T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BİLİM DALI

AĞLARDA GÜVENLİK İÇİN KOMŞU ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

Mehmet Aykut TOSUN

Danışman
Doç. Dr. Ersin ASLAN

MANİSA–2021

Mehmet Aykut TOSUN

AĞLARDA GÜVENLİK İÇİN KOMŞU ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

2021

TEZ ONAYI

Mehmet Aykut TOSUN tarafından hazırlanan **"Ağlarda Güvenlik İçin Komşu Zedelenebilirlik Ölçümleri Üzerine"** adlı tez çalışması 19/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Doç. Dr. Ersin ASLAN** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ** Ege Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Emin BORANDAĞ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Hasan Ferdi Turgutlu Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet Aykut TOSUN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{G}$	Bağlantılı *G* grafı
$\boldsymbol{O(n)}$	Bir algoritmanın *n* değişkenli zaman karmaşıklığı
$\boldsymbol{\ell}$	Bir grafın interval gösterimi
$\boldsymbol{\omega(G/X)}$	Etkilenmiş *G* grafındaki bileşen sayısı
$\boldsymbol{c(G/X)}$	Etkilenmiş *G* grafındaki en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı
$\boldsymbol{i(G/X)}$	Etkilenmiş *G* grafındaki izole tepe sayısı
$\boldsymbol{c_w(G/X)}$	Etkilenmiş *G* grafının toplam ağırlığı en yüksek bileşenin ağırlığı
$\boldsymbol{i_w(G/X)}$	Etkilenmiş *G* grafının toplam izole tepe ağırlığı
$\boldsymbol{c(G-X)}$	*G* grafındaki en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı
$\boldsymbol{i(G-X)}$	*G* grafındaki izole tepe sayısı
$\boldsymbol{\omega(G-X)}$	*G* grafındaki toplam bileşen sayısı
$\boldsymbol{G-X}$	*G* grafından kesim kümesi çıkarılmış hali
$\boldsymbol{I_w(G)}$	*G* grafının ağırlıklı bütünlük sayısı
$\boldsymbol{NIR_w(G)}$	*G* grafının ağırlıklı komşu izole kopma derecesi
$\boldsymbol{NIT_w(G)}$	*G* grafının ağırlıklı komşu izole mukavemeti
$\boldsymbol{NIS_w(G)}$	*G* grafının ağırlıklı komşu izole saçılım sayısı
$\boldsymbol{\lambda(G)}$	*G* grafının ayrıt bağlantılılık sayısı
$\boldsymbol{\lambda_{NB}(G)}$	*G* grafının ayrıt komşu bağlantılılık sayısı
$\boldsymbol{ENR(G)}$	*G* grafının ayrıt komşu kopma derecesi
$\boldsymbol{ENS(G)}$	*G* grafının ayrıt komşu saçılım sayısı
$\boldsymbol{E(G)}$	*G* grafının ayrıt kümesi
$\boldsymbol{T'(G)}$	*G* grafının ayrıt mukavemeti
$\boldsymbol{es(G)}$	*G* grafının ayrıt saçılım sayısı
$\boldsymbol{\alpha(G)}$	*G* grafının bağımsızlık sayısı
$\boldsymbol{\kappa(G)}$	*G* grafının bağlantılılık sayısı
$\boldsymbol{NC(G)}$	*G* grafının komşu bağlantılılık sayısı
$\boldsymbol{NIR(G)}$	*G* grafının komşu izole kopma derecesi
$\boldsymbol{NIT(G)}$	*G* grafının komşu izole mukavemeti
$\boldsymbol{NIS(G)}$	*G* grafının komşu izole saçılım sayısı
$\boldsymbol{Nr(G)}$	*G* grafının komşu kopma derecesi
$\boldsymbol{r(G)}$	*G* grafının kopma derecesi
$\boldsymbol{\delta(G)}$	*G* grafının minimum tepe derecesi

$\boldsymbol{T(G)}$	*G* grafının mukavemeti
$\boldsymbol{V(G)}$	*G* grafının tepe kümesi
$\boldsymbol{n}$	*G* grafının tepe sayısına bağlı seviyesi
$\boldsymbol{c_w(G-X)}$	*G* grafının toplam ağırlığı en yüksek bileşenin ağırlığı
$\boldsymbol{sc(G)}$	*G* grafının saçılım sayısı
$\boldsymbol{G/X}$	*G* grafının subversion stratejisi atılmış hali
$\boldsymbol{e}$	Grafın ayrıtı
$\boldsymbol{v}$	Grafın tepesi
$\boldsymbol{C(\alpha)}$	Interval grafın asgari subversion stratejisi
$\boldsymbol{comp(i,j)}$	*i* ve *j* intervalinde bulunan bileşenler
$\boldsymbol{isol(i,j)}$	*i* ve *j* intervalinde bulunan izole tepeler
$\boldsymbol{X}$	Kesim kümesi/Subversion stratejisi
$\boldsymbol{\lvert X\rvert}$	Kesim kümesinin eleman sayısı/Subversion stratejisinin eleman sayısı
$\boldsymbol{w(X)}$	Kesim kümesinin veya Subversion stratejisinin toplam ağırlığı
$\boldsymbol{C_n}$	*n* tepeli çevre graf
$\boldsymbol{P_n}$	*n* tepeli yol graf
$\boldsymbol{W_{1,n}}$	*n*+1 tepeli tekerlek graf
$\boldsymbol{K_{1,n}}$	*n*+1 tepeli yıldız graf
$\boldsymbol{N(v)}$	*v* tepesinin açık komşuluğu
$\boldsymbol{w(v)}$	*v* tepesinin ağırlığı
$\boldsymbol{deg(v)}$	*v* tepesinin derecesi
$\boldsymbol{N[v]}$	*v* tepesinin kapalı komşuluğu
$\boldsymbol{sc(X)}$	*X* ayrıt kesim kümesinin saçılım sayısı
$\boldsymbol{Ge_n}$	2*n*+1 tepeli gear graf

ŞEKİLLER DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ersin ASLAN'a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Mehmet Aykut TOSUN
Manisa, 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Ağlarda Güvenlik İçin Komşu Zedelenebilirlik Ölçümleri Üzerine

Mehmet Aykut TOSUN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ersin ASLAN

Ağ güvenliği bilgi işlem alanında önemli bir konudur. Zedelenebilirlik, bir ağda bulunan cihazların veya bağlantıların zarar görmesi durumunda iletişimlerinin kopana kadar gösterdikleri dayanma gücüne denir. Bu zedelenebilirlik ölçümünün yapılabilmesi için öncelikle ağın, cihazlar tepelerle, bağlantılar ayrıtlarla ifade edilecek şekilde graflarla modellenmesi gereklidir.

Bu tezde, casus ağlar konusunda yaygın olarak kullanılan komşuluklu zedelenebilirlik ölçüm parametrelerinden komşu izole mukavemet ve komşu izole kopma derecesi ele alınmıştır. Her bir tepenin eşit olarak kabul edildiği ağırlıksız graflar için ve her tepenin önemine göre ağırlık değeri verildiği ağırlıklı graflar için bu zedelenebilirlik ölçüm parametreleri incelenmiştir. Ek olarak, ele alınan bu dört parametreye ait, mükemmel (perfect) grafların önemli bir alt sınıfı olan interval graflar için polinom zaman algoritmaları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf Teorisi, Zedelenebilirlik, Graf Algoritmaları, Interval Graflar, Komşu İzole Mukavemet, Komşu İzole Kopma Derecesi

2021, 53 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

On Neighbor Vulnerability Measures for Network Security

Mehmet Aykut TOSUN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Software Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ersin ASLAN

Network security is an important issue in the computing. Vulnerability is called the resistance of the devices or connections in a network until their communication is over in case of damage. To be able to measure the vulnerability, the network must be modeled with graphs so that the devices are expressed with vertices and connections with edges.

In this thesis, the neighbor isolated tenacity and neighbor isolated rupture degree from neighbor vulnerability measurement parameters, which are commonly used in spy networks, are discussed. These vulnerability measurement parameters were examined for unwieghted graphs that each vertex is considered equal, and for weighted graphs that weight value is given according to the importance of each vertex. In addition, we gave polynomial time algorithms for interval graphs, an important subclass of perfect graphs of these four vulnerability parameters.

Keywords: Graph Theory, Vulnerability, Graph Algorithms, Interval Graphs, Neighbor Isolated Tenacity, Neighbor Isolated Rupture Degree

2021, 53 pages

1. GİRİŞ

Milenyumun gelmesiyle birlikte başlayan bilgisayar ve internet çağı beraberinde güvenlik sorunlarını da getirmiştir. Yaşamın her alanında hem bilgisayarların hem de internetin kullanımında büyük artış olmuştur. Bu artış, ağlarda güvenlik sorunlarına ve bu sorunlarla mücadele yollarının araştırılmasına sebep olmuştur.

Bu bağlamda güvenlik duvarları, saldırı önleme sistemleri, saldırı algılama sistemleri, anti virüs sistemleri ve daha birçok sistem ve cihaz gibi bir dizi savunma güvenlik cihazını ve ağ sistemini örnek olarak verebiliriz. Bu aygıtlardan bazıları, izinsiz giriş etkinliğini algılayarak ve ağ güvenlik sistemlerinin söz konusu kötü amaçlı trafiğin hedeflerine erişmesini engellemesini sağlayan uyarıları tetikleyerek kötü amaçlı ağ trafiğinin ağın içinden ve dışından erişilmesini önlemek için tasarlanmıştır.

Bilgisayar ağları gibi herhangi bir ağ, iletim yolları ile birbirine bağlı merkezler dizisidir. Bu ağlar, merkezleri tepelere ve bağlantıları ayrıtlara denk gelecek şekilde graflarla modellenir. Ağlar tasarlanırken graflarla modellendiğinde güvenlik açıkları ölçülebilir ve maliyet hesaplaması yapılabilir. Bahsedilen donanımsal ve yazılımsal ağ güvenlik önlemlerinin yanında henüz ağ tasarım aşamasında güvenlik zaafiyetlerini tespit etmek ve önlemek amacıyla, ayrıca ağ maliyetini de hesaba katarak daha hesaplı ve güvenli ağların tasarlanması için geliştirilmiş bazı zedelenebilirlik ölçüm parametreleri bulunmaktadır.

Bir ağın merkezleri ya da bağlantı hatları hasar gördüğünde bu ağda iletişim sorunları oluşur. Bir ağda iletişim kesilene kadar ağın ne kadar ve nasıl dayanacağı sorusuna cevap verebilmek amacıyla zedelenebilirlik ölçümleri yapılmaktadır. Kısaca zedelenebilirlik, bir ağın iletişimi sonlanana kadar gösterdiği dayanma gücünün ölçümüdür. Zedelenebilirlik yardımıyla, bir grafın herhangi bir müdahale (etki) altında veya müdahale ile karşılaşmadan önce gösterdiği davranışı inceleyerek, bu graf yapısının ne kadar dayanıklı, hassas ve dağılabilir olduğunu saptayabiliriz.

Graf teorisinde zedelenebilirlik değerlerini ölçmek için çeşitli parametreler bulunmaktadır. Bunların en yaygınları; bağlantılılık sayısı (connectivity) [1], mukavemet (tenacity) [2,3], saçılım sayısı (scattering number) [4] ve kopma derecesidir (rupture degree) [5].

Casus ağlarda bir merkezin (ajan) bağlantı şifresi kırıldığında bu merkez ile direkt iletişim halinde olan komşuları da tehdit altına girerler. Bu yüzden haberleşme hasara uğrayacaktır. Dolayısıyla casus ağlarda deşifre olan bir merkezin komşuları da deşifre olmuş olurlardır [6–8]. Bu ağlara benzer ağların zedelenebilirlik değerlerini incelemek için komşu zedelenebilirlik parametreleri ele alınmaktadır. Komşu zedelenebilirlik parametreleri graftaki en hassas merkezler zarara uğradığında ve bu merkezlere direkt bağlı merkezlerin de zarar göreceği hesaba alınarak, geriye kalan ağın son durumu önceden görülebilmektedir. Komşu zedelenebilirlik ölçümlerinden komşu bağlantılılık sayısı (neighbor connectivity) [9], komşuluk kopma derecesi (neighbor rupture degree) [10], ayrıt komşuluk bağlantılılık sayısı (edge neighbor connectivity) [11], ayrıt komşuluk kopma derecesi (edge neighbor rupture degree) [12] ve ayrıt komşuluk saçılma sayısı (edge neighbor scattering number) [13] gibi parametreler tanımlanmıştır.

Komşuluk ve izole kavramlarını bir arada kullanan zedelenebilirlik parametreleri de bulunmaktadır. Bunların arasında komşu izole saçılım sayısı (neighbor isolated scattering number) [14] ve komşu izole mukavemet (neighbor isolated tenacity) [15] gibi önemli zedelenebilirlik parametreleri bulunmaktadır. Ayrıca bu parametrelerin dışında bizim önerdiğimiz komşu izole kopma derecesi (neighbor isolated rupture degree) de bu konuya dahil edilebilir.

Öncelikle izole ve komşuluk kavramlarını açıklamak gerekirse; bir *G* grafında *V(G)* tepeler kümesi, *E(G)* ayrıtlar kümesi, $deg(v)$ *v* tepesinin derecesi olmak üzere

$$N(v) = \{u, v \in V(G) | u \neq v; u\ ile\ v\ komşu\}$$

kümesine v tepesinin açık komşuluğu ve $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ kümesine v tepesinin kapalı komşuluğu denir. Komşusu bulunmayan *v* tepesinin derecesi 0 ($deg(v) = 0$) olur ve izole tepe olarak adlandırılır [16]. $N[v]$ kümesinde graftan atılan *v* tepesine subverted tepe ve tüm tepeleri subverted olan $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ kümesine *G* grafının subversion stratejisi denir. *X* kümesinin tüm tepeleri graftan atıldığında geriye kalan G/X grafının bileşen sayısı $\omega(G/X)$ ve en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $c(G/X)$ ile gösterilir.

Ağlar ve hatlar, merkezlerin veya bağlantıların önemine ve kapasitesine göre ağırlık değerleri verilerek ifade edilmesiyle oluşturulan graflar ağırlıklı graflar olarak tanımlanır. Ağırlıklı grafların zedelenebilirlik ölçümleri konusu günümüzde yaygınlaşmaya başlamış bir araştırma konusudur. Ağırlıklı graflar ve bunların zedelenebilirlik ölçümleri ile henüz planlama aşamasında ağların güvenliği en üst düzeyde tasarlanabilir ve ayrıca maliyeti düşürmeye de etkisi olur. Ağırlıklı bütünlük sayısı (weighted integrity) [17] parametresi bu konudaki iyi örneklerdendir. Bu konuya ek olarak bu yazıda, komşu izole mukavemete ağırlıklı dönüşümü uygulanıp yeniden tanımlanacak ve önermiş olduğumuz ağırlıklı komşu izole kopma derecesi ile karşılaştırması yapılacaktır.

Bütün bu zedelenebilirlik parametrelerinin hesaplanabilir algoritmik performansları da incelenmelidir. Genel olarak ağırlıklı bütünlük (weighted integrity) parametresi NP-tam sınıfındadır ve bu konudaki en bilinen örnek “düzlemsel grafların bütünlük problemi NP-tamdır” [18] çalışması olacaktır, fakat bütünlük değeri de polinom (P) zamanda bulunabilen bir graf sınıfı bulunmaktadır [19]. Bu graf sınıfı interval graftır [20] ve yazının devamında açıklanmıştır. Ayrıca saçılım sayısı genelde NP-zor sınıfında [21] iken interval graflar için polinom zamanda hesaplanabilir [22]. Bu yazıda interval graflar için oluşturmuş olduğumuz komşu izole mukavemet ve komşu izole kopma derecesi algoritmaları verilecektir.

2. bölümde bahsettiğimiz paremetrelerin ve terimlerin tanımlarına yer verilmiştir.

2. GENEL TANIMLAR

Yukarıda bahsetmiş olduğumuz zedelenebilirlik ölçüm parametrelerinin tanımları ve gerekli açıklamalarını aşağıda verelim.

Tanım 2.1. [1] Bağlantılı bir G grafını bağlantısız bir hale getirebilmek için graftan atılması gereken en az tepe sayısına bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. X, G grafının tepe kesim kümesi olmak üzere

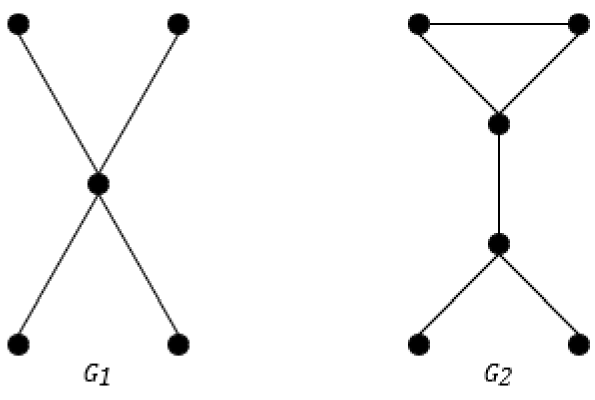
$$\kappa(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{|X|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2. [3] Bağlantılı bir G grafının mukavemeti $T(G)$ ile gösterilir.

$$T(G) = \min \left\{ \frac{|X| + c(G - X)}{\omega(G - X)} \right\}$$

X, G grafının tepe kesim kümesini, $G - X$ kesim kümesi atıldıktan sonra kalan grafı, $c(G - X)$ grafın en büyük boyutlu bileşenindeki tepe sayısını ve $\omega(G - X)$ toplam bileşen sayısını ifade etmektedir. Fakat burada tanımlanan parametrelerin grafların zedelenebilirlik ölçümleri konusunda yeterli olup olmadığı sorusu sorulabilir. Aşağıda vermiş olduğumuz örnekte zedelenebilirlik parametrelerinin bazı graflarda yetersiz kalabileceği gösterilmiştir. Şekil 2.1'de G_1 ve G_2 graflarını ele alalım.



Şekil 2.1. G_1 ve G_2 grafları

$\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 1$ sonucu elde edildiği görülmektedir. Her iki graf da farklı yapıda olmalarına rağmen bağlantılılık sayıları eşit olduğu için bu iki graf arasında ayırt edici bir sonuç elde edilemeyecektir. Fakat aynı grafların mukavemetini incelediğimizde $T(G_1) = 1/2$ ve $T(G_2) = 4/3$ sonuçları elde edilir. Bu yüzden bu graflar için mukavemet, bağlantılılık sayısından daha ayırt edicidir diyebiliriz. Örnekte de görüldüğü gibi bazı durumlarda bazı zedelenebilirlik ölçüm parametreleri ayırt edici sonuçlar veremezken bazı parametreler daha ayırt edici sonuçlar verebilmektedir. Bu bağlamda yeni zedelenebilirlik ölçüm parametreleri oluşturulmuştur ve günümüzde yine farklı parametreler oluşturulmaya devam etmektedir.

Tanım 2.3. [4] Bağlantılı bir *G* grafında saçılım sayısı $sc(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$sc(G) = \max_{X \subseteq V(G)} \{\omega(G - X) - |X| : \omega(G - X) > 1\}$$

X, *G* grafının tepe kesim kümesini, $G - X$ kesim kümesi atıldıktan sonra kalan grafı ve $\omega(G - X)$ graftaki toplam bileşen sayısını ifade etmektedir.

Tanım 2.4. [5] Bağlantılı bir G grafında kopma derecesi $r(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$r(G) = \max_{X \subseteq V(G)} \{\omega(G - X) - |X| - c(G - X) : \omega(G - X) > 1\}$$

G grafının tepe kesim kümesi *X*, kesim kümesi atıldığında geriye kalan $G - X$ grafının bileşen sayısı $\omega(G - X)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $c(G - X)$ olarak ifade edilir.

Buraya kadar vermiş olduğumuz tanımlar tepe zedelenebilirlik tanımlarıydı. Ayrıca ayrıt zedelenebilirlik ölçümleri de bulunmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.5. [23] Bağlantılı bir *G* grafını bağlantısız bir hale getirebilmek için graftan atılması gereken en az ayrıt sayısına ayrıt bağlantılılık sayısı denir ve $\lambda(G)$ ile gösterilir. *X*, *G* grafının ayrıt kesim kümesi olmak üzere

$$\lambda(G) = \min_{X \subseteq E(G)} \{|X|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6. [24] Bağlantılı bir *G* grafının ayrıt mukavemeti $T'(G) = \min\{sc(X)\}$ ile gösterilir.

$$sc(X) = [|X| + c(G - X)]/[\omega(G - X)]$$

X, *G* grafının ayrıt kesim kümesini, $G - X$ kesim kümesi atıldıktan sonra kalan grafı, $c(G - X)$ grafın en büyük boyutlu bileşenindeki ayrıt sayısını ve $\omega(G - X)$ toplam bileşen sayısını ifade etmektedir.

Tanım 2.7. [25] Bağlantılı bir *G* grafında ayrıt saçılım sayısı $es(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$es(G) = \max_{X \subseteq E(G)} \{\omega(G - X) - |X| : \omega(G - X) > 1\}$$

X, *G* grafının ayrıt kesim kümesini, $G - X$ kesim kümesi atıldıktan sonra kalan grafı ve $\omega(G - X)$ graftaki toplam bileşen sayısını ifade etmektedir.

Tepe ve ayrıt zedelenebilirlik parametrelerinden sonra komşuluk kavramını içeren zedelenebilirlik ölçüm parametreleri de bulunmaktadır. Aşağıda komşuluk kavramı ve buna bağlı zedelenebilirlik ölçümleri yer almaktadır.

Tanım 2.8. [9] Bağlantılı bir *G* grafını bağlantısız bir hale getirebilmek için graftan atılması gereken en az tepe sayısına komşu bağlantılılık sayısı denir. *X*, *G* grafının subversion stratejisi olmak üzere

$$NC(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{|X|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.9. [10] Bağlantılı bir G grafında komşuluk kopma derecesi $Nr(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$Nr(G) = \max_{X \subseteq V(G)} \{\omega(G/X) - |X| - c(G/X) : \omega(G/X) \geq 1\}$$

G grafının tepe subversion stratejisi X, G/X grafının bileşen sayısı $\omega(G/X)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $c(G/X)$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.10. [11] Bağlantılı bir G grafını bağlantısız bir hale getirebilmek için graftan atılması gereken en az ayrıt sayısına ayrıt komşuluk bağlantılılık sayısı denir ve $\lambda_{NB}(G)$ ile gösterilir. X, G grafının ayrıt subversion stratejisi olmak üzere

$$\lambda_{NB}(G) = \min_{X \subseteq E(G)} \{|X|\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.11. [13] Bağlantılı bir G grafında ayrıt komşu saçılım sayısı $ENS(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$ENS(G) = \max_{X \subseteq E(G)} \{\omega(G/X) - |X| : \omega(G/X) > 1\}$$

X, G grafının ayrıt subversion stratejisini, G/X grafındaki toplam bileşen sayısını $\omega(G/X)$ ifade etmektedir.

Tanım 2.12. [12] Bağlantılı bir G grafında ayrıt komşuluk kopma derecesi $ENR(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$ENR(G) = \max_{X \subseteq E(G)} \{\omega(G/X) - |X| - c(G/X) : \omega(G/X) \geq 1\}$$

G grafının ayrıt subversion stratejisi X, G/X grafının bileşen sayısı $\omega(G/X)$ ve en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $c(G/X)$ olarak ifade edilir.

Daha önce vermiş olduğumuz komşuluk ve izole kavramlarını bir arada kullanan zedelenebilirlik ölçüm parametrelerinden komşu izole saçılım sayısı [14] tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.13. [14] Bağlantılı bir *G* grafının komşu izole saçılım sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır

$$NIS(G) = \max\{i(G/X) - |X| : i(G/X) \geq 1\}$$

X, G grafının tepe subversion stratejisini, G/X grafındaki izole tepe sayısını $i(G/X)$ ifade etmektedir. Eğer $NIS(G) = i(G/X) - |X|$ ise $X \subset V(G)$ kümesine *G* grafının *NIS kümesi* denilebilir.

Daha önce bahsetmiş olduğumuz gibi ağırlıklı zedelenebilirlik ölçüm parametreleri de bulunmaktadır ve aşağıda ağırlıklı bütünlük (weighted integrity) [17] tanımı verilmiştir.

Tanım 2.16 [17] Bağlantılı bir G grafında ağırlıklı bütünlüğü (weighted integrity) $I_w(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$I_w(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{w(X) + c_w(G - X)\}$$

$w: V \to R \geq 0$ tepe ağırlık fonksiyonu, G grafının tepe kesim kümesinin toplam ağırlığını $w(X) = \sum_{v \in X} w(v)$, $G - X$ kesim kümesi atıldıktan sonra kalan grafı ve $c_w(G - X)$ graftaki bileşenlerin ağırlığı en büyük olan bileşenin ağırlığını ifade etmektedir.

Tanımlamış olduğumuz ve yazının devamında açıklamalarını verdiğimiz bu ağırlıklı zedelenebilirlik ölçüm parametreleri ağlardaki merkezlerin önem derecesine göre ölçüm yapabileceği için en iyi sonuçları verecektir. Fakat, daha önce de bahsettiğimiz gibi bazı graflarda bazı parametreler ayırt edici sonuçlar veremezken bazı parametreler veya yeni tanımlanmış parametreler daha net ve ayırt edici sonuçlar verebilmektedir. Bu tezde bu konuya istinaden yeni bir parametre olarak komşu izole kopma derecesi tanımlanmış ve komşu izole mukavemet ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu parametrelerin interval graflar için algoritmaları oluşturularak incelemeleri yapılmıştır.

Ek olarak bu yazıda kullanılan bazı özel grafların tanımlarını verelim.

Tanım 2.18. [16] P_n şeklinde gösterilen yol grafların başlangıç ve bitiş tepelerinin dereceleri 1 ve diğer tepelerinin dereceleri 2 olan graflardır. Burada n bir tam sayıdır ve yol grafın toplam tepe sayısına eşittir.

Tanım 2.19. [16] C_n şeklinde gösterilen çevre grafların bütün tepelerinin dereceleri 2 olan graflardır. Burada n bir tam sayıdır ve çevre grafın toplam tepe sayısına eşittir.

Tanım 2.20. [16] $K_{1,n}$ şeklinde gösterilen yıldız grafların n adet tepesinin dereceleri 1 ve merkezindeki tepenin derecesi n olan graflardır. Burada n bir tam sayıdır ve yıldız grafın toplam tepe sayısı $n+1$'e eşittir.

Tanım 2.21. [16] $W_{1,n}$ şeklinde gösterilen tekerlek graflar n tepeli çevre grafın merkezine her tepeye komşu olacak şekilde yeni bir tepe eklenmesiyle oluşur. Burada n bir tam sayıdır ve tekerlek grafın toplam tepe sayısı $n+1$'e eşittir.

Tanım 2.22. [26] Ge_n şeklinde gösterilen gear graflar $n+1$ tepeli tekerlek grafın dışındaki, merkeze komşu tepeler arasında bulunan ayrıtlara 1'er tepe eklenmesiyle oluşur. Burada n bir tam sayıdır ve gear grafın toplam tepe sayısı $2n+1$'e ve ayrıt sayısı $3n$'ye eşittir.

Son olarak interval graf ve ilgili tanımlarını verelim.

Tanım 2.23. [20] Tepelerin doğrusal bir çizgi gibi ifade edildiği, ve bu kümenin yalnızca aralıklarına (interval) karşılık gelen ve aralıklarının boş olmayan bir kesişmesi olması durumunda, bir ayrıtla birleştirilecek şekilde bire bir gösterilebiliyorsa, bu grafa interval graf denir. ℓ, bir grafın interval gösterimini ifade eder.

İnterval graflar en çok kullanılan mükemmel (perfect) graf yapısıdır [20,27]. Herhangi bir interval graftan ayrılmış bir altgraf da interval graftır [20]. n tepeli ve m ayrıtlı bir interval grafların saçılım sayısı hesaplaması için oluşturulmuş algoritmanın zaman karmaşıklığı $O(n+m)$ olarak verilmiştir [28].

Yazının devamında zedelenebilirlik parametrelerinin tanımlarının yanında interval graflar için gerekli diğer tanım ve kurallar verilecektir.

3. KOMŞU İZOLE MUKAVEMET VE KOMŞU İZOLE KOPMA DERECESİ

Bu bölümde komşu izole mukavemet [15], bizim tanımlamış olduğumuz komşu izole kopma derecesi ve bunların interval graflar için tanımları ve kuralları verilmiştir. Ayrıca bazı temel teoremler ve bazı özel graflar için komşu izole mukavemet ve komşu izole kopma derecesi hesaplamaları verilmiştir. Ek olarak bu zedelenebilirlik ölçüm parametrelerinin interval graflar için algoritma ve karmaşıkları verilmiştir.

3.1. Tanım ve Teoremler

3.1.1. Komşu İzole Mukavemet

Bu kısımda komşu izole mukavemet tanımı ve bazı teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1.1.1. [15] Bağlantılı bir *G* grafının komşu izole mukavemeti aşağıdaki gibi tanımlanır

$$NIT(G) = \min\left\{\frac{|X| + c(G/X)}{i(G/X)} : i(G/X) \geq 1\right\}$$

X, G grafının tepe subversion stratejisini, G/X grafındaki izole tepe sayısını $i(G/X)$ ve en büyük boyutlu bileşendeki toplam tepe sayısını $c(G/X)$ ifade etmektedir. Eğer $NIT(G) = \frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}$ ise $X \subset V(G)$ kümesine *G* grafının *NIT kümesi* denilebilir.

Yazının devamında komşu izole mukavemet ile ilgili bazı temel teoremlere yer verilmiştir.

Teorem 3.1.1.1. [15] *G*, *n* tepeli bir graf olmak üzere

$$NIT(G) \geq \frac{NC(G) + 1}{n - NC(G)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.1.2. [15] *G*, *n* tepeli bir graf ve *δ(G)* minimum tepe derecesi olmak üzere

$$NIT(G) \geq \frac{\delta(G)+2}{n-NC(G)(\delta(G)+1)}$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

Teorem 3.1.1.3. [15] *G*, *n* tepeli bir graf ve *α(G)* bağımsızlık sayısı olmak üzere

$$NIT(G) \geq \frac{NC(G)+1}{\alpha(G)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.1.4. [15] *G*, *n* tepeli bağlantılı bir graf olmak üzere

$$NIT(G) \geq \frac{2}{n-2}$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

3.1.1.1. Interval Grafların Komşu İzole Mukavemeti

Bu kısımda yukarıda tanımı verilmiş olan komşu izole mukavemetin interval graflarda uygulanışı ile ilgili tanımlar ve kurallar verilmiştir.

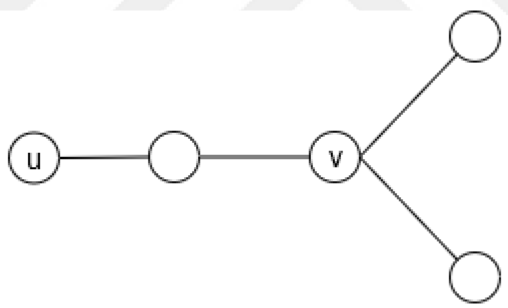
Tanım 3.1.1.1.1. Bir *G* grafı için $X \subseteq V(G)$ *achieving tepe subversion stratejisi* olarak adlandırılır. Bunun için örneğin komşu izole mukavemet $NIT(G) = \frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}$ olmalıdır.

Diğer bir ifadeyle elde edilen achieving tepe subversion stratejisi ile komşu izole mukavemet ölçümüne ulaşılır.

Tanım 3.1.1.1.2. Achieving tepe subversion stratejisi X olan bir G grafı için G/X etkilenmiş graflarının bağlantılı bileşenlerinden en fazla tepesi olan bileşen *achieving bileşeni* olarak adlandırılır.

Böylece, achieving subversion stratejisi X olan bir G_1 achieving bileşeni için toplam izole tepe sayısını $i(G/X)$ ve en fazla tepesi olan bileşenin tepe sayısını $c(G/X)$ ifade eder. Achieving subversion stratejisi veya achieving bileşenin benzersiz olmasına ihtiyaç yoktur [17]. Şekil 3.1.1.1.1 üzerinde gösterildiği gibi $\{u\}$ achieving bileşenini ve $\{v\}$ achieving subversion stratejisini belirtmektedir.

Bir graf için olası tepe subversion strateji sayısı üstel olarak büyük olabilir. Bu nedenle, muhtemelen hiçbir numaralandırma şeması bir polinom zaman algoritmasıyla hesaplanamaz [17]. Buna rağmen interval graflarda zedelenebilirlik hesabı için tepe subversion stratejilerinin ayrıntılı olarak ele alınması gerekmez [29]. Aşağıda belirtilen tanımlar bu inceleme alanının azaltılmasına yardımcı olur.

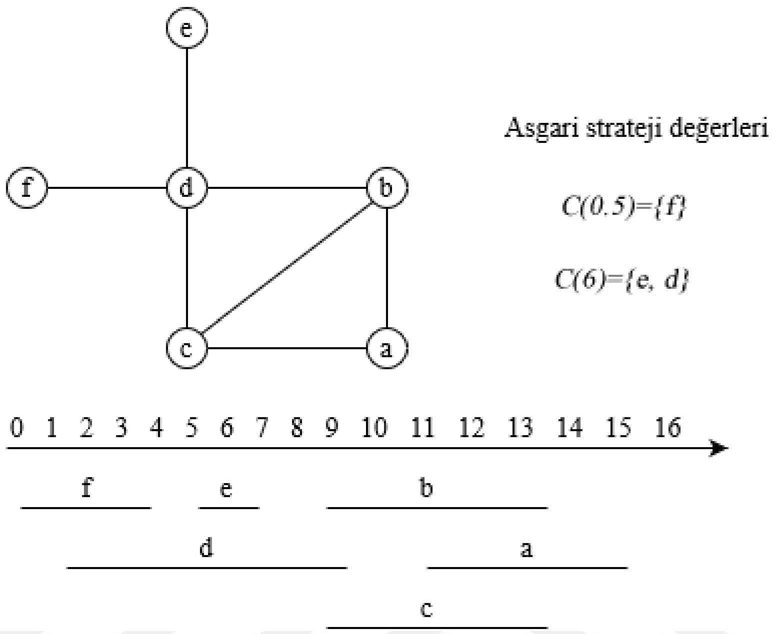


Şekil 3.1.1.1.1. Achieving subversion stratejisi ve achieving bileşeni örneği

Tanım 3.1.1.1.3. [29] G grafını bağlantısız bir clique hale getiren $X \subset V(G)$ alt kümesi bir subversion stratejisidir ve etkilenmiş graf G/X olarak ifade edilir. X kümesinin uygun bir alt kümesi G grafının bir subversion stratejisi değilse, X'e G grafının *asgari tepe subversion stratejisi* denir.

Yukarıdaki tanımdan hareketle; eğer G grafının asgari tepe subversion stratejisi X ise herhangi bir $X' \subset X$ kümesinin kapalı komşuluğunun graftan çıkarılması ne G grafının bağlantısını keser ne de kalan alt grafın bir clique değeri olmasına neden olur [29].

Yazının devamında asgari tepe subversion stratejisinden *asgari strateji* olarak bahsedilecektir. Aşağıda bulunan Şekil 3.1.1.1.2 üzerinde interval graf ve bunun asgari stratejisi gösterilmiştir.



Şekil 3.1.1.1.2. Interval graf ve bunun asgari stratejisi için bir örnek

Tanım 3.1.1.1.4. Bir G grafı için $X \subseteq V(G)$ *kuvvetle asgari tepe subversion stratejisi* olarak adlandırılır. Bunun için G/X etkilenmiş grafının bağlantılı bileşenlerinin sayısı kesinlikle bütün $Y \subset X$ kümeleri için G/Y etkilenmiş grafının bağlantılı bileşenlerinin sayısından daha fazla olmalıdır.

Kuvvetle asgari tepe subversion stratejisi ile asgari tepe subversion stratejisi [29] birbirinden farklılardır. Kuvvetle asgari tepe subversion stratejisinin bir alt kümesi tepe subverison stratejisi olarak kalabilir fakat bağlantılı bileşen sayısı daha azdır. Yazının devamında kuvvetle asgari tepe subversion stratejisinden *güçlü strateji* olarak bahsedilecektir. Aşağıda verilen lemma herhangi bir grafın achieving kesiminin olduğunu belirten ifadeden [17] yola çıkarak oluşturulmuştur.

Lemma 3.1.1.1.5. Herhangi bir G grafı için güçlü stratejisinin X olduğu bir $X \subseteq V(G)$ achieving subversion stratejisi vardır.

İspat 3.1.1.1.5. Y, bir G grafı için achieving subversion stratejisi olsun, fakat bu bir güçlü strateji değildir. $u \in Y$, G/Y 'deki bağlı bileşenlerin sayısının $G/X + \{u\}$ içindeki bağlı bileşenlerin sayısıyla aynı olacağı bir tepe olsun. Ayrıca $Y_1 = Y - \{u\}$ olsun. Ek olarak $c(G/Y_1) \leq c(G/Y) + |u|$ ve $|Y_1| + |u| = |Y|$ değerleri ele alındığında $|Y| + c(G/Y) \geq |Y_1| + c(G/Y_1)$ sonucuna ulaşılır.

Eğer Y_1 güçlü strateji olursa ispat tamamlanmış olur. Aksi takdirde, aynı yapı güçlü strateji elde edilene kadar Y_1 üzerinde tekrarlanabilir. Güçlü strateji elde edilmesi garanti edilir, çünkü bir tepeden oluşan herhangi bir tepe subversion stratejisi güçlü stratejidir.

Asgari stratejilerin G grafının belirli interval gösterimlerine bağlı olmadığı unutulmamalıdır. Bununla birlikte, bu gerçeğin bizim problemimiz üzerinde bir etkisi yoktur. Interval grafların güçlü kesimlerinin asgari yerel kesimlerin birleşimi ifadesinden [17] yola çıkarak üretilen aşağıdaki lemma ve tartışma bunu gösterecektir.

Lemma 3.1.1.1.6. Interval graf için herhangi bir güçlü strateji, asgari stratejilerin bileşimi olarak ifade edilebilir.

İspat 3.1.1.1.6. *C* asgari strateji olsun ve $v_s \in C$ diyelim. G/C'nin farklı bileşenlerine ait v_s tepesine komşu v_i ve v_j vardır. Genelliği kaybetmeden, (b_i, a_j) ile kesişen tüm intervallerin *C*'ye ait olduğu varsayılabilir. v_p ve v_q seçilirse;

1. v_p ve v_q ya v_i ve v_j'dir ya da (b_i, a_j) ile keşişim içindedir.
2. (b_p, a_q) ile başlayan veya biten interval yoktur.

(b_p, a_q) ile kesişen intervallerler temsil edilen tepeleri alarak bir C_s stratejisi oluşturur. Ayrıca C_s , v_s 'yi içerir ve güçlü stratejidir. $C = \bigcup_{s \in C} C_s$ olduğu unutulmamalıdır.

G grafının tepe kümelerinin olası bütün altkümelerinin sınıfına C_1^G diyelim. G grafının komşu izole mukavemetinin, $\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}$ hesabına göre X'in C_1^G'ye ait olduğu minimum değer olduğunu unutmayalım. G'nin bütün asgari stratejilerine C_2^G diyelim.

G interval grafının bütün asgari stratejilerinin sınıfı C_1^G olsun. C_2^G, asgari stratejilerin birleşimi olarak ifade edilebilen bütün tepe subversion stratejilerinin sınıfı ve C_3^G, G'nin olası bütün tepe subversion stratejilerinin sınıfı olsun. Lemma 3.1.1.1.6'de görüldüğü gibi $C_1^G \subseteq C_2^G \subseteq C_3^G$ olur. Ayrıca, Lemma 3.1.1.1.4'ten yola çıkarak

$$\min_{X\in C_1^G}\left\{\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}\right\} = \min_{X\in C_3^G}\left\{\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}\right\}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\min_{X\in C_2^G}\left\{\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}\right\} = \min_{X\in C_3^G}\left\{\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}\right\}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sayede $\min_{X\in C_2^G}\left\{\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}\right\}$ değerini hesaplamak mümkün olacaktır.

3.1.2. Komşu İzole Kopma Derecesi

Bu kısımda tanımları verilen zedelenebilirlik ölçüm parametrelerine ek olarak bizim önerdiğimiz komşu izole kopma derecesi tanımı aşağıda verilmiştir.

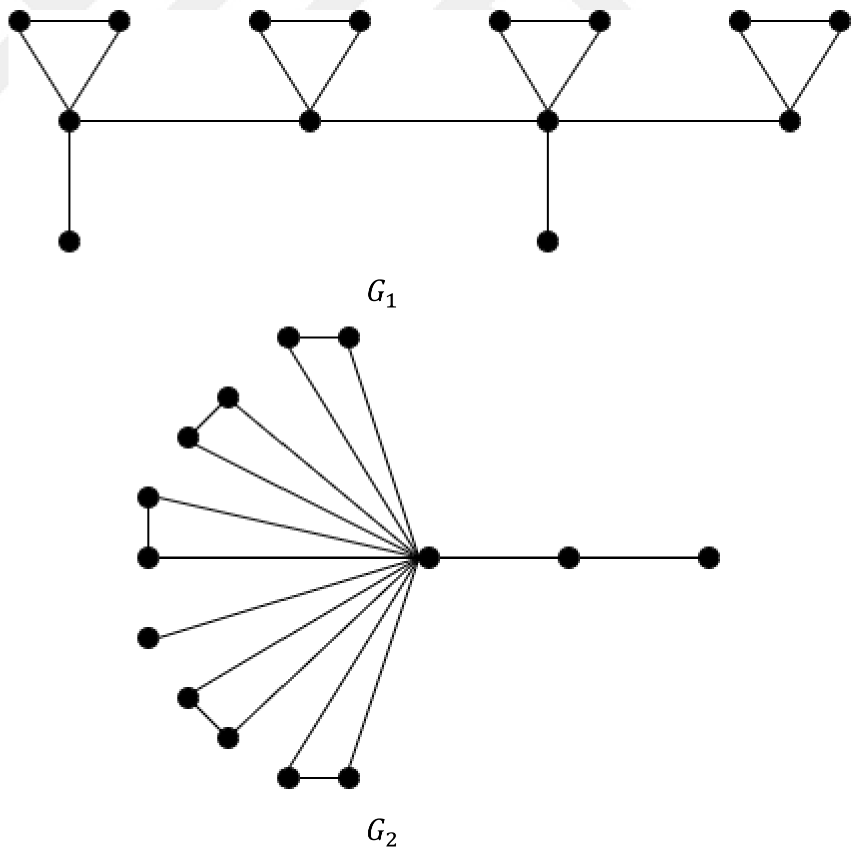
Tanım 3.1.2.1. Bağlantılı bir G grafının komşu izole kopma derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır

$$NIR(G) = \max\{i(G/X) - |X| - c(G/X) : i(G/X) \geq 1\}$$

X, G grafının tepe subversion stratejisini, G/X grafındaki izole tepe sayısını $i(G/X)$ ve en büyük boyutlu bileşendeki toplam tepe sayısını $c(G/X)$ ifade etmektedir. Eğer

$NIR(G) = i(G/X) - |X| - c(G/X)$ ise $X \subset V(G)$ kümesine G grafının *NIR kümesi* denilebilir.

Komşu izole kopma derecesi, komşu izole mukavemetinin sabit değerler verdiği graflarda farklı sonuçlar verdiği için zedelenebilirlik ölçümü için kullanmak daha avantajlı olacaktır. Yine bir örnekle açıklamak gerekirse, aşağıda komşu izole mukavemet ve komşu izole kopma derecesinin karşılaştırılmasına yer verilmiştir. Aşağıda bulunan Şekil 3.1.2.1'deki 14 tepeli G_1 ve G_2 grafları ele alındığında $NIT(G_1) = NIT(G_2) = 2$ sonucu elde edildiği görülmektedir. Her iki graf da farklı yapıda olmalarına rağmen komşu izole mukavemetleri eşit olduğu için bu iki graf arasında ayırt edici bir sonuç elde edilemeyecektir. Fakat aynı grafların komşu izole kopma derecesini incelediğimizde $NIR(G_1) = -2$ ve $NIR(G_2) = -1$ sonuçları elde edilir. Bu yüzden komşu izole kopma derecesi komşu izole mukavemetten daha ayırt edicidir diyebiliriz.



Şekil 3.1.2.1. G_1 ve G_2 grafları

Yazının devamında komşu izole kopma derecesi ile ilgili bazı temel teoremlere yer verilmiştir.

Teorem 3.1.2.1. *G*, *n* tepeli bir graf olmak üzere

$$NIR(G) \geq n - 2NC(G) - 1$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 3.1.2.1. *X*, *G* grafının subversion stratejisi olsun. $NC(G) \leq |X| \leq |N(X)|$, $i(G/X) \leq n - |N(X)|$ ve $c(G/X) \geq 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$i(G/X) - |X| - c(G/X) \geq n - |N(X)| - |X| - 1 \quad (1)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle, her iki tarafın en düşük değerini aldığımızda

$$NIR(G) \geq n - NC(X) - NC(X) - 1 = n - 2NC(X) - 1 \quad (2)$$

sonucunu elde etmiş oluruz.

Teorem 3.1.2.2. *G*, *n* tepeli bir graf ve *δ(G)* minimum tepe derecesi olmak üzere

$$NIR(G) \geq n - NC(G)(\delta(G) + 1) - \delta(G) - 2$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

İspat 3.1.2.2. *X*, *G* grafının subversion stratejisi olsun. $NC(G) \leq |X|$ ve herhangi bir $v \in V(G)$ için $N(v) \geq \delta(G) + 1$ olduğunu biliyoruz, ayrıca $i(G/X) \leq n - NC(G)(\delta(G) + 1)$ ve $c(G/X) \geq 1$ değerleri de vardır. Komşu izole kopma derecesinin tanımına göre

$$\begin{aligned} NIR(G) &\geq n - NC(G)(\delta(G) + 1) - \delta(G) - 1 - 1 \\ &= n - NC(G)(\delta(G) + 1) - \delta(G) - 2 \end{aligned} \quad (3)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.2.3. *G*, *n* tepeli bir graf ve *α(G)* bağımsızlık sayısı olmak üzere

$$NIR(G) \geq \alpha(G) - NC(G) - 1$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 3.1.2.3. *X*, *G* grafının subversion stratejisi olsun. $NC(G) \leq |X|$, $i(G/X) \leq \alpha(G)$ ve $c(G/X) \geq 1$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle,

$$NIR(G) \geq \alpha(G) - NC(G) - 1 \qquad (4)$$

değerini elde etmiş oluruz.

Teorem 3.1.2.4. *G*, *n* tepeli bağlantılı bir graf olmak üzere

$$NIR(G) \geq 2 - n$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

İspat 3.1.2.4. *X*, *G* grafının subversion stratejisi olsun. $|X| \geq 1$ ve $|N[X]| \geq 2$ olduğundan Teorem 3.1.2.1'e göre sonuç tutmaktadır.

3.1.2.1. Interval Grafların Komşu İzole Kopma Derecesi

Bu kısımda yukarıda tanımı verilmiş olan komşu izole kopma derecesinin interval graflarda uygulanışı ile ilgili tanım ve kurallara değinilmiştir. Aşağıda achieving tepe subversion stratejisinin komşu izole kopma derecesi ile ilgili tanımını verelim.

Tanım 3.1.2.1.1. Bir *G* grafı için $X \subseteq V(G)$ *achieving tepe subversion stratejisi* olarak adlandırılır. Bunun için komşu izole kopma derecesi $NIR(G) = i(G/X) - |X| - c(G/X)$ olmalıdır.

Diğer bir ifadeyle elde edilen achieving tepe subversion stratejisi ile komşu izole kopma derecesinin ölçümüne ulaşılır.

Interval grafların komşu izole mukavemeti kısmmında vermiş olduğumuz tanımlar ve kurallar burada da geçerlidir. Komşu izole kopma derecesi özelinde aşağıda bir lemma'nın detayı verilmiştir. Lemma 3.1.1.1.6'da olduğu gibi güçlü kesmin asgari yerel kesimlerin birleşimi ifadesinden [17] üretilmiştir.

Lemma 3.1.2.1.2. Interval graf için herhangi bir güçlü strateji, asgari stratejilerin bileşimi olarak ifade edilebilir.

İspat 3.1.2.1.2. *C* asgari strateji olsun ve $v_s \in C$ diyelim. G/C'nin farklı bileşenlerine ait v_s tepesine komşu v_i ve v_j vardır. Genelliği kaybetmeden, (b_i, a_j) ile kesişen tüm intervallerin *C*'ye ait olduğu varsayılabilir. v_p ve v_q seçilirse;

1. v_p ve v_q ya v_i ve v_j'dir ya da (b_i, a_j) ile keşişim içindedir.
2. (b_p, a_q) ile başlayan veya biten interval yoktur.

(b_p, a_q) ile kesişen intervallerler temsil edilen tepeleri alarak bir C_s stratejisi oluşturur. Ayrıca C_s , v_s 'yi içerir ve güçlü stratejidir. $C = \bigcup_{s \in C} C_s$ olduğu unutulmamalıdır.

G grafının tepe kümelerinin olası bütün altkümelerinin sınıfına C_1^G diyelim. *G* grafının komşu izole kopma derecesinin, $i(G/X) - |X| - c(G/X)$ hesabına göre *X*'in C_1^G 'ye ait olduğu maksimum değer olduğunu unutmayalım. *G*'nin bütün asgari stratejilerine C_2^G diyelim.

G interval grafının bütün asgari stratejilerinin sınıfı C_1^G olsun. C_2^G , asgari stratejilerin birleşimi olarak ifade edilebilen bütün tepe subversion stratejilerinin sınıfı ve C_3^G , G'nin olası bütün tepe subversion stratejilerinin sınıfı olsun. Lemma 3.1.2.1.2'de görüldüğü gibi $C_1^G \subseteq C_2^G \subseteq C_3^G$ olur. Ayrıca, Lemma 3.1.1.1.4'ten yola çıkarak

$$\max_{X \in C_1^G}\{i(G/X) - |X| - c(G/X)\} = \max_{X \in C_3^G}\{i(G/X) - |X| - c(G/X)\}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\max_{X \in C_2^G}\{i(G/X) - |X| - c(G/X)\} = \max_{X \in C_3^G}\{i(G/X) - |X| - c(G/X)\}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sayede $\max_{X \in C_2^G}\{i(G/X) - |X| - c(G/X)\}$ değerini hesaplamak mümkün olacaktır.

3.2. Bazı Özel Grafların Zedelenebilirlik Hesaplamaları

3.2.1. Bazı Özel Grafların Komşu İzole Mukavemeti

Bu kısımda, bazı özel grafların komşu izole mukavemeti verilmiştir.

Teorem 3.2.1.1. [15] P_n, *n* tepeli bir yol graf ve $n \geq 6$ olmak üzere

$$NIT(P_n) = \begin{cases} 1, & n(mod4) = 1 \\ \dfrac{\lceil n/4 \rceil + 1}{\lceil n/4 \rceil}, & n(mod4) \neq 1 \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.1.2. [15] C_n, *n* tepeli bir çevre graf ve $n \geq 4$ olmak üzere

$$NIT(C_n) = \begin{cases} \dfrac{\lceil n/4 \rceil + 1}{\lceil n/4 \rceil}, & n(mod4) = 0 \\ \dfrac{\lceil n/4 \rceil + 1}{\lceil n/4 \rceil - 1}, & n(mod4) \neq 0 \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.1.3. [15] $K_{1,n}$, 1 merkezli ve n merkeze bağlı tepeli bir yıldız graf olmak üzere

$$NIT(K_{1,n}) = \frac{2}{n-1}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.1.4. [15] Ge_n, $2n + 1$ tepeli bir gear graf olmak üzere

$$NIT(Ge_n) = \frac{2}{n}$$

eşitliği sağlanır.

3.2.2. Bazı Özel Grafların Komşu İzole Kopma Derecesi

Bu kısımda, bazı özel grafların komşu izole kopma derecesi verilmiştir.

Teorem 3.2.2.1. P_n, n tepeli bir yol graf ve $n \geq 5$ olmak üzere

$$NIR(P_n) = \begin{cases} 0, & n(mod4) = 1 \\ -2, & n(mod4) = 2 \\ -1, & n(mod4) = 0,3 \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat 3.2.2.1. X, P_n grafının subversion stratejisi ve $|X| = r$ olsun. Bunu üç durumda inceleriz.

Durum 1: $n(mod4) = 1$'i ele alalım.

Eğer $r \leq {}^{n}/_{4}$ olursa $i(P_n/X) \leq r + 1$ ve $c(P_n/X) \geq 1$ olur. Böylece, $f(r) = r + 1 - r - 1$ fonksiyonu elde edilir, bu artan bir fonksiyondur ve minimum değeri $r = {}^{n}/_{4}$ için aşağıdaki eşitsizlik 5 elde edilir.

$$i(P_n/X) - |X| - c(P_n/X) \geq {}^{n}/_{4} + 1 - {}^{n}/_{4} - 1 \quad (5)$$

Durum 2: $n(mod4) = 2$'yi ele alalım.

Eğer $r \leq {}^{n}/_{4}$ olursa $i(P_n/X) \leq r$ ve $c(P_n/X) \geq 2$ olur. Böylece, $f(r) = r - r - 2$ fonksiyonu elde edilir, bu artan bir fonksiyondur ve minimum değeri $r = {}^{n}/_{4}$ için aşağıdaki eşitsizlik 6 elde edilir.

$$i(P_n/X) - |X| - c(P_n/X) \geq {}^{n}/_{4} - {}^{n}/_{4} - 2 \quad (6)$$

Durum 3: $n(mod4) = 0{,}3$'ü ele alalım.

Altdurum 1: $n(mod4) = 0$ için eğer $r \leq {}^{n}/_{4}$ olursa $i(P_n/X) \leq r$ ve $c(P_n/X) \geq 1$ olur. Böylece, $f(r) = r - r - 1$ fonksiyonu elde edilir, bu artan bir fonksiyondur ve minimum değeri $r = {}^{n}/_{4}$ için aşağıdaki eşitsizlik 7 elde edilir.

$$i(P_n/X) - |X| - c(P_n/X) \geq {}^{n}/_{4} - {}^{n}/_{4} - 1 \quad (7)$$

Altdurum 2: $n(mod4) = 3$ için eğer $r \leq \frac{n+1}{4}$ olursa $i(P_n/X) \leq r$ ve $c(P_n/X) \geq 1$ olur. Böylece, $f(r) = r - r - 1$ fonksiyonu elde edilir, bu artan bir fonksiyondur ve minimum değeri $r = \frac{n+1}{4}$ için aşağıdaki eşitsizlik 8 elde edilir.

$$i(P_n/X) - |X| - c(P_n/X) \geq \frac{n+1}{4} - \frac{n+1}{4} - 1 \quad (8)$$

Eşitsizlik 5, 6, 7 ve 8 için

$$NIR(P_n) = \begin{cases} 0, & n(mod4) = 1 \\ -2, & n(mod4) = 2 \\ -1, & n(mod4) = 0,3 \end{cases}$$

sağlanmış olur.

Teorem 3.2.2.2. C_n, n tepeli bir çevre graf ve $n \geq 6$ olmak üzere

$$NIR(C_n) = \begin{cases} -1, & n(mod4) = 0 \\ -3, & n(mod4) = 1 \\ -2, & n(mod4) = 2,3 \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat 3.2.2.2. Teorem 3.2.2.1'in ispatı ile benzerdir.

Teorem 3.2.2.3. $K_{1,n}$, 1 merkezli ve merkeze bağlı *n* tepeli bir yıldız graf olmak üzere

$$NIR(K_{1,n}) = n - 3$$

eşitliği sağlanır.

İspat 3.2.2.3. Yalnızca aynı kararlı kümenin tepelerini X subversion stratejisi olarak seçebiliriz. Açık bir ifadeyle maksimum NIR, $|X| = 1$, $c(K_{1,n}/X) = 1$ ve $i(K_{1,n}/X) = n - 1$ ile X'in parçası olacak maksimum kararlı küme n'nin yalnızca bir tepesi seçilerek elde edilecektir. Böylece sonuç tutar.

Teorem 3.2.2.4. Ge_n, $2n + 1$ tepeli bir gear graf olmak üzere

$$NIR(Ge_n) = n - 2$$

eşitliği sağlanır.

İspat 3.2.2.4. X, Ge_k grafının subversion stratejisi olsun. $|X| = r$ ve $\deg(u) = k$ olduğunda $r \geq 1$ için $i(Ge_k/X) \leq k$ ve $c(Ge_k/X) \geq 1$ olur. Böylece,

$$i(Ge_k/X) - |X| - c(Ge_k/X) \geq k - r - 1 \qquad (9)$$

$f(r) = k - r - 1$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur ve minimum değeri $r = 1$ için

$$NIR(Ge_k) \geq k - 2 \qquad (10)$$

olur. Ge_k grafının $X^* = \{u\}$ olan bir subversion stratejisi X^* vardır ve $i(Ge_k/X) = k$ ve $c(Ge_k/X) = 1$ olduğu açıktır. Böylece,

$$NIR(Ge_k) = k - 2 \qquad (11)$$

olur.

3.3. Intervel Graflar İçin Zedelenebilirlik Parametrelerinin Algoritmaları

Bu kısımda, interval graf algoritmalarının ortak olarak kullandığı asgari strateji algoritması Algoritma 3.3.1'de verilmiştir. Devamında ayrı ayrı bu parametrelerin interval graflar için algoritmaları verilmiştir. Asgari strateji algoritması temel olarak interval grafların yerel kesim algortimasını almaktadır ve karmaşıkları $O(n^2)$ olarak ispatlanmıştır [17].

Algoritma 3.3.1. Grafın Asgari Tepe Subversion Stratejileri Algoritması
Girdi: Interval gösteriminde *G* interval grafı.
v_i ile $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$'nin $i = 1, \dots, n$ için $[a_i, b_i]$ tarafından timsali, Ayrıca, a_i ve b_i birbirinden farklıdır.
Çıktı: Asgari Stratejiler $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$
Veri Yapısı: İki alan içeren kayıt türünün uç noktaları,
    değer: tepe ve öz $\in \{\text{sol}, \text{sağ}\}$
Başla
    // $x_1, \dots, x_{2n}$ *uç noktalarının kayıtlarının oluşturulması*
    for $i = 1, \dots, n$
        x_{2i-1}.değer = a_i x_{2i-1}.öz = sol
        x_{2i}.değer = b_i x_{2i}.öz = sağ
    end for
    $x_1, \dots, x_{2n}$, değer olarak anahtar kullanan azalmayan sırada sıralanır ve
$y_1, \dots, y_{2n}$ şeklinde kullanılmak üzere hazırlanır.
    k = 0 $i = \min_{y_{2j}.\text{öz}=\text{sağ}} j$ $v = y_i$.değer
    for $i = 2$'den $2n$'ye

if (y_i.öz = sağ) ve (y_{i-1}.öz = sol) ve (y_i.değer > v)

k = k+1

$\alpha_k = \frac{y_i.\text{değer}+y_{i-1}.\text{değer}}{2}$

$C(\alpha_k) = \{v_p | y_i.\text{ değer} \in (a_p, b_p]\}$

end if

end for

Son

3.3.1. Interval Grafların Komşu İzole Mukavemet Algoritması

G interval grafının komşu izole mukavemetinin bulunması problemini, subversion stratejisi *X*'i bulmaya indirgeyecek şekilde;

1. *X*, Algoritma 3.3.1 tarafından üretilen asgari stratejilerin birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $\frac{|X|+c(G/X)}{i(G/X)}$, 1. maddenin sağladığı şekilde *G*'nin tüm subversion stratejileri arasında en azıdır.

Algoritma 3.3.1'in hesapladığı asgari stratejiler arasında doğrusal bir düzen oluşturduğuna dikkat edilmelidir. Bu düzen önemlidir ve daha sonra algoritmalarımızda kullanılacaktır.

Oluşturulan asgari stratejiler Algoritma 3.3.1'den oluşturulan sırayla $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ olsun. α_i 'lerin azalmayan sırayla sıralandığı unutulmamalıdır. $comp(i,j) = \{v_p | a_p > \alpha_i, b_p < \alpha_j\}$ tanımı şu şekildedir; bazı i,j sayıları için $comp(i,j)$ şeklinde tanımlanabilen $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$'lerin bazılarının birleşimi bir subversion stratejisi tarafından oluşturulan herhangi bir bağlantılı bileşen olarak tanımlanabilir. Yani $comp(i,j)$, *G* interval grafının bir parçasıdır, en fazla tepe içeren bileşeni tespit etmek için kullanılır ve interval grafların yapısı gereği $G[comp(i,j)]$ de bir interval graftır. Ayrıca bütün i,j,k değerleri için $C(\alpha_i) - C(\alpha_{i+k}) = C(\alpha_i) - (C(\alpha_{i+k}) \cup C(\alpha_{i+j+k}))$ olacaktır. Diğer yandan, buna benzer olarak belirlenmiş olan interval'da bulunan izole tepeleri ifade etmek için $isol(i,j) = \{v_p | a_p > \alpha_i, b_p < \alpha_j, \deg(v_p) = 0\}$ kullanılır.

Komşu izole mukavemet problemini çözebilmek için öncelikle aşağıdaki problemi çözmemiz gerekmektedir.

Tanım 3.3.1.1. Kısıtlı Komşu İzole Mukavemet; verilen *G* interval grafı, Algoritma 3.3.1 tarafından oluşturulan asgari stratejiler $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ ve $\alpha_i \in R \geq 0: i = 1, \dots, k$. *G*'nin bir subversion stratejisi *X*'i bulmak şu şekildedir;

1. X, $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$'nin bazılarının birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $c(G/X) \leq K$
3. $1 \leq i(G/X) < K$
4. 1, 2 ve 3'ü sağlayan herhangi bir *X'* için $|X| \leq |X'|$

İki asgari stratejinin $C(\alpha_i)$ ve $C(\alpha_j)$ olduğunu düşünelim. Bağlantılı bir grafta bütün intervaller α_i'den önce başlıyor ve α_j'den önce bitiyor olsun. Bu bağlantılı grafın toplam tepe sayısı K değerini aşarsa $C(\alpha_{i+1}), \dots, C(\alpha_{j-1})$'lerin en az biri *X* subversion stratejisinin alt kümesi olmalıdır. $A_{i,j} = \{C(\alpha_{i+1}), \dots, C(\alpha_{j-1})\}$ olsun. Eğer $A_{i,j} \subseteq A_{i',j'}$ ise $A_{i,j}$'nin elemanlarından herhangi bir asgari strateji $A_{i',j'}$'ne de aittir. Böylece, başka herhangi bir kümenin alt kümesi olmayan $A_{i,j}$'ye ihtiyacımız olduğunu düşünmeliyiz. Açık bir ifadeyle, zaman karmaşıklığı yalnızca $O(n)$ olan $A_{i,j}$'ler vardır. Ayrıca, en fazla bir $A_{i,j}$ $C(\alpha_i)$ ile başlar, bu yüzden $A_{i,j}$'yi tanımlamaya ihtiyacımız yoktur. $A_{i,j}$'yi A_i ile ifade etmekteyiz.

Açıkça ifade etmek gerekirse, *X* achieving subversion stratejisi şu şekildedir; her A_i'deki en az bir asgari strateji *X*'in alt kümelerinden biri olmalı ve *X*'in eleman sayısı en az olmalıdır. Problem şu şekilde tanımlanır; verilen *V* tepe kümesi, *V*'nin alt kümeleri $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_r)$, $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_r)$ kümelerinin sınıfları $A_1, \dots, A_k$, *A*'nın en az eleman sayısına sahip olan kümeye ait olan ve $A \cap A_i \neq \emptyset$ olan $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_r)$ kümelerinin bir *A* sınıfı bulunur. Bu problemin çözümü için geliştirilmiş ve zaman karmaşıklığı $O(n^3)$ olan NGWHSP algoritması [17] Algoritma 3.3.1.1'de kullanılmıştır. NGWHSP algoritması ağırlıklı graflar için geliştirilmiş olsa da bütün tepe ağırlıkları 1 olarak algoritmaya verildiğinde ağırlıksız graflar için sonuca ulaşılmış olacaktır. Aşağıda verilen Algoritma 3.3.1.1 kısıtlı komşu izole mukavemetin çözümü için geliştirilmiştir.

Algoritma 3.3.1.1. Kısıtlı Komşu İzole Mukavemet (rNIT) Algoritması

Girdi: G interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ stratejileri. K=0 ilk eşik değeri.

Çıktı: $C \subseteq V(G)$, kısıtlı komşu izole mukavemet probleminin çözümü

Başla

$\alpha_0 = -\infty \qquad \alpha_{k+1} = \infty$

$C(\alpha_0) = 0 \qquad C(\alpha_{k+1}) = 0$

$p = 0$

for i = 1'den k'ye

  for $j = i$'den k'ye

    for $p' = i$'den j'ye

      if $C(\alpha_{p'}) \subseteq C(\alpha_{i-1}) \cup C(\alpha_{j+1})$

        break

      end if

    end for

    if ($|comp(i-1, j+1)| > K$) ve (($|isol(i-1, j+1)| \geq 1$)

      $p = p + 1$

      $A_p = \{C(\alpha_i), \dots, C(\alpha_j)\}$

      break

    end if

  end for

end for

return NGWHSP($C_1, \dots, C_k, A_1, \dots, A_p$, 1)

son

Teorem 3.3.1.1. Algoritma 3.3.1.1'in zaman karmaşıklık değeri $O(n^4 \log n)$'dir.

İspat 3.3.1.1. Algoritma 3.3.1.1'in ilk for döngüsünden önce yapılan atamalar $O(1)$ zamanında hesaplanabilir. En içte bulunan 3. döngünün maliyeti $O(n^4 \log n)$'dir. 2. döngü içinde bulunan if sorgusunun toplam maliyeti $O(n^3)$'tür. Algoritma çıktısını üreten NGWHSP de $O(n^3)$ zamanında hesaplama yapmaktadır. Böylece Algoritma 3.3.1.1'in zaman karmaşıklığı $O(n^4 \log n)$ olarak ispatlanmış olur.

Komşu izole mukavemetin bulunması için olası tüm $comp(i,j)$'ler, olası bir achieving bileşeni olarak kabul edilir. Daha sonra, kısıtlı komşu izole mukavemet algoritması, belirli $comp(i,j)$ en fazla elemanlı bileşen olacak şekilde minimum bir subversion stratejisini bulmak için kullanılır.

Algoritma 3.3.1.2. Komşu İzole Mukavemet (NIT) Algoritması
Girdi: G interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ asgari stratejileri.
Çıktı: Komşu İzole Mukavemet
Başla

A_strateji $= C_1 \cup \dots \cup C_k$
max_c $= c(G/\text{A\_strateji})$
izole_v $= i(G/\text{A\_strateji})$
NIT $= \frac{|\text{A\_strateji}| + \text{max\_c}}{\text{izole\_v}}$
$\alpha_0 = -\infty \qquad \alpha_{k+1} = \infty$
$C(\alpha_0) = \emptyset \qquad C(\alpha_{k+1}) = \emptyset$
for $i = 0$'den k'ye
for $j = i + 1$'den $k + 1$'e
for $p = i + 1$'den $j - 1$'e
if $C(\alpha_p) \subseteq C(\alpha_i) \cup C(\alpha_j)$
break
end if
end for
if $|comp(i-1, j+1)| >$ max_c
temp_A_starteji $= C_i \cup C_j \cup$
$(\text{rNIT}(G[-\infty, \alpha_i], (C(\alpha_1)/C(\alpha_i), \dots, C(\alpha_{i-1})/C(\alpha_i)), |comp(i,j)|)) \cup$
$(\text{rNIT}(G[\alpha_j, \infty], (C(\alpha_{j+1})/C(\alpha_j), \dots, C(\alpha_k)/C(\alpha_j)), |comp(i,j)|))$
if $\frac{|\text{temp\_A\_starteji}| + |comp(i-1,j+1)|}{|isol(i-1,j+1)|} <$ NIT
A_strateji = temp_A_starteji

$$\text{NIT} = \frac{|\text{temp\_A\_starteji}| + |comp(i-1, j+1)|}{|isol(i-1, j+1)|}$$

end if

end if

end for

end for

son

Teorem 3.3.1.2. Algoritma 3.3.1.2 komşu izole mukavemet hesaplamasını $O(n^6 \log n)$ zaman karmaşıklığında sonuçlandırmaktadır.

İspat 3.3.1.2. Algoritma 3.3.1.2'in ilk for döngüsünden önce yapılan atamalar $O(1)$ zamanında hesaplanabilir. En içte bulunan 3. döngünün maliyeti $O(n^4 \log n)$'dir. 2. döngü içinde bulunan if sorgusunun toplam maliyeti $O(n^6 \log n)$ 'dir. Böylece Algoritma 3.3.1.2'in zaman karmaşıklığı $O(n^6 \log n)$ olarak ispatlanmış olur.

3.3.2. Interval Grafların Komşu İzole Kopma Derecesi Algoritması

Daha önceki interval grafların komşu izole mukavemet algoritması kısmında verilen bazı tanımlar ve kurallar interval grafların komşu izole kopma derecesi algoritması için de geçerli olacaktır.

G interval grafının komşu izole kopma derecesinin bulunması problemini, subversion stratejisi *X*'i bulmaya indirgeyecek şekilde;

1. X, Algoritma 3.3.1 tarafından üretilen asgari stratejilerin birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $i(G/X) - |X| - c(G/X)$, 1. maddenin sağladığı şekilde *G*'nin tüm subversion stratejileri arasında en fazlasıdır.

Komşu izole kopma derecesi problemini çözebilmek için öncelikle aşağıdaki problemi çözmemiz gerekmektedir.

Tanım 3.3.2.1. Kısıtlı Komşu İzole Kopma Derecesi; verilen G interval grafı, Algoritma 3.3.1 tarafından oluşturulan asgari stratejiler $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ ve $\alpha_i \in R \geq 0$: $i = 1, \dots, k$. G'nin bir subversion stratejisi X'i bulmak şu şekildedir;

1. X, $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$'nin bazılarının birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $c(G/X) \leq K$
3. $1 \leq i(G/X) < K$
4. 1, 2 ve 3'ü sağlayan herhangi bir X' için $|X| \leq |X'|$

Aşağıda verilen Algoritma 3.3.2.1, Algoritma 3.3.1.1 ile benzer şekilde kısıtlı komşu izole kopma derecesinin çözümü için geliştirilmiştir.

Algoritma 3.3.2.1. Kısıtlı Komşu İzole Kopma Derecesi (rNIR) Algoritması
Girdi: G interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ stratejileri. K=0 ilk eşik değeri.
Çıktı: $C \subseteq V(G)$, kısıtlı komşu izole kopma derecesi probleminin çözümü
Başla

```
    α_0 = −∞        α_{k+1} = ∞
    C(α_0) = 0      C(α_{k+1}) = 0
    p = 0
    for i = 1'den k'ye
        for j = i'den k'ye
            for p' = i'den j'ye
                if C(α_{p'}) ⊆ C(α_{i−1}) ∪ C(α_{j+1})
                    break
                end if
            end for
            if (|comp(i − 1, j + 1)| > K) ve ((|isol(i − 1, j + 1)| ≥ 1)
                p = p + 1
                A_p = {C(α_i), …, C(α_j)}
                break
            end if
        end for
```

end for

return NGWHSP($C_1, \dots, C_k, A_1, \dots, A_p$, 1)

son

Teorem 3.3.2.1. Algoritma 3.3.2.1'in zaman karmaşıklık değeri $O(n^4 \log n)$'dir.

İspat 3.3.2.1. Teorem 3.3.1.1'in ispatı ile benzerdir.

Komşu izole kopma derecesinin bulunması için olası tüm $comp(i,j)$'ler, olası bir achieving bileşeni olarak kabul edilir. Daha sonra, kısıtlı komşu izole kopma derecesi algoritması, belirli $comp(i,j)$ en fazla elemanlı bileşen olacak şekilde minimum bir subversion stratejisini bulmak için kullanılır.

Algoritma 3.3.2.2. Komşu İzole Kopma Derecesi (NIR) Algoritması

Girdi: G interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ asgari stratejileri.

Çıktı: Komşu İzole Kopma Derecesi

Başla

A_strateji $= C_1 \cup \dots \cup C_k$

max_c $= c(G/$A_strateji$)$

izole_v $= i(G/$A_strateji$)$

NIR = izole_v $-$ |A_strateji| $-$ max_c

$\alpha_0 = -\infty \qquad \alpha_{k+1} = \infty$

$C(\alpha_0) = \emptyset \qquad C(\alpha_{k+1}) = \emptyset$

for $i = 0$'den k'ye

for $j = i + 1$'den $k + 1$'e

for $p = i + 1$'den $j - 1$'e

if $C(\alpha_p) \subseteq C(\alpha_i) \cup C(\alpha_j)$

break

end if

end for

if $|comp(i-1, j+1)| >$ max_c

temp_A_starteji $= C_i \cup C_j \cup$

$(\mathrm{rNIR}(G[-\infty, \alpha_i], (C(\alpha_1)/C(\alpha_i), \dots, C(\alpha_{i-1})/C(\alpha_i)), |comp(i,j)|)) \cup$

$(\mathrm{rNIR}(G\lfloor\alpha_j, \infty\rfloor, (C(\alpha_{j+1})/C(\alpha_j), \dots, C(\alpha_k)/C(\alpha_j)), |comp(i,j)|))$

if $(|isol(i-1, j+1)| - |\mathrm{temp\_A\_starteji}| - |comp(i-1, j+1)|) > \mathrm{NIR}$

$\mathrm{A\_strateji} = \mathrm{temp\_A\_starteji}$

$\mathrm{NIR} = |isol(i-1, j+1)| - |\mathrm{temp\_A\_starteji}| - |comp(i-1, j+1)|$

end if

end if

end for

end for

son

Teorem 3.3.2.2. Algoritma 3.3.2.2 komşu izole kopma derecesi hesaplamasını $O(n^6 \log n)$ zaman karmaşıklığında sonuçlandırmaktadır.

İspat 3.3.2.2. Teorem 3.3.1.2'in ispatıyla benzerdir.

4. AĞIRLIKLI KOMŞU İZOLE MUKAVEMET VE AĞIRLIKLI KOMŞU İZOLE KOPMA DERECESİ

Bu bölümde ağırlıklı komşu izole mukavemet ve ağırlıklı komşu izole kopma derecesi tanımları, örnek çözüm şekli ve bu parametrelerin interval graflar için oluşturulmuş algoritmalarıyla birlikte algoritma karmaşıklıkları verilmiştir.

4.1. Tanım ve Teoremler

Ağırlıklı bütünlük [17] tanımından yola çıkarak komşu izole saçılım sayısını bu kısımda, ilerleyen kısımlarda da komşu izole mukavemet ve komşu izole kopma derecesinin ağırlıklı dönüşümlerinin uygulanmış tanımlarını verelim.

Tanım 4.1.1. Bağlantılı bir G grafında $w: V \rightarrow R \geq 0$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı komşu izole saçılım sayısı $NIS_w(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$NIS_w(G) = \max\{i_w(G/X) - w(X): i(G/X) \geq 1\}$$

$w(X) = \sum_{v \in X} w(v)$, G grafının tepe subversion stratejesinin toplam ağırlığını, G/X grafındaki izole tepelerin toplam ağırlığını $i_w(G/X)$ ifade etmektedir.

4.1.1. Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemet

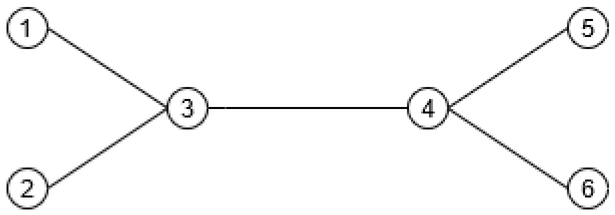
Bu kısımda ağırlıklı komşu izole mukavemet tanımı ve bir örnek verilmiştir.

Tanım 4.1.1.1. Bağlantılı bir G grafında $w: V \rightarrow R \geq 0$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı komşu izole mukavemet $NIT_w(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$NIT_w(G) = \min\left\{\frac{w(X) + c_w(G/X)}{i_w(G/X)} : i(G/X) \geq 1\right\}$$

$w(X) = \sum_{v \in X} w(v)$, G grafının tepe subversion stratejesinin toplam ağırlığını, G/X grafındaki izole tepelerin toplam ağırlığını $i_w(G/X)$ ve toplam ağırlığı en yüksek bileşenin ağırlığını $c_w(G/X)$ ifade etmektedir.

Örnek 4.1.1.1. Şekil 4.1.1.1'de gösterilen G grafının ağırlıklı komşu izole mukavemetini hesaplayalım. X, G grafının bir tepe subversion stratejisi olsun. Bu durumda,



Şekil 4.1.1.1. Bağlantılı bir G grafı

Öncelikle tepelerin ağırlıklarını belirtmek gerekirse, her tepenin ağırlığı tepe adının 10 katı olsun, örneğin $w(2) = 2 * 10 = 20$ şeklinde.

$|X| = 1$ olsun. X kümeleri

- $X_1 = \{1\}$ ise $w(X_1) = 10$, $c_w(G/X_1) = 150$, $i_w(G/X_1) = 20$ olur ve $NIT_{w_1}(G) = \frac{10+150}{20} = 8$ bulunur.
- $X_2 = \{2\}$ ise $w(X_2) = 20$, $c_w(G/X_2) = 150$, $i_w(G/X_2) = 10$ olur ve $NIT_{w_2}(G) = \frac{20+150}{10} = 17$ bulunur.
- $X_3 = \{3\}$ ise $w(X_3) = 30$, $c_w(G/X_3) = 60$, $i_w(G/X_3) = 110$ olur ve $NIT_{w_3}(G) = \frac{30+60}{110} = 0{,}82$ bulunur.
- $X_4 = \{4\}$ ise $w(X_4) = 40$, $c_w(G/X_4) = 20$, $i_w(G/X_4) = 30$ olur ve $NIT_{w_4}(G) = \frac{40+20}{30} = 2$ bulunur.
- $X_5 = \{5\}$ ise $w(X_5) = 50$, $c_w(G/X_5) = 60$, $i_w(G/X_5) = 60$ olur ve $NIT_{w_5}(G) = \frac{50+60}{60} = 1{,}83$ bulunur.
- $X_6 = \{6\}$ ise $w(X_6) = 60$, $c_w(G/X_6) = 60$, $i_w(G/X_6) = 50$ olur ve $NIT_{w_6}(G) = \frac{60+60}{50} = 2{,}4$ bulunur.

$|X| = 2$ olsun. X kümeleri

- $X_7 = \{1,2\}$ ise $i(G/X_7) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_7}(G) = \emptyset$ olur.

- $X_8 = \{1,3\}$ ise $w(X_8) = 40$, $c_w(G/X_8) = 60$, $i_w(G/X_8) = 110$ olur ve $NIT_{w_8}(G) = \frac{40+60}{110} = 0{,}91$ bulunur.
- $X_9 = \{1,4\}$ ise $w(X_9) = 50$, $c_w(G/X_9) = 20$, $i_w(G/X_9) = 20$ olur ve $NIT_{w_9}(G) = \frac{50+20}{20} = 3{,}5$ bulunur.
- $X_{10} = \{1,5\}$ ise $w(X_{10}) = 60$, $c_w(G/X_{10}) = 60$, $i_w(G/X_{10}) = 80$ olur ve $NIT_{w_{10}}(G) = \frac{60+60}{80} = 1{,}5$ bulunur.
- $X_{11} = \{1,6\}$ ise $w(X_{11}) = 70$, $c_w(G/X_{11}) = 50$, $i_w(G/X_{11}) = 70$ olur ve $NIT_{w_{11}}(G) = \frac{70+50}{70} = 1{,}71$ bulunur.
- $X_{12} = \{2,3\}$ ise $w(X_{12}) = 50$, $c_w(G/X_{12}) = 60$, $i_w(G/X_{12}) = 110$ olur ve $NIT_{w_{12}}(G) = \frac{50+60}{110} = 1$ bulunur.
- $X_{13} = \{2,4\}$ ise $w(X_{13}) = 60$, $c_w(G/X_{13}) = 10$, $i_w(G/X_{13}) = 10$ olur ve $NIT_{w_{13}}(G) = \frac{60+10}{10} = 7$ bulunur.
- $X_{14} = \{2,5\}$ ise $w(X_{14}) = 70$, $c_w(G/X_{14}) = 60$, $i_w(G/X_{14}) = 70$ olur ve $NIT_{w_{14}}(G) = \frac{70+60}{70} = 1{,}86$ bulunur.
- $X_{15} = \{2,6\}$ ise $w(X_{15}) = 80$, $c_w(G/X_{15}) = 50$, $i_w(G/X_{15}) = 60$ olur ve $NIT_{w_{15}}(G) = \frac{80+50}{60} = 2{,}17$ bulunur.
- $X_{16} = \{3,4\}$ ise $i(G/X_{16}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{16}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{17} = \{3,5\}$ ise $w(X_{17}) = 80$, $c_w(G/X_{17}) = 60$, $i_w(G/X_{17}) = 60$ olur ve $NIT_{w_{17}}(G) = \frac{80+60}{60} = 2{,}3$ bulunur.
- $X_{18} = \{3,6\}$ ise $w(X_{18}) = 90$, $c_w(G/X_{18}) = 50$, $i_w(G/X_{18}) = 50$ olur ve $NIT_{w_{18}}(G) = \frac{90+50}{50} = 2{,}8$ bulunur.
- $X_{19} = \{4,5\}$ ise $w(X_{19}) = 90$, $c_w(G/X_{19}) = 20$, $i_w(G/X_{19}) = 30$ olur ve $NIT_{w_{19}}(G) = \frac{90+20}{30} = 3{,}7$ bulunur.
- $X_{20} = \{4,6\}$ ise $w(X_{20}) = 90$, $c_w(G/X_{20}) = 20$, $i_w(G/X_{20}) = 30$ olur ve $NIT_{w_{20}}(G) = \frac{90+20}{30} = 3{,}7$ bulunur.
- $X_{21} = \{5,6\}$ ise $i(G/X_{21}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{21}}(G) = \emptyset$ olur.

$|X| = 3$ olsun. X kümeleri

- $X_{22} = \{1,2,3\}$ ise $w(X_{22}) = 60$, $c_w(G/X_{22}) = 60$, $i_w(G/X_{22}) = 110$ olur ve $NIT_{w_{22}}(G) = \frac{60+60}{110} = 1{,}09$ bulunur.
- $X_{23} = \{1,2,4\}$ ise $i(G/X_{23}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{23}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{24} = \{1,2,5\}$ ise $w(X_{24}) = 80$, $c_w(G/X_{24}) = 60$, $i_w(G/X_{24}) = 60$ olur ve $NIT_{w_{24}}(G) = \frac{80+60}{60} = 2{,}3$ bulunur.
- $X_{25} = \{1,2,6\}$ ise $w(X_{25}) = 90$, $c_w(G/X_{25}) = 50$, $i_w(G/X_{25}) = 50$ olur ve $NIT_{w_{25}}(G) = \frac{90+50}{50} = 2{,}8$ bulunur.
- $X_{26} = \{1,3,4\}$ ise $i(G/X_{26}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{26}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{27} = \{1,3,5\}$ ise $w(X_{27}) = 90$, $c_w(G/X_{27}) = 60$, $i_w(G/X_{27}) = 60$ olur ve $NIT_{w_{27}}(G) = \frac{90+60}{60} = 2{,}83$ bulunur.
- $X_{28} = \{1,3,6\}$ ise $w(X_{28}) = 100$, $c_w(G/X_{28}) = 50$, $i_w(G/X_{28}) = 50$ olur ve $NIT_{w_{28}}(G) = \frac{100+50}{50} = 3$ bulunur.
- $X_{29} = \{1,4,5\}$ ise $w(X_{29}) = 100$, $c_w(G/X_{29}) = 20$, $i_w(G/X_{29}) = 20$ olur ve $NIT_{w_{29}}(G) = \frac{100+20}{20} = 6$ bulunur.
- $X_{30} = \{1,4,6\}$ ise $w(X_{30}) = 110$, $c_w(G/X_{30}) = 20$, $i_w(G/X_{30}) = 20$ olur ve $NIT_{w_{30}}(G) = \frac{110+20}{20} = 7{,}5$ bulunur.
- $X_{31} = \{1,5,6\}$ ise $w(X_{31}) = 120$, $c_w(G/X_{31}) = 20$, $i_w(G/X_{31}) = 20$ olur ve $NIT_{w_{31}}(G) = \frac{120+20}{20} = 7$ bulunur.
- $X_{32} = \{2,3,4\}$ ise $i(G/X_{32}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{32}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{33} = \{2,3,5\}$ ise $w(X_{33}) = 100$, $c_w(G/X_{33}) = 60$, $i_w(G/X_{33}) = 60$ olur ve $NIT_{w_{33}}(G) = \frac{100+60}{60} = 2{,}7$ bulunur.
- $X_{34} = \{2,3,6\}$ ise $w(X_{34}) = 110$, $c_w(G/X_{34}) = 50$, $i_w(G/X_{34}) = 50$ olur ve $NIT_{w_{34}}(G) = \frac{110+50}{50} = 3{,}2$ bulunur.
- $X_{35} = \{2,4,5\}$ ise $w(X_{35}) = 110$, $c_w(G/X_{35}) = 10$, $i_w(G/X_{35}) = 10$ olur ve $NIT_{w_{35}}(G) = \frac{110+10}{10} = 12$ bulunur.
- $X_{36} = \{2,4,6\}$ ise $w(X_{36}) = 120$, $c_w(G/X_{36}) = 10$, $i_w(G/X_{36}) = 10$ olur ve $NIT_{w_{36}}(G) = \frac{120+10}{10} = 13$ bulunur.

- $X_{37} = \{2,5,6\}$ ise $w(X_{37}) = 130$, $c_w(G/X_{37}) = 10$, $i_w(G/X_{37}) = 10$ olur ve $NIT_{w_{37}}(G) = \frac{130+10}{10} = 14$ bulunur.
- $X_{38} = \{3,4,5\}$ ise $i(G/X_{38}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{38}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{39} = \{3,4,6\}$ ise $i(G/X_{39}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{39}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{40} = \{3,5,6\}$ ise $i(G/X_{40}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{40}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{41} = \{4,5,6\}$ ise $w(X_{41}) = 150$, $c_w(G/X_{41}) = 20$, $i_w(G/X_{41}) = 30$ olur ve $NIT_{w_{41}}(G) = \frac{150+20}{30} = 5{,}7$ bulunur.

$|X| = 4$ olsun. X kümeleri

- $X_{42} = \{1,2,3,4\}$ ise $i(G/X_{42}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{42}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{43} = \{1,2,3,5\}$ ise $w(X_{43}) = 110$, $c_w(G/X_{43}) = 60$, $i_w(G/X_{43}) = 60$ olur ve $NIT_{w_{43}}(G) = \frac{110+60}{60} = 2{,}83$ bulunur.
- $X_{44} = \{1,2,3,6\}$ ise $w(X_{44}) = 120$, $c_w(G/X_{44}) = 50$, $i_w(G/X_{44}) = 50$ olur ve $NIT_{w_{44}}(G) = \frac{120+50}{50} = 3{,}4$ bulunur.
- $X_{45} = \{1,2,4,5\}$ ise $i(G/X_{45}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{45}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{46} = \{1,2,4,6\}$ ise $i(G/X_{46}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{46}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{47} = \{1,2,5,6\}$ ise $i(G/X_{47}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{47}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{48} = \{1,3,4,5\}$ ise $i(G/X_{48}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{48}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{49} = \{1,3,4,6\}$ ise $i(G/X_{49}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{49}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{50} = \{1,3,5,6\}$ ise $i(G/X_{50}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{50}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{51} = \{1,4,5,6\}$ ise $w(X_{51}) = 160$, $c_w(G/X_{51}) = 20$, $i_w(G/X_{51}) = 20$ olur ve $NIT_{w_{51}}(G) = \frac{160+20}{20} = 9$ bulunur.
- $X_{52} = \{2,3,4,5\}$ ise $i(G/X_{52}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{52}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{53} = \{2,3,4,6\}$ ise $i(G/X_{53}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{53}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{54} = \{2,3,5,6\}$ ise $i(G/X_{54}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{54}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{55} = \{2,4,5,6\}$ ise $w(X_{35}) = 170$, $c_w(G/X_{55}) = 10$, $i_w(G/X_{55}) = 10$ olur ve $NIT_{w_{55}}(G) = \frac{170+10}{10} = 18$ bulunur.
- $X_{56} = \{3,4,5,6\}$ ise $i(G/X_{56}) = \emptyset$ olduğundan $NIT_{w_{56}}(G) = \emptyset$ olur.

$|X| = 5$ olduğunda her X kümesi için $i(G/X) = \emptyset$ olduğundan ağırlıklı komşu izole mukavemet hesaplanamaz.

$|X| = 6$ olduğunda her X kümesi için $i(G/X) = \emptyset$ olduğundan ağırlıklı komşu izole mukavemet hesaplanamaz.

Sonuç olarak ağırlıklı komşu izole mukavemet tanımından hareketle

$$NIT_w(G) = \min \left\{ \begin{array}{c} 8, 17, 0.82, 2, 1.83, 2.4, \emptyset, 0.91, \\ 3.5, 1.5, 1.71, 1, 7, 1.86, 2.17, \emptyset, \\ 2.3, 2.8, 3.7, 3.7, \emptyset, 1.09, \emptyset, 2.3 \\ 2.8, \emptyset, 2.83, 3, 6, 7.5, 7, \emptyset, \\ 2.7, 3.2, 12, 13, 14, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \\ 5.7, \emptyset, 2.83, 3.4, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \\ \emptyset, \emptyset, 9, \emptyset, \emptyset, \emptyset, 18, \emptyset, \emptyset, \emptyset \end{array} \right\} = 0.82$$

olarak bulunur.

4.1.1.1. Interval Grafların Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemeti

Bu kısımda yukarıda tanımı verilmiş olan ağırlıklı komşu izole mukavemetin interval graflarda uygulanışı ile ilgili tanımlar ve kurallar verilmiştir.

Tanım 4.1.1.1.1. Bir G grafı ve $w: V \to R \geq 0$ ağırlık fonksiyonu için $X \subseteq V(G)$ *achieving tepe subversion stratejisi* olarak adlandırılır. Bunun için örneğin komşu izole mukavemet $NIT_w(G) = \frac{w(X)+c_w(G/X)}{i_w(G/X)}$ olmalıdır.

Diğer bir ifadeyle elde edilen achieving tepe subversion stratejisi ile ağırlıklı komşu izole mukavemet ölçümüne ulaşılır.

Tanımdan da görüldüğü gibi 3.1.1.1 numaralı kısımda bulunan komşu izole mukavemet için verilen interval graf tanım ve kurallarına ağırlık dönüşümleri uygulandığında aynı kurallar interval grafların ağırlıklı komşu izole mukavemeti için de geçerli olacaktır. Bu dönüşümleri açıklamak gerekirse ve $w: V \to R \geq 0$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere; $|X|$ asgari stratejilerin sayısı yerine asgari stratejilerin ağırlık toplamı için $w(X) = \sum_{v \in X} w(v)$, $c(G/X)$ en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı yerine bileşenlerin ağırlığı en fazla olanın ağırlığı için $c_w(G/X)$, $i(G/X)$ izole tepelerin sayısı yerine izole tepelerin toplam ağırlığı için $i_w(G/X)$ kullanılır.

4.1.2. Ağırlıklı Komşu İzole Kopma Derecesi

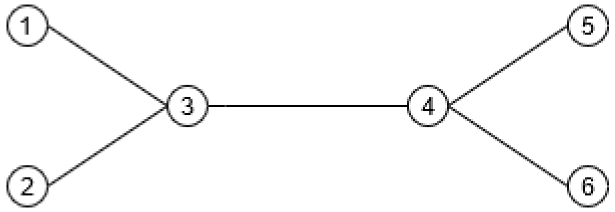
Bu kısımda ağırlıklı komşu izole kopma derecesi tanımı ve bir örnek verilmiştir.

Tanım 4.1.2.1. Bağlantılı bir *G* grafında $w: V \to R \geq 0$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı komşu izole kopma derecesi $NIR_w(G)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$NIR_w(G) = \max\{i_w(G/X) - w(X) - c_w(G/X): i(G/X) \geq 1\}$$

$w(X) = \sum_{v \in X} w(v)$, *G* grafının tepe subversion stratejesinin toplam ağırlığını, G/X grafındaki izole tepelerin toplam ağırlığını $i_w(G/X)$ ve toplam ağırlığı en yüksek bileşenin ağırlığını $c_w(G/X)$ ifade etmektedir.

Örnek 4.1.2.1. Şekil 4.1.2.1'de gösterilen *G* grafının ağırlıklı komşu izole kopma derecesini hesaplayalım. *X*, *G* grafının bir tepe subversion stratejisi olsun. Bu durumda,



Şekil 4.1.2.1. Bağlantılı bir *G* grafı

Öncelikle tepelerin ağırlıklarını belirtmek gerekirse, her tepenin ağırlığı tepe adının 10 katı olsun, örneğin $w(2) = 2 * 10 = 20$ şeklinde.

$|X| = 1$ olsun. *X* kümeleri

- $X_1 = \{1\}$ ise $w(X_1) = 10$, $c_w(G/X_1) = 150$, $i_w(G/X_1) = 20$ olur ve $NIR_{w_1}(G) = 20 - 10 - 150 = -140$ bulunur.
- $X_2 = \{2\}$ ise $w(X_2) = 20$, $c_w(G/X_2) = 150$, $i_w(G/X_2) = 10$ olur ve $NIR_{w_2}(G) = 10 - 20 - 150 = -160$ bulunur.
- $X_3 = \{3\}$ ise $w(X_3) = 30$, $c_w(G/X_3) = 60$, $i_w(G/X_3) = 110$ olur ve $NIR_{w_3}(G) = 110 - 30 - 60 = 20$ bulunur.
- $X_4 = \{4\}$ ise $w(X_4) = 40$, $c_w(G/X_4) = 20$, $i_w(G/X_4) = 30$ olur ve $NIR_{w_4}(G) = 30 - 40 - 20 = -30$ bulunur.
- $X_5 = \{5\}$ ise $w(X_5) = 50$, $c_w(G/X_5) = 60$, $i_w(G/X_5) = 60$ olur ve $NIR_{w_5}(G) = 60 - 50 - 60 = -50$ bulunur.
- $X_6 = \{6\}$ ise $w(X_6) = 60$, $c_w(G/X_6) = 60$, $i_w(G/X_6) = 50$ olur ve $NIR_{w_6}(G) = 50 - 60 - 60 = -70$ bulunur.

$|X| = 2$ olsun. X kümeleri

- $X_7 = \{1,2\}$ ise $i(G/X_7) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_7}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_8 = \{1,3\}$ ise $w(X_8) = 40$, $c_w(G/X_8) = 60$, $i_w(G/X_8) = 110$ olur ve $NIR_{w_8}(G) = 110 - 40 - 60 = 10$ bulunur.
- $X_9 = \{1,4\}$ ise $w(X_9) = 50$, $c_w(G/X_9) = 20$, $i_w(G/X_9) = 20$ olur ve $NIR_{w_9}(G) = 20 - 50 - 20 = -50$ bulunur.
- $X_{10} = \{1,5\}$ ise $w(X_{10}) = 60$, $c_w(G/X_{10}) = 60$, $i_w(G/X_{10}) = 80$ olur ve $NIR_{w_{10}}(G) = 80 - 60 - 60 = -40$ bulunur.
- $X_{11} = \{1,6\}$ ise $w(X_{11}) = 70$, $c_w(G/X_{11}) = 50$, $i_w(G/X_{11}) = 70$ olur ve $NIR_{w_{11}}(G) = 70 - 70 - 50 = -50$ bulunur.
- $X_{12} = \{2,3\}$ ise $w(X_{12}) = 50$, $c_w(G/X_{12}) = 60$, $i_w(G/X_{12}) = 110$ olur ve $NIR_{w_{12}}(G) = 110 - 50 - 60 = 0$ bulunur.
- $X_{13} = \{2,4\}$ ise $w(X_{13}) = 60$, $c_w(G/X_{13}) = 10$, $i_w(G/X_{13}) = 10$ olur ve $NIR_{w_{13}}(G) = 10 - 60 - 10 = -60$ bulunur.
- $X_{14} = \{2,5\}$ ise $w(X_{14}) = 70$, $c_w(G/X_{14}) = 60$, $i_w(G/X_{14}) = 70$ olur ve $NIR_{w_{14}}(G) = 70 - 70 - 60 = -60$ bulunur.
- $X_{15} = \{2,6\}$ ise $w(X_{15}) = 80$, $c_w(G/X_{15}) = 50$, $i_w(G/X_{15}) = 60$ olur ve $NIR_{w_{15}}(G) = 60 - 80 - 50 = -70$ bulunur.

- $X_{16} = \{3,4\}$ ise $i(G/X_{16}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{16}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{17} = \{3,5\}$ ise $w(X_{17}) = 80$, $c_w(G/X_{17}) = 60$, $i_w(G/X_{17}) = 60$ olur ve $NIR_{w_{17}}(G) = 60 - 80 - 60 = -80$ bulunur.
- $X_{18} = \{3,6\}$ ise $w(X_{18}) = 90$, $c_w(G/X_{18}) = 50$, $i_w(G/X_{18}) = 50$ olur ve $NIR_{w_{18}}(G) = 50 - 90 - 50 = -90$ bulunur.
- $X_{19} = \{4,5\}$ ise $w(X_{19}) = 90$, $c_w(G/X_{19}) = 20$, $i_w(G/X_{19}) = 30$ olur ve $NIR_{w_{19}}(G) = 30 - 90 - 20 = -80$ bulunur.
- $X_{20} = \{4,6\}$ ise $w(X_{20}) = 90$, $c_w(G/X_{20}) = 20$, $i_w(G/X_{20}) = 30$ olur ve $NIR_{w_{20}}(G) = 30 - 90 - 20 = -80$ bulunur.
- $X_{21} = \{5,6\}$ ise $i(G/X_{21}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{21}}(G) = \emptyset$ olur.

$|X| = 3$ olsun. X kümeleri

- $X_{22} = \{1,2,3\}$ ise $w(X_{22}) = 60$, $c_w(G/X_{22}) = 60$, $i_w(G/X_{22}) = 110$ olur ve $NIR_{w_{22}}(G) = 110 - 60 - 60 = -10$ bulunur.
- $X_{23} = \{1,2,4\}$ ise $i(G/X_{23}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{23}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{24} = \{1,2,5\}$ ise $w(X_{24}) = 80$, $c_w(G/X_{24}) = 60$, $i_w(G/X_{24}) = 60$ olur ve $NIR_{w_{24}}(G) = 60 - 80 - 60 = -80$ bulunur.
- $X_{25} = \{1,2,6\}$ ise $w(X_{25}) = 90$, $c_w(G/X_{25}) = 50$, $i_w(G/X_{25}) = 50$ olur ve $NIR_{w_{25}}(G) = 50 - 90 - 50 = -90$ bulunur.
- $X_{26} = \{1,3,4\}$ ise $i(G/X_{26}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{26}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{27} = \{1,3,5\}$ ise $w(X_{27}) = 90$, $c_w(G/X_{27}) = 60$, $i_w(G/X_{27}) = 60$ olur ve $NIR_{w_{27}}(G) = 60 - 90 - 60 = -90$ bulunur.
- $X_{28} = \{1,3,6\}$ ise $w(X_{28}) = 100$, $c_w(G/X_{28}) = 50$, $i_w(G/X_{28}) = 50$ olur ve $NIR_{w_{28}}(G) = 50 - 100 - 50 = -100$ bulunur.
- $X_{29} = \{1,4,5\}$ ise $w(X_{29}) = 100$, $c_w(G/X_{29}) = 20$, $i_w(G/X_{29}) = 20$ olur ve $NIR_{w_{29}}(G) = 20 - 100 - 20 = -100$ bulunur.
- $X_{30} = \{1,4,6\}$ ise $w(X_{30}) = 110$, $c_w(G/X_{30}) = 20$, $i_w(G/X_{30}) = 20$ olur ve $NIR_{w_{30}}(G) = 20 - 110 - 20 = -110$ bulunur.
- $X_{31} = \{1,5,6\}$ ise $w(X_{31}) = 120$, $c_w(G/X_{31}) = 20$, $i_w(G/X_{31}) = 20$ olur ve $NIR_{w_{31}}(G) = 20 - 120 - 20 = -120$ bulunur.
- $X_{32} = \{2,3,4\}$ ise $i(G/X_{32}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{32}}(G) = \emptyset$ olur.

- $X_{33} = \{2,3,5\}$ ise $w(X_{33}) = 100$, $c_w(G/X_{33}) = 60$, $i_w(G/X_{33}) = 60$ olur ve $NIR_{w_{33}}(G) = 60 - 100 - 60 = -100$ bulunur.
- $X_{34} = \{2,3,6\}$ ise $w(X_{34}) = 110$, $c_w(G/X_{34}) = 50$, $i_w(G/X_{34}) = 50$ olur ve $NIR_{w_{34}}(G) = 50 - 110 - 50 = -110$ bulunur.
- $X_{35} = \{2,4,5\}$ ise $w(X_{35}) = 110$, $c_w(G/X_{35}) = 10$, $i_w(G/X_{35}) = 10$ olur ve $NIR_{w_{35}}(G) = 10 - 110 - 10 = -110$ bulunur.
- $X_{36} = \{2,4,6\}$ ise $w(X_{36}) = 120$, $c_w(G/X_{36}) = 10$, $i_w(G/X_{36}) = 10$ olur ve $NIR_{w_{36}}(G) = 10 - 120 - 10 = -120$ bulunur.
- $X_{37} = \{2,5,6\}$ ise $w(X_{37}) = 130$, $c_w(G/X_{37}) = 10$, $i_w(G/X_{37}) = 10$ olur ve $NIR_{w_{37}}(G) = 10 - 130 - 10 = -130$ bulunur.
- $X_{38} = \{3,4,5\}$ ise $i(G/X_{38}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{38}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{39} = \{3,4,6\}$ ise $i(G/X_{39}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{39}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{40} = \{3,5,6\}$ ise $i(G/X_{40}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{40}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{41} = \{4,5,6\}$ ise $w(X_{41}) = 150$, $c_w(G/X_{41}) = 20$, $i_w(G/X_{41}) = 30$ olur ve $NIR_{w_{41}}(G) = 30 - 150 - 20 = -140$ bulunur.

$|X| = 4$ olsun. X kümeleri

- $X_{42} = \{1,2,3,4\}$ ise $i(G/X_{42}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{42}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{43} = \{1,2,3,5\}$ ise $w(X_{43}) = 110$, $c_w(G/X_{43}) = 60$, $i_w(G/X_{43}) = 60$ olur ve $NIR_{w_{43}}(G) = 60 - 110 - 60 = -110$ bulunur.
- $X_{44} = \{1,2,3,6\}$ ise $w(X_{44}) = 120$, $c_w(G/X_{44}) = 50$, $i_w(G/X_{44}) = 50$ olur ve $NIR_{w_{44}}(G) = 50 - 120 - 50 = -120$ bulunur.
- $X_{45} = \{1,2,4,5\}$ ise $i(G/X_{45}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{45}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{46} = \{1,2,4,6\}$ ise $i(G/X_{46}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{46}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{47} = \{1,2,5,6\}$ ise $i(G/X_{47}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{47}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{48} = \{1,3,4,5\}$ ise $i(G/X_{48}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{48}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{49} = \{1,3,4,6\}$ ise $i(G/X_{49}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{49}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{50} = \{1,3,5,6\}$ ise $i(G/X_{50}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{50}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{51} = \{1,4,5,6\}$ ise $w(X_{51}) = 160$, $c_w(G/X_{51}) = 20$, $i_w(G/X_{51}) = 20$ olur ve $NIR_{w_{51}}(G) = 20 - 160 - 20 = -160$ bulunur.
- $X_{52} = \{2,3,4,5\}$ ise $i(G/X_{52}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{52}}(G) = \emptyset$ olur.

- $X_{53} = \{2,3,4,6\}$ ise $i(G/X_{53}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{53}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{54} = \{2,3,5,6\}$ ise $i(G/X_{54}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{54}}(G) = \emptyset$ olur.
- $X_{55} = \{2,4,5,6\}$ ise $w(X_{35}) = 170$, $c_w(G/X_{55}) = 10$, $i_w(G/X_{55}) = 10$ olur ve $NIR_{w_{55}}(G) = 10 - 170 - 10 = -170$ bulunur.
- $X_{56} = \{3,4,5,6\}$ ise $i(G/X_{56}) = \emptyset$ olduğundan $NIR_{w_{56}}(G) = \emptyset$ olur.

$|X| = 5$ olduğunda her X kümesi için $i(G/X) = \emptyset$ olduğundan ağırlıklı komşu izole kopma derecesi hesaplanamaz.

$|X| = 6$ olduğunda her X kümesi için $i(G/X) = \emptyset$ olduğundan ağırlıklı komşu izole kopma derecesi hesaplanamaz.

Sonuç olarak ağırlıklı komşu izole kopma derecesi tanımından hareketle

$$NIR_w(G) = \max\left\{\begin{matrix} -140, -160, 20, -30, -50, -70, \emptyset, 10, \\ -50, -40, -50, 0, -60, -60, -70, \emptyset, \\ -80, -90, -80, -80, \emptyset, -10, \emptyset, -80, \\ -90, \emptyset, -90, -100, -100, -110, -120, \\ \emptyset, -100, -110, -110, -120, -130, \emptyset, \\ \emptyset, \emptyset, -140, \emptyset, -110, -120, \emptyset, \emptyset, \emptyset \\ \emptyset, \emptyset, \emptyset, -160, \emptyset, \emptyset, \emptyset, -170, \emptyset, \emptyset, \emptyset \end{matrix}\right\} = 20$$

olarak bulunur.

4.1.2.1. Interval Grafların Ağırlıklı Komşu İzole Kopma Derecesi

Bu kısımda yukarıda tanımı verilmiş olan ağırlıklı komşu izole kopma derecesinin interval graflarda uygulanışı ile ilgili tanımlar ve kurallara değinilmiştir.

Tanım 4.1.2.1.1. Bir G grafı ve $w: V \to R \geq 0$ ağırlık fonksiyonu için $X \subseteq V(G)$ *achieving tepe subversion stratejisi* olarak adlandırılır. Bunun için örneğin komşu izole kopma derecesi $NIR_w(G) = i_w(G/X) - w(X) - c_w(G/X)$ olmalıdır.

Diğer bir ifadeyle elde edilen achieving tepe subversion stratejisi ile ağırlıklı komşu izole kopma derecesi ölçümüne ulaşılır.

Tanımdan da görüldüğü gibi 3.1.2.1 numaralı kısımda bulunan komşu izole kopma derecesi için verilen interval graf tanım ve kurallarına ağırlık dönüşümleri uygulandığında aynı kurallar interval grafların ağırlıklı komşu izole kopma derecesi için de geçerli olacaktır. Bu dönüşümlerin açıklaması daha önce 4.1.1.1 numaralı kısımda verilmiştir.

4.2. Interval Graflar İçin Ağırlıklı Zedelenebilirlik Parametrelerinin Algoritmaları

Interval graf algoritmalarının ortak olarak kullandığı asgari strateji algoritması Algoritma 3.3.1'de verilmiştir. Bu kısımda, ağırlıklı komşu izole mukavemet ve ağırlıklı komşu izole kopma derecesi parametrelerinin interval graflar için oluşturulmuş olan algoritmaları verilmiştir.

4.2.1. Interval Grafların Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemet Algoritması

G interval grafının komşu izole mukavemetinin bulunması problemini, subversion stratejisi X'i bulmaya indirgeyecek şekilde;

1. X, Algoritma 3.3.1 tarafından üretilen asgari stratejilerin birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $\frac{w(X)+c_w(G/X)}{i_w(G/X)}$, 1. maddenin sağladığı şekilde G'nin tüm subversion stratejileri arasında en azıdır.

Oluşturulan asgari stratejiler Algoritma 3.3.1'den oluşturulan sırayla $C(\alpha_1),\dots,C(\alpha_k)$ olsun. α_i 'lerin azalmayan sırayla sıralandığı unutulmamalıdır. $comp(i,j)=\{v_p | a_p>\alpha_i, b_p<\alpha_j\}$ tanımı şu şekildedir; bazı i,j sayıları için $comp(i,j)$ şeklinde tanımlanabilen $C(\alpha_1),\dots,C(\alpha_k)$'lerin bazılarının birleşimi bir subversion stratejisi tarafından oluşturulan herhangi bir bağlantılı bileşen olarak tanımlanabilir. Yani $comp(i,j)$, G interval grafının bir parçasıdır ve interval grafların yapısı gereği $G[comp(i,j)]$ de bir interval graftır. Ayrıca bütün i,j,k değerleri için $C(\alpha_i)-C(\alpha_{i+k})=C(\alpha_i)-(C(\alpha_{i+k})\cup C(\alpha_{i+j+k}))$ olacaktır. Diğer yandan, buna benzer olarak belirlenmiş olan interval'da bulunan izole tepeleri ifade etmek için $isol(i,j)=\{v_p | a_p>\alpha_i, b_p<\alpha_j, \deg(v_p)=0\}$ kullanılır.

Ağırlıklı komşu izole mukavemet problemini çözebilmek için öncelikle aşağıdaki problemi çözmemiz gerekmektedir.

Tanım 4.2.1.1. Kısıtlı Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemet; verilen *G* interval grafı, Algoritma 3.3.1 tarafından oluşturulan asgari stratejiler $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_k)$, ağırlık fonksiyonu $w: V \rightarrow R \geq 0$ ve $\alpha_i \in R \geq 0: i = 1, \ldots, k$. *G*'nin bir subversion stratejisi *X*'i bulmak şu şekildedir;

1. X, $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_k)$'nin bazılarının birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $c_w(G/X) \leq K$
3. $1 \leq i(G/X)$
4. 1, 2 ve 3'ü sağlayan herhangi bir *X'* için $w(X) \leq w(X')$

İki asgari stratejinin $C(\alpha_i)$ ve $C(\alpha_j)$ olduğunu düşünelim. Bağlantılı bir grafta bütün intervaller α_i'den önce başlıyor ve α_j'den önce bitiyor olsun. Bu bağlantılı grafın toplam ağırlığı *K* değerini aşarsa $C(\alpha_{i+1}), \ldots, C(\alpha_{j-1})$'lerin en az biri *X* subversion stratejisinin alt kümesi olmalıdır. $A_{i,j} = \{C(\alpha_{i+1}), \ldots, C(\alpha_{j-1})\}$ olsun. Eğer $A_{i,j} \subseteq A_{i\prime,j\prime}$ ise $A_{i,j}$'nin elemanlarından herhangi bir asgari strateji $A_{i\prime,j\prime}$'ne de aittir. Böylece, başka herhangi bir kümenin alt kümesi olmayan $A_{i,j}$'ye ihtiyacımız olduğunu düşünmeliyiz. Açık bir ifadeyle, zaman karmaşıklığı yalnızca $O(n)$ olan $A_{i,j}$'ler vardır. Ayrıca, en fazla bir $A_{i,j}$ $C(\alpha_i)$ ile başlar, bu yüzden $A_{i,j}$'yi tanımlamaya ihtiyacımız yoktur. $A_{i,j}$'yi A_i ile ifade etmekteyiz.

Açıkça ifade etmek gerekirse, *X* achieving subversion stratejisi şu şekildedir; her A_i'deki en az bir asgari strateji *X*'in alt kümelerinden biri olmalı ve *X*'in eleman sayısı en az olmalıdır. Problem şu şekilde tanımlanır; verilen *V* tepe kümesi, *V*'nin alt kümeleri $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_r)$, $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_r)$ kümelerinin sınıfları $A_1, \ldots, A_k$, *A*'nın en az eleman sayısına sahip olan kümeye ait olan ve $A \cap A_i \neq \emptyset$ olan $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_r)$ kümelerinin bir *A* sınıfı bulunur. Bu problemin çözümü için geliştirilmiş ve zaman karmaşıklığı $O(n^3)$ olan NGWHSP algoritması [17] Algoritma 4.2.1.1'de kullanılmıştır. Aşağıda verilen Algoritma 4.2.1.1 kısıtlı ağırlıklı komşu izole mukavemetin çözümü için geliştirilmiştir.

Algoritma 4.2.1.1. Kısıtlı Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemet (rNITw) Algoritması

Girdi: *G* interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ stratejileri. *K*=0 ilk eşik değeri. *w* ağırlık fonksiyonu.

Çıktı: $C \subseteq V(G)$, kısıtlı ağırlıklı komşu izole mukavemet probleminin çözümü

Başla

$\alpha_0 = -\infty$ $\quad$ $\alpha_{k+1} = \infty$

$C(\alpha_0) = 0$ $\quad$ $C(\alpha_{k+1}) = 0$

$p = 0$

for $i = 1$'den k'ye

  for $j = i$'den k'ye

    for $p' = i$'den j'ye

      if $C(\alpha_{p'}) \subseteq C(\alpha_{i-1}) \cup C(\alpha_{j+1})$

        break

      end if

    end for

    if ($w(comp(i-1, j+1)) > K$) ve (($|isol(i-1, j+1)| \geq 1$)

      $p = p + 1$

      $A_p = \{C(\alpha_i), \dots, C(\alpha_j)\}$

      break

    end if

  end for

end for

return NGWHSP($C_1, \dots, C_k$, $A_1, \dots, A_p$, w)

son

Teorem 4.2.1.1. Algoritma 4.2.1.1'in zaman karmaşıklık değeri $O(n^4 \log n)$'dir.

İspat 4.2.1.1. Algoritma 4.2.1.1'in ilk for döngüsünden önce yapılan atamalar $O(1)$ zamanında hesaplanabilir. En içte bulunan 3. döngünün maliyeti $O(n^4 \log n)$'dir. 2. döngü içinde bulunan if sorgusunun toplam maliyeti $O(n^3)$'tür. Algoritma çıktısını üreten NGWHSP de $O(n^3)$ zamanında hesaplama yapmaktadır. Böylece Algoritma 4.2.1.1'in zaman karmaşıklığı $O(n^4 \log n)$ olarak ispatlanmış olur.

Ağırlıklı komşu izole mukavemetin bulunması için olası tüm $comp(i,j)$'ler, olası bir achieving bileşeni olarak kabul edilir. Daha sonra, kısıtlı ağırlıklı komşu izole mukavemet algoritması, belirli $comp(i,j)$ ağırlığı en fazla bileşen olacak şekilde minimum bir subversion stratejisini bulmak için kullanılır.

Algoritma 4.2.1.2. Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemet (NITw) Algoritması

Girdi: G interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_k)$ asgari stratejileri.

Çıktı: Ağırlıklı Komşu İzole Mukavemet

Başla

A_strateji $= C_1 \cup \ldots \cup C_k$

max_c $= c_w(G/\text{A\_strateji})$

izole_v $= i_w(G/\text{A\_strateji})$

NITw $= \frac{w(\text{A\_strateji}) + \text{max\_c}}{\text{izole\_v}}$

$\alpha_0 = -\infty \qquad \alpha_{k+1} = \infty$

$C(\alpha_0) = \emptyset \qquad C(\alpha_{k+1}) = \emptyset$

for $i = 0$'den k'ye

for $j = i + 1$'den $k + 1$'e

for $p = i + 1$'den $j - 1$'e

if $C(\alpha_p) \subseteq C(\alpha_i) \cup C(\alpha_j)$

break

end if

end for

if $w(comp(i-1, j+1)) >$ max_c

temp_A_starteji $= C_i \cup C_j \cup$

$(\text{rNITw}(G[-\infty, \alpha_i], (C(\alpha_1)/C(\alpha_i), \ldots, C(\alpha_{i-1})/C(\alpha_i)), w(comp(i,j))\ )) \cup$

$(\text{rNITw}(G\lfloor \alpha_j, \infty \rfloor, (C(\alpha_{j+1})/C(\alpha_j), \ldots, C(\alpha_k)/C(\alpha_j)), w(comp(i,j))))$

if $\frac{w(\text{temp\_A\_starteji}) + w(comp(i-1,j+1))}{w(isol(i-1,j+1))} <$ NITw

A_strateji = temp_A_starteji

NITw $= \frac{w(\text{temp\_A\_starteji}) + w(comp(i-1,j+1))}{w(isol(i-1,j+1))}$

end if

end if

end for

end for

son

Teorem 4.2.1.2. Algoritma 4.2.1.2 komşu izole mukavemet hesaplamasını $O(n^6 \log n)$ zaman karmaşıklığında sonuçlandırmaktadır.

İspat 4.2.1.2. Algoritma 4.2.1.2'in ilk for döngüsünden önce yapılan atamalar $O(1)$ zamanında hesaplanabilir. En içte bulunan 3. döngünün maliyeti $O(n^4 \log n)$'dir. 2. döngü içinde bulunan if sorgusunun toplam maliyeti $O(n^6 \log n)$ 'dir. Böylece Algoritma 4.2.1.2'in zaman karmaşıklığı $O(n^6 \log n)$ olarak ispatlanmış olur.

4.2.2. Interval Grafların Ağırlıklı Komşu İzole Kopma Derecesi Algoritması

Daha önceki interval grafların ağırlıklı komşu izole mukavemet algoritması kısmında verilen bazı tanımlar ve kurallar interval grafların ağırlıklı komşu izole kopma derecesi algoritması için de geçerli olacaktır.

G interval grafının ağırlıklı komşu izole kopma derecesinin bulunması problemini, subversion stratejisi *X*'i bulmaya indirgeyecek şekilde;

1. X, Algoritma 3.3.1 tarafından üretilen asgari stratejilerin birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $i_w(G/X) - w(X) - c_w(G/X)$, 1. maddenin sağladığı şekilde *G*'nin tüm subversion stratejileri arasında en fazlasıdır.

Komşu izole kopma derecesi problemini çözebilmek için öncelikle aşağıdaki problemi çözmemiz gerekmektedir.

Tanım 4.2.2.1. Kısıtlı Komşu İzole Kopma Derecesi; verilen *G* interval grafı, Algoritma 3.3.1 tarafından oluşturulan asgari stratejiler $C(\alpha_1), \ldots, C(\alpha_k)$, ağırlık fpnksiyonu $w: V \to R \geq 0$ ve $\alpha_i \in R \geq 0: i = 1, \ldots, k$. *G*'nin bir subversion stratejisi *X*'i bulmak şu şekildedir;

1. X, $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$'nin bazılarının birleşimi olarak ifade edilebilir
2. $c_w(G/X) \leq K$
3. $1 \leq i(G/X)$
4. 1, 2 ve 3'ü sağlayan herhangi bir X' için $w(X) \leq w(X')$

Aşağıda verilen Algoritma 4.2.2.1, Algoritma 4.2.1.1 ile benzer şekilde kısıtlı ağırlıklı komşu izole kopma derecesinin çözümü için geliştirilmiştir.

Algoritma 4.2.2.1. Kısıtlı Ağırlıklı Komşu İzole Kopma Derecesi (rNIRw) Algoritması

Girdi: *G* interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ stratejileri. *K*=0 ilk eşik değeri. *w* ağırlık fonksiyonu.

Çıktı: $C \subseteq V(G)$, kısıtlı ağırlıklı komşu izole kopma derecesi probleminin çözümü

Başla

$\alpha_0 = -\infty$ $\alpha_{k+1} = \infty$

$C(\alpha_0) = 0$ $C(\alpha_{k+1}) = 0$

$p = 0$

for $i = 1$'den k'ye

for $j = i$'den k'ye

for $p' = i$'den j'ye

if $C\left(\alpha_{p'}\right) \subseteq C(\alpha_{i-1}) \cup C\left(\alpha_{j+1}\right)$

break

end if

end for

if ($w(comp(i-1, j+1)) > K$) ve (($|isol(i-1, j+1)| \geq 1$)

$p = p + 1$

$A_p = \{C(\alpha_i), \dots, C\left(\alpha_j\right)\}$

break

end if

end for

end for

return NGWHSP($C_1, \dots, C_k, A_1, \dots, A_p, w$)

son

Teorem 4.2.2.1. Algoritma 4.2.2.1'in zaman karmaşıklık değeri $O(n^4 \log n)$'dir.

İspat 4.2.2.1. Teorem 4.2.1.1'in ispatı ile benzerdir.

Ağırlıklı komşu izole kopma derecesinin bulunması için olası tüm $comp(i,j)$'ler, olası bir achieving bileşeni olarak kabul edilir. Daha sonra, kısıtlı ağırlıklı komşu izole kopma derecesi algoritması, belirli $comp(i,j)$ ağırlığı en fazla bileşen olacak şekilde minimum bir subversion stratejisini bulmak için kullanılır.

Algoritma 4.2.2.2. Ağırlıklı Komşu İzole Kopma Derecesi (NIRw) Algoritması
Girdi: *G* interval grafı. Algoritma 3.3.1'in oluşturduğu $C(\alpha_1), \dots, C(\alpha_k)$ asgari stratejileri.
Çıktı: Ağırlıklı Komşu İzole Kopma Derecesi
Başla

A_strateji $= C_1 \cup \dots \cup C_k$
max_c $= c_w(G/$A_strateji$)$
izole_v $= i_w(G/$A_strateji$)$
NIR = izole_v $- w($A_strateji$) -$ max_c
$\alpha_0 = -\infty \qquad \alpha_{k+1} = \infty$
$C(\alpha_0) = \emptyset \qquad C(\alpha_{k+1}) = \emptyset$
for $i = 0$'den k'ye
for $j = i + 1$'den $k + 1$'e
for $p = i + 1$'den $j - 1$'e
if $C(\alpha_p) \subseteq C(\alpha_i) \cup C(\alpha_j)$
break
end if
end for
if $w(comp(i-1, j+1)) >$ max_c
temp_A_starteji $= C_i \cup C_j \cup$
(rNIRw$(G[-\infty, \alpha_i], (C(\alpha_1)/C(\alpha_i), \dots, C(\alpha_{i-1})/C(\alpha_i)), w(comp(i,j))$)) $\cup$
(rNIRw$\left(G\left[\alpha_j, \infty\right], (C(\alpha_{j+1})/C(\alpha_j), \dots, C(\alpha_k)/C(\alpha_j)), w(comp(i,j))\right)$)

if $(w(isol(i-1,j+1)) - w(\text{temp\_A\_starteji}) - w(comp(i-1,j+1))) > \text{NIRw}$

$\text{A\_strateji} = \text{temp\_A\_starteji}$

$\text{NIRw} = w(isol(i-1,j+1)) - w(\text{temp\_A\_starteji}) - w(comp(i-1,j+1))$

end if

end if

end for

end for

son

Teorem 4.2.2.2. Algoritma 4.2.2.2 ağırlıklı komşu izole kopma derecesi hesaplamasını $O(n^6 \log n)$ zaman karmaşıklığında sonuçlandırmaktadır.

İspat 4.2.2.2. Teorem 4.2.1.2'in ispatıyla benzerdir.

5. SONUÇ

Bu tezin amacı; komşu izole mukavemet karşısında daha güçlü olabilen bir zedelenebilirlik ölçüm parametresi olarak komşu izole kopma derecesinin tanımlanması, bu iki parametrenin ağırlıklı graflar için zedelenebilirlik ölçümü tanımlarının verilmesi ve bu ortaya çıkan dört zedelenebilirlik ölçüm parametrelerinin interval graflar için birer polinom zaman algoritması oluşturulmasıdır. Algoritmaların gerçek hayattaki ağlarda güvenlik açığının ölçülmesi için nasıl kullanılabileceği ve verilen bu zedelenebilirlik parametrelerinin nasıl yararlı olabileceği belirtilmiştir.

Ağların tasarımında güvenilirlik ve verimlilik önemli kriterlerdir. Bir ağ tasarlamak istendiğinde, mümkün olduğunca kararlı olması beklenir. Graflarla modellenmiş ağlardan aynı düzene ve boyuta sahip graflar arasında en kararlı olanı seçmek için komşu izole mukavemet kullanılması önerilir fakat bazı durumlarda ve büyük boyutlu graflarda komşu izole kopma derecesinin ayırt edici olacağı yazıda gösterilmiştir.

Sistem yöneticileri her sistemin güvenilirliği hakkında fikir sahibi olabilirler fakat net bir ölçümle hataların belirtilmesini göz ardı edebilirler. Bununla birlikte, zedelenebilirlik üzerine yapılan klasik araştırmaların çoğu birbirinden ayrı tepelerin başarısızlık olasılıklarına dayanmaktadır. Ancak, bu alanda çok daha fazla çalışma yapılması gerekmektedir. Ayrıca yaygın olarak bilinen ağ topolojilerinin zedelenebilirlik ölçümleri NP-tam sınıfındadır. Buna rağmen bazı yaygın ağ topolojileri için durum böyle değildir. Bu nedenle, yaklaşım algoritmasını bulmak önemlidir. Böylece bu özel graf sınıfları için polinom zaman algoritmaları geliştirmek mümkün olabilir.

Bu araştırma konuları graf teorisinde interval graflar için yapılabilir. Bölüm 2'de açıklamaları verilen ve Bölüm 3'te ağırlıksız graflar için, Bölüm 4'te ağırlıklı graflar için olacak şekilde komşu izole mukavemet ve komşu izole kopma derecesi tanımlarına göre interval graflarda bu parametrelerin polinom zamanda çözülebileceği algoritmaları ile birlikte gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Bondy, J.A., Murty, U.S.R. Graph Theory with Applications. Elsevier Science Publishing, New York, USA, 1976, 264 s. doi:10.1007/978-1-349-03521-2.

[2] Cozzens, M.B., Moazzami, D., Stueckle, S. The tenacity of the Harary Graphs. J. Combin. Math. Combin. Comput. 1994, 16, 33–56.

[3] Moazzami, D. Tenacity of a graph with maximum connectivity. Discrete Applied Mathematics. 2011, 159(5), 367–380. doi:10.1016/j.dam.2010.11.008.

[4] Zhang, S., Wang, Z. Scattering number in graphs. Networks. 2001, 37(2), 102–106. doi:10.1002/1097-0037(200103)37:2<102::aid-net5>3.3.co;2-j.

[5] Li, Y., Zhang, S., Li, X. Rupture degree of graphs. International Journal of Computer Mathematics. 2005, 82(7), 793–803. doi:10.1080/00207160412331336062.

[6] Gunther, G., Hartnell, B.L. Optimal K-secure graphs. Topics in Catalysis. 1980, 2(3), 225–231. doi:10.1016/0166-218X(80)90042-6.

[7] Wu, S.S.Y., Cozzens, M.B. The minimum size of critically m-neighbour-connected graphs. Ars Combinatoria. 1990, 29, 149–160.

[8] Wei, Z., Mai, A., Zhai, M. Vertex-neighbor-scattering number of graphs. Ars Combinatoria. 2011, 102, 417–426.

[9] Gunther, G. Neighbour-connectivity in regular graphs. Discrete Applied Mathematics. 1985, 11(3), 233–243. doi:10.1016/0166-218X(85)90075-7.

[10] Bacak-Turan, G., Kirlangic, A. Neighbor rupture degree and the relations between other parameters. Ars Combinatoria. 2011, 102, 333–352.

[11] Zhao, X., Zhang, Z., Ren, Q. Edge neighbor connectivity of Cartesian product graph G× K 2. Applied Mathematics and Computation. 2011, 217(12), 5508–5511. doi:10.1016/j.amc.2010.12.022.

[12] Aslan, E. Edge-neighbor-rupture degree of graphs. Journal of Applied Mathematics. 2013, 2013, Makale No: 783610, 5 s. doi:10.1155/2013/783610.

[13] Wei, Z., Li, Y., Zhang, J. Edge-neighbor-scattering number of graphs. Ars Combinatoria. 2007, 85, 271–277.

[14] Aslan, E. Neighbour isolated scattering number of graphs. ScienceAsia. 2015, 41, 423–431. doi:10.2306/scienceasia1513-1874.2015.41.423.

[15] Aslan, E. Neighbor Isolated Tenacity of Graphs. RAIRO - Theoretical Informatics and Applications. 2016, 49, 269–284. doi:10.1051/ita/2016001.

[16] Harary, F. Graph Theory. Adison-Wesley, Reading, MA, 1969, 274 s.

[17] Ray, S., Zhang, D., Kannan, R., Jiang, H. The weighted integrity problem is polynomial for interval graphs. Ars Combinatoria. 2006, 79, 77–95.

[18] Clark, L.H., Entringer, R.C., Fellows, M.R. Computational complexity of integrity. J. Combin. Math. Combin. Comput. 1987, 2, 179–191.

[19] Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddard, W.D., Lipman, M.J., Pippert, R.E. A survey of integrity. Discrete Applied Mathematics. 1992, 37/38, 13–28. doi:10.1016/0166-218X(92)90122-Q.

[20] Gilmore, P.C., Hoffman, A.J. A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs. Canadian Journal of Mathematics. 1964, 16, 539–548. doi:10.4153/cjm-1964-055-5.

[21] Zhang, S., Li, X., Han, X. Computing the scattering number of graphs. International Journal of Computer Mathematics. 2002, 79, 179–187. doi:10.1080/00207160211919.

[22] Kratsch, D., Kloks, T., Müller, H. Computing the toughness and the scattering number for interval and other graphs. Research Report, INRIA, France, 1994, 00074433 s.

[23] Chartrand, G., Lesniak, L. Graphs and Digraphs. Chapman and Hall, California, USA, 1996, 421 s.

[24] Piazza, B.L., Robertst, F.S., Stueckle, S.K. Edge-tenacious networks. Networks. 1995, 25(1), 7–17. doi:10.1002/net.3230250103.

[25] Aslan, E. A Measure of Graphs Vulnerability: Edge Scattering Number. Bulletin of International Mathematical Virtual Institute. 2014, 4, 53–60. doi:11.7251/BIMVI1401053A.

[26] Brandstädt, A., Le, V.B., Spinrad, J.P. Graph Classes: A Survey. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1999, 304 s. doi:10.1137/1.9780898719796.

[27] Golumbic, M.C. Algorithmic graph theory and perfect graphs. Academic Press, New York, 1980, 274 s.

[28] Broersma, H., Fiala, J., Golovach, P.A., Kaiser, T., Paulusma, D., Proskurowski, A. Linear-Time Algorithms for Scattering Number and Hamilton-Connectivity of Interval Graphs. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, 127–138 s. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-642-45043-3_12.

[29] Li, F., Li, X. The neighbour-scattering number can be computed in polynomial time for interval graphs. Computers and Mathematics with Applications. 2007, 54, 679–686. doi:10.1016/j.camwa.2007.02.006.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Aykut TOSUN

Doğum Yeri ve Yılı : Aksaray, 1994

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mehmetaykuttosun@ogr.cbu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Hazım Kulak Anadolu Lisesi, 2012

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 2018

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı, 2021

Yayınları

Ersin Aslan, Mehmet Aykut Tosun. Computing the weighted neighbor isolated tenacity of interval graphs in polynomial time. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*. 2020; 1– 10. https://doi.org/10.1002/num.22736