T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

ÖZ DEVİRLİ MODÜLLERİ İNJEKTİFLERİN GÖRÜNTÜSÜ OLAN HALKALAR

Elif Tuğçe MERİÇ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU

II. Danışman
Prof. Dr. Noyan Fevzi ER

MANİSA-2019

TEZ ONAYI

Elif Tuğçe MERİÇ tarafından hazırlanan **"Öz Devirli Modülleri İnjektiflerin Görüntüsü Olan Halkalar"** adlı tez çalışması 12.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
II. Danışman	**Prof. Dr. Noyan Fevzi ER** Dokuz Eylül Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mustafa KAZAZ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Engin MERMUT** Dokuz Eylül Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Salahattin ÖZDEMİR** Dokuz Eylül Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Cihangir ALACA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

10.05.2019
Elif Tuğçe MERİÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{R}$	Birimli halka
$\boldsymbol{M_n(R)}$	R halkası üzerindeki $n \times n$ matris halkası
QF	Quasi-Frobenius
$\boldsymbol{Card(\Lambda)}$	Λ sınıfının kardinalitesi
$\boldsymbol{Hom_R(M,N)}$	M'den N'ye tüm R-modül homomorfizmlerinin kümesi
$\boldsymbol{Hom_R(\_,M)}$	M modülü ile belirlenen kontravaryant Hom funktoru
$\boldsymbol{Mod\text{-}R}$	Sağ R-modüller kategorisi
$\boldsymbol{mod\text{-}R}$	Sonlu üretilmiş sağ R-modüllerin dolu alt kategorisi
$\boldsymbol{R\text{-}Mod}$	Sol R-modüller kategorisi
$\boldsymbol{R\text{-}mod}$	Sonlu üretilmiş sol R-modüllerin dolu alt kategorisi
$\boldsymbol{E(M)}$	M sağ R-modülünün injektif bürümü
$\boldsymbol{l_R(M) = l(M)}$	M sağ (sol) R-modülünün uzunluğu
$\boldsymbol{J(R) = J}$	R halkasının Jacobson radikali
$\mathbf{Rad}(\boldsymbol{M})$	M sağ R-modülünün radikali
$\mathbf{Soc}(\boldsymbol{M})$	M sağ R-modülünün socle'ı
$\mathbf{Soc}(\boldsymbol{R_R})$	R halkasının sağ socle'ı
$\mathbf{Soc}(\boldsymbol{_RR})$	R halkasının sol socle'ı
$\boldsymbol{Z(M)}$	M sağ R-modülünün tekil alt modülü
$\boldsymbol{Z_2(M)}$	M sağ R-modülünün ikinci tekil alt modülü
$\boldsymbol{Z(R_R)}$	R halkasının sağ tekil ideali
$\boldsymbol{Z(_RR)}$	R halkasının sol tekil ideali
$\boldsymbol{u.dim(M)}$	M modülünün uniform boyutu
$\boldsymbol{u.dim(R_R)}$	R halkasının sağ uniform boyutu

$\boldsymbol{r.ann(a)}$	a elemanının sağ sıfırlayanı
$\boldsymbol{r.ann_U(a)}$	a elemanının U idealindeki sağ sıfırlayanı
$\boldsymbol{S^{-1}R}$	R halkasının kesirler cismi
$\boldsymbol{RX^{-1}}$	R halkasının klasik sağ kesir halkası
$\boldsymbol{id}$	Birim homomorfizma
$\boldsymbol{f\vert_N}$	f homomorfizmasının N alt modülüne kısıtlanışı
$\boldsymbol{ker(f)}$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\boldsymbol{im(f)}$	f homomorfizmasının görüntüsü
$\hookrightarrow$	Gömme
$\oplus$	Dik toplam
$\prod$	Dik çarpım
$\times$	Halka çarpımı
$\cong$	İzomorfizma
$\leq$	Alt modül
$\lneq$	Özalt modül
$\leq_d$	Dik toplanan
$\leq_c$	Kapalı alt modül
$\leq_e$	Büyük alt modül
$\ll$	Küçük alt modül

TEŞEKKÜR

Bu çalısma boyunca değerli görüşlerinden ve birikiminden faydalandığım, her türlü desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Tez projesinin olgunlaşmasında ve neticelenmesinde değerli görüslerini ve her konuda desteğini esirgemeyen ikinci danışmanım Sayın Prof. Dr. Noyan Fevzi ER'e teşekkürlerimi sunarım.

Yapmış oldukları kıymetli önerileri ile çalışmalarıma katkı sağlayan değerli hocamlarım Sayın Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a, Sayın Doç. Dr. Engin MERMUT'a ve isimlerini buraya yazamadığım tüm ekip arkadaşlarıma yürekten teşekkür ederim. En başından beri her şartta desteğini esirgemeyen, başta sevgili eşim Onur MERİÇ olmak üzere tüm aileme, göstermiş oldukları anlayıştan ve verdikleri eşsiz manevi destekten dolayı minnettarlıklarımı sunarım.

Doktora eğitimim boyunca tarafıma verdiği maddi destek nedeniyle TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Elif Tuğçe MERİÇ
Manisa, 2019

ÖZET

Doktora Tezi

Öz Devirli Modülleri İnjektiflerin Görüntüsü Olan Halkalar

Elif Tuğçe MERİÇ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU

II. Danışman: Prof. Dr. Noyan Fevzi ER

Bu tezde, üzerindeki belirli devirli modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olan halkaların yapısı çalışılmıştır. Motivasyon sağlayan alt yapı ve bazı ön bilgiler sunulduktan sonra, projektif olmayan her devirli modülün bir injektif modülün görüntüsü olduğu durum ele alınmıştır. Ardından odak noktası, öz devirli modüllerin söz konusu özelliği sağladığı yakın bir özel duruma daraltılmıştır. Her iki halka sınıfı için bazı yapı teoremleri elde edilmiş ve bunlar Artin cebir durumuna uygulanmıştır. Bu koşullardan herhangi birini sağlayan bir Artin cebirinin Quasi-Frobenius halka yani bir sağ self-injektif sağ Artin halka olduğu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İnjektif modül, homomorfik görüntü, self-injektif halka, Quasi-Frobenius halka, Artin cebir.

2019, 48 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Rings Whose Proper Cyclic Modules Are Images of Injectives

Elif Tuğçe MERİÇ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ayşe Tuğba GÜROĞLU

Co-Supervisor: Prof. Dr. Noyan Fevzi ER

In this thesis, we study the structure of rings over which certain cyclic modules are homomorphic image of injective modules. After presenting the motivational background and some preliminaries, we consider the case when every nonprojective cyclic is the image of an injective module. Then we narrow our focus to the closed specific case where proper cyclic modules satisfy the said property. We obtain some structure theorems about both classes of rings and apply them to the Artin algebra case. It turns out that an Artin algebra satisfying any of these conditions is Quasi-Frobenius, that is, a right self-injective right Artinian ring.

Keywords: Injective module, homomorphic image, self-injective ring, Quasi-Frobenius ring, Artin algebra.

2019, 48 pages

1. GİRİŞ

İnjektiflik ilk olarak 1940 yılında Baer [1] tarafından tanımlanmıştır. Halka, modül ve temsil teorisi gibi köklü alanlarda kullanılan kuvvetli bir kavramdır. Özellikle homoloji cebirin ortaya çıkması ile birlikte injektifliğin kendi başına önemi artmıştır.

Bazı halka sınıflarının karakterizasyonu injektiflik yardımı ile yapılabilmektedir. 1958'de Matlis [2] ve 1959'da Papp [3] tarafından R halkasının sağ Noether (sağ idealler üzerinde artan zincir) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şartın injektif sağ modüllerin ayrıştırılamaz modüllere dağılabilmesi olduğu gösterilmiştir. 1959 yılında Papp [3] ve 1962'de Bass [4] tarafından, injektif sağ modüllerin keyfi dik toplamlarının da injektif olmasının R halkasının sağ Noether olmasına denk olduğunu göstermiştir. R halkasının yarı basit (Wedderburn) halka olmasını, her sağ (sol) modülünün injektif (ya da projektif) olması karakterize eder. Yarı basit halkaların bu karakterizasyonunun ardından sadece devirli modüllerin injektif olmasının halkanın yarı basit olması için gerek ve yeter şart olduğu Osofsky [5] tarafından 1964 yılında verilmiştir. Bu çeşit sonuçların ardından injektiflik ile karakterize edilen çeşitli halka sınıfları ortaya çıkmıştır. Örneğin yarı basit sağ modülleri injektif olan sağ SSI-halkalar, basit sağ modülleri injektif olan sağ V-halkalar, tekil sağ modülleri injektif olan sağ SI-halkalar v.b..

Öte yandan son yarım yüzyılda, devirli modülleri bazı sonluluk koşullarını ya da belirli bir homolojik özelliği sağlayan halkaların yapısını inceleyen araştırmalar yapılmıştır. Osofsky, Faith, Boyle, Goodearl, Goel, Jain, Singh, Huynh, Dung, López-Permouth ve Koehler'in [5–13] aralarında bulunduğu birçok yazar bu perspektif ile çok sayıda çalışma yapmıştır. Bu çalışmaların içinde injektiflik kavramı da yer almaktadır. Öz devirli sağ modülleri injektif olan sağ PCI-halkalar bu doğrultuda yapılan çalışmalar sonucunda literatüre giren bir halka sınıfıdır.

Bu tarz çalışmaların yanısıra son yıllarda injektifliği tersten düşünen kavramlar ortaya çıkmıştır. Altinjektiflik (subinjectivity) kavramı 2011 yılında Aydoğdu ve ark. [14] tarafından tanımlanmış ve bu kavram bir modülün başka bir modüle göre injektifliği anlamına gelen bağıl injektiflik (relative injectivity) gibi kullanışlı hale gelmiştir. Tabii ki bu yeni kavram yeni soruların da ortaya çıkmasına neden olmuştur. Tüm modüller injektif modüllere göre altinjektiftir ve injektif modüllere göre altinjektif olan modüllere yoksul (indigent) modül denir. Bazı halka sınıfları için yoksul (indigent) modüllerin varlığı bilinmesine rağmen keyfi bir halka için var olup olmadıkları hala açık bir problemdir. Diğer yandan altinjektiflik sayesinde, bilinen halka sınıflarına yeni yaklaşımlar elde edilmiştir. Örneğin, Trlifaj [15] 1996 yılında projektif olmayan modülleri injektiflik için bir test modül olan tümden doygun (fully saturated) halkaları tanımlamıştır. Bunun üzerine Alizade ve ark. [16] tarafından 2014'te yayınlanan bir çalışmada yarı basit Artin olmayan bir QF-halkanın tümden doygun olmasının tüm sağ modüllerin injektif ya da yoksul olmasına denk olduğu gösterilmiştir.

Herhangi bir modül daima bir injektif modül içine gömülebilir. Fakat modüller her zaman bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olarak yazılamayabilir. Bir modülün bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olması, o modülün tüm projektif modüllere göre altinjektif olmasına denktir. Bilinen bazı halka sınıfları bu özellikle karakterize edilebilmektedir. Örneğin, devirli sağ modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olarak yazılabilen halkalar tam olarak sağ self-injektif halkalar iken tüm sağ modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olan halkalar QF-halkalardır. Bu çalışmada ilk olarak projektif olmayan devirli sağ modülleri bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olan halkalar incelenmiştir. Koşulu sağlayan halkaların sınıfı sağ self-injektif halkalar sınıfını bir öz alt sınıf olarak kapsamaktadır. Bu halkaların sağ self-injektif olmayanlarına bakıldığında, bunların ya sağ CS olduğu ya da halkanın injektif bürümünün sonlu üretilmiş olduğu görülmüştür. Buradan hareketle elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Ardından, bahsedilen halka sınıfını da içine alan, tüm öz devirli sağ modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olan halkalar ele alınmıştır. Bu tip halkalar aşikar olmayan bir idempotent elemana sahip olduklarında, içlerinde sonsuz tane basit projektif modül barındırmaktadır. Bu durumda, çalışılan halkanın, QF-halkaların bir genelleştirmesi olan sağ $\aleph - QF3$ halkalarla ilişkili oldukları görülmüştür. Öte yandan, çalışılan koşullar sağ Artin halkalar üzerinde incelendiğinde daha net bir tablo elde edilmiştir. Bir sağ Artin halka üzerinde, her öz devirli sağ modül bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olduğunda, bu halka ya bir QF-halkadır ya da içinde en fazla iki tane basit modül barındıran bir yerel halkadır. Bu sonuçtan hareketle, Artin cebirlerde mevcut olan dualite kullanılarak, çalışılan iki koşuldan birini sağlayan Artin cebirlerin QF-halkalardan ibaret olduğu elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez konumuzla ilgili bazı temel tanım ve özellikler verilecektir. Burada, aksi belirtilmedikçe, R değişmeli olmayan, birleşmeli ve birimli bir halkayı gösterecektir ve modüller R halkası üzerindeki sağ modüller olarak alınacaktır.

Tanım 2.0.1. [17] R halkasının $e^2 = e$ eşitliğini sağlayan e elemanına *idempotent eleman* denir. 0 ve 1 elemanları R halkasının *aşikar idempotentleri* olarak adlandırılır. 0 ve 1'den farklı idempotentlere *aşikar olmayan idempotent* adı verilir. $e, f \in R$ herhangi iki idempotent eleman olmak üzere $ef = 0 = fe$ ise e ve f'ye *ortogonal idempotentler (orthogonal idempotents)* denir.

Lemma 2.0.1. ([18], Lemma 3.8) I, R halkasının bir sağ ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

i) $e \in R$ idempotent eleman olmak üzere $I = eR$ olması için gerek ve yeter şart I sağ idealinin R_R'nin bir dik toplananı olmasıdır.
ii) I, R'nin bir minimal sağ ideali ise $I^2 = 0$'dır ya da $I = eR$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent eleman mevcuttur.

Tanım 2.0.2. [19] M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. m elemanının *sağ sıfırlayanı (right annihilator)* $r.ann(m) = \{r \in R \mid mr = 0\}$ ile tanımlanan sağ idealdir.

I, R halkasının bir ideali ve M bir modül olsun. Bir $m \in M$ için m elemanının I idealindeki sıfırlayanı $r.ann_I(m) = \{r \in I \mid mr = 0\}$ şeklinde tanımlanır. Burada, $r.ann_I(m)$, R'nin bir sağ idealidir.

Tanım 2.0.3. [19] M modülünün *sıfırlayanı* $ann(M) = \{r \in R \mid \forall m \in M,\ mr = 0\}$ ile tanımlanan sağ idealdir. Burada, $ann(M) = 0$ ise M'ye *faithful modül* denir.

Tanım 2.0.4. ([20], 9.3) Bir $X \subseteq R$ alt kümesinin sağ sıfırlayanı $r.ann(X) = \{r \in R \mid \forall m \in M,\ xr = 0\}$ olarak tanımlanan sağ idealdir. Benzer şekilde X kümesinin sol sıfırlayanı $l.ann(X) = \{r \in R \mid \forall m \in M,\ rx = 0\}$ ile tanımlanan sol idealdir. Özel olarak, $X = \{x\}$ ise $r.ann(\{x\})$ ve $l.ann(\{x\})$ sağ ve sol ideallerini sırasıyla $r.ann(x)$ ve $l.ann(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.5. [19] $x \in R$ için $r.ann(x) = 0$ ve $l.ann(x) = 0$ ise x elemanına R halkasının bir *regüler (regular) elemanı* adı verilir.

Tanım 2.0.6. ([20], 9.3) I sağ ideali için $I = r.ann(X)$ olacak şekilde bir $X \subseteq R$ varsa I'ya *sağ sıfırlayan* denir. Benzer şekilde bir $X \subseteq R$ için $l.ann(X)$ formundaki sol ideallere de *sol sıfırlayan* adı verilir.

Tanım 2.0.7. [21] M ve N R-modüller olmak üzere $f : M \to N$ ve $g : N \to M$, $f \circ g = id_N$ olacak şekilde iki homomorfizma ise f'ye *parçalanan (split) epimorfizma*, g'ye de *parçalanan (split) monomorfizma* denir.

Lemma 2.0.2. ([18], Lemma 2.1) $f : M \to N$ ve $g : N \to M$, $f \circ g = id_N$ olacak şekilde iki homomorfizma ise $M = ker(f) \oplus im(g)$'dir.

Tanım 2.0.8. ([22], 2A) N ve M herhangi iki modül olsun. Her $f : M \to N$ epimorfizması ve her $g : P \to N$ homomorfizması için $f \circ g' = g$ olacak şekilde bir $g' : P \to M$ homomorfizması varsa P'ye *projektif (projective) modül* denir.

Teorem 2.0.1. ([18], Theorem 2.8) Bir P modülünün projektif olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $f : M \to P$ epimorfizmasının parçalanan olmasıdır.

Önerme 2.0.1. ([22], Proposition 2.5) Δ herhangi bir indis kümesi olmak üzere $P = \oplus_{i\in\Delta} P_i$ modülünün projektif olması için gerek ve yeter şart her bir $i \in \Delta$ için P_i modülünün projektif olmasıdır.

Lemma 2.0.3. ([18], Lemma 2.9) Aşağıdakiler sağlanır:

i) Her modül bir projektif modülün homomorfik görüntüsüdür.
ii) Her sonlu üretilmiş modül sonlu üretilmiş bir projektif modülün homomorfik görüntüsüdür.

Tanım 2.0.9. ([22], Definition 7.45) R halkasının herhangi bir elemanının sağ sıfırlayanı R_R'nin bir dik toplananı ise R'ye *sağ Rickart halka (right Rickart ring)* denir.

Önerme 2.0.2. ([22], Proposition 7.48) R halkasının sağ Rickart halka olması için gerek ve yeter şart R'nin her devirli sağ idealinin projektif olmasıdır.

Tanım 2.0.10. ([23], 1.5) N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin sıfırdan farklı herhangi bir A alt modülü için $A \cap N \neq 0$ ise N'ye M'nin *büyük (essential) alt modülü* denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.11. ([23], 1.5) N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin herhangi bir A alt modülü için $N + A = M$ iken $A = M$ oluyorsa N'ye M'nin *küçük (small) alt modülü* denir ve $N \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.12. [21] M'nin aşikar olmayan alt modülü yoksa M'ye *basit (simple) modül* adı verilir.

Tanım 2.0.13. ([23], 1.6) M'nin tüm basit alt modüllerinin toplamına M'nin *socle'ı* denir ve $\mathrm{Soc}(M)$ ile gösterilir.

$\mathrm{Soc}(M)$, M'nin tamamen invaryant alt modülüdür ve $\mathrm{Soc}(M) = \cap\{N \leq M \mid N \leq_e M\}$ dir.

Önerme 2.0.3. ([21], Proposition 9.8) Herhangi bir $f : M \to N$ modül homomorfizması için $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$'dir.

Sonuç 2.0.1. ([21], Corollary 9.9) M'nin herhangi bir N alt modülü için $\mathrm{Soc}(N) = N \cap \mathrm{Soc}(M)$ dir.

Tanım 2.0.14. ([23], 1.6) M'nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine M'nin *radikali (radical)* denir ve $\mathrm{Rad}(M)$ ile gösterilir.

Önerme 2.0.4. ([21], Proposition 9.13) Herhangi bir M modülü için $\mathrm{Rad}(M) = \Sigma\{N \leq M \mid N \ll M\}$.

Önerme 2.0.5. ([21], Proposition 9.14) Herhangi bir $f : M \to N$ homomorfizması için $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N)$'dir.

Tanım 2.0.15. ([22], Definition 6.16) N, M'nin bir alt modülü olsun. Eğer C, M'nin N ile kesişimi 0 olan alt modülleri arasında maksimal ise C ye N'nin M içindeki *tümleyeni (complement)* denir.

Zorn Lemmasından, bir M modülünün herhangi bir alt modülünün M içinde bir tümleyeninin mevcut olduğu bilinmektedir.

Önerme 2.0.6. ([22], Proposition 6.18) C ve N bir M modülünün $C \cap N = 0$ özelliğini sağlayan iki alt modülü olsun. C'nin N modülünün M içindeki bir tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $((N \oplus C)/C) \leq_e M/C$ olmasıdır.

Tanım 2.0.16. ([23], 1.6) N, M'nin bir alt modülü olmak üzere M'nin herhangi bir A alt modülü için $N \leq_e A$ iken $N = A$ oluyorsa N'ye M'nin *kapalı (closed) alt modülü* denir ve $N \leq_c M$ ile gösterilir.

Önerme 2.0.7. ([22], Proposition 6.32) M'nin bir C alt modülünün kapalı olması için gerek ve yeter şart C, N'nin M içindeki tümleyeni olacak şekilde bir $N \leq M$ mevcut olmasıdır.

Tanım 2.0.17. ([22], 6C) M'nin bir N alt modülü için M modülünün, N'yi büyük alt modül olarak kapsayan alt modüllerinin maksimaline N'nin *büyük kapanışı (essential closure)* denir.

Not 2.0.1. ([22], 6C) Zorn Lemmasından dolayı M'nin bir N alt modülünün her zaman M içinde bir büyük kapanışı mevcuttur ve bu kapanış M'nin bir kapalı alt modülüdür. Ayrıca N'nin M içindeki büyük kapanışı tek olmak zorunda değildir.

Tanım 2.0.18. ([22], 6D) Kapalı alt modülleri dik toplanan olan modüllere *CS modül* denir.

R_R bir CS modül ise R'ye sağ CS halka adı verilir. Sol CS halkalar da benzer şekilde tanımlanır.

Lemma 2.0.4. ([22], Lemma 6.41) Herhangi bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir:

i) M bir CS modüldür;

ii) Her $N \leq M$ için $N \leq_e C$ olacak şekilde bir $C \leq_d M$ mevcuttur.

Tanım 2.0.19. ([22], 3A) Herhangi bir A modülü ve herhangi bir $B \leq A$ için her $f : B \to E$ homomorfizması bir $\tilde{f} : A \to E$ homomorfizmasına genişleyebiliyorsa E modülüne *injektif (injective) modül* denir.

Tanım 2.0.20. ([24], 4.12) R_R injektif ise R halkası *sağ self-injektif (right self-injective)* *halka* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, sol self-injektif halkalar tanımlanır. Hem sağ hem de sol self-injektif halkalara *self-injektif (self-injective) halka* denir.

Bir injektif modülün herhangi bir dik toplananı injektiftir. Ancak injektif modüllerin keyfi sayıda dik toplamlarının injektif olması gerekmez. 3. bölümde yer alan Önerme 3.0.2, sağ modülleri bu özelliği sağlayan halkaların tam olarak sağ Noether halkalar olduğunu söylemektedir.

Önerme 2.0.8. ([25], Proposition 1.6) Δ herhangi bir indis kümesi olmak üzere $M = \Pi_{i\in\Delta} M_i$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart her bir $i \in \Delta$ için M_i'nin injektif olmasıdır.

Tanım 2.0.21. ([22], Definition 3.26) M modülünün bir N alt modülü için M'nin sıfırdan farklı herhangi bir alt modülünün N ile kesişimi sıfırdan farklı ise M'ye N'nin bir *büyük genişlemesi (essential extension)* denir. M, N'nin bir büyük genişlemesi olmak üzere, $M \lneq N$ ve $N \leq_e A$ olacak şekilde bir A modülü mevcut değilse M'ye N'nin *maksimal büyük genişlemesi (maximal essential extension)* adı verilir.

Önerme 2.0.9. [25] Bir E modülü için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

i) E injektiftir;

ii) (***Baer Kriteri***) I, R halkasının herhangi bir sağ ideali olmak üzere her $f : I \to E$ homomorfizması bir $\tilde{f} : R \to E$ homomorfizmasına genişletilebilir;

iii) Her $f : E \to M$ monomorfizması parçalanandır, yani $g \circ f = id_E$ olacak şekilde bir $g : M \to E$ homomorfizması vardır;

iv) E modülü öz büyük genişlemeye sahip değildir.

Tanım 2.0.22. [19] M modülünün büyük genişlemesi olan bir injektif modüle M'nin *injektif bürümü (injective hull)* denir ve $E(M)$ ile gösterilir.

Teorem 2.0.2. ([19], Theorem 5.12) Bir M modülü için aşağıdakiler sağlanır:

i) $E(M)$ vardır ve M modülünü kapsayan her injektif modül, M'nin injektif bürümünü de kapsar.

ii) $M \leq_e K$ olacak şekildeki herhangi bir K modülü için $id : M \to M$ birim homomorfizması bir $K \to E(M)$ genişlemesine sahiptir.

Sonuç 2.0.2. ([22], Corollary 3.32) Bir M modülünün herhangi iki injektif bürümü izomorfiktir. Özel olarak, M'nin E ve E' injektif bürümleri için M üzerindeki birim homomorfizmanın bir genişlemesi olan $g : E \to E'$ izomorfizması mevcuttur.

Tanım 2.0.23. ([22], 3F) Herhangi sıfırdan farklı iki alt modülünün kesişimi sıfırdan farklı olan modüllere *uniform modül* denir.

Teorem 2.0.3. ([22], Theorem 3.52) Herhangi bir injektif modül E için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

i) E ayrıştırılamazdır;
ii) $E \neq 0$ ve sıfırdan farklı her $M \leq E$ için $E = E(M)$'dir;
iii) E uniformdur;
iv) E bir uniform modülün injektif bürümüdür.

Tanım 2.0.24. [25] M ile N, sıfırdan farklı izomorf alt modüllere sahip olmayan iki modül ise M ve N'ye *ortogonal (orthogonal) modüller* denir.

Tanım 2.0.25. [25] Bir M modülü için $M \cong M \oplus M$ ise M'ye *bütünüyle sonsuz (purely infinite) modül* denir. Eğer M hiçbir öz alt modülüne izomorf değil ise M'ye *doğrudan sonlu (directly finite) modül* adı verilir.

Teorem 2.0.4. ([25], Theorem 1.35) E herhangi bir injektif modül olsun. $E = D \oplus P$ olacak şekilde birbiri ile ortogonal olan doğrudan sonlu D ve bütünüyle sonsuz P modülleri vardır.

Tanım 2.0.26. ([22], Definition 6.2) Bir M modülünün, n tane uniform modülün toplamı olarak yazılabilen bir büyük alt modülü varsa M'nin *uniform boyutu (uniform dimension) n'dir* denir ve $u.dim(M) = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n yoksa $u.dim(M) = \infty$ ile ifade edilir.

Önerme 2.0.10. ([22], Proposition 6.12) $u.dim(M) = n$ olması için gerek ve yeter şart $E(M)$ modülünün n tane ayrıştırılamaz injektif modülün dik toplamı olarak yazılmasıdır.

Tanım 2.0.27. ([22], Definition 7.1) Bir $m \in M$ için $r.ann(m)$ R halkasının büyük sağ ideali ise m elemanına M'nin bir *tekil (singular) elemanı* denir. M modülünün tekil elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir.

Lemma 2.0.5. ([22], Lemma 7.2) Herhangi bir M modülü için aşağıdakiler sağlanır:

i) $Z(M)$, M'nin alt modülüdür ve M modülünün tekil alt modülü olarak adlandırılır.

ii) Herhangi bir $f : M \to N$ homomorfizması için $f(Z(M)) \subseteq Z(N)$ olur.

iii) $N \leq M$ ise $Z(N) = N \cap Z(M)$'dir.

Sonuç 2.0.3. ([22], Corollary 7.4) $Z(R_R)$, R halkasının bir idealidir. Bu ideal R'nin *sağ tekil ideali (right singular ideal)* olarak adlandırılır. R'nin sol tekil ideali benzer şekilde $Z({}_RR)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.0.28. ([22], Definition 7.5) $Z(M) = M$ ise M'ye *tekil (singular) modül*, $Z(M) = 0$ ise M'ye *tekil-olmayan (nonsingular) modül* adı verilir. Özel olarak $Z(R_R) = 0$ ise R'ye sağ tekil-olmayan (right nonsingular) halka denir. Sol tekil-olmayan halkalar benzer şekilde tanımlanır. Hem sağ hem sol tekil-olmayan bir halkaya *tekil-olmayan (nonsingular) halka* denir.

Önerme 2.0.11. ([26], Proposition 1.20) Bir M modülünün tekil olması için gerek ve yeter şart bir A modülü ve bir $B \leq_e A$ büyük alt modülü için $M \cong A/B$ olmasıdır.

Önerme 2.0.12. ([26], Proposition 1.22) Herhangi bir R halkası için aşağıdakiler sağlanır:

i) Tekil-olmayan sağ R-modüller sınıfı, alt modüllere, dik çarpımlara, büyük genişlemelere ve modül genişlemelerine göre kapalıdır.

ii) Tekil sağ R-modüller sınıfı, alt modüllere, bölüm modüllerine ve dik toplamlara göre kapalıdır.

Önerme 2.0.13. ([26], Proposition 1.23) R sağ tekil-olmayan bir halka ise herhangi bir sağ R-modül M için $Z(M/Z(M)) = 0$ olur.

Tanım 2.0.29. ([27], 1.1.3) $Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M)$ olacak şekilde M'nin tek türlü belirli $Z_2(M)$ alt modülüne M modülünün *ikinci tekil (second singular) alt modülü* denir.

Önerme 2.0.14. ([22], 7C) $Z_2(M)$, M modülünün kapalı alt modülüdür.

Tanım 2.0.30. [14] $N \leq K$ olacak şekilde her K modülü ve her $f : N \to M$ homomorfizması için $\tilde{f}|_N = f$ olacak şekilde bir $\tilde{f} : K \to M$ homomorfizması varsa

M modülü *N-altinjektiftir (N-subinjective)* denir.

Lemma 2.0.6. [14] M modülünün N-altinjektif olması için gerek ve yeter şart her $f : N \to M$ homomorfizması için $\tilde{f}|_N = f$ olacak şekilde bir $\tilde{f} : E(N) \to M$ homomorfizmasının mevcut olmasıdır.

Önerme 2.0.15. [14] Bir N modülü için aşağıdakiler sağlanır:

i) $\prod_{i\in\Delta} M_i$ modülünün N-altinjektif olması için gerek ve yeter şart her bir $i \in \Delta$ için M_i modülünün N-altinjektif olmasıdır.

ii) $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere her bir M_i modülü N-altinjektif ise $\oplus_{i=1}^{n} M_i$ modülü N-altinjektiftir.

Önerme 2.0.16. [14] P bir projektif modül ise P-altinjektif modüllerin homomorfik görüntüleri de P-altinjektiftir.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde, tez için kullanılan temel tanım ve teoremler verilmeye devam edecektir. R değişmeli olmayan, birleşmeli ve birimli bir halka olmak üzere R_R ve ${}_RR$ sırasıyla kendi üzerinde sağ ve sol modül olarak R'yi temsil etmektedir.

Tanım 3.0.1. [17] C bir küme olmak üzere $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I\}$, C'nin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{C}$ içinde kesin olarak artan bir zincir yoksa, yani $\mathcal{C}$ içindeki her

$$C_{i_1} \subseteq Ci_2 \subseteq \ldots$$

artan zinciri için $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = \ldots$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\mathcal{C}$ ailesi *artan zincir koşulunu (ascending chain condition, ACC) sağlar* denir. Benzer şekilde, $\mathcal{C}$ içinde kesin olarak azalan bir zincir yoksa, yani $\mathcal{C}$ içindeki her

$$C_{i_1} \supseteq Ci_2 \supseteq \ldots$$

azalan zinciri için $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = \ldots$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\mathcal{C}$ ailesi *azalan zincir koşulunu (descending chain condition, DCC) sağlar* denir.

Tanım 3.0.2. [17] M modülünün tüm alt modüllerinin ailesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa M modülüne *Noether (Noetherian) modül* denir.

Önerme 3.0.1. ([19], Proposition 1.1) M modülü için aşağıdakiler birbirine denktir:

i) M Noether modüldür;

ii) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her sınıfı bir maksimal elemana sahiptir;

iii) M'nin tüm alt modülleri sonlu üretilmiştir.

Tanım 3.0.3. [19] R kendi üzerinde sağ modül olarak Noether ise R halkasına *sağ Noether halka (right Noetherian ring)* denir. Benzer şekilde ${}_RR$ Noether modül ise R halkasına *sol Noether halka (left Noetherian ring)* denir. Hem sağ hem de sol Noether bir halka *Noether halka (Noetherian ring)* olarak adlandırılır.

Önerme 3.0.2. ([22], 3E) R halkası için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

i) R sağ Noether halkadır;

ii) İnjektif sağ R-modüllerin herhangi dik toplamı injektiftir;

iii) Herhangi bir injektif sağ R-modül ayrıştırılamaz injektif alt modüllerinin dik toplamıdır.

Tanım 3.0.4. [17] M modülünün tüm alt modüllerinin ailesi azalan zincir koşulunu sağlıyorsa M modülüne *Artin (Artinian) modül* denir.

Önerme 3.0.3. [19] M modülü için aşağıdakiler birbirine denktir:

i) M Artin modüldür;

ii) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her sınıfı bir minimal elemana sahiptir.

Önerme 3.0.4. ([17], 1.20) $N \leq M$ olsun. M modülünün Noether (Artin) olması için gerek ve yeter şart N ve M/N modüllerinin Noether (Artin) olmasıdır.

Tanım 3.0.5. [19] R kendi üzerinde sağ (sol) modül olarak Artin ise R halkasına *sağ (sol) Artin halka* denir. Hem sağ hem de sol Artin bir halkaya *Artin halka* adı verilir.

Teorem 3.0.1. [28] R bir sağ Noether halka ve $E(R_R)$ sonlu üretilmiş sağ R-modül ise R sağ Artindir.

Tanım 3.0.6. [29] R değişmeli bir halka olsun. Bir A halkası için, görüntüsü A'nın merkezinde kapsanan bir $\phi : R \to A$ halka homomorfizması mevcut ise A, *R üzerinde bir cebirdir (algebra)* denir.

Tanım 3.0.7. [29] R değişmeli bir Artin halka ve A, R üzerinde bir cebir olsun. Eğer A sonlu üretilmiş R-modül ise A halkasına R üzerinde bir *Artin cebir (Artin algebra)* denir. Bir Artin cebir hem sağ hem de sol Artin halkadır.

Tanım 3.0.8. ([22], 16C) k bir cisim ve A, k cismi üzerinde sonlu boyutlu bir cebir olsun. Eğer $A_A \cong (Hom_k(A,k))_A$ ise A'ya *Frobenius cebir* denir. Bir Frobenius cebir sağ self-injektiftir.

Tanım 3.0.9. ([20], 3.2) $F : 0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$, bir M modülünün alt modüllerinin bir zinciri olsun. Her $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için M_{i+1}/M_i basit ise F'ye M modülünün bir *kompozisyon serisi (composition series)*, n sayısına da F serisinin *uzunluğu (length)* denir.

Her modül bir kompozisyon serisine sahip olmak zorunda değildir. Örneğin, Noether olmayan herhangi bir M modülü için bir kompozisyon serisi bulunamaz.

Önerme 3.0.5. ([20], Theorem 3.2.1) Kompozisyon serisine sahip olan bir M modülünün herhangi iki kompozisyon serisinin uzunlukları eşittir.

Tanım 3.0.10. ([20], 3.2) M modülü bir kompozisyon serisine sahip ise M'nin kompozisyon serilerinin uzunluğuna M modülünün uzunluğu denir ve $l(M) = l_R(M)$ ile gösterilir.

Önerme 3.0.6. ([20], Proposition 3.2.2) Bir M modülünün kompozisyon serisine sahip olması için gerek ve yeter şart M'nin hem Artin hem de Noether olmasıdır.

Tanım 3.0.11. [17] Bir R halkasının tüm maksimal sağ ideallerinin kesişimine R'nin *Jacobson radikali (Jacobson radical)* denir ve $J(R) = J$ ile gösterilir. J, R halkasının bir idealidir ve aynı zamanda tüm maksimal sol ideallerin kesişimine eşittir.

Tanım 3.0.12. ([30], 1.1) Basit alt modüllerinin dik toplamı olarak yazılabilen modüllere *yarı basit (semisimple) modül* denir.

Teorem 3.0.2. ([30], Theorem 1.2) R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir:

i) R_R yarı basittir;
ii) R sonlu sayıda basit sağ idealinin dik toplamı olarak yazılır;
iii) Her sağ R-modül yarı basittir;
iv) Her sağ R-modül projektiftir;
v) Her sağ R-modül injektiftir;
vi) R sağ Artindir ve $J = 0$'dır;
vii) (Wedderburn-Artin Teoremi) $R \cong \Pi_{i=1}^{t} M_{n_i}(D_i)$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_t$ pozitif tam sayıları ve $D_1, \ldots, D_t$ bölüm halkaları mevcuttur.

Teorem 3.0.2'daki denk koşulları sağlayan bir halkaya *yarı basit Artin halka (semisimple Artin ring)* denir.

Teorem 3.0.3. [5] Bir R halkasının yarı basit Artin olması için gerek ve yeter şart R üzerindeki her devirli sağ modülün injektif olmasıdır.

Teorem 3.0.4. ([17], Theorem 4.23) Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:

i) Her $a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in R$ mevcuttur;

ii) R halkasının her esas sol ideali ${}_RR$'nin bir dik toplananıdır;

iii) R halkasının her esas sağ ideali R_R'nin bir dik toplananıdır.

Teorem 3.0.4'teki denk koşulları sağlayan bir halkaya *von Neumann regüler halka* ya da kısaca *VNR halka* denir.

Tanım 3.0.13. [17] Tek bir maksimal sağ ideale sahip halkaya *yerel (local) halka* denir.

Teorem 3.0.5. ([17], Theorem 19.1) Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

i) R yerel halkadır;

ii) R tek bir maksimal sol ideale sahiptir;

iii) R/J bir bölüm halkasıdır.

Tanım 3.0.14. ([30], 1.2) R/J yarı basit Artin halka ise R'ye *yarı yerel (semilocal) halka* denir.

Tanım 3.0.15. ([22], 2E) R halkasının her sağ ideali projektif ise R'ye *sağ kalıtsal (right hereditary) halka* denir. R'nin sonlu üretilmiş tüm sağ idealleri projektif ise R halkasına *sağ yarı kalıtsal (right semihereditary) halka* adı verilir.

Teorem 3.0.6. ([22], Theorem 3.22) R halkasının sağ kalıtsal olması için gerek ve yeter şart injektif sağ R-modüllerin homomorfik görüntülerinin injektif olmasıdır.

Teorem 3.0.7. ([31], 7.7) R, sonlu sağ uniform boyuta sahip bir sağ kalıtsal halka ise Noetherdir.

Tanım 3.0.16. [17] Q, R halkasının bir ideali olsun. R'nin herhangi bir I ideali için $I^2 \subseteq Q$ iken $I \subseteq Q$ oluyorsa Q idealine *yarı asal (semiprime) ideal* denir. 0, R'nin yarı asal ideali ise R halkası *yarı asal halka (semiprime ring)* olarak adlandırılır.

Tanım 3.0.17. ([17], Definition 23.13) A, R halkasının bir alt kümesi olsun. A'nın elemanlarından oluşan herhangi bir $\{a_1, a_2, \dots\}$ dizisi için $a_1a_2\dots a_n = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı varsa A *sol T-nilpotenttir* denir. $a_n \dots a_2a_1 = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı mevcutsa A'ya *sağ T-nilpotent* denir..

Tanım 3.0.18. ([17], Definition 23.18) R halkası için R/J yarı basit ve J sağ T-nilpotent ise R'ye *sağ mükemmel halka (right perfect ring)* denir. R/J yarı basit ve J sol T-nilpotent ise R halkasına *sol mükemmel halka (left perfect ring)* adı verilir. Hem sağ hem de sol mükemmel halkalar *mükemmel halka (perfect ring)* olarak adlandırılır.

Sonuç 3.0.1. ([17], Corollary 23.19) Sağ ya da sol Artin halkalar mükemmel halkadır.

Tanım 3.0.19. [32] R halkasının her sağ modülü bir maksimal alt modüle sahip ise R halkasına *sağ maks halka (right max ring)* denir.

Önerme 3.0.7. [33] Bir yarı yerel halkanın sağ maks halka olması için gerek ve yeter şart sağ mükemmel olmasıdır.

Tanım 3.0.20. [34] Her tek taraflı ideali bir sıfırlayan olan Artin halkaya *Quasi-Frobenius halka* veya kısaca *QF-halka* denir.

Teorem 3.0.8. [35] R halkasının QF-halka olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki denk koşullardan birini sağlamasıdır:

i) R sağ self-injektif sağ veya sol Artin halkadır;
ii) R sağ self-injektif sağ veya sol Noether halkadır;
iii) R self-injektif Artin halkadır.

Teorem 3.0.9. [36, 37] R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir:

i) R, QF-halkadır;
ii) Projektif sağ (sol) R-modüller injektiftir;
iii) İnjektif sağ (sol) R-modüller projektiftir.

Tanım 3.0.21. [38] R halkası, her bir $e_\lambda R$ basit socle'a sahip injektif modül ve $\sum_\lambda e_\lambda R$ faithful sağ ideal olacak şekilde ikili olarak izomorfik olmayan ortogonal idempotentlerin $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ kümesine sahipse R halkasına sağ $\aleph - QF3$ halka denir. Burada $\aleph = Card(\Lambda)$ dır.

Tanım 3.0.22. ([22], Definition 4.64) R halkası üzerindeki M modülü, bir $(R^I)_R$ dik çarpımına gömülebiliyorsa M'ye *burulmasız (torsionless) modül* denir.

Teorem 3.0.10. ([39], Theorem 10) $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, tüm basit projektif sağ R-modüllerin temsilcilerinin bir ailesi ve $Card(\Lambda) = \aleph$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

i) R yarı asal sağ $\aleph - QF3$ halkadır;

ii) R halkası, $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R_R$ ve $E(R_R)$ burulmasız olacak şekilde bir yarı asal halkadır;

iii) R halkası, $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R_R$ ve tüm basit projektif sağ R-modüller injektif olacak şekilde bir yarı asal halkadır;

iv) R halkası, sağ full lineer halkaların bir $(Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin dik çarpımının, sağ socle'ı içeren bir alt halkasına izomorftur.

Tanım 3.0.23. [19] R bir bölge olsun. Herhangi $a, b \in R$ için $ar = bs \neq 0$ olacak şekilde $r, s \in R$ mevcutsa R halkasına bir *sağ Ore bölge (right Ore domain)* denir.

Lemma 3.0.1. ([19], Lemma 6.6) Bir R bölgesinin sağ Ore bölge olması için gerek ve yeter şart R_R'nin uniform olmasıdır.

Sonuç 3.0.2. ([19], Corollary 6.7) Her sağ Noether bölge bir sağ Ore bölgedir.

Tanım 3.0.24. [40] R_R modülüne izomorf olmayan her devirli sağ R modül injektif ise R halkasına *sağ PCI-halka* denir.

Teorem 3.0.11. [7] Bir sağ PCI-halka ya yarı basit Artin halkadır ya da basit sağ yarı kalıtsal sağ Ore bölgedir.

Teorem 3.0.12. ([40], Theorem 5.5) Bir Noether bölgenin sağ PCI-halka olması için gerek ve yeter şart sol PCI-halka olmasıdır.

Teorem 3.0.13. [9] Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

i) Her devirli sağ R-modül injektif ya da projektiftir;

ii) S bir yarı basit Artin halka ve T, devirli öz sağ modülleri injektif olan bir basit sağ yarı kalıtsal sağ Ore bölge olmak üzere $R = S \times T$'dir.

Tanım 3.0.25. ([30], 1.3) Bir R halkasının herhangi iki A ve B sağ ideali için $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$ oluyorsa R'ye *sağ zincir halka (right chain ring)* denir.

Tanım 3.0.26. [19] X, R halkasının birim elemanını içeren ve çarpmaya göre kapalı bir alt kümesi ise X'e *çarpımsal (multiplicative) küme* adı verilir.

Tanım 3.0.27. [19] R bir halka ve $X \subseteq R$ regüler elemanlardan oluşan bir çarpımsal küme olsun. R'nin X'e göre bir *sağ kesirler halkası (right quotient ring)* aşağıdaki koşulları sağlayan bir S halkasıdır:

i) R, S'nin bir alt halkasıdır.

ii) X kümesindeki her eleman S halkasında tersinirdir.

iii) S halkasının her elemanı, $a \in R$ ve $x \in X$ olmak üzere ax^{-1} formunda yazılır.

R halkasının bir X çarpımsal kümesine göre sağ kesirler halkası mevcut olmak zorunda değildir. Eğer sağ kesirler halkası mevcut ise sağ R-modül yapısına sahiptir.

Tanım 3.0.28. [19] X, R halkasının tüm regüler elemanlarının kümesi olmak üzere R'nin X çarpımsal kümesine göre sağ kesirler halkasına R'nin *klasik sağ kesirler halkası (classical right quotient ring)* denir ve RX^{-1} ile gösterilir.

Teorem 3.0.14. ([19], Theorem 6.8) Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir:

i) R bölüm halkası olan bir klasik sağ kesirler halkasına sahiptir;

ii) R bir sağ Ore bölgedir.

Tanım 3.0.29. [41] R değişmeli bir bölge ve $S = R\backslash\{0\}$ olsun. Her $(a, s), (b, t) \in R \times S$ için

$$(a, s) \equiv (b, t) \quad \Leftrightarrow \quad at - bs = 0$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. a/s, bu bağıntıya göre $(a, s) \in R \times S$ elemanının denklik sınıfını göstersin ve $S^{-1}R$ tüm denklik sınıflarının kümesi olsun. Her $a/s, b/t \in S^{-1}R$ için

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/(st)$$

$$(a/s) \cdot (b/t) = (ab)/(st)$$

olmak üzere $(S^{-1}R, +, .)$ bir cisimdir. Bu cisme R değişmeli bölgesinin *kesirler cismi (field of fractions)* denir. $S^{-1}R$, R üzerinde bir modül yapısına sahiptir.

Son olarak ileride kullanılacak olan iki kategorik tanım vererek bu bölümü tamamlayacağız.

Tanım 3.0.30. [21] $\mathcal{C}$ ile $\mathcal{D}$ iki kategori ve F, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ her ikisi de kovaryant ya da her ikisi de kontravaryant olan funktorlar olsun. $\mathcal{C}$ kategorisindeki her bir A objesi için $\eta_A : F(A) \to G(A)$ $\mathcal{D}$'deki bir morfizma olmak üzere, $\mathcal{C}$ kategorisindeki herhangi $A,\ B$ objeleri ve her $f : A \to B$ morfizması için $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$ eşitliği sağlanıyorsa $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathcal{C}}$ sınıfına F funktorundan G funktoruna bir *doğal transformasyon (natural transformation)* adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{C}$ için η_A izomorfizma ise η doğal transformasyonu *doğal izomorfizm* olarak adlandırılır. F ile G funktorları arasında bir doğal izomorfizma varsa F ve G *doğal izomorfiktir* denir.

Tanım 3.0.31. [21] $\mathcal{C}$ ile $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ kontravaryant funktorlar olsun. Eğer $G \circ F$ funktoru $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ birim funktoruna, $F \circ G$ funktoru da $1_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ birim funktoruna doğal izomorfik ise F ile G funktorlarına, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri arasında bir *dualite (duality)* adı verilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Projektif Olmayan Devirlileri İnjektif Modüllerin Görüntüsü Olan Halkalar

Tüm devirli sağ modülleri bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olan halkalar tam olarak sağ self-injektif halkalardır. Zira bir R halkasının sağ self-injektif olması için R'nin bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olması yeterlidir. Tez çalışmasının bu kısmında, projektif olmayan devirli sağ modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olarak yazılabilen halkaların yapısı incelenmektedir. Buradan itibaren, aksi belirtilmedikçe R halkasının yarı basit Artin halka olmadığını kabul etmekteyiz.

Sağ self-injektif halkaların bir karakterizasyonu aşağıdaki şekilde verilebilir.

Lemma 4.1.1. R halkası için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

i) R sağ self-injektiftir;

ii) Devirli sağ R-modüller projektif modüllere göre altinjektiftir;

iii) Devirli sağ R-modüller R-altinjektiftir;

iv) Sağ R-modüller sonlu üretilmiş projektif modüllere göre altinjektiftir.

İspat: ($i \Rightarrow ii$) R_R injektif olduğundan, tüm projektif modüllere göre altinjektiftir. Önerme 2.0.16'dan, devirli sağ R-modüllerin projektiflere göre altinjektif olduğu elde edilir.

($ii \Rightarrow iii$) R_R projektif olduğundan açıktır.

($iii \Rightarrow i$) R, sağ R-modül olarak kendisinin altinjektiflik bölgesinde bulunduğundan birim homomorfizma $id : R_R \to R_R$ bir $\bar{i} : E(R_R) \to R_R$ homomorfizmasına genişler. Dolayısıyla R_R, $E(R_R)$'nin bir dik toplananına izomorftur. Böylece R sağ self-injektiftir.

($i \Rightarrow iv$) Sonlu üretilmiş projektif modüller injektif olduğundan tüm sağ R-modüller sonlu üretilmiş projektif modüllere göre altinjektiftir.

($iv \Rightarrow i$) R_R, R-altinjektif olduğundan injektiftir. ■

Lemma 4.1.1'den görüldüğü gibi sağ self injektif halkalar üzerindeki her devirli sağ modül projektif modüllere göre altinjektiftir. Dahası herhangi bir modül için "bir injektifin görüntüsü olma" ve "projektif modüllere göre altinjektif olma" özellikleri birbirine denktir.

Önerme 4.1.1. M sağ R-modülünün bir injektif modülün homomorfik görüntüsü olması için gerek ve yeter şart M'nin tüm projektif modüllere göre altinjektif olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M herhangi bir sağ R-modül olsun ve bir E_R injektif modülünün homomorfik görüntüsü olarak yazılsın. E tüm projektif modüllere göre altinjektif olduğundan, E'nin homomorfik görüntüsü olan M de tüm projektiflere göre altinjektiftir.

$(\Leftarrow)$ M modülü tüm projektif sağ R-modüllere göre altinjektif olsun. P projektif olacak şekilde bir $f : P \rightarrow M$ epimorfizması mevcuttur. f bir $E(P) \rightarrow M$ epimorfizmasına genişlediğinden M, $E(P)$'nin bir homomorfik görüntüsüdür. ■

Gösterimde kolaylık olması açısından, bir R halkası için aşağıdaki koşul tanımlansın:

(P_c): Projektif olmayan devirli sağ R-modüller injektif modüllerin homomorfik görüntüsüdür.

Önerme 4.1.1'den hareketle aşağıdaki sonuç elde edilir. Sonuç 4.1.1'den görülebileceği gibi projektif olmayan devirlileri injektiflerin görüntüsü olan halkalar tam olarak projektif olmayan devirlileri projektiflere göre altinjektif olan halkalardır.

Sonuç 4.1.1. R halkasının (P_c) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart projektif olmayan devirli sağ modüllerin, tüm projektif sağ modüllere göre altinjektif olmasıdır.

Örnek 4.1.1. Sağ self-injektif halkalar ve sağ PCI-halkalar, (P_c) koşulunu sağlayan halkalara örnek teşkil eder. İleride görülecek olan Önerme 4.1.7'den dolayı, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bu koşulu sağlamadığı bilinmektedir.

Sağ kalıtsal halkalar üzerindeki injektif modüllerin homomorfik görüntülerinin de injektif olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla sağ kalıtsal bir halka (P_c) koşulunu sağlıyorsa, bu halka üzerindeki devirli sağ modüller ya injektif ya da projektiftir. [9]'da, devirli modülleri injektif veya projektif olan halkaların yapısı tam olarak belirlenmiştir. Buradan, aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 4.1.2. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

i) R, (P_c) koşulunu sağlayan sağ kalıtsal halkadır;

ii) S yarı basit Artin halka ve T bir PCI-bölge olmak üzere $R = S \times T$ dir.

İspat: (i $\Rightarrow$ ii) R, (P_c) koşulunu sağlayan sağ kalıtsal halka olsun. R üzerindeki devirli sağ modüller ya injektif ya da projektif olduğundan, Teorem 3.0.13'den, S yarı basit Artin halka ve T, basit sağ yarı kalıtsal sağ Ore bölge olan bir sağ PCI-halka olacak şekilde bir halka ayrışımı $R = S \times T$ mevcuttur. Teorem 3.0.11'den, T bir sağ PCI-bölgedir. T, sonlu sağ uniform boyuta sahip bir sağ kalıtsal halka olduğundan, Teorem 3.0.7'den, bir Noether halkadır. Teorem 3.0.12 uyarınca T halkasının bir bir PCI-bölge olduğu elde edilir.

(ii $\Rightarrow$ i) S yarı basit Artin halka ve T bir PCI-bölge olmak üzere $R = S \times T$ olsun. Teorem 3.0.11'den, T halkası basit, sağ yarı kalıtsal, sağ Ore bölgedir. Bu durumda [9]'dan, R halkası üzerindeki tüm devirli sağ modüllerin injektif ya da projektif olduğu görülür. Ayrıca T sağ Noether olan bir sağ yarı kalıtsal halka olduğundan, sağ kalıtsaldır. Sağ kalıtsal halkaların dik çarpımları da sağ kalıtsal olduğundan R bir sağ kalıtsal halkadır. Sonuç olarak R, (P_c) özelliğini sağlayan bir sağ kalıtsal halkadır. ■

Lemma 4.1.2. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. I ve K, R halkasının sıfırdan farklı sağ idealleri olmak üzere $R = I \oplus K$ ise I ya da K yarı basittir. Ayrıca R_R'nin yarı basit her dik toplananı injektiftir.

İspat: R sağ self-injektif olmadığından, R_R modülünün aşikar olmayan her dik ayrışımı için yarı basit olmayan dik toplam teriminin tümleyeninin injektif olduğunu göstermek yeterlidir. I, yarı basit olmayan bir sağ ideal olmak üzere $R_R = I \oplus K$ olsun. Genelliği bozmadan, $K \neq 0$ olduğu kabul edilsin. I'nın dik toplanan olmayan bir A öz alt modülü vardır. K, R/A'nın bir dik toplananı olduğu için, $i : K \hookrightarrow R/A$ gömmesi $E(K)$'ya ancak $K = E(K)$ durumunda genişler. Dolayısıyla K injektiftir. ■

Yarı basit Artin olmayan ve (P_c) koşulunu sağlayan bir halkanın, tekil-olmayan basit sağ modüllerinin injektif olduğu yukarıdaki lemmadan görülebilir. Aşağıdaki Lemma ise projektif olmayan devirli sağ R-modüllerin yapısını tarif eder.

Lemma 4.1.3. R, (P_c) koşulunu sağlayan bir halka ise projektif olmayan devirli sağ R-modüller bir injektif modül ile bir tekil modülün dik toplamı olarak yazılır.

İspat: R, (P_c) koşulunu sağlayan bir halka olsun. Herhangi bir projektif olmayan devirli sağ R-modül M için bir injektif sağ R-modül E ve bir epimorfizma $f : E \to M$ mevcuttur. C, $\ker(f)$'nin E içindeki kapanışı olmak üzere $E = C \oplus D$ olacak şekilde bir $D \leq E$ vardır. D injektif ve $C/\ker(f)$ tekil modül olmak üzere $M \cong (C/\ker(f)) \oplus D$ elde edilir. ■

Önerme 4.1.3. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. $Z(R_R) = 0$ ise aşağıdakiler sağlanır:

i) $\mathrm{Soc}(R_R) \oplus J$, R halkasının büyük sağ ideali değil ise $J = 0$'dır.

ii) $J \neq 0$ ise, A bir bölge olmak üzere, $R = \mathrm{Soc}(R_R) \oplus A$ şeklinde bir halka dik toplamı vardır.

iii) $\mathrm{Soc}(R_R)$ sonlu üretilmiş değilse $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R_R$'dir.

İspat: i) $\mathrm{Soc}(R_R) \oplus J$, R_R içinde büyük olmasın. Bu durumda sıfırdan farklı bir $x \in R$ için $xR \cap (\mathrm{Soc}(R_R) \oplus J) = 0$'dır. Lemma 4.1.3'ten, xR projektif değilse bir injektif ile bir tekil modülün dik toplamı olarak yazılır. R sağ tekil-olmayan halka olduğundan, xR injektiftir. Böylece xR, R_R'nin bir dik toplananıdır ve bu bir çelişki verir. Yani xR projektiftir. Dolayısıyla, bir $B \leq R_R$ için $R = r.ann(x) \oplus B$ şeklinde yazılır. $B \cong xR$ yarı basit olmadığından, Lemma 4.1.2 den $r.ann(x)$ yarı basit injektiftir. Böylece $J = \mathrm{Rad}(B) \cong \mathrm{Rad}(xR)$'dir. $\mathrm{Rad}(xR) \subseteq xR \cap J = 0$ olduğundan $J = 0$ elde edilir.

ii) $J \neq 0$ ve $x \in J \setminus \{0\}$ olsun. Lemma 4.1.3'den xR projektiftir. Bu durumda $R = r.ann(x) \oplus A$ olacak şekilde bir $A \leq R_R$ mevcuttur. Lemma 4.1.2'den, xR yarı basit olmalıdır. Jacobson radikalin içinde yarı basit modül bulunamayacağından, $\mathrm{Soc}(A) \cong \mathrm{Soc}(xR) = 0$'dır. Dolayısıyla $\mathrm{Soc}(R_R) = r.ann(x)$ olur. Böylece $R = \mathrm{Soc}(R_R) \oplus A$ bir halka dik toplamıdır.

Yukarıdaki argümandan, sıfırdan farklı her $a \in A$ için $r.ann(a) = \mathrm{Soc}(R_R)$

olduğu görülür. Bu ise A'nın bir bölge olduğu anlamına gelmektedir.

iii) $\mathrm{Soc}(R_R)$ sonlu üretilmiş olmasın ve $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin R halkasında bir büyük sağ ideal olmadığı kabul edilsin. Sıfırdan farklı bir $x \in R$ için $xR \cap \mathrm{Soc}(R_R) = 0$'dır. Ayrıca Lemma 4.1.3'den xR projektiftir. Eğer $r.ann(x) \neq 0$ ise $R_R = r.ann(x) \oplus B$ olacak şekilde xR modülüne izomorf bir $B \leq R_R$ mevcuttur. B injektif olmadığından, Lemma 4.1.2'den, $r.ann(x) = \mathrm{Soc}(R_R)$ elde edilir. Bu durum, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin sonlu üretilmiş olmaması ile çelişir. Eğer $r.ann(x) = 0$ ise $xR \cong R_R$ elde edilir. Fakat bu durum da $xR \cap \mathrm{Soc}(R_R) = 0$ ile çelişir. Sonuç olarak her iki durumda da çelişki elde edildiğinden $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R_R$'dir. ■

I, R halkasının bir sağ ideali olmak üzere R/I R-altinjektif ise, $\sigma : R \to R/I$ kanonik epimorfizması bir $E(R) \to R/I$ homomorfizmasına genişletilebildiğinden, R/I modülü $E(R)/I$'nın bir dik toplananıdır.

Lemma 4.1.4. R, (P_c) koşulunu sağlayan bir halka olsun. C, R halkasının kapalı sağ ideali olmak üzere ya $C \leq_d R$ ya da R/C injektiftir.

İspat: C, R halkasının dik toplanan olmayan herhangi bir kapalı sağ ideali ve A, C'nin R_R içinde bir tümleyeni olsun. (P_c) koşulundan dolayı, $\sigma : R \to R/C$ kanonik epimorfizması, bir $f : E(R) \to R/C$ homomorfizmasına yükselir. R/C, $E(R)/C$ modülünün bir dik toplananı olduğundan, $E(R)$'nin, $E(R) = R + D$ ve $C = R \cap D$ olacak şekilde bir D altmodülü vardır. $\bar{A}$ ve $\bar{D}$, sırasıyla A ve D'nin $E(R)$'deki büyük kapanışları olsun. Bu durumda $E(R) = \bar{A} \oplus \bar{D}$ dir. $\pi : \bar{A} \oplus \bar{D} \to \bar{A}$ kanonik projeksiyon olmak üzere,

$$E(R) = \bar{A} \oplus \bar{D} = R + \bar{D} = \pi(R) \oplus \bar{D}$$

elde edilir. Böylece $\pi(R) = \bar{A}$ ve C, R'de kapalı olduğundan, $C = R \cap \bar{D}$'dir.

$$\pi(R) = \bar{A} \cong E(R)/\bar{D} = (R + \bar{D})/\bar{D} \cong R/R \cap \bar{D} = R/C$$

olduğundan, R/C injektiftir. ■

Lemma 4.1.5. R, (P_c) koşulunu sağlayan ve sağ self-injektif olmayan bir halka, C ve D, R içinde birbirlerinin tümleyeni olacak şekilde sağ idealler olsun. C, R_R'nin bir dik toplananı değilse, D de R_R'nin bir dik toplananı değildir.

İspat: C ve D, R içinde birbirlerinin tümleyeni olacak şekilde sağ idealler olsun. C, R_R'nin bir dik toplananı olmasın. Eğer $R_R = D \oplus D'$ ise Lemma 4.1.2'den D veya D' yarı basit injektiftir. D' yarı basit injektif ise, $C \cong (C \oplus D)/D \leq_e R/D \cong D'$ olduğundan $C \cong D'$ elde edilir. C yarı basit injektiftir fakat bu durum C'nin R_R'de bir dik toplanan olmaması ile çelişir. D yarı basit injektif ise, $D \cong (D \oplus C)/C \leq_e R/C$ olduğundan R/C projektiftir ve dolayısıyla $C \leq_d R$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. ■

Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.5'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.2. R, (P_c) koşulunu sağlayan bir halka, C ve D, R'nin içinde birbirlerinin tümleyeni olacak şekilde sağ idealler olsun. C, R_R'nin bir dik toplananı değilse, $E(R_R) \cong (R/C) \oplus (R/D)$'dir.

İspat: C ve D, R içinde birbirlerinin tümleyeni olan sağ idealler olsun. C, R_R'nin dik toplananı olmasın. Bu durumda Lemma 4.1.5'den, D de R_R'nin bir dik toplananı değildir. Lemma 4.1.4'den, R/C ve R/D injektiftir. Ayrıca C ile D karşılıklı tümleyenler olduklarından, D R/C sağ R-modülüne, C ise R/D sağ R-modülüne büyük olarak gömülürler. $(R/C) \oplus (R/D)$, $C \oplus D$'nin bir izomorfik kopyasını büyük olarak içerdiğinden $E(R_R) \cong (R/C) \oplus (R/D)$ elde edilir. ■

Sonuç 4.1.3. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. Bu durumda ya $Z_2(R_R) = 0$ ya da $R/Z_2(R_R)$ injektiftir.

İspat: $Z_2(R_R)$, R halkasının kapalı sağ ideali olduğundan, Lemma 4.1.4'den, ya $Z_2(R_R)$ injektiftir ya da $R/Z_2(R_R)$ injektiftir. Eğer $Z_2(R_R)$ injektif ise $R_R = A \oplus Z_2(R_R)$ olacak şekilde bir $A \leq R_R$ mevcuttur. $Z_2(R_R) \neq 0$ iken yarı basit olamayacağından, Lemma 4.1.2'den, A yarı basit injektif olmalıdır. Bu durum R halkasının sağ self-injektif olmaması ile çelişir. Dolayısıyla $Z_2(R_R)$ injektif iken $Z_2(R_R) = 0$ elde edilir. ■

Önerme 4.1.4. R, (P_c) koşulunu sağlayan bir halka olsun. Bu durumda R ya sağ CS halkadır ya da $E(R_R) \cong (R/C) \oplus (R/D)$ olacak şekilde R içinde birbirlerinin tümleyenleri olan C ve D sağ idealleri mevcuttur.

İspat: Verilen hipotezler altında R halkası sağ CS değilken, $E(R_R) \cong (R/C) \oplus (R/D)$ olacak şekilde R içinde birbirlerinin tümleyenleri olan C ve D sağ ideallerinin bulunabileceği, Sonuç 4.1.2'den görülür. ■

Önerme 4.1.5. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ CS olmayan bir halka ise, R'nin sağ Noether olması için gerek ve yeter şart sağ Artin olmasıdır.

İspat: R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ CS olmayan bir halka ve C, R'nin dik toplananı olmayan bir kapalı sağ ideali olsun. Önerme 4.1.4'ten, D, C'nin herhangi bir tümleyeni olmak üzere $E(R_R) \cong (R/C) \oplus (R/D)$ olduğu bilinmektedir. R sağ Noether halka ise, sonlu üretilmiş injektif bürüme sahip olduğundan, Teorem 3.0.1'den, R sağ Artindir. Tersine, her sağ Artin halka sağ Noether olduğundan ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1.4. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ CS olmayan bir halka olsun. $\mathrm{Soc}(R_R)$, R halkasının büyük sağ ideali değilse ve C, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin R_R'deki herhangi bir tümleyeni ise $E(\mathrm{Soc}(R_R)) \cong R/C$'dir.

İspat: C, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin R_R'deki herhangi bir tümleyeni olsun. Eğer C, R_R'nin bir dik toplananı değilse Lemma 4.1.4'den R/C injektiftir. $\mathrm{Soc}(R_R)$, R/C'nin bir büyük alt modülüne izomorf olduğundan $E(\mathrm{Soc}(R_R)) \cong R/C$ elde edilir. $R = C \oplus C'$ ise Lemma 4.1.2'den, $C' = \mathrm{Soc}(R_R)$ injektiftir. Bu durumda da $E(\mathrm{Soc}(R_R)) = \mathrm{Soc}(R_R) \cong R/C$ dir. ■

Önerme 4.1.6. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. R sağ CS ise S yarı basit ve U injektif olmayan uniform sağ ideal olacak şekilde $R = S \oplus U$ dik ayrışımı mevcuttur.

İspat: R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir sağ CS halka olsun. $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin sonlu üretilmiş olmadığı kabul edilsin. Bu durumda $\mathrm{Soc}(R_R) = I \oplus K$ olacak şekilde, R'nin sonsuz üretilmiş I ve K sağ idealleri vardır. C, K'nın R_R içindeki, $I \subseteq C$ özelliğini sağlayan tümleyeni olsun. R sağ CS olduğundan, $R = C \oplus D$ olacak şekilde bir D sağ ideali mevcuttur. Lemma 4.1.2'den, D yarı basittir. Bu durum, K'nın D içine gömülebilmesi ile çelişir. Dolayısıyla $\mathrm{Soc}(R_R)$ sonlu üretilmiş sağ R-modüldür. (P_c) koşulunu sağlayan halkaların tekil-olmayan basit sağ modülleri injektif olduğundan, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin tekil-olmayan kısmı injektiftir. Dolayısıyla S, $\mathrm{Soc}(R_R)$ sağ idealinin tekil-olmayan kısmını göstermek üzere $R = S \oplus U$ olacak şekilde bir $U \leq R_R$ vardır. Lemma 4.1.2'den, U uniformdur ve R sağ self-injektif olmadığından U injektif değildir. ■

Önerme 4.1.7. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. R sağ tekil-olmayan sağ CS halka ise S yarı basit Artin halka ve U basit sağ Ore bölge olacak şekilde bir $R = S \times U$ halka ayrışımı mevcuttur.

İspat: Önerme 4.1.6'da verilen $R = S \oplus U$ bir halka ayrışımıdır ve burada S bir yarı basit Artin halkadır. Öte yandan U sağ tekil-olmayan sağ uniform halka olduğundan bir Ore bölgedir. X, U daki regüler elemanların kümesi olmak üzere U halkasının klasik sağ kesir halkası UX^{-1} ile gösterilsin. U, UX^{-1} in büyük alt modülüdür. I, U halkasının sıfırdan farklı herhangi bir ideali olsun. U halkası (P_c) koşulunu sağladığından, kanonik epimorfizma $\sigma : U \to U/I$ bir $\bar{\sigma} : UX^{-1} \to U/I$ homomorfizmasına genişler. Bu durumda $U \subseteq (UX^{-1})I$ olduğundan $U/I = \bar{\sigma}((UX^{-1})I) = \bar{\sigma}(UX^{-1})I = (U/I)I = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $I = U$ olur, yani U basit halkadır. ■

Önerme 4.1.8. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. Eğer R, $Z(R_R) \neq 0$ olacak şekilde bir sağ CS halka ise tekil-olmayan (devirli) sağ R-modüller yarı basittir, dolayısıyla injektif ve projektiftir.

İspat: Önerme 4.1.6'dan, S_R yarı basit Artin, U_R uniform olmak üzere $R = S \oplus U$ şeklinde yazılır. $Z(S_R) = 0$ olduğundan $U = Z_2(R_R)$ ve tekil-olmayan sağ R-modüller tam olarak U ile sıfırlananlar, yani S-modüllerdir. Böylece bu modüller yarıbasit, injektif ve projektiftir. ■

Sonuç 4.1.5. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka ve $Z(R_R) \neq 0$ ise R üzerindeki her sağ modül M için $Z_2(M)$, M modülünün dik toplananıdır ve tümleyeni yarı basit injektiftir.

İspat: Herhangi bir M modülü için $M/Z_2(M)$ tekil-olmayan sağ R-modül olduğundan, Önerme 4.1.8'den, M projektiftir. Dolayısıyla $\sigma : M \to M/Z_2(M)$ kanonik epimorfizması parçalanandır ve $M = Z_2(M) \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ mevcuttur. Önerme 4.1.8'den, N yarı basit injektiftir. ■

Önerme 4.1.9. R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. R, $Z(R_R) \neq 0$ olacak şekilde bir sağ CS halka ise S yarı basit Artin ve U, $U = Z_2(R_R)$

ve $U/Z(R_R)$ bir bölge olacak şekilde bir halka olmak üzere $R = S \times U$ şeklinde yazılır.

İspat: Önerme 4.1.6'dan bilinmektedir ki, R, (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir sağ CS halka ise, S yarı basit Artin ve U_R uniform olacak şekilde $R = S \times U$ halka ayrışımı mevcuttur. $Z = Z(R_R)$ olsun. $Z \leq_e U_R$ olduğundan $U = Z_2(R_R)$ dir. U bir halka olarak ele alındığında, Z, U'nun bir ideali olarak görülebilir. Herhangi iki $x + Z, y + Z \in U/Z$ için $(x + Z)(y + Z) = Z$ iken $x \in Z$ veya $y \in Z$ olduğu gösterilirse, U/Z'nin bir bölge olduğu sonucuna ulaşılır. $x + Z, y + Z \in U/Z$ için $(x + Z)(y + Z) = Z$ olsun. Öyleyse $xy \in Z$'dir. Sağ tekil ideal tanımından, $r.ann(xy) \leq_e R_R$ dir. $I = r.ann_U(xy)$ olsun. $I = U \cap r.ann(xy) \neq 0$ ve U_R uniform olduğundan, $I \leq_e U_R$ elde edilir. Eğer $yI = 0$ ise $y(S \oplus I) = 0$ ve $S \oplus I \leq_e R_R$ olduğundan $y \in Z$'dir. $yI \neq 0$ ise $x(S \oplus yI) = 0$ ve $S \oplus yI \leq_e R_R$'den, $x \in Z$ elde edilir. ■

4.2. Öz Devirlileri İnjektif Modüllerin Homomorfik Görüntüsü Olan Halkalar

QF-halkalar üzerindeki her modül injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olarak görülebilir. Devirli sağ modülleri injektiflerin homomorfik görüntüsü olan halkalar ise tam olarak sağ self-injektif halkalardır. Bu bölümde, halkanın kendisine izomorf olmayan devirli sağ modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olarak yazılabilen halkaların yapısı araştırılacaktır.

Bir R halkası için, (P) koşulu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

(P): R_R'ye izomorf olmayan devirli her sağ R-modül bir injektifin görüntüsüdür.

Sağ self-injektif halkalar ile (P_c) ve (P) koşullarını sağlayan halka sınıfları arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$\text{Sağ self-injektif} \Rightarrow (P) \Rightarrow (P_c)$$

Önerme 2.0.16'dan, (P) koşulunu sağlayan halkalar (P_c) koşulunu sağlar. Tersine, kendi üzerinde sağ modül olarak ayrıştırılamaz olan ve (P_c) koşulunu sağlayan halkalar (P) koşulunu sağlar. Bu durum, R_R ayrıştırılamaz iken, herhangi bir sıfırdan farklı $I \lneq R_R$ için R/I modülünün projektif olmamasından kaynaklanır. (P_c) ve (P) koşullarının denk olmadığı ve (P) koşulu sağlayan halkaların dik çarpmının bu özelliği taşımadığı aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 4.2.1. S bir yarı basit Artin halka ve T bir PCI-bölge olmak üzere $R = S \times T$ halkası, Önerme 4.1.2'den, (P_c) koşulunu sağlar. İleride görülecek olan Lemma 4.2.1'den dolayı, R halkasının (P) özelliğini sağlamadığı bilinmektedir. Öte yandan, S ve T halkaları (P) özelliğini taşımalarına rağmen onların dik çarpımı olan R bu özelliğine sahip değildir.

Önerme 4.2.1. R değişmeli bir bölge olsun. R'nin (P) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart bir cisim olmasıdır.

İspat: **($\Rightarrow$)**R, (P) koşulunu sağlayan bir değişmeli bölge olsun. R'nin kesirler cismi $S^{-1}R$ injektif R-modüldür ve $R \leq_e S^{-1}R$ olduğu bilinmektedir.

I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. R/I, öz devirli R-modüldür. R halkası (P) koşulunu sağladığından, $\sigma : R \to R/I$ kanonik epimorfizması bir $\bar{\sigma} : S^{-1}R \to R/I$ homomorfizmasına genişletilebilir.

$$(R/I) = \bar{\sigma}(S^{-1}R) = \bar{\sigma}((S^{-1}R)I) = \bar{\sigma}(S^{-1}R)I = (R/I)I = 0$$

olduğundan $I = R$ elde edilir. Sonuç olarak R bir cisimdir.

($\Leftarrow$) Bir cisim üzerindeki tüm modüller injektif olduğundan her cisim (P) koşulunu sağlar. ■

Aşağıdaki lemma, (P) koşulunu sağlayan ve kendi üzerinde sağ modül olarak ayrıştırılabilen fakat sağ self-injektif olmayan halkaların herhangi bir zincir koşulunu sağlamadığını göstermektedir.

Lemma 4.2.1. R, (P) koşulunu sağlayan sağ self-injektif olmayan bir halka ve $R_R = I \oplus K$ ise I ve K sağ ideallerinden biri R_R'ye izomorf, diğeri de yarı basittir.

İspat: R, (P) koşulunu sağlayan bir halka ve $R_R = I \oplus K$ olsun. R, (P_c) koşulunu sağladığından, Lemma 4.1.2'ten, I ve K sağ ideallerinden biri yarı basittir. I'nın yarı basit olduğu kabul edilsin. Eğer $K \ncong R_R$ ise, K bir injektifin homomorfik görüntüsü olmalıdır. K projektif olduğundan injektiftir. R sağ self-injektif olmadığından bu durum bir çelişki verir. Dolayısıyla $K \cong R_R$ elde edilir. ■

Lemma 4.2.1, kendisi üzerinde sağ modül olarak ayrıştırılabilen ve (P) koşulunu sağlayan bir halkanın eğer sağ self-injektif değilse, ayrıştırılamaz sağ ideallerinin bir dik toplamı olarak yazılamayacağını söyler. Bu durumda R, sonsuz tane ortogonal idempotente sahiptir ve $\mathrm{Soc}(R_R)$ sonsuz üretilmiştir.

Sonuç 4.1.2 ve Önerme 4.1.6'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. R, (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. Eğer R sağ CS ise sağ uniformdur. Aksine R sağ CS değil ise $E(R_R)$ sonlu üretilmiş sağ R-modüldür.

Yine Lemma 4.2.1 uyarınca, R halkası (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir sağ Noether halka iken R_R ayrıştırılamazdır. Bu nedenle Sonuç 4.2.1'den aşağıdaki yargıya ulaşılır.

Sonuç 4.2.2. R, (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir sağ Noether halka ise ya sağ uniformdur ya da sağ Artin yerel halkadır.

Lemma 4.2.2. (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan halkalar ayrıştırılamazdır.

İspat: R, (P) koşulunu sağlayan bir halka olsun. $R = S \times T$ olacak şekilde bir halka ayrışımının mevcut olduğu kabul edilsin. Lemma 4.2.1'den, S_R yarı basit injektif ve $T_R \cong R_R$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $I_1 \cong I_2$ olacak sekilde $I_1 \leq S_R$ ve $I_2 \leq T_R$ basit alt modülleri vardır. $f : I_1 \to I_2$ bir izomorfizma olsun. Fakat bu durumda sıfırdan farklı herhangi bir $x \in I_1$ için

$$I_2 = f(x)R = f(x)S + f(x)T = f(x)S + f(xT) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak R ayrıştırılamaz bir halkadır. ■

Lemma 4.2.3. R, (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka ise, R üzerindeki her öz devirli modül bir tekil modülle bir injektif modülün dik toplamıdır.

İspat: Lemma 4.1.3'dekine benzer şekilde görülür. ■

Önerme 4.2.2. R, (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. Eğer R aşikar olmayan idempotent elemana sahip değil ise aşağıdakiler sağlanır:

i) $Z(R_R)$ ya sıfırdır ya da R'nin büyük sağ idealidir.

ii) $R/Z(R_R)$ bir bölgedir.

İspat: **i)** $Z = Z(R_R) \neq 0$ kabul edilsin. $xR \ncong R$ olacak şekildeki her $x \in R$ için $Z(xR) = xR$ olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.2.3'den, her xR öz sağ ideali için $xR = A \oplus B$ olacak şekilde injektif A ve tekil B sağ idealleri mevcuttur. R_R ayrıştırılamaz olduğundan $A = 0$'dır. Dolayısıyla xR tekildir. Böylece $Z(R_R) \leq_e R_R$ elde edilir.

ii) Eğer $Z = 0$ ise R injektif öz sağ ideal içermediğinden, sıfırdan farklı her $x \in R$ için $xR \cong R$'dir. R_R ayrıştırılamaz olduğundan, bu durum $r.ann(x) = 0$ olmasını gerektirir.

$Z \neq 0$ ise herhangi bir $x \in R \setminus Z$ için, $xR \cong R$ olduğundan $r.ann(x) = 0$'dır. $y \in R$ için $\bar{x} = x + Z$ ve $\bar{y} = y + Z$ olsun. $\bar{x}\bar{y} = 0$ iken $xy \in Z$ olduğundan, $(xy)I = 0$ olacak şekilde $I \leq_e R_R$ mevcuttur. Böylece $yI = 0$'dır ve buradan $y \in Z$ elde edilir. Sonuç olarak $R/Z(R_R)$ bir bölgedir. ■

Sonuç 4.2.3. R, (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. Eğer R aşikar olmayan idempotent eleman içermeyen ve $Z(R_R) = 0$ olacak şekilde bir halka ise ya sağ uniformdur ya da $u.dim(R_R) = \infty$'dur.

İspat: R, verilen hipotezleri sağlayan bir halka ise, Önerme 4.2.2'den, bir bölgedir. Dolayısıyla R ya sağ uniformdur ya da $u.dim(R_R) = \infty$ olur. ■

Lemma 4.2.4. R, (P) koşulunu sağlayan ve aşikar olmayan idempotent elemana sahip sağ self-injektif olmayan bir halka ise, $R/Z(R_R)$ sonsuz üretilmiş büyük socle'a sahip, tekil-olmayan sağ R-modüldür. Özel olarak $Z(R_R) = Z_2(R_R)$ dir.

İspat: $Z = Z(R)$ olsun. Eğer $Z = 0$ ise, Lemma 4.2.1 den, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin sonlu üretilmiş olmadığı bilinmektedir. Sıfırdan farklı herhangi bir $x \in R$ için, xR tekil-olmayan sağ R-modül olduğundan, ya injektiftir ya da R_R'ye izomorftur. Lemma 4.2.1'den, her iki durumda da $\mathrm{Soc}(xR) \neq 0$ olduğundan, $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R$ elde edilir.

$Z \neq 0$ olsun ve N, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin tekil-olmayan kısmını göstersin. R aşikar olmayan idempotent içerdiğinden, Lemma 4.2.1'den, N sonlu üretilmiş değildir. C, N'nin R_R içindeki, Z'yi kapsayan tümleyeni olsun. Sıfırdan farklı herhangi bir $x \in C$ için, xR tekil-olmayan minimal sağ ideal kapsayamayacağından $xR \not\cong R$'dir. Lemma 4.2.3'ten, $xR = A \oplus E$ olacak şekilde tekil A ve injektif E sağ idealleri vardır. Eğer $E \neq 0$ ise $E \leq_d R_R$ ve böylece yine Lemma 4.2.1'den E, tekil-olmayan yarı basit sağ ideal olmalıdır. Bu ise $N \cap xR = 0$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $C = Z$ elde edilir. Z, R'nin kapalı sağ ideali ve böylece $Z_2(R_R) = Z$ olduğundan, R/Z tekil-olmayan sağ R-modüldür. Dahası Z, R_R içinde, N'nin bir tümleyeni olduğundan N, R/Z'nin bir büyük altmodülüne izomorftur ve $\mathrm{Soc}(R/Z) \cong N$ elde edilir. Sonuç olarak R/Z sonsuz üretilmiş büyük socle'a sahiptir. Ayrıca Z, R halkasının kapalı sağ ideali olduğundan $Z(R_R) = Z_2(R_R)$ dir. ■

Sonuç 4.2.4. R sağ self-injektif olmayan, (P) koşulunu sağlayan ve sağ tekil-olmayan bir halka olsun. R aşikar olmayan bir idempotent elemana sahip ise $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R_R$ ve böylece $J = 0$'dır.

Önerme 4.2.3. R sağ self-injektif olmayan, (P) koşulunu sağlayan ve aşikar olmayan idempotent elemana sahip bir halka ise, $R/Z(R_R)$ bir sağ Rickart halkadır, yani $R/Z(R_R)$'nin devirli sağ idealleri projektiftir.

İspat: R, (P) koşulunu sağlayan ve kendi üzerinde sağ modül olarak ayrıştırılabilen bir halka olsun. Eğer R bir sağ tekil-olmayan halka ise bu durumda herhangi bir devirli sağ ideal ya R_R'ye izomorftur ya da yarı basit injektiftir. Dolayısıyla R bir sağ Rickart halkadır. $Z = Z(R_R) \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Lemma 4.2.4'ten $Z \leq_c R_R$ dir. R, (P_c) koşulunu sağlayan bir halkadır ve böylece Lemma 4.1.4'den, R/Z injektif sağ R-modüldür. Lemma 4.2.3 ve Lemma 4.2.4'ten, $(R/Z)_R$'nin herhangi bir devirli alt modülünün injektif olduğu görülür. R/Z'nin sağ idealleri aynı zamanda sağ R-modül olarak alt modülleri olduğundan, R/Z sağ Rickart halkadır. ■

Lemma 4.2.5. R, (P) koşulunu sağlayan ve aşikar olmayan idempotent elemana sahip bir halka ise, $Z(R_R)$'nin sıfırdan farklı kapalı her alt modülü, $Z(R_R)$'nin bir kopyasını içerir.

İspat: $Z = Z(R_R)$ ve N, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin tekil-olmayan kısmını göstersin. R aşikar olmayan idempotent eleman içerdiğinden, Lemma 4.2.1'den, N sonsuz üretilmiştir. Herhangi bir $x \in R \setminus (N \oplus Z)$ için eğer $xR \cong R$ ise $xR \cap N \neq 0$ olur. Dolayısıyla $xR \cap (N \oplus Z) \neq 0$ dır. Eğer $xR \ncong R$ ise Lemma 4.2.3'den xR bir tekil modülle bir injektif modülün dik toplamıdır. (P) koşulunu sağlayan halkalar (P_c) koşulunu sağladığından ve Lemma 4.1.2'den, bu durumda yine $xR \cap N \neq 0$ elde edilir. Böylece $N \oplus Z \leq_e R_R$ dir. Lemma 4.2.4'ten, Z, R halkasının kapalı sağ idealidir. Dolayısıyla Z, N'nin bir tümleyenidir. A, N sağ idealinin R_R içindeki bir kapanışı olsun. Herhangi bir $y \in A \setminus N$ için $Z \neq 0$ olduğundan $yR \ncong R$ dir. Lemma 4.2.3'ten yR injektiftir. Lemma 4.1.2'den, yR yarı basittir fakat bu durum y elemanının seçimi ile çelişir. Böylece N, R halkasının kapalı sağ idealidir. Z ve N, R halkasında $N \oplus Z \leq_e R_R$ olacak şekilde kapalı sağ idealler olduğundan birbirlerinin tümleyenidir.

C, Z'nin sıfırdan farklı ve kapalı bir alt modülü olsun. $Z \leq_c R_R$ olduğundan C aynı zamanda R_R'de de kapalıdır. $\sigma : R \to R/N$ kanonik epimorfizma olmak üzere herhangi bir $A \leq R_R$ için $\sigma(A) = \bar{A}$ şeklinde gösterilsin. N, R_R'nin dik toplanan olmayan kapalı bir sağ ideali olduğundan, Lemma 4.1.4, R/N'nin injektif sağ R-modül olduğunu söyler. C injektif olmadığından, bu durum $\bar{C}$'nin R/N modülünde kapalı olmadığını gösterir. Dolayısıyla $N \subseteq D$ ve $\bar{C} \leq_e \bar{D} \leq_c R/N$ olacak şekilde bir $D \leq R_R$ mevcuttur. Böylece N ve C, D içinde karşılıklı tümleyenlerdir. Eğer sıfırdan farklı herhangi bir $a \in (Z \cap D) \setminus C$ mevcutsa, $(C + aR) \cap N = 0$ elde edilir, fakat bu durum C'nin N alt modülünün bir tümleyeni olması ile çelişir. Dolayısıyla $Z(D) = Z \cap D = C$ sağlanır. Ayrıca her $x \in D \setminus (C \oplus N)$ için $x \in R \setminus (Z \oplus N)$'dir. Aksi taktirde, $x \in D \cap (Z \oplus N) = C \oplus N$ çelişkisine varılır. Lemma 4.2.3'den, $xR \cong R$ ve böylece $Z \cong Z(xR) = C \cap xR \subseteq C$ elde edilir. ■

Sonuç 4.2.5. R, (P) koşulunu sağlayan ve aşikar olmayan idempotent eleman içeren bir halka ise, $\mathrm{Soc}(Z(R_R))$ ya sıfırdır ya da basittir ve $\mathrm{Soc}(Z(R_R))$, $Z(R_R)$'nin büyük alt modülüdür.

İspat: $Z = Z(R_R)$ olmak üzere, $\mathrm{Soc}(Z) \neq 0$ olsun. Bu durumda minimal bir $S \leq Z$ mevcuttur. C, S'nin Z içindeki bir büyük kapanışı ise, Lemma 4.2.5'ten C, Z'nin bir kopyasını içerir. Dolayısıyla $\mathrm{Soc}(Z) = S \leq_e Z$ elde edilir. ■

Önerme 4.2.4. R, aşikar olmayan idempotent elemana sahip, sağ tekil-olmayan ve sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. $\aleph$ tüm basit projektif R-modüllerin temsilcilerinin kümesinin kardinalitesi olmak üzere R halkasının (P) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır:

i) R, K sonsuz üretilmiş bir yarı basit sağ ideal olmak üzere $E(R_R) \cong R/K$ olacak şekilde bir yarı asal sağ $\aleph - QF3$ halkadır.

ii) Tüm öz devirli sağ R-modüller yarı basit projektif modüllere göre altinjektiftir.

İspat: $(\Rightarrow)$ R, (P) koşulunu sağlayan, sağ tekil-olmayan ve de aşikar olmayan idempotent elemana sahip bir halka olsun. İlk olarak $E(R_R)$'nin bütünüyle sonsuz olduğu gösterilip, bundan yararlanılarak $E(R_R) \cong R/K$ olacak şekilde, sonlu üretilmiş olmayan bir yarı basit sağ ideal bulunacaktır. Gösterimde kolaylık olması açısından $E = E(R_R)$ alınsın. Teorem 2.0.4'den, $E = D \oplus P$ ve D ile P ortogonal olacak şekilde doğrudan sonlu D ve bütünüyle sonsuz P modülleri mevcuttur. Her bir basit projektif $S \leq R_R$ için, Lemma 4.2.3'den, S injektiftir. Lemma 4.2.1'den $R_R \cong S \oplus R$ olduğundan, E doğrudan sonlu olamaz. Dolayısıyla $P \neq 0$'dır. $D \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Herhangi bir minimal sağ ideal S için, S'yi içeren homojen bileşen $\boldsymbol{C_S}$ ile gösterilsin. Eğer $\mathrm{Soc}(D)$ sonlu üretilmiş değilse, D ve P ortogonal olduklarından, her $S \subseteq \mathrm{Soc}(D)$ için $\boldsymbol{C_S} \subseteq \mathrm{Soc}(D)$ elde edilir. Lemma 4.2.1'den, $\boldsymbol{C_S} = S \oplus C$ ve $C \cong \boldsymbol{C_S}$ olacak şekilde bir $C \leq R_R$ mevcuttur. Dolayısıyla $D = S \oplus D'$ ve $D' \cong D$ özelliklerini sağlayan bir $D' \lneq D$ bulunabilir. Bu durum D'nin doğrudan sonlu olması ile çelişir. Yine Lemma 4.2.1'den, tüm basit projektif sağ R-modüllerin R içinde sonsuz kopyası vardır. Eğer $\mathrm{Soc}(D)$ sonlu üretilmiş ise, R'nin içinde D'nin her bir minimal alt modülünden sonsuz sayıda izomorfik kopya bulunması gerektiğinden, D ve P modüllerinin ortogonalliği ile çelişen bir durum oluşur. Dolayısıyla $D = 0$ elde edilir. E bütünüyle sonsuzdur. Böylece $E^2 \cong E$ olduğundan $A \cong B \cong \mathrm{Soc}(R_R)$ ve $\mathrm{Soc}(R_R) = A \oplus B$ olacak şekilde $A, B \leq R_R$ vardır. Lemma 4.2.3'den, R/A bir injektif modül ile bir tekil modülün dik toplamı olarak yazılır. R sağ tekil-olmayan halka olduğundan, injektif sağ R-modüllerin tekil kısımları dik toplanandır. Dolayısıyla I/A tekil-olmayan injektif sağ R-modül olmak üzere $R/A = Z(R/A) \oplus (I/A)$ olacak şekilde bir $I \leq R_R$ mevcuttur. I/A tekil-olmayan sağ R-modül olduğundan $A \leq_c I$'dır. C, A'nın I'daki B'yi kapsayan tümleyeni olsun. $B \leq_e C$ ve $C \cong ((C \oplus A)/A) \leq_e (I/A)$ olduğundan $E(B) \cong (I/A)$ elde edilir.

Dolayısıyla öyle bir $x \in R \backslash \mathrm{Soc}(R_R)$ için $I = xR + A$ olmalıdır. Ayrıca Lemma 4.2.3'den, R içindeki esas (principal) sağ idealler ya injektiftir ya da R_R modülüne izomorftur. Lemma 4.2.1'den R halkasının injektif sağ idealleri yarıbasit olduğundan, $xR \cong R_R$ elde edilir. Bu durumda $E \cong \frac{I}{A} \cong \frac{xR}{xR \cap A}$ olduğundan, $E \cong (R/K)$ olacak şekilde sonlu üretilmiş olmayan bir $K \subseteq \mathrm{Soc}(R_R)$ mevcuttur.

Sonuç 4.2.4'ten, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin R halkasının büyük sağ ideali olduğu görülür. $I \leq R_R$ için $I^2 = 0$ kabul edilsin. Buradan $(I \cap \mathrm{Soc}(R_R))^2 = 0$'dır. Lemma 4.2.3 den, (P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan halkalar üzerindeki basit projektif sağ modüllerin injektif olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla R halkasının minimal sağ idealleri injektiftir. $\mathrm{Soc}(R_R) \leq_e R_R$ olduğundan, $I = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R yarı asal halkadır. Lemma 4.2.3'ten, sağ tekil-olmayan R halkası üzerindeki basit projektif sağ modüller injektiftir. Teorem 3.0.10'dan, R bir yarı asal sağ $\aleph - QF3$ halkadır.

R/I herhangi bir öz devirli sağ R-modül olsun. P herhangi bir yarı basit projektif modül olmak üzere keyfi bir $f : P \to R/I$ homomorfizması ele alınsın. Lemma 4.2.3'ten, $R/I = E_0 \oplus Z$ olacak şekilde bir injektif modül E_0 ve bir tekil modül Z mevcuttur. $\pi_{E_0} : E_0 \oplus Z \to E_0$ ve $\pi_Z : E_0 \oplus Z \to Z$ izdüşüm homomorfizmaları olsun. P yarı basit projektif modül olduğundan P modülünün her homomorfik görüntüsü tekil-olmayan yarı basit modüldür. Buradan $f(P) \subseteq \pi_{E_0}(f(P)) \oplus \pi_Z(f(P)) \subseteq E_0 \oplus 0$ elde edilir. Dolayısıyla $f(P)$, R/I'nın bir injektif alt modülünde kapsanır ve böylece f homomorfizması bir $E(P) \to R/I$ homomorfizmasına genişletilebilir. Sonuç olarak R/I, P-altinjektiftir.

($\Leftarrow$) R, öz devirli modülleri yarı basit projektif modüllere göre altinjektif ve K sonsuz üretilmiş yarı basit sağ ideal olmak üzere $E(R_R) \cong R/K$ olacak şekilde bir yarı asal sağ $\aleph - QF3$ halka olsun. Herhangi bir öz devirli sağ R-modül R/I alınsın. A, $\mathrm{Soc}(R/I)$ modülünün tekil-olmayan kısmını göstermek üzere, hipotezden $i : A \hookrightarrow R/I$ kapsama homomorfizmasının bir $\bar{i} : E(A) \hookrightarrow R/I$ monomorfizmasına genişlediği bilinmektedir. Dolayısıyla, $R/I = E \oplus B$ olacak şekilde $E \cong E(A)$ ve B_R modülleri mevcuttur. B, basit projektif sağ R-modül içermeyen devirli sağ R-modül olduğundan, $R/\mathrm{Soc}(R_R) \to B$ epimorfizması vardır. Sonuç olarak R/I, $E \oplus (R/K)$ injektif modülünün bir homomorfik görüntüsü olarak yazılabilir. ■

Önerme 4.2.5. R, $Z(R_R) \neq 0$ olacak şekilde, aşikar olmayan idempotent elemana sahip ve sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. N, $\mathrm{Soc}(R_R)$'nin tekil-olmayan kısmını göstersin. R'nin (P) koşuluna sahip olması için gerek ve yeter şart aşağıdakileri sağlamasıdır:

i) R/N sağ self-injektif halkadır ve $R/Z(R_R)$ büyük sağ socle'a sahip bir sağ self-injektif VNR halkadır.

ii) Tüm öz devirli sağ R-modüller yarı basit projektif modüllere göre altinjektiftir.

İspat: $(\Rightarrow)$ R, verilen hipotezler altında, (P) koşulunu sağlayan bir halka olsun. Lemma 4.2.5'in ispatında da görülebileceği gibi N ve $Z(R_R)$, R_R içinde birbirlerinin tümleyenidir. Lemma 4.2.1'den, N sonlu üretilmiş olamaz. Buradan, N sağ idealinin R_R'nin bir dik toplananı olmadığı elde edilir. R halkası (P_c) koşulunu sağladığından, Lemma 4.1.4'ten, R/N injektif sağ R-modüldür. Dolayısıyla R/N halkası sağ self-injektiftir.

$Z(R_R)$, R_R'de dik toplanan olmayan bir kapalı sağ ideal olduğundan, yine Lemma 4.1.4'ten, $R/Z(R_R)$ injektif sağ R-modüldür. Buradan, $R/Z(R_R)$'nin sağ self-injektif halka olduğu söylenir. Öte yandan, $Z(R_R) \leq_c R_R$ olduğundan $R/Z(R_R)$ tekil-olmayan sağ R-modüldür ve herhangi bir $\bar{x} = x + Z(R_R) \in R/Z(R_R)$ için $\bar{x}R$ tekil olmayan sağ R-modül olduğundan $\bar{x}R \ncong R_R$'dir. Lemma 4.2.3'ten, $\bar{x}R$'nin injektif olduğu görülür ve böylece $\bar{x}R \leq_d R/Z(R_R)$ elde edilir. Bu durum aynı zamanda $R/Z(R_R)$ halkasının esas sağ ideallerinin $R/Z(R_R)$ halkasında dik toplanan olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla $R/Z(R_R)$ bir VNR halkadır. N ve $Z(R_R)$, R_R içinde karşılıklı tümleyenler olduğundan, $\mathrm{Soc}((R/Z(R_R))_R) = (N \oplus Z(R_R))/Z(R_R) \leq_e (R/Z(R_R))$ elde edilir. Buradan, $(N \oplus Z(R_R))/Z(R_R)$, $R/Z(R_R)$'nin yarı basit büyük sağ idealidir yani $R/Z(R_R)$ halkası büyük sağ socle'a sahiptir.

Tüm öz devirli sağ R-modüllerin yarı basit projektif modüllere göre altinjektif olduğu Teorem 4.2.4'in ispatındakine benzer şekilde görülür.

$(\Leftarrow)$ R, $Z(R_R) \neq 0$ olacak şekilde, aşikar olmayan idempotent elemana sahip ve sağ self-injektif olmayan bir halka olsun. R'nin (i) ile (ii) koşullarını sağladığı kabul edilsin. R/I herhangi bir öz devirli sağ R-modül olmak üzere A, R/I içindeki tüm basit projektif modüllerin toplamını göstersin. R/I A-altinjektif olduğundan, $i : A \hookrightarrow R/I$

kapsama homomorfizması bir $f : E(A) \to R/I$ monomorfizmasına genişletilebilir. Böylece bir $B \leq R/I$ için $R/I = f(E(A)) \oplus B$ olur. A modülünün tanımından dolayı, B hiçbir basit projektif modül içeremez. Dolayısıyla bir $g : R/N \to B$ epimorfizması mevcuttur. Herhangi $(x, b) \in E(A) \oplus (R/N)$ için $(f \oplus g)(x, b) = f(x) + g(b)$ ile tanımlanan $f \oplus g : E(A) \oplus (R/N) \to f(E(A)) \oplus B$ dönüşümü bir injektif modülden R/I'ya epimorfizmadır. Sonuç olarak R halkası (P) özelliğini sağlar. ■

Önerme 4.2.6. R bir sağ kalıtsal halka olsun. R'nin (P) koşulunu sağlaması için gerek ver yeter şart bir PCI-bölge olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ R yarı basit Artin olmayan bir sağ kalıtsal halka olsun ve R'nin (P) koşulunu sağladığı kabul edilsin. R halkası (P_c) koşulunu sağladığından, Önerme 4.1.2'den, S bir yarı basit Artin halka ve T bir PCI-bölge olmak üzere $R = S \times T$ formunda yazılır. Eğer R sağ self-injektif ise, sağ kalıtsal halkalar üzerindeki injektif sağ modüllerin faktörleri de injektif olduğundan, devirli sağ R-modüller injektiftir. Teorem 3.0.3, tüm devirli modülleri injektif olan halkaların yarı basit Artin olduğunu söylemektedir. Dolayısıyla bu durum, R halkasının yarı basit Artin olmaması ile çelişir. R, sağ self-injektif değildir. Lemma 4.2.2'den, R halkasının ayrıştırılamaz olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $S = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R bir PCI-bölgedir.

$(\Leftarrow)$ Tanımdan açıktır. ■

Sağ kalıtsal olmayan fakat (P) koşulunu sağlayan halkaların PCI-bölge olmadığı aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 4.2.2. Yarı basit Artin olmayan QF-halkalar (P) koşulunu sağlar. Fakat bu halkalar ne sağ kalıtsaldır ne de PCI-bölgedir.

Teorem 4.2.1. Herhangi bir R sağ Artin halkasının (P) koşuluna sahip olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birini sağlamasıdır:

i) R, QF-halkadır.

ii) R aşağıdakilerden birini sağlayan, $J = Z(R_R)$ olacak şekilde bir yerel halkadır:

   a) R sağ uniformdur ve $R/\operatorname{Soc}(R_R) \leq_d E(R_R)/\operatorname{Soc}(R_R)$'dir ya da

   b) $u.dim(R_R) = 2$ ve her minimal $S \leq R_R$ için R/S injektiftir.

İspat: $(\Rightarrow)$ R, (P) koşulunu sağlayan sağ Artin bir halka olsun. Eğer R sağ self-injektif ise bir QF-halkadır.

R halkasının sağ self-injektif olmadığı kabul edilsin. Eğer R içinde aşikar olmayan bir idempotent eleman varsa, $R = eR \oplus (1-e)R$ şeklinde yazılabilir. Lemma 4.2.1'den, eR ve $(1-e)R$ dik toplam terimlerinden biri R_R modülüne izomorftur. Sağ Artin halkalar kendilerine izomorf olan öz sağ alt modüle sahip olamayacağından bu bir çelişkidir. Dolayısıyla R halkası, aşikar olmayan bir idempotent eleman içermez. R, kendi üzerinde sağ modül olarak ayrıştırılamaz ve Artin olduğundan bir yerel halkadır. (P) koşulunu sağlayan halkalar üzerinde tekil-olmayan basit sağ modüller injektif olduğundan, R içindeki minimal sağ idealler tekildir. Buradan, $Z(R_R) \neq 0$ olduğu görülür. Herhangi bir $x \in R \setminus Z(R_R)$ için, Lemma 4.1.3'den, $xR \cong R_R$'dir. R sağ Artin olduğundan $xR = R$ ve böylece $J = Z(R_R)$ elde edilir.

Eğer R sağ CS halka ise, R_R ayrıştırılamaz olduğundan $u.dim(R_R) = 1$'dir. Bu durumda $\operatorname{Soc}(R_R)$, R halkasının basit büyük sağ ideali olduğundan, $R/\operatorname{Soc}(R_R)$ bir öz devirli sağ R-modüldür. (P) koşulu, $R \to R/\operatorname{Soc}(R_R)$ kanonik epimorfizmasının, bir $E(R_R) \to R/\operatorname{Soc}(R_R)$ epimorfizmasına genişletilebilmesini gerektirdiğinden, $R/\operatorname{Soc}(R_R) \leq_d E(R_R)/\operatorname{Soc}(R_R)$ olduğu görülür.

R halkasının sağ CS halka olmadığı kabul edilsin. $u.dim(R_R) = n$ diyelim. O zaman $n > 1$'dir ve $i = 1, \ldots, n$ için her bir S_i minimal sağ ideal olmak üzere, $\operatorname{Soc}(R_R) = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ olarak yazılır. Yine her bir $i = 1, \ldots, n$ için $E_i = E(S_i)$ ise $E = E(R_R) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ elde edilir. (P) koşulu R/S_1 modülünün, E'nin bir homomorfik görüntüsü olduğunu söylediğinden, $E = R + D$ ve $S_1 = R \cap D$ olacak şekilde bir $D \leq E$ mevcuttur. Bu durumda

$$(R/S_1) \oplus (D/S_1) = E/S_1 \cong (E_1/S_1) \oplus (E_2 \oplus \cdots \oplus E_n)$$

izomorfizmasına ulaşılır. $\sigma : R \to (R/S_1)$ kanonik epimorfizma ve $Z = Z(R_R)$ olmak üzere, $\sigma(Z) = (Z/S_1) \subseteq Z(R/S_1)$'dir. $1 + S_1 \in R/S_1$ için $r.ann(1 + S_1) = S_1$ ve S_1 R_R içinde büyük olmadığından $1 + S_1 \notin Z(R/S_1)$ dir. $Z(R/S_1) \neq (R/S_1)$ ve (Z/S_1), R/S_1'in maksimal alt modülü olduğundan, $Z(R/S_1) = Z/S_1 = J/S_1$ dir. D/S_1 tekil olduğundan,

$$\begin{aligned}\frac{R}{Z} &\cong \frac{R/S_1}{Z/S_1} \oplus \frac{D/S_1}{D/S_1} \cong \frac{E/S_1}{Z(E/S_1)} \cong \frac{(E_1/S_1) \oplus (E_2 \oplus \cdots \oplus E_n)}{Z(E_1/S_1) \oplus Z(E_2) \oplus \cdots \oplus Z(E_n)} \\ &\cong \frac{E_2}{Z(E_2)} \oplus \cdots \oplus \frac{E_n}{Z(E_n)}\end{aligned}$$

ve R/Z basit sağ R-modül olduğundan, $n = 2$ elde edilir.

$S_1,\ S_2$ minimal sağ idealler olmak üzere $\operatorname{Soc}(R_R) = S_1 \oplus S_2$ şeklinde yazılsın. Son olarak $i = 1, 2$ için R/S_i modülünün injektif olduğu gösterilecektir. $1 + S_i \in R/S_i$ elemanı alınsın. $r.ann(1 + S_i) = S_i$ R_R'nin büyük alt modülü olmadığından R/S_i tekil değildir. Lemma 4.2.3'den, R/S_i bir tekil modülle bir injektif modülün dik toplamı olarak yazılır. R/S_i yerel olduğundan ayrıştırılamazdır. Dolayısıyla R/S_i modülünün injektif olduğu elde edilir.

$(\Leftarrow)$ R bir QF-halka olsun. QF-halkalar self-injektif olduğundan, R halkası (P) koşulunu sağlar.

R sağ Artin halkası, teoremde (ii)-(a)'da belirtilen özelliklere sahip olsun. Keyfi bir öz devirli sağ R-modül R/I için, $\operatorname{Soc}(R_R)$ basit ve R_R içinde büyük olduğundan, $\operatorname{Soc}(R_R) \subseteq I$ elde edilir. Dolayısıyla bariz bir $f : R/\operatorname{Soc}(R_R) \to R/I$ epimorfizması mevcuttur. $\pi : E(R_R)/\operatorname{Soc}(R_R) \to R/\operatorname{Soc}(R_R)$ projeksiyon ve $\sigma : E(R_R) \to E(R_R)/\operatorname{Soc}(R_R)$ kanonik epimorfizma olmak üzere $f \circ \pi \circ \sigma : E(R_R) \to R/I$ epimorfizması sayesinde R/I, $E(R_R)$'nin bir homomorfik görüntüsü olarak yazılır.

R sağ Artin ve (ii)-(b)'de verilen özellikleri sağlayan bir halka ve R/I keyfi bir öz devirli sağ R-modül olsun. $I \neq 0$ olduğundan, $S \subseteq I$ olacak şekilde bir minimal sağ ideal S vardır. R/S injektif ve $R/S \to R/I$ epimorfizması mevcut olduğundan R halkası (P) koşulunu sağlar. ■

Teorem 4.2.1'teki sağ Artin hipotezinin göz ardı edilemeyeceği aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 4.2.3. R bölüm halkası olmayan bir PCI-bölge ise (P) koşulunu sağlar fakat sağ self-injektif değildir. Dolayısıyla R bir QF-halka olamaz. Ayrıca herhangi bir bölgenin sağ uniform boyutu 1 ya da sonsuzdur. $\operatorname{Soc}(R_R) = 0$ ve R_R injektif olmadığından R Teorem 4.2.1 (ii)'deki özellikleri sağlayan bir halka değildir.

(P) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan sağ Artin halkalara aşağıdaki şekilde bir örnek verilebilir.

Örnek 4.2.4. R, $\operatorname{Soc}(R_R) = J = Z(R_R)$ olacak şekilde sol Artin olmayan bir sağ Artin sağ zincir halka olsun. Bu durumda R'nin sağ idealleri R, J ve $\{0\}$'dan ibarettir. Bu tip halkalara bir örnek [22] 4.46(e)'de görülebilir. R sol Artin halka olmadığından sağ self-injektif değildir. Ayrıca R sağ Artin olduğundan bir mükemmel halkadır ve böylece bir sağ maks halkadır. $R_R \ll E(R_R)$ olduğu kabul edilsin. Bir $x \in E(R_R) \setminus R$ için $f : R \to xR$, soldan x ile çarpım homomorfizmasının bir $\tilde{f} : E(R_R) \to E(R_R)$ genişlemesi vardır. $R_R \ll E(R_R)$ olduğundan $xR = \tilde{f}(R) \ll E(R_R)$ ve böylece $\operatorname{Rad}(E(R_R)) = \sum_{A \ll E(R_R)} A = E(R_R)$ elde edilir. Ancak R sağ maks halka olduğundan R üzerindeki sağ modüllerin radikalleri kendilerine eşit olamaz. Kabul yanlıştır. Böylece R_R injektif bürümünün küçük alt modülü değildir. Bu durumda $R + D = E(R_R)$ olacak şekilde bir $D \lneq E(R_R)$ vardır. $R \lneq_e E(R_R)$ olduğundan $R \cap D = \operatorname{Soc}(R_R)$'dir. Dolayısıyla $E(R_R)/\operatorname{Soc}(R_R) = (R/\operatorname{Soc}(R_R)) \oplus (D/\operatorname{Soc}(R_R))$ olur. Teorem 4.2.1'den, R halkası (P) koşulunu sağlar.

Sonuç 4.2.6. Herhangi bir R sağ Artin halkasının (P_c) koşuluna sahip olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birini sağlamasıdır:

i) R, QF-halkadır.

ii) $R = S \times T$ halka ayrışımı mevcuttur öyle ki S yarı basit Artin halka ve T, aşağıdaki koşullardan birini sağlayan, $Z(T_T) = J(T)$ olacak şekilde bir yerel halkadır:

   a) T sağ uniform halkadır ve $T/\operatorname{Soc}(T_T) \leq_d E(T_T)/\operatorname{Soc}(T_T)$'dir ya da

   b) $u.dim(T_T) = 2$ ve her minimal $I \leq T_T$ için T/I injektiftir.

İspat: $(\Rightarrow)$ R, (P_c) koşulunu sağlayan bir sağ Artin halka olsun. Eğer R sağ self-injektif ise bir QF-halkadır. R halkasının sağ self-injektif olmadığı kabul edilsin. Sağ Artin halkalar, ayrıştırılamaz sağ ideallerinin bir dik toplamı olarak yazılabildiğinden, $R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$ olacak şekilde primitif ortogonal idempotentlerin bir tam kümesi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mevcuttur. R halkasının yarı basit Artin halka olmadığı kabul edildiğinden, Lemma 4.1.2'den, yalnızca biri dışında tüm e_iR sağ ideallerinin minimal olduğu görülür. $e_1R, \ldots, e_{n-1}R$ minimal sağ idealler, e_nR minimal olmayan sağ ideal, $S = e_1R \oplus \cdots \oplus e_{n-1}R$ ve $T = e_nR$ olsun. S, $\operatorname{Soc}(R_R)$'nin tekil-olmayan kısmıdır. Ayrıca (P_c) koşuluna sahip halkalar üzerinde, tekil-olmayan minimal sağ idealler injektif olduğundan, $\mathrm{Soc}(T_R)$ tekildir. Böylece $R = S \times T$, bir halka ayrışımıdır. Geri kalan kısım Teorem 4.2.1'den elde edilir.

$(\Leftarrow)$ R bir QF-halka ise (P_c) koşulunu sağlar. Eğer R, (ii)'de verilen özelliklere sahip bir halka ise, bu durumda Teorem 4.2.1'den, T halkası (P) koşulunu sağlar. Dolayısıyla $R = S \times T$ de (P_c) özelliğine sahiptir. ■

4.3. Artin Cebir Özel Durumu

Bu bölümde (P_c) koşulunu sağlayan Artin cebirlerin yapısı incelenecektir ve değişmeli Artin halkalar üzerinde (P_c) özelliğini sağlayan Artin cebirlerin tam olarak QF-halka olan Artin cebirler olduğu sonucuna ulaşılacaktır. Bu durum sağ Artin halkalar için doğru değildir. (P) koşulunu ve dolayısıyla da (P_c) koşulunu sağlayan fakat QF-halka olmayan sağ Artin halkaların varlığı Örnek 4.2.4'den görülebilir.

Bu bölüm için, K halkasının değişmeli Artin halka ve R'nin de K halkası üzerinde bir Artin cebir olduğu kabul edilsin. K bir Artin halka olduğundan, tüm basit K-modüllerin izomorfizma sınıflarının temsilcilerinin kümesi sonludur. $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$, K halkasının basit modüllerinin temsilcilerinin bir tam kümesi olmak üzere $E_K = \oplus_{i=1}^{n} E(T_i)$, K-modüller kategorisindeki minimal injektif eş-üreticidir. mod-R ve R-mod sırasıyla sonlu üretilmiş sağ R-modüller kategorisi ve sonlu üretilmiş sol R-modüller kategorisini göstersin. $D = Hom_K(\_, E_K)$ funktoru mod-R ve R-mod arasında, D^2 birim funktora doğal izomorfik olacak şekilde bir dualitedir. D funktoru bir dualite olduğundan, ayrıştırılamaz modülleri korur ve sonlu üretilmiş injektif modülleri sonlu üretilmiş projektif modüllere, sonlu üretilmiş projektif modülleri ise sonlu üretilmiş injektif modüllere götürür. Ayrıca her M sonlu üretilmiş sağ (sol) R-modülü için $l_R(M) = l_R(D(M))$ ve $l_K(M) = l_K(D(M))$ olduğu bilinmektedir.

R Artin cebiri (P_c) koşulunu sağlar ise, Sonuç 4.2.6'dan, R halkası ya bir QF-halkadır ya da $R = S \times T$ halka ayrışımı mevcuttur öyle ki S yarı basit Artin halka ve T, $J(T) = Z(T_T)$ olacak şekilde sağ uniform boyutu 1 veya 2 olan bir yerel halkadır. Böylece R sağ (sol) self-injektif değilse T halkası, $\mathrm{Soc}(T_T) \cong T/J(T)$ veya $\mathrm{Soc}(T_T) \cong (T/J(T))^2$ olacak şekilde bir yerel halkadır. Öte yandan T Artin cebiri, T_T

ayrıştırılamaz olacak şekilde (P_c) koşulunu sağlayan bir halka olduğundan (P) özelliğini de sağlar. Dolayısıyla (P_c) özelliğini sağlayan Artin cebirlerin yapısını anlamak için (P) koşulunu sağlayan Artin cebirlerin yapısını incelemek yeterlidir.

Lemma 4.3.1. R, (P) koşulunu sağlayan fakat QF-halka olmayan bir yerel Artin cebir ise ya $\mathrm{Soc}(R_R)$ ya da $\mathrm{Soc}({}_RR)$ basittir.

İspat: R, (P) koşulunu sağlayan fakat QF-halka olmayan bir Artin cebir olsun. Teorem 4.2.1 uyarınca, $\mathrm{Soc}(R_R)$ basittir ya da $i = 1, 2$ için S_i R halkasının minimal sağ ideali olmak üzere $\mathrm{Soc}(R_R) = S_1 \oplus S_2$'dir. $\mathrm{Soc}(R_R) = S_1 \oplus S_2$ olsun. Teorem 4.2.1'den, R/S_1 modülü injektiftir. Dahası R bir yerel halka olduğundan R/S_1 ayrıştırılamazdır. Dolayısıyla R/S_1, mod-R kategorisinin izomorfizmaya bağlı olarak tek ayrıştırılamaz injektif modülüdür. $\sigma : R \to R/S_1$ kanonik epimorfizmasının dualite altındaki görüntüsü olan $D(\sigma) : D(R/S_1) \to D(R_R)$ dönüşümü bir monomorfizmadır. R_R, mod-R kategorisinde izomorfizmaya bağlı olarak tek ayrıştırılamaz projektif modül olduğundan $D(R_R)$, R-mod kategorisindeki tek ayrıştırılamaz injektif modüldür yani $D(R_R) \cong E({}_R(R/J))$'dir. Öte yandan R/S_1 mod-R kategorisindeki izomorfizmaya bağlı olarak tek ayrıştırılamaz injektif modül olduğundan $D(R/S_1)$ R-mod kategorisindeki tek ayrıştırılamaz projektif modüldür. Buradan $D(R/S_1) \cong_R R$ elde edilir. Dolayısıyla bir ${}_RR \to E({}_R(R/J))$ monomorfizması mevcuttur. $\mathrm{Soc}(E({}_R(R/J)))$ basit olduğundan $\mathrm{Soc}({}_RR)$ basittir. ■

Teorem 4.3.1. K değişmeli Artin halka ve R, K üzerinde bir Artin cebir olsun. R'nin (P) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart QF-halka olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ QF-halkalar (P) koşulunu sağladığından açıktır.

$(\Rightarrow)$ R, (P) özelliğini sağlayan bir Artin cebir olsun. R halkasının bir QF-halka olmadığı kabul edilsin. Lemma 4.3.1'den, ya $\mathrm{Soc}(R_R)$ ya da $\mathrm{Soc}({}_RR)$ basittir. $\mathrm{Soc}({}_RR)$'nin basit olduğu kabul edilsin. Bu durumda $E({}_RR)$ ayrıştırılamaz injektif sol R-modüldür. R yerel halka olduğundan izomorfizmaya bağlı bir tek ayrıştırılamaz injektif sol R-modül mevcuttur. Buradan $E({}_RR) \cong D(R_R)$ elde edilir. $f : {}_RR \to D(R_R)$ büyük monomorfizma olsun. f aynı zamanda bir K-modül monomorfizmasıdır. D funktoru mod-$K \longrightarrow mod$-K bir dualite olduğundan $l_K(R) = l_K(D(R_R))$'dir. Dolayısıyla f

bir izomorfizmadır ve ${}_RR \cong D(R_R)$ elde edilir. Bu ise R halkasının sol self-injektif olmaması ile çelişir. Benzer bir argüman ile $\mathrm{Soc}(R_R)$ basit iken R halkasının sağ self-injektif olduğu görülerek çelişkiye ulaşılır. Sonuç olarak R bir QF-halkadır. ■

Sonuç 4.3.1. K değişmeli Artin halka ve R, K üzerinde bir Artin cebir olsun. R'nin (P_c) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart QF-halka olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ QF-halkalar (P_c) koşulunu sağladığından açıktır.

$(\Rightarrow)$ R, (P_c) özelliğini sağlayan fakat QF-halka olmayan bir Artin cebir olsun. Sonuç 4.2.6'dan, S yarı basit Artin halka ve T bir Artin yerel halka olacak şekilde $R = S \times T$ halka ayrışımı mevcuttur. T halkası (P_c) koşulunu sağladığından ve T_T ayrıştırılamaz olduğundan T, (P) koşulunu sağlar. Öte yandan R bir QF-halka olmadığından T halkası da QF değildir. Sonuç olarak T, (P) koşulunu sağlayan fakat QF-halka olmayan bir Artin cebirdir. Ancak bu durum Teorem 4.3.1 ile çeliştiğinden kabul yanlıştır. R bir QF-halkadır. ■

Aşağıdaki örnek (P) ve (P_c) özelliklerinin bölüm halkalarına taşınmadığını göstermektedir.

Örnek 4.3.1. k bir cisim olmak üzere $R = k[x,y]/(x^2,y^2)$ olsun. ([42], Exercise 15.5) referansında da görüldüğü gibi R, k üzerinde 4 boyutlu değişmeli bir Frobenius cebirdir. R self-injektif olduğundan bir QF-halkadır ve (P) koşulunu sağlar. $I = (x^2,xy,y^2)/(x^2,y^2)$ olmak üzere $(R/I) \cong k[x,y]/(x^2,xy,y^2)$ Artin cebiri ele alınsın. R/I'nın $k\bar{x}$ ve $k\bar{y}$ idealleri arasında $\bar{x} \mapsto \bar{y}$ ile tanımlanan izomorfizma R/I'nın kendi üzerindeki bir modül endomorfizmasına genişleyemediğinden R/I self-injektif değildir. Dolayısıyla R/I bir QF-halka olmadığından, Teorem 4.3.1'den, (P) özelliğini sağlamaz.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, belirli bir özelliğe sahip devirli modülleri injektif modüllerin görüntüsü olarak yazılabilen iki ayrı halka sınıfı incelenmiştir. Bunlardan ilki, projektif olmayan devirli modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olan halkalar, ikincisi ise halkanın kendisine izomorf olmayan devirli modülleri injektif modüllerin homomorfik görüntüsü olararak yazılabilen halkalardır. Gösterimde kolaylık olması açısından bu özellikler aşağıdaki şekilde adlandırılmıştır:

(P_c): Projektif olmayan devirli sağ R-modüller injektif modüllerin homomorfik görüntüsüdür.

(P): R_R'ye izomorf olmayan devirli her sağ R-modül bir injektif modülün homomorfik görüntüsüdür.

Sağ self-injektif halkalar, üzerinde çalışılmış olan (P_c) ve (P) koşullarını sağlamaktadır. Fakat bu koşulları sağlayan halkalar sadece sağ self-injektif halkalardan ibaret değildir. Yapılan tez çalışmasında, bu durum örneklerle desteklenmiştir ve sağ self-injektif olmayan fakat yukarıdaki koşulları sağlayan halkaların yapısının belirlenmesi amaçlanmıştır.

Çalışmanın ana kısmında ilk olarak (P_c) koşulunu sağlayan halkalar incelenmiş ve bu koşulu sağlayan sağ kalıtsal halkaların yapısı tam olarak belirlenmiştir. (P_c) özelliğine sahip bir halkanın kapalı sağ ideallerinin yapısı incelenerek, bu halkanın ya bir sağ CS-halka olduğuna ya da kendi üzerinde sağ modül olarak ele alındığında injektif bürümünün sonlu üretilmiş olduğuna ulaşılmıştır. Ayrıca (P_c) koşulunu sağlayan fakat sağ self-injektif olmayan sağ CS-halkalar için bir halka ayrışımı elde edilmiştir. Ardından, (P) koşulunu sağlayan halkalar üzerinde çalışılmış ve bu halkalar, aşikar olmayan idempotent eleman içerip içermeme durumlarına göre ele alınmıştır. Çeşitli hipotezler altında, (P) koşulunu karakterize eden teoremler elde edilmiştir. Son olarak verilen iki koşulu sağlayan sağ Artin halkaları karakterize eden teoremlerden hareketle, (P_c) ve (P) koşullarını sağlayan Artin cebirler üzerinde çalışılmıştır. Artin cebirler için, standart dualitenin özelliklerinden yararlanılarak, verilen koşulların self-injektiflik ile denkliği gösterilmiştir.

Üzerinde çalışılmış olan koşulları sağlayan halka sınıfları, başta QF-halkalar olmak üzere, literatürde iyi bilinen bazı halka sınıflarını kapsamaktadır. Ancak (P_c) ve (P) koşulları için genel bir karakterizasyon henüz verilmemiştir. Bu doğrultuda, ilk olarak karakterizasyonda eksik kalan noktaların kapatılması hedeflenebilir veya bu koşulları sağlayan halkaların, herhangi bir hipotez altında sınırlandırılmamış karakterizasyonlarının elde edilmesi amaçlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Baer, R. Abelian groups that are direct summands of every containing Abelian group. Bulletin of the American Mathematical Society. 1940, 46, 800-806.

[2] Matlis, E. Injective modules over Noetherian rings. Pasific Journal of Mathematics. 1958, 8, 511-528.

[3] Papp, Z. On algebraically closed modules. Publicationes Mathematicae Debrecen. 1959, 6, 311-327.

[4] Bass, H. Injective dimension in noetherian rings. Transactions of the American Mathematical Society. 1962, 102, 18-29.

[5] Osofsky, B. Rings all of whose finitely generated modules are injective. Pasific Journal of Mathematics. 1964, 14(2), 645-650.

[6] Osofsky, B.L. Noncommutative rings whose cyclic modules have cyclic injective. Pasific Journal of Mathematics. 1968, 25, 331-340.

[7] Faith, C., When are proper cyclics injective? Pasific Journal of Mathematics. 1973, 45(1), 97-112.

[8] Boyle, A.K., Goodearl, K.R. Rings over which certain modules are injective. Pasific Journal of Mathematics. 1975, 58(1), 43-53.

[9] Goel, S.C., Jain, S.K., Singh, S. Rings whose cyclic modules are injective or projective. Proceedings of the American Mathematical Society. 1975, 53(1), 16–18.

[10] Huynh, D.V., Jain, S.K., López-Permouth, S. When cyclic singular modules over a simple ring are injective. Journal of Algebra. 2003, 263, 185-192.

[11] Jain, S.K., López-Permouth, S. Rings whose cyclic are essentially embeddable in projective modules. Journal of Algebra. 1990, 128, 257-269.

[12] Koehler, A. Rings for which every cyclic module is quasi-projective. Mathematische Annalen. 1970, 189, 311-316.

[13] Koehler, A. Rings with quasi-injective cyclic modules. Quarterly Journal of Mathematics. 1974, 25, 51-55.

[14] Aydoğdu, P., López-Permouth, S. An alternative perspective on injectivity of modules. Journal of Algebra. 2011, 338(1), 207–219.

[15] Trlifaj, J. Whitehead test modules. Transactions of the American Mathematical Society. 1996, 348(4), 1521-1554.

[16] Alizade, R., Büyükaşık, E., Er, N. Rings and modules characterized by opposites of injectivity. Journal of Algebra. 2014, 409, 182–198.

[17] Lam, T.Y. A First Course in Noncommutative Rings, Second Edition. Springer-Verlag, New York, 2001, 388s.

[18] Passman, D.S., A Course in Ring Theory. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2004, 306s.

[19] Goodearl, K.R., Warfield JR., R.B., An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, Second Edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 344s.

[20] Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V. Algebras, Rings and Modules, Volume I. Springer, Netherlands, 2004, 380s.

[21] Anderson, F.W., Fuller, K.R. Rings and Categories of Modules, Second Edition. Springer-Verlag, New York, 1992, 376s.

[22] Lam, T.Y. Lectures on Modules and Rings. Springer-Verlag, New York, 1999, 557s.

[23] Dung, N. V., Huynh, D.V., Smith, P.F., Wisbauer, R. Extending Modules. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1994, 224s.

[24] Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V. Algebras, Rings and Modules, Volume 2. Springer, Netherlands, 2007, 400s.

[25] Mohamed, S.H., Müller, B.J., Continuous and Discrete Modules. Cambridge University Press, New York, 1990, 126s.

[26] Goodearl, K.R. Ring Theory, Nonsingular rings and modules. Marcel Dekker, INC., New York, 1976, 206s.

[27] Dauns, J., Zhou, Y. Classes of Modules. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006, 232s.

[28] Vinsonhaler, C. Supplement to the paper: "Orders in QF-3 rings". Journal of Algebra. 1971, 17, 149–151.

[29] Auslander, M., Reiten, I., Smalø, S.O. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, 425s.

[30] Facchini, A. Module Theory, Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998, 285s.

[31] Faith, C., Rings and Things and a Fine Array of Twentieth Century Associative Algebra, Second Edition. American Mathematical Society, Providence, 2004, 475s.

[32] Faith, C., Rings whose modules have maximal submodules. Publicacions Matemàtiques. 1995, 39, 201-214.

[33] Bass, H. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Transactions of the American Mathematical Society. 1960, 95(3), 466-488.

[34] Nakayama, T. On Frobeniusean algebras. I. Annals of Mathematics. 1939, 40(3), 611-633.

[35] Ikeda, M. A characterization of quasi-Frobenious rings. Osaka Journal of Mathematics. 1952, 4(2), 203-209.

[36] Faith, C. Rings with ascending chain condition on annihilators. Nagoya Mathematical Journal. 1966, 27, 179-191.

[37] Faith, C., Walker, E.A. Direct sum representations of injective modules. Journal of Algebra. 1967, 5, 203-221.

[38] Kawada, Y. On dominant modules and dominant rings. Journal of Algebra. 1979, 56, 409–435.

[39] Baccella, G. Semiprime $\aleph$-QF3 rings. Pasific Journal of Mathematics. 1985, 120(2), 269–278.

[40] Jain, S.K., Srivastava, A.K., Tuganbaev, A.A., Cyclic Modules and the Structure of Rings. Oxford University Press, Oxford, 2012.

[41] Atiyah, M.F., MacDonald, I.G. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Great Britain, 1969, 128s.

[42] Lam, T.Y., Exercises in Modules and Rings. Springer-Verlag, New York, 2007, 414s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Elif Tuğçe MERİÇ
Doğum Yeri ve Yılı	:	Bornova, 1987
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	eltugcekaya@gmail.com

Eğitim Durumu

Lisans	:	Ege Üniversitesi, Matematik, 2010
Yüksek Lisans	:	Ege Üniversitesi, Matematik, 2012
Doktora	:	Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Cebir ve Sayılar Teorisi, 2019

Meslekî Deneyim

Araştırma Görevlisi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013 –

Yayınları

1. Meriç, E.T., Vergili, T., Karaca, İ. Computing higher dimensional digital homotopy groups, Applied Mathmatics and Information Sciences. 2014, 8(5), 2417-2425.

2. Güroğlu, A.T., Meriç, E.T. Principally goldie*-lifting modules, Ukranian Mathematical Journal. 2018, 70(7), 905-912.