T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BOOLE SIRALAMA YÖNTEMİ VE REZİDÜEL HATA ANALİZİ

Hale Gül DAĞ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER

MANİSA–2020

Hale Gül DAĞ

VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BOOLE SIRALAMA YÖNTEMİ VE REZİDÜEL HATA ANALİZİ

2020

TEZ ONAYI

Hale Gül DAĞ tarafından hazırlanan **"Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Boole Sıralama Yöntemi ve Rezidüel Hata Analizi"**adlı tez çalışması xx/xx/xxxx tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL** Dokuz Eylül Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hale Gül DAĞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{A}$	Bilinmeyen Boole Katsayıları
$\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}_{kj}, \boldsymbol{\beta}_{kj})$	Gecikmeli Denklemler için Geçiş Matrisi
$\mathbf{D}$	Boole polinomunun Türev Geçiş Matrisi
$\mathbf{E}$	Taylor Polinomunun Türev Geçiş Matrisi
$\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{x})$	Hata Fonksiyonu
$\mathbf{H}^{\mathbf{T}}$	Boole Katsayı Matrisi
${}^{R}\boldsymbol{K}$	Boole Polinomu için Çekirdek Fonksiyonu
${}^{t}\boldsymbol{K}$	Taylor Polinomu için Çekirdek Fonksiyonu
$\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{x})$	Boole Polinomu
$\boldsymbol{\Re}_N(\boldsymbol{x})$	Reziduel Fonksiyon
$[\mathbf{U};\ \boldsymbol{\lambda}]$	Koşullar için Arttırılmış Matrisi
$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$	Arttırılmış Matris
$\mathbf{X}(\boldsymbol{x})$	Taylor Polinomu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

TABLO DİZİNİ

Sayfa

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER’e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Sadece eğitimim boyunca değil hayatımın her anında destek ve yol gösterici olan kardeşlerim Adile DAĞ ve Zeynep BAYINDIR’a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana maddi manevi her konuda destek olan, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan annem Ümmü DAĞ ve babam İsmail DAĞ’a yürekten teşekkür ederim.

Hale Gül DAĞ
Manisa, 2020

ÖZET

Yüksek Lisans

Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Boole Sıralama Yöntemi ve Rezidüel Hata Analizi

Hale Gül DAĞ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kübra ERDEM BİÇER

Bu tezin amacı Boole sıralama yöntemini kullanarak Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmektir. Bu yöntemde verilen problem Boole polinomu, türevleri ve sıralama noktalarıyla matris denklemine dönüştürülür. Daha sonra bu matris denkleminin çözümünden Boole katsayıları elde edilir. Yaklaşık çözüm $[a, b]$ aralığında kesilmiş Boole serisi formundadır.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışı, kullanım alanları ve sınıfları belirtilmiş ve çözümleri hakkında kaynak bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde kaynak bilgiler verilmiş ve Boole polinomunun tarihi gelişimi ve özelliklerine değinilmiştir. Üçüncü bölümde Boole sıralama yöntemi sunulmuştur. Dördüncü bölümde Boole sıralama yönteminin doğruluğunu göstermek için Rezidüel fonksiyonlara dayalı hata tahmini geliştirilmiştir. Beşinci bölümde Boole sıralama yöntemi sayısal örneklere uygulanmıştır ve sonuçlar tablo ve grafiklerde karşılaştırılmıştır. Altıncı bölümde ise sonuçlar yorumlanmış ve ileride bu yöntemle yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Boole polinomu, Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler, sıralama noktaları, Rezidüel hata analizi

2020, 109 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Boole Collocation Method for the Approximate Solution of Volterra-Fredholm Intgero-Differential Equations and Rezidüel Error Analysis

Hale Gül DAĞ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Dr. Kübra ERDEM BİÇER

This aim of the thesis is obtain the approximate solutions of the Volterra-Fredholm integro-differential equations by using the Boole collocation method. In this method, the problem given as a linear algebraic equation is transformed into a matrix equation with Boole polinomial, its derivatives and collocation points. Then, Boole coefficients are obtained from the solution of this matrix equation. The approximate solution is in the truncated Boole series form in the interval $[a, b]$.

The thesis consists of six chapters. In the first chapter, the emergence of the Volterra-Fredholm integro-differential equations, their using areas and classes are mentioned and the source information about their solution are given. In the second chapter, source information are given and historical development and features of Boole polynomial are mentioned. In the third chapter, Boole collocation method is presented. In the fourth chapter, the error estimated based on the Residual dunctions has been developed to show the accuracy of the Boole collocation method. In fifth chapter, Boole collocaiton method is applied to numerical examples and the results are compared in the table and figures. In the sixth chapter, the results are interpreted and future studies that can be done with this method are specified.

Keywords: Boole polynomial, Volterra-Fredholm integro-differential equations, collocation points, Residual error analysis

2020, 109 pages

1. GİRİŞ

Füze, roket, uydu ve gezegen hareketlerinin belirlenmesi, elektrik devrelerinde yük ya da akımın bulunması, çubukta ve levhalarda ısı yayılması problemi, telin ya da levhanın titreşimleri, radyoaktif cismin bozulması veya bir canlı topluluğunun nüfus artış problemi, kimyasal reaksiyonların incelenmesi, belli geometrik özelliklere sahip eğrilerin bulunması gibi fen ve mühendislik bilimlerinin çeşitli alanlarındaki problemlerin matematiksel modellenmesinde diferansiyel denklemler kullanılır [1-5, 62]. Diferansiyel denklemler, 17. yüzyılın ikinci yarısında Newton (1643-1727) ve Leibniz (1646-1716) tarafından diferansiyel ve integral hesap üzerine yapılan çalışmalarla ortaya çıkmıştır [6]. İntegral denklemler çeşitli fiziksel problemlerde ve diferansiyel denklemler teorisinde karşılaşılır [7].

İntegral denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin çalışmalarının kökenleri Abel, Lotka, Fredholm, Malthus, Verhulst ve Volterra'nın mekanik, matematiksel biyoloji ve iktisat problemleri üzerindeki çalışmalarına dayanabilir [8]. İntegro-diferansiyel denklemler, 1900 yılının başlarında Volterra'nın kalıtsal etkiler üzerine odaklayarak bir popülasyon büyüme modeli ile ilgili çalışmayı araştırmasıyla başlayıp bilim insanları ve araştırmacılar tarafından ısı transferi, genel olarak difüzyon süreci, nötron difüzyonu ve artan-azalan üretim oranları ile birlikte bulunan biyolojik türler gibi bilim uygulamalarındaki çalışmaların araştırılmasıyla bilimin çeşitli alanlarında kullanılmıştır [9]. Ayrıca bu denklemlerin bilim, mühendislik ve teknoloji alanları ile birlikte uygulaması genişlemiş ve gelişmiştir. Fiziksel olayların matematiksel olarak yorumlanmasında ve modellenmesinde integro-diferansiyel denklemler bir araç olarak kullanılmaktadır. Örneğin; biyolojik modeller, akışkan dinamiği, ekoloji, finansal matematiğin kontrol teorisi, uzay sistemleri, endüstriyel matematik, elektrokimya, ısı ve kütle transferi, nüfus dinamikleri ve insan popülasyonunu tahmin etme gibi problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde kullanılır [10-16, 30].

İntegral denklemler bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. İntegro-diferansiyel denklemler ise bilinmeyen fonksiyon hem türev olarak hem de integral işareti altında görülür. İntegro-diferansiyel denklemler integrasyon limitlerine göre sınıflandırılır. Volterra integro-diferansiyel denklemlerde integrasyon limitlerinden en az biri değişkendir. Fredholm integro-diferansiyel denklemlerde ise integrasyon limitleri sabittir [9,17-18].

İntegro-diferansiyel denklemlerin uygulama alanı geniş olduğu için bu denklemlerin çözümü ilgi görmüştür. Genellikle analitik yöntemlerle çözümü zor olduğu için sayısal yöntemler tercih edilmektedir. İntegro-diferansiyel denklemlerinin ve bu denklem sınıflarının sayısal çözümleri için birçok yöntem geliştirilmiştir [2, 5,13]: Bernoulli polinomu, türevleri ve sıralama noktaları kullanılarak karışık lineer Fredholm integro-diferansiyel-fark denklemlerinin ve Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerinin çözümü için sayısal yöntemler uygulanmıştır [19-20]. Bessel polinomuna dayalı sayısal yöntem ile lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin ve denklem sistemler, lineer Volterra integro-diferansiyel denklemler ve lineer Fredholm-Volterra intgero-diferansiyel denklemler çözülmüştür [21-24]. Dickson polinomu kullanılarak genel integro-diferansiyel-fark denklemlerinin çözümü elde edilmiştir [25]. Laguerre polinomu kullanılarak lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin ve kesirli Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümü için sayısal yöntemler ele alınmıştır [26-27]. Taylor polinomuna dayalı sayısal yöntemler lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin ve lineer Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümü için kullanılmıştır [28-29]. Fibonacci polinomu, türevi ve sıralama noktaları kullanılarak lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sistemleri ve lineer Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemleri çözülmüştür [30-31]. Ayrıca Adomian çözüm yöntemi [32], hızlı çok ölçekli Galerkin yöntemi [33], doğrudan-homotopi yöntemi [34], Chebyshev dalgacık yöntemi [35], geliştirilmiş bir çoğalma çekirdeği yöntemi [36], spectral homotopy analiz yöntemi [37], Newton-Product yöntemi [38], Legendre sıralama yöntemi [39], integral ortalama değer teoremi yöntemi [40], spektral sıralama yöntemi [41] gibi sayısal yöntemler integro diferansiyel denklemlerinin ve denklem sınıflarının çözümleri için kullanılmıştır.

Bu çalışmanın amacı ayrık Volterra ve Fredholm integrallerinin ve diferansiyel operatörünün bir kombinasyonu olan lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerininin yaklaşık çözümünü elde etmek için sayısal bir yöntem geliştirmektir. Bu yöntemde Boole polinomu, onun türevleri ve sıralama noktaları kullanılmıştır.

Yöntemle etkili ve en iyi sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca yöntemin güvenirliğini göstermek amacıyla çalışmada Reziduel fonksiyonlara dayalı hata tahmini yapılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Lineerlik Kavramı

İntegro-diferansiyel denklemler lineer olup olmadığına göre sınıflandırılır. Bir integro-diferansiyel denklemde integral işareti altında yer alan bilinmeyen fonksiyonun kuvveti 1 ise yani fonksiyon lineerse bu denklemlere lineer integro-diferansiyel denklem denir. Eğer bilinmeyen fonksiyonun kuvveti birden büyükse veya fonksiyonu lineer değilse verilen denklemler lineer olmayan integro-diferansiyel denklem denir [9,17-18].

2.2. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Bir önceki bölümde integro-diferansiyel denklemler bilinmeyen fonksiyonu hem türev olarak hem de integral işareti altında görüldüğü ifade edildi. Bilinmeyen $y(x)$ fonksiyon olarak gösterilirse türevi $y^{(k)}(x)$ ve $y^{(s)}(x), k \geq 1 \;\; s \geq 1$ olarak gösterilir. Bu başlık altında integro-diferansiyel denklemlerin tipi olan Volterra ve Fredholm intgero-diferansiyel denklemler tanıtılacaktır. Ayrıca bu denklemlerin lineerliğinden bahsedilecektir [9,18].

2.2.1 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

Başlangıç değer problemlerini, integral denklemlerine çevirmek için kullanılan denklemlerdir. Volterra integro-diferansiyel denklemler bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonunu integral işareti altında ve onun türevi olan $y^{(k)}(x)$ ve $y^{(s)}(x), k \geq 1$ $s \geq 1$ fonksiyonlarını barındırır. Bu denklemlerde integrasyon limitlerinin birisi sabit sayı a ve diğeri x değişkenidir. $[a, b]$ aralığında $K_s(x, t)$ çekirdek fonksiyonu, $g(x)$ ve $P_k(x)$ bilinen fonksiyonlar ve λ parametre sabiti olmak üzere Volterra intero-diferansiyel denklemlerin genel formu

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, y^{(s)}(t) dt, \quad \mathrm{a} \leq \mathrm{x}, \mathrm{t} \leq \mathrm{b} \qquad (2.1)$$

dır [9,18]. Örnek olarak $y(0) = 0$ koşulu ile

$$y^{(1)}(x) = 1 - \int_0^x y(t) dt \,, 0 \leq \mathrm{x}, \mathrm{t} \leq 1$$

denklemi gösterilebilir [42]. Denklemin tam çözümü $y(x) = \sin{(x)}$. Burada $a = 0, b = 1, P_1(x) = 1, g(x) = 1, \lambda = -1$ ve $K_0(x, t) = 1$'dir.

Volterra integro-diferansiyel denklemde $y(x)$ ve türevlerinin derecesi bir değilse ve aynı zamanda $y(x)$ ve türevleri çarpım halinde yer alıyorsa denkleme lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem denir [9,18]. Örnek olarak $y(0) = 1$ koşulu ile

$$e^{3x}y^{(1)}(x) - 4\int_0^x y^2(t)\left[y^{(1)}(t)\right]^2 dt = 1, \quad x \in [0,1]$$

denklemi ve $y(1) = 0$ koşulu ile

$$y^{(1)}(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{4}{3}e^{-u(x)} + \int_1^x \frac{1}{x} t e^{u(t)} dt$$

denklemi gösterilebilir [43-63].

2.2.2 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemleri, integral denklemlere çevirmek için kullanılan denklemlerdir. Fredholm integro-diferansiyel denklemler bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonu integral işareti altında ve onun türevi olan $y^{(k)}(x)$ ve $y^{(s)}(x), k \geq 1$ $s \geq 1$ fonksiyonlarını barındırır. Bu denklemlerde integrasyon sınırları sabit sayıdır. $[a,b]$ aralığında $K_s(x,t)$ çekirdek fonksiyonu, $g(x)$ ve $P_k(x)$ bilinen fonksiyonlar ve λ parametre sabiti olmak üzere Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin genel formu

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda\int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, y^{(s)}(t)dt, \qquad \mathrm{a \leq x, t \leq b} \qquad (2.2)$$

dır. Örnek olarak $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0, y^{(2)}(0) = -1$ koşulları ile

$$y^{(3)}(x) = \sin(x) - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xty^{(1)}(t)dt,$$

denklemi gösterilebilir [44]. Denklemin tam çözümü $y(x) = \cos(x)$. Burada $a = 0, b = \frac{\pi}{2}, P_3(x) = 1, g(x) = \sin(x) - x, \lambda = -1$ ve $K_1(x,t) = xt$'dir.

Fredholm integro-diferansiyel denklemde $y(x)$ ve türevlerinin derecesi bir değilse ve aynı zamanda $y(x)$ ve türevleri çarpım halinde yer alıyorsa denkleme lineer olmayan Fredholm integro-diferansiyel denklem denir [9,18]. Örnek olarak $y(-1) = y(1) = 0$ koşulu ile

$$y^{(2)}(x) = 6x + \int_{-1}^{1} xt\left(y^{(1)}(t)\right)^2 (y(t))^2 dt$$

denklemi ve $y(0) = 1$ koşulu ile

$$y(x)^2 - y(x)y^{(1)}(x) + \int_{0}^{1} 4xty(t)^2\, dt = x(1 + e^2)$$

denklemi gösterilebilir [37-64].

2.3. Homojenlik Kavramı

İntegro-diferansiyel denklemler homojenliklerine göre sınıflandırılır. Denklemlerde yer alan $g(x)$ fonksiyonun sıfıra eşit olması durumunda ($g(x) = 0$) denklemler homojen integro-diferansiyel denklemler, sıfıra eşit olmaması durumunda ($g(x) \neq 0$) ise homojen olmayan denklemler olarak adlandırılır [18].

2.4. Başlangıç ve Sınır-Değer Problemleri

Bir diferansiyel denklemin belli koşullara göre çözümleri arandığında, eğer ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme başlangıç-değer problemi, eğer koşullar en az farklı iki noktada tanımlanmışsa probleme sınır değer problemi denir [6].

2.5. Boole Polinomu

2.5.1 George Boole ve Matematiğe Katkıları

George Boole, 2 Kasım 1815 tarihinde Lincoln'de dünyaya geldi. Utangaç ama son derece parlak bir genç olan Boole dört kardeşten en büyüğüydü. Genç yaşlarında Latince ve Yunanca dillerinde ustalaştı ve daha sonra Fransızca, Almanca ve İtalyanca dillerini öğrendi. Bu sayede kıtadaki matematiksel gelişmelere doğrudan erişim sağladı. O zamanın önde gelen matematikçilerin orijinal çalışmalarını inceleyerek ileri matematik öğrendi.

Ciddi matematik çalışmasına on altı yaşlarında başlayan Boole, analizde ustalaştıktan sonra Newton, Lagrange, Laplace, Jacobi ve Poisson'un eserlerini inceledi. Bir otodidaktik olarak Boole araştırmaya bağımsız bir yaklaşım geliştirdi. Matematiğe ilk ilgisi bilimsel problemlerin çözümünde uygulamaları içindi, ancak daha sonra saf matematiği kendi başına ilginç ve güzel olduğunu düşündü. Diferansiyel denklemler, integral, mantık, olasılık, geometri ve doğrusal cebir üzerine yazılar yayınladı.

1841 yılında Boole'un "Genel Doğrusal Dönüşümler Teorisinin Gösterilmesi" yeni bir matematik alanına yol açtı, Değişmez Teori. Cayley ve Sylvester, değişmezlerin teorisini ileri bir gelişim aşamasına getirdi. "Analizin Bir Genel Yöntemi Üzerine" makalesi 1844 yılında Kraliyet topluluğunun felsefesi işlemlerinde yayınladı ve matematik alanında Altın Madalya'yı kazandı. Bu makalede değişken katsayılı diferansiyel ve fark denklemlerinin geniş sınıfını çözmek için genel, sistematik bir yöntem sunulmuştur.

Ekim 1846'da Boole, Belfast, Galway ve Cork'ta kurulan üç Quenn's College'lerine matematik profesörü olarak başvuru yaptı. Boole'un mektubu inanılmazdı: "Ben herhangi bir üniversitenin üyesi değilim ve bir üniversitede hiç çalışmadım.". Ancak başvurusunda önde gelen matematikçilerden çok güçlü referanslar yer alıyordu. Uzun bir süreden sonra Ekim 1849'da yıllık 250 dolara Cork'ta görev yapmaya başladı.

1833 yılında, Boole on sekiz yaşındayken, mantıksal ilişkilerin sembolik biçimde ifade edilebileceğini düşündü. Daha sonra bu fikir bilime büyük katkı sağlayacaktır: İnsan düşünce sürecini kesin matematiksel terimlerde açıklamak. Mantığı kesin bir bilim haline getirme çabaları Aristoteles'e kadar uzanabilir ve Leibniz mantıksal ilişkileri sembolik formda ifade etmenin bir yolunu buldu, ancak yeterli bir gösterimi yoktu. 1847'de Boole, sembolik mantığın başlangıcı olarak işaret edilen "Mantığın Matematiksel Analizi" kitabını yazdı. Bu kitaptaki düşünceleri geliştirerek 1854 yılında "Düşüncenin Kurallarının Araştırılması" adlı kitap yazdı. Bu kitapta "VE, VEYA, DEĞİL" gibi kilit kavramlarla kurulan ifadelerin doğruluğunu ve yanlışlığını tayin etmeye yarayacak bir cebir geliştirdi. Boole cebiri denilen bu çalışma bilgisayar çağını başlatmıştır.

Boole en büyük eseri olan "Düşünce Yasaları" kitabını Quenn's Collage'de bulunduğu sürede yazmıştır. Boole'un derin kavrayışlarından biri, matematiğin sadece sayı ve miktara bağlı olmadığı ancak sembolik biçimde ifade edilen ve kurallara uygun olarak yürütüldüğü evrensel akıl yürütme olarak daha büyük bir doğaya sahip olmasıydı. Çalışmasının amacı matematiksel önermelerin sembolik forma dönüştürülmesiydi. Böylece mantıksal sonuçların ilk varsayımların matematiksel sonuçları haline geldi. Dikkatin odak noktası olarak sayıdan ziyade sınıfları göz önünde bulundurarak, matematiğin merkezi bir temeli olan set teorisini tanımladı.

Boole, mantıksal önermeleri temsil eden semboller üzerinde ilk cebirsel işlemleri gerçekleştirerek sembolik mantık alanına güçlü bir ivme kazandırdı. Boole tarafından tasarlanan cebir, bilgi işlemek için ideal bir araçtır ve modern bilgisayar ilkelerine göre çalışır. Boole cebiri küme teorisi, ikili sayılar, olasılık uzayları elektronik devre yapıları ve bilgisayar teknolojisi gibi çeşitli konuları kapsar. Boole'un düşüncelerinin çoğu günümüzde kabul edilmektedir ve temel küme teorisinde ve olasılığında bulunur. Tıbbi teşhis, sigorta ve yasal delil gibi alanlarda da geniş uygulamaları vardır.

George Boole, 1845 yılında Mary Everest ile evlendi. George ve Mary'nin farklı özelliklere sahip kızları vardır. Alicia, 4 boyutlu geometride önemli çalışmalar yaptı. Bir polihedronun 4D eşdeğeri için politop terimini üretti. 20. yüzyılda önde gelen İngiliz sıvı dinamisti G. I. Taylor, Boole'un kızı Margaret'in oğluydu. Başka bir kızı olan Ethyl Lilian (Vaynich) maceracı bir hayata sahipti ve Rusya'da inanılmaz derecede popüler olan "The Godfly" romanının yazarıdır [45].

2.5.2 Boole Polinomu

Charles Jordan, 'Sonlu Farklar Hesabı' kitabında Boole polinomunun genel formunu

$$R_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{2^m} \binom{x}{n-m}$$

olarak belirtmiştir [60-61]. Boole polinomunun genel ifadesi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(x)}{n!} t^n = \frac{2(1+t)^x}{2+t}$$

şeklinde gösterilir ve bu ifade $n = 10$'a kadar açılırsa

$$\begin{aligned}
R_0(x) + R_1(x)t + \frac{R_2(x)}{2!}t^2 + \frac{R_3(x)}{3!}t^3 + \frac{R_4(x)}{4!}t^4 + \frac{R_5(x)}{5!}t^5 + \frac{R_6(x)}{6!}t^6 \\
+ \frac{R_7(x)}{7!}t^7 + \frac{R_8(x)}{8!}t^8 + \frac{R_9(x)}{9!}t^9 + \frac{R_{10}(x)}{10!}t^{10} \\
= 1 + t\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}t^2\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) \\
+ \frac{1}{3!}t^3\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4!}t^4\left(x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + \frac{3}{2}\right) \\
+ \frac{1}{5!}t^5\left(x^5 - \frac{25}{2}x^4 + 55x^3 - 100x^2 + 64x - \frac{15}{4}\right) \\
+ \frac{1}{6!}t^6\left(x^6 - 18x^5 + \frac{245}{2}x^4 - 390x^3 + 574x^4 - 312x + \frac{45}{4}\right) \\
+ \frac{1}{7!}t^7\left(x^7 - \frac{49}{2}x^6 + 238x^5 - \frac{4655}{4}x^4 + 2989x^3 - 3773x^2 \right. \\
\left. + 1812x - \frac{315}{8}\right) \\
+ \frac{1}{8!}t^8\left(x^8 - 32x^7 + 420x^6 - 2912x^5 + 11424x^4 - 25088x^3 \right. \\
\left. + 28160x^2 - 12288x + \frac{315}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{9!}t^9\Big(x^9-\frac{81}{2}x^8+690x^7-6426x^6+35553x^5-118542x^4+231020x^3$$
$$-236304x^2+95616x-\frac{2835}{4}\Big)$$
$$+\frac{1}{10!}t^{10}\Big(x^{10}-50x^9+\frac{2145}{2}x^8-12900x^7+95403x^6$$
$$-447090x^5+1317140x^4-2327800x^3+2208096x^2$$
$$-840960x+\frac{14175}{4}\Big)$$

eşitliği elde edilir ve buradan Boole polinomunun terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R_0(x)=1$$
$$R_1(x)=\ x-\frac{1}{2}$$
$$R_2(x)=x^2-2x+\frac{1}{2}$$
$$R_3(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+5x-\frac{3}{4}$$
$$R_4(x)=x^4-8x^3+20x^2-16x+\frac{3}{2}$$
$$R_5(x)=x^5-\frac{25}{2}x^4+55x^3-100x^2+64x-\frac{15}{4}$$
$$R_6(x)=x^6-18x^5+\frac{245}{2}x^4-390x^3+574x^4-312x+\frac{45}{44}$$
$$R_7(x)=x^7-\frac{49}{2}x^6+238x^5-\frac{4655}{4}x^4+2989x^3-3773x^2+1812x-\frac{315}{8}$$
$$R_8(x)=x^8-32x^7+420x^6-2912x^5+11424x^4-25088x^3+28160x^2$$
$$-12288x+\frac{315}{2}$$
$$R_9(x)=x^9-\frac{81}{2}x^8+690x^7-6426x^6+35553x^5-118542x^4+231020x^3$$
$$-236304x^2+95616x-\frac{2835}{4}$$
$$R_{10}(x)=\ x^{10}-50x^9+\frac{2145}{2}x^8-12900x^7+95403x^6-447090x^5$$
$$+1317140x^4-2327800x^3+2208096x^2-840960x+\frac{14175}{4}$$

2.5.3 Boole Polinomunun Temel Matris Özellikleri

Boole polinomunun **R**(x) matris formu

$$\mathbf{R}(\mathrm{x}) = \mathbf{X}(x)\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$

olarak yazılır ve burada

$\mathbf{R}(x) = [R_0(x) \quad R_1(x) \quad R_2(x) \quad \ldots \quad R_N(x)]$, $\mathbf{X}(\mathrm{x}) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \ldots \quad x^N]$,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{3}{4} & 5 & -\frac{9}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{3}{2} & -16 & 20 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{15}{4} & 64 & -100 & 55 & -\frac{25}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{45}{4} & -312 & 574 & -390 & \frac{245}{2} & -18 & 1 & 0 & \cdots \\ -\frac{315}{8} & 1812 & -3773 & 2989 & -\frac{4655}{4} & 238 & -\frac{49}{2} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{15}{4} & \frac{45}{4} & -\frac{315}{8} & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -16 & 64 & -312 & 1812 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 20 & -100 & 574 & -3773 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 55 & -390 & 2989 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{25}{2} & \frac{245}{2} & -\frac{4655}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -18 & 238 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

şeklindedir.

Problemlerin veya denklemlerin çözümlerinin kesilmiş Boole serisi yapısındaki formu

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n R_n(x) \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır ve burada a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ bilinmeyen Boole katsayıları ve $R_n(x)$ Boole polinomudur. (2.4) ün matris bağıntısı

$$y(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{A} \tag{2.5}$$

şeklinde yazılır ve k. türevi

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{R}^{(k)}(x)\mathbf{A} \tag{2.6}$$

olur. (2.3) matris formu bu denklemde yazılırsa

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} \tag{2.7}$$

matris bağıntısı elde edilir. Burada $\mathbf{X}^{(k)}(x)$'in matris formu

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{E}^1$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{E}^2$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{E}^3$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{E}^k \tag{2.8}$$

şeklindedir. Buradaki **E** matrisi, $\mathbf{X}(x)$ matrisinin türev geçiş matrisidir, **A** bilinmeyen Boole katsayılarıdır ve matris gösterimleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

(2.8) matris formu (2.7) de yazılırsa

$$\mathrm{y}^{(\mathrm{k})}(\mathrm{x}) = \mathbf{X}(\mathrm{x})\mathbf{E}^{\mathrm{k}}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} \tag{2.9}$$

matris bağıntısı elde edilir. (2.3) e göre (2.9) bağıntısı

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{R}(x)(\mathbf{H}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} \tag{2.10}$$

ya da

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{D}^{\mathrm{k}}\mathbf{A} \tag{2.11}$$

olur. Burada **D** matrisi Boole polinomunun türev geçiş matrisidir ve

$$\mathbf{D}^{\mathrm{k}} = (\mathbf{H}^{\mathbf{T}})^{-1}\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}} \tag{2.12}$$

şeklindedir. O halde $\mathbf{R}^{(k)}(x)$'in matris formu

$$\mathbf{R}^{(1)}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{D}^1$$

$$\mathbf{R}^{(2)}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{D}^2$$

$$\mathbf{R}^{(3)}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{D}^3$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{R}^{(k)}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k \tag{2.13}$$

olur. Burada

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1&-1&2&-6&\dots\\0&0&2&-3&8&\dots\\0&0&0&0&-6&\dots\\0&0&0&0&4&\dots\\0&0&0&0&0&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

olur. Örneğin; $k=2$ için

$$\mathbf{R}^{(2)}(x)=\ \mathbf{R}(x)\mathbf{D}^2$$

olur. (2.3) bağıntısından $N=3$ için

$$[R_0(x)\quad R_1(x)\quad R_2(x)\quad R_3(x)]=[1\quad x\quad x^2\quad x^3]\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[R_0(x)\quad R_1(x)\quad R_2(x)\quad R_3(x)]$$
$$=\left[1\quad x-\frac{1}{2}\quad x^2-2x+\frac{1}{2}\quad x^3-\frac{9}{2}x^2+5x-\frac{3}{4}\right]$$

matrisi elde edilir. $k=2$ için (2.12) formu

$$\mathbf{D}^2=(\mathbf{H^T})^{-\mathbf{1}}\mathbf{E}^2\mathbf{H^T}$$

$$\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-\mathbf{1}}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&2&4\\0&0&1&\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. O halde

$$\mathbf{R}^{(2)}(x)=\left[1\quad x-\frac{1}{2}\quad x^2-2x+\frac{1}{2}\quad x^3-\frac{9}{2}x^2+5x-\frac{3}{4}\right]\begin{bmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{(2)}(x)=[0\quad 0\quad 2\quad 6x-9]$$

olarak bulunur.

3. PROBLEMİN TANITILMASI VE ÇÖZÜM METODU

Bu bölümde Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sayısal bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemde Boole polinomu ile birlikte bu polinomun türevi ve sıralama noktaları kullanılacaktır. Burada verilen problem matris denklemine indirgenecek ve bu matris denkleminin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları elde edilecektir. Boole katsayıları (2.4) kesilmiş Boole serisinde yerleştirilerek çözüme ulaşılır.

$\mathrm{a} \leq \mathrm{x}, \mathrm{t} \leq \mathrm{b}$ aralığında yüksek mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda_v \int_a^x \sum_{r=0}^{m_2} K_r^v(x,t)\, y^{(r)}(t)dt +$$

$$\lambda_f \int_a^b \sum_{s=0}^{m_3} K_s^f(x,t)\, y^{(s)}(t)dt \tag{3.1}$$

Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b) \right) = \lambda_j\,,\ j = 0,1,2,\dots,m-1$$

$$(m = \max(m_1, m_2, m_3)) \tag{3.2}$$

karışık koşullar altında (2.4) kesilmiş Boole serisi formunda yaklaşık çözümü aranacaktır; burada $P_k(x)$ve $g(x)$ bilinen fonksiyonlar, $K_r^v(x,t)$ ve $K_s^f(x,t)$ çekirdek fonksiyon ve $y(x)$ bilinmeyen fonksiyon $[a,b]$ aralığında süreklidir; a_{jk}, b_{jk}, λ_j, λ_v ve λ_f sabit sayılardır.

3.1. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Boole Sıralama Yöntemi

3.1.1 Temel Matris Bağıntıları

(2.1) denkleminin (3.2) karışık koşullar altında (2.4) kesilmiş Boole serisi formunda yaklaşık çözümü olduğunu kabul edelim. Boole polinomunun **R**(x) matris formu ve $y(x)$ çözümün matris bağıntısı bir önceki bölümde verildi. (2.11) matris bağıntısı (2.1) de yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\,\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda\int_a^x \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\,\mathbf{R}(t)\mathbf{D}^s\mathbf{A}dt, \tag{3.3}$$

formu elde edilir. Burada **D** matrisi Boole polinomunun türev geçiş matrisidir ve $K_s(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun Taylor polinomu ve Boole polinomu için matris formları sırasıyla

$$K_s(x,t) = \mathbf{X}(x)^t\mathbf{K}_s\mathbf{X}^T(t) \text{ ve } K_s(x,t) = \mathbf{R}(x)^R\mathbf{K}_s\mathbf{R}^T(t) \tag{3.4}$$

olarak tanımlanır ve bu formlardan

$$^R\mathbf{K}_s = \ (\mathbf{H}^\mathbf{T})^{-1\,t}\mathbf{K}_s\mathbf{H}^{-1} \tag{3.5}$$

ve

$$^t\mathbf{K}_s = \mathbf{H}^{\mathbf{T}\,R}\mathbf{K}_s\mathbf{H} \tag{3.6}$$

matris bağıntıları elde edilir ve burada

$$^tK_s(x,t) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} {}^tk_{mn}^s\, x^m t^n\,,\ {}^RK_s(x,t)=\sum_{\mathrm{m=0}}^{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{N}} {}^Rk_{mn}^s\, \mathrm{R_m(x)R_n(t)},$$

$$^tk_{mn}^s = \frac{1}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n}K(0,0)}{\partial x^m\partial t^n} \quad m,n = 0,1,2,\dots,N, s = 0,1,\dots,m_2$$

ve

$$^t\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & \dots & k_{0N} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N0} & k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

dır. İntegral işareti altında Boole polinomu için $K_s(x,t)$ çekirdek fonksiyonun matris formu, (3.3) formunda yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\,\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda\int_a^x \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x)^R\mathbf{K}_s\mathbf{R}^T(t)\,\mathbf{R}(t)\mathbf{D}^s\mathbf{A}dt$$

formu elde edilir veya

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\,\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda\sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x)^R\mathbf{K}_s\,\mathbf{Q}(x)\mathbf{D}^s\mathbf{A} \tag{3.7}$$

olur. Burada

$$\mathbf{Q}(x) = \int_a^x \mathbf{R}^T(t)\mathbf{R}(t)dt \tag{3.8}$$

şeklindedir. Bölüm 2'de verilen $\mathbf{R}(x)$ Boole polinomunun matrisi bu matris formunda uygulanırsa

$$\mathbf{Q}(x)=\int_a^x \begin{bmatrix} R_0(t)\\ R_1(t)\\ R_2(t)\\ \vdots\\ R_N(t)\end{bmatrix}[R_0(t) \quad R_1(t) \quad R_2(t) \quad \dots \quad R_N(t)]dt$$

$$=\int_a^x \begin{bmatrix} R_0(t)R_0(t) & R_0(t)\,R_1(t) & R_0(t)R_2(t) & \dots & R_0(t)R_N(t)\\ R_1(t)R_0(t) & R_1(t)\,R_1(t) & R_1(t)R_2(t) & \dots & R_1(t)R_N(t)\\ R_2(t)R_0(t) & R_2(t)\,R_1(t) & R_2(t)R_2(t) & \dots & R_2(t)R_N(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_N(t)R_0(t) & R_N(t)R_1(t) & R_N(t)R_2(t) & \dots & R_N(t)R_N(t)\end{bmatrix}dt$$

$$=\int_a^x \mathbf{R}_i(t)\mathbf{R}_j(t)dt=\left[q_{i,j}(x)\right], \qquad i,j=0,1,2,\dots,N$$

olur. (3.8) denkleminde (2.3) matris formu yazılırsa

$$\mathbf{Q}(x)=\int_a^x \mathbf{H}\mathbf{X}^T(t)\,\mathbf{X}(t)\mathbf{H}^T dt$$

$$=\mathbf{H}\,\mathbf{C}(x)\mathbf{H}^T \tag{3.9}$$

olur ve burada

$$\mathbf{C}(\mathrm{x})=\int_a^x \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)dt=\left[c_{i,j}(x)\right],\quad c_{i,j}(x)=\frac{x^{i+j+1}-a^{i+j+1}}{i+j+1}, i,j=0,1,2,\dots,N$$

şeklindedir.

3.1.2 Koşulların Matris Bağıntısı

(2.11) matris bağıntısına göre, (3.2) koşulun matris bağıntısı için

$$y^{(k)}(a)=\ \mathbf{R}(a)\mathbf{D}^k\mathbf{A}$$

$$y^{(k)}(b)=\ \mathbf{R}(b)\mathbf{D}^k\mathbf{A}$$

matris bağıntıları bulunur. Bu matris bağıntıları (3.2) koşulunda yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{m-1}(a_{jk}\mathbf{R}(a)+b_{jk}\,\mathbf{R}(b))\mathbf{D}^k\mathbf{A}=\lambda_k, \qquad j=0,1,2,\dots,m-1,$$

$$m=\max\,(m_1,m_2) \tag{3.10}$$

matris bağıntısı elde edilir.

3.1.3 Çözüm Yöntem

(3.7) formunda (3.9) formu yerleştirilir ve temel matris bağınıtısı

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\,\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x)^R\mathbf{K}_s\,\mathbf{H}\,\mathbf{C}(x)\mathbf{H}^T\mathbf{D}^s\mathbf{A} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir.

x_i sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0,1,\ldots,N \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır ve $x = x_i$ sıralama noktası için (3.11) formu

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x_i)\,\mathbf{R}(x_i)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x_i) + \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x_i)^R\mathbf{K}_s\,\mathbf{H}\mathbf{C}(x_i)\mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{D}^s\mathbf{A} \tag{3.13}$$

şeklinde elde edilir ve kısaca

$$\left\{\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k\,\mathbf{R}\mathbf{D}^\mathrm{k} - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \overline{\mathbf{R}}\,\overline{\mathbf{K}_s}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T}\overline{\mathbf{D}^s}\right\}\mathbf{A} = \mathbf{G} \tag{3.14}$$

olarak gösterilir. Burada

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & P_k(x_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})\mathrm{x}(\mathrm{N+1})}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})\mathrm{x1}},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(x_0) \\ \mathbf{R}(x_1) \\ \mathbf{R}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{R}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})\mathrm{x}(\mathrm{N+1})}, \overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(x_0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(x_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}(x_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{R}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})\mathrm{x}(\mathrm{N+1})^2},$$

$$\overline{\mathbf{K}_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{K}_s \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})^2\mathrm{x}(\mathrm{N+1})^2}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & \ldots \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})^2\mathrm{x}(\mathrm{N+1})^2}, \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}(x_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{C}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})^2\mathrm{x}(\mathrm{N+1})^2},$$

$$\overline{\mathbf{H}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^T & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{H}^T \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})^2\mathrm{x}(\mathrm{N+1})^2}, \overline{\mathbf{D}^s} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^s \\ \mathbf{D}^s \\ \mathbf{D}^s \\ \vdots \\ \mathbf{D}^s \end{bmatrix}_{(\mathrm{N+1})^2\mathrm{x}(\mathrm{N+1})}$$

şeklindedir. (3.14) temel matris bağıntısı

$$\mathbf{W}_v\mathbf{A} = \mathbf{G} \;\Rightarrow [\mathbf{W};\mathbf{G}] \tag{3.15}$$

olarak yazılır ve burada

$$\mathbf{W}_v = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k\,\mathbf{R}\mathbf{D}^{\mathrm{k}} - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \overline{\mathbf{R}}\,\overline{\mathbf{K}_s}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T}\overline{\mathbf{D}^s}$$

olur.

Sonuç olarak bilinmeyen Boole katsayılı $a_0, a_1,\ a_2, \ldots, a_N$ $\;N+1$ lineer cebirsel denklem elde edilir. (3.15) matrisinin arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}_v;\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} & \ldots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & \ldots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & \ldots & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} & \ldots & w_{NN} & ; & g(x_N) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

şeklindedir.

(3.10) matris bağıntısında

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}\mathbf{R}(a) + b_{jk}\,\mathbf{R}(b))\mathbf{D}^k = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad . \; . \; . \quad u_{jN}]$$

$$m = \max\,(m_1, m_2)$$

olarak yazılırsa (3.10) matris bağıntısı $j = 0,1,2, \ldots, m-1$ için

$$\mathbf{U}_0\mathbf{A} = [\lambda_0]$$
$$\mathbf{U}_1\mathbf{A} = [\lambda_1]$$
$$\mathbf{U}_2\mathbf{A} = [\lambda_2]$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{U}_{m-1}\mathbf{A} = [\lambda_{m-1}]$$

olur veya

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \left[\mathbf{U}_j;\ \lambda_j\right] = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \ldots \quad u_{jN} \quad ; \quad \lambda_j]$$

arttırılmış matrsi formunda gösterilir ve arttırılmış matris

$$\left[\mathbf{U}_j;\ \lambda_j\right] = \begin{bmatrix} u_{0\,0} & u_{0\,1} & u_{0\,2} & u_{0\,3} & \ldots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{1\,0} & u_{1\,1} & u_{1\,2} & u_{1\,3} & \ldots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{2\,0} & w_{2\,1} & u_{2\,2} & u_{2\,3} & \ldots & u_{2N} & ; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1\,0} & u_{m-1\,1} & u_{m-1\,2} & u_{m-1\,3} & \ldots & u_{m-1N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

olarak tanımlanır.

(3.15) matrisinde son m satırlar silinir ve silinen m satırlar yerine (3.17) matrisleri yazılır. Sonuç olarak yeni arttırılmış matris

$$[\widetilde{\mathbf{W}_v};\widetilde{\mathbf{G}}]=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & w_{(N-m)2} & \cdots & w_{(N-m)N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} & . & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

olur ve bu arttırılmış matris

$$\widetilde{\mathbf{W}_v}\mathbf{A}=\widetilde{\mathbf{G}}$$

matris formu olarak yazılabilir. Eğer $rank\widetilde{\mathbf{W}_v}=rank[\widetilde{\mathbf{W}_v};\widetilde{\mathbf{G}}]=N+1$ ise yani det$\widetilde{\mathbf{W}_v}\neq 0$ ise (3.18) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{A}=(\widetilde{\mathbf{W}_v})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}. \quad (3.19)$$

formundadır. Son olarak bu formun çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bilinmeyen Boole katsayıları tek sütundan oluştuğu için (2.1) Volterra integro-diferansiyel denkleminin (3.2) karışık koşulları altında tek çözümü vardır ve çözüm

$$y(x)\cong y_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nR_n(x)$$

ya da

$$[y(x)]=\mathbf{R}(x)\mathbf{A}$$

$$[y(x)]=[R_0(t)\quad R_1(t)\quad R_2(t)\quad \ldots\quad R_N(t)]\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$=[R_0(t)\,a_0\quad R_1(t)\,a_1\quad R_2(t)\,a_2\quad \ldots\quad R_N(t)\,a_N]$$

şeklinde Boole polinom çözümü olarak elde edilir.

3.2. Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Boole Sıralama Yöntemi

(2.2) denkleminin (3.2) karışık koşulları altında (2.4) kesilmiş Boole serisi formunda yaklaşık çözümü olduğunu kabul edelim. Boole polinomunun $\mathbf{R}(\mathrm{x})$ matris formu ve $y(x)$ çözümün matris bağıntısı bir önceki bölümde verildi. (2.11) matris bağıntısı (2.2) yazılırsa denklem

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\,\mathbf{R}(t)\mathbf{D}^s\mathbf{A}dt,\ \mathrm{a} \le \mathrm{x},\mathrm{t} \le \mathrm{b} \qquad (3.20)$$

olur. Burada **D** matrisi Boole polinomunun türev geçiş matrisidir ve $K_s(x,t)$ çekirdek fonksiyonu yerine (3.4) te verilen Boole polinomu için çekirdek fonksiyonunun matris formu yazılır ve Fredholm integro-diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x)^R\mathbf{K}_s\mathbf{R}^T(t)\,\mathbf{R}(t)\mathbf{D}^s\mathbf{A}dt \qquad (3.21)$$

olarak elde edilir. (2.3) formuna göre bu denklem

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x)\mathbf{R}(x)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x) + \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x)^R\mathbf{K}_s\,\mathbf{Q}\mathbf{D}^s\mathbf{A}dt \qquad (3.22)$$

şeklinde yazılır ve burada

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \mathbf{R}^T(t)\mathbf{R}(t)dt \qquad (3.23)$$

şeklindedir. Bölüm 2'de verilen $\mathbf{R}(x)$ Boole polinomunun matrisi bu matris formunda uygulanır ve böylece

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \begin{bmatrix} R_0(t) \\ R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_N(t) \end{bmatrix} [R_0(t) \quad R_1(t) \quad R_2(t) \quad \dots \quad R_N(t)]dt$$

$$= \int_a^b \begin{bmatrix} R_0(t)R_0(t) & R_0(t)\,R_1(t) & R_0(t)R_2(t) & \dots & R_0(t)R_N(t) \\ R_1(t)R_0(t) & R_1(t)\,R_1(t) & R_1(t)R_2(t) & \dots & R_1(t)R_N(t) \\ R_2(t)R_0(t) & R_2(t)\,R_1(t) & R_2(t)R_2(t) & \dots & R_2(t)R_N(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_N(t)R_0(t) & R_N(t)R_1(t) & R_N(t)R_2(t) & \dots & R_N(t)R_N(t) \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_a^b \mathbf{R}_i(t)\mathbf{R}_i(t)dt = [q_{i,j}], \qquad i,j = 0,1,2,\dots,N$$

formu elde edilir. (3.23) denkleminde (2.3) matris formu yazılırsa

$$\mathbf{Q} = \int_a^b \mathbf{H}\mathbf{X}^T(t)\,\mathbf{X}(t)\mathbf{H}^T dt$$
$$= \mathbf{H}\,\mathbf{C}\mathbf{H}^T \qquad (3.24)$$

olur ve burada

$$\mathbf{C} = \int_a^b \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)dt = [c_{i,j}],\quad c_{i,j} = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}, i,j = 0,1,2,\dots,N$$

şeklindedir. (3.24) bağıntısı, (3.22)'de yazılır ve (3.11) sıralama noktaları $x = x_i$ için

$$\sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k(x_i)\mathbf{R}(x_i)\mathbf{D}^k\mathbf{A} = g(x_i) + \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}(x_i)^R\mathbf{K}_s\,\mathbf{H}\,\mathbf{C}\mathbf{H}^T\mathbf{D}^s\mathbf{A}dt \qquad (3.25)$$

olur. Bu bağıntı Fredholm integro-diferansiyel denkleminin temel matris bağıntısıdır ve burada

$$\mathbf{R}(x_i) = \begin{bmatrix} R_0(x_0) & R_1(x_0) & R_2(x_0) & R_3(x_0) & \dots & R_N(x_0) \\ R_0(x_1) & R_1(x_1) & R_2(x_1) & R_3(x_1) & \dots & R_N(x_1) \\ R_0(x_2) & R_1(x_2) & R_2(x_2) & R_3(x_2) & \dots & R_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0(x_N) & R_1(x_N) & R_2(x_N) & R_3(x_N) & \dots & R_N(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)},$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_k(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)x1},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & \dots & k_{0N} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N0} & k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(3.25) temel matris bağıntısı kısaca

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P_k}\mathbf{R}\mathbf{D}^k - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}\,\mathbf{K}_s\mathbf{H}\,\mathbf{C}\mathbf{H}^\mathrm{T}\mathbf{Q}\,\mathbf{D}^s \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \qquad (3.26)$$

olarak gösterilir. Bu matris bağıntısında

$$\mathbf{W}_f = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P_k}\mathbf{R}\mathbf{D}^k - \lambda \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{R}\,\mathbf{K}_s\mathbf{H}\,\mathbf{C}\mathbf{H}^T\mathbf{Q}\,\mathbf{D}^s$$

şeklinde tanımlanırsa (3.26) bağıntısı

$$\mathbf{W}_f\mathbf{A} = \mathbf{G} \tag{3.27}$$

olur.

Sonuç olarak bilinmeyen Boole katsayılı $a_0, a_1,\ a_2, \dots, a_N$ $(N+1)$ lineer cebirsel denklem elde edilir. (3.27) matris denkleminin arttırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}_f;\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} & \dots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & \dots & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} & \dots & w_{NN} & ; & g(x_N) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

şeklindedir. Bölüm 3.1'de anlatıldığı gibi (3.28) arttırılmış matrisinde m satırlar silinir ve silinen matrisler yerine (3.17) matrisleri yazılır ve böylece yeni arttırılmış matris

$$\widetilde{\mathbf{W}}_f\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \tag{3.29}$$

olarak elde edilir. Eğer $rank\widetilde{\mathbf{W}}_f = rank[\widetilde{\mathbf{W}}_f;\widetilde{\mathbf{G}}] = N+1$ ise yani $\det\widetilde{\mathbf{W}}_f \neq 0$ ise (3.29) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}}_f)^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}.$$

formundadır. Son olarak bu formun çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

matris formunda elde edilir. Bilinmeyen Boole katsayıları tek sütundan oluştuğu için (2.2) Fredholm integro-diferansiyel denkleminin (3.2) karışık koşulları altında tek çözümü vardır ve çözüm

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n R_n(x)$$

ya da

$$[y(x)] = \mathbf{R}(x)\mathbf{A}$$

$$[y(x)] = [R_0(t) \quad R_1(t) \quad R_2(t) \quad \dots \quad R_N(t)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$= [R_0(t)\, a_0 \quad R_1(t)\, a_1 \quad R_2(t)\, a_2 \quad \dots \quad R_N(t)\, a_N]$$

şeklinde Boole polinom çözümü olarak elde edilir.

3.3. Hybrid Gecikmeli Genel Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Boole Sıralama Yöntemi

Bu bölümde

$$\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} p_{kj}(x)y^{(k)}(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}) = f(x)$$

$$+\sum_{r=0}^{m_3}\sum_{s=0}^{m_4}\lambda_{rs}\int_{\upsilon_{rs}(x)}^{\nu_{rs}(x)} K_{rs}(x,t)y^{(r)}(\mu_{rs}t+\gamma_{rs})dt,$$

$$a \le x, t \le b \qquad (3.30)$$

Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerinin

$$\sum_{k=0}^{m_1-1}\left(a_{ik}y^k(a)+b_{ik}y^k(b)\right) = \eta_i, \qquad i = 0,1,2,3,\dots m_1-1. \qquad (3.31)$$

karışık koşulları altında (2.4) kesilmiş Boole serisi formunda yaklaşık çözümü için bir yöntem geliştirilmiştir. (3.30) denkleminde p_{kj} , K_{rs} , $f(x)$, $\nu_{rs}(x)$, $\upsilon_{rs}(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında süreklidir ve $a_{jk}, b_{jk}, \mu_{rs}, \gamma_{rs}, \lambda_{rs}$ sabitlerdir.

3.3.1 Temel Matris Bağıntısı

(3.30) denkleminde $y^{(k)}(\alpha_{kj}x+\beta_{kj})$ teriminin matris formu için (2.9) matris formunda x yerine $(\alpha_{kj}x+\beta_{kj})$ yazılır ve böylece

$$y^{(k)}\left(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\right) \cong y_N^{(k)}\left(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\right) = \mathbf{X}\left(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\right)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A},$$

$$k = 0,1,\dots,m_1 \qquad (3.32)$$

matris formu elde edilir. Burada **E** matrisi Taylor polinomunun türev geçiş matrisidir. $\mathbf{X}\left(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\right)$ terimi

$$\mathbf{X}\left(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\right) = \mathbf{X}(x)\,\mathbf{B}\left(\alpha_{kj},\beta_{kj}\right) \qquad (3.33)$$

olarak tanımlanır ve burada

$$\mathbf{B}\left(\alpha_{kj},\beta_{kj}\right) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}\alpha_{kj}^0\beta_{kj}^0 & \binom{1}{0}\alpha_{kj}^0\beta_{kj}^1 & \binom{2}{0}\alpha_{kj}^0\beta_{kj}^2 & \dots & \binom{N}{0}\alpha_{kj}^0\beta_{kj}^N \\ 0 & \binom{1}{1}\alpha_{kj}^1\beta_{kj}^0 & \binom{2}{1}\alpha_{kj}^1\beta_{kj}^1 & \dots & \binom{N}{1}\alpha_{kj}^1\beta_{kj}^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^0 & \dots & \binom{N}{2}\alpha_{kj}^2\beta_{kj}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}\alpha_{kj}^N\beta_{kj}^0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(3.33) formu (3.32) matris formunda yazılır ve $y^{(k)}(\alpha_{kj}x+\beta_{kj})$ teriminin matris formu

$$y^{(k)}\big(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\big)\cong y_N^{(k)}\big(\alpha_{kj}x+\beta_{kj}\big)=\mathbf{X}(x)\,\mathbf{B}\big(\alpha_{kj},\beta_{kj}\big)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} \qquad (3.34)$$

haline dönüşür.

(3.30) denkleminde $y^{(r)}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)$ terimi için matris formu için (2.9) matris formunda x yerine $(\mu_{kj}t+\gamma_{kj})$ yazılır ve böylece

$$y^{(r)}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)\cong y_N^{(r)}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)=\mathbf{X}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)\,\mathbf{E}^r\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A},$$
$$k=0,1,\dots,m_3 \qquad (3.35)$$

olarak yazılır. Bu matris formuna (3.33) formu uygulanırsa $y^{(r)}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)$ teriminin matris formu

$$y^{(r)}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)\cong y_N^{(r)}\big(\mu_{kj}t+\gamma_{kj}\big)=\mathbf{X}(t)\,\mathbf{B}\big(\mu_{kj},\gamma_{kj}\big)\mathbf{E}^r\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} \qquad (3.36)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.2 Koşulların Matris Bağıntısı

(2.9) matris bağıntısına göre, (3.31) koşulun matris bağıntısı için

$$y^{(k)}(a)=\ \mathbf{X}(a)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$
$$y^{(k)}(b)=\ \mathbf{X}(b)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

matris bağıntıları bulunur. Bu matris bağıntıları (3.31) koşulunda yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{m_1-1}\big(a_{ik}\mathbf{X}(a)+b_{ik}\,\mathbf{X}(b)\big)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\eta_i,\qquad i=0,1,2,\dots,m_1-1. \qquad (3.37)$$

matris bağıntısı elde edilir.

3.3.3 Çözüm Yöntemi

(3.30) denkleminde $K_{rs}(x,t)$ çekirdek fonksiyonu yerine (3.4) Taylor polinomu için çekirdek fonksiyonunun matris formu, (3.34) ve (3.36) matris formları yazılır ve böylece (3.30) denkleminin temel matris bağıntısı

$$\left\{\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x)\mathbf{X}(x)\ \mathbf{B}\big(\alpha_{kj},\beta_{kj}\big)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\right.$$

$$\left.-\sum_{r=0}^{m_3}\sum_{s=0}^{m_4}\lambda_{rs}\int_{\upsilon_{rs}(x)}^{\nu_{rs}(x)}\mathbf{X}(x)^{\mathrm{t}}\mathbf{K}_{rs}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}(t)\,\mathbf{X}(t)\ \mathbf{B}\big(\mu_{kj},\gamma_{kj}\big)\mathbf{E}^r\mathbf{H}^{\mathbf{T}}dt\right\}\mathbf{A}$$

$$= f(x)$$

ya da

$$\left\{\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x)\mathbf{X}(x)\ \mathbf{B}\big(\alpha_{kj},\beta_{kj}\big)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\right.$$

$$\left.-\sum_{r=0}^{m_3}\sum_{s=0}^{m_4}\lambda_{rs}\,\mathbf{X}(x)^{\mathrm{t}}\mathbf{K}_{rs}\mathbf{Q_{rs}}\ \mathbf{B}\big(\mu_{kj},\gamma_{kj}\big)\mathbf{E}^r\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\right\}\mathbf{A} = f(x) \qquad (3.38)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\mathbf{Q_{rs}}(\mathbf{x}) = \int_{\upsilon_{rs}(x)}^{\nu_{rs}(x)}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}(t)\,\mathbf{X}(t)\,dt = [q_{mn}^{rs}(x)] \quad r = 0,1,\dots,m_3; s = 0,1,\dots,m_4$$

$$q_{mn}^{rs}(x) = \frac{(\nu_{rs}(x)^{m+n+1} - \upsilon_{rs}(x)^{m+n+1})}{m+n+1},\ \ m,n = 0,1,\dots,N.$$

şeklindedir.

(3.12) x_i sıralama noktaları, (3.38) temel matris bağıntısında $x = x_i$ için uygulanırsa

$$\left\{\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x_i)\mathbf{X}(\mathbf{x}_i)\ \mathbf{B}\big(\alpha_{kj},\beta_{kj}\big)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\right.$$

$$\left.-\sum_{r=0}^{m_3}\sum_{s=0}^{m_4}\lambda_{rs}\,\mathbf{X}(x_i)^{\mathrm{t}}\mathbf{K}_{rs}\mathbf{Q_{rs}}\ \mathbf{B}\big(\mu_{kj},\gamma_{kj}\big)\mathbf{E}^r\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\right\}\mathbf{A} = f(x_i) \qquad (3.39)$$

olur ve bu matris bağıntısı

$$\left\{\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P_{kj}X}\ \mathbf{B}\big(\alpha_{kj},\beta_{kj}\big)\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\right.$$

$$\left.-\sum_{r=0}^{m_3}\sum_{s=0}^{m_4}\lambda_{rs}\,\overline{\mathbf{X}\mathbf{K}_{rs}}\ \overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{rs}}\ \overline{\mathbf{B}}\big(\mu_{kj},\gamma_{kj}\big)\overline{\mathbf{E}}^r\overline{\mathbf{H}}^{\mathbf{T}}\right\}\mathbf{A} = \mathbf{F} \qquad (3.40)$$

olarak yazılabilir ve burada

$$\mathbf{P}_{kj}=\begin{bmatrix} P_{kj}(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{kj}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_{kj}(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{kj}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)} ,$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)\mathrm{x}1} ,\mathbf{X}(x_i)=\begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i{}^2 & \dots & x_i{}^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)} ,\overline{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)^2} ,$$

$$\overline{\mathbf{Q}_{rs}}=\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rs}(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{rs}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{rs}(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q}_{rs}(x_N) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)^2\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)^2} ,$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} ,\overline{\mathbf{E}^r}=\begin{bmatrix} \mathbf{E}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}^r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}^r \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)^2\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)^2} ,$$

$$\overline{\mathbf{K}_{rs}}=\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rs} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{rs} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_{rs} \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)^2\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)^2} ,\overline{\mathbf{H}^{\mathbf{T}}}=\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{H}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{H}^{\mathbf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)^2\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)}$$

$$\overline{\mathbf{B}}(\mu_{kj},\gamma_{kj})=\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\mu_{kj},\gamma_{kj}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(\mu_{kj},\gamma_{kj}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}(\mu_{kj},\gamma_{kj}) \end{bmatrix}_{(\mathrm{N}+1)^2\mathrm{x}(\mathrm{N}+1)^2}$$

şeklindedir.

(3.40) matris bağıntısında

$$\mathbf{W}_h=\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2}\mathbf{P_{kj}}\mathbf{X}\,\mathbf{B}(\alpha_{kj},\beta_{kj})\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathbf{T}}-\sum_{r=0}^{m_3}\sum_{s=0}^{m_4}\lambda_{rs}\,\overline{\mathbf{X}\mathbf{K}_{rs}}\,\overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{rs}}\,\overline{\mathbf{B}}(\mu_{kj},\gamma_{kj})\overline{\mathbf{E}}^r\overline{\mathbf{H}}^{\mathbf{T}}$$

olarak tanımlanırsa

$$\mathbf{W}_h\mathbf{A} = \mathbf{F} \tag{3.41}$$

şeklinde bilinmeyen Boole katsayılı $(N+1)$ lineer cebirsel denkleme dönüşür ve bu denklemin arttırılmış matris formu

$$[\mathbf{W}_h; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & \dots & w_{2N} & ; & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} & \dots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

olarak gösterilir.

(3.37) matris formunda

$$\mathbf{U}_i = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}\mathbf{X}(a) + b_{ik}\,\mathbf{X}(b))\mathbf{E}^k\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = [\eta_{i0} \quad \eta_{i1} \quad \eta_{i2} \quad . \; . \; . \quad \eta_{iN}]$$

olarak yazılırsa (3.37) matris bağıntısı $i = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$için

$$\mathbf{U}_0\mathbf{A} = [\eta_0]$$
$$\mathbf{U}_1\mathbf{A} = [\eta_1]$$
$$\mathbf{U}_2\mathbf{A} = [\eta_2]$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{U}_{m_1-1}\mathbf{A} = [\eta_{m_1-1}]$$

olur. Bu bağıntıların arttırılmış matris formu

$$\widetilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}_i;\; \eta_i] = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad u_{i2} \quad \dots \quad u_{iN} \quad ; \quad \eta_i]$$

şeklinde gösterilir ve arttırılmış matris

$$[\mathbf{U}_i;\; \lambda_i] = \begin{bmatrix} u_{0\,0} & u_{0\,1} & u_{0\,2} & \dots & u_{0N} & ; & \eta_0 \\ u_{1\,0} & u_{1\,1} & u_{1\,2} & \dots & u_{1N} & ; & \eta_1 \\ u_{2\,0} & w_{2\,1} & u_{2\,2} & \dots & u_{2N} & ; & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m_1-1\,0} & u_{m_1-1\,1} & u_{m_1-1\,2} & \dots & u_{m_1-1N} & ; & \eta_{m_1-1} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

olarak tanımlanır.

Son olarak (3.42) matrisinde son m satırlar silinir ve silinen m satırlar yerine (3.43) matrisleri yazılır. Sonuç olarak yeni arttırılmış matris

$$[\widetilde{\mathbf{W}_h};\tilde{\mathbf{F}}]=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & \cdots & w_{2N} & ; & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & \cdots & w_{(N-m)N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \eta_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \eta_1 \\ u_{20} & u_{21} & \cdots & u_{2N} & . & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{(m_1-1)\,0} & u_{(m_1-1)\,1} & \cdots & u_{(m_1-1)N} & ; & \eta_{m_1-1} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

olur ve bu arttırılmış matris

$$\widetilde{\mathbf{W}_h}\mathbf{A}=\tilde{\mathbf{F}}$$

matris formu olarak yazılabilir. Eğer $rank\widetilde{\mathbf{W}_h}=rank\left[\widetilde{\mathbf{W}_h};\tilde{\mathbf{F}}\right]=N+1$ ise yani $\det\widetilde{\mathbf{W}_h}\neq 0$ ise (3.44) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{A}=(\widetilde{\mathbf{W}_h})^{-1}\tilde{\mathbf{F}}. \tag{3.45}$$

formundadır. Son olarak bu formun çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bilinmeyen Boole katsayıları tek sütundan oluştuğu için (3.30) Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denkleminin (3.31) karışık koşulları altında tek çözümü vardır ve çözüm

$$y(x)\cong y_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nR_n(x)$$

ya da

$$[y(x)]=\mathbf{R}(x)\mathbf{A}$$

$$[y(x)]=[R_0(t)\quad R_1(t)\quad R_2(t)\quad \ldots\quad R_N(t)]\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$=[R_0(t)\,a_0\quad R_1(t)\,a_1\quad R_2(t)\,a_2\quad \ldots\quad R_N(t)\,a_N]$$

şeklinde Boole polinom çözümü olarak elde edilir.

4. HATA ANALİZİ VE ÇÖZÜMÜN İYİLEŞTİRİLMESİ

Rezidüel hata ve iyileştirme, lineer fonksiyonel diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerine karşılık gelen hatanın belirlenmesinde ve iyileştirilmesinde kullanılan bir yöntemdir.

Öncelikle $e_N(x)$ hata fonksiyonu

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $y(x)$ tam çözüm ve $y_N(x)$ yaklaşık çözümdür.

L lineer operatör olmak üzere (2.1), (2.2) ve (3.30) denklemleri

$$L[y(x)] = g(x) \tag{4.2}$$

olarak ifade edilir. Burada $L[y(x)]$, (2.1) Volterra integro-diferansiyel denklemler için

$$L[y(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y^{(k)}(x) - \lambda \int_a^x \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, y^{(s)}(t)dt,$$

(2.2) Fredholm integro-diferansiyel denklemler için

$$L[y(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y^{(k)}(x) - \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, y^{(s)}(t)dt,$$

ve (3.30) Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler için

$$L[y(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} p_{kj}(x) y^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \lambda_{rs} \int_{v_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} K_{rs}(x,t) y^{(r)}(\mu_{rs}t + \gamma_{rs})dt$$

şeklindedir.

Boole sıralama yönteminin $\Re_N(x)$ Rezidüel fonksiyonu

$$\Re_N(x) = L[y_N(x)] - g(x) \tag{4.3}$$

olarak tanımlanır. Burada $L[y_N(x)]$, (2.1) Volterra integro-diferansiyel denklemler için

$$L[y_N(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y_N^{(k)}(x) - \lambda \int_a^x \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, y^{(s)}(t)dt = g(x) + \Re_N(x), \tag{4.4}$$

(2.2) Fredholm integro-diferansiyel denklemler için

$$L[y_N(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y_N^{(k)}(x) - \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, y^{(s)}(t)dt = g(x) + \Re_N(x), \quad (4.5)$$

ve (3.30) Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler için

$$L[y_N(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} p_{kj}(x) {y_N}^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj})$$

$$- \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \lambda_{rs} \int_{\upsilon_{rs}(x)}^{\nu_{rs}(x)} K_{rs}(x,t) {y_N}^{(r)}(\mu_{rs}t + \gamma_{rs})dt$$

$$= f(x) + \Re_N(x) \quad (4.6)$$

şeklindedir.

(4.1) $e_N(x)$ hata fonksiyonu için (4.2) denkleminden (4.3) fonksiyonu çıkarılırsa

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -\Re_N(x) \quad (4.7)$$

hata diferansiyel denklemi elde edilir. Açık olarak hata diferansiyel denklemi (2.1), (2.2) ve (3.30) denklemleri için sırasıyla

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) e_N^{(k)}(x) - \lambda \int_a^x \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, {e_N}^{(s)}(t)dt = -\Re_N(x),$$

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) e_N^{(k)}(x) - \lambda \int_a^b \sum_{s=0}^{m_2} K_s(x,t)\, {e_N}^{(s)}(t)dt = -\Re_N(x),$$

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} p_{kj}(x) {e_N}^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \lambda_{rs} \int_{\upsilon_{rs}(x)}^{\nu_{rs}(x)} K_{rs}(x,t) {e_N}^{(r)}(\mu_{rs}t + \gamma_{rs})dt$$

$$= -\Re_N(x)$$

olarak ifade edilir.

(3.2) ve (3.31) homojen olmayan karışık koşullar

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m-1} \left(a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)\right) = 0, \qquad j = 0,1,2,\dots,m-1, \\ &\sum_{k=0}^{m_1-1} \left(a_{ik} {e_N}^{k}(a) + b_{ik} {e_N}^{k}(b)\right) = 0, \qquad i = 0,1,2,\dots,m_1-1 \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

homojen koşullara indirgenir.

(4.7)-(4.8) hata problemi 3. Bölümdeki çözüm yöntemi uygulanarak çözülürse $e_N(x)$ hata fonksiyonuna yaklaşımı olan $e_{N,M}(x)$ $(M > N)$ Boole polinom çözümü elde edilir.

$\Re_N(x)$ Rezidüel fonksiyon yardımıyla (2.1), (2.2) ve (3.30) problemlerinin Boole polinom çözümleri daha iyi hale getirilir. $(M > N)$ için $e_{N,M}(x)$ yaklaşık hata fonksiyonu ve $y_N(x)$ yaklaşık çözümünün toplamıyla

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$$

iyileştirilmiş çözüm elde edilir [19-20,52,54-59].

5. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde Lineer Volterra integro-diferansiyel denklemlerin, Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin, Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin ve Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen Boole sıralama yöntemi uygulanmıştır. Ayrıca çözümlerin Rezidüel fonksiyona dayalı hata analizi hesaplanarak doğruluğu gösterilmiştir. Sonuçlar tablo ve grafiklerde karşılaştırılmıştır. Hesaplamalar MATLAB programı yardımıyla yapılmıştır.

5.1. Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler İçin Örnekler

ÖRNEK 5.1.1. İlk olarak $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında

$$2y^{(2)}(x) - 2xy^{(1)}(x) + y(x)$$
$$= -3x^2 + \frac{x}{3} + \frac{9}{2} + 2\int_0^1 (x+t)y(t)dt, \tag{5.1}$$

$y(0) = 1$ ve $y^{(1)}(0) = -\frac{3}{2}$ karışık koşulları ile verilen homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin $N = 3$ için

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n R_n(x) = a_0R_0(x) + a_1R_1(x) + a_2R_2(x) + a_3R_3(x) \tag{5.2}$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü aranacaktır. Burada $P_0 = 1, P_1 = -2x, P_2 = 2$ $\lambda = 2,$ $a = 0,$ $b = 1,$ $g(x) = -3x^2 + \frac{x}{3} + \frac{9}{2}$ ve $K_0(x,t) = x + t$'dir. $N = 3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.1) denkleminin temel matris denklemi

$$[\mathbf{P_0RD^0} + \mathbf{P_1RD^1} + \mathbf{P_2RD^2} - \lambda\mathbf{RK_0HCH^T}]\mathbf{A} = \mathbf{G} \tag{5.3}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_0}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{P_1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{2}{3}&0&0\\0&0&-\frac{4}{3}&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix},\mathbf{P_2}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{4x4},\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{27}\\1&\frac{2}{3}&\frac{4}{9}&\frac{8}{27}\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{77}{18}\\\frac{61}{18}\\\frac{11}{6}\end{bmatrix},\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\1&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{18}&\frac{49}{108}\\1&\frac{1}{6}&-\frac{7}{18}&\frac{95}{108}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K_0}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{12}&-\frac{1}{12}&\frac{7}{60}\\-\frac{1}{6}&-\frac{1}{12}&\frac{7}{60}&-\frac{13}{60}\\\frac{1}{2}&\frac{7}{60}&-\frac{13}{60}&\frac{779}{1680}\end{bmatrix},\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^1=\begin{bmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{D}^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.27) bağıntısı ve (3.28) arttırılmış matrisine göre (5.3) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_f;\mathbf{G}]=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{3}&\frac{29}{6}&-\frac{1169}{60}&;&\frac{9}{2}\\-\frac{2}{3}&-1&\frac{95}{18}&-\frac{8731}{540}&;&\frac{77}{18}\\-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{91}{18}&-\frac{5921}{540}&;&\frac{61}{18}\\-2&-\frac{5}{3}&\frac{25}{6}&-\frac{299}{60}&;&\frac{11}{6}\end{bmatrix}\qquad(5.4)$$

olarak hesaplanır.

(3.17) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U_0};\ \lambda_0 \\ \mathbf{U_1};\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.4) arttırılmış matrisinde 2 satır silinir ve yerine (5.5) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}_f}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{29}{6} & -\frac{1169}{60} & ; & \frac{9}{2} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{95}{18} & -\frac{8731}{540} & ; & \frac{77}{18} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları (2.5)'de yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x) = \frac{3}{4}R_0(x) + \frac{1}{2}R_1(x) + R_2(x)$$

şeklinde olur. Bu çözüme 2. Bölümde elde edilen Boole terimleri yazılır ve böylece çözüm

$$y(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$y(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (5.1) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.1.2. Bu örnekte $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında $y^{(2)}(0) = 2$, $y^{(1)}(0) = 1$ ve $y(0) = 1$ karışık koşulları ile verilen

$$\begin{aligned} &xy^{(3)}(x) - x^2y^{(2)}(x) + y^{(1)}(x) \\ &= g(x) + \int_0^1 [x^2t^2y^{(2)}(t) + x^2ty^{(1)}(t) + xty(t)]dt, \end{aligned} \tag{5.6}$$

homojen olmayan 3. Mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemin $N = 3$ için

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n R_n(x) = a_0 R_0(x) + a_1 R_1(x) + a_2 R_2(x) + a_3 R_3(x) \quad (5.7)$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü incelenecektir. Burada $g(x) = -\frac{23}{16}x^2 + \frac{11}{12}x + 1$, $P_0 = 1, P_1 = -x^2$, $P_2 = x$ $\lambda = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $K_0(x,t) = xt, K_1(x,t) = x^2 t$ ve $K_2(x,t) = x^2 t^2$'dir. $N = 3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.6) denkleminin temel matris denklemi

$$[\mathbf{P_0RD^0} + \mathbf{P_1RD^1} + \mathbf{P_2RD^2} - \lambda(\mathbf{RK_0HCH^T} + \mathbf{RK_1HCH^TD^1} + \mathbf{RK_2HCH^TD^2})]\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (5.8)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D^1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{95}{108} \\ -\frac{5}{54} \\ -\frac{23}{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{49}{108}\\ 1 & \frac{1}{6} & -\frac{7}{18} & \frac{95}{108}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{60}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{60} & -\frac{13}{60}\\ \frac{1}{2} & \frac{7}{60} & -\frac{13}{60} & \frac{779}{1680}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_0}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{K_1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{K_2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 4 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.25) bağıntısı ve (3.26) arttırılmış matrisine göre (5.8) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_f;\mathbf{G}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 5 & ; & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{11}{12} & -\frac{43}{27} & \frac{449}{90} & ; & \frac{95}{108}\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{18} & -\frac{49}{27} & -\frac{284}{45} & ; & -\frac{5}{54}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{8}{3} & \frac{299}{30} & ; & -\frac{23}{12}\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

olarak hesaplanır.

(3.17) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix}\mathbf{U_0};\ \lambda_0\\ \mathbf{U_1};\ \lambda_1\\ \mathbf{U_2};\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & 1\\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & 1\\ 0 & 0 & 2 & -9 & ; & 2\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.9) arttırılmış matrisinde 3 satır silinir ve yerine (5.10) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}_f};\widetilde{\mathbf{G}}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 5 & ; & 1\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & 1\\ 0 & 0 & -2 & 5 & ; & 1\\ 0 & 0 & 2 & -9 & ; & 2\end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları, (2.5)'te yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x) = 2R_0(x) + 3R_1(x) + R_2(x)$$

şeklinde olur. Bu çözüme Bölüm 2'de elde edilen Boole terimleri yazılır ve böylece çözüm

$$y(x) = 2 + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$y(x) = x^2 + x + 1$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm, (5.6) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.1.3. Bu örnekte, $x\epsilon(0,1)$ aralığında

$$y^{(2)}(x) + xy^{(1)}(x) + \pi^2 y(x) - \int_0^1 (x+t)y(t)dt = \pi x \cos(\pi x) - \frac{2x+1}{\pi}, \quad (5.11)$$

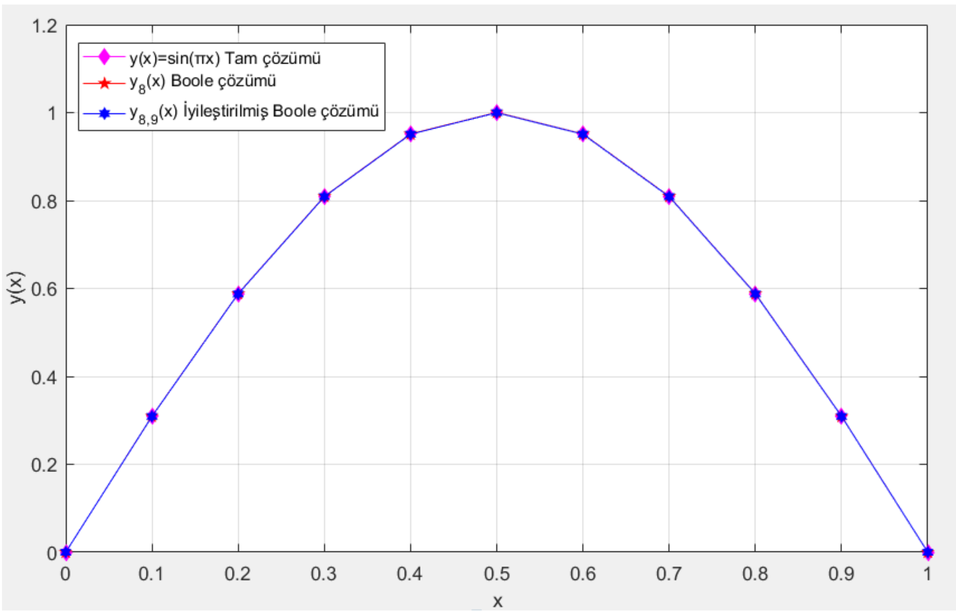
$y(0) = y(1) = 0$ karışık koşulları ile 2. Mertebeden homojen olmayan lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi verilmiştir. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = \sin(\pi x)$ 'dir [46]. (5.11) denkleminin $N, M = 8{,}9$ ve $N, M = 12, 13$ için Bölüm 3'te verilen Boole sıralama yöntemiyle $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler ve $y(x) = \sin(\pi x)$ tam çözümleri, Tablo 5.1.'de verilmiştir. Ayrıca Şekil 5.1.'de bu değerler karşılaştırılmıştır. Bölüm 4'te verilen yönteme göre hata fonksiyonları hesaplanmıştır ve sonuçlar iyileştirilmiştir. Tablo 5.2.'de $N, M = 8{,}9$ ve $N, M = 12, 13$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Şekil 5.2.'de $N, M = 8{,}9$ için ve Şekil 5.3.'de $N, M = 12, 13$ için karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.1. $y(x) = sin\ (\pi x)$ tam çözümü, $N, M = 8{,}9$ ve $N, M = 12, 13$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri.

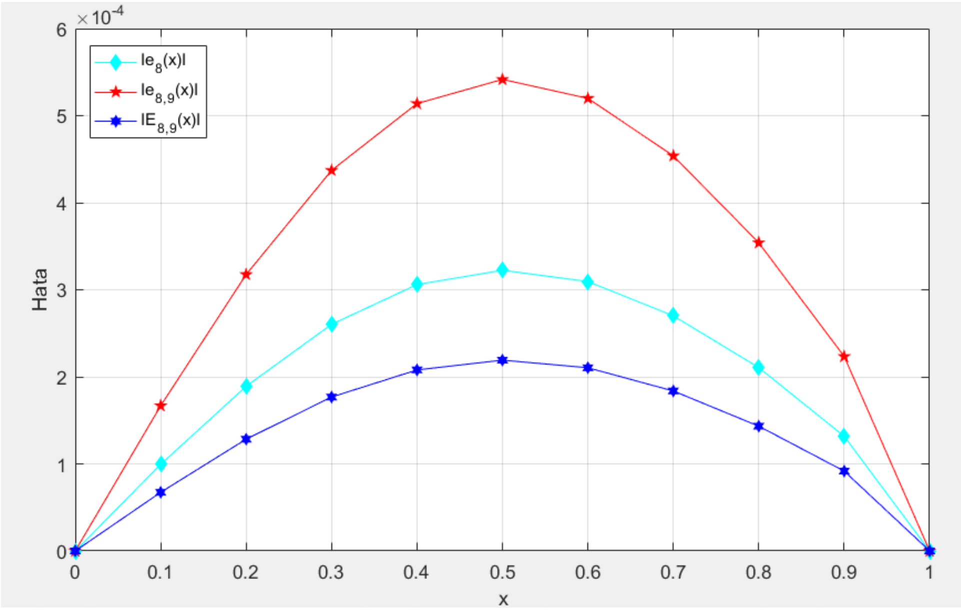
x_i	Tam Çözümü $y(x) = \sin(\pi x)$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 8$	$N = 12$	$N = 8, M = 9$	$N = 12, M = 13$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.5877852523	0.5879743867	0.5877852133	0.5876568712	0.5877852566
0.4	0.9510565163	0.9513625295	0.9510564532	0.950848595	0.9510565233
0.6	0.9510565163	0.9513659964	0.9510564525	0.9508460901	0.9510565234
0.8	0.5877852523	0.5879958804	0.5877852088	0.5876419354	0.5877852572
1.0	0.0	6.938893904e-18	0.0	2.072266105e-18	4.770489559e-18

Tablo 5.2. $N, M = 8{,}9$ ve $N, M = 12, 13$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

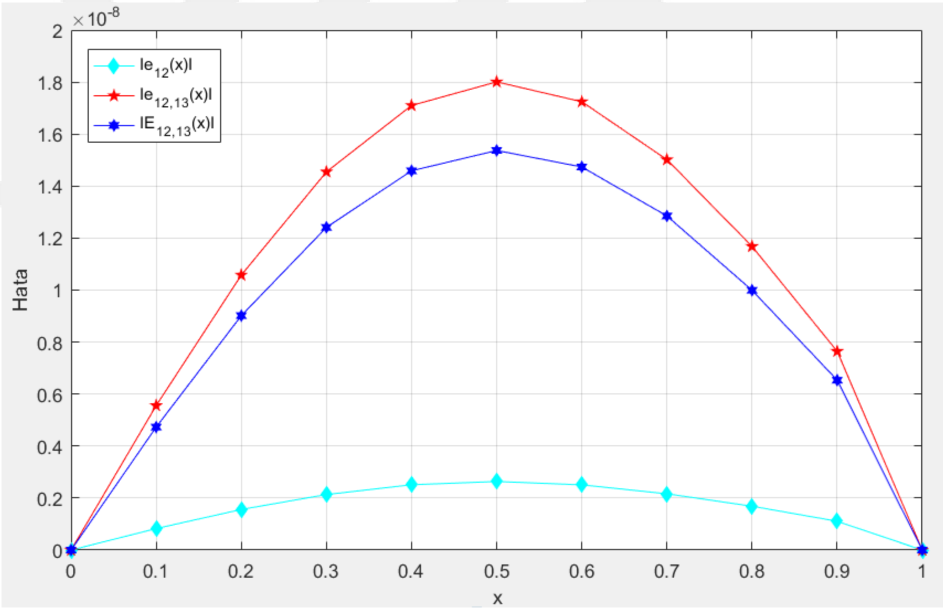
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_N \rvert$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_{N,M} \rvert$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\lvert E_{N,M} \rvert$	
	$N = 8$	$N = 12$	$N = 8, M = 9$	$N = 12, M = 13$	$N = 8, M = 9$	$N = 12, M = 13$
0	0	0	0	0	0	0
0.2	1.8913e-04	3.8955e-08	3.1752e-04	4.3304e-08	1.2838e-04	4.3492e-09
0.4	3.0601e-04	6.3103e-08	5.1393e-04	7.0150e-08	2.0792e-04	7.0469e-09
0.6	3.0948e-04	6.3834e-08	5.1991e-04	7.0968e-08	2.1043e-04	7.1341e-09
0.8	2.1063e-04	4.3449e-08	3.5395e-04	4.8316e-08	1.4332e-04	4.8666e-09
1.0	1.8264e-20	9.0602e-21	1.1217e-21	5.7065e-24	1.7142e-20	9.0659e-21



Şekil 5.1. $y(x) = sin\ (\pi x)$ tam çözümü, $y_8(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{8,9}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.2. $|e_8|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{8,9}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{8,9}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.3. $|e_{12}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{12,13}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{12,13}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.1.4. Bu örnekte

$$y^{(1)}(x) = y(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x+1} - \ln(1+x) + \frac{1}{(ln2)^2}\int_0^1 \frac{x}{t+1} y(t)dt, \qquad (5.12)$$

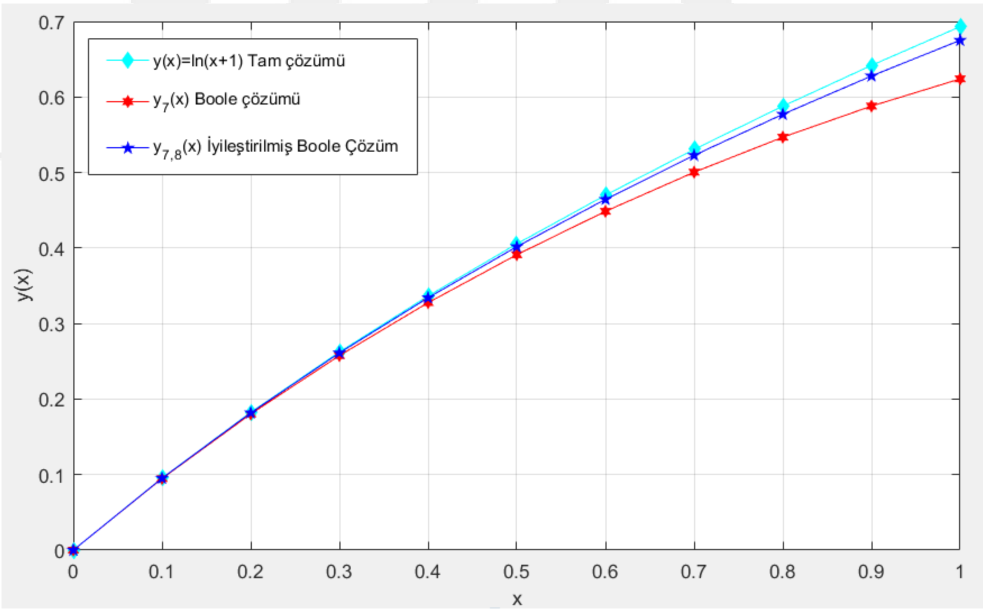
$y(0) = 0$ karışık koşulu ile homojen olmayan lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi verilmiştir [47]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = \ln(x+1)$'dir. (5.12) denkleminin $N, M = 7{,}8$ ve $N, M = 11, 12$ için Bölüm 3'te verilen Boole sıralama yöntemi ile $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler ve $y(x) = \ln(x+1)$ tam çözümleri Tablo 5.3.'te verilmiştir. Ayrıca Şekil 5.4. ve Şekil 5.5.'te karşılaştırılmıştır. Tablo 5.4.'te $N, M = 7, 8$ ve $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Şekil 5.6.'da ve Şekil 5.7.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.3. $y(x) = ln(x+1)$tam çözümü, $N, M = 7{,}8$ ve $N, M = 11, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri.

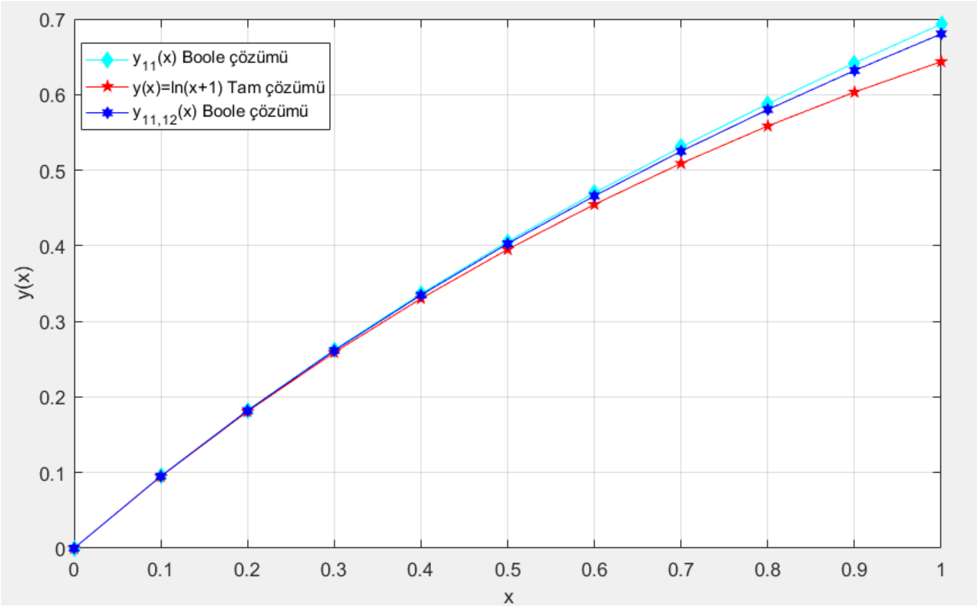
x_i	Tam Çözümü $y(x) = \ln(x+1)$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 7$	$N = 11$	$N = 7, M = 8$	$N = 11, M = 12$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.0953101798	0.09481263214	0.09495355499	0.09518029725	0.09521710971
0.2	0.1823215568	0.1802595548	0.1808454589	0.1817833976	0.1819363326
0.3	0.2623642645	0.2575594062	0.258925618	0.2611103683	0.2614668648
0.4	0.3364722366	0.3276225365	0.3301392985	0.3341628048	0.3348195002
0.5	0.4054651081	0.3911313138	0.3952081433	0.4017245772	0.4027883002
0.6	0.4700036292	0.448595242	0.4546846043	0.4644169726	0.466005752
0.7	0.5306282511	0.5003876721	0.5089894447	0.522736753	0.524981071
0.8	0.5877866649	0.5467708908	0.5584380801	0.5770834088	0.5801274281
0.9	0.6418538862	0.5879163683	0.6032593378	0.6277786579	0.6317816873
1.0	0.6931471806	0.6239269484	0.6436089574	0.6750779996	0.6802189487

Tablo 5.4 $N, M = 7, 8$ ve $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

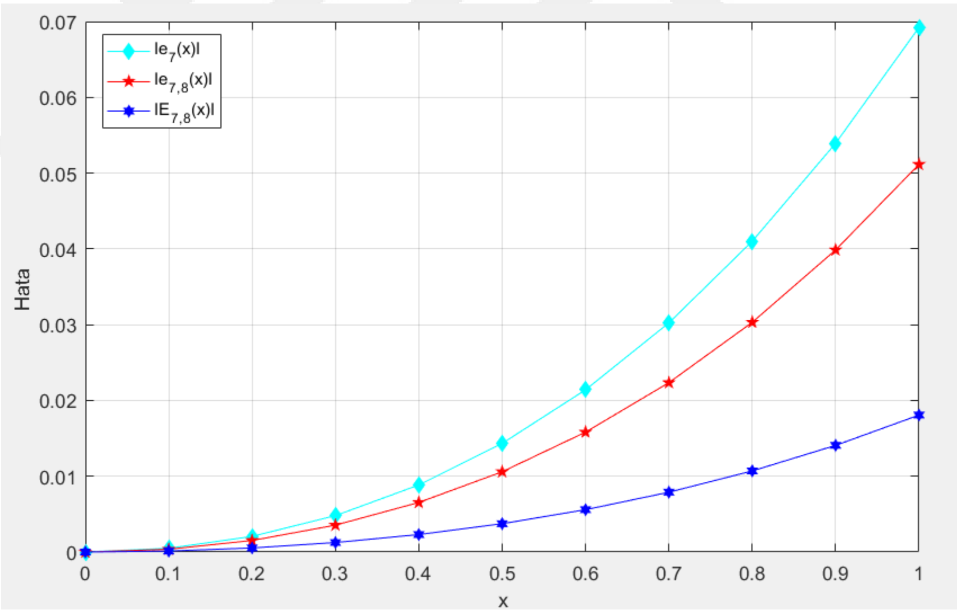
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 7$	$N = 11$	$N = 7, M = 8$	$N = 11, M = 12$	$N = 7, M = 8$	$N = 11, M = 12$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	4.9755e-04	3.5662e-04	3.6767e-04	2.6355e-04	1.2988e-04	9.3070e-05
0.2	2.0620e-03	1.4761e-03	1.5238e-03	1.0909e-03	5.3816e-04	3.8522e-04
0.3	4.8049e-03	3.4386e-03	3.5510e-03	2.5412e-03	1.2539e-03	8.9740e-04
0.4	8.8497e-03	6.3329e-03	6.5403e-03	4.6802e-03	2.3094e-03	1.6527e-03
0.5	1.4334e-02	1.0257e-02	1.0593e-02	7.5802e-03	3.7405e-03	2.6768e-03
0.6	2.1408e-02	1.5319e-02	1.5822e-02	1.1321e-02	5.5867e-03	3.9979e-03
0.7	3.0241e-02	2.1639e-02	2.2349e-02	1.5992e-02	7.8915e-03	5.6472e-03
0.8	4.1016e-02	2.9349e-02	3.0313e-02	2.1689e-02	1.0703e-02	7.6592e-03
0.9	5.3938e-02	3.8595e-02	3.9862e-02	2.8522e-02	1.4075e-02	1.0072e-02
1.0	6.9220e-02	4.9538e-02	5.1151e-02	3.6610e-02	1.8069e-02	1.2928e-02



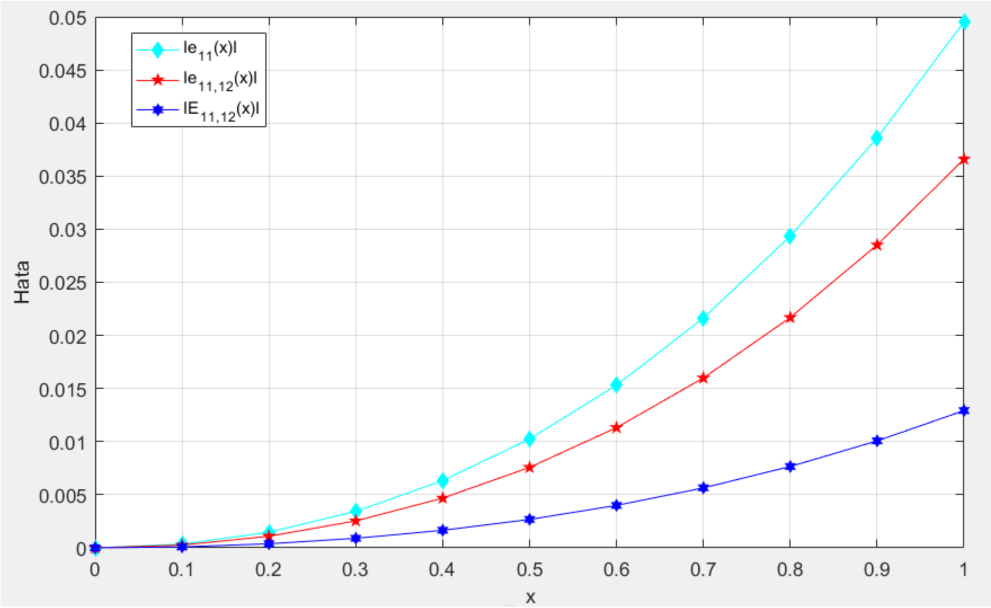
Şekil 5.4. $y(x) = ln\,(x+1)$ tam çözümü, $y_7(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{7,8}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.5. $y(x) = ln\ (x+1)$ tam çözümü, $y_{11}(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{11,12}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.6. $|e_7|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{7,8}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{7,8}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.7. $|e_{11}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{11,12}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{11,12}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.1.5. Bu örnekte

$$y^{(5)}(x) - x^2y^{(3)}(x) - y^{(1)}(x) - xy(x)$$

$$= x^2\cos(x) - x\sin(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)dt \tag{5.13}$$

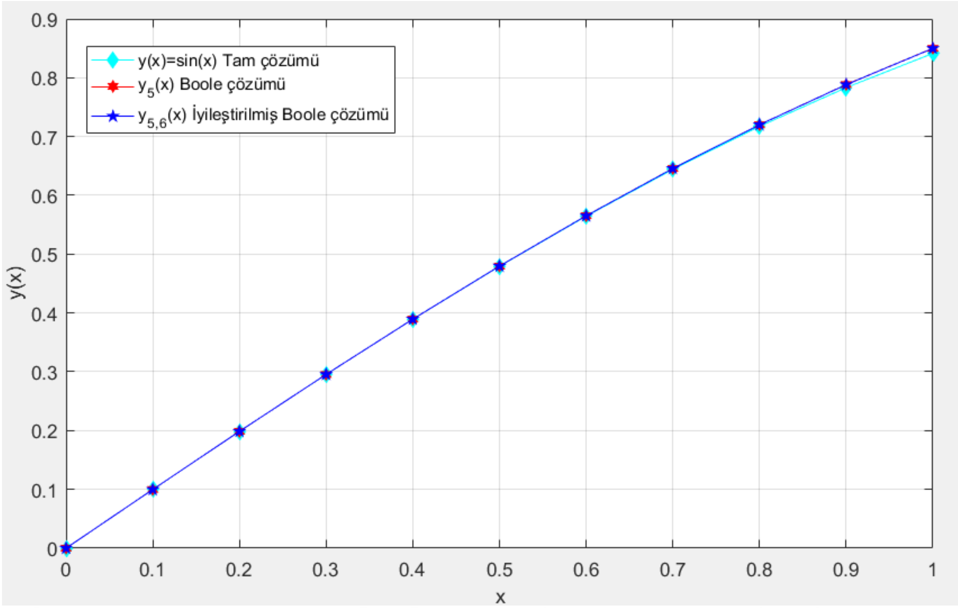
$y(0) = y^{(2)}(0) = y^{(4)}(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1$ ve $y^{(3)}(0) = -1$ karışık koşulu ile homojen olmayan 5. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi verilmiştir. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = \sin(x)$'dir [26]. Bölüm 3'te verilen Boole sıralama yöntemiyle (5.13) denkleminin $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 10, 11$ için elde edilmiştir. Tablo 5.5.'te elde edilen değerler ve $y(x) = \sin(x)$ tam çözümlerinin değerleri verilmiştir. Ayrıca Şekil 5.8.'de $N, M = 5{,}6$ için $y(x) = \sin(x)$ tam çözümleri, $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri karşılaştırılmıştır. Bölüm 4'te verilen yönteme göre $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 10, 11$ için (5.13) denkleminin $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatası hesaplanmıştır. Hesaplanan değerler Tablo 5.6.'da verilmiştir. Şekil 5.9.'da $N, M = 5{,}6$ için ve Şekil 5.10.'da $N, M = 10, 11$ için karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.5. $y(x)=sin(x)$ tam çözümü, $N,M=5,6$ ve $N,M=10,11$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri.

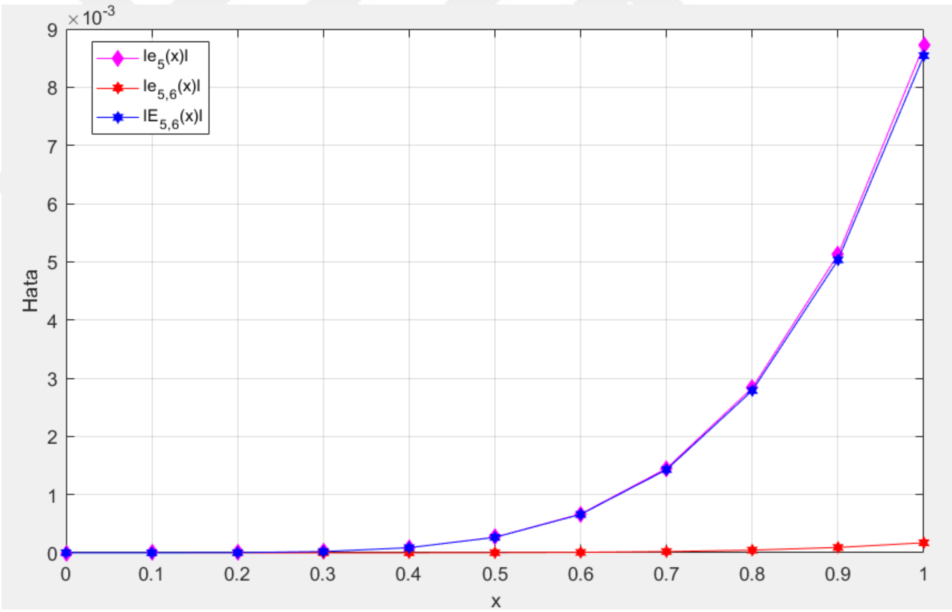
x_i	Tam Çözümü $y(x)=\sin(x)$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N=5$	$N=10$	$N=5, M=6$	$N=10, M=11$
0	0.0	2.032879073e-20	2.710505431e-19	1.948175779e-20	3.794707604e-19
0.1	0.09983341665	0.09983350185	0.09983350179	0.09983350164	0.09983350178
0.2	0.1986693308	0.1986720593	0.1986720553	0.198672047	0.1986720552
0.3	0.2955202067	0.29554095	0.2955408962	0.2955408166	0.2955408959
0.4	0.3894183423	0.3895058962	0.3895055343	0.389505163	0.389505533
0.5	0.4794255386	0.4796932869	0.4796916694	0.4796905273	0.4796916659
0.6	0.5646424734	0.5653103996	0.5653048827	0.5653022342	0.5653048751
0.7	0.6442176872	0.6456656232	0.645650096	0.6456451673	0.6456500812
0.8	0.7173560909	0.7201886798	0.7201508488	0.7201433245	0.7201508228
0.9	0.7833269096	0.7884508471	0.7883685217	0.7883592524	0.7883684792
1.0	0.8414709848	0.8501851802	0.8500217229	0.8500133611	0.8500216573

Tablo 5.6. $N,M=5,6$ ve $N,M=10,11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

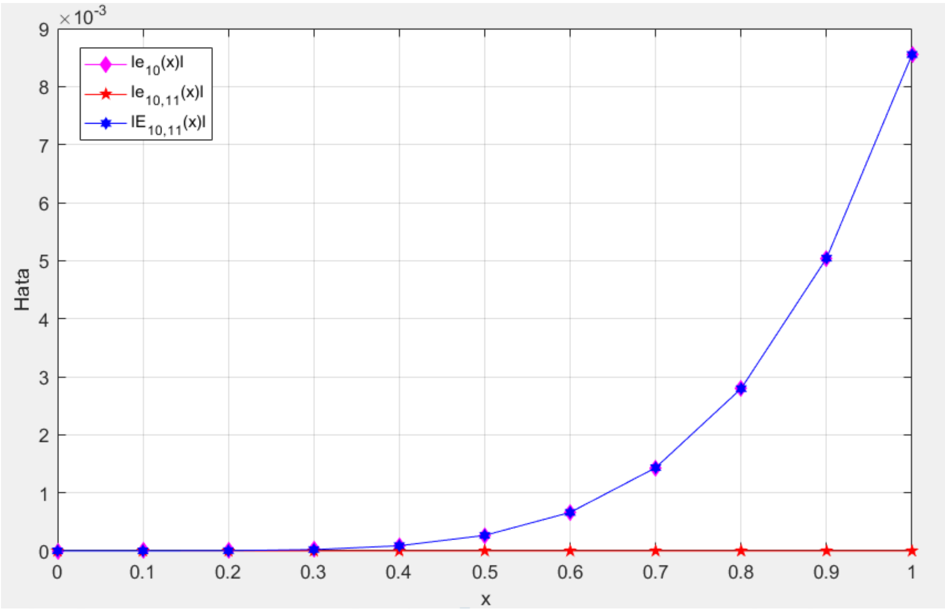
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $|e_N|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $|e_{N,M}|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $|E_{N,M}|$	
	$N=5$	$N=10$	$N=5, M=6$	$N=10, M=11$	$N=5, M=6$	$N=10, M=11$
0	2.0329e-20	2.7105e-19	8.4703e-22	1.0842e-19	1.9482e-20	3.7947e-19
0.1	8.5205e-08	8.5139e-08	2.1495e-10	1.0602e-12	8.4990e-08	8.5138e-08
0.2	2.7285e-06	2.7245e-06	1.2223e-08	4.4699e-11	2.7162e-06	2.7244e-06
0.3	2.0743e-05	2.0690e-05	1.3341e-07	3.3714e-10	2.0610e-05	2.0689e-05
0.4	8.7554e-05	8.7192e-05	7.3321e-07	1.2885e-09	8.6821e-05	8.7191e-05
0.5	2.6775e-04	2.6613e-04	2.7595e-06	3.4786e-09	2.6499e-04	2.6613e-04
0.6	6.6793e-04	6.6241e-04	8.1654e-06	7.6689e-09	6.5976e-04	6.6240e-04
0.7	1.4479e-03	1.4324e-03	2.0456e-05	1.4802e-08	1.4275e-03	1.4324e-03
0.8	2.8326e-03	2.7948e-03	4.5355e-05	2.5972e-08	2.7872e-03	2.7947e-03
0.9	5.1239e-03	5.0416e-03	9.1595e-05	4.2499e-08	5.0323e-03	5.0416e-03
1.0	8.7142e-03	8.5507e-03	1.7182e-04	6.5620e-08	8.5424e-03	8.5507e-03



Şekil 5.8. $y(x) = sin(x)$ tam çözümü, $y_5(x)$ Boole çözümü ve $y_{5,6}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.9. $|e_5|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{5,6}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{5,6}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.10. $|e_{10}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{10,11}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,11}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.1.6. Bu örnekte $y(0) = y(1) = 1$ karışık koşulu ile

$$y^{(2)}(x) - \int_0^1 (x+t)y(t)dt = -\pi^2 \sin(\pi x) - \frac{2x+1}{\pi}, \qquad x \in (0,1) \qquad (5.14)$$

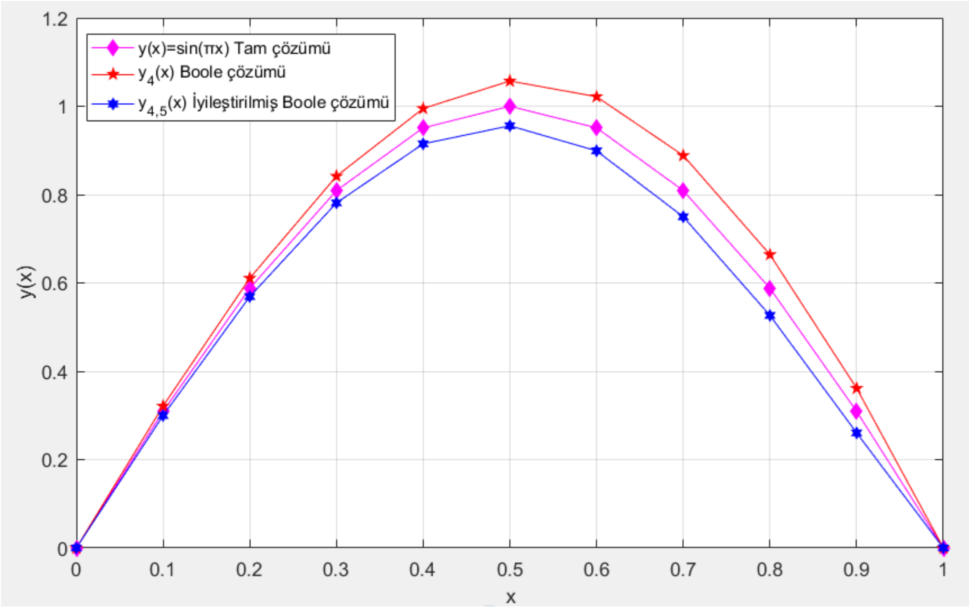
olarak verilen homojen olmayan 2. mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi ile çözülmüştür. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = \sin(\pi x)$'dir [33]. (5.14) denkleminin $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 9, 10$ için elde edilmiştir. Elde edilen değerler ve $y(x) = \sin(\pi x)$ tam çözümünün değerleri Tablo 7.'de verilmiştir. Şekil 5.11. ve Şekil 5.12.'de $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 9, 10$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri ile $y(x) = \sin(\pi x)$ tam çözümleri karşılaştırılmıştır. Tablo 5.8.'de $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 9, 10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Şekil 5.13.'te $N, M = 4, 5$ için ve Şekil 5.14.'te $N, M = 9, 10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatası karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.7. $y(x) = \sin(\pi x)$ tam çözümü, $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 9, 10$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri.

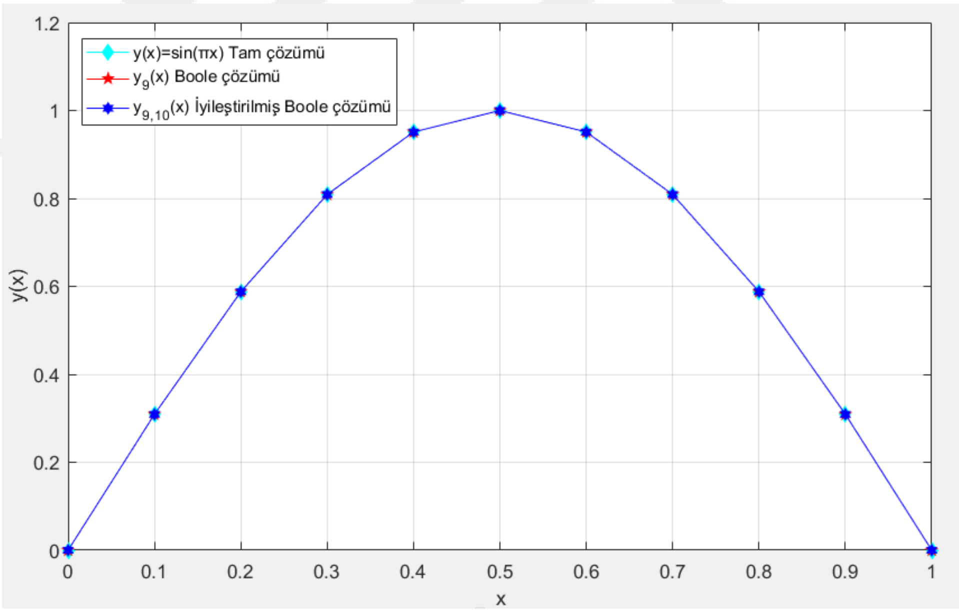
x_i	Tam Çözümü $y(x) = \sin(\pi x)$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 4$	$N = 9$	$N = 4, M = 5$	$N = 9, M = 10$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.3090169944	0.3212644087	0.3090136677	0.2996469449	0.3090177331
0.2	0.5877852523	0.6105715374	0.5877783941	0.5690117714	0.5877865992
0.3	0.8090169944	0.841686585	0.8090064742	0.7811904055	0.8090187981
0.4	0.9510565163	0.9949157485	0.9510421545	0.914818434	0.9510586084
0.5	1.0	1.057106223	0.9999816199	0.9557829536	1.000002194
0.6	0.9510565163	1.021646204	0.9510339008	0.89893442	0.9510586086
0.7	0.8090169944	0.8884648816	0.8089899514	0.7497984975	0.8090187635
0.8	0.5877852523	0.6640324478	0.5877534186	0.526287908	0.5877864577
0.9	0.3090169944	0.3613600915	0.3089827207	0.2604142804	0.309017409
1.0	0.0	0.0	-1.927846988e-18	-2.57498016e-18	4.553649124e-18

Tablo 5.8. $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 9, 10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

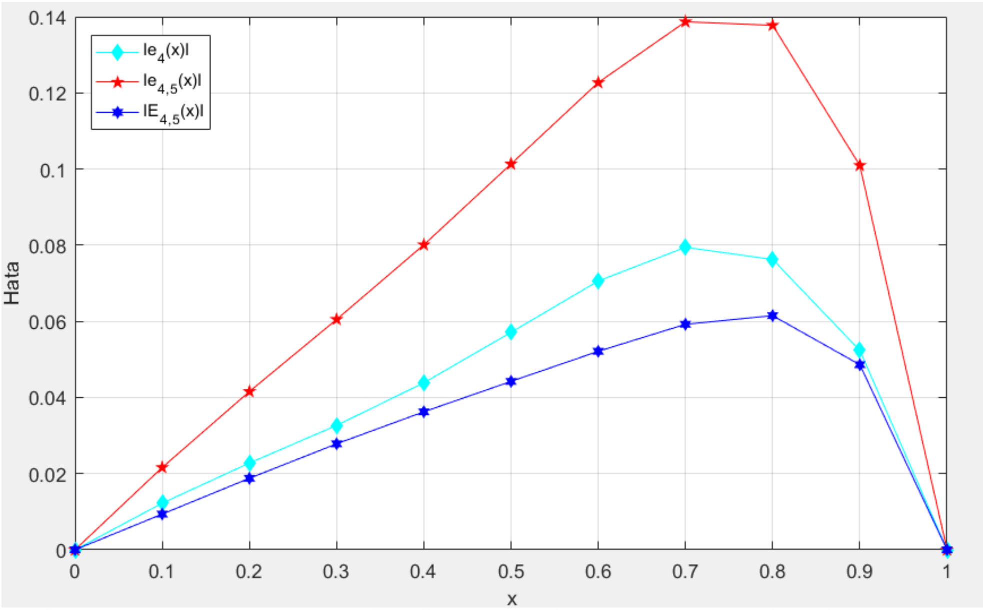
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_N\rvert$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_{N,M}\rvert$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\lvert E_{N,M}\rvert$	
	$N = 4$	$N = 9$	$N = 4, M = 5$	$N = 9, M = 10$	$N = 4, M = 5$	$N = 9, M = 10$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	1.2247e-02	3.3267e-06	2.1617e-02	4.0654e-06	9.3700e-03	7.3869e-07
0.2	2.2786e-02	6.8582e-06	4.1560e-02	8.2051e-06	1.8773e-02	1.3469e-06
0.3	3.2670e-02	1.0520e-05	6.0496e-02	1.2324e-05	2.7827e-02	1.8038e-06
0.4	4.3859e-02	1.4362e-05	8.0097e-02	1.6454e-05	3.6238e-02	2.0921e-06
0.5	5.7106e-02	1.8380e-05	1.0132e-01	2.0574e-05	4.4217e-02	2.1942e-06
0.6	7.0590e-02	2.2615e-05	1.2271e-01	2.4708e-05	5.2122e-02	2.0923e-06
0.7	7.9448e-02	2.7043e-05	1.3867e-01	2.8812e-05	5.9218e-02	1.7691e-06
0.8	7.6247e-02	3.1834e-05	1.3774e-01	3.3039e-05	6.1497e-02	1.2054e-06
0.9	5.2343e-02	3.4274e-05	1.0095e-01	3.4688e-05	4.8603e-02	4.1458e-07
1.0	1.6517e-20	6.2003e-20	1.5378e-20	1.4581e-21	1.1389e-21	6.0545e-20



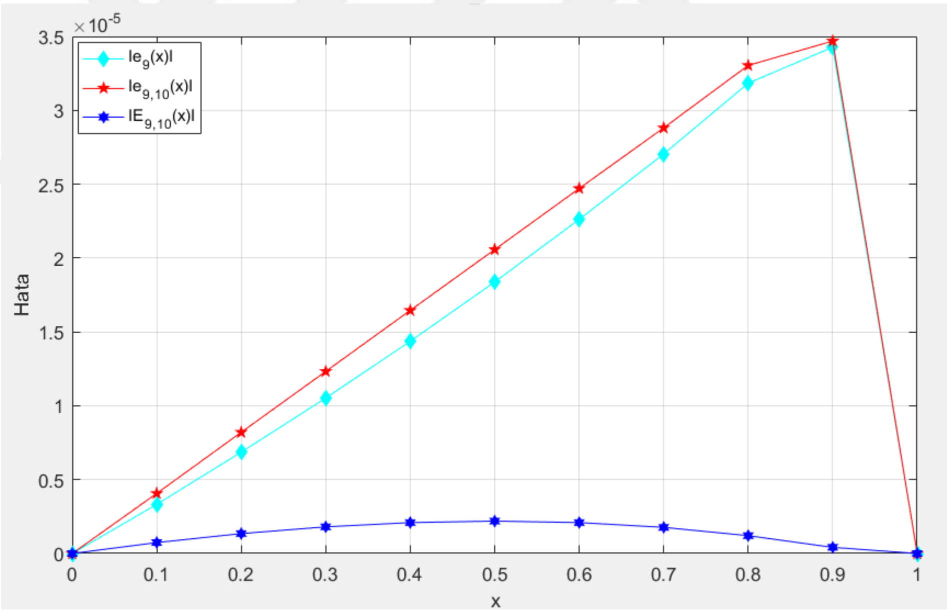
Şekil 5.11. $y(x) = sin(\pi x)$ tam çözümü, $y_4(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{4,5}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.12. $y_9(x)$ Boole çözümlerinin ve $y_{9,10}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerlerinin ve $y(x) = sin(\pi x)$ tam çözümlerinin karşılaştırılması.



Şekil 5.13. $|e_4|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{4,5}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{4,5}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.14. $|e_9|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{9,10}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{9,10}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.1.7. Bu örnekte karışık koşulları $y^{(2)}(0) = -1$, $y^{(1)}(0) = 0$ ve $y(0) = 1$ ve tam çözümü $y(x) = \cos(x)$ olan

$$y^{(3)}(x) = \sin(x) - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xty^{(1)}(t)dt, \tag{5.15}$$

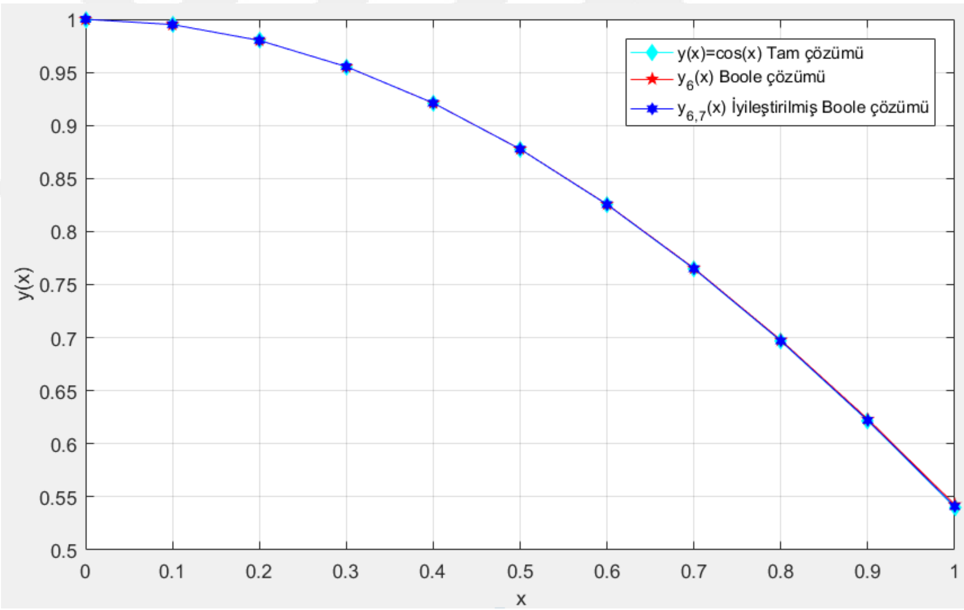
homojen olmayan 3. Mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi kullanılarak çözülmüştür [34]. (5.15) denkleminin $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün $N, M = 6{,}7$ ve $N, M = 11, 12$ için değerleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler ve $y(x) = \cos(x)$ tam çözümünün değerleri Tablo 9.'da verilmiştir. Şekil 5.15. $N, M = 6{,}7$ ve Şekil 5.16.'da $N, M = 11, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri, $y(x) = \cos(x)$ tam çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Tablo 5.10.'da $N, M = 6{,}7$ ve $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ayrıca Şekil 5.17.'de $N, M = 6{,}7$ için ve Şekil 5.18.'de $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatası karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.9. $y(x) = cos(x)$ tam çözümü, $N, M = 6, 7$ ve $N, M = 11, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri.

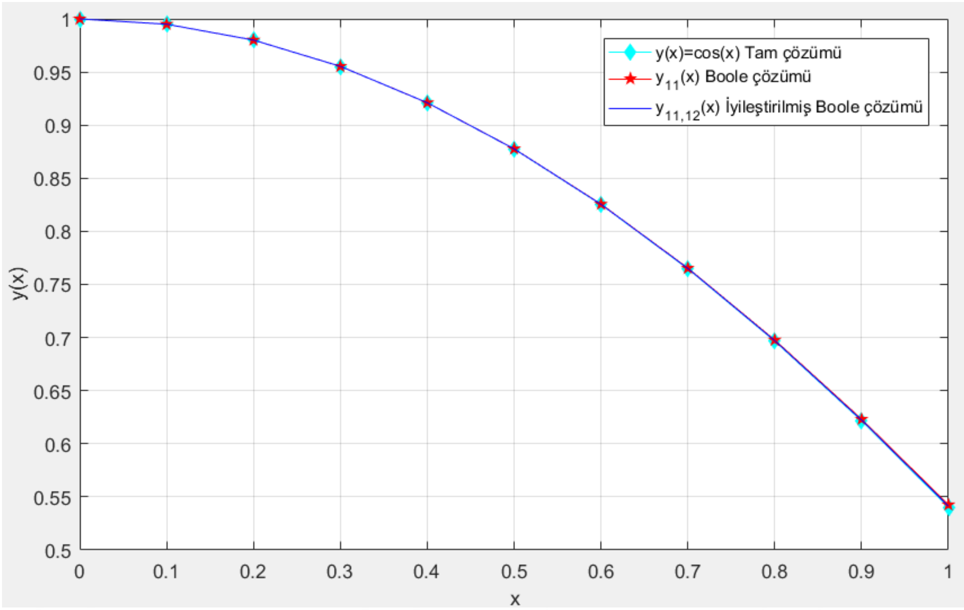
x_i	Tam Çözümü $y(x) = \cos$ (x)	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 6$	$N = 11$	$N = 6, M = 7$	$N = 11, M = 12$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.9950041653	0.9950044072	0.9950043888	0.9950042297	0.9950042588
0.2	0.9800665778	0.9800704305	0.9800701546	0.9800676151	0.9800680741
0.3	0.9553364891	0.9553559208	0.9553545965	0.9553417645	0.9553440641
0.4	0.921060994	0.9211222316	0.9211182223	0.9210777173	0.9210849348
0.5	0.8775825619	0.8777317536	0.8777222793	0.8776234676	0.877641011
0.6	0.8253356149	0.8256445335	0.8256253329	0.825420535	0.8254568151
0.7	0.7648421873	0.7654139766	0.7653789257	0.7649996238	0.7650667255
0.8	0.6967067093	0.6976816334	0.6976223614	0.6969754149	0.6970897616
0.9	0.6216099683	0.6231710703	0.6230766658	0.6220405334	0.622223544
1.0	0.5403023059	0.5426808243	0.5425377844	0.5409587339	0.5412374921

Tablo 5.10. $N, M = 6{,}7$ ve $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

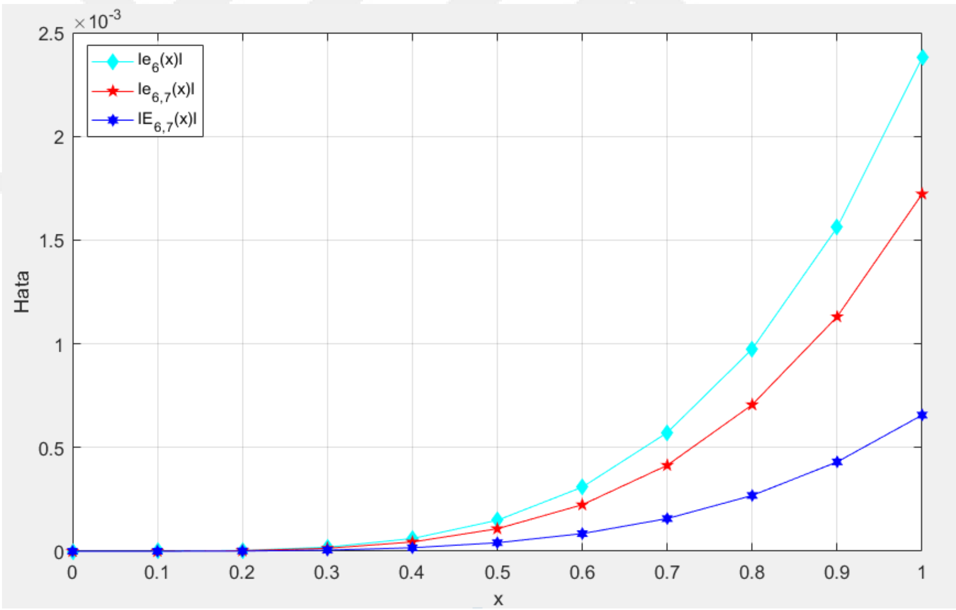
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 6$	$N = 11$	$N = 6, M = 7$	$N = 11, M = 12$	$N = 6, M = 7$	$N = 11, M = 12$
0	0	2.7105e-20	0	8.4703e-22	0	2.6258e-20
0.1	2.4191e-07	2.2355e-07	1.7752e-07	1.3003e-07	6.4388e-08	9.3519e-08
0.2	3.8527e-06	3.5768e-06	2.8154e-06	2.0805e-06	1.0373e-06	1.4963e-06
0.3	1.9432e-05	1.8107e-05	1.4156e-05	1.0532e-05	5.2754e-06	7.5750e-06
0.4	6.1238e-05	5.7228e-05	4.4514e-05	3.3287e-05	1.6723e-05	2.3941e-05
0.5	1.4919e-04	1.3972e-04	1.0829e-04	8.1268e-05	4.0906e-05	5.8449e-05
0.6	3.0892e-04	2.8972e-04	2.2400e-04	1.6852e-04	8.4920e-05	1.2120e-04
0.7	5.7179e-04	5.3674e-04	4.1435e-04	3.1220e-04	1.5744e-04	2.2454e-04
0.8	9.7492e-04	9.1565e-04	7.0622e-04	5.3260e-04	2.6871e-04	3.8305e-04
0.9	1.5611e-03	1.4667e-03	1.1305e-03	8.5312e-04	4.3057e-04	6.1358e-04
1.0	2.3785e-03	2.2355e-03	1.7221e-03	1.3003e-03	6.5643e-04	9.3519e-04



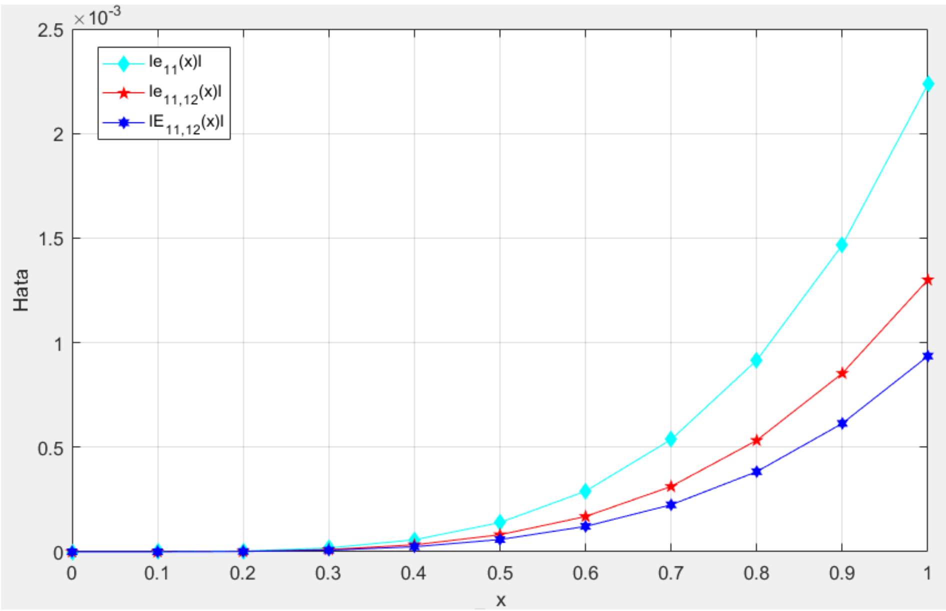
Şekil 5.15. $y(x) = cos(x)$ tam çözümü, $y_6(x)$ Boole çözümü ve $y_{6,7}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.16. $y(x) = cos(x)$ tam çözümü, $y_{11}(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{11,12}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.17. $|e_6|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{6,7}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{6,7}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.18. $|e_{11}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{11,12}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{11,12}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

5.2. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler için Örnekler

ÖRNEK 5.2.1. Bu örnekte $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında

$$x^2 y^{(2)}(x) - x y^{(1)}(x) + 2y(x)$$

$$= \frac{x^6}{8} - \frac{x^5}{3} + \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 2x + 4 - \frac{1}{2}\int_0^x (x^2 t) y(t) dt, \qquad (5.16)$$

$y(0) = 2$ ve $y^{(1)}(0) = -2$ karışık koşulları ile verilen homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin $N = 3$ için

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n R_n(x) = a_0 R_0(x) + a_1 R_1(x) + a_2 R_2(x) + a_3 R_3(x) \; (5.17)$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü aranacaktır. Burada $P_0 = 2, P_1 = -x, P_2 = x^2$ $\lambda = -\frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $g(x) = \frac{x^6}{8} - \frac{x^5}{3} + \frac{x^4}{2} - 2x^2 - 2x + 4$ ve $K(x,t) = x^2 t$'dir. $N = 3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0,\; x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3},\; x_3 = 1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.16) denkleminin temel matris denklemi

$$\left[\mathbf{P_0RD^0}+\mathbf{P_1RD^1}+\mathbf{P_2RD^2}-\lambda\,\overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K_0}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T}\overline{\mathbf{D}^0}\right]\mathbf{A}=\mathbf{G} \tag{5.18}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_0}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix},\mathbf{P_1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&-\frac{2}{3}&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\mathbf{P_2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{9}&0&0\\0&0&\frac{4}{9}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{4x4},\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{27}\\1&\frac{2}{3}&\frac{4}{9}&\frac{8}{27}\\1&1&1&1\end{bmatrix},\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^1=\begin{bmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{D}^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(0)&0&0&0\\0&\mathbf{X}\left(\frac{1}{3}\right)&0&0\\0&0&\mathbf{X}\left(\frac{2}{3}\right)&0\\0&0&0&\mathbf{X}(1)\end{bmatrix}_{4\text{x}16},\mathbf{G}=\begin{bmatrix}4\\\frac{1353}{380}\\\frac{880}{243}\\\frac{103}{24}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\overline{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}&0&0&0\\0&\mathbf{K}&0&0\\0&0&\mathbf{K}&0\\0&0&0&\mathbf{K}\end{bmatrix}_{16\text{x}16},$$

$$\overline{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}&0&0&0\\0&\mathbf{H}&0&0\\0&0&\mathbf{H}&0\\0&0&0&\mathbf{H}\end{bmatrix}_{16\text{x}16},\quad \overline{\mathbf{H}^T}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}^T&0&0&0\\0&\mathbf{H}^T&0&0\\0&0&\mathbf{H}^T&0\\0&0&0&\mathbf{H}^T\end{bmatrix}_{16\text{x}16}$$

$$\overline{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}(0)&0&0&0\\0&\mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right)&0&0\\0&0&\mathbf{C}\left(\frac{2}{3}\right)&0\\0&0&0&\mathbf{C}(1)\end{bmatrix}_{16\text{x}16},\quad \overline{\mathbf{D}^0}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\end{bmatrix}_{16x4}$$

şeklindedir. (3.18) arttırılmış matrisine göre (5.18) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_v;\mathbf{G}]=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & ; & 4\\ \frac{649}{324} & -\frac{3893}{5832} & \frac{1621}{2916} & -\frac{28333}{43740} & ; & \frac{1353}{380}\\ \frac{166}{81} & -\frac{245}{729} & \frac{133}{243} & -\frac{14347}{21870} & ; & \frac{880}{243}\\ \frac{9}{4} & \frac{1}{24} & \frac{11}{12} & -\frac{19}{60} & ; & \frac{103}{24}\end{bmatrix} \tag{5.19}$$

olarak hesaplanır.

(3.17) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix}\mathbf{U_0}; & \lambda_0\\ \mathbf{U_1}; & \lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & 2\\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -2\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.19) arttırılmış matrisinde 2 satır silinir ve yerine (5.20) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$\left[\widetilde{\mathbf{W}_v};\widetilde{\mathbf{G}}\right]=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & ; & 4\\ \frac{649}{324} & -\frac{3893}{5832} & \frac{1621}{2916} & -\frac{28333}{43740} & ; & \frac{1353}{380}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & 2\\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -2\end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları, (2.5)'de yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x)=\frac{3}{2}R_0(x)+R_2(x)$$

şeklinde olur ve bu çözüme 2. Bölümde verilen Boole terimleri yazılırsa çözüm

$$y(x)=\frac{3}{2}+x^2-2x+\frac{1}{2}$$

$$y(x)=x^2-2x+2$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (5.16) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.2.2. Bu örnekte $y^{(2)}(0)=2$, $y^{(1)}(0)=\frac{1}{2}$ ve $y(0)=-1$ karışık koşulları ile verilen

$$x^2y^{(3)}(x)-2xy^{(2)}(x)-2y^{(1)}(x)$$
$$=g(x)+\int_0^x [x^3t^2y^{(2)}(t)+xt^2y^{(1)}(t)+2ty(t)]dt, \qquad (5.21)$$

homojen olmayan 3. Mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemin $0\leq x,t\leq 1$ aralığında $N=3$ için

$$y(x)\cong y_3(x)=\sum_{n=0}^{3}a_nR_n(x)=a_0R_0(x)+a_1R_1(x)+a_2R_2(x)+a_3R_3(x) \quad (5.22)$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü incelenecektir. Burada $g(x)=-\frac{2}{3}x^6-\frac{1}{2}x^5-\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2-8x-1$, $P_0=-2, P_1=2x$, $P_2=x^2$ $\lambda=1$, $a=0$, $b=1$, $K_0(x,t)=2t, K_1(x,t)=xt^2$ ve $K_2(x,t)=x^3t^2$ 'dir. $N=3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0=0,\ x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{2}{3},\ x_3=1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.21) denkleminin temel matris denklemi

$$\left[\mathbf{P_0RD^0}+\mathbf{P_1RD^1}+\mathbf{P_2RD^2}-\lambda(\overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K_0}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T\mathbf{D^0}}+\overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K_1}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T\mathbf{D^1}}\right.$$
$$\left.+\overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K_2}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T\mathbf{D^2}})\right]\mathbf{A}=\mathbf{G} \qquad (5.23)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_0}=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}, \mathbf{P_1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{2}{3}&0&0\\0&0&\frac{4}{3}&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}, \mathbf{P_2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{9}&0&0\\0&0&\frac{4}{9}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&-2&5\\0&0&1&-\frac{9}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{4x4}, \mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{1}{27}\\1&\frac{2}{3}&\frac{4}{9}&\frac{8}{27}\\1&1&1&1\end{bmatrix}, \mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}0&0&2&-6\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^1=\begin{bmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \mathbf{D}^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(0)&0&0&0\\0&\mathbf{X}\left(\frac{1}{3}\right)&0&0\\0&0&\mathbf{X}\left(\frac{2}{3}\right)&0\\0&0&0&\mathbf{X}(1)\end{bmatrix}_{4x16},\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1199}{335}\\-\frac{3228}{517}\\-\frac{61}{6}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K_0}=\begin{bmatrix}0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{K_1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{K_1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{K_0}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K_0}&0&0&0\\0&\mathbf{K_0}&0&0\\0&0&\mathbf{K_0}&0\\0&0&0&\mathbf{K_0}\end{bmatrix}_{16x16},\overline{\mathbf{K_1}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K_1}&0&0&0\\0&\mathbf{K_1}&0&0\\0&0&\mathbf{K_1}&0\\0&0&0&\mathbf{K_1}\end{bmatrix}_{16x16},$$

$$\overline{\mathbf{K_2}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K_2}&0&0&0\\0&\mathbf{K_2}&0&0\\0&0&\mathbf{K_2}&0\\0&0&0&\mathbf{K_2}\end{bmatrix}_{16x16},\ \overline{\mathbf{H}^T}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}^T\\\mathbf{H}^T\\\mathbf{H}^T\\\mathbf{H}^T\end{bmatrix}_{16x4},$$

$$\bar{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}&0&0&0\\0&\mathbf{H}&0&0\\0&0&\mathbf{H}&0\\0&0&0&\mathbf{H}\end{bmatrix}_{16x16},\quad\overline{\mathbf{H}^T}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}^T&0&0&0\\0&\mathbf{H}^T&0&0\\0&0&\mathbf{H}^T&0\\0&0&0&\mathbf{H}^T\end{bmatrix}_{16x16}$$

$$\bar{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}(0)&0&0&0\\0&\mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right)&0&0\\0&0&\mathbf{C}\left(\frac{2}{3}\right)&0\\0&0&0&\mathbf{C}(1)\end{bmatrix}_{16x16},$$

$$\overline{\mathbf{D}^0}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\end{bmatrix}_{16x4},\overline{\mathbf{D}^1}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^1\\\mathbf{D}^1\\\mathbf{D}^1\\\mathbf{D}^1\end{bmatrix}_{16x4},\overline{\mathbf{D}^2}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^2\\\mathbf{D}^2\\\mathbf{D}^2\\\mathbf{D}^2\end{bmatrix}_{16x4}$$

şeklindedir. (3.18) arttırılmış matrisine göre (5.23) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_v;\mathbf{G}]=\begin{bmatrix}0&-2&4&-10&;&-1\\\frac{-1}{243}&-\frac{649}{324}&\frac{1621}{2916}&\frac{29179}{21870}&;&-\frac{1199}{335}\\-\frac{16}{243}&-\frac{502}{243}&-\frac{15052}{10935}&\frac{284314}{32805}&;&-\frac{3228}{517}\\-\frac{1}{3}&-\frac{29}{12}&-\frac{47}{10}&\frac{409}{30}&;&-\frac{61}{6}\end{bmatrix}\tag{5.24}$$

olarak hesaplanır.

(3.17) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U_0};\ \lambda_0 \\ \mathbf{U_1};\ \lambda_1 \\ \mathbf{U_2};\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -9 & ; & 2 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.24) arttırılmış matrisinde 3 satır silinir ve yerine (5.25) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$\left[\widetilde{\mathbf{W}_f};\widetilde{\mathbf{G}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & -10 & ; & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & ; & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -9 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları, (2.5)'te yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x) = -\frac{1}{4}R_0(x) + \frac{5}{2}R_1(x) + R_2(x)$$

şeklinde olur ve bu çözüme 2. Bölümde verilen Boole terimleri yazılırsa çözüm

$$y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (5.21) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.2.3. Bu örnekte karışık koşulları $y(0) = 1, y(1) = 1 + e, y^{(1)}(0) = 1$ ve $y^{(1)}(1) = 2e$ olarak verilen

$$y^{(iv)}(x) = \mathrm{x}(1 + e^x) + 3e^x + y(x) - \int_0^x y(t)dt\,, \quad 0 < x < 1 \tag{5.26}$$

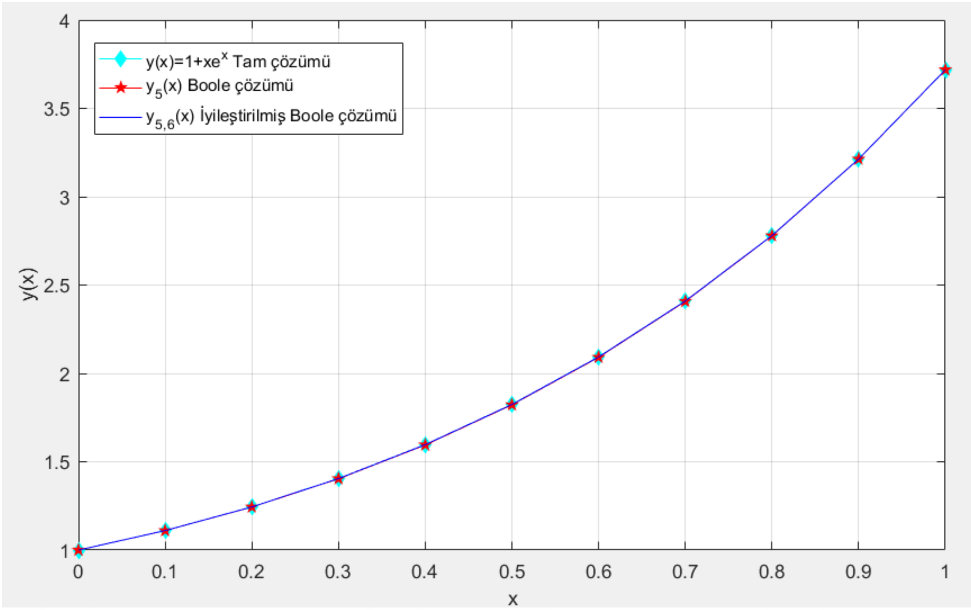
homojen olmayan 4. merteben lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin çeşitli N, M değerleri için Boole çözümleri incelenecektir [2]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = 1 + xe^x$ 'dir. Tablo 5.11.'de (5.26) denkleminin $y(x) = 1 + xe^x$ tam çözümü, $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 12, 13$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.19. ve Şekil 5.20.'de karşılaştırılmıştır. Tablo 5.12.'de $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 12, 13$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.21. ve Şekil 5.22.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.11. $y(x) = 1 + xe^x$ tam çözümü, $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 12, 13$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri.

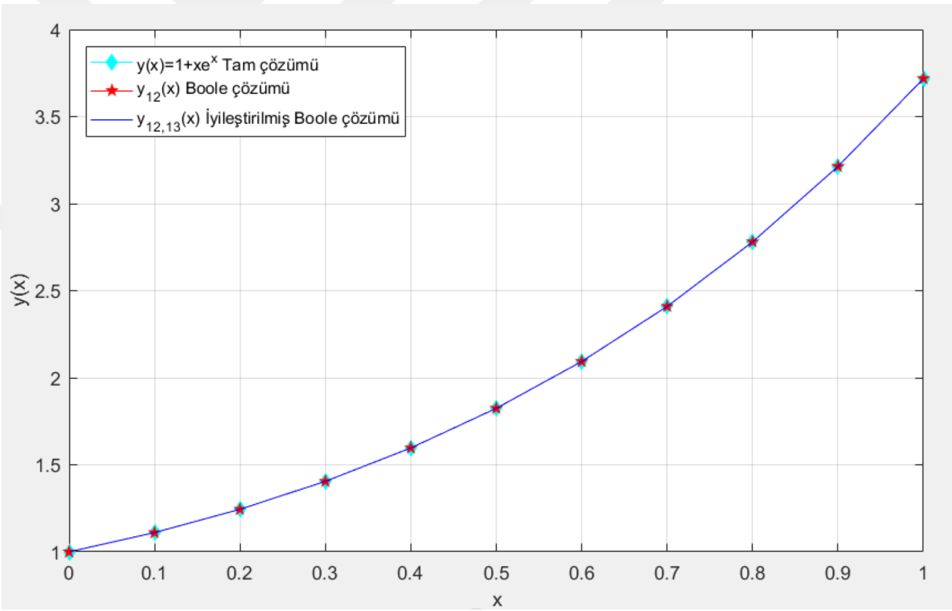
x_i	Tam Çözümü $y(x) = 1 + xe^x$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 5$	$N = 12$	$N = 5, M = 6$	$N = 12, M = 13$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.110517092	1.110333213	1.110517092	1.110494867	1.110517092
0.2	1.244280552	1.243648041	1.244280552	1.244203327	1.244280552
0.3	1.404957642	1.403768088	1.404957642	1.404810059	1.404957642
0.4	1.596729879	1.595029888	1.596729879	1.596514071	1.596729879
0.5	1.824360635	1.822339368	1.824360635	1.824096228	1.824360635
0.6	2.09327128	2.091228319	2.09327128	2.092994076	2.09327128
0.7	2.409626895	2.407910859	2.409626895	2.409383988	2.409626895
0.8	2.780432743	2.779339894	2.780432743	2.78027061	2.780432743
0.9	3.2136428	3.213263588	3.2136428	3.213583627	3.2136428
1.0	3.718281828	3.718281828	3.718281828	3.718281828	3.718281828

Tablo 5.12. $M = 5{,}6$ ve $N, M = 12, 13$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

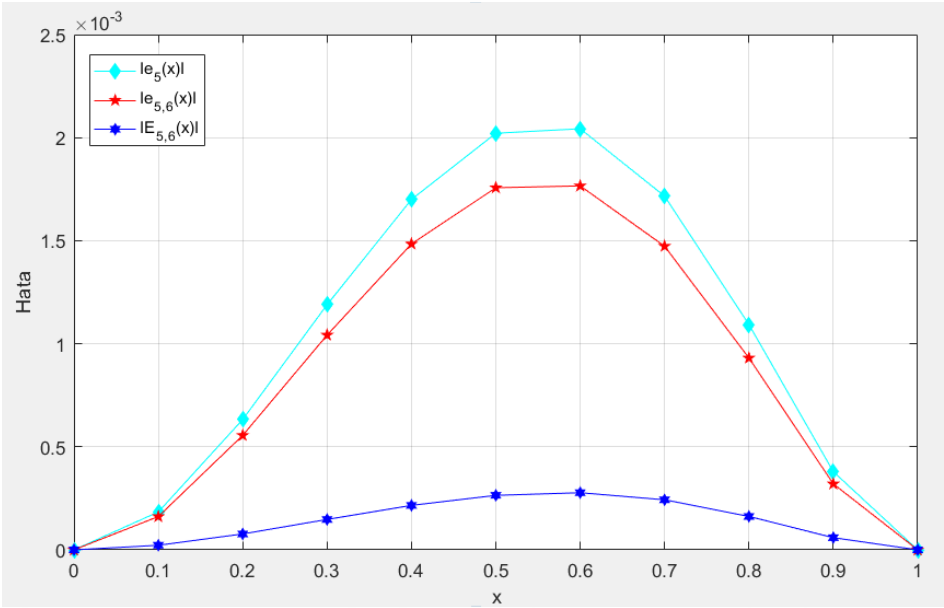
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_N \rvert$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_{N,M} \rvert$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\lvert E_{N,M} \rvert$	
	$N = 5$	$N = 12$	$N = 5, M = 6$	$N = 12, M = 13$	$N = 5, M = 6$	$N = 12, M = 13$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	1.8388e-04	9.1474e-13	1.6165e-04	8.7484e-13	2.2225e-05	3.9899e-14
0.2	6.3251e-04	3.2300e-12	5.5529e-04	3.0890e-12	7.7224e-05	1.4105e-13
0.3	1.1896e-03	6.3027e-12	1.0420e-03	6.0270e-12	1.4758e-04	2.7572e-13
0.4	1.7000e-03	9.4901e-12	1.4842e-03	9.0739e-12	2.1581e-04	4.1622e-13
0.5	2.0213e-03	1.2150e-11	1.7569e-03	1.1615e-11	2.6441e-04	5.3468e-13
0.6	2.0430e-03	1.3640e-11	1.7658e-03	1.3037e-11	2.7720e-04	6.0285e-13
0.7	1.7160e-03	1.3321e-11	1.4731e-03	1.2728e-11	2.4291e-04	5.9308e-13
0.8	1.0928e-03	1.0559e-11	9.3072e-04	1.0082e-11	1.6213e-04	4.7673e-13
0.9	3.7921e-04	5.0182e-12	3.2004e-04	4.7843e-12	5.9173e-05	2.3359e-13
1.0	0	0	3.5293e-22	1.9590e-28	0	0



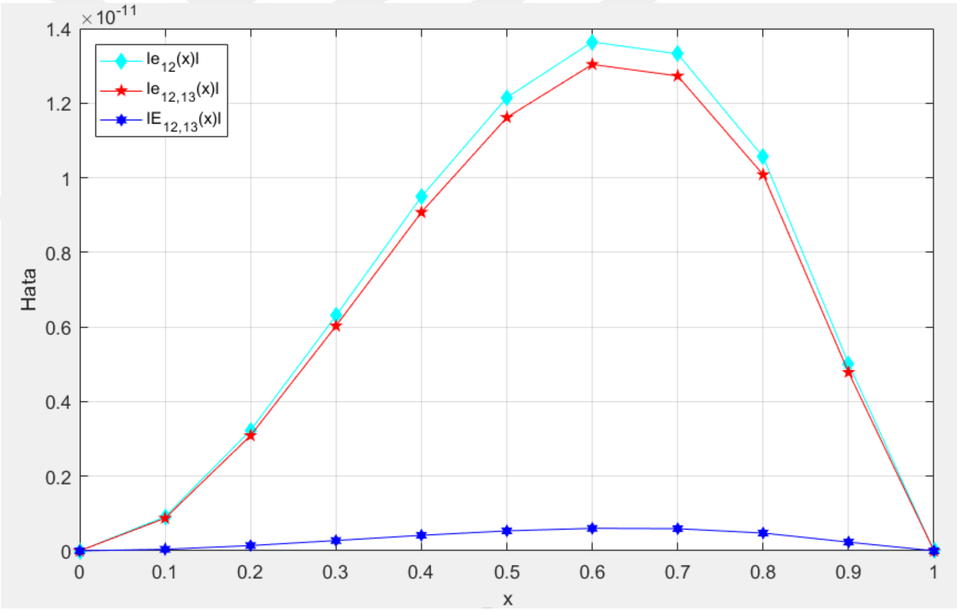
Şekil 5.19. $y(x) = 1 + xe^x$ tam çözümü, $y_5(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{5,6}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.20. $y(x) = 1 + xe^x$ tam çözümü, $y_{12}(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{12,13}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.21. $|e_5|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{5,6}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{5,6}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.22. $|e_{12}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{12,13}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{12,13}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.2.4. Bu örnekte $y(0) = 1$ ve $y(1) = cos1$ karışık koşulları ile verilen

$$y^{(2)}(x) + y(x) + \int_0^x xtan(t)y(t)dt = x(1 - cosx), \tag{5.27}$$

homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi kullanılarak çözülmüştür [48]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) =$

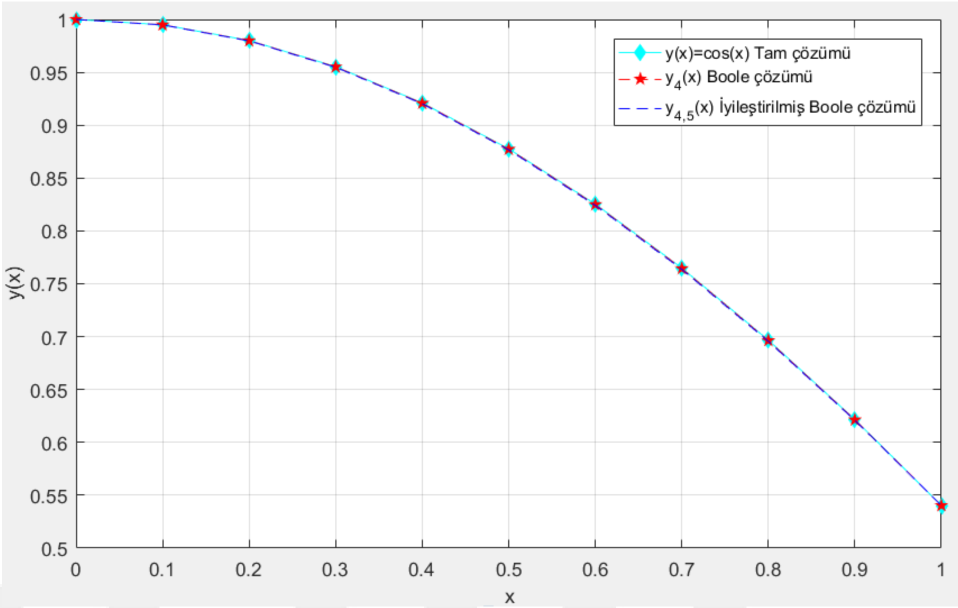
$cosx$'dir. Tablo 5.13.'te (5.27) denkleminin $y(x) = cosx$ tam çözümü, $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 10, 11$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.23. ve Şekil 5.24.'te karşılaştırılmıştır. Tablo 5.14.'te $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 10,11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.25. ve Şekil 5.26.'da karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.13. $y(x) = cosx$ tam çözümü, $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 10, 11$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

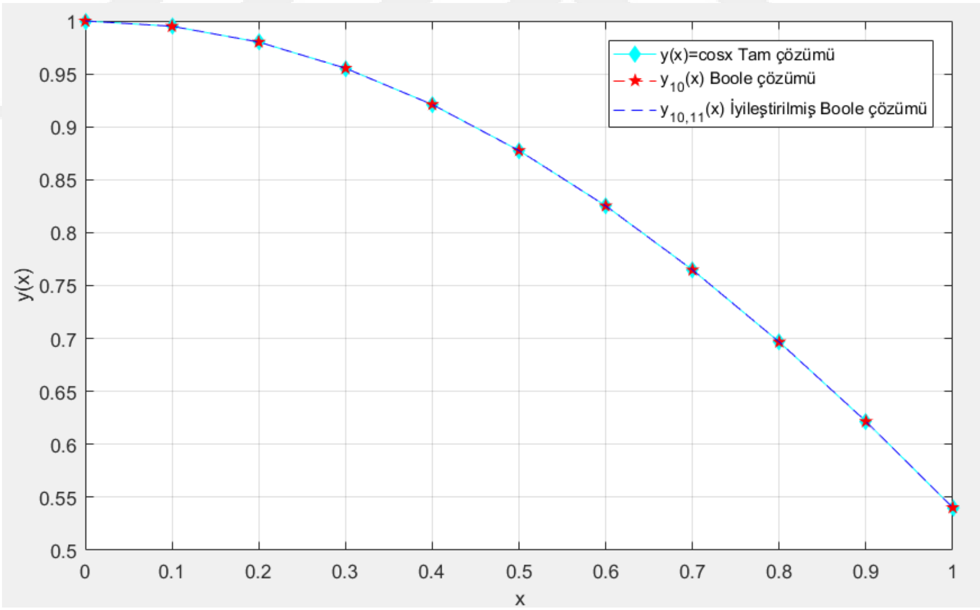
x_i	Tam Çözümü $y(x) = cosx$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 4$	$N = 10$	$N = 4, M = 5$	$N = 10, M = 11$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.9950041653	0.9949377948	0.995003787	0.9948018041	0.9950037869
0.2	0.9800665778	0.9799361554	0.9800658249	0.9796658553	0.9800658249
0.3	0.9553364891	0.9551442517	0.9553353691	0.9547414622	0.9553353691
0.4	0.921060994	0.9208079135	0.9210595182	0.9202762373	0.9210595182
0.5	0.8775825619	0.8772696297	0.8775807455	0.8766197568	0.8775807455
0.6	0.8253356149	0.8249685489	0.8253334784	0.8242272206	0.8253334784
0.7	0.7648421873	0.764440479	0.7648397667	0.7636631121	0.7648397667
0.8	0.6967067093	0.6963178874	0.6967041204	0.6956048588	0.6967041204
0.9	0.6216099683	0.621329901	0.6216077037	0.6208464918	0.6216077045
1.0	0.5403023059	0.5403023059	0.5403023059	0.5403023059	0.5403023059

Tablo 5.14. $N, M = 4,5$ ve $N, M = 10, 11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

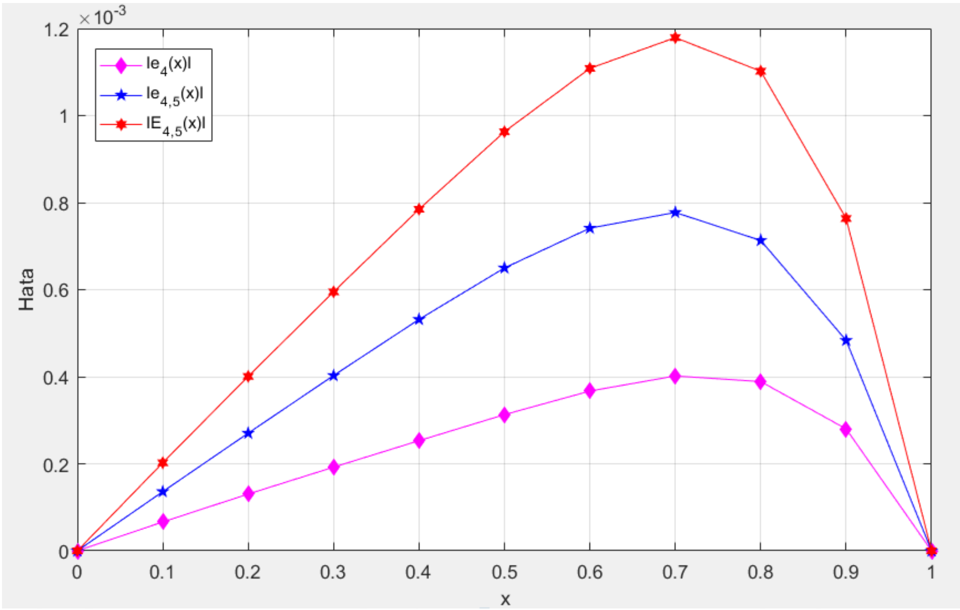
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $|e_N|$		Tahmini Hata Fonksiyonu $|e_{N,M}|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $|E_{N,M}|$	
	$N = 4$	$N = 10$	$N = 4, M = 5$	$N = 10, M = 11$	$N = 4, M = 5$	$N = 10, M = 11$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	6.6370e-05	3.7833e-07	1.3599e-04	1.8247e-11	2.0236e-04	3.7834e-07
0.2	1.3042e-04	7.5296e-07	2.7030e-04	8.8365e-12	4.0072e-04	7.5297e-07
0.3	1.9224e-04	1.1200e-06	4.0279e-04	1.7539e-12	5.9503e-04	1.1200e-06
0.4	2.5308e-04	1.4758e-06	5.3168e-04	8.3035e-13	7.8476e-04	1.4758e-06
0.5	3.1293e-04	1.8164e-06	6.4987e-04	6.2732e-13	9.6281e-04	1.8164e-06
0.6	3.6707e-04	2.1365e-06	7.4133e-04	6.3750e-13	1.1084e-03	2.1365e-06
0.7	4.0171e-04	2.4206e-06	7.7737e-04	5.2354e-13	1.1791e-03	2.4206e-06
0.8	3.8882e-04	2.5889e-06	7.1303e-04	4.8659e-12	1.1019e-03	2.5889e-06
0.9	2.8007e-04	2.2646e-06	4.8341e-04	8.0794e-10	7.6348e-04	2.2638e-06
1.0	0	0	2.6470e-23	1.0500e-24	0	3.6825e-56



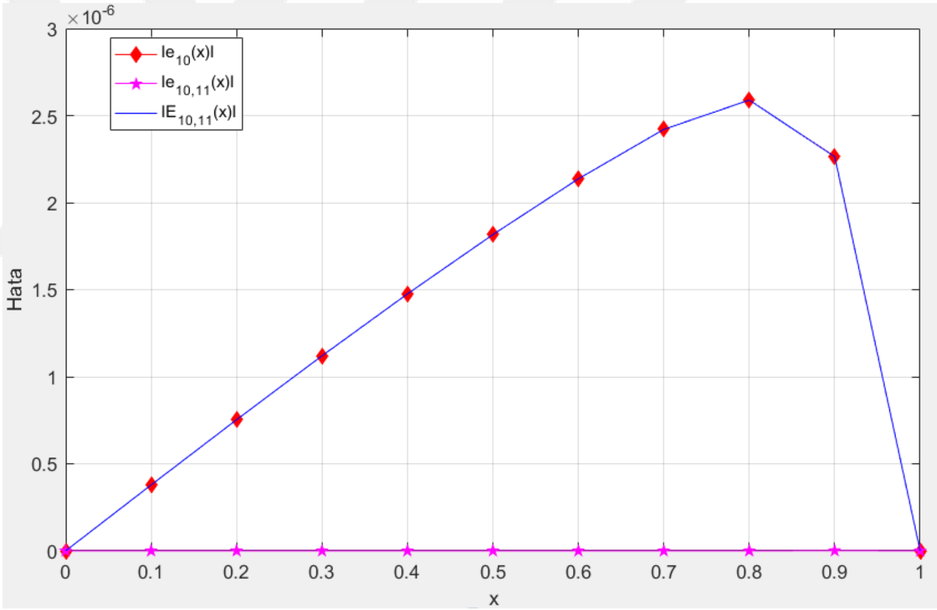
Şekil 5.23. $y(x) = cosx$ tam çözümü, $y_4(x)$ Boole çözümü ve $y_{4,5}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.24. $y(x) = cosx$ tam çözümü, $y_{10}(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{10,11}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.25. $|e_4|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{4,5}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{4,5}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.26. $|e_{10}|$ mutlak hata fonksiyonu $|e_{10,11}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,11}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.2.5. Bu örnekte karışık koşulları $y(0) = 0$ ve $y(1) = sin\frac{1}{\pi}$ olan

$$y^{(2)}(x) - \frac{\pi^2}{cos\frac{x}{\pi}} y^{(1)}(x) + \frac{1}{\pi^2} y(x) + \int_0^x (xt+1) y(t) dt$$

$$= x\pi^2 \sin\frac{x}{\pi} - \pi \cos\frac{x}{\pi}(1 + x^2) \tag{5.28}$$

homojen olmayan 2. Mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin Boole çözümleri aranacaktır [48]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = sin\frac{x}{\pi}$'dir. Tablo

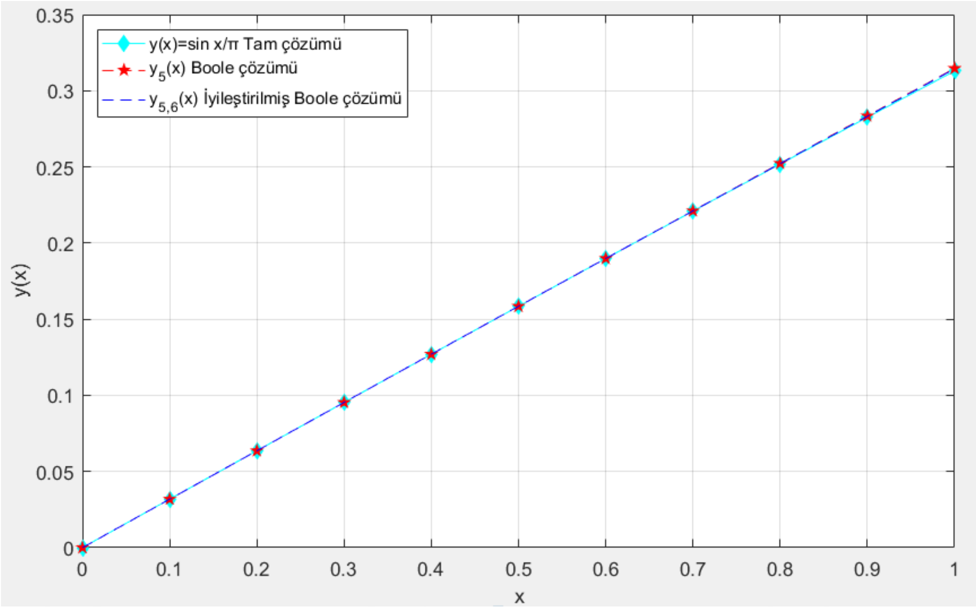
5.15.'te (5.28) denkleminin $y(x) = sin\frac{x}{\pi}$ tam çözümü, $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 11, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.27. ve Şekil 5.28.'de karşılaştırılmıştır. Tablo 5.16.'da $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.29. ve Şekil 5.30.'da karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.15. $y(x) = sin\frac{x}{\pi}$ tam çözümü , $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 11, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

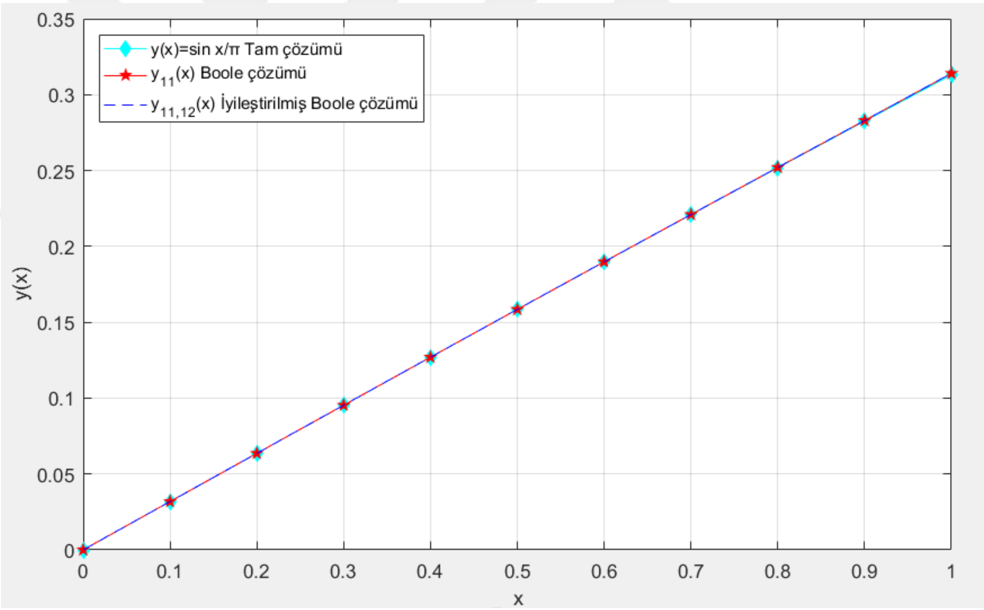
x_i	Tam Çözümü $y(x) = sin\frac{x}{\pi}$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 5$	$N = 11$	$N = 5, M = 6$	$N = 11, M = 12$
0	0.0	5.421010862e-20	-2.899014362e-12	5.421010862e-20	-2.899014362e-12
0.1	0.03182561363	0.03182366188	0.03182569251	0.03182653416	0.03182569591
0.2	0.0636189839	0.06361782995	0.0636192825	0.06362011955	0.06361928368
0.3	0.09534790011	0.09534972537	0.09534878804	0.09535000347	0.09534878411
0.4	0.1269802168	0.1269866045	0.1269826907	0.1269855958	0.1269826735
0.5	0.1584838866	0.1585023432	0.1584906433	0.1584972643	0.1584905897
0.6	0.1898269921	0.1898840209	0.1898453661	0.1898620701	0.1898452135
0.7	0.220977779	0.2211385047	0.2210278443	0.2210744427	0.2210274205
0.8	0.2519046874	0.2522990336	0.2520417864	0.2521617956	0.2520406148
0.9	0.2825763846	0.2834318028	0.282954313	0.2832050822	0.2829511314
1.0	0.3129617962	0.3146425476	0.3140078407	0.3143642904	0.3140019532

Tablo 5.16. $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 11, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

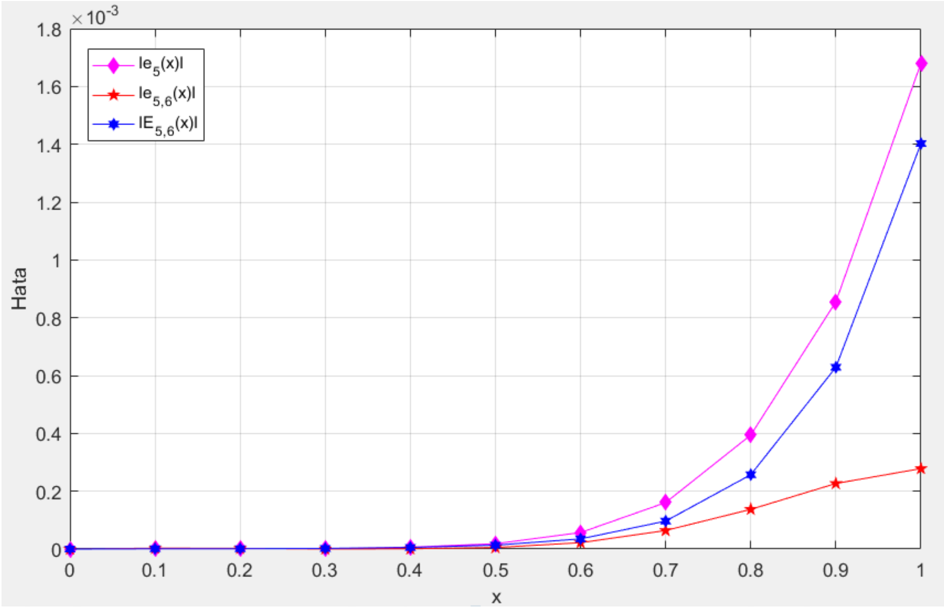
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $|e_N|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $|e_{N,M}|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $|E_{N,M}|$	
	$N = 5$	$N = 11$	$N = 5, M = 6$	$N = 11, M = 12$	$N = 5, M = 6$	$N = 11, M = 12$
0	5.4210e-20	2.8990e-12	0	0	5.4210e-20	2.8990e-12
0.1	1.9518e-06	7.8871e-08	2.8723e-06	3.4017e-09	9.2052e-07	8.2273e-08
0.2	1.1540e-06	2.9860e-07	2.2896e-06	1.1753e-09	1.1356e-06	2.9978e-07
0.3	1.8253e-06	8.8794e-07	2.7810e-07	3.9303e-09	2.1034e-06	8.8401e-07
0.4	6.3877e-06	2.4739e-06	1.0087e-06	1.7193e-08	5.3789e-06	2.4567e-06
0.5	1.8457e-05	6.7567e-06	5.0789e-06	5.3575e-08	1.3378e-05	6.7031e-06
0.6	5.7029e-05	1.8374e-05	2.1951e-05	1.5262e-07	3.5078e-05	1.8221e-05
0.7	1.6073e-04	5.0065e-05	6.4062e-05	4.2377e-07	9.6664e-05	4.9642e-05
0.8	3.9435e-04	1.3710e-04	1.3724e-04	1.1715e-06	2.5711e-04	1.3593e-04
0.9	8.5542e-04	3.7793e-04	2.2672e-04	3.1816e-06	6.2870e-04	3.7475e-04
1.0	1.6808e-03	1.0460e-03	2.7826e-04	5.8875e-06	1.4025e-03	1.0402e-03



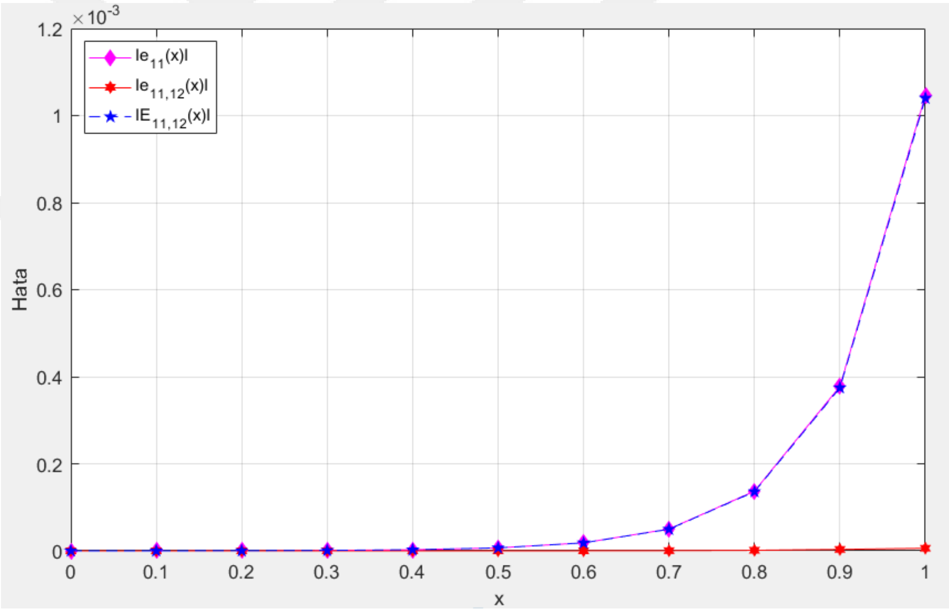
Şekil 5.27. $y(x) = sin\frac{x}{\pi}$ tam çözümü, $y_5(x)$ Boole çözümü ve $y_{5,6}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.28. $y(x) = sin\frac{x}{\pi}$ tam çözümü, $y_{11}(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{11,12}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.29. $|e_5|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{5,6}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{5,6}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.30. $|e_{11}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{11,12}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{11,12}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.2.6. Bu örnekte $y(0) = 1$ ve $y^{(1)}(0) = 1$ karışık koşulları ile verilen

$$y^{(2)}(x) = g(x) + y(x) + \int_0^x (xt)y(t)dt\,, \qquad x \in [0,1] \tag{5.29}$$

homojen olmayan 2. Mertebeden lineer Volterre integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi kullanılarak çözülmüştür [49]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) =$

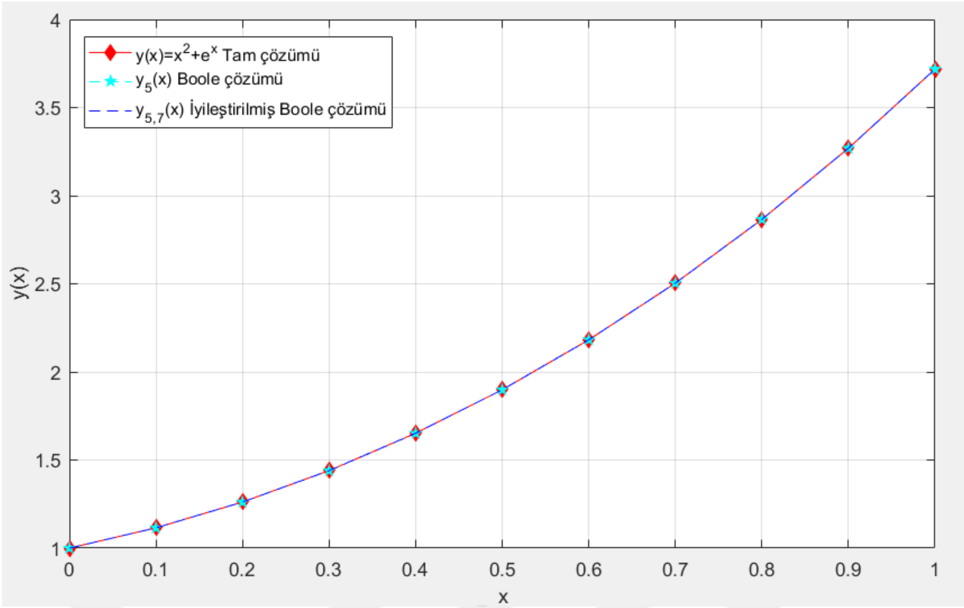
$x^2 + e^x$ 'dir. Tablo 5.17.'de (5.29) denkleminin $y(x) = x^2 + e^x$ tam çözümü, $N, M = 5{,}7$ ve $N, M = 10, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.31. ve Şekil 5.32.'de karşılaştırılmıştır. Tablo 5.18.'de $N, M = 5{,}7$ ve $N, M = 10, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.33. ve Şekil 5.34.'te karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.17. $y(x) = x^2 + e^x$tam çözümü, $N, M = 5, 7$ ve $N, M = 10, 12$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

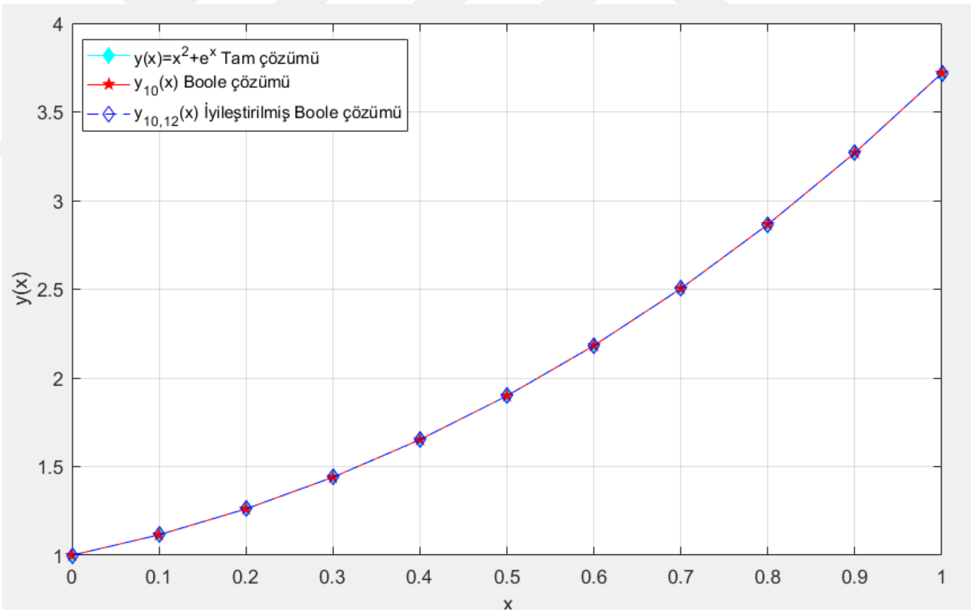
x_i	Tam Çözümü $y(x) = x^2 + e^x$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 5$	$N = 10$	$N = 5, M = 7$	$N = 10, M = 12$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.115170918	1.115171182	1.115170918	1.115170919	1.115170918
0.2	1.261402758	1.261403975	1.261402758	1.261402761	1.261402758
0.3	1.439858808	1.439861019	1.439858808	1.439858813	1.439858808
0.4	1.651824698	1.651827507	1.651824698	1.651824705	1.651824698
0.5	1.898721271	1.898724744	1.898721271	1.89872128	1.898721271
0.6	2.1821188	2.182123718	2.1821188	2.182118811	2.1821188
0.7	2.503752707	2.503758667	2.503752707	2.503752721	2.503752707
0.8	2.865540928	2.865540644	2.865540928	2.865540944	2.865540928
0.9	3.269603111	3.269571083	3.269603111	3.269603073	3.269603111
1.0	3.718281828	3.718155366	3.718281828	3.718281439	3.718281828

Tablo 5.18. $N, M = 5{,}7$ ve $N, M = 10, 12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

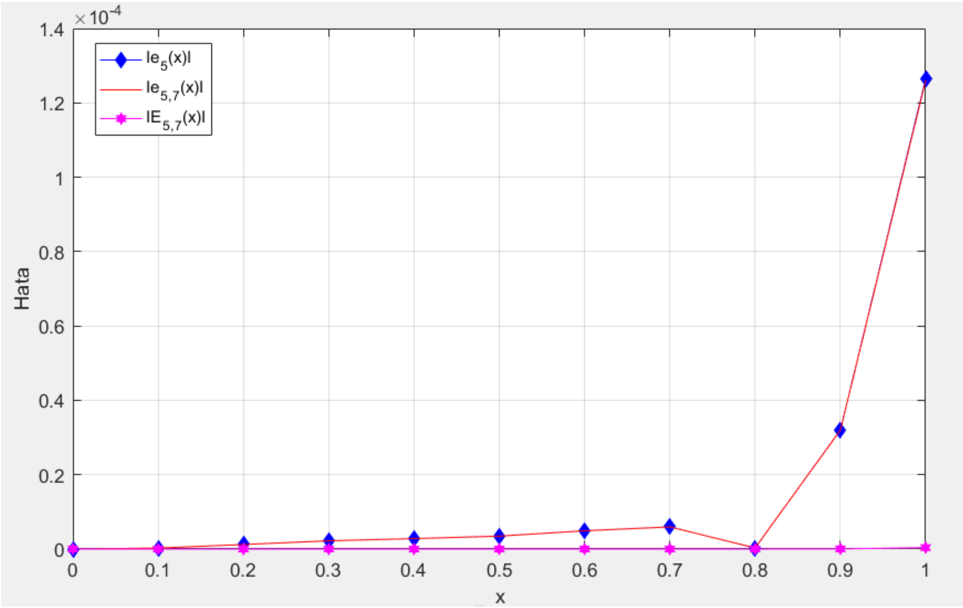
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Hata Mutlak Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 5, M = 7$	$N = 10, M = 12$	$N = 5, M = 7$	$N = 10, M = 12$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	2.6391e-07	6.8168e-14	2.6293e-07	6.8097e-14	9.8078e-10	2.2204e-16
0.2	1.2163e-06	1.7097e-13	1.2131e-06	1.7082e-13	3.2710e-09	2.2204e-16
0.3	2.2116e-06	2.7045e-13	2.2066e-06	2.7010e-13	5.0757e-09	4.4409e-16
0.4	2.8091e-06	3.7370e-13	2.8021e-06	3.7323e-13	7.0311e-09	4.4409e-16
0.5	3.4728e-06	4.8095e-13	3.4636e-06	4.8025e-13	9.2783e-09	6.6613e-16
0.6	4.9175e-06	5.9175e-13	4.9065e-06	5.9105e-13	1.1052e-08	6.6613e-16
0.7	5.9597e-06	7.1454e-13	5.9457e-06	7.1370e-13	1.3998e-08	8.8818e-16
0.8	2.8462e-07	8.0913e-13	3.0008e-07	8.0773e-13	1.5459e-08	1.3323e-15
0.9	3.2029e-05	1.9029e-12	3.1990e-05	1.9015e-12	3.8564e-08	1.7764e-15
1.0	1.2646e-04	2.8129e-11	1.2607e-04	2.8096e-11	3.8936e-07	3.3307e-14



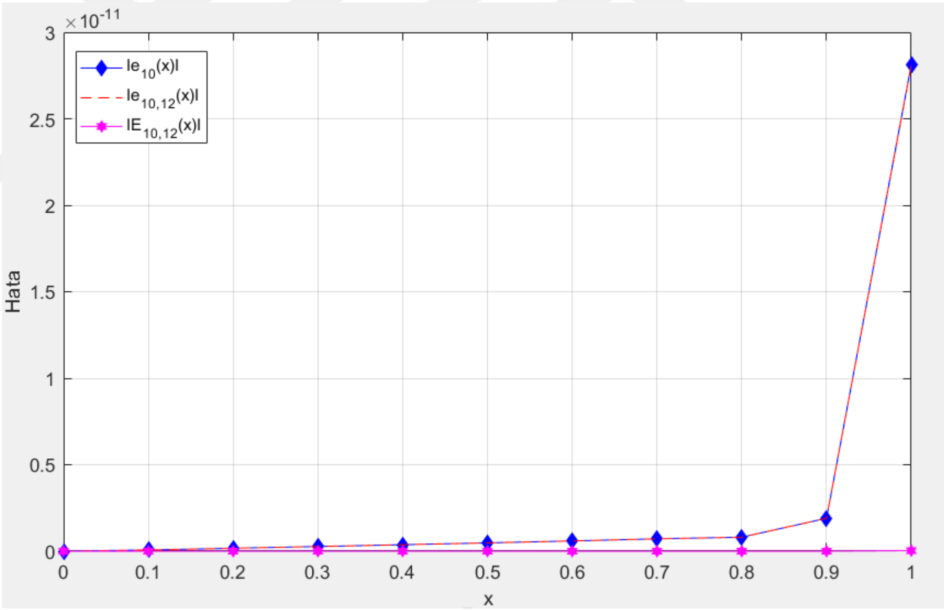
Şekil 5.31. $y(x) = x^2 + e^x$ tam çözümü, $y_5(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{5,7}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.32. $y(x) = x^2 + e^x$ tam çözümü, $y_{10}(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{10,12}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.33. $|e_5|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{5,7}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{5,7}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.34. $|e_{10}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{10,12}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,12}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

5.3. Hybrid Gecikmeli Genel Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemler İçin Örnekler

ÖRNEK 5.3.1. Bu örnekte $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında

$$x^2 y^{(2)}(x) - 2y^{(1)}(x) + y\left(x - \frac{1}{2}\right) = f(x) - \int_{x-2}^{x} (x^2 t^2) y^{(1)}(t) dt \qquad (5.30)$$

$y(0) = \frac{3}{2}$ ve $y^{(1)}(0) = -1$ karışık koşulları ile verilen homojen olmayan 2. mertebeden lineer Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denkleminin $N = 3$ için

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n R_n(x) = a_0 R_0(x) + a_1 R_1(x) + a_2 R_2(x) + a_3 R_3(x) \qquad (5.31)$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü aranacaktır.

(5.30) denklemi

$$x^2 y^{(2)}(x) - 2y^{(1)}(x) + y\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= f(x) + \int_{0}^{x-2} (x^2 t^2) y^{(1)}(t) dt - \int_{0}^{x} (x^2 t^2) y^{(1)}(t) dt \qquad (5.32)$$

olarak yazılır ve burada $P_{00} = 1, P_{10} = -2,\ P_{20} = x^2,\ \lambda_{10} = 1, \lambda_{11} = -1,\ a = 0,\ b = 1,\ \nu_{10}(x) = x - 2, \nu_{11}(x) = x, \upsilon_{10}(x) = \upsilon_{11}(x) = 0,\ K_{10}(x,t) = K_{11}(x,t) = x^2 t^2$ ve $f(x) = 4x^5 - 14x^4 + 20x^3 - \frac{23x^2}{3} - 6x + \frac{17}{4}$ 'dir. $N = 3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.31) denkleminin temel matris denklemi

$$\left\{\mathbf{P}_{20}\mathbf{X}\mathbf{E}^{2}\mathbf{H}^{\mathbf{T}} + \mathbf{P}_{10}\mathbf{X}\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathbf{T}} + \mathbf{P}_{00}\mathbf{X}\mathbf{B}\left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{H}^{\mathbf{T}} - \lambda_{10}\overline{\mathbf{X}\boldsymbol{K}_{\mathbf{10}}\mathbf{Q}_{\mathbf{10}}}\bar{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{H}^{\mathbf{T}}}\right.$$
$$\left. -\ \lambda_{11}\overline{\mathbf{X}\boldsymbol{K}_{\mathbf{11}}\mathbf{Q}_{\mathbf{11}}}\bar{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{H}^{\mathbf{T}}}\right\}\mathbf{A} = \mathbf{F} \qquad (5.33)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_{00}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P_{10}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P_{20}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{4x4},\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27}\\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{E^2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},,\mathbf{B}\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)==\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{4x4}$$

$$\overline{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(0) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{X}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{X}\left(\frac{2}{3}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}(1)\end{bmatrix}_{4x16},\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\frac{17}{4}\\ \frac{1927}{972}\\ \frac{515}{972}\\ \frac{7}{12}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K_{10}}=\ \mathbf{K_{11}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q_{10}}(x_i)=\begin{bmatrix}x-2 & \frac{(x-2)^2}{2} & \frac{(x-2)^3}{3} & \frac{(x-2)^4}{4}\\ \frac{(x-2)^2}{2} & \frac{(x-2)^3}{3} & \frac{(x-2)^4}{4} & \frac{(x-2)^5}{5}\\ \frac{(x-2)^3}{3} & \frac{(x-2)^4}{4} & \frac{(x-2)^5}{5} & \frac{(x-2)^6}{6}\\ \frac{(x-2)^4}{4} & \frac{(x-2)^5}{5} & \frac{(x-2)^5}{5} & \frac{(x-2)^6}{6}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q_{11}}(x_i)=\begin{bmatrix}x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4}\\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5}\\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6}\\ \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7}\end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{B}}\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)=Diag\ \left[\mathbf{B}\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\quad \mathbf{B}\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\quad \mathbf{B}\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\quad \mathbf{B}\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\right]_{16x16}$$

$$\overline{\mathbf{Q_{10}}} = Diag\left[\mathbf{Q_{10}}(0) \quad \mathbf{Q_{10}}\left(\frac{1}{3}\right) \quad \mathbf{Q_{10}}\left(\frac{2}{3}\right) \quad \mathbf{Q_{10}}(1)\right]_{16x16},$$

$$\overline{\mathbf{Q_{11}}} = Diag\left[\mathbf{Q_{11}}(0) \quad \mathbf{Q_{11}}\left(\frac{1}{3}\right) \quad \mathbf{Q_{11}}\left(\frac{2}{3}\right) \quad \mathbf{Q_{11}}(1)\right]_{16x16},$$

$$\overline{\mathbf{K_{10}}} = Diag\,[\,\mathbf{K_{10}} \quad \mathbf{K_{10}} \quad \mathbf{K_{10}} \quad \mathbf{K_{10}}]_{16x16},$$

$$\overline{\mathbf{K_{11}}} = Diag\,[\,\mathbf{K_{11}} \quad \mathbf{K_{11}} \quad \mathbf{K_{11}} \quad \mathbf{K_{11}}]_{16x16}$$

$$\overline{\mathbf{H}^T} = Diag\,[\mathbf{H}^T \quad \mathbf{H}^T \quad \mathbf{H}^T \quad \mathbf{H}^T]_{16x4},$$

$$\bar{\mathbf{E}} = Diag\,[\mathbf{E} \quad \mathbf{E} \quad \mathbf{E} \quad \mathbf{E}]_{16x16},$$

şeklindedir. (3.40) bağıntısı ve (3.41) arttırılmış matrisine göre (5.33) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_{\boldsymbol{h}};\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{23}{4} & -\frac{29}{2} & ; & \frac{17}{4} \\ 1 & -\frac{202}{81} & \frac{2893}{972} & -\frac{17057}{4860} & ; & \frac{1927}{972} \\ 1 & -\frac{157}{81} & \frac{941}{972} & \frac{3853}{1215} & ; & \frac{515}{972} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{12} & \frac{257}{60} & ; & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

olarak hesaplanır. (3.42) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U_0};\ \eta_0 \\ \mathbf{U_1};\eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -1 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.34) arttırılmış matrisinde 2 satır silinir ve yerine (5.35) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}_{\boldsymbol{h}}};\widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{23}{4} & -\frac{29}{2} & ; & \frac{17}{4} \\ 1 & -\frac{202}{81} & \frac{2893}{972} & -\frac{17057}{4860} & ; & \frac{1927}{972} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları, (2.5)'te yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x) = \frac{3}{2}R_0(x) + R_1(x) + R_2(x)$$

şeklinde yazılır ve bu çözüme 2. Bölümde verilen Boole terimleri yazılırsa çözüm

$$y(x) = \frac{3}{2} + x - \frac{1}{2} + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$
$$y(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$$
olarak elde edilir. Elde edilen bu çözüm (5.30) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.3.2. Bu örnekte $y(0) = 0$ karışık koşulu ile verilen

$$y^{(1)}(x) - y\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{3x}{2} + \int_0^x y(t)dt + \int_0^{\frac{x}{2}} y(t)dt,\ x \in [0,1] \qquad (5.36)$$

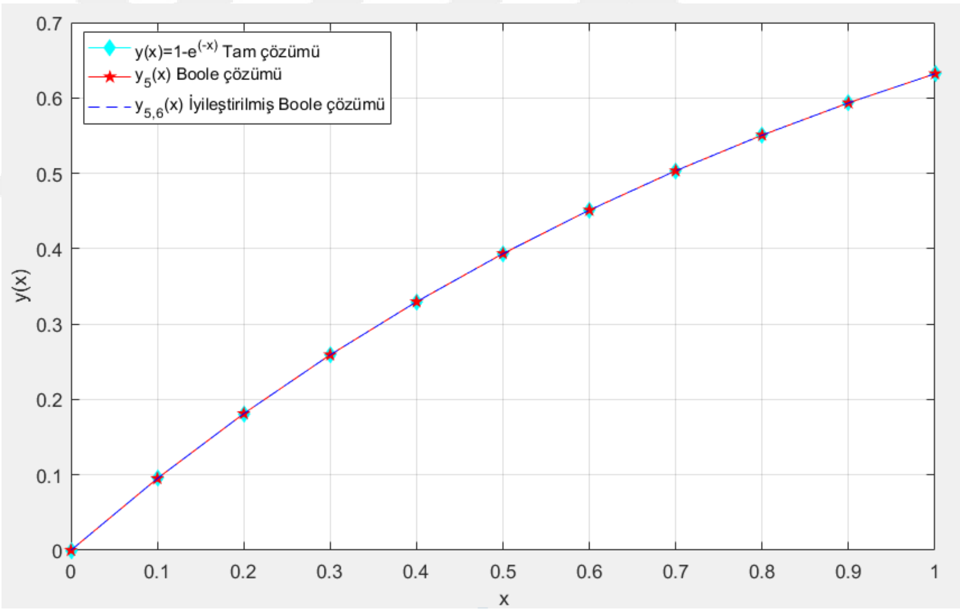
homojen olmayan lineer denklem Boole sıralama yöntemi kullanılarak çözülmüştür [50]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = 1 - e^{-x}$ 'dir. Tablo 5.19.'da (5.36) denkleminin $y(x) = 1 - e^{-x}$ tam çözümü, $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 10, 11$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.35. ve Şekil 5.36.'da karşılaştırılmıştır. Tablo 5.20.'de $N, M = 5,6$ ve $N, M = 10, 11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.37. ve Şekil 5.38.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.19. $y(x) = 1 - e^{-x}$tam çözümü, $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 10, 11$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

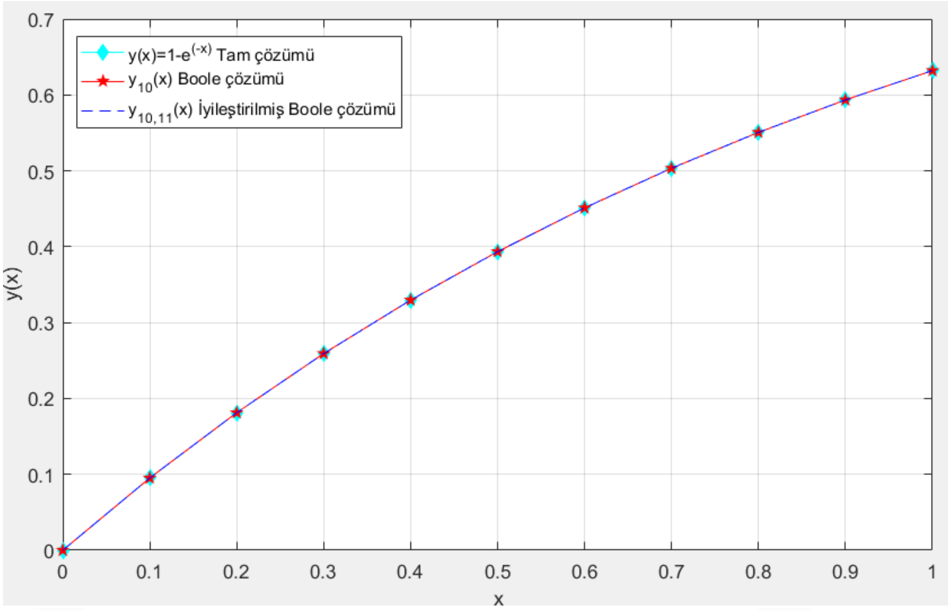
x_i	Tam Çözümü $y(x) = 1 - e^{-x}$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 5$	$N = 10$	$N = 5, M = 6$	$N = 10, M = 11$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.09516258196	0.09516312936	0.09516258196	0.09516261012	0.09516258196
0.2	0.1812692469	0.1812701602	0.1812692469	0.1812692841	0.1812692469
0.3	0.2591817793	0.2591825969	0.2591817793	0.2591818119	0.2591817793
0.4	0.329679954	0.3296807336	0.329679954	0.3296799935	0.329679954
0.5	0.3934693403	0.3934704068	0.3934693403	0.3934693903	0.3934693403
0.6	0.4511883639	0.4511897492	0.4511883639	0.4511884136	0.4511883639
0.7	0.5034146962	0.5034159422	0.5034146962	0.50341475	0.5034146962
0.8	0.5506710359	0.5506719694	0.5506710359	0.5506711225	0.5506710359
0.9	0.5934303403	0.5934333694	0.5934303403	0.593430389	0.5934303403
1.0	0.6321205588	0.6321349895	0.6321205588	0.6321199769	0.6321205588

Tablo 5.20. $N, M = 5{,}6$ ve $N, M = 10, 11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

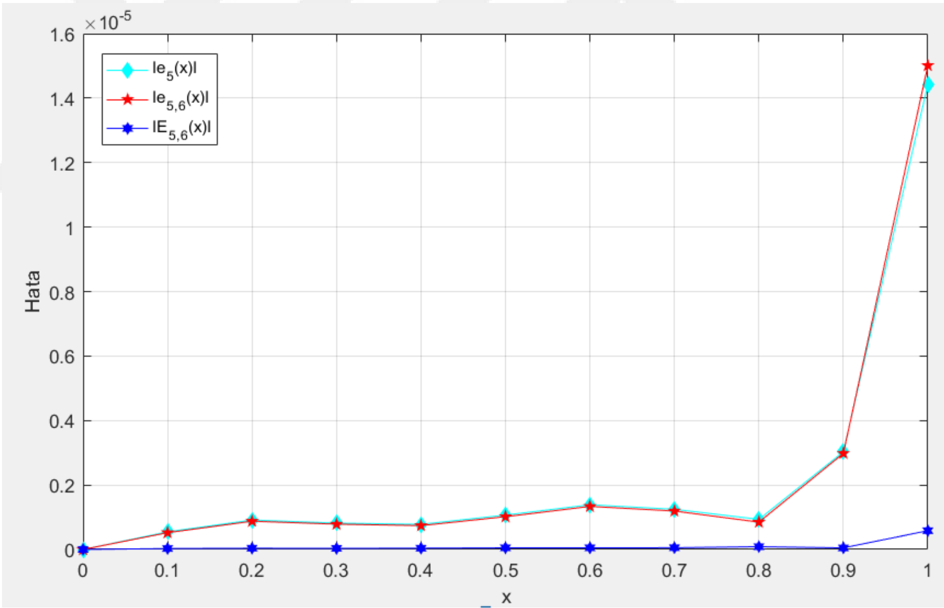
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Hata Mutlak Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 5, M = 6$	$N = 10, M = 11$	$N = 5, M = 6$	$N = 10, M = 11$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	5.4739e-07	4.6518e-14	5.1924e-07	4.5207e-14	2.8157e-08	1.3323e-15
0.2	9.1327e-07	4.4076e-14	8.7610e-07	4.2795e-14	3.7168e-08	1.3323e-15
0.3	8.1761e-07	5.2403e-14	7.8499e-07	5.0796e-14	3.2616e-08	1.5543e-15
0.4	7.7962e-07	5.7621e-14	7.4008e-07	5.5867e-14	3.9542e-08	1.7764e-15
0.5	1.0666e-06	6.6169e-14	1.0166e-06	6.4187e-14	4.9971e-08	1.9984e-15
0.6	1.3853e-06	7.3830e-14	1.3356e-06	7.1569e-14	4.9722e-08	2.2204e-15
0.7	1.2460e-06	8.6153e-14	1.1922e-06	8.3732e-14	5.3830e-08	2.4425e-15
0.8	9.3349e-07	9.0816e-14	8.4684e-07	8.8031e-14	8.6643e-08	2.8311e-15
0.9	3.0292e-06	1.4577e-13	2.9805e-06	1.4360e-13	4.8704e-08	2.1649e-15
1.0	1.4431e-05	1.5465e-12	1.5013e-05	1.6004e-12	5.8191e-07	5.3846e-14



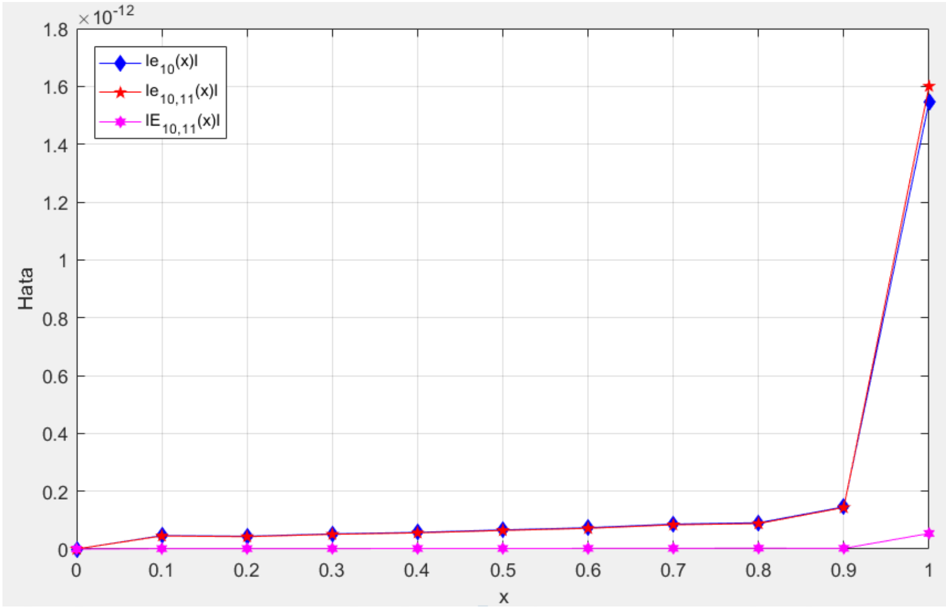
Şekil 5.35. $y(x) = 1 - e^{-x}$ tam çözümü, $y_5(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{5,6}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.36. $y(x) = 1 - e^{-x}$ tam çözümü, $y_{10}(x)$ Boole çözümü ve $y_{10,11}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.37. $|e_5|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{5,6}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{5,6}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.38. $|e_{10}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{10,11}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,11}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.3.3. Bu örnekte $y(0) = 0$ koşullu ile verilen

$$y^{(1)}(x) = y(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)y\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^x \frac{x}{1+t}y(t)dt + \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)x} \frac{1}{t+1}y(t)dt$$
$$+\frac{1}{1+x} - \ln(1+x)\left[\frac{x}{2}\ln(1+x)+1\right], \qquad x \in [0,1] \qquad (5.37)$$

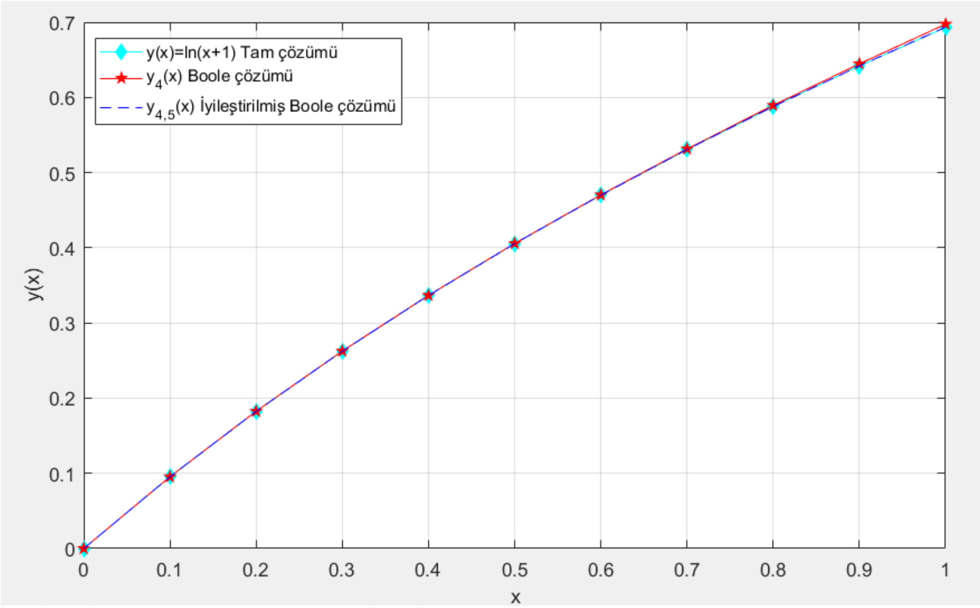
homojen olmayan lineer denklemin Boole çözümü ve Rezidüel fonksiyona dayalı hata fonksiyonu incelenecektir [50]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = \ln(1+\mathrm{x})$'dir.Tablo 5.21.'de (5.37) denkleminin $y(x) = \ln(1+\mathrm{x})$ tam çözümü, $N, M = 4{,}5$ ve $N, M = 8, 10$ $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümleri için değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.39. ve Şekil 5.40.'ta karşılaştırılmıştır. Tablo 5.22.'de $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 8, 10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.41. ve Şekil 5.42.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.21. $y(x) = ln(1+x)$ tam çözümü, $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 8, 10$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

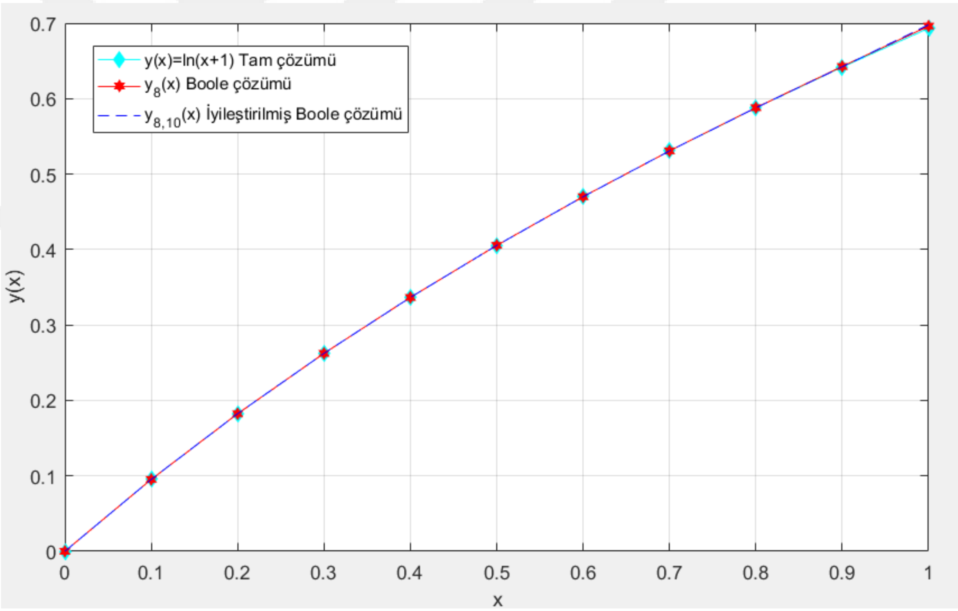
x_i	Tam Çözümü $y(x) = \ln(1+x)$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 4$	$N = 8$	$N = 4, M = 5$	$N = 8, M = 10$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.0953101798	0.09542540024	0.09531184695	0.09532934299	0.09531951998
0.2	0.1823215568	0.1825727094	0.1823231996	0.1823537043	0.1823301862
0.3	0.2623642645	0.2626459431	0.2623660513	0.2623944463	0.262374495
0.4	0.3364722366	0.3367122536	0.336474367	0.3365013418	0.3364832842
0.5	0.4054651081	0.4057019303	0.4054678451	0.4055016462	0.4054779151
0.6	0.4700036292	0.4704083995	0.4700114565	0.470049171	0.4700174801
0.7	0.5306282511	0.5314882244	0.5306663676	0.5306733561	0.530645583
0.8	0.5877866649	0.5894611054	0.5879767979	0.5878283426	0.5877978538
0.9	0.6418538862	0.6447098795	0.6426663097	0.6419420459	0.6421677732
1.0	0.6931471806	0.6974805208	0.6960459711	0.6934652283	0.6978674832

Tablo 5.22. $N, M = 4{,}5$ ve $N, M = 8, 10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

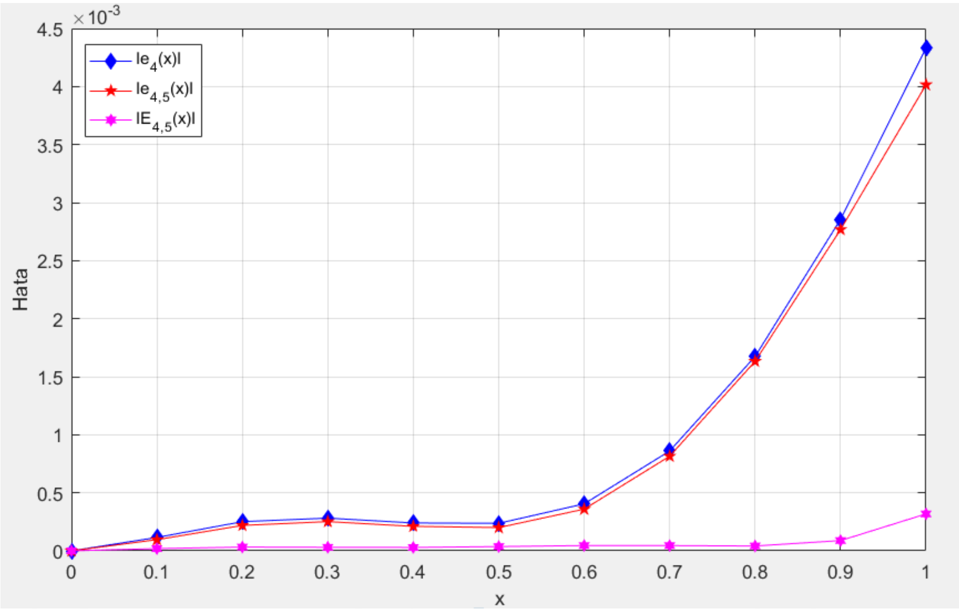
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 4$	$N = 8$	$N = 4, M = 5$	$N = 8, M = 10$	$N = 4, M = 5$	$N = 8, M = 10$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	1.1522e-04	1.6671e-06	9.6057e-05	7.6730e-06	1.9163e-05	9.3402e-06
0.2	2.5115e-04	1.6428e-06	2.1901e-04	6.9866e-06	3.2147e-05	8.6294e-06
0.3	2.8168e-04	1.7868e-06	2.5150e-04	8.4437e-06	3.0182e-05	1.0230e-05
0.4	2.4002e-04	2.1303e-06	2.1091e-04	8.9172e-06	2.9105e-05	1.1048e-05
0.5	2.3682e-04	2.7370e-06	2.0028e-04	1.0070e-05	3.6538e-05	1.2807e-05
0.6	4.0477e-04	7.8273e-06	3.5923e-04	6.0236e-06	4.5542e-05	1.3851e-05
0.7	8.5997e-04	3.8117e-05	8.1487e-04	2.0785e-05	4.5105e-05	1.7332e-05
0.8	1.6744e-03	1.9013e-04	1.6328e-03	1.7894e-04	4.1678e-05	1.1189e-05
0.9	2.8560e-03	8.1242e-04	2.7678e-03	4.9854e-04	8.8160e-05	3.1389e-04
1.0	4.3333e-03	2.8988e-03	4.0153e-03	1.8215e-03	3.1805e-04	4.7203e-03



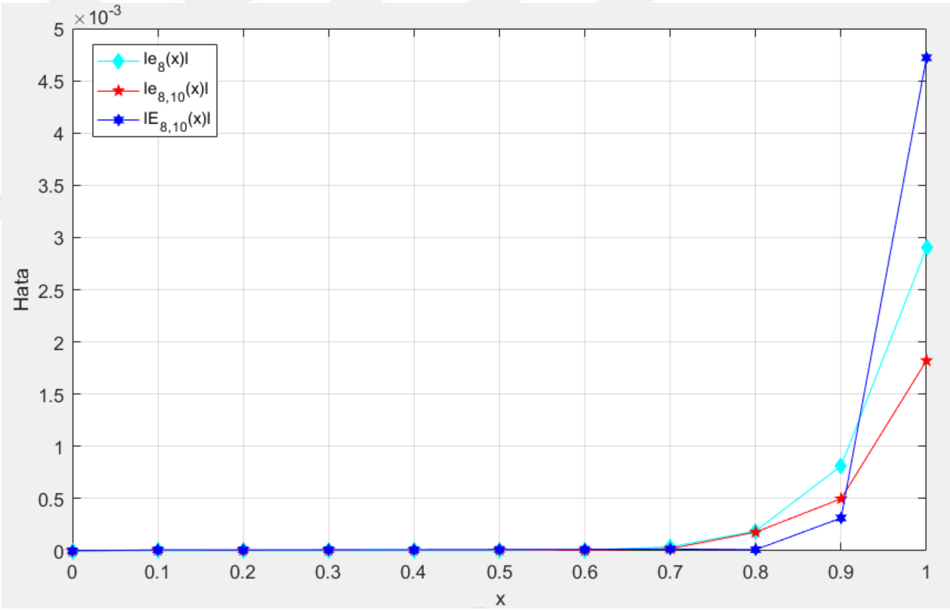
Şekil 5.39. $y(x) = ln(x+1)$ tam çözümü, $y_4(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{4,5}(x\ )$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.40. $y(x) = ln(x+1)$ tam çözümü, $y_8(x\ )$ Boole çözümü ve $y_{8,10}(x\ )$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.41. $|e_4|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{4,5}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{4,5}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması



Şekil 5.42. $|e_8|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{8,10}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{8,10}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması**.**

ÖRNEK 5.3.4. Bu örnekte

$$y^{(1)}(x) = y(x-1) + \int_{x-1}^{x} y(t)dt \tag{5.38}$$

olarak verilen homojen lineer denklemin Boole çözümü ve Rezidüel fonksiyona dayalı hata fonksiyonu incelenecektir. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = e^x$'dir [51]. Tablo 5.23.'te (5.38) denkleminin $y(x) = e^x$ tam çözümü, $N, M = 4{,}6$ ve $N, M = 10, 12$

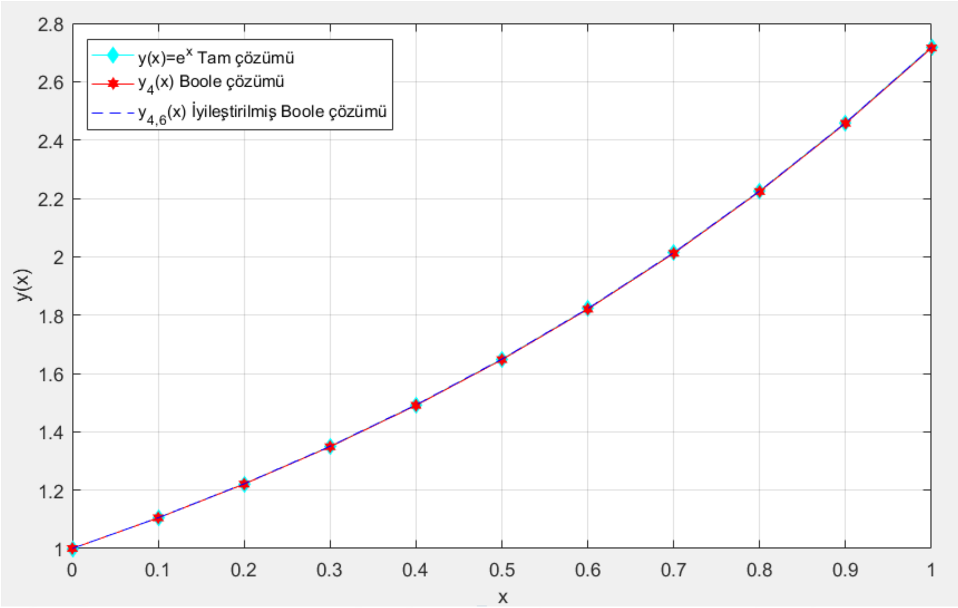
için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.43. ve Şekil 5.44.'te karşılaştırılmıştır. Tablo 5.24.'te $N,M = 4,6$ ve $N,M = 10,12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.45. ve Şekil 5.46.'da karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.23. $y(x) = e^x$ tam çözümü,$N,M = 4,6$ ve $N,M = 10,12$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

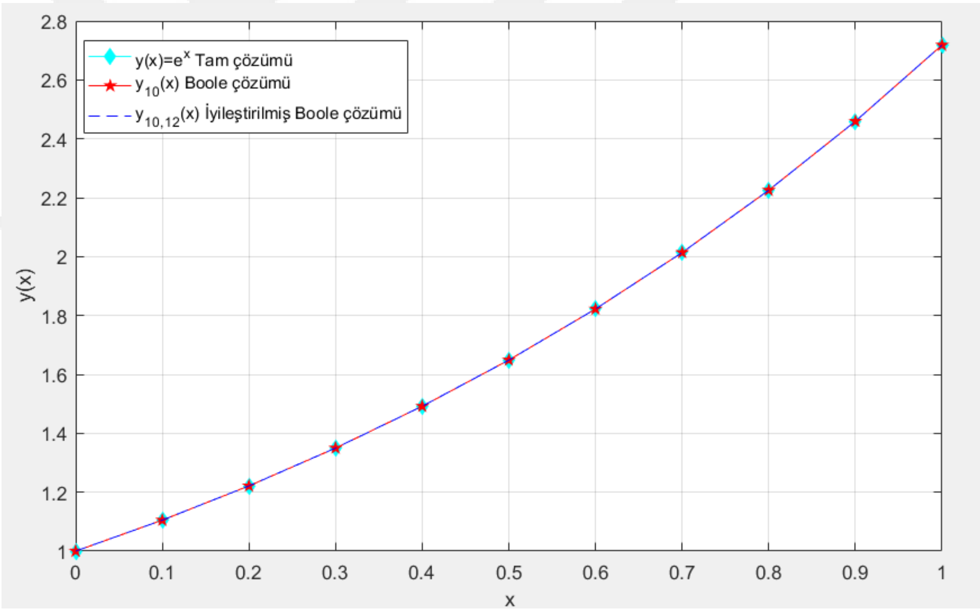
x_i	Tam Çözümü $y(x) = e^x$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 4$	$N = 10$	$N = 4, M = 6$	$N = 10, M = 12$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.105170918	1.10494319	1.105170886	1.105477016	1.105170922
0.2	1.221402758	1.220836559	1.221402696	1.221906166	1.22140276
0.3	1.349858808	1.348912098	1.34985872	1.3504403	1.349858804
0.4	1.491824698	1.490521989	1.491824594	1.492383088	1.491824686
0.5	1.648721271	1.647138609	1.648721157	1.649193131	1.648721251
0.6	1.8221188	1.820354531	1.822118683	1.822483609	1.822118773
0.7	2.013752707	2.011882519	2.013752589	2.014017448	2.013752674
0.8	2.225540928	2.223555532	2.225540808	2.225698014	2.22554089
0.9	2.459603111	2.457326725	2.459602987	2.459555333	2.45960307
1.0	2.718281828	2.715269445	2.718281697	2.71772784	2.718281785

Tablo 5.24. $N,M = 4,6$ ve $N,M = 10,12$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

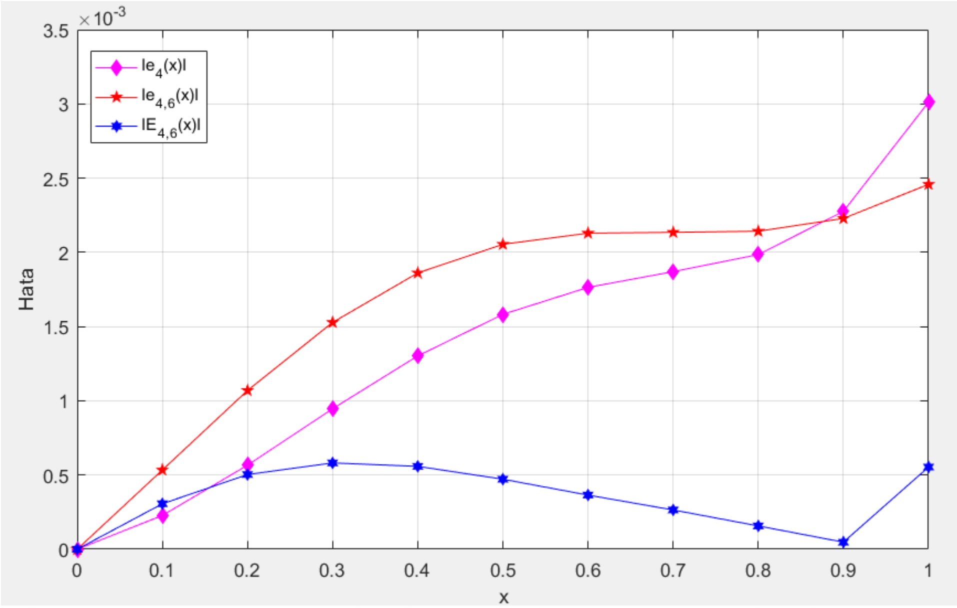
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Hata Mutlak Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 4$	$N = 10$	$N = 4, M = 6$	$N = 10, M = 12$	$N = 4, M = 6$	$N = 10, M = 12$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	2.2773e-04	3.2186e-08	5.3383e-04	3.5892e-08	3.0610e-04	3.7060e-09
0.2	5.6620e-04	6.2621e-08	1.0696e-03	6.4668e-08	5.0341e-04	2.0471e-09
0.3	9.4671e-04	8.7107e-08	1.5282e-03	8.3491e-08	5.8149e-04	3.6160e-09
0.4	1.3027e-03	1.0388e-07	1.8611e-03	9.2354e-08	5.5839e-04	1.1528e-08
0.5	1.5827e-03	1.1334e-07	2.0545e-03	9.3345e-08	4.7186e-04	1.9994e-08
0.6	1.7643e-03	1.1740e-07	2.1291e-03	8.9691e-08	3.6481e-04	2.7707e-08
0.7	1.8702e-03	1.1874e-07	2.1349e-03	8.4831e-08	2.6474e-04	3.3911e-08
0.8	1.9854e-03	1.2009e-07	2.1425e-03	8.1687e-08	1.5709e-04	3.8405e-08
0.9	2.2764e-03	1.2369e-07	2.2286e-03	8.2245e-08	4.7778e-05	4.1450e-08
1.0	3.0124e-03	1.3103e-07	2.4584e-03	8.7427e-08	5.5399e-04	4.3600e-08



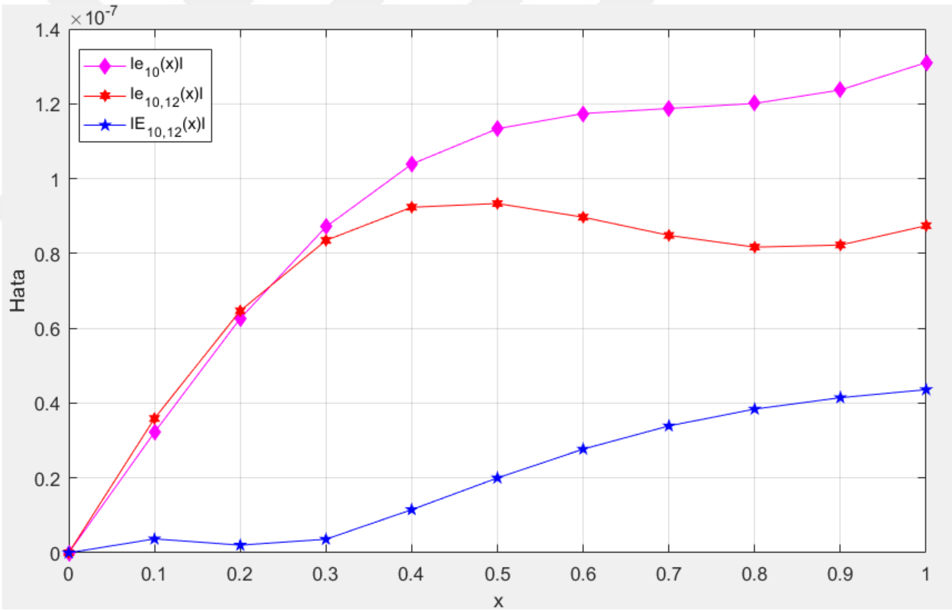
Şekil 5.43. $y(x) = e^x$ tam çözümü, $y_4(x)$ Boole çözümü ve $y_{4,6}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.44. $y(x) = e^x$ tam çözümü, $y_{10}(x)$ Boole çözümü ve $y_{10,12}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.45. $|e_4|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{4,6}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{4,6}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.46. $|e_{10}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{10,12}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{10,12}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

5.4. Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler için Örnekler

ÖRNEK 5.4.1. Bu örnekte $y(0) = -1$ ve $y^{(1)}(0) = -2$ karışık koşulu ile verilen

$$2xy^{(2)}(x) - xy^{(1)}(x) + y(x) =$$

$$\frac{7}{6}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{59}{12}x - 1 + \int_0^x (x+t)y(t)dt - 2\int_0^1 xty(t)dt \qquad (5.40)$$

homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemin $N = 3$ için

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n R_n(x) = a_0R_0(x) + a_1R_1(x) + a_2R_2(x) + a_3R_3(x) \quad (5.41)$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü aranacaktır. Burada $P_0 = 1, P_1 = -x, P_2 = 2x$ $\lambda_v = 1, \lambda_f = 1, a = 0, b = 1, g(x) = \frac{7}{6}x^4 - \frac{10}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{59}{12}x - 1, K_0^v(x,t) = x + t$ ve $K_0^f(x,t) = xt$'dir. $N = 3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.40) denkleminin temel matris denklemi

$$\left[\mathbf{P_0RD^0} + \mathbf{P_1RD^1} + \mathbf{P_2RD^2} - \lambda_v\,\overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K_0^v}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T}\overline{\mathbf{D^0}} - \lambda_f\mathbf{RK_0^fHCH}^T\mathbf{D^0}\right]\mathbf{A}$$
$$= \mathbf{G} \quad (5.42)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^1=\begin{bmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},\mathbf{D}^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(0)&0&0&0\\0&\mathbf{X}\left(\frac{1}{3}\right)&0&0\\0&0&\mathbf{X}\left(\frac{2}{3}\right)&0\\0&0&0&\mathbf{X}(1)\end{bmatrix}_{4x16},\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-1\\\frac{83}{972}\\\frac{-125}{486}\\\frac{-9}{4}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_\mathbf{0}^v=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\overline{\mathbf{K}_\mathbf{0}^v}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_\mathbf{0}^v&0&0&0\\0&\mathbf{K}_\mathbf{0}^v&0&0\\0&0&\mathbf{K}_\mathbf{0}^v&0\\0&0&0&\mathbf{K}_\mathbf{0}^v\end{bmatrix}_{16x16},\mathbf{K}_\mathbf{0}^f=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}(0)&0&0&0\\0&\mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right)&0&0\\0&0&\mathbf{C}\left(\frac{2}{3}\right)&0\\0&0&0&\mathbf{C}(1)\end{bmatrix}_{16x16},\overline{\mathbf{D}^0}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\\\mathbf{D}^0\end{bmatrix}_{16x4},$$

$$\bar{\mathbf{H}}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}&0&0&0\\0&\mathbf{H}&0&0\\0&0&\mathbf{H}&0\\0&0&0&\mathbf{H}\end{bmatrix}_{16x16},\quad\overline{\mathbf{H}^T}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}^T&0&0&0\\0&\mathbf{H}^T&0&0\\0&0&\mathbf{H}^T&0\\0&0&0&\mathbf{H}^T\end{bmatrix}_{16x16}$$

şeklindedir. (3.25) bağıntısı ve (3.26) arttırılmış matrisine göre (5.42) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_{vf};\mathbf{G}]=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&;&-1\\\frac{7}{6}&-\frac{205}{324}&\frac{446}{243}&-\frac{8287}{1620}&;&\frac{83}{972}\\2&-\frac{59}{81}&\frac{1333}{486}&-\frac{9239}{1620}&;&\frac{-125}{486}\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{12}&3&-\frac{173}{60}&;&\frac{-9}{4}\end{bmatrix}\tag{5.43}$$

olarak hesaplanır.

(3.17) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix}\mathbf{U_0};\ \lambda_0\\\mathbf{U_1};\ \lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&;&-1\\0&1&-2&5&;&-2\end{bmatrix}\tag{5.44}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.43) arttırılmış matrisinde 2 satır silinir ve yerine (5.44) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}_{vf}};\widetilde{\mathbf{G}}]=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & -1\\ \frac{7}{6} & -\frac{205}{324} & \frac{446}{243} & -\frac{8287}{1620} & ; & \frac{83}{972}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & -1\\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -2\end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları, (2.5)'te yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x)=\frac{3}{2}R_0(x)+R_2(x)$$

şeklinde olur ve bu çözüme 2. Bölümde verilen Boole terimleri yazılırsa çözüm

$$y(x)=-\frac{3}{2}+x^2-2x+\frac{1}{2}$$
$$y(x)=x^2-2x-1$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (5.40) homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.4.2. Bu örnekte $y(0)=y^{(1)}(0)=-\frac{1}{2}$ ve $y^{(2)}(0)=2$ karışık koşulu ile verilen

$$xy^{(3)}(x)-2y^{(1)}(x)+y(x)=g(x)$$
$$-\int_0^x\left(xt^2y^{(2)}(t)+xty(t)\right)dt+\int_0^1(x^2ty^{(1)}(t)+xy(t))dt \qquad (5.45)$$

homojen olmayan 3. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemin $N=3$ için

$$y(x)\cong y_3(x)=\sum_{n=0}^{3}a_nR_n(x)=a_0R_0(x)+a_1R_1(x)+a_2R_2(x)+a_3R_3(x) \quad (5.46)$$

kesilmiş Boole serisi formunda çözümü aranacaktır. Burada $P_0=1, P_1=-2, P_2=x$ $\lambda_v=-1,\quad \lambda_f=1, a=0\ ,\ b=1,\quad g(x)=\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{12}x^2-\frac{59}{12}x+\frac{1}{2}$, $K_0^v(x,t)=xt$, $K_2^v(x,t)=xt^2$, $K_0^f(x,t)=x$ ve $K_1^f(x,t)=x^2t$ 'dir. $N=3$ için (3.12) sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1\right\}$$

olarak elde edilir.

(5.45) denkleminin temel matris denklemi

$$\Big[\mathbf{P_0RD^0} + \mathbf{P_1RD^1} + \mathbf{P_3RD^3} - \lambda_v\,(\overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K}}_\mathbf{2}^{v}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T}\overline{\mathbf{D^2}} + \overline{\mathbf{R}}\overline{\mathbf{K}}_\mathbf{0}^{v}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{H}^T})$$

$$- \lambda_f(\mathbf{RK_1^fHCH^TD^1} + \mathbf{RK_0^fHCH^TD^0})\Big]\mathbf{A} = \mathbf{G} \qquad (5.47)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix}_{4x16}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{194}{243} \\ \frac{-493}{243} \\ \frac{-5}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K_0^v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K_2^v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K_0^f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K_1^f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}(1) \end{bmatrix}_{16x16},$$

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{16x16} , \quad \overline{\mathbf{H}^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}^T \end{bmatrix}_{16x16} ,$$

$$\overline{\mathbf{D}^0} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^0 \\ \mathbf{D}^0 \end{bmatrix}_{16x4} , \overline{\mathbf{D}^1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^1 \\ \mathbf{D}^1 \\ \mathbf{D}^1 \\ \mathbf{D}^1 \end{bmatrix}_{16x4} , \overline{\mathbf{D}^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^2 \\ \mathbf{D}^2 \\ \mathbf{D}^2 \\ \mathbf{D}^2 \end{bmatrix}_{16x4}$$

şeklindedir. (3.25) bağıntısı ve (3.26) arttırılmış matrisine göre (5.47) matris denklemi

$$[\mathbf{W}_{vf}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{43}{4} & ; & \frac{1}{2} \\ \frac{19}{54} & -\frac{2165}{972} & \frac{1351}{486} & -\frac{7645}{2916} & ; & -\frac{194}{243} \\ -\frac{5}{27} & -\frac{949}{486} & \frac{203}{162} & \frac{50713}{14580} & ; & \frac{-493}{243} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{19}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{473}{60} & ; & \frac{-5}{2} \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

olarak hesaplanır. (3.17) arttırılmış matrisine göre koşullar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U_0};\ \lambda_0 \\ \mathbf{U_1};\ \lambda_1 \\ \mathbf{U_2};\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -9 & ; & 2 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

şeklinde yazılır. Yönteme göre (5.48) arttırılmış matrisinde 3 satır silinir ve yerine (5.49) arttırılmış matrisi yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}_{vf}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{43}{4} & ; & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & ; & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 5 & ; & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -9 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu matrisin çözümünden bilinmeyen Boole katsayıları

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Boole katsayıları, (2.5)'te yazılırsa $y(x)$ çözümü

$$y(x) = -\frac{1}{4}R_0(x) + \frac{3}{2}R_1(x) + R_2(x)$$

şeklinde olur ve bu çözüme 2. Bölümde verilen Boole terimleri yazılırsa çözüm

$$y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}) + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$
$$y(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözüm (5.45) homojen olmayan 3. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin tam çözümüdür.

ÖRNEK 5.4.3. Bu örnekte $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında, $y(0) = 1$ ve $y^{(1)}(0) = 1$ karışık koşulları ile verilen

$$y^{(2)}(x) + xy^{(1)}(x) - xy(x) = e^x - \sin(x) + \frac{xcosx}{2}$$
$$+ \int_0^1 \sin(x)\, e^{-t} y(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^x cosxe^{-t}y(t)dt \qquad (5.50)$$

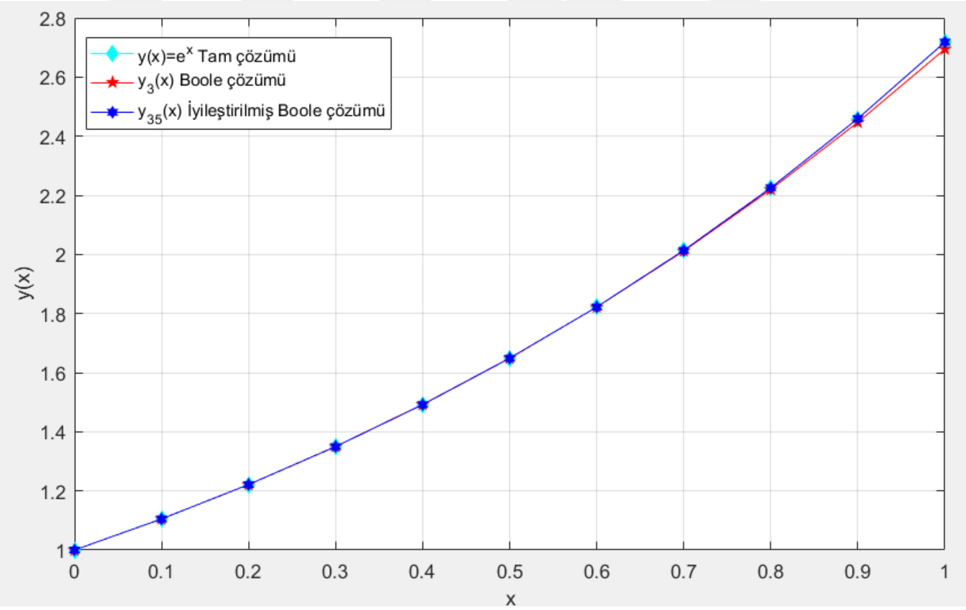
homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi ile çözülmüştür [24]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = e^x$'dir. Tablo 5.25.'te (5.50) denkleminin$y(x) = e^x$ tam çözümü, $N, M = 3{,}5$ ve $N, M = 8, 10$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.47. ve Şekil 5.48.'de karşılaştırılmıştır. Tablo 5.26.'da $N, M = 3{,}5$ ve $N, M = 8{,}10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.49. ve Şekil 5.50.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.25. $y(x) = e^x$ tam çözümü, $N, M = 3, 5$ ve $N, M = 8{,}10$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

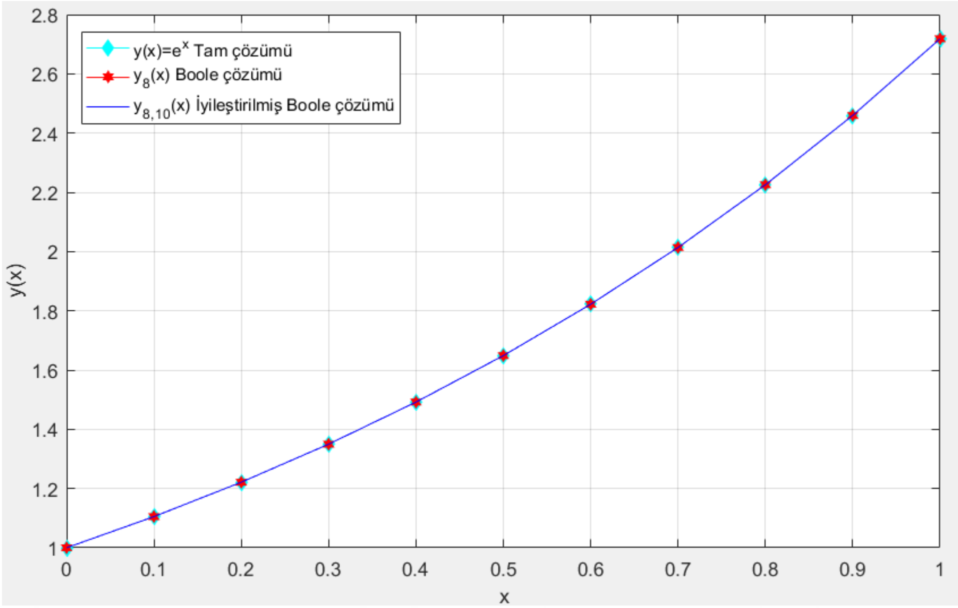
x_i	Tam Çözümü $y(x) = e^x$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 3$	$N = 8$	$N = 3, M = 5$	$N = 8, M = 10$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.105170918	1.105194607	1.105170918	1.105171176	1.105170918
0.2	1.221402758	1.221556856	1.221402759	1.221403933	1.221402758
0.3	1.349858808	1.350254388	1.34985881	1.349860903	1.349858808
0.4	1.491824698	1.492454847	1.491824704	1.491827272	1.491824698
0.5	1.648721271	1.649325872	1.648721283	1.648724337	1.648721271
0.6	1.8221188	1.822035107	1.822118821	1.822123056	1.8221188
0.7	2.013752707	2.011750193	2.01375274	2.013757604	2.013752707
0.8	2.225540928	2.219638773	2.225540975	2.225538923	2.225540928
0.9	2.459603111	2.446868487	2.459603169	2.459568277	2.459603111
1.0	2.718281828	2.694606978	2.718281875	2.718150804	2.718281828

Tablo 5.26. $N, M = 3, 5$ ve $N, M = 8,10$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

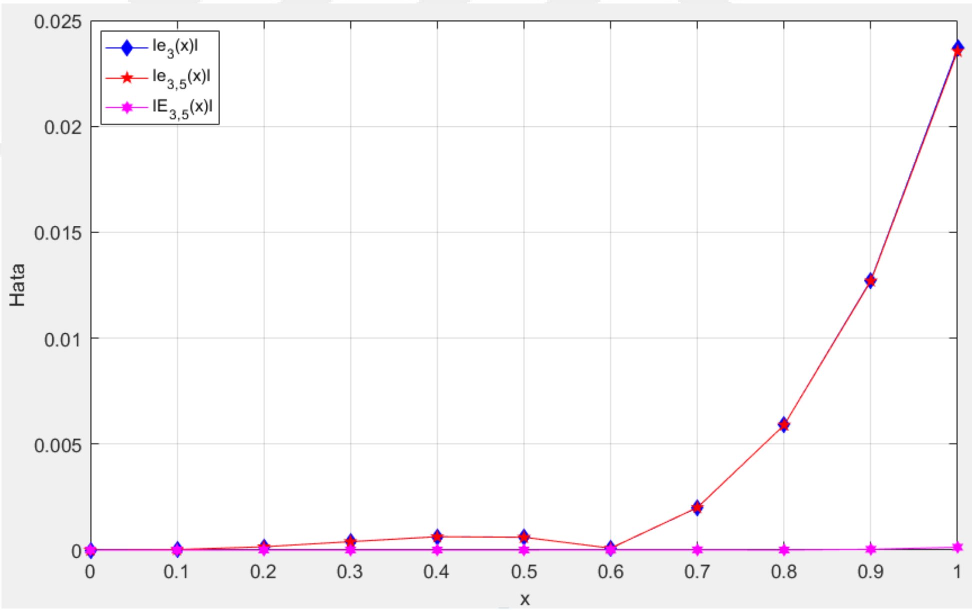
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\lvert e_N \rvert$		Tahmini Hata Fonksiyonu $\lvert e_{N,M} \rvert$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\lvert E_{N,M} \rvert$	
	$N = 3$	$N = 8$	$N = 3, M = 5$	$N = 8, M = 10$	$N = 3, M = 5$	$N = 8, M = 10$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	2.3689e-05	6.2613e-11	2.3431e-05	6.2681e-11	2.5764e-07	6.7502e-14
0.2	1.5410e-04	7.1694e-10	1.5292e-04	7.1711e-10	1.1749e-06	1.6831e-13
0.3	3.9558e-04	2.6281e-09	3.9349e-04	2.6283e-09	2.0953e-06	2.6357e-13
0.4	6.3015e-04	6.3353e-09	6.2757e-04	6.3356e-09	2.5744e-06	3.5927e-13
0.5	6.0460e-04	1.2348e-08	6.0154e-04	1.2348e-08	3.0663e-06	4.5497e-13
0.6	8.3693e-05	2.1031e-08	8.7949e-05	2.1031e-08	4.2560e-06	5.4912e-13
0.7	2.0025e-03	3.2476e-08	2.0074e-03	3.2476e-08	4.8968e-06	6.4970e-13
0.8	5.9022e-03	4.6066e-08	5.9002e-03	4.6066e-08	2.0053e-06	7.1365e-13
0.9	1.2735e-02	5.7412e-08	1.2700e-02	5.7413e-08	3.4834e-05	1.7906e-12
1.0	2.3675e-02	4.6541e-08	2.3544e-02	4.6569e-08	1.3102e-04	2.8242e-11



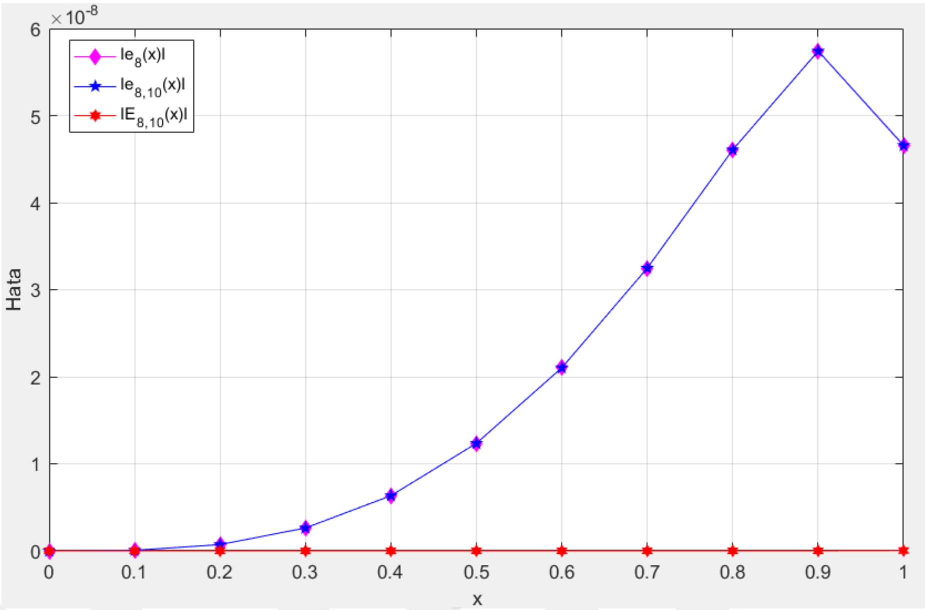
Şekil 5.47. $N, M = 3,5$ değeri için $y(x) = e^x$ tam çözümü, $y_3(x)$ Boole çözümü ve $y_{3,5}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.48. $y(x) = e^x$ tam çözümü, $y_8(x)$ Boole çözümü ve $y_{8,10}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.49. $|e_3|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{3,5}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{3,5}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.50. $|e_8|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{8,10}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{8,10}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.4.4. Bu örnekte

$$y^{(1)}(x) + xy(x) = g(x) + \int_0^x (\mathrm{x} - \mathrm{t})y(t)dt + \int_0^1 (1 + xt)y(t)dt \qquad (5.51)$$

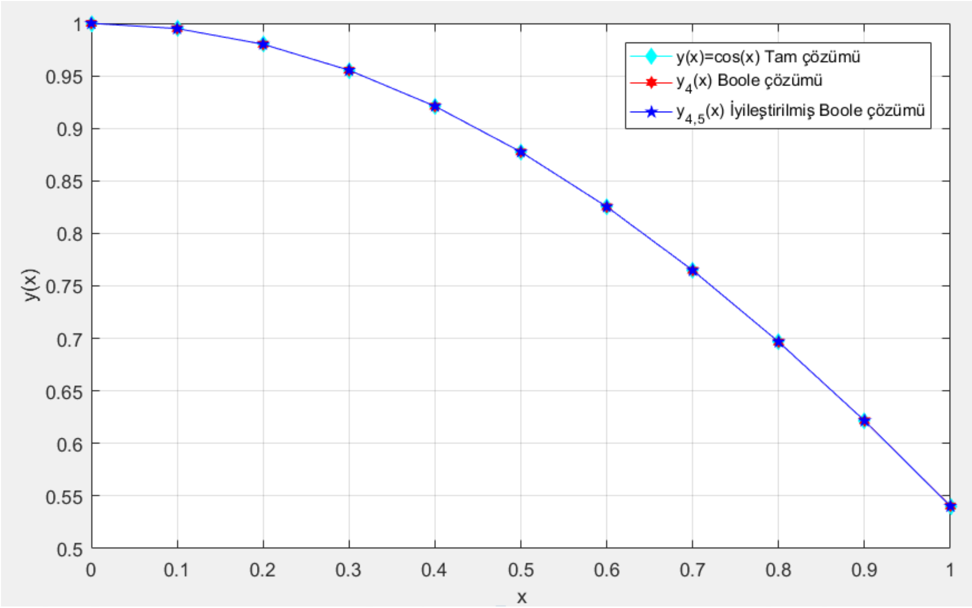
homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi ile çözülmüştür [53]. Bu denklemde $g(x) = -\sin(x) + xcos(x) - 1 + \cos(x) + x - \sin(1) - xcos(1) - xsin(1)$ ve denklemin tam çözümü $y(x) = \cos(x)$'dir. Tablo 5.27.'de (5.51) denkleminin $y(x) = \cos(x)$ tam çözümü, $N, M = 4{,}5$ ve $N, M = 7{,}8$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.51. ve Şekil 5.52.'de karşılaştırılmıştır. Tablo 5.28.'de $N, M = 4{,}5$ ve $N, M = 7{,}8$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.53. ve Şekil 5.54.'te karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.27. $y(x) = cos(x)$tam çözümü, $N, M = 4,5$ ve $N, M = 7,8$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

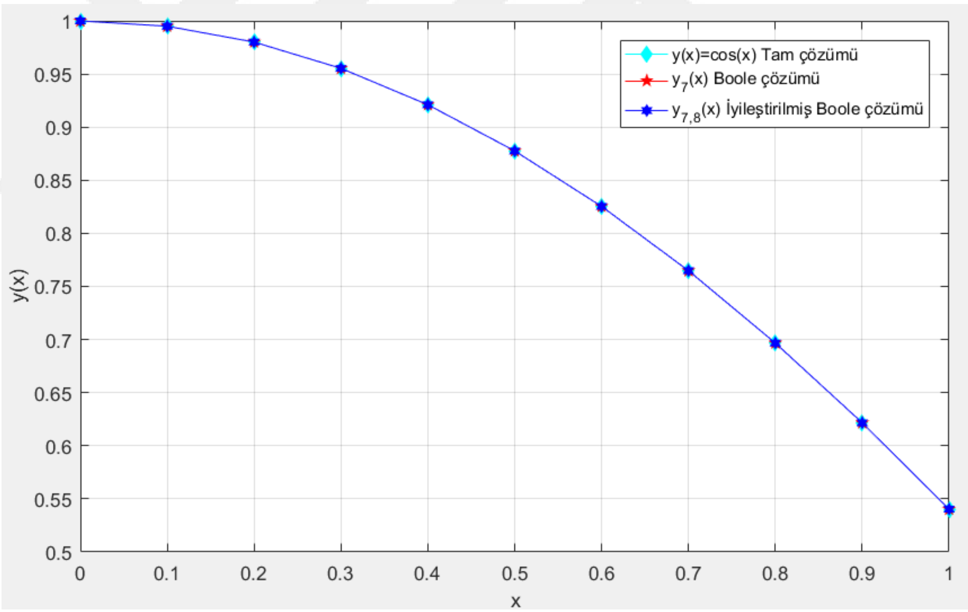
x_i	Tam Çözümü $y(x) = \cos(x)$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 4$	$N = 7$	$N = 4, M = 5$	$N = 7, M = 8$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.9950041653	0.9950017854	0.9950041631	0.9950051854	0.9950041653
0.2	0.9800665778	0.9800614472	0.9800665751	0.9800683464	0.9800665778
0.3	0.9553364891	0.9553326284	0.955336486	0.9553383581	0.9553364891
0.4	0.921060994	0.9210613749	0.92106099	0.9210630024	0.921060994
0.5	0.8775825619	0.8775861358	0.8775825574	0.8775851124	0.8775825619
0.6	0.8253356149	0.825337763	0.82533561	0.8253387157	0.8253356149
0.7	0.7648421873	0.7648395113	0.7648421814	0.7648451784	0.7648421873
0.8	0.6967067093	0.6967070385	0.6967067038	0.6967093488	0.6967067094
0.9	0.6216099683	0.6216484054	0.6216099614	0.6216157014	0.6216099683
1.0	0.5403023059	0.5404640759	0.540302253	0.5403244804	0.5403023069

Tablo 5.28. $N, M = 4, 5$ ve $N, M = 7,8$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

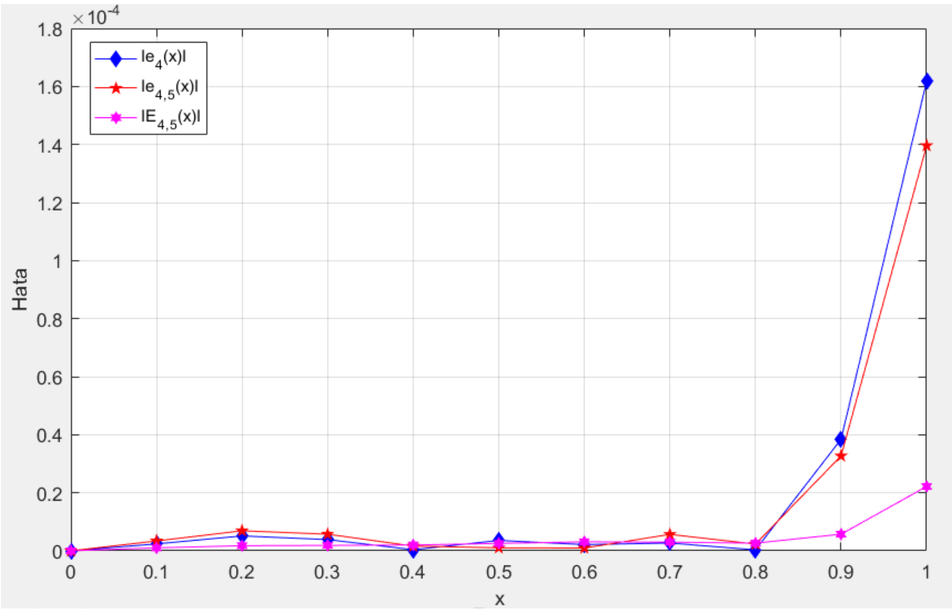
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 4$	$N = 7$	$N = 4, M = 5$	$N = 7, M = 8$	$N = 4, M = 5$	$N = 7, M = 8$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	2.3799e-06	2.1784e-09	3.4000e-06	2.1558e-09	1.0201e-06	2.2632e-11
0.2	5.1307e-06	2.7899e-09	6.8992e-06	2.7733e-09	1.7686e-06	1.6572e-11
0.3	3.8608e-06	3.1474e-09	5.7297e-06	3.1345e-09	1.8690e-06	1.2833e-11
0.4	3.8092e-07	3.9695e-09	1.6275e-06	3.9588e-09	2.0084e-06	1.0714e-11
0.5	3.5739e-06	4.4643e-09	1.0234e-06	4.4592e-09	2.5505e-06	5.0971e-12
0.6	2.1481e-06	4.9458e-09	9.5268e-07	4.9419e-09	3.1008e-06	3.8580e-12
0.7	2.6760e-06	5.8937e-09	5.6671e-06	5.8971e-09	2.9911e-06	3.3685e-12
0.8	3.2914e-07	5.5447e-09	2.3103e-06	5.5479e-09	2.6395e-06	3.2517e-12
0.9	3.8437e-05	6.8503e-09	3.2704e-05	6.8449e-09	5.7332e-06	5.3384e-12
1.0	1.6177e-04	5.2864e-08	1.3960e-04	5.3911e-08	2.2175e-05	1.0469e-09



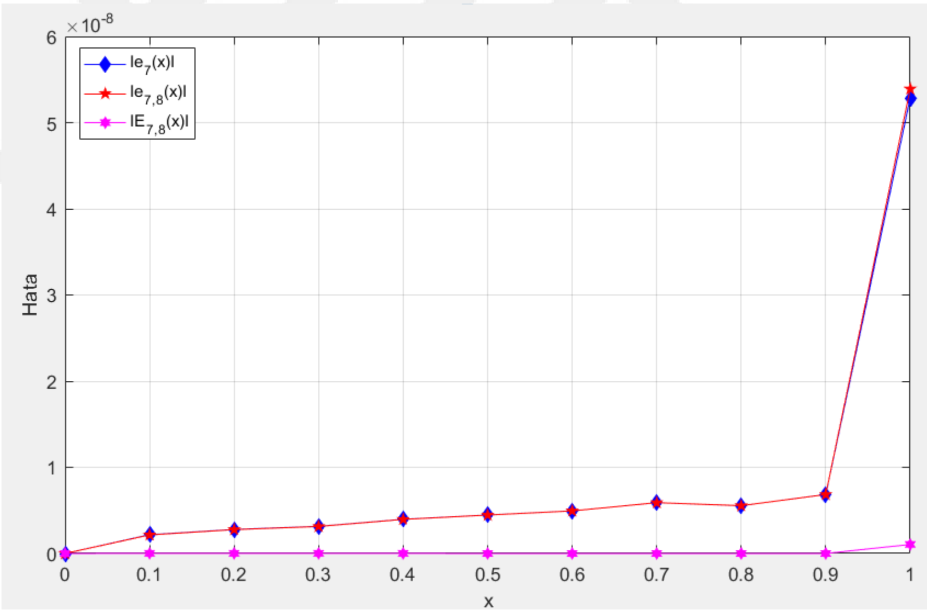
Şekil 5.51. $y(x) = cos(x)$ tam çözümü, $y_4(x)$ Boole çözümü ve $y_{4,5}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.52. $y(x) = cos(x)$ tam çözümü, $y_7(x)$ Boole çözümü ve $y_{7,8}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.53. $|e_4|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{4,5}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{4,5}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.54. $|e_7|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{7,8}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{7,8}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.4.5. Bu örnekte $0 \leq x, t \leq 1$ aralığında, $y(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = -1$ ve $y^{(2)}(0) = 1$, karışık koşulları ile verilen

$$y^{(3)}(x) - xy^{(1)}(x) + xy(x) + \int_0^1 \left[e^{-x-t}y^{(1)}(x) + e^{x-t}y^{(2)}(x)\right]dt$$

$$-\int_0^x e^{-x+t}y(t)dt = (x-1)e^{-x} - \frac{(e^2-1)(e^{-x}-e^x)}{e^2} \qquad (5.52)$$

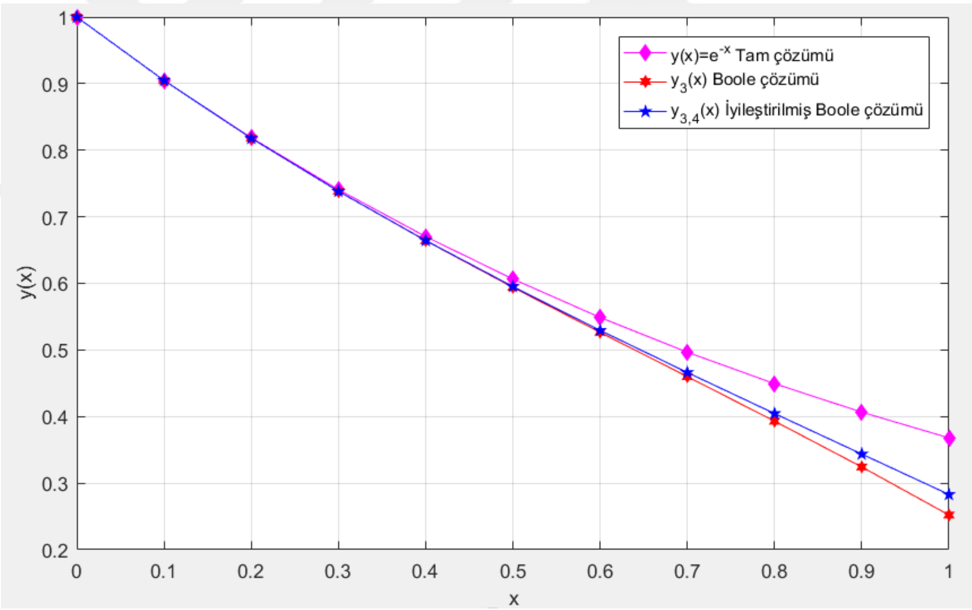
homojen olmayan 2. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi ile çözülmüştür [56]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = e^{-x}$'dir. Tablo 5.29.'da (5.52) denkleminin $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $N, M = 3{,}4$ ve $N, M = 8{,}9$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.55. ve Şekil 5.56.'da karşılaştırılmıştır. Tablo 5.30.'da $N, M = 3, 4$ ve $N, M = 8, 9$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.57. ve Şekil 5.58.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.29. $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $N, M = 3, 4$ ve $N, M = 8{,}9$ için $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

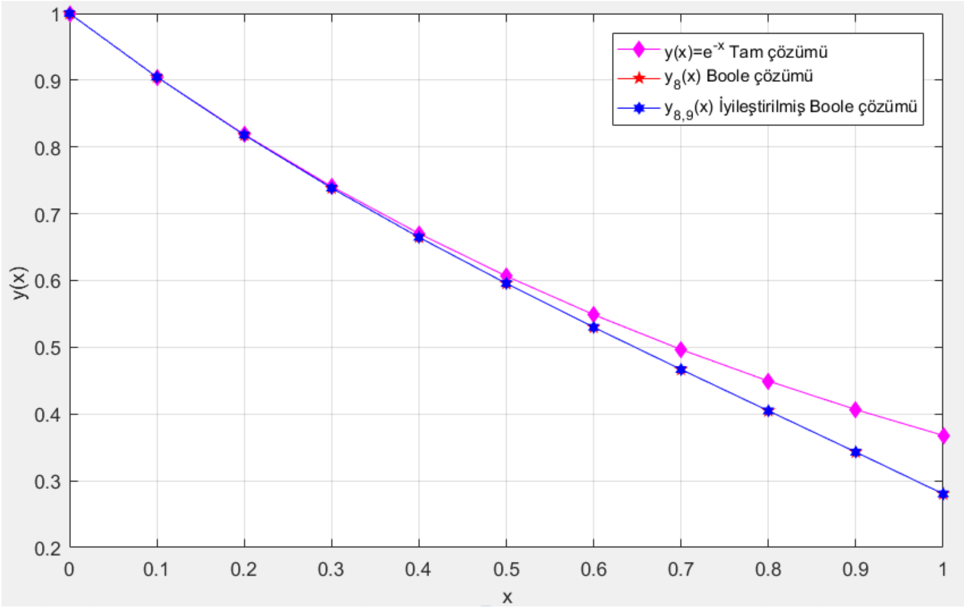
x_i	Tam Çözümü $y(x) = e^{-x}$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 3$	$N = 8$	$N = 3, M = 4$	$N = 8, M = 9$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.904837418	0.9047520587	0.9047472103	0.9047444801	0.9047472104
0.2	0.8187307531	0.8180164696	0.8180156766	0.8179899876	0.8180156771
0.3	0.7408182207	0.7383055849	0.7384240197	0.7383314537	0.7384240213
0.4	0.670320046	0.6641317567	0.6646825425	0.6644662499	0.6646825462
0.5	0.6065306597	0.5940073373	0.5955770126	0.5951941883	0.5955770199
0.6	0.5488116361	0.5264446789	0.5299522257	0.5294175215	0.5299522384
0.7	0.4965853038	0.4599561336	0.4666953497	0.4661409422	0.4666953705
0.8	0.4493289641	0.3930540536	0.4047190211	0.404471584	0.404719052
0.9	0.4065696597	0.3242507912	0.3429441265	0.3436190206	0.3429441601
1.0	0.3678794412	0.2520586985	0.2802821736	0.2828952663	0.2802821589

Tablo 5.30. $N,M = 3,4$ ve $N,M = 8,9$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

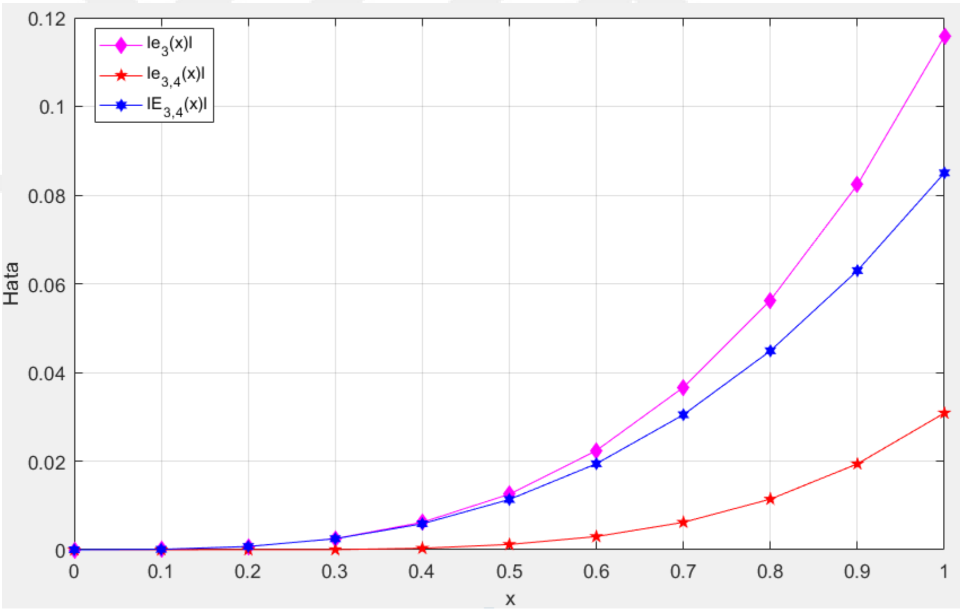
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Hata Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 3$	$N = 8$	$N = 3, M = 4$	$N = 8, M = 9$	$N = 3, M = 4$	$N = 8, M = 9$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	8.5359e-05	9.0208e-05	7.5786e-06	5.9673e-11	9.2938e-05	9.0208e-05
0.2	7.1428e-04	7.1508e-04	2.6482e-05	4.8733e-10	7.4077e-04	7.1508e-04
0.3	2.5126e-03	2.3942e-03	2.5869e-05	1.5812e-09	2.4868e-03	2.3942e-03
0.4	6.1883e-03	5.6375e-03	3.3449e-04	3.6910e-09	5.8538e-03	5.6375e-03
0.5	1.2523e-02	1.0954e-02	1.1869e-03	7.2486e-09	1.1336e-02	1.0954e-02
0.6	2.2367e-02	1.8859e-02	2.9728e-03	1.2726e-08	1.9394e-02	1.8859e-02
0.7	3.6629e-02	2.9890e-02	6.1848e-03	2.0741e-08	3.0444e-02	2.9890e-02
0.8	5.6275e-02	4.4610e-02	1.1418e-02	3.0809e-08	4.4857e-02	4.4610e-02
0.9	8.2319e-02	6.3626e-02	1.9368e-02	3.3537e-08	6.2951e-02	6.3625e-02
1.0	1.1582e-01	8.7597e-02	3.0837e-02	1.4761e-08	8.4984e-02	8.7597e-02



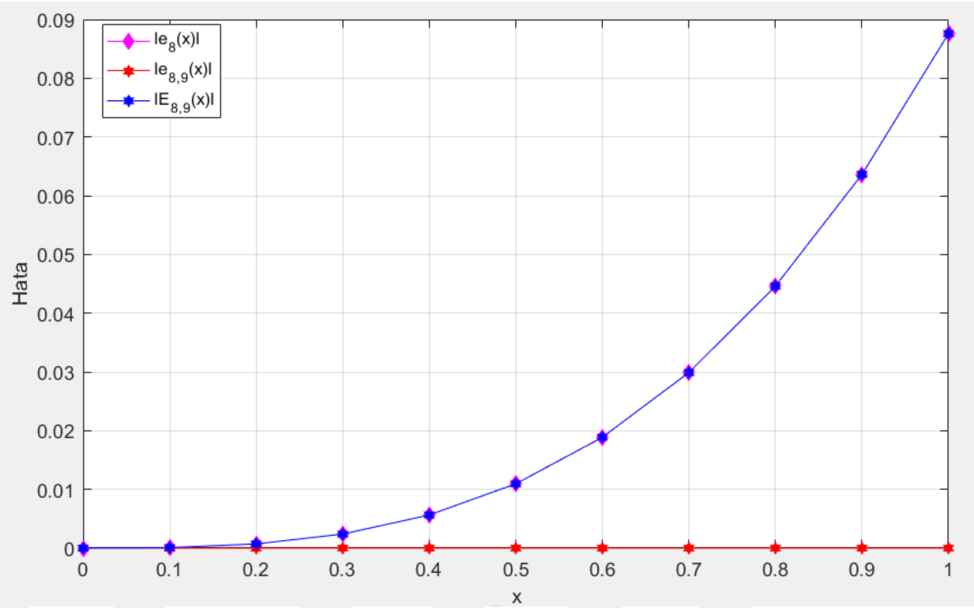
Şekil 5.55. $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $y_3(x)$ Boole çözümü ve $y_{3,4}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.56. $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $y_8(x)$ Boole çözümü ve $y_{8,9}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.57. $|e_3|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{3,4}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{3,4}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.58. $|e_8|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{8,9}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{8,9}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

ÖRNEK 5.4.6. Bu örnekte $y(0) = y^{(2)}(0) = y^{(4)}(0) = 1$ ve $y^{(1)}(0) = y^{(3)}(0) = -1$, karışık koşulları ile verilen

$$y^{(5)}(x) - xy^{(2)}(x) + xy(x)$$
$$= -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x+t}y(t)dt + \int_0^x xe^t y(t)dt \qquad (5.53)$$

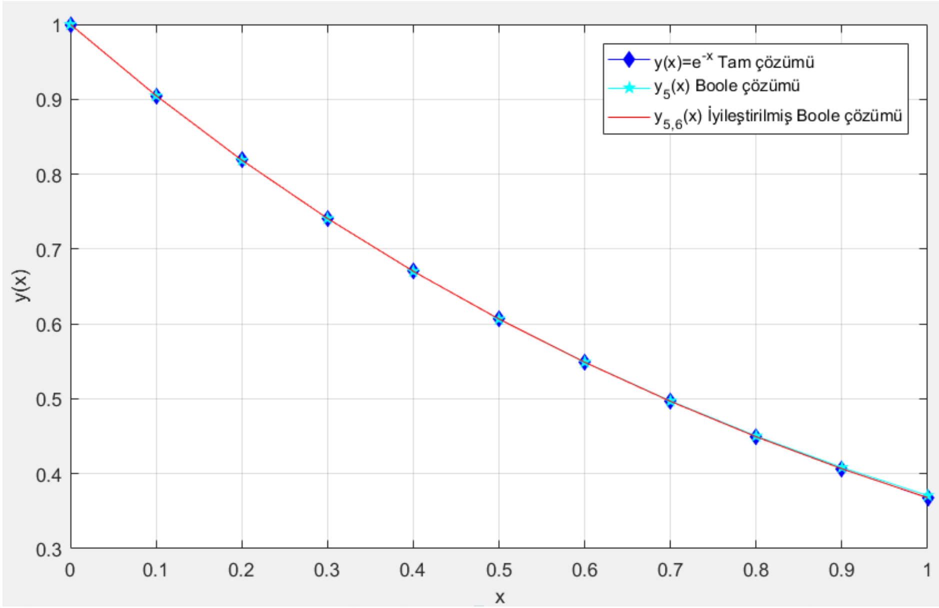
homojen olmayan 5. mertebeden lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi Boole sıralama yöntemi ile çözülmüştür [4]. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = e^{-x}$'dir. Tablo 5.31.'de (5.53) denkleminin $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $N, M = 5,6$ ve $N, M = 10,11$ için $y_N(x)$ Boole çözümleri ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümlerinin değerleri verilmiştir. Bu değerler Şekil 5.59. ve Şekil 5.60.'da karşılaştırılmıştır. Tablo 5.32.'de $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 10, 11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının tablo değerleri verilmiştir. Ek olarak Şekil 5.61. ve Şekil 5.62.'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.31. $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 10, 11$ için tam çözümü $y(x) = e^{-x}$, $y_N(x)$ Boole çözümü ve $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün değerleri.

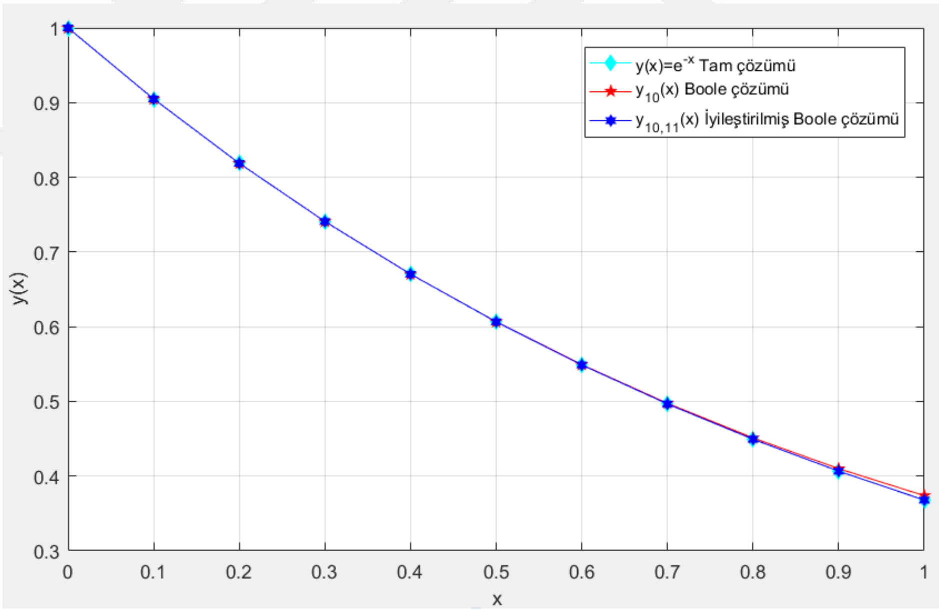
x_i	Tam Çözümü $y(x) = e^{-x}$	Boole Çözümü $y_N(x)$		İyileştirilmiş Boole Çözümü $y_{N,M}(x)$	
		$N = 5$	$N = 10$	$N = 5, M = 6$	$N = 10, M = 11$
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.1	0.904837418	0.9048374584	0.9048374613	0.9048374179	0.904837418
0.2	0.8187307531	0.818732003	0.8187321845	0.8187307486	0.8187307531
0.3	0.7408182207	0.7408273979	0.7408294588	0.7408181828	0.7408182207
0.4	0.670320046	0.67035743	0.6703690188	0.6703199076	0.670320046
0.5	0.6065306597	0.60664092	0.6066852616	0.6065304086	0.6065306597
0.6	0.5488116361	0.5490767339	0.5492097686	0.5488116945	0.5488116361
0.7	0.4965853038	0.4971387947	0.4974763878	0.496587442	0.4965853038
0.8	0.4493289641	0.4503710928	0.4511292421	0.449338062	0.4493289641
0.9	0.4065696597	0.4083826984	0.4099341625	0.4065966874	0.4065696597
1.0	0.3678794412	0.3708427719	0.3737942049	0.367946081	0.3678794412

Tablo 5.32. $N, M = 5, 6$ ve $N, M = 10{,}11$ için $|e_N|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}|$ tahmini mutlak hata fonksiyonu ve $|E_{N,M}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının değerleri.

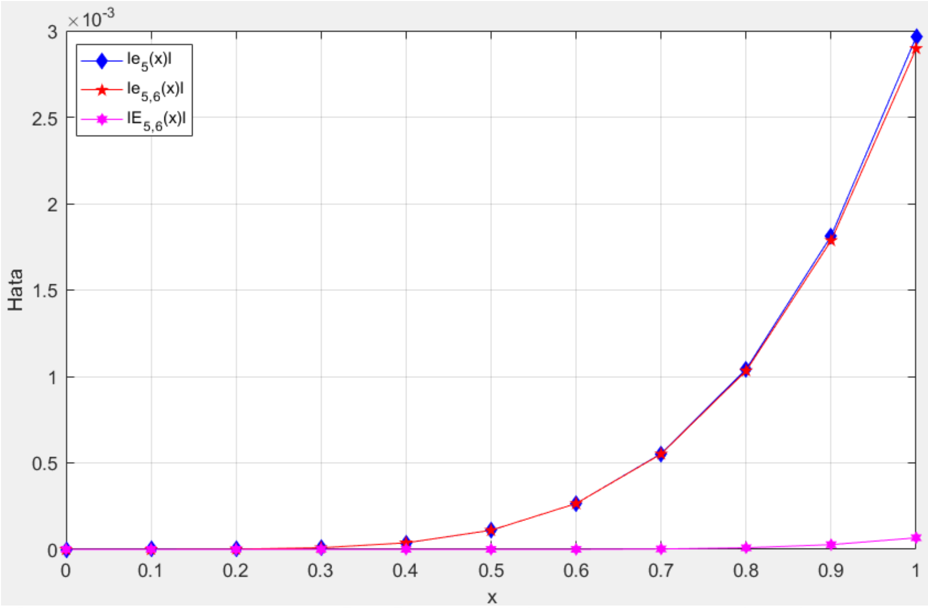
x_i	Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_N\|$		Tahmini Mutlak Hata Fonksiyonu $\|e_{N,M}\|$		İyileştirilmiş Boole Polinom Çözümünün Mutlak Hatası $\|E_{N,M}\|$	
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 5, M = 6$	$N = 10, M = 11$	$N = 5, M = 6$	$N = 10, M = 11$
0	0	0	0	0	0	0
0.1	4.0392e-08	4.3269e-08	4.0481e-08	4.3269e-08	8.9250e-11	0
0.2	1.2499e-06	1.4314e-06	1.2545e-06	1.4314e-06	4.5109e-09	1.2212e-15
0.3	9.1773e-06	1.1238e-05	9.2151e-06	1.1238e-05	3.7870e-08	8.1046e-15
0.4	3.7384e-05	4.8973e-05	3.7522e-05	4.8973e-05	1.3846e-07	2.8422e-14
0.5	1.1026e-04	1.5460e-04	1.1051e-04	1.5460e-04	2.5111e-07	7.3497e-14
0.6	2.6510e-04	3.9813e-04	2.6504e-04	3.9813e-04	5.8433e-08	1.5810e-13
0.7	5.5349e-04	8.9108e-04	5.5135e-04	8.9108e-04	2.1382e-06	3.0292e-13
0.8	1.0421e-03	1.8003e-03	1.0330e-03	1.8003e-03	9.0979e-06	6.5570e-13
0.9	1.8130e-03	3.3645e-03	1.7860e-03	3.3645e-03	2.7028e-05	2.7534e-12
1.0	2.9633e-03	5.9148e-03	2.8967e-03	5.9148e-03	6.6640e-05	1.6550e-11



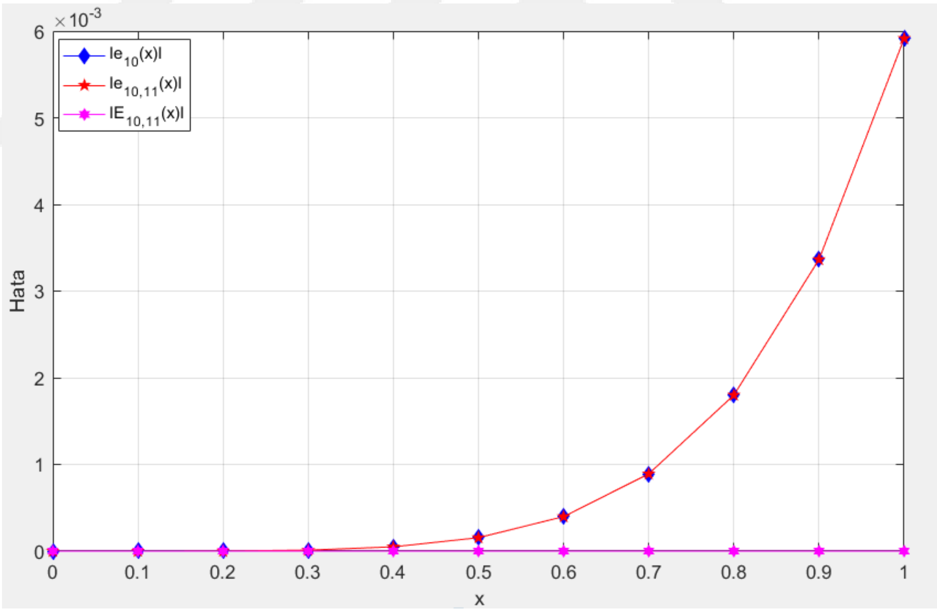
Şekil 5.59. $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $y_5(x)$ Boole çözümü ve $y_{5,6}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.60. $y(x) = e^{-x}$ tam çözümü, $y_{10}(x)$ Boole çözümü ve $y_{10,11}(x)$ iyileştirilmiş Boole çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 5.61. $|e_5|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{5,6}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{5,6}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.



Şekil 5.62. $|e_{10}|$ mutlak hata fonksiyonu, $|e_{10,11}|$ tahmini hata mutlak fonksiyonu ve $|E_{10,11}|$ iyileştirilmiş Boole polinom çözümünün mutlak hatasının karşılaştırılması.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Voletrra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin karışık koşullar altında yaklaşık çözümleri için Boole sıralama yöntemi sunulmuştur. Bölüm 1 ve 2'de Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler ve Boole polinomu ile ilgili literatür bilgileri verilmiştir. Bölüm 3'te Boole sıralama yöntemi detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bölüm 4'te yöntemin güvenirliğini göstermek için Rezidüel fonksiyonlara dayalı hata tahminleri verilmiştir.

Tezde Volterra integro diferansiyel denklemlerin, Fredholm integro diferansiyel denklemlerin, Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin ve lineer Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin farklı problemlerine yer verilmiştir. Karışık koşullar altında verilen (5.1), (5.6), (5.16), (5.21), (5.30), (5.40) ve (5.45) denklemlerin $N = 3$ için tam çözümleri elde edilmiştir. Karışık koşullar altında verilen diğer problemlerin çeşitli N, M değerleri için Boole çözümleri ve iyileştirilmiş Boole çözümleri elde edilmiştir. Sonuçlar tablo ve grafiklerde tam çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Sonuçlara göre Boole çözümleri ve iyileştirilmiş Boole çözümleri, tam çözümlere yakın çıkmıştır. N değerinin büyük alınması durumunda sonuçlar tam çözüme daha yakın çıkmaktadır. Ayrıca sonuçların mutlak hata fonksiyonu, tahmini hata fonksiyonu ve iyileştirilmiş Boole hata fonksiyonları hesaplanmıştır. Sonuçları tablo ve grafiklerde karşılaştırılmıştır.

Hesaplamalar MATLAB bilgisayar programı kullanılarak yapılmıştır. Bölüm 3 ve 4'de verilen denklemler MATLAB programı kodlarında yazılmıştır. Bu sayede Bölüm 5'te yer alan problemlerin çözümlerine, tablo değerlerine ve grafiklerine kısa sürede ve kolay bir şekilde ulaşılmıştır. Bu şekilde daha etkili sonuçlar elde edilmiş ve incelenmiştir.

Boole sıralama yöntemi, lineer Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için geliştirilmiştir. Bu yöntemde küçük düzenlemeler yapılarak lineer Hybrid gecikmeli genel fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu sayede yöntemin farklı denklem türlerine uygulanabilir olduğu gözlenmiştir. İleride lineer olmayan integro-diferansiyel denklemler, gecikmeli integro-diferansiyel denklemler, kısmi integro-diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklem sistemleri gibi denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Boole sıralama yöntemi ile çalışmaların yapılması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Ross, S. L., Differential equations. 2010.
[2] Yıldırım, A., Solution of BVPs for fourth-order integro-differential equations by using homotopy perturbation method. Computers and Mathematics with Applications. 2008, 56(12), 3175-3180.
[3] Hesameddini, E., Shahbazi, M., Solving multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type using Bernstein polynomials method. Applied Numerical Mathematics. 2019, 136, 122-138.
[4] Rohaninasab, N., Maleknejad, K., Ezzati, R., Numerical solution of high-order Volterra–Fredholm integro-differential equations by using Legendre collocation method. Applied Mathematics and Computation. 2018, 328, 171-188.
[5] Türkyılmaz, M., An effective approach for numerical solutions of high-order Fredholm integro-differential equations. Applied Mathematics and Computation. 2014, 227, 384-398.
[6] Sezer, M., Daşçıoğlu, A., Diferansiyel Denklemler I Teori veProblem Çözümleri, Dora Yayınları, Bursa, Türkiye, 2019, 1 s.
[7] Erdem, K., Lineer olmayan integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri. Celal Bayar Üniversitesi, Fen bilimleri enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, Manisa, 2010, 1 s. (Yüksek Lisans Tezi).
[8] Lakshmikantham, V., Rao, M.R. M., Theory of Integro-differential Equations. CRC Press, 1995, xi s.
[9] Wazwaz, A.M., A first course in integral equations. World Scientific Publishing Company, 2015.
[10] Kürkçü, Ö.K., Dickson ve Graph-Matching Polinomlarının Temel Matris Özellikleri ve Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, Manisa, 2019, 1 s. (Doktora Tezi).
[11] Dehghan, M., Salehi, R., The numerical solution of the non-linear integro-differential equations based on the meshless method. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2012, 236(9), 2367-2377.
[12] Jafarzadeh, Y., Keramati, B., Numerical method for a system of integro-differential equations and convergence analysis by Taylor collocation. Ain Shams Engineering Journal. 2018, 9(4), 1433-1438.
[13] Hesameddini, E., Shahbazi, M., A reliable algorithm based on the shifted orthonormal Bernstein polynomials for solving Volterra–Fredholm integral equations. Journal of Taibah University for Science. 2018, 12(4), 427-438.
[14] Roul, P., Meyer, P., Numerical solutions of systems of nonlinear integro-differential equations by Homotopy-perturbation method. Applied Mathematical Modelling. 2011, 35(9), 4234-4242.
[15] Laib, H., Bellour, A., Bousselsal, M., Numerical solution of high-order linear Volterra integro-differential equations by using Taylor collocation method. International Journal of Computer Mathematics. 2019, 96(5), 1066-1085.
[16] Maleknejad, K., Basirat, B., Hashemizadeh, E., A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations. Mathematical and Computer Modelling. 2012, 55(3-4), 1363-1372.
[17] Varol, Bayram, D., Lineer Kesirli İntgero-Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinomları ile Sayısal Çözümleri. Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalı, Denizli, 2019, 1 s. (Doktora Tezi).

[18] Daymaz, T., Lineer İntegral Denklemler için Bazı Çözüm Yöntemleri. T.C. İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilimdalı, 2018. (Yüksek Lisans Tezi).
[19] Erdem, K., Yalçınbaş, S., Sezer, M., A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differentialdifference equations. Journal of Difference Equations and Applications. 2013, 19(10), 1619-1631.
[20] Biçer, K.E., Sezer, M., Bernoulli matrix-collocation method for solving general functional integro-differential equations with hybrid delays. Journal of Inequalities and Special Functions. 2017, 8(3), 85-99.
[21] Yüzbaşı, Ş., Şahin N., Sezer, M., Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomial bases. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(10), 3079-3096.
[22] Yüzbaşı, Ş., Şahin N., Sezer, M., Bessel matrix method for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations. Journal of Advanced Research in Applied Mathematics. 2011, 3(2), 23-47.
[23] Yüzbaşı, Ş., Şahin N., Sezer, M., Bessel polynomial solutions of high-order linear Volterra integro-differential equations. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 62(4), 1940-1956.
[24] Yüzbaşı, Ş., Şahin, N., Yıldırım, A., A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations. Mathematical and Computer Modelling. 2012, 55(3-4), 547-563.
[25] Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., Sezer, M., A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential–difference equations using Dickson polynomials. Applied Mathematics and Computation. 2016, 276, 324-339.
[26] Savasaneril, N., Sezer, M., Laguerre polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations. New Trends in Mathematical Sciences. 2016, 4(2), 273-284.
[27] Bayram, D.V., Daşçıoğlu, A., A method for fractional Volterra integro-differential equations by Laguerre polynomials. Advances in Difference Equations. 2018, 2018(1), 466.
[28] Yalçınbaş, S., Sezer, M., The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials. Applied Mathematics and Computation. 2000, 112(2-3), 291-308.
[29] Laib, H., Bellour, A., Bousselsal, M., Numerical solution of high-order linear Volterra integro-differential equations by using Taylor collocation method. International Journal of Computer Mathematics. 2019, 96(5), 1066-1085.
[30] Mirzaee, F., Hoseini, S.F., A new collocation approach for solving systems of high-order linear Volterra integro-differential equations with variable coefficients. Applied Mathematics and Computation. 2017, 311, 272-282.
[31] Mirzaee, F., Hoseini, S.F., Solving systems of linear Fredholm integro-differential equations with Fibonacci polynomials. Ain Shams Engineering Journal, 2014, 5(1), 271-283.
[32] Karim, M.F., Mohamad, M., Rusiman, M.S., Che-Him, N., Roslan, R., Khalid, K., ADM for solving linear second-order Fredholm integro-differential equations. In Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2018, 995(1), p. 012009.
[33] Chen, J., He, M., Huang, Y., A fast multiscale Galerkin method for solving second order linear Fredholm integro-differential equation with Dirichlet boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020, 364, 112352.

[34] Bichi, S.L., Lawal, L., Lawan, S.M., Bello, M.Y., Direct-homotopy analysis for solving fredholm integro-differential equations. In Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2018, 1123(1), p. 012036.
[35] Zhou, F., Xu, X., Numerical solution of fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations with mixed boundary conditions via Chebyshev wavelet method. International Journal of Computer Mathematics. 2019, 96(2), 436-456.
[36] Xue, Q., Niu, J., Yu, D., Ran, C., An improved reproducing kernel method for Fredholm integro-differential type two-point boundary value problems. International Journal of Computer Mathematics. 2018, 95(5), 1015-1023.
[37] Pashazadeh Atabakan, Z., Kazemi Nasab, A., Kılıçman, A., Eshuvatov, Z.K., Numerical solution of nonlinear Fredholm integro-differential equations using spectral homotopy analysis method. Mathematical Problems in Engineering. 2013, 2013.
[38] Babayar-Razlighi, B., Soltanalizadeh, B., Numerical solution for system of singular nonlinear Volterra integro-differential equations by Newton-Product method. Applied mathematics and computation. 2013, 219(15), 8375-8383.
[39] Rohaninasab N., Maleknejad, K., Ezzati, R., Numerical solution of high-order Volterra–Fredholm integro-differential equations by using Legendre collocation method. Applied Mathematics and Computation. 2018, 328, 171-188.
[40] Noeiaghdam, S., Numerical solution of N-th order Fredholm integro-differential equations by integral mean value theorem method. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015, 99(3), 277-287.
[41] Gu, Z., Spectral collocation method for weakly singular Volterra integro-differential equations. Applied Numerical Mathematics. 2019, 143, 263-275.
[42] El-Gendi, S.E., Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations. The Computer Journal. 1969, 12(3), 282-287.
[43] Shidfar, A., Molabahrami, A., Babaei, A., Yazdanian, A., A series solution of the nonlinear Volterra and Fredholm integro-differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010, 15(2), 205-215.
[44] Shang, X., Han, D., Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equations. Journal of computational and applied mathematics. 2010, 234(5), 1442-1447.
[45] MacHale, D., The life and work of George Boole: a prelude to the digital age. Cork University Press. 2014.
[46] Chen, J., He, M., Zeng, T., A multiscale Galerkin method for second-order boundary value problems of Fredholm integro-differential equation II: Efficient algorithm for the discrete linear system. Journal of Visual Communication and Image Representation. 2019, 58, 112-118.
[47] Jaradat, H., Alsayyed, O., Al-Shara, S., Numerical solution of linear integro-differential equations. Journal of Mathematics and Statistics. 2008, 4(4), 250-254.
[48] Cravero, I., Pittaluga, G., Sacripante, L., An algorithm for solving linear Volterra integro-differential equations. Numerical Algorithms. 2012, 60(1), 101-114.
[49] Rawashdeh, E., Mcdowell, D., Rakesh, L., Polynomial spline collocation methods for second-order Volterra integrodifferential equations. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2004, 2044(56), 3011-3022.
[50] Zhao, J., Cao, Y., Xu, Y., Sinc numerical solution for pantograph Volterra delay-integro-differential equation. International Journal of Computer Mathematics. 2017, 94(5), 853-865.
[51] Rihan, F.A., Doha, E.H., Hassan, M.I., Kamel, N.M., Numerical treatments for Volterra delay integro-differential equations. Computational Methods in Applied Mathematics. 2009, 9(3), 292-318.

[52] Oğuz, C., Sezer, M., A novel chelyshkov approach technıque for solvıng functıonal ıntegro-dıfferentıal equatıons wıth mıxed delays. Journal of Science and Arts. 2017, 17(3), 477-490.
[53] Mustafa, M.M., Muhammad, A.M., Numerical Solution of Linear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations Using Lagrange Polynomials. Mathematical Theory and Modelin. 2014, 4(5), 137-146.
[54] Gümgüm, S., Savasaneril, N. B., Kürkçü, O., Sezer, M., Lucas polynomial solution for neutral differential equations with proportional delays. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. 2019, 10(1), 259-269.
[55] Savaşaneril, N. B., Laguerre Series Solutions of the Delayed Single Degree-of-Freedom Oscillator Excited by an External Excitation and Controlled by a Control Force. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. 2018, 15(2), 606-610.
[56] Yüzbaşı, Ş., An exponential method to solve linear Fredholm-Volterra integro-differential equations and residual improvement. Turkish Journal of Mathematics. 2018, 42(5), 2546-2562.
[57] Gümgüm, S., Savaşaneril, N. B., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M., A numerical technique based on Lucas polynomials together with standard and Chebyshev-Lobatto collocation points for solving functional integro-differential equations involving variable delays. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 2018, 22(6), 1659-1668.
[58] Yüzbaşı, Ş., Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Bessel Polinom Çözümleri, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2009. (Yüksek Lisans Tezi).
[59] Gümgüm, S., Savaşaneril, N. B., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M., Lucas polynomial solution of nonlinear differential equations with variable delay. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 2019, 1-12.
[60] Jordan, C., Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing Company, New York, 1950. 318 s.
[61] Roman, S., The Umbral Calculus. Academic Press, New York, 1984. 127 s.
[62] Wylie, C. R., Barrett, L. C., Wylie, C. R., Advanced engineering mathematics. 1960
[63] Dehghan, M., Salehi, R., The numerical solution of the non-linear integro-differential equations based on the meshless method. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2012, 236(9), 2367-2377.
[64] Khani, A., Shahmorad, S., An operational approach with Pade approximant for the numerical solution of non-linear Fredholm integro-differential equations. Scientia Iranica. 2012, 19(6), 1691-1698.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hale Gül DAĞ

Doğum Yeri ve Yılı : Salihli/Manisa, 1995

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : halegul.dag@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Salihli Türkbirliği Anadolu Lisesi, 2009-2013

Lisans : Bartın Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2013-2017

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, devam ediyor

Mesleki Deneyim

Tepedoğan Ortaokulu Sarıkaya/Yozgat (Matematik Öğretmeni) 2019-halen

Yayınlar

Dağ, H.G., Biçer, K.E., Boole Polynomail solutions of linear Volterra integro-differential equations. International Conference on Mathematics, 3-5 July, 2019, İstanbul, (Bildiriler Kitabı, 93s.)

Dağ, H.G., Biçer, K.E., A numerical technique based on Boole polynomials for solving Fredholm integro-differential equations. 3rd International Students Science Congress, 3-4 Mayıs, 2019, İzmir, (Bildiriler Kitabı, 299s.)

Dag. H. G., Biçer, K. E., Boole collocation method based on residual correction for solving linear Fredholm integro-differential equation. Journal of Science and Arts. 2020, 20(3), 597-610.