & 0 & 48 & 384 & 8 & \frac{64}{3} & \frac{3248}{9} & \frac{69184}{27} & 144 & 384 & 2992 & \frac{54272}{3} & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 96 & 0 & 0 & 48 & 576 & 8 & 32 & 432 & 4128 & 144 & 576 & 4272 & 32256 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından Neumann koşulları için

$$U_1(x,0) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}}, \quad U_2(x,2) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(2)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}}$$

$$U_3(0,t) = \mathbf{X}(0)\mathbf{B}\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}, \quad U_4(3,t) = \mathbf{X}(3)\mathbf{B}\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 & 20 & 0 & 24 & 0 & 48 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 34 & 0 & 68 & 0 & 144 & 0 & 288 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 16 & 100 & 0 & 4 & 32 & 200 & 0 & 10 & 80 & 500 & 0 & 24 & 192 & 1200 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 16 & 100 & 0 & 8 & 64 & 400 & 0 & 34 & 272 & 1700 & 0 & 44 & 1152 & 7200 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_3; \Phi_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} & \frac{50}{9} & \frac{272}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{16}{3} & \frac{100}{9} & \frac{544}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{16}{3} & \frac{146}{9} & \frac{1312}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{32}{3} & \frac{292}{9} & \frac{2624}{27} & ; & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_4; \Phi_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} & \frac{50}{9} & \frac{272}{27} & 24 & 32 & \frac{200}{3} & \frac{1088}{9} & 220 & \frac{880}{3} & \frac{5500}{9} & \frac{29920}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{16}{3} & \frac{146}{9} & \frac{1312}{27} & 24 & 64 & \frac{584}{3} & \frac{5248}{9} & 220 & \frac{1760}{3} & \frac{16060}{9} & \frac{144320}{27} & ; & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin sondan sekiz satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{272}{9} & \frac{1952}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{64}{3} & \frac{656}{9} & \frac{6976}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 144 & 672 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 8 & 0 & 48 & 0 & 48 & 0 & 144 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 & 16 & 64 & 8 & \frac{32}{3} & \frac{560}{9} & \frac{5408}{27} & 48 & 64 & \frac{688}{3} & \frac{5632}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 64 & 0 & 0 & 16 & 128 & 8 & \frac{64}{3} & \frac{944}{9} & \frac{13888}{27} & 48 & 128 & \frac{1456}{3} & \frac{17408}{9} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 96 & 0 & 0 & 16 & 192 & 8 & 32 & 176 & 1056 & 48 & 192 & 912 & 4608 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 & 20 & 0 & 24 & 0 & 48 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 34 & 0 & 68 & 0 & 144 & 0 & 288 & ; & 2 \\ 0 & 2 & 16 & 100 & 0 & 4 & 32 & 200 & 0 & 10 & 80 & 500 & 0 & 24 & 192 & 1200 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 16 & 100 & 0 & 8 & 64 & 400 & 0 & 34 & 272 & 1700 & 0 & 44 & 1152 & 7200 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} & \frac{50}{9} & \frac{272}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{16}{3} & \frac{100}{9} & \frac{544}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{16}{3} & \frac{146}{9} & \frac{1312}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{32}{3} & \frac{292}{9} & \frac{2624}{27} & ; & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} & \frac{50}{9} & \frac{272}{27} & 24 & 32 & \frac{200}{3} & \frac{1088}{9} & 220 & \frac{880}{3} & \frac{5500}{9} & \frac{29920}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{16}{3} & \frac{146}{9} & \frac{1312}{27} & 24 & 64 & \frac{584}{3} & \frac{5248}{9} & 220 & \frac{1760}{3} & \frac{16060}{9} & \frac{144320}{27} & ; & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Pell katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x, t) = u_3(x, t) = xt$$

bulunur ve bulunan bu sonuç problemin tam çözümüne eşittir.

Örnek 4.8. [40] $u_{xx} + u_{tt} - 12.5\pi^2 u = -25\pi^2 \cos \frac{5\pi x}{2} \cos \frac{5\pi t}{2}$ denkleminin

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, 0 < x, t < 0.4$$

Neumann sınır koşulları altındaki çözümünü bulalım. Bu problemin analitik çözümü

$u(x, t) = \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{5\pi t}{2}\right)$ dir. Problemin yaklaşık çözümleri $N=15$, $N=18$

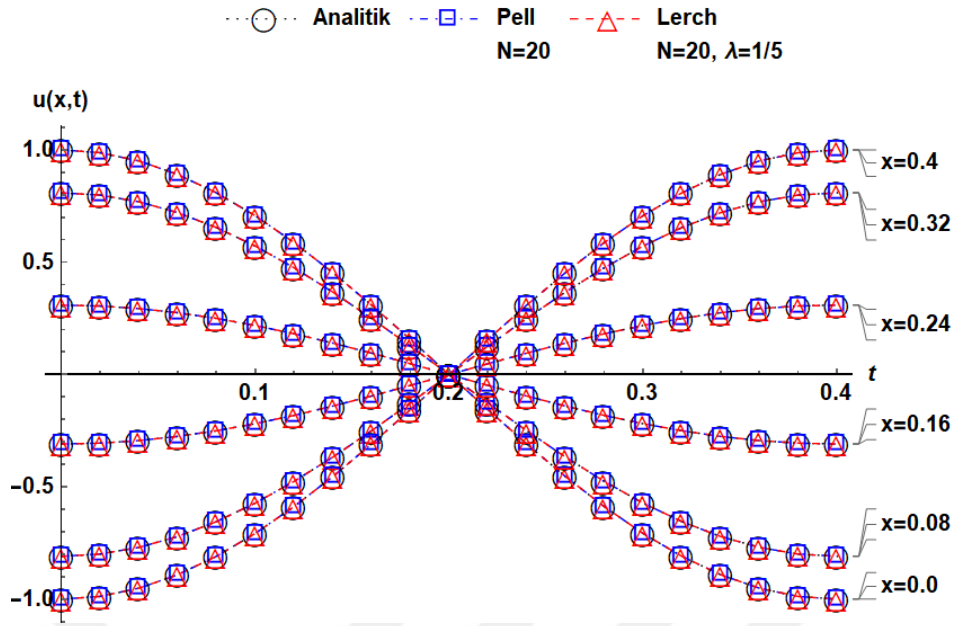
ve $N=20$ değerleri için Pell matris sıralama yöntemi ve $N=18$, $N=20$, $\lambda = 1/5$ ve

$\lambda = 90$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde

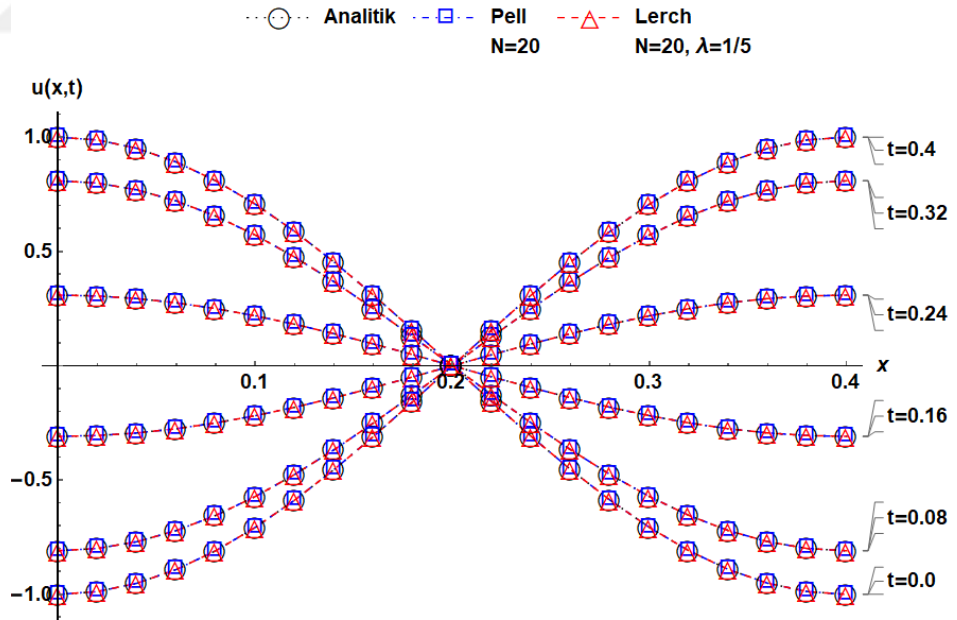
edilen sonuçlar Şekil 4.30-36 ve Tablo 4.7 de gösterilmiştir.

Tablo 4.7. Örnek 4.8'in bağıl hata karşılaştırmaları.

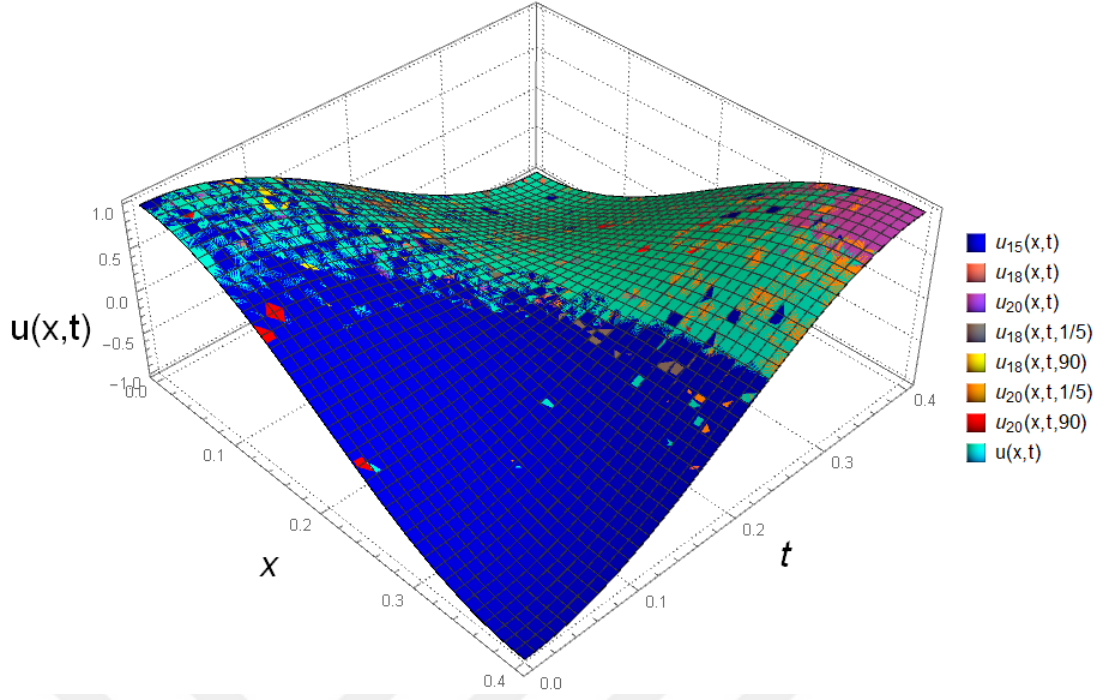
x	t	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Sonlu elemanlar metodu [41]
		$N=15$	$N=18$	$N=20$	$N=18$ $\lambda = 1/5$	$N=18$ $\lambda = 90$	$N=20$ $\lambda = 1/5$	
0.125	0.125	1.79E-6	2.33E-7	1.39E-7	1.03E-8	8.03E-5	3.26E-9	3.83E-2
0.125	0.25	9.85E-7	4.95E-7	1.12E-7	2.79E-8	1.73E-4	2.90E-8	2.59E-2
0.25	0.125	1.34E-5	1.12E-6	8.96E-7	4.45E-8	3.81E-4	8.66E-9	2.59E-2
0.25	0.25	2.81E-6	2.79E-6	8.66E-7	1.58E-7	9.74E-4	1.68E-7	1.30E-1



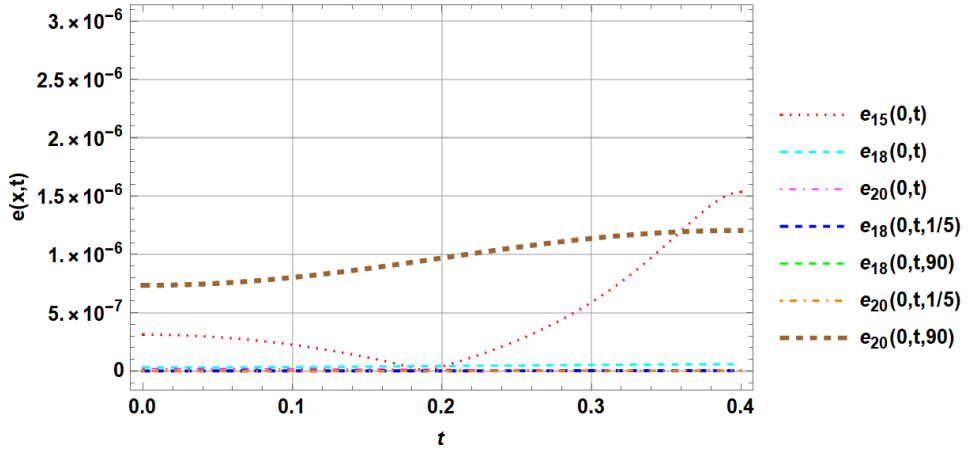
Şekil 4.30. Örnek 4.8'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin x 'in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



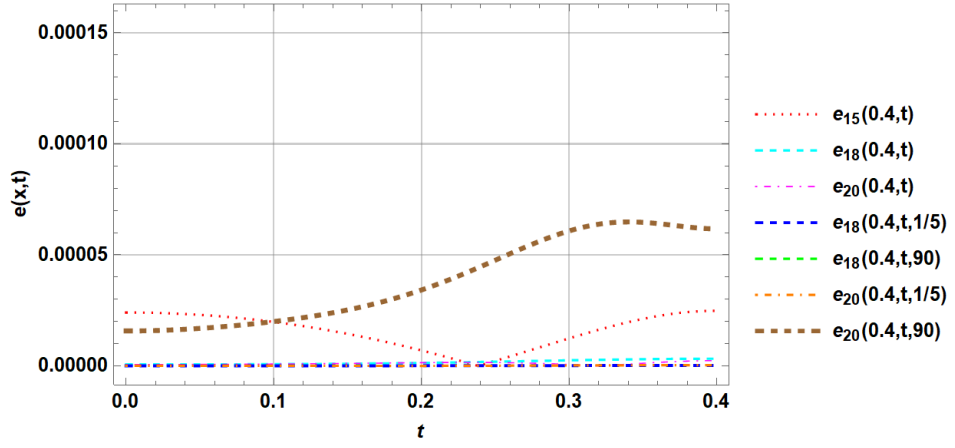
Şekil 4.31. Örnek 4.8'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.



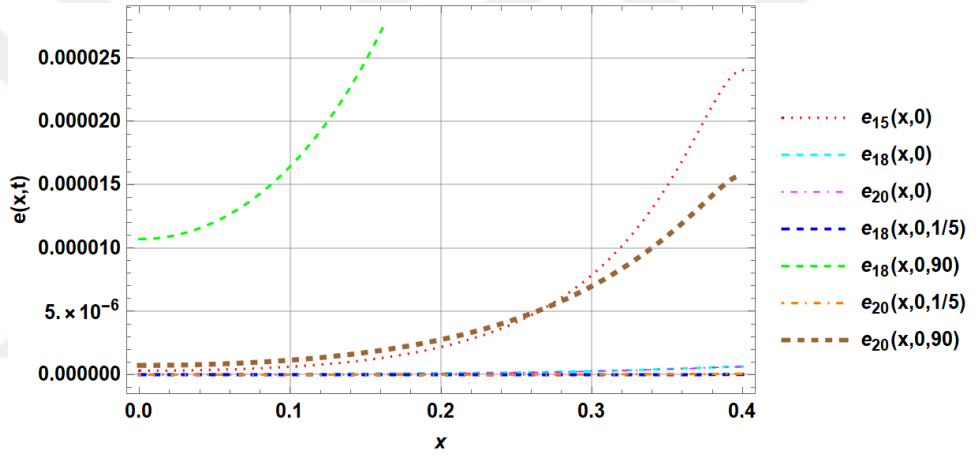
Şekil 4.32. Örnek 4.8'in yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması.



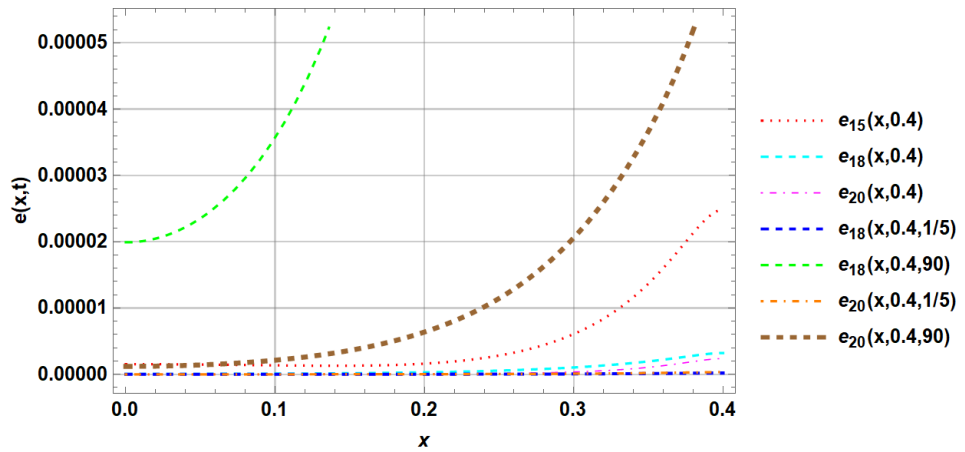
Şekil 4.33. Örnek4.8'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.34. Örnek4.8'deki yaklaşık çözümlerin $x=0.4$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.35. Örnek4.8'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.36. Örnek4.8'deki yaklaşık çözümlerin $t=0.4$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

Örnek 4.9 [42] Elektromanyetik alan teorisinde koordinatsız bir formda verilen Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \mathbf{J}_a = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

düzenlenerek sönümlenmiş dalga denklemini verecek şekilde kartezyen koordinatlarda yazılabilir. (4.1) denklem sistemindeki bağımlı değişkenlerin sayısı denklem sayısından fazla olduğundan dolayı bağımlı değişkenler arasındaki gerekli ek bağıntıları sağlamak üzere

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.2)$$

denklemleri kullanılır. Böylece (4.1) ve (4.2) denklemleri $E(x, t)$ de bir kısmi diferansiyel denklem sistemi vermek üzere kartezyen koordinatlarda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

biçiminde yazılabilir. (4.3) denklemi ile verilen lineer sönümlenmiş dalga denklemi x ve t bağımsız değişkenlerinde ikinci mertebeden olduğundan iki başlangıç koşulu ve iki sınır koşulunu gerektirir [42].

$$\operatorname{Re} \lambda = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{ve} \quad \operatorname{Im} \lambda = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\pi^2 \frac{1}{\mu \varepsilon} - \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2} \right)$$

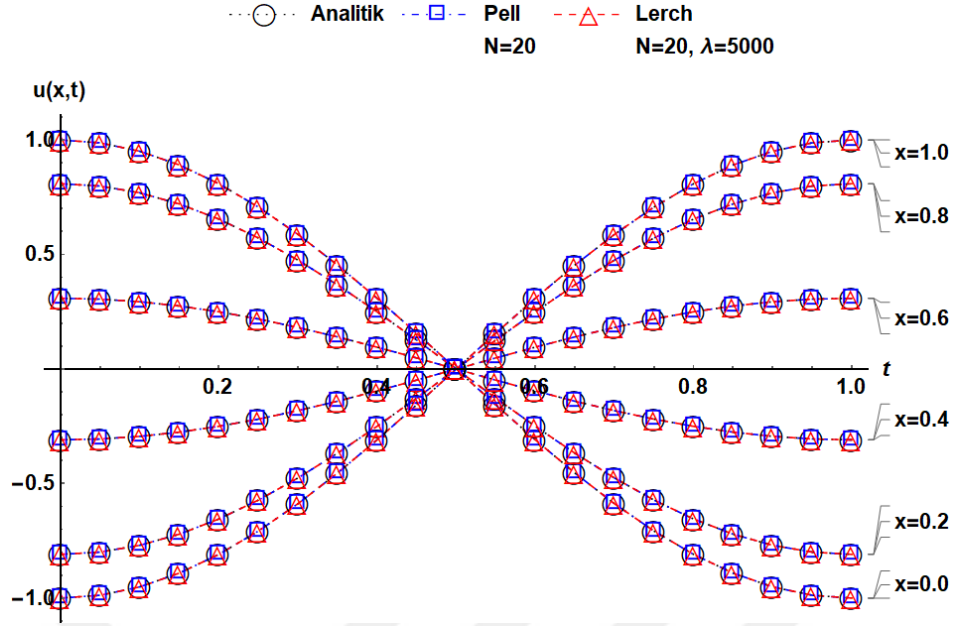
olmak üzere

$$E(x, t=0) = \cos(\pi x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial E(x, t=0)}{\partial t} = \operatorname{Re} \lambda \cos(\pi x)$$

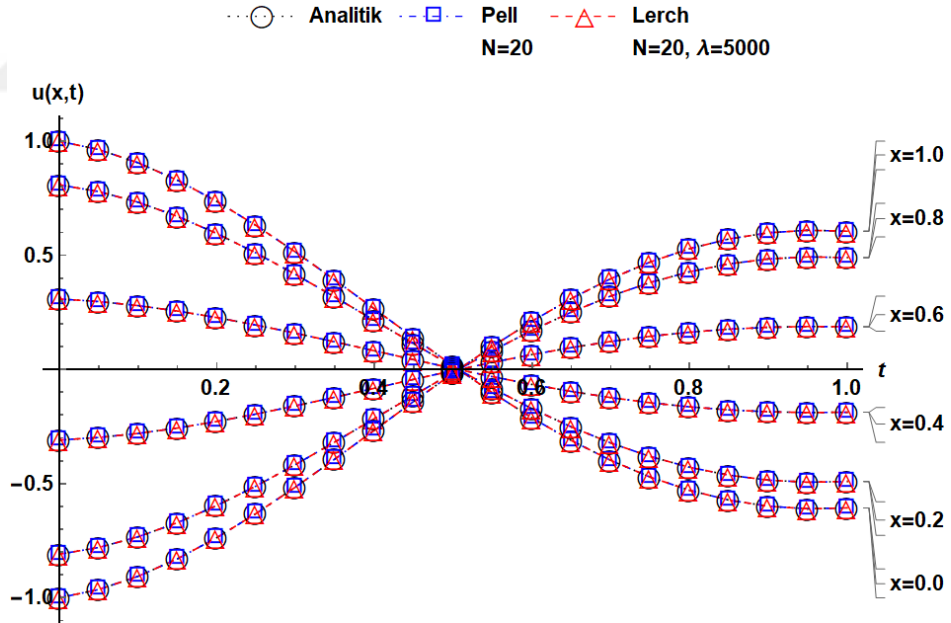
başlangıç koşulları ve

$$\frac{\partial E(x=0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial E(x=1, t)}{\partial x} = 0$$

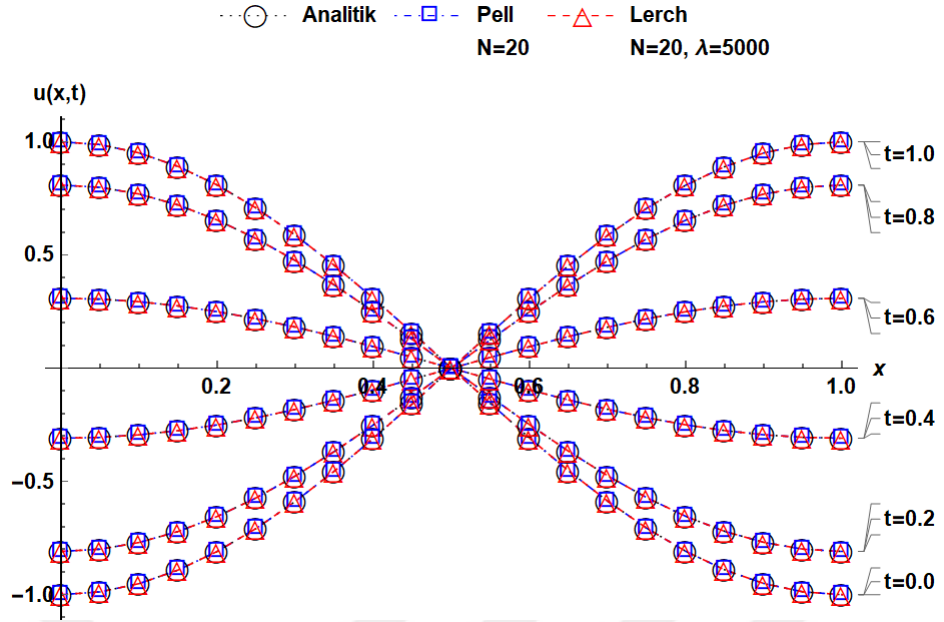
homojen Neumann sınır koşulları altında (4.3) denklemini ele alalım. Bu denklemin analitik çözümü $E(x, t) = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cos(\operatorname{Im} \lambda t) \cos(\pi x)$ dir. Denklemin yaklaşık çözümleri $N=18$, $N=19$ ve $N=20$ değerleri için Pell matris sıralama yöntemi ve $N=19$, $N=20$, $\lambda=1$ ve $\lambda=5000$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.37-50 ve Tablo4.8-9'da gösterilmiştir.



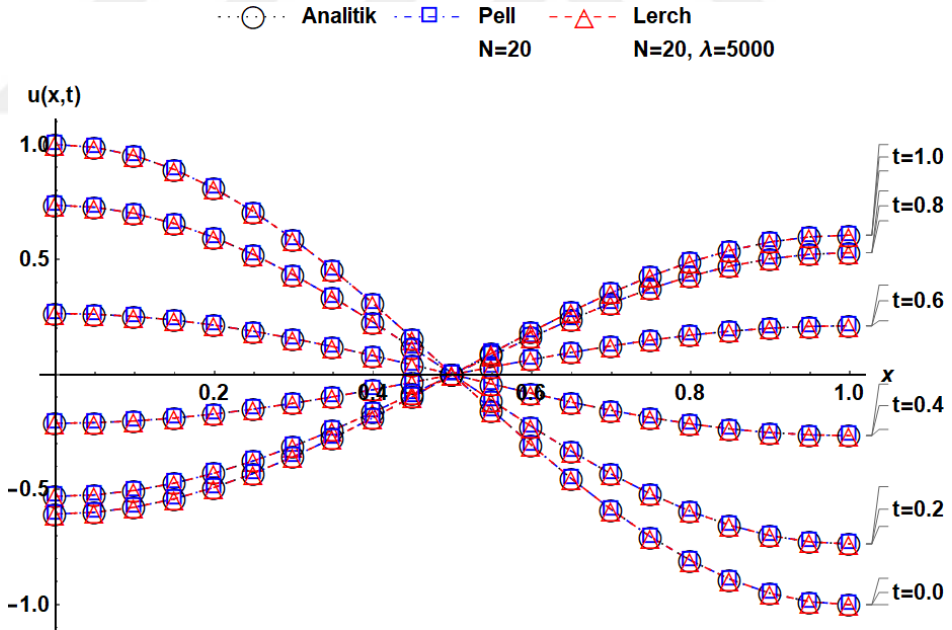
Şekil 4.37. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ iken analitik ve yaklaşık çözümlerinin x 'in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



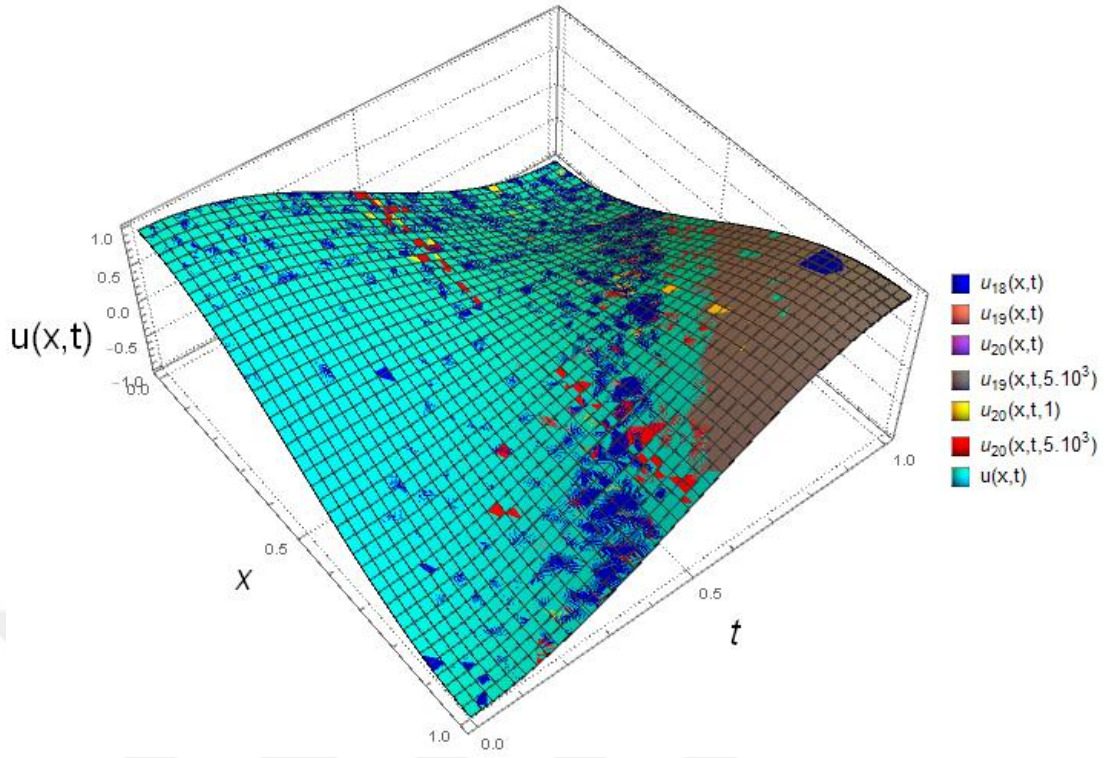
Şekil 4.38. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ iken analitik ve yaklaşık çözümlerinin x 'in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



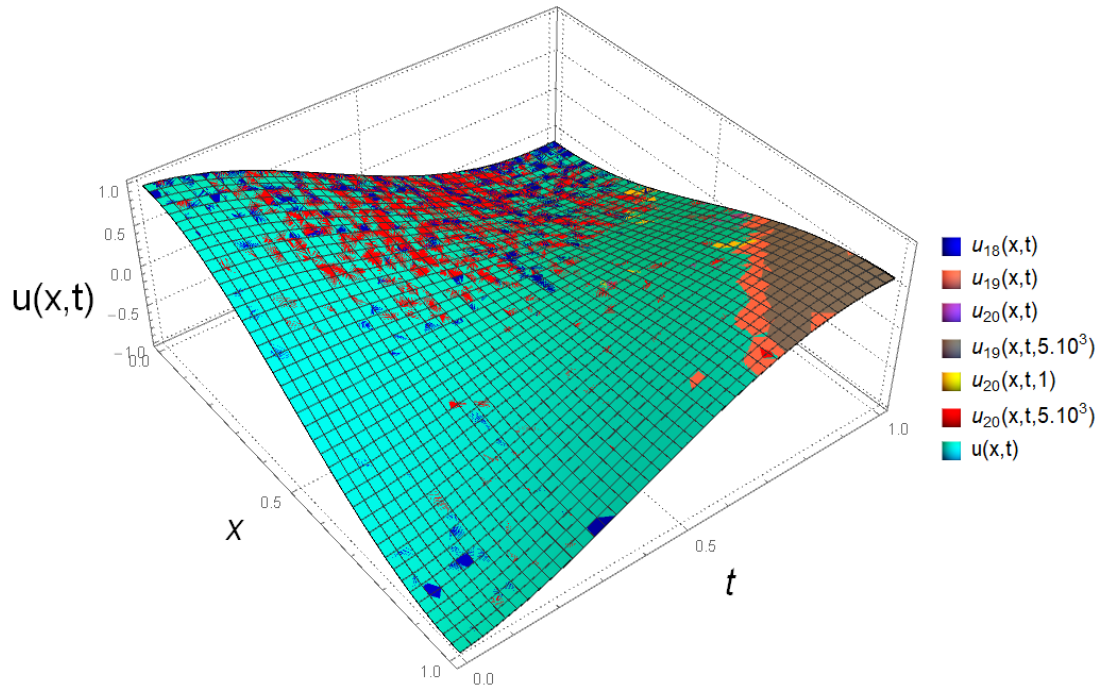
Şekil 4.39. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ iken analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.



Şekil 4.40. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ iken analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.



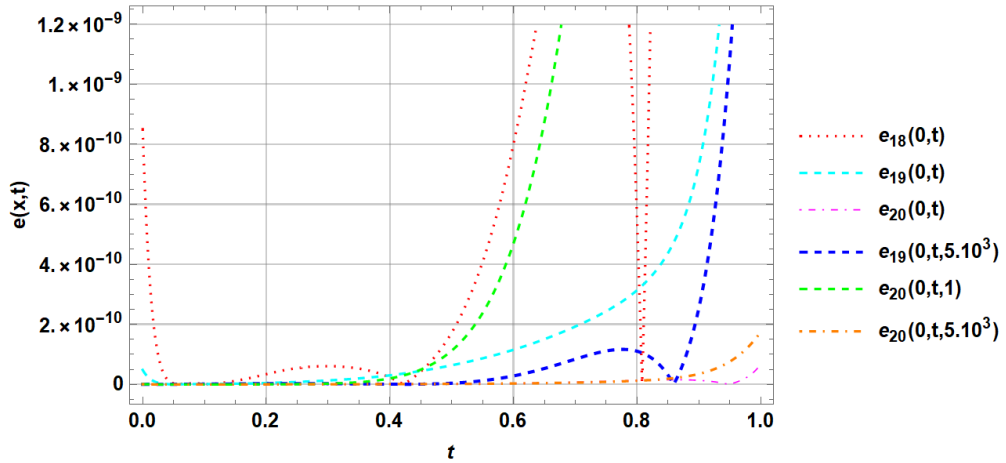
Şekil 4.41. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması.



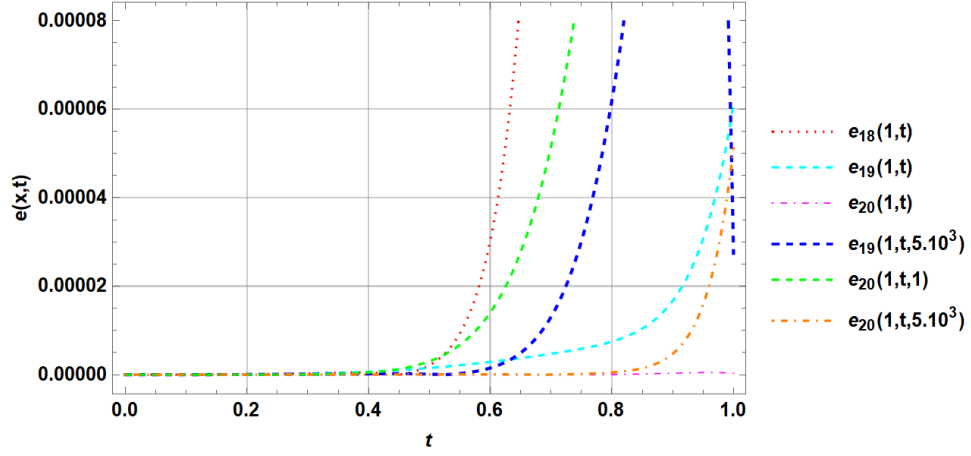
Şekil 4.42. Örnek 4.9'un $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması.

Tablo 4.8. $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ iken ve $t = 1$ için Örnek 4.9'un mutlak hata karşılaştırmaları.

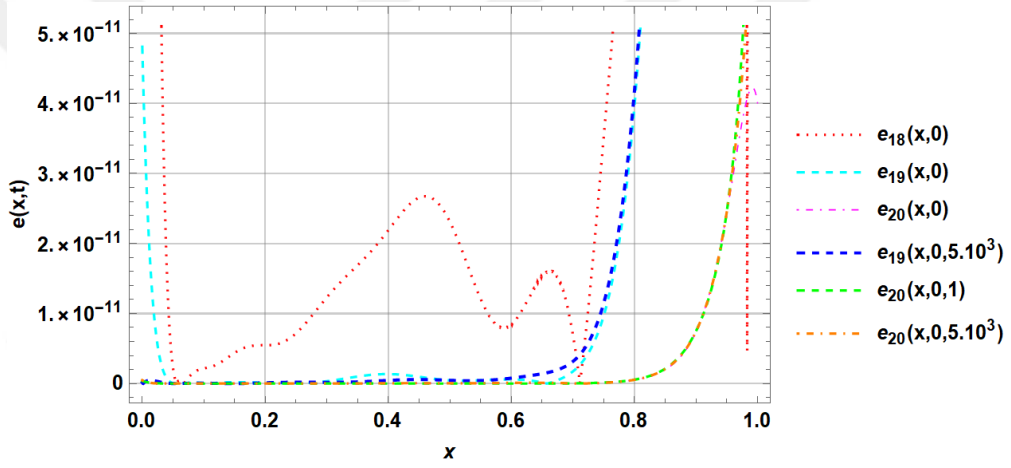
x	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Spline sıralama metodu [42]
	$N=18$	$N=19$	$N=20$	$N=19$ $\lambda = 5.10^3$	$N=20$ $\lambda = 1$	$N=20$ $\lambda = 5.10^3$	
0.0	1.3E-07	4.2E-09	6.7E-11	3.0E-09	2.1E-08	1.7E-10	2.5E-05
0.1	8.4E-09	1.7E-08	1.7E-10	1.3E-08	1.1E-08	4.6E-10	2.1E-05
0.2	1.2E-07	8.5E-08	8.0E-10	5.1E-08	3.5E-09	3.0E-09	2.0E-05
0.3	3.6E-07	3.0E-08	3.2E-09	1.2E-07	1.0E-07	1.1E-08	1.6E-05
0.4	1.7E-07	8.2E-07	1.1E-08	1.9E-07	8.0E-07	3.1E-08	2.0E-06
0.5	6.7E-06	1.7E-06	2.9E-08	9.2E-08	4.5E-06	6.1E-08	0.0E+00
0.6	6.6E-05	3.2E-06	5.5E-08	3.3E-06	1.9E-05	5.7E-08	2.0E-06
0.7	4.3E-04	5.2E-06	4.6E-08	2.2E-05	6.7E-05	1.0E-07	1.6E-05
0.8	2.2E-03	9.1E-06	1.0E-07	8.6E-05	1.8E-04	1.0E-06	2.0E-05
0.9	9.7E-03	2.4E-05	3.9E-07	1.7E-05	3.8E-04	1.0E-05	2.1E-05
1.0	2.4E-02	6.1E-05	3.3E-07	2.7E-05	4.9E-04	5.1E-05	2.5E-05



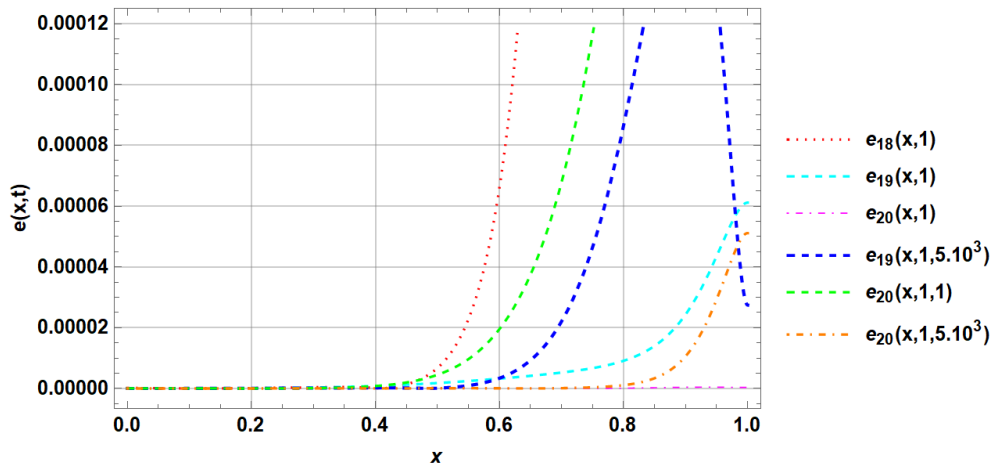
Şekil 4.43. Örnek4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.44. Örnek4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



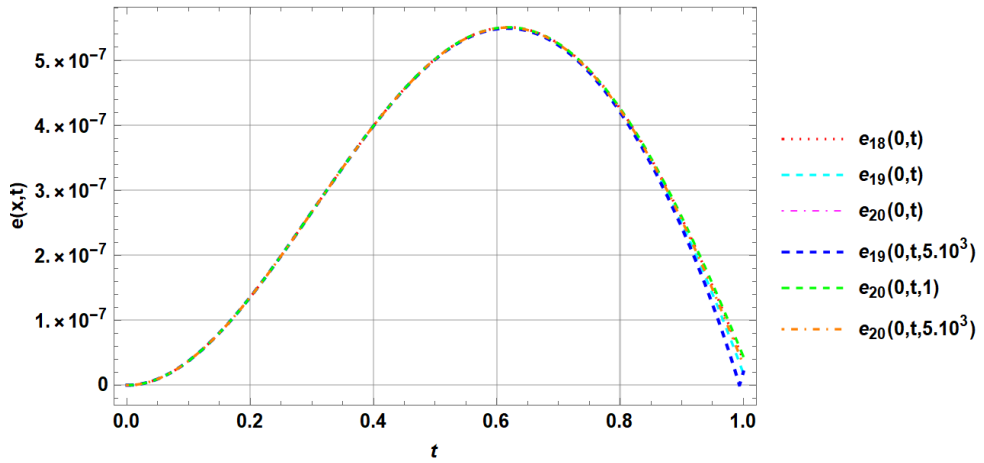
Şekil 4.45. Örnek4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



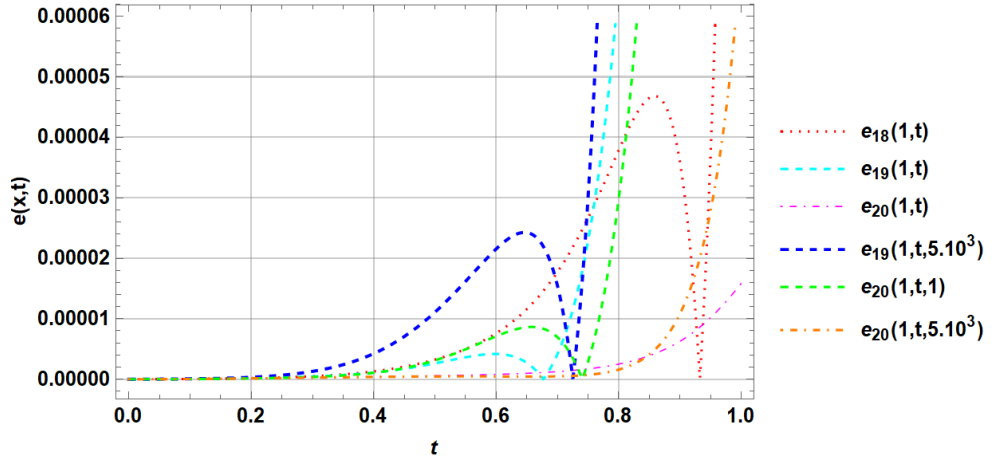
Şekil 4.46. Örnek4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 0$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

Tablo 4.9. $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ iken ve $t = 1$ için Örnek 4.9'un mutlak hata karşılaştırmaları.

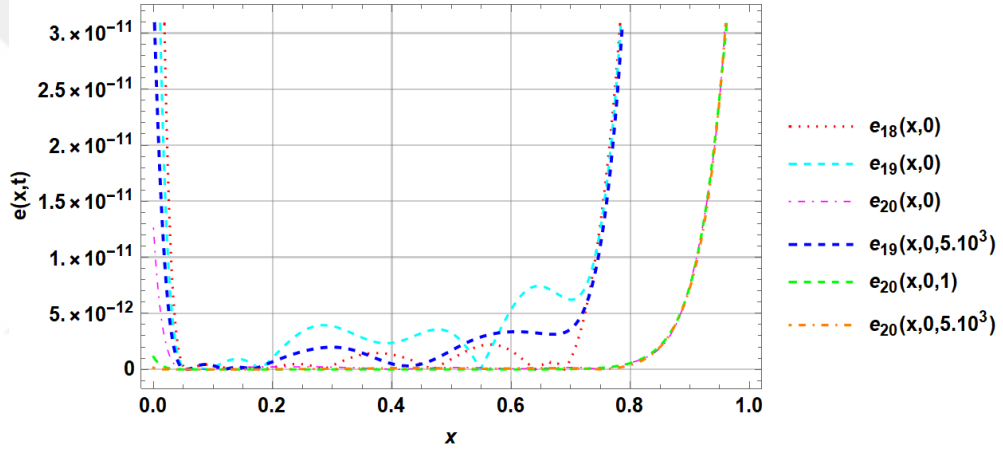
x	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Spline sıralama metodu [42]
	$N = 18$	$N = 19$	$N = 20$	$N = 19$ $\lambda = 5.10^3$	$N = 20$ $\lambda = 1$	$N = 20$ $\lambda = 5.10^3$	
0.0	3.8E-08	1.7E-08	3.1E-08	2.0E-08	4.4E-08	3.1E-08	1.3E-05
0.1	2.6E-08	1.7E-08	2.9E-08	1.2E-08	3.4E-08	2.9E-08	1.1E-05
0.2	2.0E-08	1.7E-08	2.4E-08	1.9E-07	1.3E-08	2.6E-08	1.1E-05
0.3	2.2E-07	1.6E-07	1.4E-08	1.0E-06	1.0E-07	2.3E-08	9.0E-06
0.4	9.2E-07	7.0E-7	1.0E-08	3.7E-06	7.0E-07	2.7E-08	1.0E-06
0.5	2.8E-06	1.9E-06	8.2E-08	1.0E-05	2.5E-06	4.3E-08	0.0E+00
0.6	7.4E-06	1.9E-06	2.8E-07	1.7E-05	5.5E-06	6.8E-08	1.0E-06
0.7	1.8E-05	1.4E-05	8.5E-07	1.4E-05	1.7E-07	1.2E-07	9.0E-06
0.8	3.5E-05	1.0E-04	2.5E-06	4.1E-04	5.6E-05	2.3E-06	1.1E-05
0.9	1.6E-05	4.3E-04	7.5E-06	3.2E-03	2.7E-04	1.8E-05	1.1E-05
1.0	2.7E-04	1.0E-03	1.5E-05	1.1E-02	6.3E-04	6.9E-05	1.3E-05



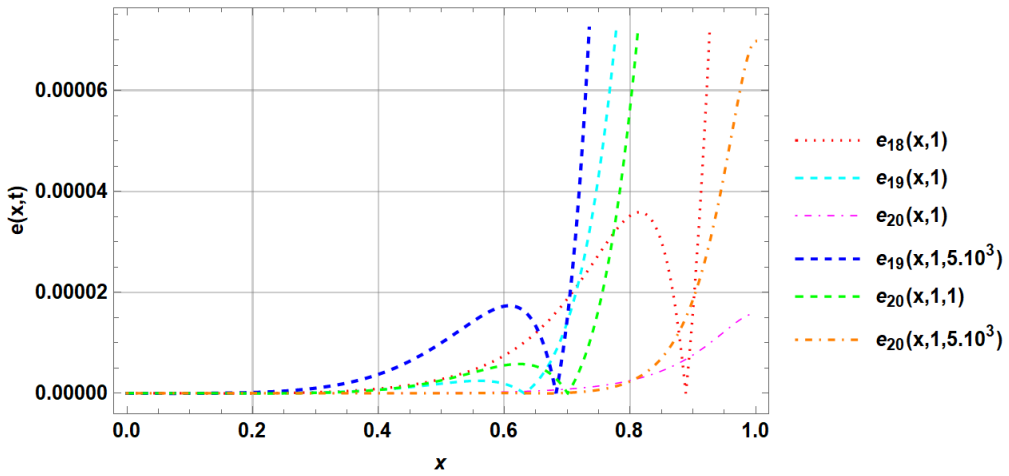
Şekil 4.47. Örnek 4.9'daki $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ve $\sigma = 1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.48. Örnek4.9'daki $\varepsilon=1$, $\mu=1$ ve $\sigma=1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.49. Örnek4.9'daki $\varepsilon=1$, $\mu=1$ ve $\sigma=1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.50. Örnek4.9'daki $\varepsilon=1$, $\mu=1$ ve $\sigma=1$ için elde edilen yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.

Örnek 4.10. [43] Tam çözümü $u(x,t) = x^2t$ olan

$$u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) = 2t, \quad 0 < x, t < 1$$

Poisson denkleminin

$$-u_t(x,0) + u(x,0) = -x^2, \quad u_t(x,1) + u(x,1) = 2x^2$$

$$-u_x(0,t) + u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 3t$$

Robin sınır koşulları altındaki çözümünü $N=3$ ve $\lambda=1$ için Lerch matris sıralama yöntemiyle ve $N=2$ için Pell matris sıralama yöntemiyle bulalım.

Denklemin yaklaşık çözümünü $N=3$ ve $\lambda=1$ için (3.6) kesilmiş Lerch serisi formunda ve $N=2$ için (3.7) kesilmiş Pell serisi formunda araştıralım. Bunun için öncelikle

$$x_\gamma = a + \frac{b-a}{N} \gamma, \quad t_\mu = 0 + \frac{T-0}{N} \mu, \quad \gamma, \mu = 0, 1, 2, \dots, N$$

eşitliklerinden Lerch matris sıralama yöntemi için

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\} \quad \text{ve} \quad \left\{ y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = 1 \right\}$$

sıralama noktaları ve Pell matris sıralama yöntemi için

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\} \quad \text{ve} \quad \left\{ y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1 \right\}$$

sıralama noktaları belirlenir. Daha sonra Poisson denklemin sırasıyla Lerch matris sıralama yöntemi ve Pell matris sıralama yöntemi için oluşturulan temel matris denklemlerini kullanarak yaklaşık çözümleri bulalım. Poisson denklemin Lerch matris sıralama yönteminin temel matris denklemleri

$$\left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \mathbf{C}}(\lambda) \right\} \mathbf{A} = g(x,t)$$

$$\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \overline{\mathbf{B}^2 \mathbf{C}}(\lambda)$$

ve buradaki matrisler

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\lambda=1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}[\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad \bar{\mathbf{B}}^2 = \text{diag}[\mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2],$$

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3], \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag}[\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x)],$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\lambda=1) = \text{diag}[\mathbf{C}(\lambda=1), \mathbf{C}(\lambda=1), \mathbf{C}(\lambda=1), \mathbf{C}(\lambda=1)] \quad \text{ve} \quad g(x,t) = 2t$$

şeklinde olup matrisler yerlerine konulur ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2, 3$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{27} & -2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{27} & ; & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & \frac{2}{3} & -2 & -2 & -1 & -\frac{2}{3} & ; & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{27} & -\frac{2}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{27} & 0 & 0 & \frac{2}{27} & 0 & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & 0 & 0 & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & ; & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 & 2 & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & ; & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 2 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & 2 & 0 & \frac{4}{27} & -\frac{4}{27} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27} & 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{4}{9} & \frac{10}{27} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{27} & \frac{8}{27} & ; & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 2 & 2 & \frac{11}{9} & \frac{10}{9} & 2 & 2 & \frac{31}{27} & \frac{26}{27} & ; & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{2}{27} & 4 & \frac{4}{3} & \frac{4}{9} & \frac{4}{27} & ; & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{11}{9} & \frac{31}{27} & 4 & \frac{8}{3} & \frac{10}{9} & \frac{26}{27} & ; & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & \frac{8}{3} & 4 & 4 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & ; & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından Robin sınır koşulları için

$$U_1(x,0) = -\mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

$$U_2(x,1) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(x)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

$$U_3(0,t) = -\mathbf{X}(0)\mathbf{B}\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(0)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

$$U_4(1,t) = \mathbf{X}(1)\mathbf{BC}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{X}(1)\mathbf{C}(\lambda)\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{C}}(\lambda)$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/6 & -1/9 & -1/18 & 1/18 & -1/36 & 1/54 & 1/27 & -1/27 & 1/54 & -1/81 & ; & -1/9 \\ 1 & -1 & 1/2 & -1/3 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/9 & 1/9 & -1/9 & 1/18 & -1/27 & 2/27 & -2/27 & 1/27 & -2/81 & ; & -4/9 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 & 5/9 & -1/18 & -1/9 & -1/9 & -5/54 & 1/27 & 2/27 & 2/27 & 5/81 & ; & 2/9 \\ 1 & 2 & 2 & 5/3 & 2/3 & 4/3 & 4/3 & 10/9 & 1/9 & 2/9 & 2/9 & 5/27 & 2/27 & 4/27 & 4/27 & 10/81 & ; & 8/9 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_3; \Phi_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/18 & 1/27 & -1 & -1/3 & 1/18 & -1/27 & 1/2 & 1/6 & -1/36 & 1/54 & -1/3 & -1/9 & 1/54 & -1/81 & ; & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/9 & 2/27 & -1 & -2/3 & -1/9 & 2/27 & 1/2 & 1/3 & 1/18 & 1/27 & -1/3 & -2/9 & -1/27 & -2/81 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_4; \Phi_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/18 & 1/27 & 2 & 2/3 & -1/9 & 2/27 & 2 & 2/3 & -1/9 & 2/27 & 5/3 & 5/9 & -5/54 & 5/81 & ; & 1 \\ 1 & 2/3 & 1/9 & 2/27 & 2 & 4/3 & 2/9 & 4/27 & 2 & 4/3 & 2/9 & 4/27 & 5/3 & 10/9 & 5/27 & 10/81 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin sondan sekiz satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2/3 & -1/9 & 2/27 & -2 & -2/3 & 1/9 & -2/27 & ; & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4/3 & 2/9 & 4/27 & -2 & -4/3 & -2/9 & -4/27 & ; & 4/3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2/3 & -2 & -2 & -1 & -2/3 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 2 & 0 & -1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 2/27 & -2/27 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 2 & 2/3 & -2/9 & 2/27 & 0 & 0 & 2/27 & 0 & ; & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 & 2 & 4/3 & 1/9 & 1/27 & 0 & 0 & 2/27 & 2/27 & ; & 4/3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2/3 & 4/3 & 2 & 2 & 8/9 & 4/9 & 0 & 0 & 2/27 & 4/27 & ; & 2 \\ 1 & -1 & 1/2 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/6 & -1/9 & -1/18 & 1/18 & -1/36 & 1/54 & 1/27 & -1/27 & 1/54 & -1/81 & ; & -1/9 \\ 1 & -1 & 1/2 & -1/3 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & -2/9 & 1/9 & -1/9 & 1/18 & -1/27 & 2/27 & -2/27 & 1/27 & -2/81 & ; & -4/9 \\ 1 & 2 & 2 & 5/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 & 5/9 & -1/18 & -1/9 & -1/9 & -5/54 & 1/27 & 2/27 & 2/27 & 5/81 & ; & 2/9 \\ 1 & 2 & 2 & 5/3 & 2/3 & 4/3 & 4/3 & 10/9 & 1/9 & 2/9 & 2/9 & 5/27 & 2/27 & 4/27 & 4/27 & 10/81 & ; & 8/9 \\ 1 & 1/3 & -1/18 & 1/27 & -1 & -1/3 & 1/18 & -1/27 & 1/2 & 1/6 & -1/36 & 1/54 & -1/3 & -1/9 & 1/54 & -1/81 & ; & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/9 & 2/27 & -1 & -2/3 & -1/9 & 2/27 & 1/2 & 1/3 & 1/18 & 1/27 & -1/3 & -2/9 & -1/27 & -2/81 & ; & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/18 & 1/27 & 2 & 2/3 & -1/9 & 2/27 & 2 & 2/3 & -1/9 & 2/27 & 5/3 & 5/9 & -5/54 & 5/81 & ; & 1 \\ 1 & 2/3 & 1/9 & 2/27 & 2 & 4/3 & 2/9 & 4/27 & 2 & 4/3 & 2/9 & 4/27 & 5/3 & 10/9 & 5/27 & 10/81 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözümlenerek bilinmeyen Lerch katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

elde edilir ve

$$u_3(x, t, \lambda) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\lambda) \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x, t) = u_3(x, t, \lambda) = x^2 t$$

bulunur ve bulunan bu sonuç tam çözüme eşittir. Şimdi de Pell matris sıralama yöntemi ile problemin yaklaşık çözümünü bulalım. Poisson denklemin Pell matris sıralama yönteminin temel matris denklemleri

$$\left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^2 \bar{\mathbf{S}} \right\} \mathbf{A} = g(x, t)$$

$$\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{X}}(t) \bar{\mathbf{B}}^2 \bar{\mathbf{S}}$$

olup buradaki matrisler

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}[\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad \bar{\mathbf{B}}^2 = \text{diag}[\mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^2], \quad \bar{\mathbf{S}} = \text{diag}[\mathbf{S}, \mathbf{S}, \mathbf{S}]$$

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag}[\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x)],$$

dir. Temel matris denkleminde matrisler yerine konular ve $\gamma, \mu = 0, 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 24 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 48 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 24 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 32 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 16 & 56 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 48 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 16 & 8 & 8 & 56 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 16 & 8 & 16 & 80 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Ardından Robin sınır koşulları için

$$U_1(x,0) = -\mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(0)\bar{\mathbf{S}}$$

$$U_2(x,1) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(1)\bar{\mathbf{S}}$$

$$U_3(0,t) = -\mathbf{X}(0)\mathbf{B}\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(0)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}$$

$$U_4(1,t) = \mathbf{X}(1)\mathbf{B}\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}(1)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}$$

olup matrisler yerlerine konular ve $\gamma, \mu = 1, 2$ için sıralama noktalarını da kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$[\mathbf{U}_1; \Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -4 & 2 & ; & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_2; \Phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 13 & 1 & 4 & 13 & 2 & 8 & 26 & ; & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_3; \Phi_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & -2 & -4 & 1 & 1 & 2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_4; \Phi_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 8 & 13 & 13 & 26 & ; & 3/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha sonra $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin sondan dört satırı silinip yerine elde edilen koşul matrisleri yazılarak

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 24 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 48 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 24 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 32 & ; & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -4 & 2 & ; & -1/4 \\ 1 & 4 & 13 & 1 & 4 & 13 & 2 & 8 & 26 & ; & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -2 & -4 & 1 & 1 & 2 & ; & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 8 & 13 & 13 & 26 & ; & 3/2 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bulunan bu sistem çözülerek bilinmeyen Pell katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir ve

$$u_2(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{S}\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x,t) = u_2(x,t) = x^2t$$

bulunur ve bulunan bu sonuç tam çözüme eşittir.

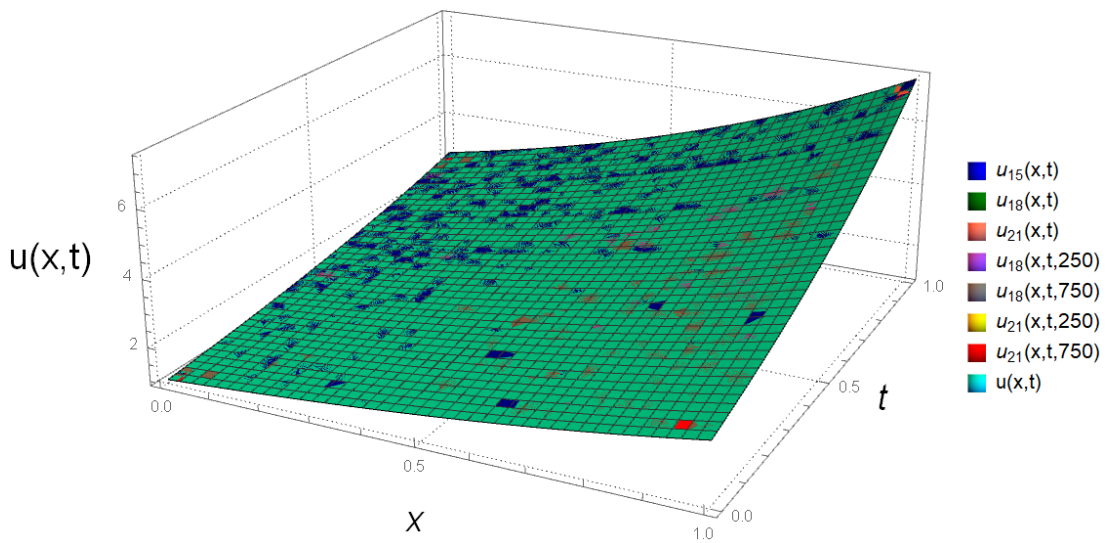
Örnek 4.11. [44] $\Delta u + 2u = 0$, $0 \leq x, t \leq 1$ Helmholtz denkleminin

$$u(x,0) = e^{-x} , \quad u(x,1) = e^{-x+1}$$

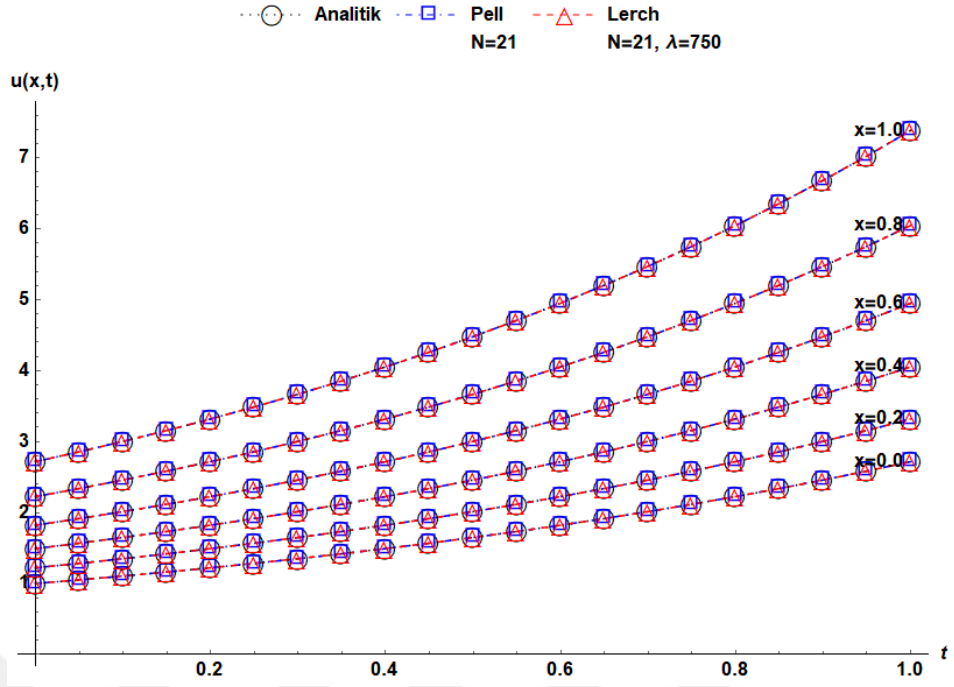
başlangıç koşulları ve

$$u(0,t) - u_x(0,t) = 0 , \quad u(1,t) = e^{t+1}$$

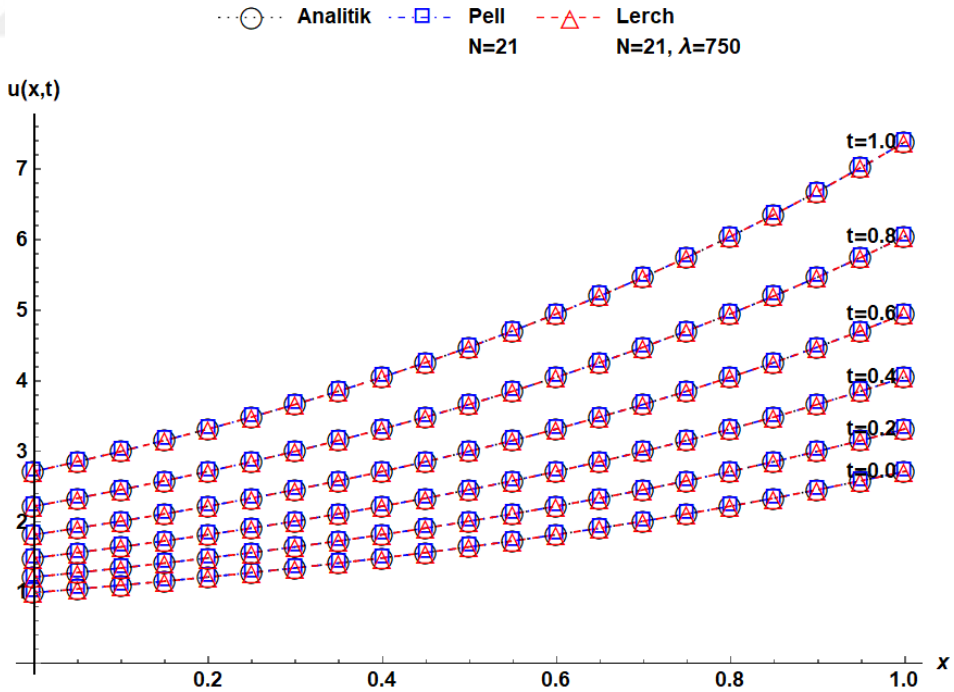
sınır koşulları altındaki çözümünü bulalım. Bu problemin analitik çözümü $u(x,t) = e^{-x+t}$ dir. Problemin yaklaşık çözümleri $N=15$, $N=18$ ve $N=21$ değerleri için Pell matris sıralama yöntemi ve $N=18$, $N=21$, $\lambda=250$ ve $\lambda=750$ değerleri için Lerch matris sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.51-57 ve Tablo 4.10 da gösterilmiştir.



Şekil 4.51. Örnek 4.11'in yaklaşık çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması.



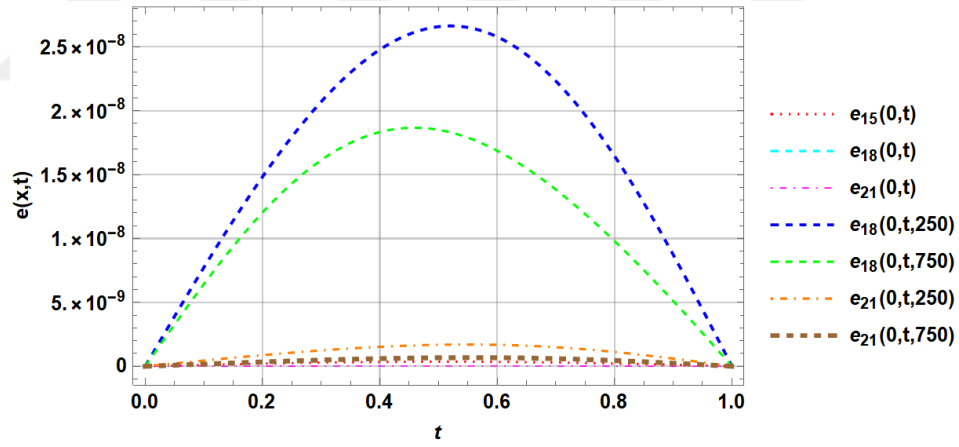
Şekil 4.52. Örnek 4.11'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin x 'in bazı değerlerinde karşılaştırılması.



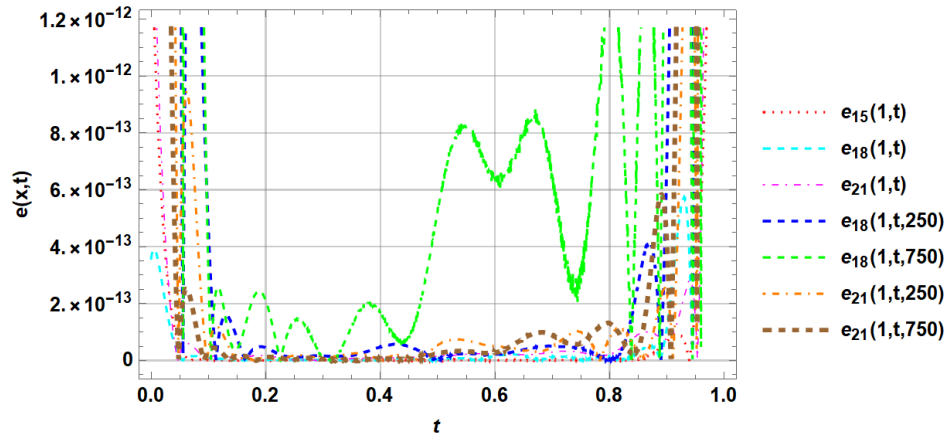
Şekil 4.53. Örnek 4.11'in analitik ve yaklaşık çözümlerinin t 'nin bazı değerlerinde karşılaştırılması.

Tablo 4.10. Örnek 4.11'in mutlak hata ve ortalama hatanın üst sınırı karşılaştırmaları

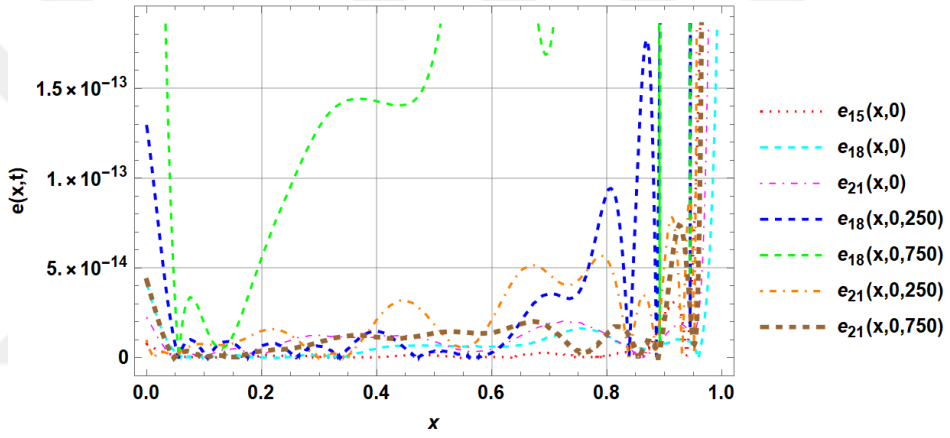
x	t	Pell polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			Lerch polinomlarına dayalı yaklaşık çözüm			
		N=15	N=18	N=21	N=18 $\lambda = 250$	N=18 $\lambda = 750$	N=21 $\lambda = 250$	N=21 $\lambda = 750$
0.0	0.0	7.54E-15	4.14E-14	2.24E-14	1.28E-13	8.95E-13	9.32E-15	4.30E-14
0.2	0.2	2.99E-10	5.23E-10	1.03E-11	2.11E-08	1.86E-08	1.19E-09	4.61E-10
0.4	0.4	8.80E-10	1.56E-09	3.06E-11	6.31E-08	5.35E-08	3.59E-09	1.39E-09
0.6	0.6	1.79E-09	3.62E-09	7.44E-11	1.42E-07	7.49E-08	9.69E-09	3.89E-09
0.8	0.8	2.51E-09	7.22E-09	2.13E-10	2.73E-07	8.02E-08	2.95E-08	1.27E-08
1.0	1.0	6.98E-12	7.71E-11	3.59E-11	5.90E-10	9.03E-10	3.59E-10	8.68E-10
\bar{R}_N		1.53E-07	4.14E-07	1.30E-08	1.57E-05	2.09E-05	1.43E-06	6.24E-07



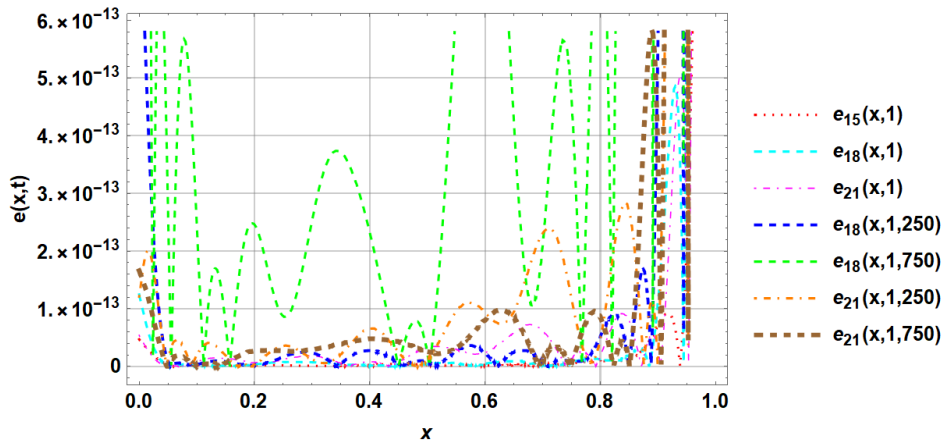
Şekil 4.54. Örnek4.11'deki yaklaşık çözümlerin $x=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.55. Örnek4.11'deki yaklaşık çözümlerin $x=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.56. Örnek4.11'deki yaklaşık çözümlerin $t=0$ için mutlak hata karşılaştırmaları.



Şekil 4.57. Örnek4.11'deki yaklaşık çözümlerin $t=1$ için mutlak hata karşılaştırmaları

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fen ve mühendislik alanlarında oldukça yoğun bir biçimde kullanılan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek çoğu zaman karmaşık veya imkansızdır. Bu sebeple bu tip denklemlerin yaklaşık çözümlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla, bu çalışmada Cauchy, Dirichlet, Neumann ve/veya Robin koşulları altındaki lineer kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için Lerch polinomları ve Pell polinomları ile sıralama noktalarına dayalı Lerch ve Pell matris yöntemleri geliştirilmiştir. Bunların çeşitli problemlere uygulanması yapılmış ve yöntemlerin doğru ve etkili bir biçimde çalıştığı şekiller ile tablolardan gözlemlenmektedir.

Ayrıca bilgisayar programları yardımıyla kolaylıkla uygulandığı görülen bu yöntemlerin N kesme sınırlarının yeterince büyük seçilmesi durumunda problemlerin tam çözümlerine bir hayli yaklaştığı görülmektedir (Tablo 4.6 ve Şekil 4.25-28). Üstelik tam çözümün bir polinom olduğu ve N kesme sınırlarının polinomun derecesine küçük ya da eşit seçildiği durumlarda elde edilen yaklaşık çözümün tam çözümle aynı olduğu saptanmıştır (Örnek 4.1, Örnek 4.4, Örnek 4.7, Örnek 4.10). Ancak tam çözüm trigonometrik bir fonksiyon iken N kesme sınırının küçük olduğu durumlarda iyi sonuçlar vermediği gözlemlenmiştir. Öte yandan, Lerch matris sıralama yönteminde kullanılan λ parametresinin uygun değerlerinin seçilmesi ile tam çözüm ve yaklaşık çözümler arasındaki hata miktarının daha da azaldığı belirlenmiştir (Tablo 4.7 ve Şekil 4.33-36).

Sonuç olarak, bu çalışmada sunulan Lerch ve Pell matris sıralama yöntemlerinin diğer yöntemler ile karşılaştırılmalarından etkin bir biçimde uygulanabilir olduğu anlaşılmaktadır. Bu yöntemler lineer kısmi diferansiyel denklemlerin yanı sıra, lineer olmayan, gecikmeli kısmi diferansiyel denklemlere ve fonksiyonel kısmi integro diferansiyel denklemlere de uygulanabilir; fakat bazı değişikliklerin yapılması gerekmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Logan, J. D. Applied Partial Differential Equations. Third Edition. Ed.: Sheldon Axler, Kenneth Ribet, Springer International Publishing, 2015, 289 s.
- [2] Farlow, S. J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Dover Publications, New York, 1993, 414 s.
- [3] Goodwine, B. Engineering Differential Equations: Theory and Applications. Springer, Verlag-New York, 2011, 745s.
- [4] Wazwaz, A. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009, 700 s.
- [5] Lax, P. D. On Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations and the Differentiability of Solutions of Elliptic Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1995, Vol. VIII, 615-633.
- [6] Lapidus, L., Pinder, G. F. Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering. Wiley-Interscience Publication, New York, United States, 1999, 677 s.
- [7] Levine, H. Partial Differential Equations. Ed.: Shing-Tung Yau, American Mathematical Society, International Press, 1997, 706 s.
- [8] Evans, G., Blackledge, J., Yardley, P. Analytic Methods for Partial Differential Equations. Springer, Verlag, London, 1999, 316 s.
- [9] Evans, G., Blackledge, J., Yardley, P. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Springer, Verlag, London, 2000, 290 s.
- [10] Sloan, D., Süli, E., Vandewalle, S. Numerical Analysis 2000, Partial Differential Equations: Volume 7. Elsevier Science & Technology, Amsterdam, Netherlands, United States, 2001, 480 s.
- [11] Bülbül, B., Sezer, M. A Taylor matrix method for the solution of a two-dimensional linear hyperbolic equation. Applied Mathematics Letters, 2011, 24, 1716-1720.
- [12] Yüksel, G., Isik, R. O., Sezer, M. Error analysis of the Chebyshev collocation method for linear second order partial differential equations. International Journal of Computer Mathematics, 2015. Vol. 92, No. 10, 2121–2138.
- [13] Gürbüz, B., Sezer, M. A numerical solution of parabolic-type Volterra partial integro-differential equations by Laguerre collocation method. International Journal of Applied Physics and Mathematics, 2017, 7, 3, 49-58.
- [14] Kemancı, B. İkinci Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Legendre Polinom Çözümleri ve Uygulamaları. Muğla Sıtkı Kocaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2012, 91 s. (Doktora Tezi)
- [15] Yüksel, G. Euler matrix method for linear second-order partial differential equations with complicated conditions. Journal of Scientific and Engineering Research. 2016, 3 (6), 163-172.
- [16] Biçer, K. E., Yalcinbas, S. A Matrix Approach to Solving Hyperbolic Partial Differential Equations Using Bernoulli Polynomials. The 28th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society- ICJMS2015, 2016, University of Nis, Faculty of Sciences and Mathematics, Vol. 30, No. 4, 993-1000.
- [17] Savaşaneril, B. N. Bernstein Series Solution of the Heat Equation in 2-D. New Trends in Mathematical Sciences. 2017, No. 4, 220-231.
- [18] Ahsan, Z. Differential Equations and Their Applications, Third Edition. PHI Learning, Delhi, India, 2016, 660 s.
- [19] Myint-U, T., Debnath, L. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2007, 778 s.

- [20] Schiesser, W. E., Griffiths, G. W. A Compendium of Partial Differential Equation Models, Method of Lines Analysis with Matlab. Cambridge University Press, New York, U.S.A., 2009, 490 s.
- [21] Selvadurai, A. P. S. Partial Differential Equations in Mechanics 1 Fundamentals, Laplace's Equation, Diffusion Equation, Wave Equation. Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000, 595 s.
- [22] DuChateau, P., Zachmann, D. W. Applied Partial Differential Equations. Dover Publications, INC, Mineola, New York, 2002, 640 s.
- [23] McBride, E. B. Obtaining Generating Functions, Volume 21. Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971, 100 s.
- [24] Illie, S., Jeffrey, D. J., Corless, R. M., Zhang, X. Computation of Stirling Numbers and Generalizations. 2015 17th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), 21-24 Sept. 2015, Timisoara, Romania. DOI: 10.1109/SYNASC.2015.18}.
- [25] Branson, D. An Extension of Stirling Numbers., The Fibonacci Quarterly, Official Publication of the Fibonacci Association. June-July 1996, Volume 34, Number 3, 213-223.
- [26] Balakrishnan, N. Advances in Combinatorial Methods and Applications to Probability and Statistics. Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 1997, 562 s.
- [27] Boas, R. P., Buck, R. C. Polynomial Expansions of Analytic Functions. Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, 1964, 77 s.
- [28] Kruchinin, V., Kruchinin, D. Explicit Formulas for Some Generalized Polynomials. Applied Mathematics & Information Sciences. 2013, Appl. Math. Inf. Sci. 7, No. 5, 2083-2088.
- [29] Koshy, T. Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications. Springer, New York, 2014, 431 s.
- [30] Djordjevic, G. B. and Milovanovic, G. V., Special Cases of Polynomials. University of Nis, Faculty of Technology. Leskovac. 2014, 211 s.
- [31] Halici, S. On the Pell Polynomials. Applied Mathematical Sciences. 2011, Vol. 5, no. 37, 1833-1838.
- [32] Peterson, J. C., Smith, R. D. Introductory Technical Mathematics, 6th Edition. Delmar, Cengage Learning, U.S.A., 2012, 864 s.
- [33] Dass, H. K., Verma, R. Basics of Engineering Mathematics Vol-III (RGPV Bhopal). S Chand, Ram Nagar, New Delhi, 2013, 632 s.
- [34] Dehghan M., Shokri A. A Numerical Method for Solving the Hyperbolic Telegraph Equation. Wiley InterScience. November 2007. DOI: 10.1002/num.20306.
- [35] Rashidinia, J., Mohsenyadeha, M. Numerical Solution of One-Dimensional Heat and Wave Equation by Non-Polynomial Quintic Spline. International Journal of Mathematical Modelling & Computations, Vol. 05, No. 04, Fall 2015, 291- 305.
- [36] Aswin, V. S., Awasthi, A. Anu, C. A comparative study of numerical schemes for convection-diffusion equation. International Conference on Computational Heat and Mass Transfer-2015, National Institute of Technology Warangal, Telangana, India. Procedia Engineering 127 (2015) 621–627.
- [37] Ray, S. S. Numerical Analysis with Algorithms and Programming. CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2016, 674s.
- [38] Hussian, E. A., Suhhiem, M. H. Numerical Solution of Partial Differential Equations by using Modified Artificial Neural Network. Network and Complex Systems, Vol.5, No.6, 2015, ISSN 2224-610X (Paper), ISSN 2225-0603 (Online).
- [39] Esfandiari, R. S. Numerical Methods for Engineers and Scientists Using MATLAB®. CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2013, 511s.

- [40] Faires, J. D., Burden, R. L. Numerical Methods. Third Edition. Brooks Cole, 2002, 640s.
- [41] Faires, J. D., Burden, R. L. Instructor's for Numerical Analysis. Eighth Edition. THOMSON Brooks / Cole, 2005, 291s.
- [42] Schiesser, W. E. Spline Collocation Methods for Partial Differential Equations: with applications in R. Wiley, USA, 2017, 549s.
- [43] Zauderer, E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. Third Edition. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, Hoboken, New Jersey, 2006, 930s.
- [44] Zhanlav, T., Ulziibayar, V. The Best Finite-Difference Scheme for the Helmholtz Equation. American Journal of Computational Mathematics. 2012, 2, 207-212.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seda ÇAYAN
Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1993
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : seda_cayan@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Şehit Ali Karaoğlan Lisesi, 2011
Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015

Yayımları

Çayan, S., Sezer, M., Çevik, M. A Numerical Solution of Cauchy Problem for Partial Differential Equations by Means of Pell Polynomials. İzmir Katip Çelebi University, International Students Science Congress, 4-5 Mayıs 2018, İzmir (Bildiriler Kitabı, 102-108).