

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**İKİNCİ MERTEBE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BERNSTEİN SIRALAMA
(COLLOCATION) METODU**

Hüseyin Hilmi SORKUN

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Gökşen BACAĞ TURAN**



MANİSA-2019

**Hüseyin Hilmi
SORKUN**

**İKİNCİ MERTEBE KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN BERNSTEİN SİRALAMA (COLLOCATION) METODU**

2019

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hüseyin Hilmi SORKUN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	III
ŞEKİLLER DİZİNİ	IV
ÇİZELGE DİZİNİ	VI
TEŞEKKÜR	VII
ÖZET	VIII
ABSTRACT	IX
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Bernstein Polinomlarının Tarihçesi	5
2.2. Temel Bernstein Polinomları	8
2.3. Bernstein Polinomları	11
2.4. Polinomlarla Yaklaşım	14
2.5. Kısmi Diferansiyel Denklemler	16
2.6. İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	18
2.7. Başlangıç Değer Problemi (Cauchy Problemi)	23
2.8. Sınır Değer Problemi	24
2.9. Yaklaşım Problemi	26
2.10. Lineer Denklem Sisteminin Çözümleri	30
2.11. Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Çözümleri	32
2.12. Bernstein Polinomlarının Temel Matris Bağlıntıları	34
2.13. Hata Analizi	37
2.14. Tezin Amacı	40
3. MATERYAL VE YÖNTEM	41
3.1. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Bernstein Matris Metodu	41
3.1.1. Giriş	41
3.1.2. Temel matris bağıntıları	42
3.1.3. Yaklaşım fonksiyonu ile türevleri arasındaki bağıntı	44
3.1.4. Koşulların matris formu	47
3.1.5. Çözüm Metodu	47
3.1.6. Çözümün Doğruluğu ve Hata Analizi	50
3.2. Neumann, Dirichlet ve Robin Koşulları Altında Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Sıralama Yöntemi	53
3.2.1. Temel Matris Bağlıntıları	54
3.2.2. Çözüm Yöntemi	56
3.2.3. Hata Analizi	59
3.3. Bir Boyutlu Singüler Pertürbe Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Yaklaşık Çözümü için Bernstein Sıralama Metodu	62
3.3.1. Temel Matris Bağlıntıları	63
3.3.2. Çözüm Yöntemi	63
3.3.3. Hata Analizi	65
3.4. İkinci Mertebeden İki Uzay Değişkenli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri için Bernstein Sıralama Metodu	68
3.4.1. Temel Matris Bağlıntıları	69

3.4.2. Sınır Koşulları için Matris Bağlılıları.....	71
3.4.3. Çözüm Yöntemi	71
3.4.4. Hata Analizi	76
3.5. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfının Yaklaşık Çözümleri İçin Bernstein Sıralama Metodu.	78
3.5.1. Temel Matris Bağlılıları.....	80
3.5.2. Koşulları için Matris Bağlılıları	82
3.5.3. Çözüm Yöntemi	82
3.5.4. Hata Analizi	85
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	87
4.1. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Bernstein Matris Metodu ile İlgili Uygulamalar.....	87
4.2. Bir Boyutlu Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Problemleri İle İlgili Uygulamalar.....	114
4.3. İki Uzay Değişkenli Kısmi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Uygulamalar.....	118
4.4. Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler ile ilgili Uygulamalar	126
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	133
KAYNAKLAR	135
ÖZGEÇMİŞ.....	140

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
L	Lineer Operatör
∇	Gradyan Vektörü
∇^2	Laplace Operatörü
$\Delta(x, t)$	Diskriminant fonksiyonu
Ω	Kısmi Diferansiyel Denklemin Ele Alındığı Bölge
$\partial\Omega$	Ω Bölgesinin Sınırı
\mathbf{n}	$\partial\Omega$ Sınırı için Dış Birim Vektör
$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$	Normal Türev
$B_{p,q}^n(x, t)$	p . ve q . dereceden Bernstein polinomlar
$a_{p,q}$	Bilinmeyen Bernstein katsayıları
$u(x, t)$	Problemin Tam Çözümü
$u_N(x, t)$	N kesme sınırı için Bernstein Polinom çözümü
$u_{N,M}(x, t)$	İyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü
(x_i, t_j)	Sıralama Noktaları
$ \cdot $	Mutlak Değer
$R_N(x, t)$	Rezidü fonksiyonu
$e_N(x, t)$	Mutlak Hata Fonksiyonu
$e_{N,M}(x, t)$	Tahmin Edilen Hata Fonksiyonu
$e_{N,M}^*(x, t)$	İyileştirilmiş hata fonksiyonu
$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$	Arttırılmış Matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Nesnelerin gerçek şekli (üstte) ve kontrol noktalarının doğrusal çizgilerle birleştirilmesi sonucu oluşan şekli (altta)	6
Şekil 2.2. 1.dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği	8
Şekil 2.3. 2.dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği	9
Şekil 2.4. 3.dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği	9
Şekil 2.5. $y = e^{x/5}$ fonksiyonunun ve ona yaklaşım sağlayan 3. ve 5. Dereceden Bernstein polinomlarının grafikleri	14
Şekil 2.6. Dirichlet problemi	25
Şekil 2.7. Neumann problemi	25
Şekil 2.8. Karışık problem.....	26
Şekil 4.1. Örnek 4.1'in, $N = 12$, $M = 12$, $k = 1$ için iyileştirilmiş mutlak hata grafiği.....	94
Şekil 4.2. Örnek 4.1 için Chebyshev wavelets metodu, Bernstein Metodu ve İyileştirilmiş Bernstein metodunun mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	95
Şekil 4.3. (a)-(b) Örnek 4.1'in 3. durumu için tam çözüm ve $N, M = 10, 12$ için yaklaşık çözüm grafikleri.....	96
Şekil 4.4. (a)-(d) Örnek 4.2'in N ve M farklı değerleri için mutlak hata fonksiyonunun grafikleri.....	99
Şekil 4.5. (a)-(c) Rezidü fonksiyonları ile yöntemin farklı N ve M için karşılaştırmalı iyileştirilmiş hata grafikleri	106
Şekil 4.6. (a)-(d) Rezidü fonksiyonları ile yöntemin $N = 5, 8$ ve $M = 6, 8$ değerleri için karşılaştırmalı hata grafikleri	109
Şekil 4.7. (a)-(d) Rezidü fonksiyonları ile yöntemin $N = 5, 6, 8, 12$ ve $M = 6, 8, 10, 15$ değerleri için karşılaştırmalı hata grafikler.....	112
Şekil 4.8. (a)-(b) Örnek 4.5 tam çözüm ve $N, M = 10, 12$ için yaklaşık çözüm grafikleri.....	113
Şekil 4.9. Örnek 4.6 için farklı yöntemler ile İyileştirilmiş Bernstein metodunun mutlak hatalarının karşılaştırılması	113
Şekil 4.10. Örnek 4.7, $t = 1, 2$ ve 5 için tam çözüm ve $u_{12,14}(x, t)$ yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	115
Şekil 4.11. Örnek 4.7 problemine ait $N, M = 12, 14$ için $ e_{12,14}^*(x, t) $ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu grafiği	116
Şekil 4.12. (a)-(c) Örnek 4.8 için tam çözümün grafiği, yaklaşık çözüm ve WFIEM yöntemlerine ait hata grafikleri.....	117
Şekil 4.13. (a)-(f) $t = 1, 2, 3$ için Tam çözüm ve yaklaşık çözüm grafikleri.	123
Şekil 4.14. (a)-(f) $t = 1, 2, 3$ için Mutlak hata $e_4(x, y, t)$ ve iyileştirilmiş mutlak hata $e_{4,5}(x, y, t)$ grafikleri.....	125
Şekil 4.15. (a)-(b) Örnek 4.10, 2. Durum için $N = 6$ kesme sınırında $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, 10]$ uzay zaman aralığında tam çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği	129

Şekil 4.16. Örnek 4.10, 2.Durum için $(x,t) \in [0,1] \times [0,5]$ uzay zaman aralığında $N = 6$ kesme sınırında $e(x,t) = u(x,t) - u_{6,6}(x,t) $ mutlak hata grafiği.....	130
Şekil 4.17. (a)-(b) Örnek 4.10, 3. durumun $(x,t) \in [-1,1] \times [0,2]$ uzay zaman aralığında tam çözüm ve $N = 4$ için yaklaşık çözüm grafikleri ...	131
Şekil 4.18. Örnek 4.10, 3. Durumun $(x,t) \in [0,1] \times [0,2]$ uzay zaman aralığında $N = 6$ kesme sınırında $e(x,t) = u(x,t) - u_{6,6}(x,t) $ mutlak hata grafiği.....	132
Şekil 4.19. Farklı zamanlarda Örnek 4.10, 3. Durum için yaklaşık çözüm grafiği.....	132



ÇİZELGE DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 4.1. Örnek 4.1'in $N = 7, 10$ ve $M = 10, 13$ değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözümün karşılaştırılması	93
Çizelge 4.2. Örnek 4.1'in kesikleme maksimum ve RSM hatalarının, N 'in farklı değerleri için karşılaştırılması	93
Çizelge 4.3. Örnek 4.1'in $N = 12, M = 12, = 1$ için Chebyshev wavelets metodu, Bernstein Metodun mutlak hatalarının karşılaştırılması	94
Çizelge 4.4. Örnek 4.1'in 3. durumu için maksimum mutlak hataların karşılaştırılması.....	96
Çizelge 4.5. Örnek 4.2' nin $u(x_i, 1)$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması	97
Çizelge 4.6. Örnek 4.2' nin $u(x_i, 0.5)$ için yaklaşık çözümlerin aldığı değerler	98
Çizelge 4.7. Örnek 4.3, 2. Durum için N 'in farklı değerlerine karşılık hata değerlerinin karşılaştırılması	102
Çizelge 4.8. Örnek 4.3, 2. Durum için $\sigma_{N,N}$ maksimum hatasının N 'in farklı değerlerine göre diğer yöntemlerle karşılaştırılması	102
Çizelge 4.9. Örnek 4.3, 3. durumun $\sigma_{N,N}$ maksimum hatasının N 'in farklı değerlerine göre karşılaştırılması.....	103
Çizelge 4.10. Örnek 4.4'ün L_∞ maksimum hatalarının N 'in farklı değerlerine göre Legendre-Wavelet metoduyla karşılaştırılması	104
Çizelge 4.11. Örnek 4.4'ün maksimum hatalarının N 'in farklı değerleri için karşılaştırılması.....	105
Çizelge 4.12. Örnek 4.5'in L_2 mutlak ve L_∞ maksimum hataları.....	107
Çizelge 4.13. Örnek 4.6, mutlak hatasının N 'in farklı değerlerine göre diğer yöntemlerle karşılaştırılması	110
Çizelge 4.14. Örnek 4.7, $ e_{12,14}^*(x, t) $ iyileştirilmiş mutlak hatasının diğer yöntemlerle karşılaştırılması	115
Çizelge 4.15. Örnek 4.8 problemi için sunulan yönteme ait maksimum hataların karşılaştırılması	118
Çizelge 4.16. Örnek 4.9 probleminde farklı zaman aralıklarında L_∞ , L_2 ve R_e hata değerleri karşılaştırması	121
Çizelge 4.17. Örnek 4.10, 2. Durum için $N = 4$ kesme sınırında farklı hata değerleri	130
Çizelge 4.18. Örnek 4.10, 3. Duruma ait $t = 1$ için L_∞ , L_2 ve RMS hata değerleri karşılaştırması.....	132

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gsteren danışman hocam Sayın Dr.Öğr. Üyesi Gökşen BACAK TURAN' a, bilgi ve tecrübesi ile hem yüksek lisans hemde doktora öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocam Sayın Prof.Dr. Mehmet SEZER'e teőekkürü bir borç bilirim. Çalışmamın tüm aşamalarında sabırla beni destekleyen sevgili eşim Vildan SORKUN'a ve aileme minettar olduğumu belirtmek isterim.

Hüseyin Hilmi SORKUN
Manisa, 2018



ÖZET

Doktora Tezi

İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Bernstein Sıralama (Collocation) Metodu

Hüseyin Hilmi SORKUN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gökşen BACA TURAN

Bu çalışmada, genel formda ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklem problemi, başlangıç ve sınır koşullu, Neuman, Dirichlet ve karışık koşullu dalga problemi, singüler pertürbe bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon problemi, ikinci mertebeden iki uzay değişkenli lineer değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin ve Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfının yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla Bernstein sıralama yöntemi uygulanmaktadır. Sunulan yöntemde, denklemler ve koşullar sıralama noktaları ile matris formlarına getirilerek Bernstein katsayılarına sahip matris denklem sistemine indirgenir. Bu matris denklem sistemleri çözülerek Bernstein polinomlarına ait yaklaşık çözümler elde edilmektedir. Ayrıca, farklı tarz problemler için rezidü hata fonksiyonuna dayalı yöntemin hata tahmini sunulmuştur. Tahmin edilen hata fonksiyonları ile Bernstein polinom çözümlerinin iyileştirilmesi ve hataların azaltılması hedeflenmektedir.

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kısmi diferansiyel denklemlerin tarihi gelişimi, literatürde verilen kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili diğer yöntemlerden kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölümde, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili temel kavramlar ve bazı özel denklemler verilerek sınıflandırma yapılmıştır. Üçüncü bölümde, Lineer ve Lineer Olmayan değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemler için Bernstein sıralama yöntemine ait temel matris bağıntıları, çözüm yöntemi ve hata analizleri açıklanmaktadır. Dördüncü bölümde, tezde verilen problemler için nümerik örnekler verilerek sonuçlar diğer yöntemlerle karşılaştırılarak çizelge ve grafiklerle gösterilmiştir. Son olarak, metot ile ilgili sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi Diferansiyel Denklemler, Bernstein Polinomları, Bernstein Sıralama Metodu.

2018, 141 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

Bernstein Collocation Method for Numerical Solutions of Second Order Partial Differential Equations

Hüseyin Hilmi SORKUN

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gökşen BACAK TURAN

In this study, Bernstein collocation method is applied to obtain approximate solutions of second order linear partial differential equation problem in general form under Neuman, Dirichlet and mixed conditions, second order linear partial differential equation problem in general form with initial and boundary conditions, singularly perturbed one-dimensional parabolic convection-diffusion problem, two-space variable second order linear partial differential equation problem with variable coefficients and a class of nonlinear partial differential equation problem. In the presented method, equation and given conditions with the collocation points are reduced to a system of matrix equations with Bernstein coefficients putting them in the form of matrices. These matrix equations systems are solved and approximate solutions based on Bernstein polynomials are obtained. Also, the error estimation of the method, based residual error function, is presented for different types of problems. It is aimed to improve Bernstein polynomial solutions with predicted error functions and reduce errors.

This study is formed of five parts. In the first part, the history of partial differential equations, other methods related to the solution of partial differential equations, which are given in the literature are mentioned briefly. The second part deals with the preliminaries, necessary definitions and also the classification of second-order partial differential equations. In the third part describes the basic matrix relations, solution method and error analysis for Bernstein collocation method for partial differential equations with linear and nonlinear variable coefficients. In the fourth chapter, numerical examples for the problems given in the thesis are given and the results are compared with other methods and shown with the help of charts and graphs. Finally, the results related with the method are discussed.

Keywords: Partial Differential Equations, Bernstein Polynomials, Bernstein Collocation Method.

2019, 141 pages.

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematik ve analizin klasik bir dalı olan kısmi türevli denklemler, fiziksel bilimlerde ve mühendisliğin pek çok dalındaki problemlerin matematiksel modellerinde kullanılan denklemler olarak karşımıza çıkarlar. Bunun dışında matematiksel araştırmaların da canlı bir sahasıdır. Birçok ünlü matematikçi bu denklemlerle ortaya çıkan problemlerle ilgilenmişlerdir [1]. Örneğin, B. Taylor, D. Bernoulli, L. Euler ve J. D'Alambert gibi matematikçiler, titreşim teorisinde yer alan sınır değer problemleri üzerinde çalışmışlardır. Bunun yanı sıra J. P. Fourier, P. C. Laplace, A. M. Ampere, G. Boole, S. D. Poisson, J. L. Lagrange ve G. Green ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili tanım ve çözümler ortaya koymuşlardır. 19. yüzyılın başlarında Cauchy problemi sınır değer problemlerinin bir sonucu olarak kabul edilmiş, A. L. Cauchy, S. Kowalewski, J. G. Darboux ve J. Hadamard, Cauchy probleminin varlığı ve tekliği üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle, kısmi diferansiyel denklemler üzerinde yapılan çalışmalar artmıştır. Örneğin fizikte ve kimyada; ideal bir gazın dağılımının tayini, bir tüpün açık ucundan gaz geçişi, viskoelastisite (polimer), nükleer reaktör, reaktör dinamiği, elastisite teorisi, stokastik süreçler, otomatik kontrol, ısı transferi, hidrodinamik, elektrostatik, ısı akışı, dalga yayılımı olguları, akışkanlar dinamiği, kuantum mekaniği, plazma fizik, çevrebilimde yer alan nüfus modelleri ve tepkisel maddelerin yayılım hareketleri gibi problemlerin matematiksel modelleri kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilir [2-7].

Fizik ve mühendislik uygulamalarında karşılaşılan her denklem tipinin analitik çözümünü bulmak, çoğu zaman pek mümkün olmamaktadır. Kısmi diferansiyel denklemlerin de analitik çözümlerini veren metotlar sınırlıdır. Özellikle, değişken katsayılı KDD'lerin analitik çözümü, değişken katsayının varlığı sebebiyle oldukça zor bir problemdir. Bu nedenle yaklaşık çözüm yöntemlerine gerek duyulur ve bu tür yöntemlerle elde edilen çözümlerde hata ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla pratik ve kullanışlı olmanın yanında en iyi yaklaşımı veren çözüm yöntemleri aranır. Analitik çözümün kolaylıkla bulunamadığı denklemlerde yaklaşık çözüm için birçok yöntem denenmiştir. En çok karşılaşılan yöntemler aşağıda verilmiştir.

- *Sonlu farklar*: Bilinen en kolay yöntemlerden birisidir; dolayısıyla ilk tercih edilen yöntemdir. $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ve $u \in C^{n+1}(\Omega)$ olmak üzere, $u(x, y)$ çözüm fonksiyonuna, $u(x, y)$ 'nin düğüm noktalarındaki türevleri vasıtasıyla yaklaşılır. Bu metotta bölge, düğüm noktaları (x_i, y_j) aracılığıyla $N \times T$ noktadan oluşan alt bölgelere bölünür. Burada,

$$x_i = i\Delta x, \Delta x = (b-a) / N, i = 0, 1, \dots, N$$

ve

$$y_j = j\Delta y, \Delta y = (d-c) / T, j = 0, 1, \dots, T$$

şeklindedir. Diferansiyel denklemdeki türevlere her bir düğüm noktasında uygun sonlu fark yaklaşımları ile yaklaşılır. Bu metotta, düşük dereceli polinomlarla yaklaşım yapıldığı için, doğruluğu düşük çözümler elde edilir. Yöntemin dezavantajı, düzgün olmayan bölgelerde oldukça karmaşık hale gelmesidir [8].

- *Sonlu elemanlar*: Kompleks bölgelerde uygulanabilen, geniş teorisi olan popüler yöntemlerden birisidir. Gerek sonlu elemanlar gerekse sonlu farklar metodunda düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyetinin arttığı bilinmektedir. Problemin tanım bölgesi Ω , \mathbb{R}^2 de sınırlı bölge ve sınırı, $\partial\Omega$ düzgün olsun. Bölge, üçgenler, dörtgenler veya çokgenlerden oluşan alt bölgelere ayrılır. Her bir alt bölgede seçilen parçalı polinom şeklindeki baz fonksiyonları ile problemin yaklaşık çözümünün

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^N a_i(y)\phi_i(x)$$

olduğu kabul edilir. Burada $\phi_i(x)$ ler sıfırdan farklı bilinen parçalı fonksiyonlar ve $a_i(y)$ ler bilinmeyen fonksiyonlardır. Yaklaşık çözümün problemde yerine yazılmasıyla kısmi diferansiyel denklem ve koşullar, adi diferansiyel denklem sistemine ya da lineer denklem sistemine dönüşür. Bu sistemler çözülerek, verilen bölgede kısmi diferansiyel denklemin belirli koşullar altında çözümü bulunur [8]. Metodun en büyük dezavantajı, düşük dereceli polinomlarla yaklaşım yapılmasından dolayı, çözümün doğruluğunun da düşük olmasıdır. Doğruluğu arttırmak için ek bazı

işlemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Metodun günümüzde çok kullanılmasına sebep olan en büyük avantajı, düzgün olmayan yüzeylerde verilen problemlerde (araba, uçak, petrol boru hattı, vb.), bölge üçgensel veya dörtgensel küçük alt aralıklara bölünerek çözümün kolaylıkla bulunabilmesine olanak sağlamasıdır. Sonlu elemanlar metodunun diğer önemli bir avantajı da, diferansiyel denklemin, sadece seçilen alt aralıkta kullanılan baz fonksiyonunun sıfırdan farklı olmasından dolayı; matris denklemine dönüşüyor olmasıdır [9].

- *Spektral yöntemler*: Bazı kısmi diferansiyel denklemlerin periyodiklik özelliklerinden yararlanılarak çözüm yapan bir sayısal yöntemdir. Bu metotta $u(x,t)$ çözüm fonksiyonuna, $\varphi_{r,s}(x,t)$ baz fonksiyonundan oluşan

$$u(x,t) \approx u_{N,N}(x,t) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} \varphi_{r,s}(x,t)$$

kesilmiş seri açılımları ile yaklaşılır. $(a_{r,s})$ spektral katsayıları bulunarak çözüm fonksiyonu elde edilir. Diğer metotlarından ayıran en belirgin özelliği tanım bölgesinin tamamında geçerli, sıfırdan farklı, yüksek dereceden bir polinomla yaklaşık çözümün bulunmasıdır. Polinomun derecesini istenilen büyüklükte seçilebilmesinden dolayı, metodun doğruluğu yüksektir [9].

- *Çizgiler yöntemi (method of lines)*: Bir kısmi diferansiyel denklemde bulunan değişkenler kesikli hale getirilerek çözüm yapılan bir sayısal yöntemdir.
- *Çok kafesli yöntemler (Multigrid methods)*: Daha çok eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir tekniktir. Diferansiyel denklemleri kesikli duruma getirerek çözüm yapan bir tekniktir. Yöntemdeki mantık, extrapolasyon yöntemine benzemektedir.
- *Meshless methods*: Son çalışmalarda KDD'lerin çözümünde kullanılan tekniklerden biridir. Çözümü araştırılan bir problemi kafeslere bölmenin getireceği dezavantajları ortadan kaldıran bir tekniktir.
- *Bölgesel ayrıştırma yöntemleri (Domain decomposition methods)*: Sınır değer problemlerini, alt bölgelerde sınır değer problemlerine bölerek çözüm yapan bir yöntemdir [10].
- *Pseudospektral (collocation) yöntemi*: Ω problemin tanım bölgesi, $\partial\Omega$ bölgenin sınırı, iç çarpım (\cdot, \cdot) ve norm $\|\cdot\|$ ile tanımlı Hilbert uzayı \mathcal{H} , \mathcal{H}' 'nin

n -boyutlu alt uzayı \mathcal{B}_N , projeksiyon operatörü P_N olmak üzere, Ω bölgesindeki x_1, x_2, \dots, x_N ile gösterilen N noktaya collocation (sıralama) noktaları denir. \mathcal{B}_N yaklaşım uzayındaki $n=1, 2, \dots, N$ için baz fonksiyonu, $\phi_n(x)$ olsun. Burada $\det \phi_n(x_m) \neq 0$ şeklindedir. Bu durumda her $u \in \mathcal{H}$ için yaklaşık çözüm

$$P_N u = \sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x)$$

şeklinde olacaktır ve $a_n(t)$ katsayıları,

$$\sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

denkleminde elde edilen katsayılardır. $P_N u \in \mathcal{B}_N$ için collocation (sıralama) metodu $P_N u(x_i) = u(x_i)$ özdeşliği ile karakterize edilir. Bu metotta, dikkat edilirse sıralama metodunun sonuçları, hem x_n noktalarına hem de $\phi_n(x)$ fonksiyonlarına bağlıdır. Baz fonksiyonunun $T_n(x)$, birinci tip Chebyshev polinomları seçilmesi durumunda metot, Chebyshev sıralama metodu olarak adlandırılır [26].

Pseudo spektral metot dışında kısmi diferansiyel denklemleri sıralama noktalarıyla çözen başka metotlar da vardır. Bunlardan bazıları, karışık koşullar altında yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri Taylor ve Chebyshev polinomlarına dayalı olarak çözen matris metodudur [10-12].

Bu tez çalışmasındaki amaç, ikinci mertebeden bir boyutlu ve iki boyutlu diferansiyel denklemler ile bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için geliştirmek, uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu kesimde, Bernstein polinomlarının tarih içerisindeki kullanımı hakkında bilgi ve çalışmada kullanılan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilecektir. Ayrıca Kısmi Diferansiyel Denklemlerin sınıflandırılması yapılarak, çalışmalarda çokça karşılaşılan denklemler tanıtılacak ve uygulama koşulları anlatılacaktır.

2.1. Bernstein Polinomlarının Tarihçesi

Matematiğin yaklaşımlar teorisi, olasılık teorisi, sayılar teorisi gibi birçok dalında Bernstein polinomları önemli uygulamalara sahiptir. Sade bir yapısı ve önemli özellikleri olduğundan Bernstein polinomlarının kullanımı oldukça yaygındır.

Karl Weierstrass (1815-1897); Weierstrass Teoremi olarak bildiğimiz teoreminde; kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona, yeterince büyük dereceli polinomlar kullanılarak düzgün yakınsanabileceğini ileri sürmüştür.

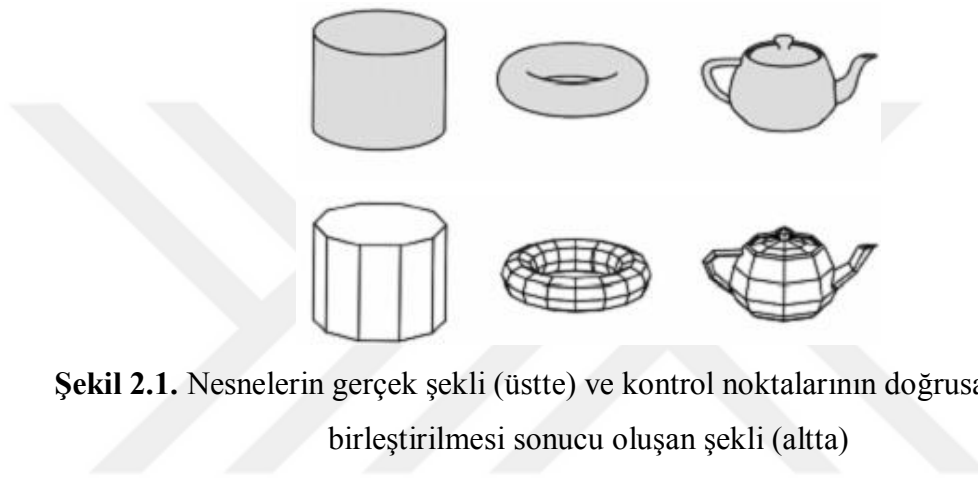
Weierstrass Teoremi uygulamalı matematikteki en önemli teoremlerden biridir. Çünkü polinomlar verilen her aralıkta sürekli olan; kolaylıkla türevi ve integrali alınabilen fonksiyonlardır. Dolayısıyla verilen bir aralıkta sürekli herhangi bir fonksiyonu polinom fonksiyona çevirmek, bu fonksiyonla yapılabilecek hesaplamalarda çok büyük kolaylıklar sağlar.

Weierstrass Teoreminin günümüze gelene kadar birçok ispatı yapılmıştır. Bu ispatlardan birini de Ukraynalı Matematikçi **Sergei Natanovic Bernstein** (1912), kendi adını verdiği Bernstein Polinomları'nı kullanarak yapmıştır. Weierstrass Teoreminde yalnızca kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona yaklaşım sağlayan polinom bulunabileceği ifade edilir. Bernstein ise bundan farklı olarak, fonksiyona yaklaşım sağlayan polinomun, fonksiyonla ilişkisini ortaya koymuştur.

Bernstein polinomları olarak bilinen bu polinomlar birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Örneğin *T. Popoviciu*, $B_n f - f$ farkının $n \rightarrow \infty$ iken sıfıra

yaklaşma hızını bulmuştur. *Voronovskaya*, bu yaklaşma için asimptotik eşitlik ispatlamıştır. $B'_n(f;x)$ polinomlarının f türevlenebilir olduğunda f' fonksiyonuna yaklaşması ve başka problemler incelemiştir.

Birçok nesne grafiksel olarak kavisler içerir, her zaman doğru çizgilerden oluşmaz. Bu kavisli nesnelerin bilgisayar ortamına aktarımında kontrol noktaları kullanılır. Ancak bu kontrol noktaları doğrusal fonksiyonlarla birleştirildiğinde nesne gerçekte görüldüğü gibi görünmez (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Nesnelerin gerçek şekli (üstte) ve kontrol noktalarının doğrusal çizgilerle birleştirilmesi sonucu oluşan şekli (altta)

Nesnelerin görüntülerini, gerçek görüntülerine benzetmek için belirlenen kontrol noktalarından geçen *Bézier Eğrileri* kullanılır. Bézier eğrileri Fransız mühendis olan **Pierre Bézier** (1910-1999) tarafından otomobil tasarımında kullanmak amacıyla geliştirilmiştir. Bézier eğrilerinin sahip olduğu özellikler, onları eğri ve yüzey tasarımında bir hayli kullanışlı ve uygun hale getirmektedir. Bernstein polinomları Bézier eğrilerinin temelini oluşturur [13].

İlk olarak bu çalışmanın çıkış noktası olan 1885 yılına ait *Weierstrass Yaklaşım Teoremi*'ni, düzgün yakınsaklık tanımını ve Lineer Operatör tanımını verelim:

Teorem 2.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi) $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan, yeterince büyük dereceden bir $P_n(x)$ polinomu bulunabilir [14];

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.1)$$

Tanım 2.1. (Düzgün Yakınsaklık) E reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda; $\forall x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa, (f_n) fonksiyon dizisine E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir [15].

Tanım 2.2. (Lineer Operatör) $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, X fonksiyon uzayında herhangi iki fonksiyon a ve b keyfi reel sayılar olmak üzere L operatörü;

$$L(af_1 + bf_2; x) = aL(f_1; x) + bL(f_2; x) \quad (2.2)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne *lineer operatör* denir [16].

Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Bu açıdan Bernstein polinomları Weierstrass teoreminde adı geçen $P_n(x)$ polinomuna bir örnektir. Diğer yandan bir f fonksiyonunun süreklilik modülü tanımlanmış ve süreklilik modülü yardımıyla Bernstein polinomlar dizisinin f fonksiyonuna yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Tanım 2.3. (Süreklilik Modülü) $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$w(\delta) = w(f; \delta) = \sup_{\substack{x, y \in I \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f 'nin **süreklilik modülü** denir. w , δ 'nın bir fonksiyonu durumundadır.

2.2. Temel Bernstein Polinomları

Tanım 2.4. (Temel Bernstein Polinomları)

$t \in [0,1]$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ ve $i = 0,1,2,\dots,n$ olmak üzere;

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan polinomlara *n.dereceden Temel Bernstein Polinomları* denir. *n.dereceden* *n+1* tane temel Bernstein polinomudur. Matematiksel uygunluk açısından $i < 0$ ve $i > n$ için $B_{i,n}(t) = 0$ olarak kabul edilir [17].

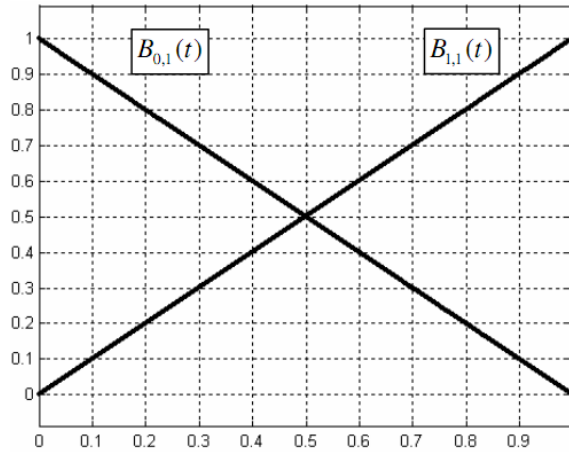
Sıfırıncı dereceden temel Bernstein polinomu;

$$B_{0,0}(t) = 1.$$

Birinci dereceden temel Bernstein polinomları;

$$B_{0,1}(t) = 1-t, \quad B_{1,1}(t) = t.$$

$0 \leq t \leq 1$ için grafiği;

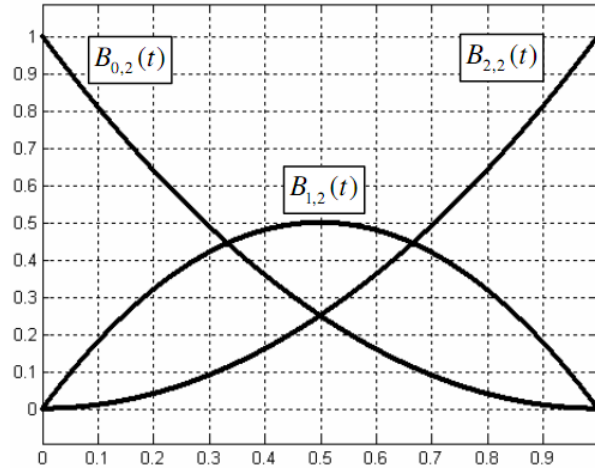


Şekil 2.2. 1.dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği

İkinci dereceden temel Bernstein polinomları;

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2, \quad B_{1,2}(t) = 2t(1-t), \quad B_{2,2}(t) = t^2$$

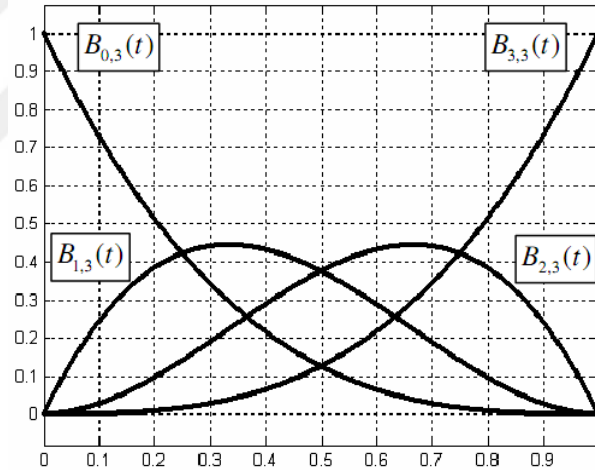
$0 \leq t \leq 1$ için grafiği;



Şekil 2.3. 2.dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği

Üçüncü dereceden temel Bernstein polinomları;

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3.$$



Şekil 2.4. 3.dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği

Teorem 2.2. Temel Bernstein polinomları simetriktir. Yani (2.3) eşitliği için;

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t) \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.3. (Yineleme Bağıntısı) n . dereceden temel Bernstein polinomları, $(n-1)$. dereceden iki temel Bernstein polinomunun lineer birleşimi

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir [17].

İspat: Tanım 2.1.'den;

$$\begin{aligned} (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) &= (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-1-(i-1)} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= B_{i,n}(t). \end{aligned}$$

Teorem 2.4. Temel Bernstein polinomları pozitif tanımlıdır.

$$B_{i,n}(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.6)$$

Teorem 2.5. n . dereceden $n+1$ tane temel Bernstein polinomunun toplamı, $(n-1)$. dereceden n tane temel Bernstein polinomunun toplamına eşittir.

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t). \quad (2.7)$$

İspat: Teorem 2.3.'deki $B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) &= \sum_{i=0}^n [(1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)] = (1-t) \left[\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) + B_{i,n-1}(t) \right] + t \left[\sum_{i=0}^{n-1} B_{i-1,n-1}(t) + B_{i-1,n-1}(t) \right] \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} B_{i-1,n-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t). \end{aligned}$$

Teorem 2.6. n . dereceden $n+1$ tane temel Bernstein polinomunun toplamı 1'dir.

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1. \quad (2.8)$$

Teorem 2.7. n . dereceden temel Bernstein polinomlarının türevleri $(n-1)$. dereceden temel Bernstein polinomlarının lineer birleşimi,

$$\frac{d}{dt} B_{k,n}(t) = n [B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)], \quad 0 \leq k \leq n. \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir [17].

2.3. Bernstein Polinomları

Tanım 2.5. f , $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon, n keyfi bir doğal sayı ve $x \in [0,1]$ olmak üzere;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (2.10)$$

biçimindeki polinomlara n . dereceden Bernstein polinomları denir [18].

Teorem 2.8. $[0,1]$ aralığının uç noktalarında f fonksiyonu ile f 'e yaklaşım sağlayan n . dereceden Bernstein polinomu aynı değeri alır.

$$B_n(f; 0) = f(0) \quad B_n(f; 1) = f(1) \quad (2.11)$$

İspat: $B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$= f\left(\frac{0}{n}\right) \binom{n}{0} x^0 (1-x)^{n-0} + f\left(\frac{1}{n}\right) \binom{n}{1} x^1 (1-x)^{n-1} + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \binom{n}{n} x^n (1-x)^{n-n}$$

$$= f(0) \binom{n}{0} (1-x)^{n-0} + f\left(\frac{1}{n}\right) \binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + \dots + f(1) \binom{n}{n} x^n \quad (2.12)$$

$x=0$ için (2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim hariç bütün terimler x çarpanından dolayı sıfırdır.

$$B_n(f;0) = f(0)$$

$x = 1$ için (2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki $(n+1)$. terim hariç bütün terimler $(1-x)$ çarpanından dolayı sıfırdır.

$$B_n(f;1) = f(1)$$

Teorem 2.9. Bernstein polinomları ileri fark operatörü kullanılarak,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(0) x^k \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir [18].

Teorem 2.10. Bernstein polinomları lineer operatörlerdir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } B_n(af_1 + bf_2;x) &= \sum_{k=0}^n (af_1 + bf_2) \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left[(af_1) \binom{k}{n} + (bf_2) \binom{k}{n} \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left[(af_1) \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + (bf_2) \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n (af_1) \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n (bf_2) \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^n f_1 \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + b \sum_{k=0}^n f_2 \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= a B_n(f_1;x) + b B_n(f_2;x) \end{aligned}$$

olduğundan Bernstein polinomları lineer operatördür.

Ayrıca $\forall x \in [0,1]$ ve $k \in 0,1,2,\dots,n$ için $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her pozitif f fonksiyonu için $B_n(f;x)$ pozitif olur. Bu da Bernstein polinomlarının lineer pozitif operatör olduklarını gösterir.

Yardımcı Teorem (Leibniz Kuralı): İki fonksiyonun çarpımının k . dereceden türevi

$$\frac{d^k}{dx^k}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{d^r}{dx^r} f(x) \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}} g(x) \quad (2.14)$$

şekilde ifade edilebilir [19].

Teorem 2.11. $\forall k \geq 0$ tamsayısı için $B_n(f; x)$ 'in k . dereceden türevi $n \geq 0$ ve

$$h = \frac{1}{n+k} \text{ olmak üzere}$$

$$B_{n+k}^{(k)}(f; x) = \frac{(n+k)!}{n!} \sum_{r=0}^k \Delta^k f\left(\frac{r}{n+k}\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \quad (2.15)$$

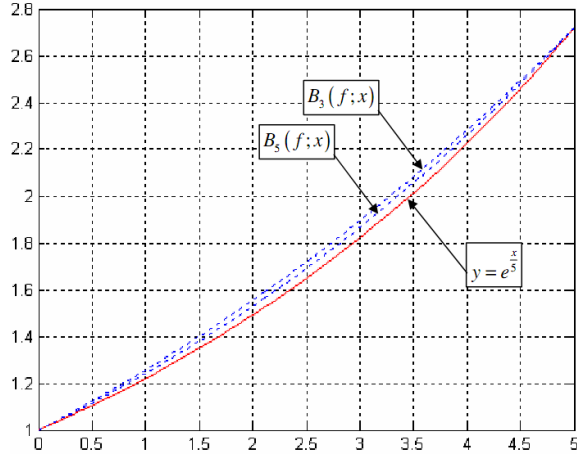
şeklinde yazılabilir [19].

Örnek 2.1. $y = e^{x/5}$ fonksiyonuna $[0,5]$ aralığında yaklaşım sağlayan 3. ve 5. dereceden Bernstein polinomlarının yaklaşımı ile aynı aralıktaki B-Spline fonksiyonunun yaklaşımını karşılaştıralım.

f fonksiyonuna yaklaşım sağlayan 3. ve 5. dereceden Bernstein polinomu;

$$B_3(f; x) = \frac{1}{125}(5-x)^3 + \frac{288844425499503}{11258999068426240}(5-x)^2 x \\ + \frac{964865943417237}{35184372088832000}(5-x)x^2 + \frac{5500709006519437}{562949953421312000}x^3$$

$$B_5(f; x) = \frac{1}{3125}(5-x)^5 + \frac{2929621884260023}{1759218604441600000}(5-x)^4 x \\ + \frac{1524591010723819}{439804651110400000}(5-x)^3 x^2 + \frac{1269448600158571}{351843720888320000}(5-x)^2 x^3 \\ + \frac{660627890164242}{351843720888320000}(5-x)x^4 + \frac{1269448600158571}{351843720888320000}x^5$$



Şekil 2.5. $y = e^{x/5}$ fonksiyonunun ve ona yaklaşım sağlayan 3. ve 5. Dereceden Bernstein polinomlarının grafikleri

Tablo 2.1. Verilen x değerleri için $y = e^{x/5}$ fonksiyonunun ve ona yaklaşım sağlayan B-Spline fonksiyonu ile 3. ve 5. dereceden Bernstein polinomlarının değerleri

x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
$y = e^{x/5}$	1.1052	1.34991	1.6487	2.0138	2.4596
$S(x)$ (B-Spline)	1.1054	1.34971	1.6489	2.0136	2.4598
$B_3(f; x)$	1.1053	1.34971	1.6490	2.0140	2.4597
$B_5(f; x)$	1.1052	1.34981	1.6488	2.0139	2.4597

2.4. Polinomlarla Yaklaşım

Nümerik analizin temel konularından biri, verilen fonksiyona daha basit bir polinomla yaklaşımdır. Genel olarak, fonksiyon ve türevlerine en uygun olan polinom aranır. f fonksiyonunun a noktası civarında n . mertebeden türevleri mevcut ve

$$p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), \dots, p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

biçiminde $(n+1)$ eşitlik sağlanıyorsa $\leq n$ dereceden bir polinom yaklaşımı vardır ve bu

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

biçiminde verilen Taylor polinomudur. Bu polinom yaklaşımı için $E_n(x) = f(x) - p(x)$ fonksiyonu hatayı verir. Hata fonksiyonu aynı zamanda, f fonksiyonu, $(n+1)$. mertebeden sürekli türetilbilir bir fonksiyon olmak üzere

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^{\infty} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)}, \quad c \in (a, x)$$

formunda da ifade edilir.

f fonksiyonuna farklı şekillerde de polinom yaklaşımı söz konusudur. Örneğin, $(n+1)$ ayrık noktada polinom ve fonksiyonun eşitliğinden yola çıkarak bir yaklaşım yapılabilir ki bu yaklaşıma literatürde interpolasyon yaklaşımı denilmektedir. Bu ayrık noktalar x_0, x_1, \dots, x_n olmak üzere

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad \dots, \quad p(x_n) = f(x_n)$$

eşitliklerini gerçekleyen $\leq n$ dereceden bir polinom aranır. Bu polinom

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

şeklinde olduğu düşünülürse, bilinmeyenleri a_0, a_1, \dots, a_n katsayıları olan $(n+1)$ denklemden oluşan lineer denklem sisteminin çözümü bulunacaktır. Lineer denklemler teorisinden bu sistemin tek çözümünün olduğu gösterilebilirse, bu polinomun daima var olduğu sonucuna ulaşılır [10].

Bir başka polinom yaklaşımı en küçük kareler yöntemidir. Verilen fonksiyon $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b |f(x) - p(x)|^2 dx$$

ifadesinin değeri mümkün mertebe küçük olacak şekilde $\leq n$ bir polinom bulunur. Bu polinomun varlığı ve teklifi ispatlanmıştır [20].

Polinom yaklaşımda temel problem: R , $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı, S ise $\leq n$ polinomları içeren bu uzayın alt uzayı olsun. R uzayında tanımlanmış bir norm için

$$\|f - p\| \leq \|f - Q\|$$

eşitsizliği S uzayındaki tüm Q polinomları için gerçekleşiyorsa p polinomuna f fonksiyonun en iyi yaklaşımı (*Best polynomial approximation*) denir. Buradaki “en iyi” kavramı seçilen norma bağlıdır. Bir norm için en iyi olan, diğer bir norm için iyi olmayabilir. Normun seçilişinde üç temel problem göz önünde bulundurulur.

- *Varlık:* R de verilen f fonksiyonu için belirlenen derecede en iyi yaklaşımı veren polinom var mıdır?
- *Teklik:* En iyi yaklaşımı veren polinom varsa tek midir?
- *Yapısı:* Böyle bir yaklaşım var ve tek ise nasıl belirlenir?

Bununla birlikte, tek ve en iyi polinom bulunabilirse $\|f - p_n\|$ için bir üst sınır bulunabilir mi? ve $\|f - p_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ gerçekleşiyor mu? gibi farklı problemlerle karşılaşılır.

2.5. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.6. İçinde en az iki bağımsız değişken ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere bir kısmi diferansiyel denklem denir. u bağımlı değişken, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

şeklindedir.

Bir Kısmi Diferansiyel denklemin Sınıflandırılması:

Tanım 2.7. Bir kısmi diferansiyel denklemdeki bağımlı değişkenin en yüksek basamaktan türevine *mertebe*, en yüksek mertebeden türevin derecesine de kısmi diferansiyel denklemin *derecesi* denir.

Tanım 2.8. Eğer bir kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişkenlere ve onun kısmi türevlerine göre 1. dereceden ve katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenlerin keyfi fonksiyonları ise bu kısmi diferansiyel denkleme *lineer kısmi diferansiyel denklem* denir.

$$u_{xxx} - u_y = 0 \quad (3. \text{mertebe, 1. derece, lineer KDD})$$

$$(u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 = 0 \quad (3.\text{mertebe, 2. derece, lineer olmayan KDD})$$

Tanım 2.9. Eğer bir kısmi diferansiyel denklemde, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlere göre (1. dereceden) lineer ise denkleme *yarı lineer kısmi diferansiyel denklem* denir. Yarı lineer kısmi diferansiyel denklemlerde, daha düşük mertebeli kısmi türevlerin ve bağımlı değişkenlerin bir önemi yoktur.

$$u_{xx} + (u_y)^2 = 0 \quad (2. \text{mertebe, 1. derece, yarı lineer KDD})$$

$$x.z_x - y.z_y = \sin x \quad (1. \text{mertebe 1. derece, lineer, yarı lineer KDD})$$

$$uu_y u_{xxx} + u_{yy} = \sin u \quad (3. \text{mertebe, 1. derece, lineer olmayan, yarı lineer değil})$$

$$\left. \begin{aligned} wv_x + vw_y &= x + y \\ v v_x + w w_y &= x - y \end{aligned} \right\} \quad (1. \text{mertebe, 1. derece, lineer, yarı lineer değil})$$

Tanım 2.10. Eğer bir kısmi diferansiyel denklem yarı lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin keyfi fonksiyonları ise bu kısmi diferansiyel denkleme *hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklem* denir [28].

$$x(u_{tt})^2 + t(u_{yy}) + u^3(u_t)^2 = 0$$

(2. mertebe, 1. derece, yarı lineer, hemen hemen lineer)

2.6. İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

u bağımlı değişken, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere, ikinci mertebe değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem en genel haliyle

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G(x, y)$$

olarak gösterilir. İkinci mertebe lineer diferansiyel denklemler

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

değerlerine göre aşağıdaki şekilde sınıflandırılırlar [27]:

- $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda denklem *hiperbolik*,
- $\Delta(x, y) = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda denklem *parabolik*,
- $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda denklem *eliptik*.

Sınıflandırmanın esası, ikinci mertebe kısmi diferansiyel denklemin kanonik formlarını elde etmeye dayanır. Bu amaçla ikinci mertebe kısmi diferansiyel denklem

$$Ar + Bs + Ct + f(x, y, u, p, q) = 0 \quad (2.16)$$

formunda yazılır. Burada $u_x = p$, $u_y = q$, $u_{xx} = r$, $u_{xy} = s$ ve $u_{yy} = t$ olarak tanımlanmıştır. L diferansiyel operatörü

$$L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

olmak üzere, (2.16) denklemi $L(u) + f(x, y, u, p, q) = 0$ şeklinde yazılıp, x ve y bağımsız değişkenleri yerine ξ ve η alınırsa, $\xi = \xi(x, y)$ ve $\eta = \eta(x, y)$ için $u(x, y)$ ifadesi $\zeta(\xi, \eta)$ olarak yazılır ve buradan (2.16) denklemi

$$R(\xi_x, \xi_y) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + 2S(\xi_x, \xi_y; \eta_x, \eta_y) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} - R(\eta_x, \eta_y) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = T(\xi, \eta, \zeta, \zeta_\xi, \zeta_\eta) \quad (2.17)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$R(u, v) = Au^2 + Buv + Cv^2 \quad (2.18)$$

$$S(u_1, v_1; u_2, v_2) = Au_1u_2 + \frac{1}{2}B(u_1v_2 + u_2v_1) + Cv_1v_2$$

ve T fonksiyonu da, verilen f fonksiyonundan türetilen fonksiyondur. (2.17) denklemindeki ξ ve η değerlerini belirleme probleminde, (2.18) denkleminin $B^2 - 4AC$ şeklindeki kuadratik formu oldukça kolaylık sağlar. Buna göre, (2.17) denkleminin kanonik formları;

- $B^2 - 4AC > 0$ olması durumunda

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \phi(\xi, \eta, \zeta, \zeta_\xi, \zeta_\eta),$$

- $B^2 - 4AC = 0$ olması durumunda

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = \phi(\xi, \eta, \zeta, \zeta_\xi, \zeta_\eta),$$

- $B^2 - 4AC < 0$ olması durumunda, $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ ve $\beta = \frac{1}{2}i(\eta - \xi)$ için

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} = \phi(\alpha, \beta, \zeta, \zeta_\alpha, \zeta_\beta)$$

olur. (2.17) denklemi yukarıdaki kanonik formlara göre sınıflandırılırsa

- $B^2 - 4AC > 0$ için hiperbolik
- $B^2 - 4AC = 0$ için parabolik
- $B^2 - 4AC < 0$ için eliptik

olarak adlandırılır [27].

Hiperbolik, parabolik, eliptik tip denklemler, birçok fiziksel olayın modellenmesinde ortaya çıkan denklemlerdir. Bunlardan en çok karşılaşılan ve literatürde önemli yeri olan denklemlere bazı örnekler şu şekildedir.

Hiperbolik denklemler

Hiperbolik tip denklemler, literatürde genellikle, mekanik ve fizik alanlarındaki uygulamalarda ortaya çıkmaktadır. Özellikle binaların ve makinelerin titreşimi problemleri, elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisindeki modeller, bu tip denklemlerdir. Hiperbolik tip denklemlerin en bilineni dalga denklemdir. Bunun dışında Klein-Gordon ve telgraf denklemleri de sıklıkla karşılaşılan hiperbolik denklemlerdendir [27].

Dalga denklemi: c fiziksel bir sabit olmak üzere, bir boyutlu homojen dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.19)$$

ve bir boyutlu homojen olmayan dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \quad (2.20)$$

şeklinindedir. (2.19) ve (2.20) denklemlerinde x değişkeni, yer ve t değişkeni, zamanı göstermektedir. c , pozitif bir sabittir. F de dalgaya etki eden bilinen bir dış kuvveti temsil etmektedir. Dalga denklemi en çok elektromagnetik, akışkanlar mekaniği ve akustik alanındaki uygulamalarda ortaya çıkar.

Klein-Gordon denklemi: c ve b fiziksel sabitler ve $b > 0$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu$$

olarak verilen denkleme Klein-Gordon denklemi denir. Kuantum teorisinde uygulamalarına rastlanmaktadır.

Telgraf denklemi: Elektrik dolaşımının olduğu bir sistemde, x konumunda ve t anında voltaj ve akım hesaplamalarında uygulaması olan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, \quad k > 0, \quad b < 0$$

ile verilen denkleme Telgraf denklemi denir. Bu tip denklemler, telgraf kablolarında, radyo frekans iletiminde ve yüksek voltaj enerji iletiminde kullanılır.

Parabolik denklemler

Parabolik tip denklemlerle, fizikte bir katı cisim içinde ya da homojen bir ortam içinde, ısının iletiminin incelenmesi problemlerinde sıklıkla karşılaşılır. Bu nedenle, en çok karşılaşılan parabolik tip denklem ısı denklemidir [29].

Isı Denklemi: k pozitif ısı yayılım katsayısı, $u = u(x, t)$, x noktasında t zamanındaki sıcaklık olmak üzere, zamana bağlı ısı yayılımını gösteren bir boyutlu homojen ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ve bir boyutlu homojen olmayan ısı denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

olarak verilir. Isı yayılımı probleminde başlangıç anındaki iletkenin sıcaklık değeri bilindiğinden ve ayrıca bazı problemlerde ısı iletimi iletkenin bir ucundan başladığından ya da bittiğinden sınır değerlerinde bazı koşullar tanımlanmıştır. Bu nedenle ısı denklemi, başlangıç-sınır değer problemleriyle birlikte tanımlanırlar [29].

Eliptik denklemler

Eliptik tip denklemler, $u(x, y)$ fonksiyonun Laplacian'ı

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

olmak üzere,

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{Laplace denklemi})$$

$$\nabla^2 u = f(x, y) \quad (\text{Poisson denklemi})$$

$$\nabla^2 u + f(x, y)u = g(x, y) \quad (\text{Helmholtz denklemi})$$

ile ifade edilen denklemlerdir. Çoğunlukla, denge ve kararlı hal problemlerinde bu tür denklemlerle sıklıkla karşılaşılır. Uygulamalarda en çok karşılaşılan eliptik tip denklemler, Laplace ve Poisson tipi denklemlerdir. Bu denklemler ile ilgili sınır-değer problemleri, hidrodinamik, aerodinamik, ısı transferi, elastisite teorisi ve elektrostatik gibi alanlarda ortaya çıkarlar [29].

Laplace denklemi: Potansiyel teorisinin temel denklemi,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ile verilen Laplace denklemidir. Bu denklemle, en çok, zamandan bağımsız problemlerde, verilen bölgede ısının kararlı yayılımı, ısı kaynağı olmayan bir bölgede kararlı sıcaklık dağılımı, iletkenlerle çevrili yüksüz bir bölgede elektrostatik potansiyel, bir akışkanda hız dağılımı vs. problemlerinde karşılaşılır [30]

Poisson denklemi:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

eşitliğiyle verilen Poisson denklemine, ısının kararlı yayılımı problemlerinde rastlanır. $f(x, y) \neq 0$ olması hali, problemde bir ısı kaynağının varlığını gösterir. Bundan başka dış kuvvetlerin etkisi altındaki bir telin zamana bağlı olarak denge konumuna gelmesi de poisson denklemi ile gösterilir.

Kısmi diferansiyel denklemler çoğunlukla fizik, mühendislik ve doğa olaylarının modellenmesinden elde edildiğinden problemin çözümü, problemin tanımlandığı ortamın şartlarına göre değişebilmektedir. Bu nedenle, kısmi diferansiyel denklemler, birtakım başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte aşağıdaki gibi sınıflandırılabilirler.

2.7. Başlangıç Değer Problemi (Cauchy Problemi)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.21)$$

denklemleri ile bağlantılı olan temel problem, başlangıç değer problemi yada Cauchy problemi olarak adlandırılır. Bu problem, (2.21) denklemini ve verilen

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) &= \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan $u(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ çözümünün aranması problemidir. ϕ ve ψ fonksiyonları, $y=0$ da x -uzayında tanımlanmış, bilinen fonksiyonlardır. ϕ ve ψ ye başlangıç verileri denir. C^{n+1} , (x, y) uzayında $y=0$ düzlemi, problemin başlangıç yüzeyi veya başlangıç manifoldu olarak adlandırılır [21].

Daha özel olarak, Cauchy problemi aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

Tanım 2.11. x, y bağımsız değişkenlerine bağlı bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu için ikinci mertebe en genel bir kısmi diferansiyel denklem göz önüne alınsın ve denklemin

$$t = F(x, y, u, p, q, r, s) \quad (2.22)$$

şeklinde $u_{yy} = t$ türevine göre çözülebildiği varsayalım. Bir $y = y_0$ değeri için bilinmeyen fonksiyon ve onun y 'ye göre türevi,

$$\begin{aligned} u(x, y_0) &= f(x) \\ u_y(x, y_0) &= g(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

olarak tanımlanırsa, (2.22) denkleminin (2.23) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, (2.22) denklemleri için Cauchy problemi denir. Burada $u_x = p$, $u_y = q$, $u_{xx} = r$, $u_{xy} = s$, $u_{yy} = t$ olarak tanımlanmıştır [22].

Fiziksel uygulamalarda y bağımsız değişkeni genellikle zamanı gösterir ve (2.23) koşullarında $y_0 = 0$ olması durumunda probleme başlangıç değer problemi denir.

Açıkça başlangıç değer problemi Cauchy probleminin özel bir halidir. (2.22) ve (2.23) denklemleriyle verilen Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için F , f ve g fonksiyonları üzerine bazı koşulların yüklenmesi gerekmektedir. Bu amaçla aşağıdaki Cauchy-Kowalewski teoremi verilmiştir.

Teorem 2.12. (Cauchy-Kowalewski Teoremi) Eğer F fonksiyonu,

$$u_0 = f(x_0), \quad p_0 = f'(x_0), \quad q_0 = g(x_0), \quad r_0 = f''(x_0) \quad \text{ve} \quad s_0 = g'(x_0)$$

olmak üzere, $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0, r_0, s_0)$ noktası komşuluğunda x, y, u, p, q, r, s değişkenlerinin ve x_0 noktası komşuluğunda f ve g de, x değişkeninin analitik fonksiyonları ise, (2.22) - (2.23) Cauchy probleminin (x_0, y_0) noktası komşuluğunda analitik olan bir ve yalnız bir $u = u(x, y)$ çözümü vardır [23].

İkinci mertebeden lineer bir kısmi türevli denklemin önceden verilmiş başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması, hiperbolik tipten denklemler için genellikle mümkündür. Hiperbolik olmayan denklemler için de böyle bir problem çözülebilir. Ancak elde edilen çözüm, başlangıç verileriyle sürekli bir şekilde uyumlu olmayabilir. Yani, başlangıç verilerindeki küçük bir değişiklik, çözümün çok büyük oranda değişmesine sebep olabilir. Bundan dolayı, Cauchy probleminin veya başlangıç değer probleminin esas olarak uygulandığı denklemler hiperbolik tiptendir. Parabolik denklemlerle de başlangıç değer probleminin tanımlandığı durumlar vardır. Bununla beraber eliptik denklemler için genellikle sınır koşulları verilir [24].

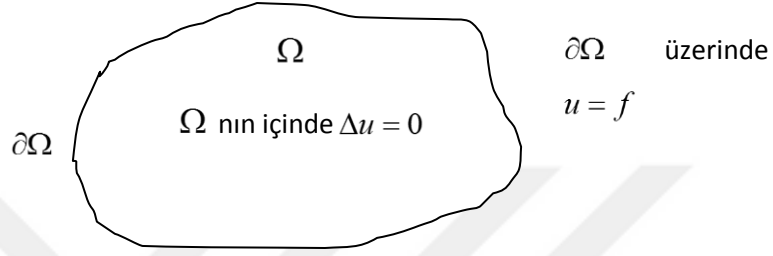
2.8. Sınır Değer Problemi

Kısmi diferansiyel denklemlerle birlikte aranan fonksiyonun tanımlı olduğu bölgenin sınırı üzerindeki değerinin önceden verilmesi ile oluşan problemlere, sınır değer problemi denir. Sınır değer problemleri, genellikle eliptik tip denklemlerle birlikte tanımlanırlar. Eliptik tip denklemlerden Laplace denklemini içeren bazı önemli sınır değer problemleri şu şekildedir [27].

Dirichlet problemi: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun ve Ω 'nın $\partial\Omega$ sınırı, düzgün olsun. $f \in C^0(\partial\Omega)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= f(x), \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\partial\Omega)$ fonksiyonunun aranması problemine Dirichlet problemi denir. Daha açık olarak, u fonksiyonu, $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, Ω nın kapanışı) da tanımlı ve sürekli, Ω 'da harmonik ve $\partial\Omega$ üzerinde f 'ye eşit olur. Dirichlet probleminin tanım bölgesi Şekil 2.6. da gösterilmiştir [21].

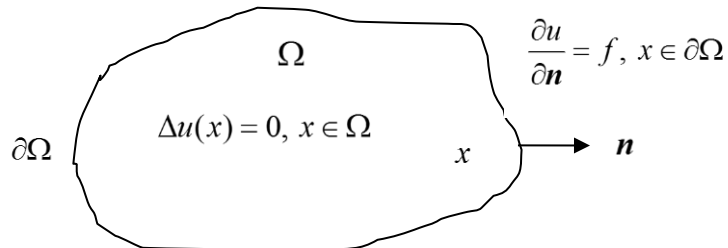


Şekil 2.6. Dirichlet problemi

Neumann problemi: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı düzgün olsun. $\partial\Omega$ sınırı üzerinde, $x \in \partial\Omega$ noktasında, $\partial\Omega$ nın dış birim normal vektörü $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ ile gösterilsin. $f \in C^0(\partial\Omega)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} &= f(x), \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ fonksiyonunun aranması problemine Neumann problemi denir. Neumann probleminin tanım bölgesi Şekil 2.7. de gösterilmiştir.



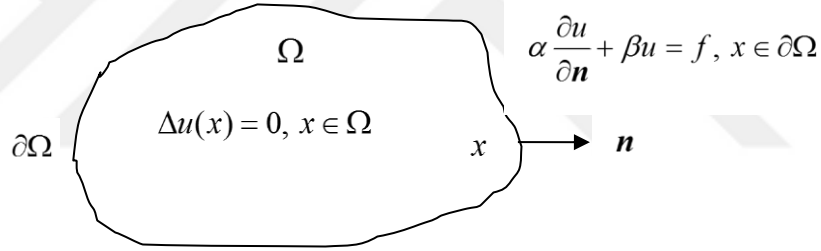
Şekil 2.7. Neumann problemi

Yukarıdaki sınır değer problemleri, sınırlı bölgeler için tanımlanmıştır. Bu yüzden bunlara iç sınır değer problemleri denir. Sınırsız bölgeler için de benzer sınır değer problemleri tanımlanabilir. Bunlara da dış sınır değer problemleri denir [21].

Karışık problem: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı düzgün olsun. $x \in \partial\Omega$ noktasındaki dış birim normal vektörü $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ ile gösterilsin. $\alpha, \beta, f \in C^0(\partial\Omega)$ verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, & x \in \Omega \\ \alpha(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x)u(x) &= f(x), & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ fonksiyonunun aranması problemine karışık problem denir [21]. Karışık problemin tanım bölgesi Şekil 2.8. de gösterilmiştir.



Şekil 2.8. Karışık problem

2.9. Yaklaşım Problemi

Uygulamalı bilim dallarında, verilen herhangi bir fonksiyona ondan daha basit, polinom gibi, fonksiyonlarla yaklaşmak oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Yaklaşım yaptığımız polinom fonksiyon, yaklaşılan fonksiyonun özdeşi olmasa da ona oldukça yakın bir fonksiyondur. Böylece karmaşık ve matematiksel olarak işlenmesi zor herhangi bir fonksiyona, ona çok yakın olan polinom gibi bir fonksiyonla yaklaşarak, fonksiyonun belirli noktalarda değerlerini bulmak, türevini ve integralini alabilmek mümkün hale gelmektedir. Bu şekilde bilinen herhangi bir fonksiyona, ona yakın daha basit bir fonksiyonla yaklaşma işlemine yaklaşım problemi adı verilir. Yaklaşım probleminde dikkat edilmesi gereken 3 ana husus vardır. Bunlar:

- Fonksiyonun sınıfı (yaklaşılacak fonksiyonu içerir.)
- Form (yaklaşım fonksiyonu için)
- Norm (yaklaşımın hatasını belirlemek için)

Fonksiyon sınıfı, yaklaşım için uygun olacak şekilde, \mathbb{F} fonksiyonlar ailesinin daraltılması ile elde edilir. Örneğin, $[a, b]$ reel aralığının alternatif bazı fonksiyon aileleri,

- $C[a, b]: [a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar
- $L_\infty[a, b]: [a, b]$ üzerinde sınırlı fonksiyonlar
- $L_2[a, b]: [a, b]$ üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar
- $L_p[a, b]: [a, b]$ üzerinde L_p integrallenebilir fonksiyonlar; yani, verilen herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu ve negatif olmayan ağırlık fonksiyonu $w(x)$ için

$$\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx, \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde verilebilir.

Yaklaşımın formu, yaklaşım fonksiyonu için belirlenmiş özel fonksiyonel formlardan oluşur. Bunlar ayarlanabilen katsayılar ve birtakım parametreler içerir. $f(x)$ 'in muhtemel yaklaşım fonksiyonlarından oluşan $f^*(x)$, bir A ailesi tanımlar. Örneğin,

- n . dereceden polinomlar

$$A = P_n = \{f^*(x) = p_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n\}, \{c_j\} \text{ ler parametre}$$

- Rasyonel fonksiyonlar

$$A = \left\{ f^*(x) = r_{p,q}(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_px^p}{1 + b_1x + \dots + b_qx^q} \right\}, \{a_j\} \text{ ve } \{b_j\} \text{ ler parametre}$$

Norm, $f^*(x)$ yaklaşım fonksiyonunun, $f(x)$ yaklaşılacak fonksiyona olan uzaklığını skaler bir ölçü olarak verir ve $\|f - f^*\|$ ile gösterilir [12].

Tanım 2.12. $K = \mathbb{R}$ ya da $K = \mathbb{C}$ ve V , K üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere,

- i. $\|u\| \geq 0, u \equiv 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0$
- ii. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, (üçgen eşitsizliği)
- iii. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

aksiyomları ile birlikte tanımlanan $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ gerçekte değerli fonksiyona norm denir.

Fonksiyon uzaylarında bazı standart normlar şu şekildedir:

1. L_∞ norm (sonsuz norm, maximum norm)

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

2. L_2 norm (en küçük kareler normu, Öklid normu)

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx}, w(x) \text{ negatif olmayan ağırlık fonksiyonu}$$

3. L_1 norm (1-normu, Manhattan norm)

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_a^b w(x) |f(x)| dx$$

4. L_p norm (Hölder norm)

$$\|f\| = \|f\|_p = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

5. Ağırlıklı minimax norm

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} w(x) |f(x)|$$

Yaklaşılacak fonksiyonun sınıfı, yaklaşımın formu ve yaklaşılacak fonksiyonla yaklaşım fonksiyonu arasındaki ölçü belirlendikten sonra, bu ölçünün hangi durumda en iyi olduğu aşağıdaki tanımlarla ifade edilir [12].

Tanım 2.13. \mathbb{F} normlu lineer uzay, \mathbb{F} de bir fonksiyon $f(x)$ ve $A \subset \mathbb{F}$ olmak üzere,

1. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|f - f^*\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $f^*(x)$ varsa, $f^*(x)$ 'e A da bir iyi yaklaşımdır denir.

2. $f^*(x)$, A da bir yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_B^*\| \leq \|f - f^*\|$$

eşitsizliği gerçekleşecek şekilde bir $f_B^*(x)$ varsa, $f_B^*(x)$ 'e A da bir en iyi yaklaşımdır denir.

3. ρ pozitif gerçel sayı ve $f_B^*(x)$, A da en iyi yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_N^*\| \leq (1 + \rho) \|f - f_B^*\|$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $f_N^*(x)$ varsa, $f_N^*(x)$ 'e A da en iyiye yakın bir yaklaşımdır denir.

Bu genel önbilgilerden sonra, problemin tanım bölgesi Ω , yaklaşım yapılacak fonksiyonun sınıfı, $C^0(\Omega)$ olsun. Ayrıca iki değişkenli polinom uzayı P olmak üzere, yaklaşım fonksiyonu, iki değişkenli sonlu Bernstein serisinden oluşan bir polinom ve yaklaşımın normu da $\|f\| = \|f\|_\infty = \max |f(x, y)|$ olsun. Sıralama noktalarına dayalı Bernstein matris metodu ile ikinci mertebe kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri, iki değişkenli sonlu Bernstein serileri cinsinden bulunarak, verilen bölge içinde yaklaşımda yapılan hata belirlenecektir. Metodun çözüm aşamasında elde edilen matris denklemi aynı zamanda bir lineer denklem sistemidir. Bu amaçla, lineer denklem sistemlerinin çözümleri de incelenecektir.

Chebyshev Sıralama Noktaları: Chebyshev polinomlarının $[-1,1]$ tanım aralığı, x_0, x_1, \dots, x_N olacak şekilde N parçaya bölünsün. Bu $N+1$ noktaya, sıralama noktaları adı verilir. Özellikle $x_0 = 1$ ve $x_N = -1$ olmak üzere sıralama noktalarını

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.24)$$

olarak seçmek uygundur. Çünkü bu noktalar $T_N(x)$ 'in extramum noktalarıdır ve her bir $T_N(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında $N+1$ eşit maksimum ve minimum değerine

sahiptir. N . dereceden Chebyshev polinomu x_0 ve x_N noktalarında ± 1 uç değerlerini alır [12].

2.10. Linear Denklem Sisteminin Çözümleri

Bilinmeyen sayısı n ve denklem sayısı m olan cebirsel denklem sistemi, genel olarak,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.25)$$

şeklinde yazılır. Burada x_j 'ler bilinmeyenler, $a_{i,j}$ 'ler sistemin katsayıları, b_i ler de bilinen değerlerdir. (2.25) cebirsel denklem sistemi, matris formunda

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.26)$$

olarak yazılabilir. Burada $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ katsayılar matrisi, $b = (b_i) \in \mathbb{C}^m$ bilinenlerden oluşan bir vektör ve $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ bilinmeyenlerden oluşan bir vektördür. (2.26) nin çözümü (2.25) denklemini de sağlayan n tane x_i den oluşur. n . mertebeden reel değerli kare sistemde $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $b \in \mathbb{C}^n$ olur. (2.25) lineer denklem sisteminin tek çözümünün olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin nonsingüler (düzgün) olmasıdır. Bununla ilgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.13. Verilen A kare matrisi için aşağıdaki koşullar birbirine eşittir

- i) A^{-1} vardır
- ii) $Ax = 0$ homojen sistemin yalnızca 0 (sıfır) çözümü vardır.
- iii) A matrisinin satırları lineer bağımsızdır.
- iv) A matrisinin sütunları lineer bağımsızdır.
- v) $\det(A) \neq 0$ [15].

Gauss Eliminasyon Metodu: Matris formda $Ax = b$ şeklindeki lineer denklem sistemi için $\det(A) \neq 0$ ise bu denklemin her iki tarafı matrisin tersi ile çarpılarak, x in çözümü $x = A^{-1}b$ şeklinde elde edilebilir. Fakat matris tersinin alınması için kullanılan yöntemler bilgisayar ortamı açısından hem zaman alıcı, hem de oluşan

hatalar açısından dezavantajlıdır. Bu nedenle ters alma yerine bir eliminasyon yönteminin kullanılması daha kolay ve faydalıdır. Metodun uygulanabilmesi için arttırılmış \tilde{A} matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulsun:

$$\tilde{A} = [A; b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & ; & a_{1,N+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & ; & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & ; & a_{N,N+1} \end{bmatrix}.$$

Burada A , katsayılar matrisini göstermektedir. $(N+1)$ 'inci sütundaki girdiler ise bilinen b değerlerini vermektedir ($a_{i,N+1} = b_i$, $i = 1, 2, \dots, N$). Elde edilen bu matrise elementer satır işlemleri yapılarak

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1N} & ; & \tilde{a}_{1,N+1} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2N} & ; & \tilde{a}_{2,N+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{NN} & ; & \tilde{a}_{N,N+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde arttırılmış matris oluşturulur ve lineer denklem sisteminin çözümü, elde edilen bu arttırılmış matrisin yardımıyla bulunur. Bu yöntemle lineer denklem sistemini çözmeye Gauss eliminasyon metodu denir [15].

En Küçük Kareler Metodu: $Ax = b$, denklemde A 'nın tekil olmayan kare matris olması durumunda birçok çözüm yöntemi vardır. Ancak, pratikte A 'nın tekil olduğu ya da A 'nın kare matris olmadığı birçok uygulamayla karşılaşılmaktadır. Örneğin, A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $m > n$ ise bu tür sistemlere denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla olan sistem, tersine $m < n$ ise denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olan sistem adı verilir. Bu tip denklem sistemlerinin çözümü için, tez kapsamında incelenen yöntem, lineer denklem sistemlerinin en küçük kareler metoduyla çözümüdür. Bu yöntem, $\|r(x)\| = \|Ax - b\|$ 'nu minimum yapan x vektörünü bulmak üzere kurulmuştur. Burada kullanılan norm, $\|\cdot\|_2$ Öklid normudur [15].

Tanım 2.14. $m \times n$ tipinde reel değerli A matrisi ve reel değerli b vektörü için, $\|r(x)\| = \|Ax - b\|_2$ ifadesini minimize eden $n \times 1$ tipindeki x vektörünü bulmaya, lineer en küçük kareler problemi denir.

Tanım 2.15. (Pseudoinverse) A , $m \times n$ tipinde matris $m > n$ ve $\text{rank}(A) = n$ olmak üzere,

$$A^* = (A^T A)^{-1} A^T$$

ya da $m < n$ ve $\text{rank}(A) = m$ olmak üzere,

$$A^* = A^T (A A^T)^{-1}$$

ile tanımlanan matrise, A matrisinin pseudoinverse matrisi denir. Literatürde Pseudoinverse matrisi, A 'nın Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi olarak da adlandırılır.

Yukarıdaki teoremden, denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla olan sistemler için $x = A^* b$ olacak şekilde tek bir en küçük kareler çözümünün olduğu söylenebilir.

Tanım 2.16. (Pseudoinverse ile en küçük kareler çözümü) A , $m \times n$ tipinde matris, $m > n$ ve $\text{rank}(A) = n$ olmak üzere, $Ax = b$ denkleminin tek bir en küçük kareler çözümü vardır ve

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = A^* b \quad (2.27)$$

olarak bulunur [15].

2.11. Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Çözümleri

Lineer olmayan denklemler ve denklem sistemleri yüzyıllardır fizikçilerin ve matematikçilerin ilgi odağı olmuştur. Bunun sebebi doğada karşılaşılan pek çok problem lineer olmayan denklem veya denklem sistemi şeklindedir. Ancak bunların

çözümleri lineer denklemler gibi kolay olmamıştır. Bugün hala bu denklemlerin cebirsel çözüm metotları bilinmemektedir. Tam çözümü bulmak yerine, çeşitli iterasyon yöntemleri ile yaklaşık çözümler bulunmaktadır. Ancak, bu iterasyon yöntemleri bile tüm denklemler için istenilen sonucu vermemektedir. Bazı denklemlerde istenilen sonuç elde edilmekte, bazı denklemlerde ise elde edilememektedir [31].

Tanım 2.18. Pek çok problem

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu tip sistemlere lineer olmayan denklem sistemi denir ve daha kısa olarak

$$F(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n] = 0$$

biçiminde yazılır.

Newton metodu: $F(x) = 0$ ile belirtilen lineer olmayan denklem sistemini

$$f_i(x) = f_i(x_k) + \nabla f_i(x_k)(x - x_k) + O(\|x - x_k\|^2)$$

biçiminde Taylor formülünü kullanarak çözer. Jakobiyen matrisi

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere genel halde,

$$F(x) = F(x_k) + J(x_k)(x - x_k) + O(\|x - x_k\|^2)$$

olur. Buradan

$$J(x_k)(x - x_k) = -F(x_k) \quad (2.29)$$

yazılabilir. Eğer Jakobiyen matrisi singüler değil ise (2.29)'un tek bir x_{k+1} çözümü vardır ve

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= -J(x_k)^{-1} F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - J(x_k)^{-1} F(x_k) \end{aligned} \quad (2.30)$$

yazılır. Böylece (2.30) sisteminin yardımıyla çözüm elde edilir.

2.12. Bernstein Polinomlarının Temel Matris Bağlıları

n . dereceden Bernstein polinomlarının genel formu $n = 0, 1, \dots, N$ için

$$B_{n,N}(x) = \binom{N}{n} \frac{x^n (R-x)^{N-n}}{R^N}, \quad 0 \leq n \leq N \quad (2.31)$$

şeklinde olup binom katsayıları

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (2.32)$$

$$(R-x)^{N-n} = \sum_{k=0}^{N-n} \binom{N-n}{k} (-1)^k R^{N-n-k} x^k \quad (2.33)$$

olarak verilmektedir [25]. (2.31) ve (2.33) ifadelerinden R bütün tabanların bir formu için tanımlanan polinomları üzerinde $[0, R]$ aralığının maksimum bir değeri olmak üzere daha açık bir biçimde

$$B_{n,N}(x) = \sum_{k=0}^{N-n} \binom{N}{n} \binom{N-n}{k} \frac{(-1)^k}{R^{n-k}} x^{n+k} \quad (2.34)$$

yazılabilir. Burada $n+1$ tane n . dereceden polinom vardır. Kolaylaştırmak için, eğer $n < 0$ veya $n > N$ için $B_{n,N}(x) = 0$ diyebiliriz. Dolayısıyla verilen herhangi bir n . dereceden polinomu

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_{n,N}(x) , \quad N \geq 1 \quad (2.35)$$

baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak açılabileceğini kolaylıkla gösterebiliriz.

(2.35) ifadesi

$$[y(x)] = \mathbf{B}_N(x) \mathbf{A} \quad (2.36)$$

matris formuna dönüştürülebilir; burada $\mathbf{B}_N(x)$ ve \mathbf{A} matrisleri

$$\mathbf{B}_N(x) = [B_{0,N}(x) \quad B_{1,N}(x) \quad \cdots \quad B_{N,N}(x)], \quad \mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (2.36) matris formu,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

collocation (sıralama) noktalarında

$$[y(x)] = \mathbf{B}_N(x_i) \mathbf{A} , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şekline gelir. Bu özelliklerden yararlanılarak ifadesinin matris formunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\mathbf{B}_N^T(x) = \mathbf{M}^T \mathbf{X}^T(x) \Leftrightarrow \mathbf{B}_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M} .$$

Burada

$$\mathbf{B}_N(x) = [B_{0,N}(x) \quad B_{1,N}(x) \quad \cdots \quad B_{N,N}(x)], \quad \mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^N],$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 1 & \binom{N}{0}\binom{N}{1}\frac{(-1)^1}{R} & \binom{N}{0}\binom{N}{2}\frac{(-1)^2}{R^2} & \dots & \binom{N}{0}\frac{(-1)^N}{R^N} \\ 0 & \binom{N}{1}\frac{1}{R} & \binom{N}{1}\binom{N-1}{1}\frac{(-1)^1}{R^2} & \dots & \binom{N}{1}\frac{(-1)^{N-1}}{R^N} \\ 0 & 0 & \binom{N}{2}\frac{1}{R^2} & \dots & \binom{N}{2}\frac{(-1)^{N-2}}{R^N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N-1}\frac{(-1)^1}{R^N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}\frac{1}{R^N} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = [(x^0)^{(k)} \quad (x^1)^{(k)} \quad (x^2)^{(k)} \quad \dots \quad (x^N)^{(k)}] \quad (2.37)$$

olarak tanımlanır. $k=0$ ve $k=1$ için;

$$\mathbf{X}(x) = [x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad x^N], \quad \mathbf{X}^{(1)}(x) = [(x^0)^{(1)} \quad (x^1)^{(1)} \quad (x^2)^{(1)} \quad \dots \quad (x^N)^{(1)}]$$

elde edilir ve

$$\begin{bmatrix} (x^0)^{(1)} \\ (x^1)^{(1)} \\ (x^2)^{(1)} \\ (x^3)^{(1)} \\ \vdots \\ (x^N)^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

olarak matris formunda yazılır. Burada

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

olmak üzere, kısaca

$$(\mathbf{X}^{(1)}(x))^T = \mathbf{P}(\mathbf{X}(x))^T$$

elde edilir.

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}^T$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}^{(1)}(x)\mathbf{P}^T = (\mathbf{X}(x)\mathbf{P}^T)\mathbf{P}^T = \mathbf{X}(x)(\mathbf{P}^T)^2$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{P}^T)^3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{P}^T)^k \quad (2.40)$$

bulunur.

(2.36)'da ifade edilen matris formunun k . mertebeden türevi

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{B}_N^{(k)}(x)\mathbf{A} \quad (2.41)$$

şeklindedir.(2.41)'de bazı işlemler yapılırsa

$$\mathbf{B}_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T \quad \text{ve} \quad \mathbf{B}_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{M}^T \quad (2.42)$$

(2.42)'de bulunan ifade (2.41)'de yerine konulursa

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{M}^T\mathbf{A} \quad (2.43)$$

olur. Sonra (2.40)'dan bulunan ifade (2.43)'de yerine yazılarak

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{P}^T)^k\mathbf{M}^T\mathbf{A} \quad (2.44)$$

elde edilir [32].

2.13. Hata Analizi

Fiziksel olaylardan modellenen matematiksel bir probleme nümerik bir metotla yaklaşıldığında, birkaç tür hata ile karşılaşmaktadır. Bunlar:

- Modelden kaynaklanan hatalar;

modelin uygun seçimiyle giderilebilir.

- Verilerden kaynaklanan hatalar;

bu tür hatalar fiziksel olaydaki ölçümlerin doğruluğunu arttırarak giderilebilir.

- Kesme hataları;

nümerik yöntemle çözüm yapılırken sonlu sayıda adım almanın getirdiği hatalardır.

- Yuvarlama hatası;

Bilgisayarda kullanılan programdaki işlemden kaynaklanan hatalardır [12].

Bu çalışmada, literatürde en çok karşılaşılan problemlerin çözümleri örnek olarak alınmıştır. Bu nedenle, ölçüm değerlerinin belirlenmesinde ve fiziksel olayın modellenmesinde herhangi bir katkıda bulunulmadığından dolayı, problemin modelden kaynaklanan hataları ve verilerinden kaynaklanan hataları ihmal edilecektir. Kesme hatası ve yuvarlama hatası olarak adlandırılan hatalar, bilgisayarda sonlu sayıda terimle işlem yapılmasından kaynaklanan bilgisayar kaynaklı hatalardır. Bununla birlikte, metodun spektral metotların bir sınıfı olması nedeniyle, spektral metotlar için hesaplanan Discretization (Kesikleme) hatası da bulunacaktır.

Mutlak Hata: Gerçek değer $u(x,t)$ ve tahmini değer $\tilde{u}(x,t)$ arasındaki farkın büyüklüğüdür. Bu nedenle mutlak hata $e_N(x_\alpha, t_\beta) = |u(x_\alpha, t_\beta) - \tilde{u}(x_\alpha, t_\beta)|$ şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $x = x_\alpha, t = t_\beta \in [0, l] \times [0, T], \alpha, \beta = 0, 1, \dots$ olarak verilmektedir. Ayrıca, $e_N(x_\alpha, t_\beta) \leq 10^{-k\alpha\beta} = 10^{-k}$, (k pozitif bir tamsayı) mutlak hata fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Burada, N kesme limiti arttıkça, $e_N(x_\alpha, t_\beta)$ 'nin her noktadaki değerinin saptanmış 10^{-k} değerinden küçük olması beklenmektedir.

Bağlı Hata: $\tilde{u}(x,t)$ 'nin bağlı hatası, $u(x,t)$ tam değeri ve $|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)|$ mutlak hatası ile ilişkilidir. Bağlı hata $E_{bağlı} = \frac{\|\hat{u} - u\|}{\|u\|}$ ile bulunmaktadır.

Kesme Hatası: Sayısal analiz ve bilimsel hesaplamalarda kullanılan sonsuz serilerin daha az sayıda terimle kesilmesi ile ortaya çıkan hatayı belirtmektedir. Bu gibi hatalar aslında algoritmik hatalardır ve ortaya çıkacak hatanın kapsamı tahmin edilebilmektedir [34].

Yuvarlama Hatası: Hesaplama aracının belirli sayılarla işlemi yapamaması nedeniyle oluşmaktadır. Buradaki hata, kullanılan programın virgöl sonrası dikkate alınan basamak sayısına bağlı olarak en yakın değere yuvarlanması gerektiği durumundan kaynaklanmaktadır.

Kesikleme (Discretization) Hatası: $e_D(N, N)$ ile gösterilen kesikleme hatası, tam çözümün $N+1$ terimiyle yaklaşık çözümün $N+1$ terimi arasındaki farktan elde edilir. Burada yaklaşık çözüm, $N+1$ taban fonksiyondan oluşan Bernstein polinom yaklaşımıdır ki

$$e_D(N, N) \leq \sum_{n=0}^N |u_{(n,n)}^{\text{tam}} - \tilde{u}_{(n,n)}| \quad (2.45)$$

olarak elde edilir.

Problemin tanım bölgesinde bilinen fonksiyona, Bernstein polinomlarına dayalı yaklaşık çözümle yaklaşmakla yapılan hata da maksimum hata tanımıyla aşağıda verilmiştir.

Maksimum Hata: L_∞ normuyla ifade edilen maksimum hata, problemin tanım bölgesinde, $u(x, t)$ bilinen fonksiyonuna, $u_{N,N}(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ yaklaşım fonksiyonu ile yapılan maksimum hatayı gösterir ve $1 \leq i \leq N+1$ olmak üzere

$$L_\infty - \text{hata} = e_{\max}(N, N) = \max |u(x_i, \tau) - \tilde{u}(x_i, \tau)| \quad (2.46)$$

olarak elde edilir.

Bu hatalardan başka, çözümün doğruluğu rezidü fonksiyonundan kontrol edilebilir. Rezidü fonksiyonu, tam çözümü bilinmeyen problemler için çözümün doğruluğu hakkında yorum yapma imkanı sağlar.

Rezidü Hatası: Sıralama metotlarında bulunan yaklaşık çözümlerin tekrar problemde yerine yazılması ile tanımlanan hatalardır. Problemin nümerik yöntemle çözülmesi ile elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve hesaplanan mutlak hatalara göre oldukça küçük ölçekli olabilmektedirler [35]. Ayrıca hata analizinde farklı hata normlarından da yararlanılabilir. Bunlar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$1. L_2 \text{-hata} = \left(\sum_{i=0}^N (u(x_i, \tau) - \tilde{u}(x_i, \tau))^2 \right)^{1/2}$$

$$2. \text{RMS hata} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N+1} ((u(x_i, \tau) - \tilde{u}(x_i, \tau))^2)}{N+1}} \quad (x_i = a + (i-1)h, \quad h = \frac{b-a}{N}).$$

Burada τ , $[0, R_2]$ aralığında keyfi bir sabittir [39].

2.14. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasındaki amaç, yukarıda bahsedilen çalışmalarını ikinci mertebeden bir boyutlu ve iki boyutlu diferansiyel denklemler ile bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için geliştirmek, uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Sıralama noktalarına dayalı Bernstein sıralama metodunun en büyük avantajlarından biri, sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi metotlarda kullanılan ağır bilgisayar algoritmalarının kullanılmaması, matris denklemlerine dönüştürülen problemin aynı zamanda lineer cebirsel bir denklem sistemi olmasından dolayı, direkt çözüm yapılarak sonuca ulaşılabilmesidir. Bunun yanında, kullandığımız metot ile spektral metotların tamamında olduğu gibi, tamamıyla nümerik bir çözüm elde edilmez. Bazı problemlerde, N kesme sınırının uygun seçimiyle, tam çözüm de elde edilebilmektedir. Yöntem; kısmi diferansiyel denklemleri bir matris denklemine dönüştürmeye dayanır. Bu matris denklemi, lineer denklemler için bilinmeyenleri Bernstein katsayılarından oluşan bir lineer denklem sistemine; lineer olmayan denklemlerde ise sıralama (collocation) noktaları yardımıyla oluşturulan lineer olmayan denklem sistemine karşılık gelir. Böylece, bu sistemlerin çözümünden elde edilen Bernstein katsayıları kullanılarak, verilen kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu Bernstein seri formunda yaklaşık çözümü elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Bernstein Matris Metodu

Bu kısımda ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer kısmi diferansiyel denklemler için Bernstein collocation (sıralama) metodu oluşturulacaktır.

3.1.1. Giriş

İki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonu için ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer kısmi diferansiyel denklem genel olarak $A(x,t), B(x,t), C(x,t), D(x,t), E(x,t), F(x,t)$ ve $G(x,t)$; $\Omega = [0, R_1] \times [0, R_2]$ bölgesinde Bernstein serisine açılabilen fonksiyonlar ve $0 \leq x \leq R_1, 0 \leq t \leq R_2$ olmak üzere

$$A(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} + F(x,t) u = G(x,t) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, (3.1) genelleştirilmiş kısmi diferansiyel denklemi için başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= h_1(x), & 0 \leq x \leq l \leq \infty, \\ u_t(x,0) &= h_2(x), & 0 \leq x \leq l \leq \infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= n_1(t), & 0 \leq t \leq T \leq \infty \\ u(l,t) &= n_2(t), & 0 \leq t \leq T \leq \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [33]. Burada $h_1(x), h_2(x), n_1(t)$ ve $n_2(t)$ belirtilen aralıklarda tanımlı, bilinen fonksiyonlardır.

Bernstein matris metodunda amaç; verilen problemi bir matris denklemine dönüştürmek ve buradan Bernstein katsayılar matrisini bularak, Bernstein seri

çözümünü elde etmektir. Bu kesimde incelenecek olan problemin $u(x,t)$ çözüm fonksiyonunun sırasıyla,

$$u(x,t) \cong \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N u_{p,q} x^p t^q, \quad u_{p,q} = \frac{1}{p! \cdot q!} u^{(p,q)}(0,0)$$

$$u(x,t) \cong u_{N,N}(x,t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} B_{p,q}^{n,N}(x,t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.4)$$

formlarında iki değişkenli sonlu Taylor ve Bernstein serisine açılabilirdi varsayalım. Burada $N \geq 1$ ile verilen pozitif tamsayı ve kesme sınırı olup $a_{p,q}$ ler ise Bernstein katsayılarıdır. Ayrıca $B_{p,q}^n(x,t) = B_p^n(x)B_q^n(t)$ olmak üzere $B_p^n(x)$ ve $B_q^n(t)$ polinomları sırasıyla $p.$ ve $q.$ dereceden Bernstein polinomlarıdır. Ayrıca yöntemde kullanılacak olan sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} i, \quad t_j = \frac{T}{N} j; \quad i, j = 0, 1, \dots, N \quad (3.5)$$

ile verilir.

3.1.2. Temel matris bağıntıları

(3.1) ile ifade edilen ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer KDD'nin, (3.4) formunda yaklaşık çözümünü elde etmek için, bilinmeyen Bernstein katsayılarının bulunması gerekmektedir. Dolayısıyla (3.1) denklemindeki terimlerin matris formu oluşturulmalıdır. Öncelikle, (3.4) çözüm fonksiyonu ve onun türevleri aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir [42]:

$$u(x,t) = \mathbf{X}(x,t) \bar{\mathbf{U}}, \quad u^{(i,j)}(x,t) = \mathbf{X}^{(i,j)}(x,t) \bar{\mathbf{U}}$$

ve

$$u(x,t) = \mathbf{B}_N(x,t) \bar{\mathbf{A}}, \quad u^{(i,j)}(x,t) = \mathbf{B}_N^{(i,j)}(x,t) \bar{\mathbf{A}}.$$

Burada $\mathbf{X}(x,t)$ ve $\mathbf{B}_N(x,t)$ $1 \times (N+1)^2$ boyutunda bir matristir ve

$$\mathbf{X}(x,t) = [\mathbf{X}_{0,0}(x,t) \dots \mathbf{X}_{0,N}(x,t) \mathbf{X}_{1,0}(x,t) \dots \mathbf{X}_{1,N}(x,t) \dots \mathbf{X}_{N,0}(x,t) \dots \mathbf{X}_{N,N}(x,t)]$$

$$\mathbf{B}_N(x,t) = [\mathbf{B}_{0,0}(x,t) \dots \mathbf{B}_{0,N}(x,t) \mathbf{B}_{1,0}(x,t) \dots \mathbf{B}_{1,N}(x,t) \dots \mathbf{B}_{N,0}(x,t) \dots \mathbf{B}_{N,N}(x,t)]$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu matrisin elemanları $X_{m,n}(x,t) = x^m t^n$; $m,n=0,1,\dots,N$ biçimindedir. Ayrıca bilinmeyen Taylor ve Bernstein katsayılar matrisleri ise $(N+1)^2 \times 1$ boyutunda olup

$$\bar{\mathbf{U}} = [u_{0,0} \ u_{0,1} \ \dots \ u_{0,N} \ u_{1,0} \ u_{1,1} \ \dots \ u_{1,N} \ \dots \ u_{N,0} \ u_{N,1} \ \dots \ u_{N,N}]^T$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_{0,0} \ a_{0,1} \ \dots \ a_{0,N} \ a_{1,0} \ a_{1,1} \ \dots \ a_{1,N} \ \dots \ a_{N,0} \ a_{N,1} \ \dots \ a_{N,N}]^T$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1. (3.1) denkleminin sonlu Bernstein polinomları cinsinden yaklaşık çözümü

$$u(x,t) \cong \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} B_{p,q}^{n,N}(x,t), \quad a \leq x \leq b, \ 0 \leq t \leq T$$

olarak verilsin. Bu ifadenin matris denklemini

$$\mathbf{B}_n = [B_0^n(x) \ B_1^n(x) \ \dots \ B_N^n(x)]_{1 \times (N+1)},$$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_n(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_n(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

ve bilinmeyen Bernstein katsayıları

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_{0,0} \ a_{0,1} \ \dots \ a_{0,N} \ a_{1,0} \ a_{1,1} \ \dots \ a_{1,N} \ \dots \ a_{N,0} \ a_{N,1} \ \dots \ a_{N,N}]^T$$

olmak üzere

$$u(x,t) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(t) \bar{\mathbf{A}} \quad (3.6)$$

şeklinde verilir.

İspat: Bu önerme, matris çarpımından aşağıdaki gibi kolaylıkla ispatlanabilir [12]:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} B_p^n(x) B_q^n(t) = a_{00} B_0^n(x) B_0^n(t) + a_{01} B_0^n(x) B_1^n(t) + \dots + a_{0N} B_0^n(x) B_N^n(t) + \\ &\quad a_{10} B_1^n(x) B_0^n(t) + a_{11} B_1^n(x) B_1^n(t) + \dots + a_{1N} B_1^n(x) B_N^n(t) + \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad a_{N0} B_N^n(x) B_0^n(t) + a_{N1} B_N^n(x) B_1^n(t) + \dots + a_{NN} B_N^n(x) B_N^n(t) \\ &= \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(t) \bar{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Verilen kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü bulabilmek için, $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon ve onun $u^{(i,j)}(x,t)$ kısmi türevleri arasında bir bağıntının bulunması gerekmektedir. Aşağıdaki kısımda bu bağıntıdan bahsedilecektir.

3.1.3. Yaklaşım fonksiyonu ile türevleri arasındaki bağıntı

(3.1) denklemdeki bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin

$$u^{(i,j)}(x,t) \cong \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} B_{p,q}^{n,N(i,j)}(x,t)$$

şeklinde iki değişkenli sonlu Bernstein serisine açılabildiğini kabul edelim. Önerme 1 den bu ifade matris formunda

$$u^{(i,j)}(x,t) = \mathbf{B}_n^{(i)}(x) \mathbf{Q}_n^{(j)}(t) \bar{\mathbf{A}} \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{B}_n(x)$, $\mathbf{Q}_n(t)$ ve bunların türevleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 3.2. $u(x,t)$ fonksiyonu ve $(i+j)$. mertebeden kısmi türevleri, sırasıyla, (3.6) ve (3.7) ile gösterilsin. Bu durumda

$$u^{(i,j)}(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}^i \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t)(\bar{\mathbf{P}})^j \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}, \quad i, j = 0,1,2$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır. Burada

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mathbf{M}^T, \mathbf{M}^T, \dots, \mathbf{M}^T), \quad \bar{\mathbf{P}} = \text{diag}(\mathbf{P}, \mathbf{P}, \dots, \mathbf{P}),$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\bar{\mathbf{T}}(t) = \text{diag}(\mathbf{T}(t), \mathbf{T}(t), \dots, \mathbf{T}(t)), \quad \mathbf{T}(t) = [1 \quad t \quad \cdots \quad t^N]$$

şeklindedir.

İspat: $\mathbf{B}_n(x)$ ve $\mathbf{B}_n^{(1)}(x)$ türevi arasında (2.42) eşitliğinden,

$$\mathbf{B}_n^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır. Burada \mathbf{M}^T matrisi $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir matristir ve

$$m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i}}{R^j} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases} \quad \text{için} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\mathbf{B}_n(x)$ ' in 2. mertebeye türevi

$$\mathbf{B}_n^{(2)}(x) = \mathbf{X}^{(2)}(x) \mathbf{M}^T = \mathbf{X}(x) \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T$$

olur. Türev almaya ardışık olarak devam edilirse $\mathbf{B}_n(x)$ ' in i . mertebeye türevi

$$\mathbf{B}_n^{(i)}(x) = \mathbf{X}^{(i)}(x) \mathbf{M}^T = \mathbf{X}(x) \mathbf{P}^i \mathbf{M}^T \quad (3.8)$$

olur. Benzer şekilde $\mathbf{Q}_n(t)$ 'nin j . mertebeye türevi de

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^{(1)}(t) &= \mathbf{T}^{(1)}(t) \mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \\ \mathbf{Q}_n^{(2)}(t) &= \mathbf{T}^{(2)}(t) \mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \mathbf{Q}_n^{(j)}(t) &= \mathbf{T}^{(j)}(t) \mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}}^j \bar{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Burada $\bar{\mathbf{M}}$ ve $\bar{\mathbf{P}}$, $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ tipinde köşegen blok matristir ve

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}(\mathbf{M}^T, \mathbf{M}^T, \dots, \mathbf{M}^T)_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \text{diag}(\mathbf{P}, \mathbf{P}, \dots, \mathbf{P})_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

olarak gösterilir.

Son olarak, $u^{(i,j)}(x,t) = \frac{\partial^{i+j} u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j}$ olmak üzere (3.7) eşitliği (3.8) ve (3.9) den

$$u^{(i,j)}(x,t) = \mathbf{B}_n^{(i)}(x) \mathbf{Q}_n^{(j)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{P}^i \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) (\bar{\mathbf{P}})^j \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} \quad (3.10)$$

matris bağıntısı elde edilir [12].

Diğer yandan, (3.1) denklemindeki bilinmeyen fonksiyon ve kısmi türevleri, (3.6) ve (3.10) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki matris denklemlerine dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}
u^{(0,0)}(x,t) &= u(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(1,0)}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(2,0)}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(0,1)}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(0,2)}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)(\bar{\mathbf{P}})^2\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \\
u^{(1,1)}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Bir sonraki bölümde, koşulların da matris denklemleri benzer şekilde elde edilecektir.

3.1.4. Koşulların matris formu

(3.2) ve (3.3) ile verilen koşulların matris formları, Önerme 1 ve Önerme 2 den, sırasıyla

$$\begin{aligned}
[u(x,0)] &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(0)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = h_1(x) \\
[u_t(x,0)] &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(0)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = h_2(x)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
[u(0,t)] &= \mathbf{X}(0)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = n_1(t) \\
[u(l,t)] &= \mathbf{X}(l)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = n_2(t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olacak şekilde elde edilmektedir.

3.1.5. Çözüm Metodu

(3.11) ifadesindeki matris denklemleri, (3.1) kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılarak, kısmi diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned}
& A(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} + B(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)(\bar{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} + \\
& C(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)(\bar{\mathbf{P}})^2\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} + D(x,t)\mathbf{X}(x)(\mathbf{P})\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} + \\
& E(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)(\bar{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} + F(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = G(x,t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

matris denkleminde dönüştürülür. Daha sonra sıralama noktaları $\{(x_i, t_j) : 0 \leq i, j \leq N\}$ (3.13) denkleminde önce j sabit olacak şekilde yerine yazılarak $(N+1)^2$ tane satır matrisi elde edilir. Ayrıca $G(x, t)$ 'nin sıralama noktalarında önce j sabit olacak şekilde aldığı değerler ile oluşan sütun matrisidir. Buradan (3.13) denklemi $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere $\bar{\mathbf{A}}$ parantezinde,

$$\begin{aligned}
& \{A(x_i, t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} + B(x_i, t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)(\bar{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{M}} + \\
& C(x_i, t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)(\bar{\mathbf{P}})^2\bar{\mathbf{M}} + D(x_i, t_j)\mathbf{X}(x_i)(\mathbf{P})\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} + \\
& E(x_i, t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)(\bar{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{M}} + F(x_i, t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}}\} \bar{\mathbf{A}} = G(x_i, t_j)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan (3.14) sistemi,

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{P}})^2\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{P})\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}} \\ & + \mathbf{E}\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{P}})\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}} \end{aligned} \right\} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

veya kısaca

$$\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \tag{3.15}$$

temel matris denkleminde yazılabilir.

(3.15) denkleminde bilinmeyenleri $a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,N}, a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,N}, \dots, a_{N,0}, a_{N,1}, \dots, a_{N,N}$ Bernstein katsayıları olan $(N+1)^2$ lineer cebirsel denklemden oluşan bir sisteme karşılık gelmektedir.

Benzer şekilde, (3.13) matris denklemindeki sıralama noktaları, koşulların matris denklemleri olan (3.12) ve (3.13) denklemlerinde yerlerine yazılarak $i = 0, 1, \dots, N$ ve $j = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere sırasıyla,

$$\underbrace{\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(0)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_1} = h_1(x_i) \text{ veya } \mathbf{K}_1\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{h}_1, \quad (3.16)$$

$$\underbrace{\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(0)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_2} = h_2(x_i) \text{ veya } \mathbf{K}_2\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{h}_2$$

ve

$$\underbrace{\mathbf{X}(0)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_3} = \mathbf{n}_1(t_j) \text{ veya } \mathbf{K}_3\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{n}_1, \quad (3.17)$$

$$\underbrace{\mathbf{X}(l)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_4} = \mathbf{n}_2(t_j) \text{ veya } \mathbf{K}_4\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{n}_2$$

elde edilir. (3.16) ve (3.17) matris denklemlerinin hepsi tek bir matris olarak birleştirilirse, koşullar için matris denklemini

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{K}_4 \end{bmatrix}_{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}_{\mathbf{R}}$$

veya kısaca

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.

(3.1) denkleminin (3.2) ve (3.3) koşulları altında çözümünü bulmak için (3.15) ve (3.18) matrislerinin (kısmi diferansiyel denklemden gelen matris denklemini ile koşullardan gelen matris denklemlerinin) birleştirilmesi ile oluşan arttırılmış matris denklemini

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & ; & \mathbf{R} \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

olur. Burada elde edilen lineer denklem sistemi, $m \times n$ tipinde, $m > n$ olan ve denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla olan bir sistemdir. Bundan sonra, bilinmeyen Bernstein katsayılarını bulabilmek için

$$\bar{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.19)$$

matris denklemi direkt çözülür. Direkt çözüm yapılırken, kısım (2.10) de bahsedilen Gauss eliminasyon metodu veya en küçük kareler metodu kullanılabilir. Yani $(\tilde{\mathbf{W}})^{-1}$, $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin pseudo inverse matrisi veya Gauss eliminasyon sonucu elde edilen matrisinin tersidir.

3.1.6. Çözümün Doğruluğu ve Hata Analizi

İkinci mertebe değişken katsayılı lineer kısmi diferansiyel denklem ve koşulları ile verilen herhangi bir problemin yaklaşık çözümü için, sıralama noktalarına dayalı Bernstein matris metodu verilmiştir. Eğer verilen problemin tam çözümü biliniyorsa, yaklaşım teorisi gereğince yaklaşık çözümle, tam çözüm arasındaki fark ölçülebilir. Eğer tam çözüm bilinmiyorsa bulunan yaklaşık çözümün ne kadar doğru olduğu saptanabilir. Bu amaçla bir sonraki kısımda yaklaşık çözümden kaynaklanan hataları bulmak ve yaklaşık çözümün doğruluğunu tayin etmek üzere tanım ve teoriler verilecektir.

Tanım 3.2.1. (Rezidü fonksiyonu) L türev operatörü olmak üzere, $Lu = f(x)$ diferansiyel denklemi gösterebilir. Diferansiyel denklemin $N+1$ baz fonksiyonu $\phi_n(x)$ 'in toplamından oluşan yaklaşık çözümü

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x)$$

olsun. Bu durumda yaklaşık çözümün diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen

$$R(x) = Lu_N - f$$

fonksiyonuna **rezidü fonksiyonu** denir [9].

Bu durumda iki değişkenli rezidü fonksiyonu da benzer şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2. L kısmi türev operatörü olmak üzere, $Lu = f(x,t)$ kısmi türevli bir diferansiyel denklemi gösterebilir. Diferansiyel denklemin, baz fonksiyonları $\varphi_p(x)$ ve $\varphi_q(t)$ çarpımlarının toplamından oluşan yaklaşık çözümü

$$u(x,t) \approx u_{N,N}(x,t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} \varphi_p(x) \varphi_q(t)$$

olsun. Bu durumda, yaklaşık çözümün diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen

$$R(x,y) = Lu_{N,N} - f \quad (3.20)$$

fonksiyonuna **iki değişkenli rezidü fonksiyonu** denir.

Rezidü fonksiyonunun 0 (sıfır) olması durumunda yaklaşık çözüm tam çözümlerle çakışmaktadır. Rezidü fonksiyonunun $x = x_p$, $y = y_q$ için değeri sıfıra ne kadar yakınsa çözümün doğruluğu da o kadar iyi olacaktır.

Özel olarak, bu tezde ele alınan (3.1) denklemi için [35], [36],[37] ve [43] makalelerindeki referanstan hareketle rezidü hata fonksiyonu ile Bernstein polinom çözümlerinin yaklaşık bir hatasını elde etmeye çalışacağız ve iki değişkenli rezidü hata fonksiyonu yardımıyla Bernstein polinom çözümlerini iyileştireceğiz. Dolayısıyla, Bernstein sıralama metodunun rezidü fonksiyonunu

$$R_{N,N}(x,t) = L[u_{N,N}(x,t)] - G(x,t) \quad (3.21)$$

olarak yazabiliriz. Burada $u_{N,N}(x,t)$, (3.2)-(3.3) koşulları ile verilen (3.1) denkleminin (3.4) ifadesindeki Bernstein seri çözümüdür. Bu çözüm,

$$L[u(x,t)] = A \frac{\partial^2 u_{N,N}}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u_{N,N}}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u_{N,N}}{\partial t^2} + D \frac{\partial u_{N,N}}{\partial x} + E \frac{\partial u_{N,N}}{\partial t} + F u_{N,N} = G + R_{N,N}$$

ile verilen problemimizi sağlar. Ayrıca $e_{N,N}(x,t)$ hata fonksiyonunu $u(x,t)$ tam çözüm olmak üzere,

$$e_{N,N}(x,t) = u(x,t) - u_{N,N}(x,t) \quad (3.22)$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.1)-(3.3) denklemleri ile (3.21) ve (3.22) ifadelerini kullanarak,

$$L[e_{N,N}(x,t)] = L[u(x,t)] - L[u_{N,N}(x,t)] = -R_{N,N}(x,t)$$

elde ederiz. Hata problemi daha açık olarak,

$$A \frac{\partial^2 e_{N,N}}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 e_{N,N}}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 e_{N,N}}{\partial t^2} + D \frac{\partial e_{N,N}}{\partial x} + E \frac{\partial e_{N,N}}{\partial t} + F e_{N,N} = -R_{N,N} \quad (3.23)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \infty$$

ve

$$u(0,t) = n_1(t), \quad u(l,t) = n_2(t), \quad 0 \leq t, l \leq T \leq \infty$$

hatanın homojen koşullu ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemini yazabiliriz. Burada genelliği bozmamak için koşullarımız homojen şartlar olarak kabul edilmiştir [35]. Yani k_i pozitif tamsayı olmak üzere

$$R_{N,N}(x,t) \leq 10^{-k_i}$$

rezidü fonksiyonu 10^{-k_i} değerinden küçük kalıncaya kadar Bernstein serisinin kesme sınırı N arttırılabilir.(3.23) hata denklemini Bölüm 3.1.5'deki gibi sunulan teknikle çözersek, $e_{N,N}(x,t)$ hatası için

$$e_{N,N,M}(x,t) = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^M a_{p,q}^* B_{p,q}^{n,N}(x,t), \quad (M \geq N)$$

yaklaşımını bulabiliriz.

Sonuç olarak $u_{N,N}(x,t)$ ve $e_{N,N,M}(x,t)$, $(M \geq N)$ polinomlarını kullanarak düzeltilmiş Bernstein polinom çözümünü $u_{N,N,M}(x,t) = u_{N,N}(x,t) + e_{N,N,M}(x,t)$ olarak elde ederiz. Ayrıca, hata fonksiyonunu $e_{N,N}(x,t) = u(x,t) - u_{N,N}(x,t)$, yaklaşık mutlak hata fonksiyonunu,

$$|\Delta_{N,N,M}(x,t)| = |e_{N,N}(x,t) - e_{N,N,M}(x,t)| = |u(x,t) - u_{N,N,M}(x,t)|$$

olarak inşa edebiliriz. Burada $e_{N,N,M}(x,t)$, iki değişkenli yaklaşık hata fonksiyonudur. Eğer istenen problemin çözümü bilinmiyorsa, bu takdirde collocation (sıralama) noktaları için $\{(x_i, t_j) : 0 \leq i, j \leq N\}$ olmak üzere $|e_{N,N}(x_i, t_j)| = |u(x_i, t_j) - u_{N,N}(x_i, t_j)|$ mutlak hataları bulunamaz. Ancak $|e_{N,N}(x_i, t_j)|$ mutlak hataları, $|e_{N,N,M}(x,t)|$ yaklaşık mutlak hata fonksiyonu yardımıyla yaklaşık olarak hesaplanabilir [35-38].

3.2. Neumann, Dirichlet ve Robin Koşulları Altında Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Sıralama Yöntemi

Bu bölümde,

$$A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + F(x,t)u = G(x,t)$$

iki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonu için genel formda verilen ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer kısmi diferansiyel denkleminin Dirichlet sınır koşulları

$$\begin{aligned} u(x,\phi) &= f_1(x), & a \leq x \leq b, & \phi = 0 \text{ veya } \phi = T, \\ u(\varphi,t) &= g_1(t), & 0 \leq t \leq T, & \varphi = a \text{ veya } \varphi = b, \end{aligned} \quad (3.24)$$

Neumann sınır koşulu

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\varphi,t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \varphi = a \text{ veya } \varphi = b, \quad (3.25)$$

ve Robin sınır koşulu

$$\begin{aligned} \alpha u(x,\mu) + \beta \frac{\partial u}{\partial \bar{\mathbf{n}}}(x,\eta) &= f_2(x), & a \leq x \leq b, \\ \mu = 0 \text{ veya } \mu = T, & \eta = 0 \text{ veya } \eta = T \end{aligned} \quad (3.26)$$

altında Bernstein polinom çözümlerini elde etmek için Bernstein sıralama metodunu kullanacağız. Burada $(x,t) \in [a,b] \times [0,T]$ için $A, B, C, D, E, F, G, f_1, f_2, g_1$ ve g_2 tanımlı fonksiyonlar olmak üzere, \mathbf{n} ve $\bar{\mathbf{n}}$ ise $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektör ve normal türev,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,t) = \nabla u(x,t) \cdot \mathbf{n}$$

şeklinde tanımlıdır. Buradaki amacımız, Bernstein sıralama metodunu (3.1), (3.24)-(3.26) problemi için uygulayarak (3.4) formunda yaklaşık çözümler elde etmektir.

3.2.1. Temel Matris Bağlıları

Bu kısımda, (3.4) yaklaşık çözümün matris formu olan (3.6) denklemini yardımıyla (3.1) denklemindeki matris formları Bölüm 3'deki (3.11) ifadesi ile elde

edilmişti. Bunlara ilaveten (3.24)-(3.26) ifadeleri ile verilen sınır koşulları için matris formlarını oluşturalım.

Öncelikle, (3.1) problemindeki Dirichlet koşulları için (3.6) matris formunda t yerine ϕ yazarak,

$$u(x, \phi) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(\phi) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\phi) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = f_1(x) \quad (3.27)$$

matris ilişkisi elde edilir. Benzer şekilde (3.24) Dirichlet koşulu için (3.6) matris formunda x yerine ϕ yazarsak,

$$u(\phi, t) = \mathbf{B}_n(\phi) \mathbf{Q}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\phi) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = g_1(t) \quad (3.28)$$

matris denklemini elde ederiz.

(3.25) ile verilen Neumann sınır koşulunun matris formunu elde etmek için ilk olarak koşulu açık yazalım:

$$n_1 \frac{\partial u}{\partial x}(\phi, t) + n_2 \frac{\partial u}{\partial t}(\phi, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \phi = a \text{ veya } \phi = b. \quad (3.29)$$

Burada $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n}$ ve $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ olmak üzere ∇ : gradyan vektörü, '.' ile iç çarpım göstermektedir.

(3.11) ifadesindeki $u_x(x, t)$ ve $u_t(x, t)$ matris formlarında x yerine ϕ yazılarak,

$$u_x = \mathbf{B}_n^{(1)}(\phi) \mathbf{Q}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\phi) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

ve

$$u_t = \mathbf{B}_n(\phi) \mathbf{Q}_n^{(1)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(\phi) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

matris ilişkileri elde edilir. Buradan, elde edilen matris formları (3.25) ile verilen Neumann sınır koşulunda yerine konulduğunda,

$$\{ n_1 \mathbf{X}(\varphi) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{M}} + n_2 \mathbf{X}(\varphi) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \} \bar{\mathbf{A}} = g_2(t) \quad (3.30)$$

şeklinde matris formu elde edilir.

(3.26) ile verilen Robin sınır koşulunun matris formunu elde etmek için $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$

ve $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = \nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n}$ olmak üzere Robin sınır koşulu açık olarak,

$$\alpha u(x, \mu) + \beta (\bar{n}_1 u_x(x, \eta) + \bar{n}_2 u_t(x, \eta)) = f_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.31)$$

şeklinde yazılabilir. (3.11) matris ilişkisinde verilen $u(x, t)$ eşitliğinde t yerine sırasıyla μ , $u_x(x, t)$ ve $u_t(x, t)$ eşitliklerinde ise t yerine η yazarsak,

$$u(x, \mu) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(\mu) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\mu) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

$$u_x(x, \eta) = \mathbf{B}_n^{(1)}(x) \mathbf{Q}_n(\eta) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\eta) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

ve

$$u_t(x, \eta) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n^{(1)}(\eta) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\eta) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

matris ilişkilerini elde edebiliriz. Buradan, elde edilen matris formları (3.26) ile verilen Robin sınır koşulunda yerine konularak,

$$\{ \alpha \mathbf{X}(x) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\mu) \bar{\mathbf{M}} + \beta (\bar{n}_1 \mathbf{X}(x) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\eta) \bar{\mathbf{M}} + \bar{n}_2 \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\eta) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}}) \} \bar{\mathbf{A}} = f_2(x) \quad (3.32)$$

şeklinde matris formuna sahip oluruz.

3.2.2. Çözüm Yöntemi

Bu kısımda, (3.24)-(3.26) sınır koşulları ile verilen genel formda ikinci mertbe lineer kısmi diferansiyel denklemler için (3.4) formunda yaklaşık çözümleri elde etmeye çalışacağız.

İlk olarak (3.11) ifadesindeki matris denklemleri, (3.1) kısmi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak, kısmi diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned} & \{A(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}} + B(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + \\ & C(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{P}}^2\bar{\mathbf{M}} + D(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}} + \\ & E(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + F(x,t)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\}\bar{\mathbf{A}} = G(x,t) \end{aligned}$$

matris denkleminde dönüştürülür. Daha sonra $a \leq x \leq b$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere (3.5) ile tanımlanan sıralama noktaları (3.29) denkleminde yerleştirilerek,

$$\begin{aligned} & \{A(x_i,t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} + B(x_i,t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + \\ & C(x_i,t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{P}}^2\bar{\mathbf{M}} + D(x_i,t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} + \\ & E(x_i,t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + F(x_i,t_j)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}}\}\bar{\mathbf{A}} = G(x_i,t_j) \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan (3.31) sistemi

$$\underbrace{\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{P}}^2\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}} \\ & + \mathbf{E}\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}} \end{aligned} \right\}}_{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{W} = \left[[\mathbf{W}(x_0,t_0) \dots \mathbf{W}(x_0,t_N)] \quad [\mathbf{W}(x_1,t_0) \dots \mathbf{W}(x_1,t_N)] \quad \dots \quad [\mathbf{W}(x_N,t_0) \dots \mathbf{W}(x_N,t_N)] \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}^T,$$

$$\mathbf{G} = \left[[\mathbf{G}(x_0,t_0) \dots \mathbf{G}(x_0,t_N)] \quad [\mathbf{G}(x_1,t_0) \dots \mathbf{G}(x_1,t_N)] \quad \dots \quad [\mathbf{G}(x_N,t_0) \dots \mathbf{G}(x_N,t_N)] \right]_{(N+1)^2 \times 1}^T,$$

ve

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[[a_{00} \ a_{01} \ \dots \ a_{0N}] \quad [a_{10} \ a_{11} \ \dots \ a_{1N}] \quad \dots \quad [a_{N0} \ a_{N1} \ \dots \ a_{NN}] \right]_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere kısaca

$$\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{W};\mathbf{G}] \tag{3.33}$$

temel matris denkleminde ifade edilebilir.

Şimdi, (3.24)-(3.26) sınır koşullarının temel matris formlarını oluşturmak için (3.5) sıralama noktalarını (3.27),(3.28), (3.30) ve (3.321) matris denklemlerinde yerine koyarak, $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$u(x_i, \phi) = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\phi) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = f_1(x_i)$$

$$u(\phi, t_j) = \mathbf{X}(\phi) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t_j) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = g_1(t_j)$$

$$\{ n_1 \mathbf{X}(\phi) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t_j) \bar{\mathbf{M}} + n_2 \mathbf{X}(\phi) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t_j) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \} \bar{\mathbf{A}} = g_2(t_j)$$

ve

$$\{ \alpha \mathbf{X}(x_i) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\mu) \bar{\mathbf{M}} + \beta (\bar{n}_1 \mathbf{X}(x_i) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\eta) \bar{\mathbf{M}} + \bar{n}_2 \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(\eta) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}}) \} \bar{\mathbf{A}} = f_2(x_i)$$

sistemlerini elde ederiz. Buradan, elde ettiğimiz sistemleri $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ ve $a \leq x_i \leq b$, $0 \leq t_j \leq T$ için

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0 \ \mathbf{U}_1 \ \dots \ \mathbf{U}_N]^T, \quad \bar{\mathbf{U}} = [\bar{\mathbf{U}}_0 \ \bar{\mathbf{U}}_1 \ \dots \ \bar{\mathbf{U}}_N]^T, \quad \mathbf{V} = [\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_1 \ \dots \ \mathbf{V}_N]^T,$$

$$\bar{\mathbf{V}} = [\bar{\mathbf{V}}_0 \ \bar{\mathbf{V}}_1 \ \dots \ \bar{\mathbf{V}}_N]^T, \quad \mathbf{F}_1 = [f_1(x_0) \ f_1(x_1) \ \dots \ f_1(x_N)]^T,$$

$$\mathbf{F}_2 = [f_2(t_0) \ f_2(t_1) \ \dots \ f_2(t_N)]^T, \quad \mathbf{G}_1 = [g_1(x_0) \ g_1(x_1) \ \dots \ g_1(x_N)]^T,$$

$$\mathbf{G}_2 = [g_2(t_0) \ g_2(t_1) \ \dots \ g_2(t_N)]^T,$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{B}_n(x_i) \mathbf{Q}_n(0) = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} = [u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{i(N+1)^2}],$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_i &= \alpha \mathbf{X}(x_i) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(T) \bar{\mathbf{M}} + \beta (\bar{n}_1 \mathbf{X}(x_i) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(T) \bar{\mathbf{M}} + \bar{n}_2 \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(T) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}}) \\ &= [\bar{u}_{i1} \ \bar{u}_{i2} \ \dots \ \bar{u}_{i(N+1)^2}], \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{B}_n(a) \mathbf{Q}_n(t_j) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t_j) \bar{\mathbf{M}} = [v_{j1} \ v_{j2} \ \dots \ v_{j(N+1)^2}],$$

$$\bar{\mathbf{V}}_j = n_1 \mathbf{X}(a) \mathbf{P} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t_j) \bar{\mathbf{M}} + n_2 \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t_j) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} = [\bar{v}_{j1} \ \bar{v}_{j2} \ \dots \ \bar{v}_{j(N+1)^2}]$$

olmak üzere kısaca,

$$\mathbf{U} \bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{F}_1] \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{F}_1], \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{F}_2] \text{ ya da } [\bar{\mathbf{U}}; \mathbf{F}_2], \quad (3.35)$$

$$\mathbf{V}\bar{\mathbf{A}}=[\mathbf{G}_1] \text{ ya da } [\mathbf{V};\mathbf{G}_1], \quad (3.36)$$

ve

$$\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}=[\mathbf{G}_2] \text{ ya da } [\bar{\mathbf{V}};\mathbf{G}_2], \quad (3.37)$$

şeklinde matris formlarını yazabiliriz. (3.1) denkleminin (3.24)-(3.26) sınır koşulları altında yaklaşık çözümünü bulmak için, (3.33) denklemindeki $[\mathbf{W};\mathbf{G}]$ artırılmış matrisine (3.34)-(3.37) koşulların matris formlarının eklenmesi ile

$$[\tilde{\mathbf{W}};\tilde{\mathbf{G}}]=\begin{bmatrix} \mathbf{U} & ; & \mathbf{F}_1 \\ \bar{\mathbf{U}} & ; & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{V} & ; & \mathbf{G}_1 \\ \bar{\mathbf{V}} & ; & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

yeni artırılmış matrise sahip oluruz. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılar matrisi $\bar{\mathbf{A}}=(\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}$ olarak elde edilir. Burada $[\tilde{\mathbf{W}};\tilde{\mathbf{G}}]$ artırılmış matrisi, $[\tilde{\mathbf{W}};\tilde{\mathbf{G}}]$ artırılmış matrisine Gauss eliminasyon uyguladıktan sonra sıfır satırları atılarak elde edilen matristir. Son olarak, bulunan $a_{p,q}$; $p,q=0,1,2,\dots,N$ katsayıları Bölüm 3’de verilen (3.4) denkleminde yerine konularak

$$u(x,t)=\sum_{p=0}^N\sum_{q=0}^Na_{p,q}B_{p,q}^{n,N}(x,t)$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

3.2.3. Hata Analizi

Bu kısımda, önceki bölümlerde verilen rezidü hata fonksiyonuna dayalı hata tahmini (3.1), (3.24)-(3.26) ifadeleri ile Neumann, Dirichlet ve Robin Koşulları Altında Genel Formda verilen ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem problemi için uygulanacaktır.

Başlangıç olarak, (3.1) denklemini $(x,t)\in[a,b]\times[0,T]$ olmak üzere

$$L[u(x,t)] = G(x,t) \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T$$

biçiminde ifade edelim. Burada, L bir lineer operatör ve

$$L[u(x,t)] = Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu$$

şeklindedir. $u_N(x,t)$; (3.1) denkleminin Bernstein polinom çözümü olsun. Dolayısıyla (3.1) denklemi için yöntemin rezidü fonksiyonu

$$R_N(x,t) = L[u_N(x,t)] - G(x,t)$$

olur. Böylece $u_N(x,t)$ çözüm fonksiyonu,

$$L[u_N(x,t)] = G(x,t) + R_N(x,t) \quad (3.38)$$

denklemini ve Dirichlet sınır koşullarını

$$u_N(x, \phi) = f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad \phi = 0 \text{ veya } \phi = T, \quad (3.39)$$

$$u_N(\phi, t) = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \phi = a \text{ veya } \phi = b, \quad (3.40)$$

Neumann sınır koşulunu

$$\frac{\partial u_N}{\partial \mathbf{n}}(\phi, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \phi = a \text{ veya } \phi = b, \quad (3.41)$$

ve Robin sınır koşulunu

$$\alpha u_N(x, \mu) + \beta \frac{\partial u_N}{\partial \mathbf{n}}(x, \eta) = f_2(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.42)$$

$$\mu = 0 \text{ veya } \mu = T, \quad \eta = 0 \text{ veya } \eta = T$$

sağlar.

Bu problem için hata fonksiyonu

$$e_N(x,t) = u(x,t) - u_N(x,t)$$

olarak tanımlayalım. Buradaki $u(x,t)$ fonksiyonu (3.1), (3.24)-(3.26) problemi için tam çözümü göstermektedir. Dolayısıyla (3.24)-(3.26) ve (3.38)-(3.42) homojen olmayan sınır koşulları kullanılarak, $e_N(x,t)$ hata fonksiyonu için

$$\begin{aligned} e_N(x, \phi) &= 0, & a \leq x \leq b, \phi = 0 \text{ veya } \phi = T, \\ e_N(\varphi, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T, \varphi = a \text{ veya } \varphi = b, \\ \frac{\partial e_N}{\partial \mathbf{n}}(\varphi, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T, \varphi = a \text{ veya } \varphi = b, \\ \alpha e_N(x, \mu) + \beta \frac{\partial e_N}{\partial \bar{\mathbf{n}}}(x, \eta) &= 0, & a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\mu = 0 \text{ veya } \mu = T, \eta = 0 \text{ veya } \eta = T$$

homojen sınır koşulları elde edilir. Elde edilen homojen koşullar ve (3.1) ve (3.38) ifadeleri yardımıyla,

$$L[e_N(x,t)] = L[u(x,t)] - L[u_N(x,t)] = -R_N(x,t)$$

hata fonksiyonunun diferansiyel denklemini yazabiliriz. Daha açık olarak yazılırsa;

$$A(e_N)_{xx} + B(e_N)_{xt} + C(e_N)_{tt} + D(e_N)_x + E(e_N)_t + F(e_N) = -R_N \quad (3.44)$$

şeklinde olacaktır.

(3.43) sınır koşulları ile verilen (3.44) hatanın diferansiyel denklemi önceki kısımlarda verilen yöntem kullanılıp çözüldüğünde hata probleminin $e_{N,M}(x,t)$ Bernstein polinom çözümü bulunur. Burada M ; hata probleminin Bernstein polinom çözümü bulunurken kullanılan kesme sınırı olacaktır.

Bununla birlikte, (3.24)-(3.26) koşulları ile verilen problem için Bernstein polinom çözümleri rezidü hata fonksiyonu yardımıyla iyileştirilebilir. Bu iyileştirme Neumann, Dirichlet ve Robin Koşulları Altında Genel Formda verilen ikinci mertebeden lineer değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemin Bernstein polinom çözümü ile Bölüm

3’de verilen hata diferansiyel denklem problemi için elde edilen $e_{N,M}(x,t)$ Bernstein polinom çözümünün

$$\begin{aligned} u_{N,M}(x,t) &= u_N(x,t) + e_{N,M}(x,t) \\ e_{N,M}^*(x,t) &= e_N(x,t) - e_{N,M}(x,t) \end{aligned}$$

şeklinde toplanması ile elde edilir. $u_{N,M}(x,t)$ iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümüne ve $e_{N,M}^*(x,t)$ iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü için iyileştirilmiş hata fonksiyonuna ulaşılmaktadır. Burada N ; Bernstein polinom çözümü için kullanılan kesme sınırı, M ise hata problemindeki Bernstein polinom çözümü elde edilirken kullanılan kesme sınırını temsil etmektedir. $M \geq N$ seçimi ile verilen problemin tam çözümüne daha iyi yaklaşık çözümler elde edilebilir.

Sonuç olarak, eğer problemin tam çözümü bilinmiyorsa bu takdirde, $e_{N,M}(x,t)$ yaklaşımı ile hata fonksiyonu için etkili bir tahmin yapılabilir.

3.3. Bir Boyutlu Singüler Pertürbe Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Probleminin Yaklaşık Çözümü için Bernstein Sıralama Metodu

Bu kısımda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G(x,t) - b(x)u \quad (3.45)$$

$0 \leq x \leq L$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere bir boyutlu singüler pertürbe parabolik konveksiyon-difüzyon denkleminin

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L < \infty, \quad (3.46)$$

başlangıç koşulu ve

$$\begin{cases} u(0,t) = h(t) \\ u(L,t) = k(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \quad (3.47)$$

sınır koşulları ile ele alalım [41], [38]. Problemin verilen koşullar altında Bernstein sıralama yöntemi uygulanarak (3.4) formunda Bernstein polinom çözümleri elde edilecektir. Burada ε , $0 < \varepsilon \ll 1$ olacak şekilde bir difüzyon katsayısı ya da singüler pertürbasyon parametresi, $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$ için L ve T uygun sabitler, $G(x,t) - b(x)u$; reaksiyon terimi, ayrıca G, a, b, f, h ve k tanımlı fonksiyonlardır.

3.3.1. Temel Matris Bağlılıları

Bu kısımda, (3.4) yaklaşık çözümün matris formu olan (3.6) denklemi yardımıyla (3.45) denklemindeki matris formları Bölüm 3'deki (3.11) ifadesi ile elde edilmiştir. Bunlara ilaveten (3.46)-(3.47) ifadeleri ile verilen sınır koşulları için matris formlarını oluşturalım.

İlk olarak, (3.45) problemindeki başlangıç koşulu için (3.6) matris formunda t yerine 0 yazarak,

$$u(x,0) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(0) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = f(x) \quad (3.48)$$

matris ilişkisi elde edilir. Benzer şekilde (3.47) sınır koşulları için (3.6) matris formunda x yerine sırasıyla 0 ve L yazarsak,

$$\begin{cases} u(0,t) = \mathbf{B}_n(0) \mathbf{Q}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(0) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = h(t) \\ u(L,t) = \mathbf{B}_n(L) \mathbf{Q}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(L) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = k(t) \end{cases} \quad (3.49)$$

matris denklemlerini elde ederiz.

3.3.2. Çözüm Yöntemi

Bu kısımda, (3.46)-(3.47) sınır koşulları ile verilen bir boyutlu singüler pertürbe parabolik konveksiyon-difüzyon denklemi için (3.4) formunda yaklaşık çözümleri elde etmeye çalışacağız.

İlk olarak (3.11) ifadesindeki matris denklemleri, (3.45) kısmi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak, kısmi diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} + a(x)\mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} - \varepsilon \mathbf{X}(x)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \\ = G(x,t) - b(x)\mathbf{X}(x)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

matris denkleminde dönüştürülür. Daha sonra $a \leq x \leq b$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere (3.5) ile tanımlanan sıralama noktaları (3.50) denkleminde yerleştirilerek,

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} + a(x_i)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} - \varepsilon \mathbf{X}(x_i)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} \\ + b(x_i)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}} \} \bar{\mathbf{A}} = G(x_i, t_j) \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Kısaca, bu matris denklemini $i, j = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere

$$\mathbf{W}(x_i, t_j)\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}(x_i, t_j)$$

şeklinde yazılabilir ya da kısaca

$$\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.51)$$

temel matris denklemini şeklinde ifade edilebilir. Buradan (3.51) eşitliği $(N+1)^2$ bilinmeyene sahip $(N+1)^2$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklemler sistemidir. Benzer şekilde, (3.46) ve (3.47) sınır koşullarının temel matris formlarını oluşturmak için sıralama noktalarını (3.48) ve (3.49) matris denklemlerinde yerine koyarak, $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$u(x_i, 0) = \mathbf{B}_n(x_i)\mathbf{Q}_n(0)\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(0)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = f(x_i)$$

ve

$$\begin{cases} u(0, t_j) = \mathbf{B}_n(0)\mathbf{Q}_n(t_j)\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(0)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = h(t_j) \\ u(L, t_j) = \mathbf{B}_n(L)\mathbf{Q}_n(t_j)\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(L)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(t_j)\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}} = k(t_j) \end{cases}$$

matris denklemlerinin sistemlerini elde ederiz. Buradan, elde ettiğimiz sistemleri $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ ve $a \leq x_i \leq b$, $0 \leq t_j \leq T$ olmak üzere kısaca,

$$\mathbf{U} \bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{F}] \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{F}], \quad (3.52)$$

$$\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{H}] \text{ ya da } [\bar{\mathbf{U}}; \mathbf{H}], \quad (3.53)$$

ve

$$\mathbf{V} \bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{K}] \text{ ya da } [\mathbf{V}; \mathbf{K}], \quad (3.54)$$

şeklinde matris formlarını yazabiliriz. (3.45) denklemi ile verilen problemin (3.46)-(3.47) sınır koşulları altında yaklaşık çözümünü bulmak için, (3.51) denklemindeki $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ artırılmış matrisine (3.52)-(3.54) koşulların matris formlarının eklenmesi ile

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & ; & \mathbf{F} \\ \bar{\mathbf{U}} & ; & \mathbf{H} \\ \mathbf{V} & ; & \mathbf{K} \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

yeni artırılmış matrise sahip oluruz. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılar matrisi $\bar{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ olarak elde edilir. Burada $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ artırılmış matrisi, $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ artırılmış matrisine Gauss eliminasyon uyguladıktan sonra sıfır satırları atılarak elde edilen matristir. Son olarak, bulunan $a_{p,q}$; $p, q = 0, 1, 2, \dots, N$ katsayıları Bölüm 3.1.1'de verilen (3.4) denkleminde yerine konularak

$$u(x, t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} B_{p,q}^{n,N}(x, t)$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

3.3.3. Hata Analizi

Bu kısımda, önceki bölümlerde verilen nümerik çözümün iyileştirilmesi için çözümlerin mutlak hatası, rezidü hatası ve farklı normlar üzerindeki hataların incelenmesi yapılmaktadır. Kesim 2.13'de tanımlanan $e_N(x_\alpha, t_\beta)$ mutlak hata fonksiyonu, benzer şekilde elde edilmektedir. L_2 ve L_∞ normlarında ve RMS ile tanımlanan hatalar tanımlanmıştır. Bu eşitlikler, aynı şekilde, (3.45)-(3.47) parabolik konveksiyon-difüzyon probleminin Bernstein sıralama yöntemi ile bulunan $u_N(x, t)$ yaklaşık çözümü için de geçerli olmaktadır.

Ayrıca, rezidü hata fonksiyonuna dayalı hata tahmini (3.45)-(3.47) ifadeleri ile verilen bir boyutlu singüler pertürbe parabolik konveksiyon-difüzyon problemi için uygulanacaktır.

Başlangıç olarak, (3.45) denklemini $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$ olmak üzere

$$L[u(x, t)] = G(x, t) \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.55)$$

biçiminde ifade edelim. Burada, L bir lineer operatör ve

$$L[u(x, t)] = u_t - \varepsilon u_{xx} + a(x)u_x + b(x)u$$

şeklindedir. $u_N(x, t)$; (3.45) denkleminin Bernstein polinom çözümü olsun. Problem için yöntemin rezidü fonksiyonu $R_N(x, t) = L[u_N(x, t)] - G(x, t)$ olur. Böylece $u_N(x, t)$ çözüm fonksiyonu,

$$L[u_N(x, t)] = G(x, t) + R_N(x, t) \quad (3.56)$$

denklemini ve

$$u_N(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.57)$$

başlangıç koşulu ve

$$\begin{cases} u_N(0,t) = h(t) \\ u_N(L,t) = k(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.58)$$

sınır koşullarını sağlar.

Bu problem için hata fonksiyonu

$$e_N(x,t) = u(x,t) - u_N(x,t)$$

olarak tanımlayalım. Buradaki $u(x,t)$ fonksiyonu (3.45)-(3.47) problemi için tam çözümü göstermektedir. Dolayısıyla (3.46), (3.47) ve (3.55)-(3.57) homojen olmayan sınır koşulları kullanılarak, $e_N(x,t)$ hata fonksiyonu için

$$e_N(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.59)$$

homojen başlangıç koşulunu ve

$$\begin{cases} e_N(0,t) = 0 \\ e_N(L,t) = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.60)$$

homojen sınır koşullarını elde ederiz. Elde edilen homojen koşullar ve (3.45) ve (3.55) ifadeleri yardımıyla, $L[e_N(x,t)] = L[u(x,t)] - L[u_N(x,t)] = -R_N(x,t)$ hata fonksiyonunun diferansiyel denklemini yazabiliriz. Daha açık olarak yazılırsa;

$$\frac{\partial e_N}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 e_N}{\partial x^2} + a(x) \frac{\partial e_N}{\partial x} + b(x)e_N = -R_N(x,t) \quad (3.61)$$

şeklinde olacaktır.

(3.59), (3.60) homojen başlangıç ve sınır koşulları ile verilen (3.61) hatanın diferansiyel denklemi önceki kısımlarda verilen yöntem kullanılıp çözüldüğünde hata

probleminin $e_{N,M}(x,t)$ Bernstein polinom çözümü bulunur. Burada M ; hata probleminin Bernstein polinom çözümü bulunurken kullanılan kesme sınırı olacaktır.

Bununla birlikte, (3.45)-(3.47) problemi için Bernstein polinom çözümleri rezidü hata fonksiyonu yardımıyla iyileştirilebilir. Bu iyileştirme bir boyutlu singüler pertürbe olmuş konveksiyon-difüzyon denklemin Bernstein polinom çözümü ile Bölüm 3’de verilen hata diferansiyel denklem problemi için elde edilen $e_{N,M}(x,t)$ Bernstein polinom çözümünün

$$u_{N,M}(x,t) = u_N(x,t) + e_{N,M}(x,t)$$

şeklinde toplanması ile elde edilir. Bu yaklaşık çözüm iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü olarak adlandırılır. Burada N ; Bernstein polinom çözümü için kullanılan kesme sınırı, M ise hata problemindeki Bernstein polinom çözümü elde edilirken kullanılan kesme sınırını temsil etmektedir. $M \geq N$ seçimi ile verilen problemin tam çözümüne daha iyi yaklaşık çözümler elde edilebilir. Sonuç olarak, eğer problemin tam çözümü bilinmiyorsa bu takdirde, $e_{N,M}(x,t)$ yaklaşımı ile hata fonksiyonu için etkili bir tahmin yapılabilir.

3.4. İkinci Mertebeden İki Uzay Değişkenli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri için Bernstein Sıralama Metodu

Bu kısımda,

$$\begin{aligned} & A_1(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + A_3(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_4(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t \partial x} \\ & + A_5(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t^2} + A_6(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + A_7(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + A_8(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t} + A_9(x, y, t) u = G(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

ikinci mertebeden iki uzay değişkenli kısmi diferansiyel denkleminin

$$u(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u(x, y, T) = f_2(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad (3.63)$$

$$u(x, c, t) = g_1(x, t), \quad u(x, d, t) = g_2(x, t) \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.64)$$

$$u(a, y, t) = h_1(y, t), \quad u(b, y, t) = h_2(y, t) \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.65)$$

sınır koşulları altında Bernstein sıralama yöntemi uygulanarak Bernstein polinom çözümleri elde edilecektir. Burada $(x, y, t) \in [a, b] \times [c, d] \times [0, T]$ için $A_i, G, f_1, f_2, g_1, g_2, h_1$ ve h_2 tanımlı fonksiyonlardır.

Bu problem için, sunulan metot uygulanarak,

$$u(x, y, t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^N a_{p,q,r} B_{p,q,r}^{n,N}(x, y, t), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.66)$$

kesilmiş Bernstein seri formunda yaklaşık çözümler bulacağız. Burada $N \geq 1$ ile verilen pozitif tamsayı ve kesme sınırı olup $a_{p,q,r}$ ler ise bilinmeyen Bernstein katsayılarıdır. Ayrıca $B_{p,q,r}^n(x, y, t) = B_p^n(x) B_q^n(y) B_r^n(t)$ olmak üzere $B_p^n(x)$, $B_q^n(y)$ ve $B_r^n(t)$ polinomları sırasıyla p ., q . ve r . dereceden Bernstein polinomlarıdır. Bu kısımda ikinci mertebeden sabit katsayılı ve değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin Bernstein polinom çözümlerini elde etmeye çalışacağız.

3.4.1. Temel Matris Bağıntıları

(3.62) ile ifade edilen ikinci mertebeden iki uzay değişkenli lineer KDD'nin, (3.66) formunda yaklaşık çözümünü elde etmek için, bilinmeyen Bernstein katsayılarının bulunması gerekmektedir. İlk olarak (3.5) çözüm fonksiyonunu

$$u(x, y, t) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n(t) \bar{\mathbf{A}} \quad (3.67)$$

olarak matris formunda yazalım. Burada,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n &= \left[B_0^n(x) \quad B_1^n(x) \quad \cdots \quad B_N^n(x) \right]_{1 \times (N+1)}, \\ \mathbf{Q}_n &= \text{diag} \left[\mathbf{B}_n(y), \mathbf{B}_n(y), \dots, \mathbf{B}_n(y) \right]_{(N+1) \times (N+1)^2}, \\ \mathbf{R}_n(t) &= \text{diag} \left[\mathbf{Q}_n(t), \mathbf{Q}_n(t), \dots, \mathbf{Q}_n(t) \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3} \end{aligned}$$

ve bilinmeyen Bernstein katsayıları

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{0,0,0} & a_{0,0,1} & \cdots & a_{0,0,N} & a_{0,1,0} & a_{0,1,1} & \cdots & a_{0,1,N} & \cdots & a_{0,N,0} & a_{0,N,1} & \cdots & a_{0,N,N} & \cdots & a_{N,N,N} \end{bmatrix}^T$$

şeklindedir.

Denklem (2.14.12)'de $\mathbf{B}_n(x)$, $\mathbf{B}_n^{(1)}(x)$ ve $\mathbf{B}_n^{(2)}(x)$ türevi arasında,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n^{(1)}(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{P}\mathbf{M}^T \\ \mathbf{B}_n^{(2)}(x) &= \mathbf{X}^{(2)}(x)\mathbf{M}^T = \mathbf{X}(x)\mathbf{P}^2\mathbf{M}^T \end{aligned} \quad (3.68)$$

olacak şekilde yazılmıştı. Burada \mathbf{M}^T matrisi, $m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}}{R^j}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$

olmak üzere

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$$

şeklindedir. Ayrıca $\mathbf{Q}_n(y)$ 'nin, $\mathbf{Q}_n^{(1)}(y)$ ve $\mathbf{Q}_n^{(2)}(y)$ türevi arasında,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^{(1)}(y) &= \mathbf{T}^{(1)}(y)\mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{T}}(y)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}} \\ \mathbf{Q}_n^{(2)}(y) &= \mathbf{T}^{(2)}(y)\mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{T}}(y)\bar{\mathbf{P}}^2\bar{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

olarak elde edilmişti. Burada $\bar{\mathbf{M}}$ ve $\bar{\mathbf{P}}$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \text{diag}[\mathbf{M}^T, \mathbf{M}^T, \dots, \mathbf{M}^T]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, & \bar{\mathbf{P}} &= \text{diag}[\mathbf{P}, \mathbf{P}, \dots, \mathbf{P}]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \\ \bar{\mathbf{T}}(t) &= \text{diag}[\mathbf{T}(t), \mathbf{T}(t), \dots, \mathbf{T}(t)]_{(N+1) \times (N+1)^2}, & \mathbf{T}(t) &= [1 \quad t \quad \cdots \quad t^N] \end{aligned}$$

olarak gösterilmişti. Benzer şekilde $\mathbf{R}_n(t)$ ve onun $\mathbf{R}_n^{(1)}(t)$ ve $\mathbf{R}_n^{(2)}(t)$ türevleri arasında ilişki

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_n^{(1)}(t) &= \mathbf{T}^{(1)}(t)\mathbf{M}^T = \bar{\bar{\mathbf{T}}}(t)\bar{\bar{\mathbf{P}}}\bar{\bar{\mathbf{M}}} \\ \mathbf{R}_n^{(2)}(t) &= \mathbf{T}^{(2)}(t)\mathbf{M}^T = \bar{\bar{\mathbf{T}}}(t)\bar{\bar{\mathbf{P}}}^2\bar{\bar{\mathbf{M}}}\end{aligned}\quad (3.70)$$

olarak oluşturulur. Burada $\mathbf{R}_n(t) = \text{diag}[\mathbf{Q}_n(t), \mathbf{Q}_n(t), \dots, \mathbf{Q}_n(t)]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{T}}} &= \text{diag}[\bar{\bar{\mathbf{T}}}, \bar{\bar{\mathbf{T}}}, \dots, \bar{\bar{\mathbf{T}}}]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}, \quad \bar{\bar{\mathbf{P}}} = \text{diag}[\bar{\bar{\mathbf{P}}}, \bar{\bar{\mathbf{P}}}, \dots, \bar{\bar{\mathbf{P}}}]_{(N+1)^3 \times (N+1)^3}, \\ \bar{\bar{\mathbf{M}}} &= \text{diag}[\bar{\bar{\mathbf{M}}}, \bar{\bar{\mathbf{M}}}, \dots, \bar{\bar{\mathbf{M}}}]_{(N+1)^3 \times (N+1)^3}\end{aligned}$$

şeklindedir.

3.4.2. Sınır Koşulları için Matris Bağlılıkları

Bu kısımda, (3.63)-(3.65) sınır koşullarını Bernstein polinomlarını temel alan matris formlarını yazacağız. İlk olarak, (3.63) başlangıç koşulunun matris formunu bulmak için, (3.67) çözüm fonksiyonunun (3.68) matris formunda $t \rightarrow 0$ ve $t \rightarrow T$ alınarak $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ olmak üzere

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) &= \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(0)\bar{\bar{\mathbf{A}}} = f_1(x, y) \\ u(x, y, T) &= \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(T)\bar{\bar{\mathbf{A}}} = f_2(x, y)\end{aligned}\quad (3.71)$$

matris formları elde edilir.

(3.64) sınır koşulları için $y \rightarrow c$ ve $y \rightarrow d$ alınarak $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq T$ olmak üzere

$$\begin{aligned}u(x, c, t) &= \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(c)\mathbf{R}_n(t)\bar{\bar{\mathbf{A}}} = g_1(x, t) \\ u(x, d, t) &= \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(d)\mathbf{R}_n(t)\bar{\bar{\mathbf{A}}} = g_2(x, t)\end{aligned}\quad (3.72)$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde (3.68) matris formunda $x \rightarrow a$ ve $x \rightarrow b$ alınarak $c \leq y \leq d$, $0 \leq t \leq T$ olmak üzere

$$\begin{aligned}u(a, y, t) &= \mathbf{B}_n(a)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(t)\bar{\bar{\mathbf{A}}} = h_1(y, t) \\ u(b, y, t) &= \mathbf{B}_n(b)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(t)\bar{\bar{\mathbf{A}}} = h_2(y, t)\end{aligned}\quad (3.73)$$

şeklinde (3.65) sınır koşullarının matris formlarını yazabiliriz.

3.4.3. Çözüm Yöntemi

Öncelikle, (3.62) ile verilen ikinci mertebeden iki uzay değişkenli lineer kısmi diferansiyel denkleminin her bir terimi için matris bağıntılarını elde edeceğiz. (3.68) denkleminde, (3.67) denkleminin x 'e göre birinci mertebeden kısmi türevinin matris formu

$$u^{(1,0,0)}(x, y, t) = \mathbf{B}_n^{(1)}(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n(t) \bar{\mathbf{A}} \Rightarrow u_x(x, y, t) = \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} \quad (3.74)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.67) denkleminin y 'ye göre birinci mertebeden kısmi türevinin matris formu

$$u_y(x, y, t) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n^{(1)}(y) \mathbf{R}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (3.69) kullanılarak, (3.67) denkleminin t 'ye göre birinci mertebeden kısmi türevinin matris formu

$$u_t(x, y, t) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n^{(1)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} \quad (3.75)$$

olur. (3.66) çözüm fonksiyonunun (3.67) matris formunun x 'e göre ikinci mertebeden kısmi türevinin matris formu

$$u_{xx}(x, y, t) = \mathbf{B}_n^{(2)}(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XP}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

şeklindedir. (3.74) denkleminin t 'ye göre birinci mertebeden kısmi türevinin matris formu

$$u_{xt}(x, y, t) = \mathbf{B}_n^{(1)}(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n^{(1)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

bulunur.

Diğer yandan, (3.62) denklemindeki bilinmeyen fonksiyon ve kısmi türevli ifadeler, (3.67) ve (3.68)-(3.70) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki matris denklemlerine dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}
u_{xy}(x, y, t) &= \mathbf{B}_n^{(1)}(x) \mathbf{Q}_n^{(1)}(y) \mathbf{R}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}, \\
u_{yy}(x, y, t) &= \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n^{(2)}(y) \mathbf{R}_n(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}, \\
u_{tt}(x, y, t) &= \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n^{(2)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

(3.67) ve (3.74)-(3.76) matris formları (3.62) denkleminde yerine yerleştirilerek,

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{A}_1 \mathbf{XP}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_2 \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_3 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_4 \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \\ & + \mathbf{A}_5 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 + \mathbf{A}_6 \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_7 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_8 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{A}_9 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \end{aligned} \right\} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

matris denklemi elde edilir ve bu denklem

$$\mathbf{W}(x, y, t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}(x, y, t) \tag{3.77}$$

olarak kısaca yazılabilir. Burada $k = 0, 1, \dots, (N+1)^3$ olup

$$\mathbf{W}(x, y, t) = \left[w_{1,k} \right]_{1 \times (N+1)^3} = \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{A}_1 \mathbf{XP}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_2 \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_3 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \\ & + \mathbf{A}_4 \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{A}_5 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 + \mathbf{A}_6 \mathbf{XPM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \\ & + \mathbf{A}_7 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_8 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{A}_9 \mathbf{XM}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \end{aligned} \right\} \bar{\mathbf{M}}$$

şeklinde alınabilir. $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} i, \quad y_j = c + \frac{(d-c)}{N} j, \quad t_k = \frac{T}{N} k; \quad i, j, k = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlı sıralama noktaları (3.77) denkleminde kullanılarak,

$$\mathbf{W}(x_i, y_j, t_k) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}(x_i, y_j, t_k); \quad i, j, k = 0, 1, \dots, N$$

matris denklemlerinin bir sistemi elde edilir ve bu sistem kısaca

$$\mathbf{W} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G} \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \tag{3.78}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}(x_0, y_0, t_0) \cdots \mathbf{W}(x_0, y_0, t_N) \mathbf{W}(x_0, y_1, t_0) \cdots \mathbf{W}(x_0, y_1, t_N) \cdots \\ \mathbf{W}(x_0, y_N, t_0) \cdots \mathbf{W}(x_0, y_N, t_N) \mathbf{W}(x_1, y_N, t_0) \cdots \mathbf{W}(x_N, y_N, t_0)]^T_{(N+1)^3 \times (N+1)^3}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = [a_{0,0,0} \ a_{0,0,1} \ \cdots \ a_{0,0,N} \ a_{0,1,0} \ a_{0,1,1} \ \cdots \ a_{0,1,N} \ \cdots \ a_{0,N,0} \ a_{0,N,1} \ \cdots \ a_{0,N,N}]^T_{1 \times (N+1)^3}$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}(x_0, y_0, t_0) \cdots \mathbf{G}(x_0, y_0, t_N) \mathbf{G}(x_0, y_1, t_0) \cdots \mathbf{G}(x_0, y_1, t_N) \cdots \\ \mathbf{G}(x_0, y_N, t_0) \cdots \mathbf{G}(x_0, y_N, t_N) \mathbf{G}(x_1, y_N, t_0) \cdots \mathbf{G}(x_N, y_N, t_0)]^T_{(N+1)^3 \times 1}$$

(3.63)-(3.65) koşullarına karşılık gelen (3.71)-(3.73) matris denklemlerinde sıralama noktaları yerleştirilerek,

$$\begin{aligned} \mathbf{UA} &= [\mathbf{F}_1] \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{F}_1] , \\ \bar{\mathbf{U}}\mathbf{A} &= [\mathbf{F}_2] \text{ ya da } [\bar{\mathbf{U}}; \mathbf{F}_2] , \\ \mathbf{VA} &= [\mathbf{G}_1] \text{ ya da } [\mathbf{V}; \mathbf{G}_1] , \\ \bar{\mathbf{V}}\mathbf{A} &= [\mathbf{G}_2] \text{ ya da } [\bar{\mathbf{V}}; \mathbf{G}_2] , \\ \mathbf{ZA} &= [\mathbf{H}_1] \text{ ya da } [\mathbf{Z}; \mathbf{H}_1] , \\ \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{A} &= [\mathbf{H}_2] \text{ ya da } [\bar{\mathbf{Z}}; \mathbf{H}_2] , \end{aligned} \tag{3.79}$$

koşulların ana matris denklemleri elde edilir. Burada $i, j, k = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [[\mathbf{U}_{00} \ \mathbf{U}_{01} \ \cdots \ \mathbf{U}_{0N}] \ [\mathbf{U}_{10} \ \mathbf{U}_{11} \ \cdots \ \mathbf{U}_{1N}] \ \cdots \ [\mathbf{U}_{N0} \ \mathbf{U}_{N1} \ \cdots \ \mathbf{U}_{NN}]]^T , \\ \bar{\mathbf{U}} &= [[\bar{\mathbf{U}}_{00} \ \bar{\mathbf{U}}_{01} \ \cdots \ \bar{\mathbf{U}}_{0N}] \ [\bar{\mathbf{U}}_{10} \ \bar{\mathbf{U}}_{11} \ \cdots \ \bar{\mathbf{U}}_{1N}] \ \cdots \ [\bar{\mathbf{U}}_{N0} \ \bar{\mathbf{U}}_{N1} \ \cdots \ \bar{\mathbf{U}}_{NN}]]^T , \\ \mathbf{V} &= [[\mathbf{V}_{00} \ \mathbf{V}_{01} \ \cdots \ \mathbf{V}_{0N}] \ [\mathbf{V}_{10} \ \mathbf{V}_{11} \ \cdots \ \mathbf{V}_{1N}] \ \cdots \ [\mathbf{V}_{N0} \ \mathbf{V}_{N1} \ \cdots \ \mathbf{V}_{NN}]]^T , \\ \bar{\mathbf{V}} &= [[\bar{\mathbf{V}}_{00} \ \bar{\mathbf{V}}_{01} \ \cdots \ \bar{\mathbf{V}}_{0N}] \ [\bar{\mathbf{V}}_{10} \ \bar{\mathbf{V}}_{11} \ \cdots \ \bar{\mathbf{V}}_{1N}] \ \cdots \ [\bar{\mathbf{V}}_{N0} \ \bar{\mathbf{V}}_{N1} \ \cdots \ \bar{\mathbf{V}}_{NN}]]^T , \\ \mathbf{Z} &= [[\mathbf{Z}_{00} \ \mathbf{Z}_{01} \ \cdots \ \mathbf{Z}_{0N}] \ [\mathbf{Z}_{10} \ \mathbf{Z}_{11} \ \cdots \ \mathbf{Z}_{1N}] \ \cdots \ [\mathbf{Z}_{N0} \ \mathbf{Z}_{N1} \ \cdots \ \mathbf{Z}_{NN}]]^T , \\ \bar{\mathbf{Z}} &= [[\bar{\mathbf{Z}}_{00} \ \bar{\mathbf{Z}}_{01} \ \cdots \ \bar{\mathbf{Z}}_{0N}] \ [\bar{\mathbf{Z}}_{10} \ \bar{\mathbf{Z}}_{11} \ \cdots \ \bar{\mathbf{Z}}_{1N}] \ \cdots \ [\bar{\mathbf{Z}}_{N0} \ \bar{\mathbf{Z}}_{N1} \ \cdots \ \bar{\mathbf{Z}}_{NN}]]^T , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= [[f_1(x_0, y_0) \dots f_1(x_0, y_N)] [f_1(x_1, y_0) \dots f_1(x_1, y_N)] \dots [f_1(x_N, y_0) \dots f_1(x_N, y_N)]]^T, \\
\mathbf{F}_2 &= [[f_2(x_0, y_0) \dots f_2(x_0, y_N)] [f_2(x_1, y_0) \dots f_2(x_1, y_N)] \dots [f_2(x_N, y_0) \dots f_2(x_N, y_N)]]^T, \\
\mathbf{G}_1 &= [[g_1(x_0, y_0) \dots g_1(x_0, y_N)] [g_1(x_1, y_0) \dots g_1(x_1, y_N)] \dots [g_1(x_N, y_0) \dots g_1(x_N, y_N)]]^T, \\
\mathbf{G}_2 &= [[g_2(x_0, y_0) \dots g_2(x_0, y_N)] [g_2(x_1, y_0) \dots g_2(x_1, y_N)] \dots [g_2(x_N, y_0) \dots g_2(x_N, y_N)]]^T, \\
\mathbf{H}_1 &= [[h_1(x_0, y_0) \dots h_1(x_0, y_N)] [h_1(x_1, y_0) \dots h_1(x_1, y_N)] \dots [h_1(x_N, y_0) \dots h_1(x_N, y_N)]]^T, \\
\mathbf{H}_2 &= [[h_2(x_0, y_0) \dots h_2(x_0, y_N)] [h_2(x_1, y_0) \dots h_2(x_1, y_N)] \dots [h_2(x_N, y_0) \dots h_2(x_N, y_N)]]^T,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{B}_n(x_i)\mathbf{Q}_n(y_j)\mathbf{R}_n(0) = [u_{i1}^j \ u_{i2}^j \ u_{i3}^j \ \dots \ u_{i(N+1)^3}^j],$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{ij} = \mathbf{B}_n(x_i)\mathbf{Q}_n(y_j)\mathbf{R}_n(0)\bar{\mathbf{P}} = [\bar{u}_{i1}^j \ \bar{u}_{i2}^j \ \bar{u}_{i3}^j \ \dots \ \bar{u}_{i(N+1)^3}^j],$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{B}_n(x_i)\mathbf{Q}_n(c)\mathbf{R}_n(t_k) = [v_{i1}^k \ v_{i2}^k \ v_{i3}^k \ \dots \ v_{i(N+1)^3}^k],$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{ik} = \mathbf{B}_n(x_i)\mathbf{Q}_n(d)\mathbf{R}_n(t_k) = [\bar{v}_{i1}^k \ \bar{v}_{i2}^k \ \bar{v}_{i3}^k \ \dots \ \bar{v}_{i(N+1)^3}^k],$$

$$\mathbf{Z}_{jk} = \mathbf{B}_n(a)\mathbf{Q}_n(y_j)\mathbf{R}_n(t_k) = [z_{j1}^k \ z_{j2}^k \ z_{j3}^k \ \dots \ z_{j(N+1)^3}^k]$$

ve

$$\bar{\mathbf{Z}}_{jk} = \mathbf{B}_n(b)\mathbf{Q}_n(y_j)\mathbf{R}_n(t_k) = [\bar{z}_{j1}^k \ \bar{z}_{j2}^k \ \bar{z}_{j3}^k \ \dots \ \bar{z}_{j(N+1)^3}^k]$$

şeklindedir.

(3.62) denkleminin (3.63)-(3.65) başlangıç ve sınır koşulları altında yaklaşık çözümünü elde etmek için, (3.78) denklemindeki $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ artırılmış matris koşulların (3.79) artırılmış matris formlarını ekleyerek

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & ; & \mathbf{F}_1 \\ \bar{\mathbf{U}} & ; & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{V} & ; & \mathbf{G}_1 \\ \bar{\mathbf{V}} & ; & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{Z} & ; & \mathbf{H}_1 \\ \bar{\mathbf{Z}} & ; & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

yeni artırılmış matrisine sahip oluruz. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılar matrisi $\bar{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ olarak elde edilir. Burada $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ artırılmış matrisi, $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ artırılmış matrisine Gauss eliminasyon uyguladıktan sonra sıfır satırları atılarak elde edilen

matristir. Son olarak, bulunan $a_{p,q,r}$; $p, q, r = 0, 1, 2, \dots, N$ katsayıları (3.66) denkleminde yerine konularak

$$u(x, y, t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^N a_{p,q,r} B_{p,q,r}^{n,N}(x, y, t)$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

(3.62) formundaki hiperbolik tip iki uzay değişkenli ikinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklem problemleri, (3.63) sınır koşulu yerine

$$u_t(x, y, 0) = f_2(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

başlangıç koşulu ile verilir. Bu durumda, (3.67) denkleminin t 'e göre birinci mertebeden kısmi türevinin matris formu olan (3.75) denkleminde $t \rightarrow 0$ yazarak

$$u_t(x, y, 0) = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{Q}_n(y) \mathbf{R}_n^{(1)}(0) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}$$

olarak yeni koşulun matris formu elde edilir.

3.4.4. Hata Analizi

Bu kısımda, önceki bölümlerde verilen rezidü hata fonksiyonuna dayalı hata tahmini (3.62)-(3.65) ifadeleri ile verilen ikinci mertebeden iki boyutlu lineer değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem problemi için uygulanacaktır.

Başlangıç olarak, (3.62) denklemini $(x, y, t) \in [a, b] \times [c, d] \times [0, T]$ olmak üzere

$$L[u(x, y, t)] = G(x, y, t) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

biçiminde ifade edelim. Burada, L bir lineer operatör ve

$$L[u(x, y, t)] = A_1(x, y, t) u_{xx} + A_2(x, y, t) u_{xy} + A_3(x, y, t) u_{yy} + A_4(x, y, t) u_{xt} + A_5(x, y, t) u_{yt} \\ + A_6(x, y, t) u_x + A_7(x, y, t) u_y + A_8(x, y, t) u_t + A_9(x, y, t) u$$

şeklindedir. $u(x, y, t) \cong u_N(x, y, t)$; (3.62) denkleminin Bernstein polinom çözümü olsun. Dolayısıyla yöntemin rezidü fonksiyonu

$$R_N(x, y, t) = L[u_N(x, y, t)] - G(x, y, t)$$

olur. Böylece $u_N(x, y, t)$ çözüm fonksiyonu,

$$L[u_N(x, y, t)] = G(x, y, t) + R_N(x, y, t) \quad (3.80)$$

denklemini ve

$$u_N(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad u_N(x, y, T) = f_2(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad (3.81)$$

$$u_N(x, c, t) = g_1(x, t), \quad u_N(x, d, t) = g_2(x, t) \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.82)$$

$$u_N(a, y, t) = h_1(y, t), \quad u_N(b, y, t) = h_2(y, t) \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.83)$$

başlangıç ve sınır koşullarını sağlar. Bazı problemlerde verilen $a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$ aralığı için $\frac{\partial u_N}{\partial t}(x, y, 0) = f_2(x, y)$ koşulunu da sağlar. Bu problem için hata fonksiyonu

$$e_N(x, y, t) = u(x, y, t) - u_N(x, y, t)$$

olarak tanımlayalım. Buradaki $u(x, y, t)$ fonksiyonu (3.62)-(3.65) problemi için tam çözümü göstermektedir. Dolayısıyla (3.63)-(3.65) ve (3.80)-(3.83) homojen olmayan sınır koşulları kullanılarak, $e_N(x, y, t)$ hata fonksiyonu için

$$e_N(x, y, 0) = 0, \quad e_N(x, y, T) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad (3.84)$$

$$e_N(x, c, t) = 0, \quad e_N(x, d, t) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.85)$$

$$e_N(a, y, t) = 0, \quad e_N(b, y, t) = 0, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.86)$$

homojen sınır koşulları elde edilir. Bunlara ek olarak $a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$ aralığı için

$\frac{\partial e_N}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ koşulu da yazılabilir. Elde edilen homojen koşullar ve (3.62) ve (3.80)

ifadeleri yardımıyla,

$$L[e_N(x, y, t)] = L[u(x, y, t)] - L[u_N(x, y, t)] = -R_N(x, y, t)$$

hata fonksiyonunun diferansiyel denklemini yazabiliriz. Daha açık olarak yazılırsa;

$$\begin{aligned} &A_1(x, y, t)(e_N)_{xx} + A_2(x, y, t)(e_N)_{xy} + A_3(x, y, t)(e_N)_{yy} \\ &+ A_4(x, y, t)(e_N)_{xt} + A_5(x, y, t)(e_N)_{yt} + A_6(x, y, t)(e_N)_{xt} \\ &+ A_7(x, y, t)(e_N)_{yt} + A_8(x, y, t)(e_N)_t + A_9(x, y, t)e_N = -R_N(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.87)$$

şeklinde olacaktır.

(3.84)-(3.86) sınır koşulları ile verilen (3.87) hatanın diferansiyel denklemi önceki kısımlarda verilen yöntem kullanılıp çözüldüğünde hata probleminin $e_{N,M}(x, y, t)$ Bernstein polinom çözümü bulunur. Burada M ; hata probleminin Bernstein polinom çözümü bulunurken kullanılan kesme sınırı olacaktır.

Bununla birlikte, (3.62)-(3.65) ikinci mertebeden iki boyutlu lineer değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemi için Bernstein polinom çözümleri rezidü hata fonksiyonu yardımıyla iyileştirilebilir. Bu iyileştirme, ikinci mertebeden iki boyutlu lineer değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemin Bernstein polinom çözümü ile Bölüm 3'de verilen hata diferansiyel denklem problemi için elde edilen $e_{N,M}(x, y, t)$ Bernstein polinom çözümünün

$$u_{N,M}(x, y, t) = u_N(x, y, t) + e_{N,M}(x, y, t)$$

şeklinde toplanması ile elde edilir. Bu yaklaşık çözüm iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü olarak adlandırılır. Burada N ; Bernstein polinom çözümü için kullanılan kesme sınırı, M ise hata problemindeki Bernstein polinom çözümü elde edilirken kullanılan kesme sınırını temsil etmektedir. $M \geq N$ seçimi ile verilen problemin tam çözümüne daha iyi yaklaşık çözümler elde edilebilir.

3.5. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bir Sınıfının Yaklaşık Çözümleri İçin Bernstein Sıralama Metodu

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin çözüm yöntemleri fen ve mühendislik bilimlerinin çok çeşitli disiplinlerinde pek çok sayıda problemle bağlantılı olarak ortaya çıkarlar. Örneğin, denge problemleri, özdeğer problemleri ve yayılım problemlerinden oluşan üç fiziksel kategoriden birinde, cisim fiziği, plazma fizik, akışkanlar dinamiği, matematiksel biyoloji ve kimyasal kinematik lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenir. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için birçok metot son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Karmaşık ve yorucu cebirsel hesaplamalarda araştırmacılara kolaylık sağlayan Maple veya Mathematica gibi sembolik paket programlarının kullanılmasıyla bu denklemlerin çözümlerini elde etmek giderek ilgi çekici hale gelmiştir.

Bu bölümde, ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için sıralama noktaları kullanılarak matris denklemine dönüştürmek ve buradan Bernstein katsayılar matrisini bularak, kesilmiş Bernstein seri çözümünü elde etmektir.

Lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin bir sınıfı olan

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta_1 u + \dots + \beta_n u^n = f(x, t) \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \quad (3.89)$$

ile verilen kısmi diferansiyel denklemin

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = g_1(x) \\ u_t(x, 0) = g_2(x) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.90)$$

başlangıç koşulları altında çözümü araştırılacaktır. Burada $u(x, t)$; x konum, t zaman değişkeni, α ve β_i ($i=1, \dots, n$) olmak üzere dalganın yer değiştirmesini göstermektedir.

Bu bölümde, önceki kısımlarda kullanılan Bernstein matris metodu, sıralama noktaları kullanılarak (3.90) koşulları ile birlikte verilen (3.89) denklemine uygulanmıştır. Çözüm fonksiyonu kesilmiş Bernstein serisi formunda

$$u(x,t) \cong u_{N,N}(x,t) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_{r,s} B_{r,s}^{n,N}(x,t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.91)$$

olarak alınır. Burada $a_{r,s}$ ($r, s = 0, 1, \dots, N$) belirlenecek olan bilinmeyen Bernstein katsayılarıdır. Ayrıca yöntemde kullanılacak olan sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{N} i, \quad t_j = \frac{T}{N} j; \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

ile verilir.

3.5.1. Temel matris bağıntıları

(3.89) ile ifade edilen ikinci mertebeden lineer olmayan KDD'nin, (3.91) formunda yaklaşık çözümünü elde etmek için, bilinmeyen Bernstein katsayılarının bulunması gerekmektedir. Dolayısıyla (3.89) denklemindeki terimlerin matris formu oluşturulmalıdır. Öncelikle, (3.91) çözüm fonksiyonunun matris formu yazılabilir:

$$u(x,t) = \mathbf{X}_1(x,t) \bar{\mathbf{U}}_1 \quad (3.92)$$

ve

$$u(x,t) = \mathbf{B}_N^{(1)}(x,t) \bar{\mathbf{A}}_1. \quad (3.93)$$

Buradaki $\mathbf{X}_1(x,t)$, Kısım 3.1 deki $\mathbf{X}(x,t)$ 'ye $\bar{\mathbf{U}}_1$ ve $\bar{\mathbf{A}}_1$ ise $\bar{\mathbf{U}}$ ve $\bar{\mathbf{A}}$ 'ya karşılık gelmektedir. Rekürans bağıntısının kurulabilmesi için alt indisler kullanılmıştır. Burada

$$\mathbf{X}_1(x,t) = [\mathbf{X}_{0,0}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{X}_{0,N}^{(1)}(x,t) \quad \mathbf{X}_{1,0}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{X}_{1,N}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{X}_{N,0}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{X}_{N,N}^{(1)}(x,t)]$$

$$\mathbf{B}_N^{(1)}(x,t) = [\mathbf{B}_{0,0}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{B}_{0,N}^{(1)}(x,t) \quad \mathbf{B}_{1,0}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{B}_{1,N}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{B}_{N,0}^{(1)}(x,t) \dots \mathbf{B}_{N,N}^{(1)}(x,t)]$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu matrisin elemanları $X_{m,n}(x,t) = x^m t^n$; $m, n = 0, 1, \dots, N$ biçimindedir. Ayrıca bilinmeyen Taylor ve Bernstein katsayılar matrisleri ise $(N+1)^2 \times 1$ boyutunda olup

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \left[u_{0,0} \ u_{0,1} \ \dots \ u_{0,N} \ u_{1,0} \ u_{1,1} \ \dots \ u_{1,N} \ \dots \ u_{N,0} \ u_{N,1} \ \dots \ u_{N,N} \right]^T$$

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \left[a_{0,0} \ a_{0,1} \ \dots \ a_{0,N} \ a_{1,0} \ a_{1,1} \ \dots \ a_{1,N} \ \dots \ a_{N,0} \ a_{N,1} \ \dots \ a_{N,N} \right]^T$$

şeklinde tanımlanır. Kısım 3.1 den, (3.10) eşitliği kullanılarak lineer olmayan denklemler için $u(x,t)$ fonksiyonunun kuvvetlerinin matris formu belirlenmelidir. Bu ise

$$u^i(x,t) = \mathbf{X}_i(x,t) \bar{\mathbf{U}}_i = \mathbf{B}_n^i(x) \mathbf{Q}_n^i(t) \bar{\mathbf{A}}_i = \mathbf{X}_i(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_i(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_i, \quad (3.94)$$

matris bağıntısı şeklindedir. Burada $\mathbf{X}_i(x,t)$, $\bar{\mathbf{U}}_i$ ve $\bar{\mathbf{A}}_i$ matrisleri sırasıyla $1 \times (N+1)^{2^i}$, $(N+1)^{2^i} \times 1$ ve $(N+1)^{2^i} \times 1$ boyutundaki matrislerdir ve

$$\mathbf{X}_i(x,t) = [\mathbf{X}_{0,0}^{(i)}(x,t) \ \dots \ \mathbf{X}_{0,N}^{(i)}(x,t) \ \mathbf{X}_{1,0}^{(i)}(x,t) \ \dots \ \mathbf{X}_{1,N}^{(i)}(x,t) \ \dots \ \mathbf{X}_{N,0}^{(i)}(x,t) \ \dots \ \mathbf{X}_{N,N}^{(i)}(x,t)]$$

$$\mathbf{B}_n^i = \left[\mathbf{B}_0^{n^i}(x) \ \mathbf{B}_1^{n^i}(x) \ \dots \ \mathbf{B}_N^{n^i}(x) \right]_{1 \times (N+1)^{2^i}}, \quad \mathbf{Q}_n^i = \text{diag} \left[\mathbf{B}_n^i(t) \right]_{(N+1) \times (N+1)^{2^i}}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca burada \mathbf{M}^T matrisi, $m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}}{R^j}, & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$

olmak üzere

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \dots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \dots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{X}_i(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N], \quad \mathbf{T}_i(t) = [1 \ t \ \dots \ t^N],$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}[\mathbf{M}^T]_{(N+1)^{2^i} \times (N+1)^{2^i}}, \quad \bar{\mathbf{T}}_i(t) = \text{diag}[\mathbf{T}_i(t)]_{(N+1) \times (N+1)^{2^i}}$$

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \left[\bar{\mathbf{A}}_{0,0}^i \ \bar{\mathbf{A}}_{0,1}^i \ \dots \ \bar{\mathbf{A}}_{0,N}^i \ \bar{\mathbf{A}}_{1,0}^i \ \bar{\mathbf{A}}_{1,1}^i \ \dots \ \bar{\mathbf{A}}_{1,N}^i \ \dots \ \bar{\mathbf{A}}_{N,0}^i \ \bar{\mathbf{A}}_{N,1}^i \ \dots \ \bar{\mathbf{A}}_{N,N}^i \right]^T$$

olur. Son olarak, $u^{(i,j)}(x,t) = \frac{\partial^{i+j}u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j}$ olmak üzere Kısım 3.1 deki (3.7) eşitliği (3.8)

ve (3.9) ifadesinden

$$u^{(m,n)}(x,t) = \mathbf{B}_n^{(m)}(x) \mathbf{Q}_n^{(n)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}(x) \mathbf{P}^m \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}}^n \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} \quad (3.95)$$

matris bağıntısı olarak verilmişti. Böylece,

$$u^{(m,n)}(x,t) = {}_i \mathbf{B}_n^{(m)}(x) {}_i \mathbf{Q}_n^{(n)}(t) \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}_i(x) \mathbf{P}^m \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_i(t) \bar{\mathbf{P}}^n \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} \quad (3.96)$$

bağıntısı geçerlidir.

3.5.2. Koşullar için matris bağıntıları

Lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin bir sınıfı olan (6.2) başlangıç koşulları için (3.15) eşitliğinden

$$u(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1, \quad u_t(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(t) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 \quad (3.97)$$

matris bağıntıları elde edilir. (3.97) matris ilişkisinde verilen $u(x,t)$ ve $u_t(x,t)$ eşitliklerinde ise t yerine 0 yazarsak,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = g_1(x), \\ u_t(x,0) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = g_2(x) \end{aligned} \quad (3.98)$$

matris ilişkilerini elde edebiliriz.

3.5.3. Çözüm Yöntemi

Bu kısımda, (3.89) ve (3.90) başlangıç koşulları ile verilen, ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi için (3.91) formunda yaklaşık çözümleri elde etmeye çalışacağız.

İlk olarak (3.94) ve (3.96) ifadelerindeki matris denklemleri, (3.89) kısmi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak, Lineer olmayan Klein-Gordon kısmi diferansiyel denklemi $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ aralığında

$$\{\mathbf{X}_1(x)\mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} + \alpha \mathbf{X}_1(x) \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t) \bar{\mathbf{M}}\} \bar{\mathbf{A}}_1 + \beta_1 \mathbf{X}_1(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{X}_n(x) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_n(t) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_n = \mathbf{F}(x, t) \quad (3.99)$$

matris denkleminde dönüştürülür. Daha sonra $a \leq x \leq b$ ve $0 \leq t \leq T$ olmak üzere

$$x_k = a + \frac{(b-a)}{N} k, \quad t_l = \frac{T}{N} l; \quad k, l = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlanan sıralama noktaları (3.99) denkleminde yerleştirilerek,

$$\{\mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} + \alpha \mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{M}}\} \bar{\mathbf{A}}_1 + \beta_1 \mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{X}_n(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_n(t_l) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_n = \mathbf{F}(x_k, t_l) \quad (3.100)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Kısaca, bu matris denklemini $k, l = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere

$$\mathbf{W}_1(x_k, t_l) \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{W}_2(x_k, t_l) \bar{\mathbf{A}}_2 + \dots + \mathbf{W}_n(x_k, t_l) \bar{\mathbf{A}}_n = \mathbf{F}(x_k, t_l)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{W}_1(x_i, t_j) = \mathbf{X}_1(x_i) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_j) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} + \alpha \mathbf{X}_1(x_i) \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_j) \bar{\mathbf{M}} + \beta_1 \mathbf{X}_1(x_i) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_j) \bar{\mathbf{M}}$$

ve $i = 2, 3, \dots, n$ olmak üzere,

$$\mathbf{W}_i(x_k, t_l) = \beta_i \mathbf{X}_n(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_i(t_l) \bar{\mathbf{M}}$$

şeklinde bağıntı mevcuttur. Buradan genel formda

$$\tilde{\mathbf{W}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1 + \tilde{\mathbf{W}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2 + \dots + \tilde{\mathbf{W}}_n \bar{\mathbf{A}}_n = \mathbf{F} \quad (3.101)$$

matris denklemini elde edilir. Buradaki matris gösterimleri $i = 0, 1, \dots, N$ ve $j = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{W}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_0^j \\ \tilde{\mathbf{W}}_1^j \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{W}}_N^j \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_i^j = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i(x_0, t_i) \\ \mathbf{W}_i(x_1, t_i) \\ \vdots \\ \mathbf{W}_i(x_N, t_i) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_0, t_i) \\ \mathbf{f}(x_1, t_i) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(x_N, t_i) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi, (3.90) başlangıç koşullarının temel matris formlarını oluşturmak için sıralama noktalarını (3.98) matris denklemlerinde yerine koyarak, $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x_k, 0) &= \mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = g_1(x_k) \\ u_t(x_k, 0) &= \mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = g_2(x_k) \end{aligned} \quad (3.102)$$

sistemlerini elde ederiz. Buradan, elde ettiğimiz sistemleri $k, l = 0, 1, \dots, N$ ve $0 \leq x_k \leq 1$, $0 \leq t_l \leq T$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= [g_1(x_0) \ g_1(x_1) \ \dots \ g_1(x_N)]^T, & \mathbf{G}_2 &= [g_2(x_0) \ g_2(x_1) \ \dots \ g_2(x_N)]^T, \\ \mathbf{U}_k &= \mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} = [u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{i(N+1)^2}], & \mathbf{U} &= [\mathbf{U}_0 \ \mathbf{U}_1 \ \dots \ \mathbf{U}_N]^T \\ \mathbf{V}_k &= \mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} = [v_{k1} \ v_{k2} \ \dots \ v_{k(N+1)^2}], & \mathbf{V} &= [\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_1 \ \dots \ \mathbf{V}_N]^T, \end{aligned}$$

olmak üzere kısaca,

$$\mathbf{U} \bar{\mathbf{A}}_1 = [\mathbf{G}_1] \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{G}_1],$$

ve

$$\mathbf{V} \bar{\mathbf{A}}_1 = [\mathbf{G}_2] \text{ ya da } [\mathbf{V}; \mathbf{G}_2],$$

şeklinde matris formlarını yazabiliriz.

(3.90) başlangıç koşulları (3.89) denkleminin lineer kısmına ait koşullar olması nedeniyle, denklemin lineer kısmına ait $\tilde{\mathbf{W}}_1^j$ matris formunun, $2 \times (N+1)$ alt satırı

silinerek (3.102) koşulların matris formları yerleştirilir ve $\tilde{\mathbf{W}}_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$) matrislerinin $2 \times (N+1)$ alt satırı sıfır kabul edilirse

$$\bar{\mathbf{W}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_0^j \\ \tilde{\mathbf{W}}_1^j \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{W}}_{N-2}^j \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_0^j \\ \tilde{\mathbf{W}}_1^j \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{W}}_{N-2}^j \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N-2} \\ \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde matrisler elde edilir. Böylece (3.89) denkleminin (3.90) koşulları altında

$$\bar{\mathbf{W}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{W}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2 + \dots + \bar{\mathbf{W}}_n \bar{\mathbf{A}}_n = \bar{\mathbf{F}} \quad (3.103)$$

şeklinde temel matris denklemi elde edilir. Bu lineer olmayan sistemin çözülmesiyle, bilinmeyen

ve

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[[a_{00} \ a_{01} \ \dots \ a_{0N}] \ [a_{10} \ a_{11} \ \dots \ a_{1N}] \ \dots \ [a_{N0} \ a_{N1} \ \dots \ a_{NN}] \right]_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere kısaca

$$\mathbf{W} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{F}] \quad (3.104)$$

temel matris denklemi şeklinde ifade edilebilir.

Son olarak, bulunan $a_{p,q}$; $p, q = 0, 1, 2, \dots, N$ katsayıları Bölüm 3’de verilen (3.4) denkleminde yerine konularak

$$u(x, t) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N a_{p,q} B_{p,q}^{n,N}(x, t)$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

3.5.4. Hata Analizi

Bu kesimde, Kesim 3’de açıklandığı üzere, (3.89), (3.1)-(3.4) problemi için uygulanan Bernstein sıralama yönteminin incelenmesi, bu nümerik yöntemin tutarlılığının ve işlerliğinin ortaya konulması ve nümerik çözümün iyileştirilmesi için çözümlerin mutlak hatası, rezidü hatası ve farklı normlar üzerindeki hataların incelenmesi yapılmaktadır.

Burada, (3.22)’de tanımlanan $e_{N,N}(x,t)$ hata fonksiyonu, benzer şekilde elde edilmektedir. Kesim 2’de tanımlanan L_2 ve L_∞ normlarında ve RSM ile tanımlanan hatalar (3.89), (3.1)-(3.4) probleminin Bernstein sıralama yöntemi ile bulunan $u_{N,N}(x,t)$ yaklaşık çözümü için de geçerli olmaktadır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, ikinci mertebeden sabit ve değişken katsayılı lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için sunulan, sıralama noktalarına dayalı Bernstein matris metodunun doğruluğunu (tutarlılığını) ve etkinliğini açıklamak için, literatürde sıkça karşılaşılan örnekler verilecektir.

4.1. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler için Bernstein Matris Metodu ile İlgili Uygulamalar

Örnek 4.1. İlk örnek olarak 1-Boyutlu 2. Dereceden lineer hiperbolik telgraf denklemi ele alınsın. Bu denklem genellikle bir kablo iletişim (taşıma) hattındaki elektrik sinyallerinin dalga hareketlerinde ve dalga yayılımlarında kullanılır. Ayrıca biyoloji bilimi ve mühendislik bilimi dallarındaki birçok araştırmacı da bu denklemi, reaksiyon-difüzyon süreçlerinin modellenmesinde kullanmışlardır [44]. Bunun yanı sıra bu denklem $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için sönümlü bir dalgayı temsil etmektedir. Son yıllarda, ileri analiz literatüründe ve 2. Dereceden hiperbolik tip denklemlerin nümerik çözümü için kararlı metotların uygulamalarında oldukça dikkat çekici bir durumdadır. Buradan hareketle sınır koşulları ile birlikte α ve β bilinen sabitler ve $a \leq x \leq b, t \geq 0, \alpha > \beta > 0$ olmak üzere, 1-Boyutlu 2. Dereceden lineer hiperbolik telgraf denklemi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (4.1)$$

ve

$$\begin{cases} u(x, 0) = x^2, & u(x, 1) = 1 + x^2 \\ u(0, t) = t, & u(1, t) = 1 + t \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde verilsin [45].

1. Durum: Burada $\alpha = 2, \beta = 1$ ve $f(x, t) = 2\alpha - 2 + \beta^2(x^2 + t)$ olduğunda problemin tam çözümünün $u(x, t) = x^2 + t$ olduğu bilinmektedir.

Bölüm 3'deki adımları uygulayarak, $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ için telgraf denkleminin matris formunda gösterimi (3.21) bağıntısından,

$$\left\{ \mathbf{X}(x_n) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(t_l) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{S}} + 2\alpha \mathbf{X}(x_n) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(t_l) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{S}} + \beta^2 \mathbf{X}(x_n) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(t_l) \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}(x_n) \mathbf{P}^2 \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(t_l) \bar{\mathbf{S}} \right\} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F}$$

olarak elde edilir. $N = 4$ için sıralama noktaları

$$x_n = ih, \quad t_l = lh, \quad h = \frac{1}{4} \quad i, l = 0, 1, \dots, 4$$

olmak üzere koşulların matris formunu elde etmek için (3.16), ve (3.17) ifadelerinden, sıralama noktaları (4.2) denklemlerinde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} u(x_n, 0) = \mathbf{X}(x_n) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = x_n^2, & \quad u(0, t_l) = \mathbf{X}(0) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(t_l) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = t_l \\ u(x_n, 1) = \mathbf{X}(x_n) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(1) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = 1 + x_n^2, & \quad u(1, t_l) = \mathbf{X}(1) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(t_l) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}} = 1 + t_l \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ya da koşulların temel matrisi

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{X} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_1} = \mathbf{g}_1, & \quad \underbrace{\mathbf{X} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(1) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_2} = \mathbf{g}_2 \\ \underbrace{\mathbf{X}(0) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_3} = \mathbf{h}_1, & \quad \underbrace{\mathbf{X}(1) \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_4} = \mathbf{h}_2 \end{aligned}$$

olarak gösterilirse, (4.1) denkleminin (4.2) koşulları altında çözümünü elde edebilmek için oluşturulan arttırılmış matris, (3.18) eşitliğinden,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & ; & \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_1 & ; & \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{K}_2 & ; & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{K}_3 & ; & \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{K}_4 & ; & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Burada $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisin pseudoinverse matrisi, $\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = (N+1)^2$ olmak üzere tanım 2.15 ifadesinden,

$$\mathbf{W}^* = (\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}^T$$

şeklindedir. Buradan bilinmeyen Bernstein katsayılar matrisi, (3.19) eşitliğinden,

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^* \tilde{\mathbf{F}}$$

olarak bulunur. Buradan;

$$u(x, t) = u_{4,4}(x, t) = \sum_{p=0}^4 \sum_{q=0}^4 a_{p,q} B_{p,q}^{n,4}(x, t) = x^2 + t$$

yaklaşık çözümü bulunur. Bu çözüm polinom tipli olduğu için, aynı zamanda tam çözümdür.

2. Durum: Örnek 4.1'in 2. problemi, hiperbolik tip telgraf denklem $\alpha = 8$, $\beta = 4$ ve $f(x, t) = (\beta^2 - 2\alpha)e^{x-t}$ için Dirichlet sınır koşulları,

$$\begin{cases} u(x, 0) = e^x, & u(x, 1) = e^{x-1} \\ u(0, t) = e^{-t}, & u(1, t) = e^{1-t} \end{cases}$$

ile ele alınsın. Problemin tam çözümü, $u(x, t) = e^{x-t}$ dir. Bernstein matris metoduyla yaklaşık çözümü bulmak için, $N = 7, 10$ ve 15 değerlerine karşılık gelen sıralama noktaları, sırasıyla, (4.3) ve (4.4) denklemlerinde yerine yazılır. Bu durumda telgraf denkleminin temel matris denklemi,

$$\{\mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{S}} + 2\alpha \mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} (\bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{S}} + \beta^2 \mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}\mathbf{P}^2 \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{S}})\} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F}$$

olarak elde edilir. Gösterim kolaylığı açısından temel matris denklemi,

$$\mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{S}} + 2\alpha \mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} (\bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{S}} + \beta^2 \mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}\mathbf{P}^2 \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{W}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

şeklinde gösterilebilir.

Buradan koşullar için temel matris denklemleri,

$$\underbrace{\mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{K}_1} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{g}_1, \quad \underbrace{\mathbf{X}\mathbf{S}^T \bar{\mathbf{T}}(+1) \bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{K}_2} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{g}_2$$

$$\underbrace{\mathbf{X}(0)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_3} = \mathbf{h}_1, \quad \underbrace{\mathbf{X}(+1)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_4} = \mathbf{h}_2$$

olarak elde edilir. (4.3) denkleminin, (4.4) koşulları altında, sıralama noktalarına dayalı Bernstein matris metoduyla yaklaşık çözümünü bulmak için $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$ arttırılmış matrisine koşulların matrisi de eklenirse oluşturulan yeni arttırılmış matris,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & ; & \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{K}_2 & ; & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{K}_3 & ; & \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{K}_4 & ; & \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Bu matrise işlem kolaylığı açısından Gauss eliminasyon yöntemi uygulandıktan sonra sıfır satırları atılarak $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$ bulunur. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılar matrisi

$$\bar{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}$$

olarak elde edilir. Buradan $rank(\tilde{\mathbf{W}}) = (N+1)^2$ olmak üzere, $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin pseudoinverse matrisi \mathbf{W}^* bulunup, bilinmeyen Bernstein katsayıları,

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^* \tilde{\mathbf{F}}$$

matris denkleminin çözümünden elde edilir.

Şimdi iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümlerini hesaplayalım. Hata analizi için ilk olarak $N=3$ için yaklaşık çözümler $u_{3,3}(x,t) = \hat{u}(x,t)$ olsun ve rezidü fonksiyonu

$$R_{3,3}(x,t) = \hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + 2\alpha \hat{u}_t + \beta^2 \hat{u} - f$$

olmak üzere hatanın denklemini

$$\frac{\partial^2 e_{3,3}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_{3,3}(x,t)}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial e_{3,3}(x,t)}{\partial t} + \beta^2 e_{3,3}(x,t) - f(x,t) = -R_{3,3}(x,t) \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} e_{3,3}(x,0) = e^x, & e_{3,3}(x,1) = e^{x-1} \\ e_{3,3}(0,t) = e^{-t}, & e_{3,3}(1,t) = e^{1-t} \end{cases} \quad (4.4)$$

ele alalım. Bölüm 3’de verilen matris metodu ile $M = 8$ için (3.23) hata problemini çözersek, $N = 3$ için yaklaşık Bernstein hata fonksiyonu yaklaşımı $e_{3,8}^*(x,t)$ olmak üzere iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü

$$\begin{aligned} u_{3,3,8}(x,t) &= \hat{u}(x,t) + e_{3,8}^*(x,t) \\ &= 0.457855420014 - 0.5412224487011x^2 + 0.252422200148x^4 - 8.3148651803 \times 10^{-3}x^6 \\ &\quad + 3.663590624015 \times 10^{-4}x^8 + (3.367793323932 \times 10^{-7}x^8 - 7.64352525089 \times 10^{-6}x^6 \\ &\quad + 9.29341230745 \times 10^{-5}x^4 - 4.519773768322 \times 10^{-4}x^2 + 3.663590624015 \times 10^{-4})t^8 \\ &\quad + (7.643525250895 \times 10^{-6}x^8 - 1.73477029739 \times 10^{-4}x^6 + 2.10922775855 \times 10^{-3}x^4 \\ &\quad - 0.010258053747x^2 + 8.3148651803 \times 10^{-3})t^6 + (9.29341230745 \times 10^{-5}x^8 \\ &\quad - 2.10922775855 \times 10^{-3}x^6 + 0.025645134368x^4 - 0.124722977704x^2 + 0.101096637827)t^4 \\ &\quad + (4.519773768322 \times 10^{-4}x^8 - 0.010258053747x^6 + 0.124722977704x^4 - 0.606579826964x^2 \\ &\quad + 0.477888122599)t^2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$N = 7, 10$ ve 13 değerleri için, iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümlerin kesme hatası, L_∞ normunda maksimum hatası ve L_2 normunda hatası ve RMS hatası [39] hesaplanmıştır. Yapılan hesaplamalarda, virgülden sonraki basamak sayısı 20 olarak alınmıştır.

$N = 3$ için yaklaşımın kesme hatası için, $u(x,t) = e^{x-t}$ çözüm fonksiyonunu iki değişkenli Bernstein serisine açılarak $u_{3,3}(x,t)$ katsayıları elde edilir. Bu katsayılar ile $\hat{u}_{3,3,8}(x,t)$ yaklaşık çözümün katsayıları arasındaki (2.45) eşitsizliğinden, kesme hatası için bir üst sınır

$$e_D(3,3) \leq \sum_{N=0}^8 |u_{N,N}(x_i, \tau) - \hat{u}_{N,N,M}(x_i, \tau)| = 0.416312889786859004 \times 10^{-6}$$

olarak bulunur. Problemin tanım bölgesi $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$ de yaklaşımın L_∞ normu ile verilen maksimum (mutlak) hatası,

$$e_{\max}(3,3) = \|u(x_i, \tau) - \hat{u}_{3,3,8}(x_i, \tau)\|_{\infty} = 0.714235913837 \times 10^{-6}$$

olarak elde edilir. Burada $0 \leq i \leq 5$ ve $\tau \in [0,1]$ aralığında sabit sayıdır.

Rezidü fonksiyonlarına ait Bernstein hata fonksiyonu yaklaşımı $u_{3,3,8}(x, t)$ için L_2 normunda hata ve RMS hatası;

$$L_2 - \text{hata} = \left(\sum_{i=0}^8 (u(x_i, \tau) - \hat{u}_{3,3,8}(x_i, \tau))^2 \right)^{1/2} = 0.45517001145 \times 10^{-7}$$

$$\text{RMS} - \text{hata} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^8 (u(x_i, \tau) - u_{3,3,8}(x_i, \tau))^2}{8}} = 0.82345862221 \times 10^{-8}$$

olarak bulunur.

Çizelge 4.1.'de, problemin tam çözümü, Bernstein polinom ve rezidü fonksiyonu dahil edilerek iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü karşılaştırılmış ve $t=1$ anında sıralama noktaları için N ve M değerleri arttıkça tam çözüme oldukça yakın sonuçlar elde edilmektedir. Çizelge 4.2.'de, N 'in farklı değerlerine göre maksimum hata ve kesme hatası ve RSM hata değerleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Çizelgede, N değerleri arttıkça problemin çözümünde yapılan maksimum hata ve kesme hatasının azaldığı gözlenmektedir. Çizelge 4.3.'de, farklı zamanlarda Bernstein metodunun mutlak hatası, rezidü fonksiyonunun ilavesi ile verilen düzeltilmiş Bernstein metodunun mutlak hatası ile Chebyshev Wavelets metodunun mutlak hatası $N=12$ ve $M=10$ için karşılaştırılmıştır. Rezidü fonksiyonu ile bulunan İyileştirilmiş Bernstein polinom metodunun mutlak hatasının daha küçük olduğu bu karşılaştırmadan gözlemlenmiştir. N değerleri arttıkça çözümlerdeki hassasiyet azalmaktadır. Bu nedenle N değeri bu problem için en fazla 20 olarak alınmıştır. Daha büyük değerler için bilgisayarda işlem yapmanın getirdiği yük artmakta ve programın çalışma süresi uzamaktadır.

Çizelge 4.1. Örnek 4.1'in $N = 7, 10$ ve $M = 10, 13$ değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözümün karşılaştırılması

Sıralama Noktaları	Tam Çözüm e^{x-t}	Bernstein Polinom Çözümü	İyileştirilmiş Bernstein Polinom Çözümü
(x_i, t_i)	$u(x_i, t_i)$	$u_{7,7}(x_i, t_i)$	$u_{7,7,10}(x_i, t_i)$
(0,1)	0.3678794411714423216	0.36787949745874441002	0.36787944004572123686
(0.2,1)	0.44932896411722159143	0.44932895365554702248	0.4493289621346112555
(0.4,1)	0.54881163609402643263	0.54881163788452666872	0.548811631456013354299
(0.6,1)	0.67032004603563930074	0.6703200347758001854	0.670320049211064689613
(0.8,1)	0.81873075307798185867	0.81873073144478554114	0.818730757402156852456
(1,1)	1	1.000000000001213488	0.9999999999999998782

(x_i, t_i)	$u(x_i, t_i)$	$u_{10,10}(x_i, t_i)$	$u_{10,10,13}(x_i, t_i)$
(0,1)	0.3678794411714423216	0.36787944114564532315	0.367879441171856821315
(0.2,1)	0.44932896411722159143	0.44932896400047312291	0.449328964134544780311
(0.4,1)	0.54881163609402643263	0.54881163614410237883	0.54881163607123356
(0.6,1)	0.67032004603563930074	0.67032004612044316652	0.670320046034318835117
(0.8,1)	0.81873075307798185867	0.81873075304559431871	0.81873075307619759942
(1,1)	1	1	1

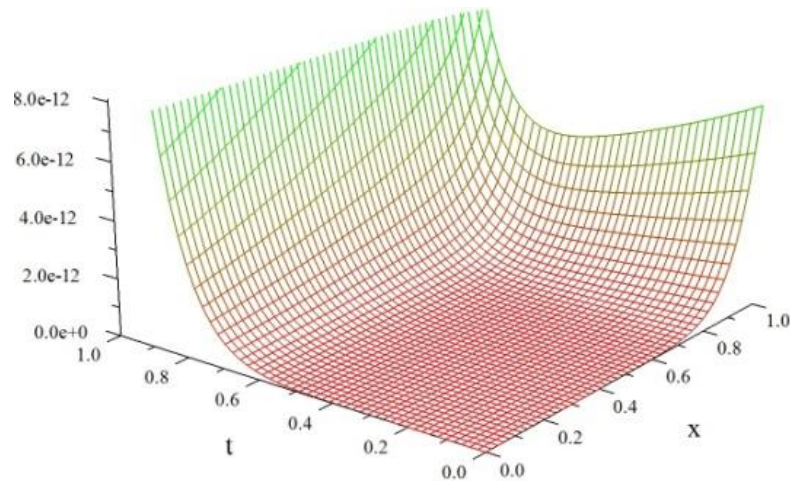
Çizelge 4.2. Örnek 4.1'in kesikleme maksimum ve RSM hatalarının, N 'in farklı değerleri için karşılaştırılması

t	$N = 7, M = 10$			$N = 13, M = 10$		
	$e_D(N, N)$	$e_{\max}(N, N)$	RSM-Hata	$e_D(N, N)$	$e_{\max}(N, N)$	RSM-Hata
0	0.41E-6	0.71E-6	0.82E-8	8.45E-12	2.1E-13	1.7E-14
0.1	0.75E-5	2.0E-6	1.5E-6	1.21E-12	0.87E-12	5.5E-13
0.3	1.49E-4	7.02E-5	0.3E-5	3.6E-11	4.9E-12	9.3E-13
0.6	5.86E-5	4.66E-5	1.7E-5	3.17E-12	7.0E-12	3.2E-13
0.9	8.69E-5	1.9E-5	0.36E-5	5.8E-12	8.38E-12	2.6E-14
1	3.18E-6	9.4E-7	2.9E-7	4.91E-12	3.6E-13	7.5E-14

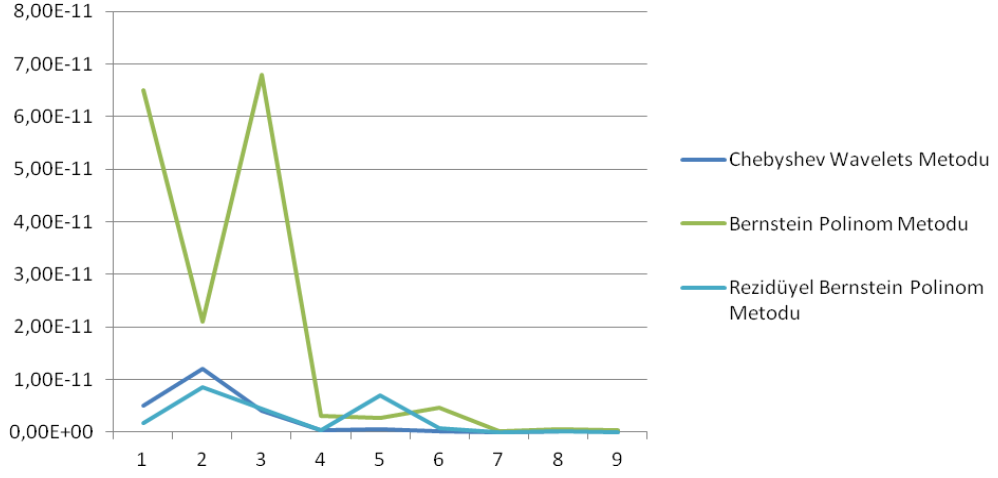
Çizelge 4.3. Örnek 4.1'in $N=12$, $M=12$, $k=1$ için Chebyshev wavelets metodu, Bernstein Metodun mutlak hatalarının karşılaştırılması

(x,t)	Chebyshev Wavelets Metodu [45]	Bernstein Polinom Metodu	İyileştirilmiş Bernstein Polinom Metodu
	$M=12, k=1$	$N=12$	$N=12, M=10$
(0,0.3)	0.5E-11	6.5E-11	1.7E-12
(0.5,0.3)	1.2E-11	2.1E-11	8.5E-12
(1,0.3)	0.4E-11	6.8E-11	4.4E-12
(0,0.6)	0.4E-12	3.0E-12	3.2E-13
(0.5,0.6)	0.6E-12	2.7E-12	0.21E-12
(1,0.6)	0.2E-12	4.6E-12	2.5E-13
(0,0.9)	0.3E-13	1.3E-13	3.2E-14
(0.5,0.9)	0.6E-13	5.2E-13	0.61E-13
(1,0.9)	0.6E-13	4.1E-13	4.5E-14

Aşağıdaki Şekil 4.1.'de sıralama noktalarına dayalı Bernstein matris metodunun $N=10, 15$ ve 20 için yaklaşık çözümleri, tam çözümlerle karşılaştırılmıştır. Çözümler tam çözüme oldukça yakın olduğundan grafikler arasında fark gözlenmemektedir. Çizelge 4.2.'de farklı normlarda hata değerleri verilmiş ve Şekil 4.1. ve Şekil 4.2.'de grafiksel olarak çözümün doğruluğu ifade edilmiştir.



Şekil 4.1. Örnek 4.1'in, $N=12$, $M=12$, $k=1$ için iyileştirilmiş mutlak hata grafiği



Şekil 4.2. Örnek 4.1 için Chebyshev wavelets metodu, Bernstein Metodu ve İyileştirilmiş Bernstein metodunun mutlak hatalarının karşılaştırılması

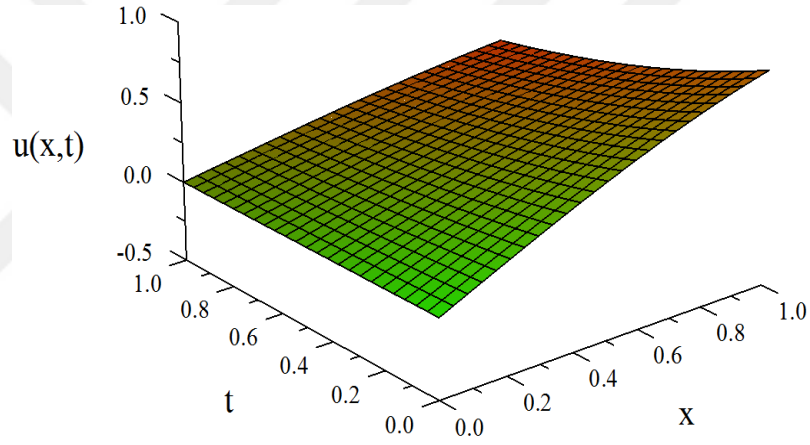
3. Durum: Örnek 4.1'nin 3. problemi, hiperbolik tip telgraf denklem $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ ve $f(x,t) = (2 - \alpha + \beta^2)e^{-t} \sin(x)$ için sınır koşulları,

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin x, & u(x,1) = e^{-1} \sin x \\ u(0,t) = 0, & u(1,t) = e^{-t} \sin 1 \end{cases}$$

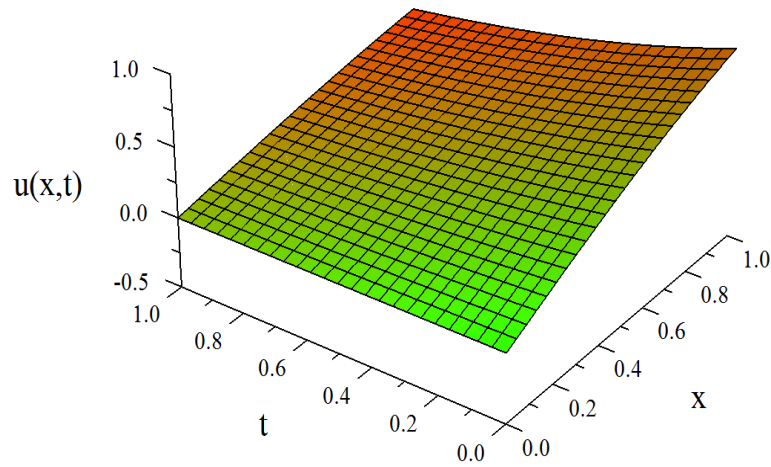
ile ele alınsın. Problemin tam çözümü, $u(x,t) = e^{-t} \sin(x)$ dir. N ve M nin çeşitli değerleri için yöntem uygulanarak Bernstein polinom çözümleri hesaplanır ve çözümlere ait iyileştirilmiş hata fonksiyonları tahmin edilir. Çizelge 4.4.'de $t=1$ anındaki maksimum mutlak hatalar, tahmin edilen maksimum mutlak hatalar ve Chebyshev wavelets metodunun mutlak hatası ile karşılaştırılmıştır. N ve M değerleri için 20 hanede duyarlık kullanılmış olup değerler arttıkça mutlak hataların azaldığı gözlemlenmektedir. Şekil 4.3.'de hiperbolik tip telgraf denklem için tam çözüm ve $N, M = 10, 12$ için yaklaşık çözüme ait grafik verilmiştir.

Çizelge 4.4. Örnek 4.1'in 3. durumu için maksimum mutlak hataların karşılaştırılması

Bernstein polinom çözümleri için maksimum mutlak hataları							
N	6	7	8	9	10	11	12
Hata	2.3E-4	1.2E-5	3.8E-6	4.7E-7	3.5E-8	8.6E-10	3.0E-12
İyileştirilmiş Bernstein polinom çözümleri için tahmin edilen maksimum mutlak hataları							
(N, M)	(6,8)	(7,8)	(8,10)	(9,10)	(10,12)	(11,15)	(12,15)
Hata	5.4E-4	3.9E-4	7.1E-6	8.2E-6	2.6E-10	5.5E-12	9.5E-14
Chebyshev wavelets metodunun mutlak hatası [45]							
$(M = 12, k = 1)$	$t = 0.3$		$t = 0.6$		$t = 0.9$		
Hata	1.1E-13		1.5E-13		0.5E-13		



(a) Tam Çözüm



(b) Yaklaşık Çözüm

Şekil 4.3. (a)-(b) Örnek 4.1'in 3. durumu için tam çözüm ve $N, M = 10, 12$ için yaklaşık çözüm grafikleri

Örnek 4.2. İkinci olarak,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + u = (2 - 2t + t^2)(x - x^2)e^{-t} + 2t^2e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \quad (4.5)$$

hiperbolik tip kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

başlangıç koşulları ve

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$$

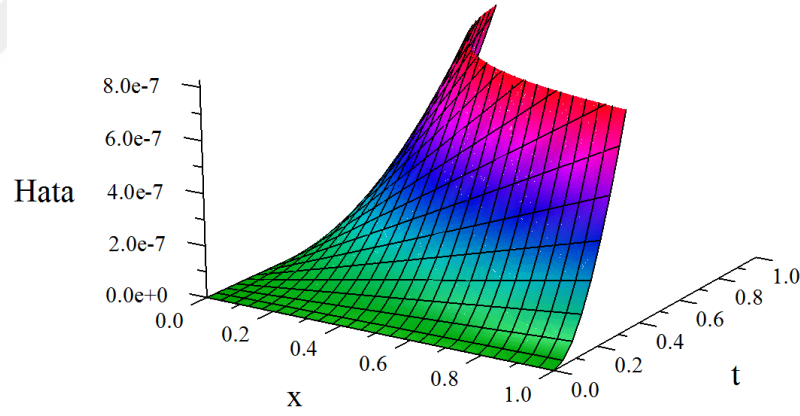
Dirichlet sınır koşulları ile ele alalım. Problemin tam çözümü $u(x, t) = t^2(x - x^2)e^{-t}$ dir. Bu problemi Çizelge 4.6 da, $N = 10$ ve $M = 10$ alarak $t = 0.5$ zamanında yaklaşık çözümleri ve rezidü fonksiyonu entegre edilmiş yaklaşık çözümlerini hesaplayalım. $e_N(x, t) = |u(x, t) - u_N(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonunun farklı N değerleri için çizilen grafikleri Şekil 4.4 (a)-(d)'de sunulmakta olup N değeri artarken mutlak hataların azaldığı Şekil 4.4.'den görülür. Çizelge 4.5.'de, $t = 1$ zamanında farklı x değerleri için İyileştirilmiş Bernstein metodu, Rothe-Wavelet metodu (RWM) ve Chebyshev Tau metodu (CTM)'nin mutlak hataları ile karşılaştırılır. Karşılaştırılan noktalarda, sunulan metodun RWM'den daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir.

Çizelge 4.5. Örnek 4.2' nin $u(x_i, 1)$ için mutlak hatalarının karşılaştırılması.

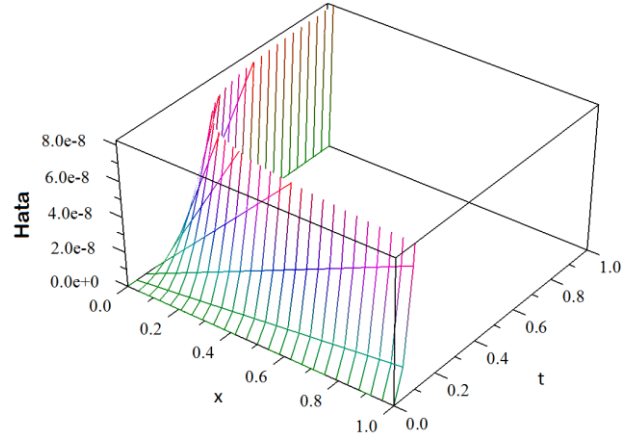
x_i	RWM [46]	CTM [47]	Bernstein Metodu	İyileştirilmiş Bernstein Metodu
	$n = 6, m = 9$	$n = m = 7$	$N = 7$	$N = 7, M = 10$
0.125	1.2E-6	5.8E-8	3.14E-7	3.36E-9
0.250	1.9E-6	1.0E-7	7.04E-7	2.0E-8
0.375	2.4E-6	1.2E-7	2.6E-6	5.29E-7
0.500	2.6E-6	1.3E-7	6.17E-7	1.88E-6
0.625	2.4E-6	1.2E-7	3.22E-6	4.57E-7
0.750	1.9E-6	1.0E-7	4.19E-6	8.92E-8

Çizelge 4.6. Örnek 4.2' nin $u(x_i, 0.5)$ için yaklaşık çözümlerin aldığı değerler

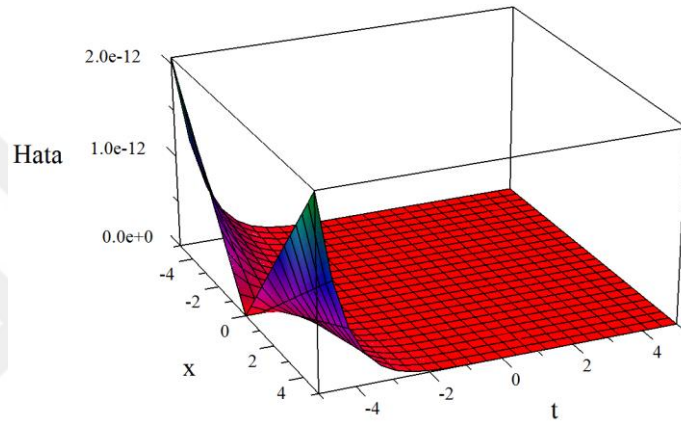
(x_i, t_i)	Bernstein Polinom Metodu	İyileştirilmiş Bernstein Polinom Metodu
	$N = 10$	$N = 10, M = 10$
(0,0.5)	1.0E-6	1.0E-6
(0.1,0.5)	1.9E-5	4.0E-7
(0.2,0.5)	3.0E-6	2.0E-7
(0.3,0.5)	6.0E-6	1.0E-6
(0.4,0.5)	2.0E-6	0.0E-6
(0.5,0.5)	5.0E-6	1.0E-6
(0.6,0.5)	2.0E-6	0.0E-6
(0.7,0.5)	6.0E-6	1.0E-6
(0.8,0.5)	3.0E-6	2.0E-7
(0.9,0.5)	1.9E-5	4.0E-7
(1,0.5)	1.0E-6	1.0E-8



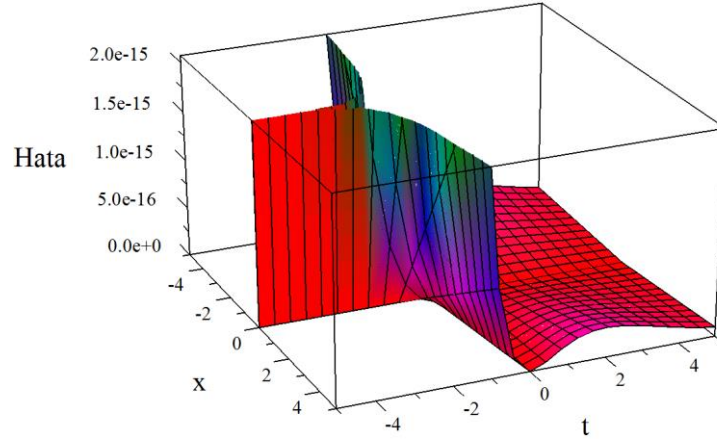
(a) $N, M = 8, 8$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği



(b) $N, M = 10, 12$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği



(c) $N, M = 16, 16$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği



(d) $N, M = 18, 18$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği

Şekil 4.4. (a)-(d) Örnek 4.2'in N ve M farklı değerleri için mutlak hata fonksiyonunun grafikleri

Örnek 4.3. $\Omega = \{(x, t) : -1 \leq x, t \leq 1\}$ bölgesi üzerinde,

karşılık gelen Chebyshev sıralama noktaları, sırasıyla, (4.7) ve (4.8) denklemlerinde yerine yazılır. Bu durumda temel matris denklemi,

$$\underbrace{\{-\mathbf{X}\mathbf{P}^2\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{P}})^2\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}\}}_{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

olarak elde edilir. Kısaca,

$$\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

olarak gösterilebilir.

Koşulların temel matris denklemi, sıralama noktalarının, (4.6) eşitliklerinde yerine yazılmasıyla

$$\underbrace{\mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}(-1)\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{K}_1}\bar{\mathbf{A}} = \lambda_1, \quad \underbrace{\mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}(+1)\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{K}_2}\bar{\mathbf{A}} = \lambda_2$$

$$\underbrace{\mathbf{X}(-1)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{K}_3}\bar{\mathbf{A}} = \lambda_3, \quad \underbrace{\mathbf{X}(+1)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}}_{\mathbf{K}_4}\bar{\mathbf{A}} = \lambda_4$$

şeklinde bulunur. (4.7) denkleminin, (4.8) koşulları altında, Chebyshev sıralama noktalarına dayalı Bernstein matris metoduyla yaklaşık çözümünü bulmak için oluşturulan arttırılmış matris,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & ; & \lambda_1 \\ \mathbf{K}_2 & ; & \lambda_2 \\ \mathbf{K}_3 & ; & \lambda_3 \\ \mathbf{K}_4 & ; & \lambda_4 \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan $\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = (N+1)^2$ olmak üzere, $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin pseudoinverse matrisi \mathbf{W}^* bulunup, bilinmeyen Bernstein katsayıları,

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^*\tilde{\mathbf{G}}$$

matris denkleminin çözümünden elde edilir.

$N = 8, 10$, $M = 8, 10$ ve 12 değerlerin için rezidü fonksiyonuna dayalı yöntemin tahmini maksimum hata, L_∞ normuyla ifade edilen maksimum hata ve kesikleme hatası, Çizelge 4.7.'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. N değerleri arttıkça bulunan hata değerlerinin oldukça küçüldüğü çizelgelerden gözlemlenebilmektedir.

Çizelge 4.7. Örnek 4.3, 2. Durum için N 'in farklı değerlerine karşılık hata değerlerinin karşılaştırılması

(N, M) değerleri	Kesikleme Hatası $e_D(N, N)$	Mutlak Hata $e_{\max}(N, N)$	İyileştirilmiş Hata $e_{N, M}^*(x, t)$
(8,8)	9.89E-5	1.9E-5	2.42E-6
(10,10)	6.48E-7	4.67E-6	3.01E-8
(12,12)	3.8E-9	7.11E-9	5.4E-11

Son olarak Çizelge 4.8.'de Bernstein matris metodunun, Legendre-Wavelet metodu [48] ve Chebyshev matris metodu [12] ile $N = 4, 5, 6$ ve 7 değerleri için, maksimum hataları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmanın yapılabilmesi için, maksimum hata tanımı olarak, Legendre-Wavelet metodunda verilen maksimum hata tanımı kullanılmıştır; $\Omega = \{(x, t) : -1 \leq x, t \leq 1\}$ bölgesinde maksimum hata,

$$\sigma_{N, N} = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[u(x, t) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{i, j} B_i^{n, N}(x) B_j^{n, N}(t) \right]^2 dx dt \right\}^{1/2} \quad (4.9)$$

olarak tanımlanır [48].

Çizelge 4.8. Örnek 4.3, 2. Durum için $\sigma_{N, N}$ maksimum hatasının N 'in farklı değerlerine göre diğer yöntemlerle karşılaştırılması

N değerleri	Legendre- Wavelet Metodu [48]	Chebyshev Matris Metodu [12]	Bernstein Sıralama Metodu	İyileştirilmiş Bernstein Metodu
$N = 4$	2.91E-3	1.04E-2	6.05E-3	4.8E-3
$N = 5$	3.14E-4	4.52E-4	9.26E-4	9.0E-4
$N = 6$	1.96E-5	3.41E-5	1.57E-5	2.93E-5
$N = 7$	1.2E-6	5.93E-6	2.0E-6	6.07E-7

3. Durum: Örnek 4.2'nin son problemi, $f(x,t) = 3\sin(x+t)$ olarak alındığında $u(x,t) = \sin(x+t)$ tam çözümüyle ve Dirichlet sınır koşulları ile verilen

$$-\Delta u + u = 3\sin(x+t)$$

Helmholtz problemidir.

Çizelge 4.9.'da rezidü fonksiyonuna dayalı Bernstein sıralama metodunun, Legendre-Wavelet metodu ve Chebyshev matris metoduyla $N = 4, 5, 6$ ve 7 değerleri için $\sigma_{N,N}$ maksimum hataları karşılaştırılmıştır. Legendre-Wavelet metoduyla karşılaştırma yapılabilmesi için, maksimum hata tanımı, (4.9) denklemdeki gibi seçilmiştir. Legendre-Wavelet metodunun küçük N değerleri için daha etkili bir metot olduğu görülmesine rağmen, Chebyshev matris metodu ve Bernstein sıralama metodu, N değerleri arttıkça Legendre-Wavelet metoduna göre daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.9. Örnek 4.3, 3. durumun $\sigma_{N,N}$ maksimum hatasının N 'in farklı değerlerine göre karşılaştırılması

N değerleri	Legendre-Wavelet Metodu [48]	Chebyshev Matris Metodu [12]	İyileştirilmiş Bernstein Metodu
$N = 4$	1.2E-2	1.86E-2	7.14E-3
$N = 5$	4.04E-4	5.16E-4	5.22E-5
$N = 6$	5.06E-5	2.07E-4	6.4E-5
$N = 7$	1.14E-5	7.83E-6	8.58E-7

Örnek 4.4. $\Omega = \{(x, t) : -1 \leq x, t \leq 1\}$ bölgesinde, parabolik tip kısmi diferansiyel denklem

$$u_{xx} + xu_x - u_t = f(x, t) \quad (4.10)$$

ve sınır koşulları

$$u_x(-1, t) = 0 \quad , \quad u|_{\partial\Omega} = -1 \quad (4.11)$$

olarak alınsın. Burada $f(x, t) = 0$ ve tam çözüm $u = xe^t$ dir [48].

Bu problemde, diğer örneklerden farklı olarak, değişken katsayılı bir denklem ve Dirichlet sınır koşullarına ilaveten, fonksiyonun $x = -1$ de x 'e göre türev koşulu verilmiştir. Buna göre (4.10) denkleminin temel matris denklemi,

$$\{\mathbf{X}\mathbf{P}^2\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{S}})\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{G}$$

olur. Benzer şekilde koşulların temel matris denklemi, sıralama noktalarının (4.11) de yerine yazılmasıyla,

$$\underbrace{\mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}(-1)\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_1} = \lambda_1 \quad , \quad \underbrace{\mathbf{X}\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}(+1)\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_2} = \lambda_2 \quad , \quad \underbrace{\mathbf{X}(-1)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_3} = \lambda_3 \quad ,$$

$$\underbrace{\mathbf{X}(+1)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_4} = \lambda_4 \quad , \quad \underbrace{\mathbf{X}(-1)\mathbf{S}^T\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{K}_5} = \lambda_5$$

olarak elde edilir. (4.10) denkleminin, (4.11) koşulları altında çözümünü için oluşturulan arttırılmış matris,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & ; & \lambda_1 \\ \mathbf{K}_2 & ; & \lambda_2 \\ \mathbf{K}_3 & ; & \lambda_3 \\ \mathbf{K}_4 & ; & \lambda_4 \\ \mathbf{K}_5 & ; & \lambda_5 \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Bu sistem çözülerek bilinmeyen Bernstein katsayıları bulunur. Çizelge 4.10'da, Bernstein sıralama metodunun maksimum hataları, Legendre-Wavelet metodunun maksimum hataları ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma için (4.9) denkleminde verilen maksimum hata tanımı kullanılmıştır. N 'in çok küçük değerleri

için Legendre-Wavelet metodu, tezde sunulan Bernstein sıralama metodundan daha iyi sonuçlar vermiştir. Ancak N değerleri arttıkça Bernstein sıralama yönteminin Legendre-Wavelet metodundan daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

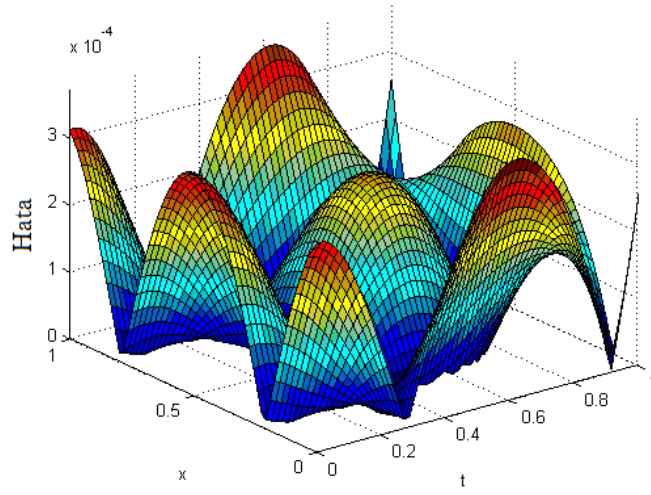
Çizelge 4.10. Örnek 4.4'ün L_{∞} maksimum hatalarının N 'in farklı değerlerine göre Legendre-Wavelet metoduyla karşılaştırılması

N değerleri	Legendre-Wavelet Metodu	Bernstein Sıralama Metodu	İyileştirilmiş Bernstein Metodu
$N = 4$	5.63E-4	8.07E-3	9.10E-4
$N = 5$	7.58E-5	8.46E-5	1.49E-5
$N = 6$	5.90E-6	1.50E-6	2.77E-7
$N = 7$	1.44E-6	9.50E-7	1.28E-8

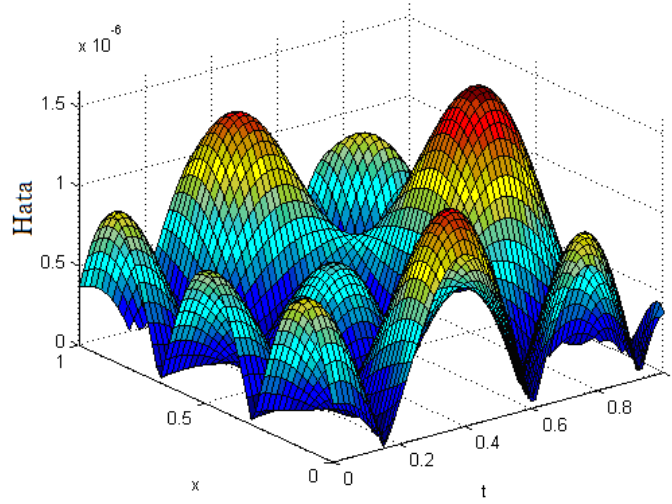
Şekil 4.5. (a)-(c) de, (3.33) ile tanımlanan rezidü fonksiyonlarının tahmini hata grafikleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir. N ve M 'in üç değeri içinde, rezidü fonksiyonu tahmini olarak 10^{-9} hata derecesindedir. Rezidü fonksiyonunun en küçük kaldığı değer $(N, M) = 7, 7$ dir. $(N, M) = 12, 12$ de rezidü fonksiyonunun değeri artmaya başlamıştır. Bunun nedeni, N değeri arttıkça bilgisayar kaynaklı işlem hatalarının artması olarak açıklanabilir. Çizelge 4.11.'de, Bernstein sıralama metodunun maksimum hataları, N 'in daha büyük değerleri için karşılaştırılmıştır. Hesaplamalarda virgülden sonraki hane sayısı 20 olarak alınmıştır. Maksimum hatalar, N değerleri arttıkça azalmaktadır.

Çizelge 4.11. Örnek 4.4'ün maksimum hatalarının N 'in farklı değerleri için karşılaştırılması

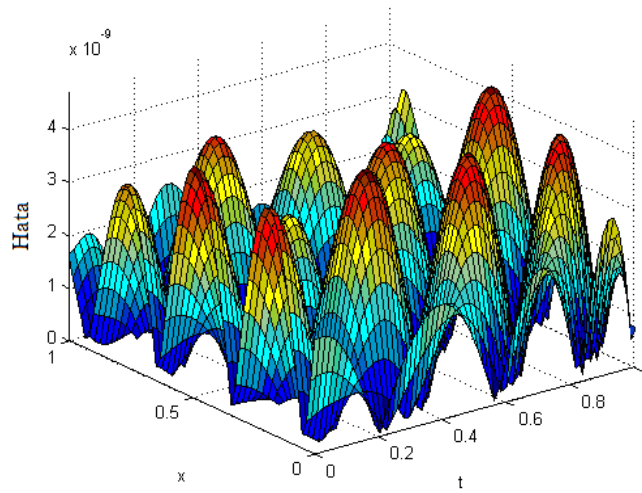
N değerleri	7	12	15
L_{∞} – hata	2.0E-4	5.0E-10	2.0E-13



(a) $|e_{7,7}^*(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği



(b) $|e_{12,12}^*(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği



(c) $|e_{15,15}^*(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği

Şekil 4.5. (a)-(c) Rezidü fonksiyonları ile yöntemin farklı N ve M için karşılaştırmalı iyileştirilmiş hata grafikleri

Örnek 4.5.

$$u_{xx} - 2xtu_{xt} + x^2t^2u_{tt} + x^2tu_x - 2u_t + xu = e^{x+t}(x^2t^2 - 2xt + x^2t + x - 1) \quad (4.12)$$

parabolik tip kısmi diferansiyel denklemini

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = e^x$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, t) = u(1, t) = e^t$$

sınır koşulları ile $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ bölgesinde ele alalım. Problemin tam çözümü $u(x, t) = \exp(x+t)$ dir. Bernstein sıralama metodu $N, M = 3, 5, 8$ ve 9 için uygulayarak yaklaşık çözümleri hesapladık. Çizelge 4.11.'de,

$$L_2 = \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_2 = \left(\int_0^1 \int_0^1 (u(x, t) - u_N(x, t))^2 dx dt \right)^{1/2}$$

ve

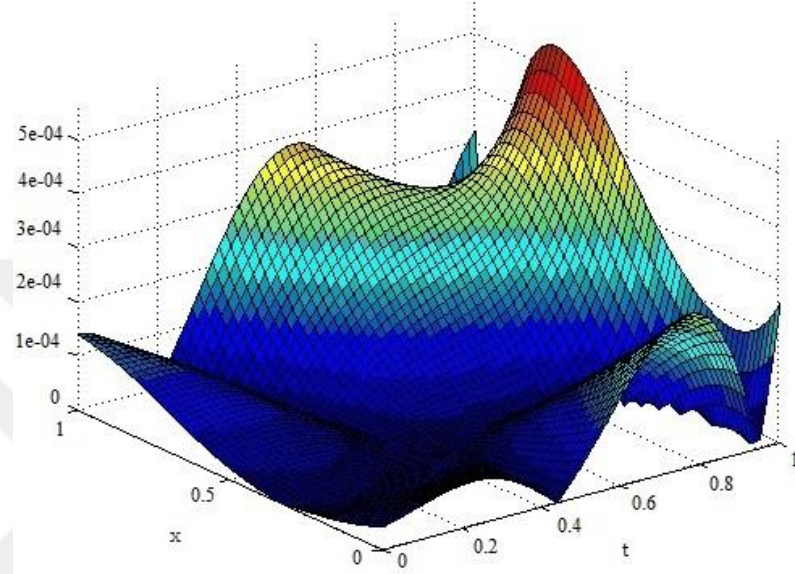
$$L_\infty = \|u(x, t) - u_N(x, t)\|_\infty = \max \{|u(x, t) - u_N(x, t)|, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

kullanılarak elde edilen hatalar verilmiştir. Tahmin edilen $|e_{N,M}(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonları ve Rezidü fonksiyonu yardımıyla iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonunun $|e_{N,M}^*(x, t)| = |u_{N,N,M}(x, t) - u_{N,N}(x, t)|$ farklı N, M değerleri için çizilen karşılaştırmalı grafikleri Şekil 4.6. (a-d) de verilmiştir.

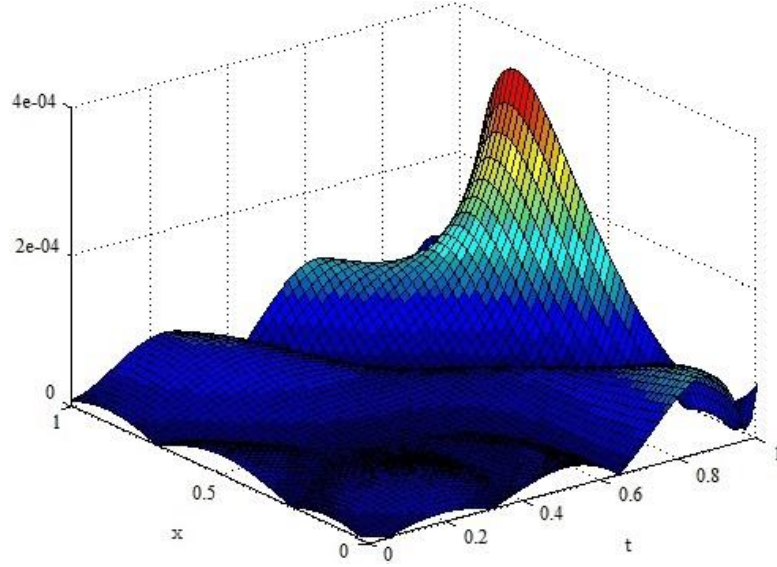
N değeri arttıkça L_2 mutlak ve L_∞ maksimum hatalarının azaldığı Çizelge 4.12. den görülmektedir. Ayrıca, N değeri artarken mutlak hataların azaldığı Şekil 4.6. dan da görülmektedir.

Çizelge 4.12. Örnek 4.5'in L_2 mutlak ve L_∞ maksimum hataları

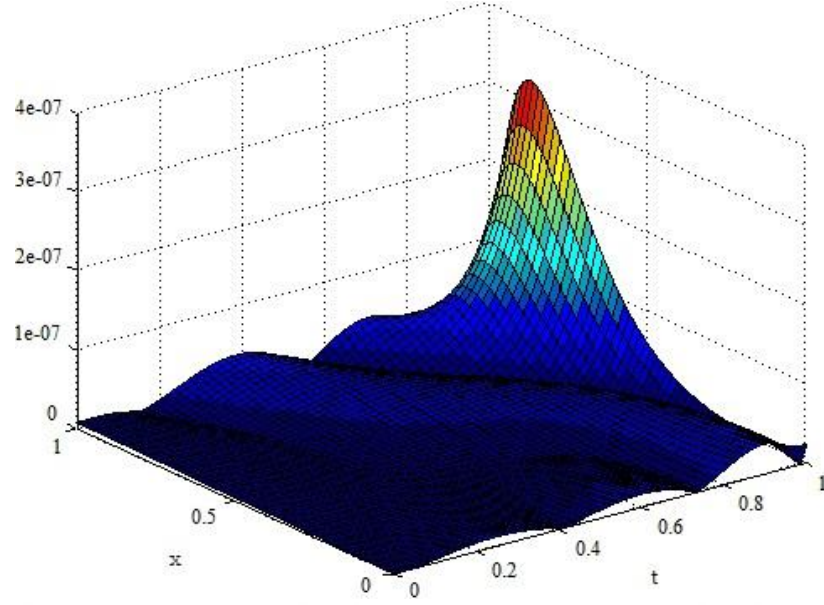
N değerleri	Bernstein Sıralama Metodu			
	3	5	8	9
L_2 mutlak hata	1.62E-2	7.83E-4	4.5E-7	4.13E-8
L_∞ maksimum hata	8.88E-2	4.9E-4	1.65E-7	4.5E-9



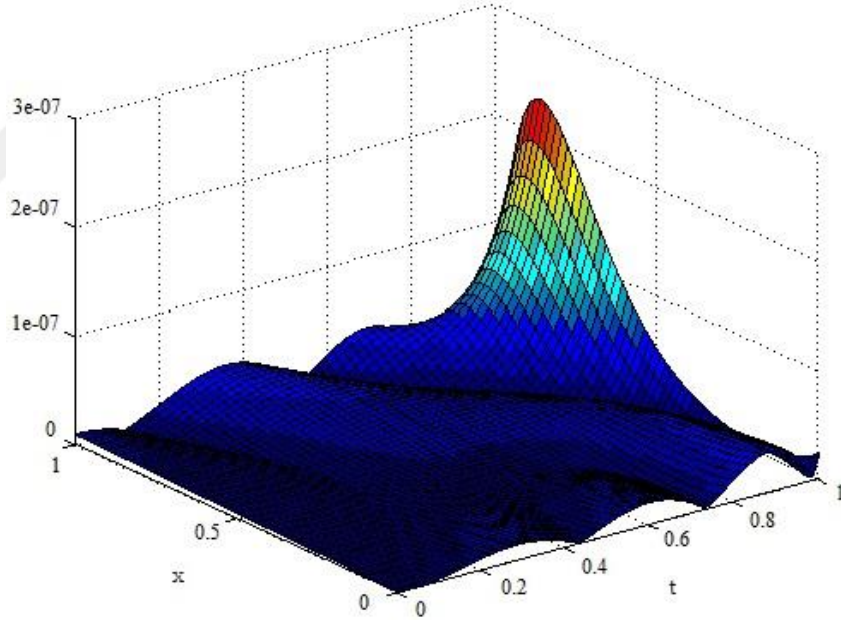
(a) $|e_{5,5}(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği



(b) $|e_{5,6}^*(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu grafiği



(c) $|e_{8,8}(x,t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği



(d) $|e_{8,9}^*(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu grafiği

şekil 4.6. (a)-(d) Rezidü fonksiyonları ile yöntemin $N = 5,8$ ve $M = 6,8$ değerleri için karşılaştırmalı hata grafikleri

Örnek 4.6. Son olarak,

$$u_{tt} - u_{xx} + 12u_t + 4u = 4(\cos t - 3\sin t)\sin x \quad (4.13)$$

1-Boyutlu 2. Dereceden lineer hiperbolik telgraf denklemini

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin x \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç koşulları ve

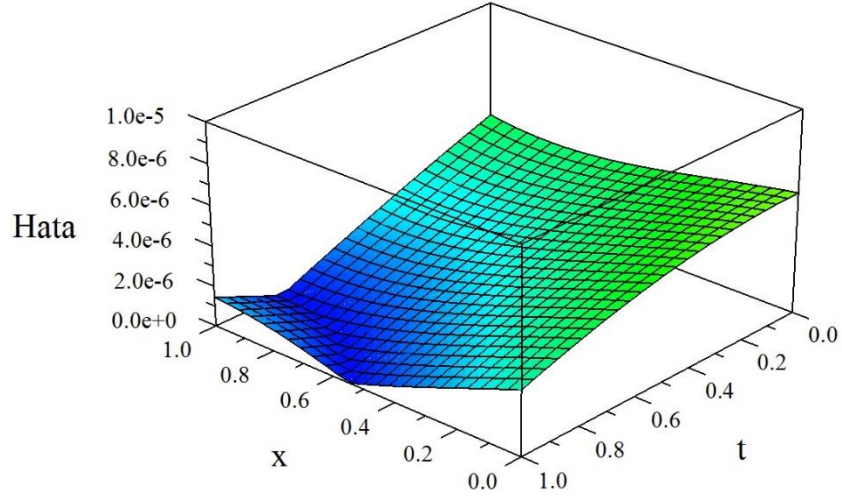
$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = \sin 1 \cos t \end{cases}$$

Dirichlet sınır koşulları ile $\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x, t \leq 1\}$ bölgesinde ele alalım. Problemin tam çözümü $u(x, t) = \sin x \cos t$ dir [49].

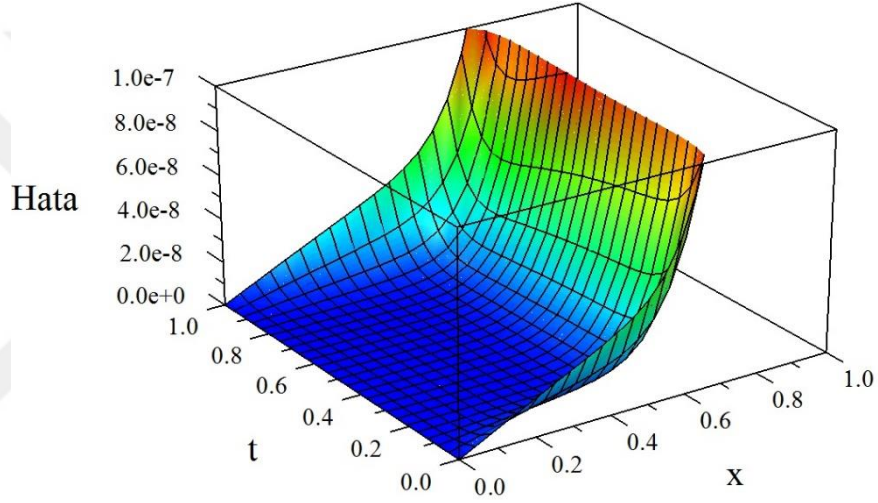
Sunulan yöntem $N = 5, 6, 8, 12$ ve $M = 6, 8, 10, 15$ alınarak probleme uygulanmıştır. Tam çözüm yaklaşık çözüm ve rezidü fonksiyonuna dayalı iyileştirilmiş mutlak hata grafikleri Şekil 4.7’de verilmiştir. Mutlak Hatalar, Quartik B-Spline sıralama metodu [50], Kübik B-Spline sıralama metodu [51], Shifted Gegenbauer Pseudospectral Metodu SGPM [49] yöntemleri Çizelge 4.13. ve Şekil 4.9.’da karşılaştırılmıştır. Quartik ve Kübik B-Spline metotlarından daha iyi sonuç verdiği farklı N değerleri için SGPM metoduna daha yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Şekil 4.8.’de tam çözüm ve $N, M = 10, 12$ için yaklaşık çözüme ait grafik verilmiştir.

Çizelge 4.13. Örnek 4.6, mutlak hatasının N ’in farklı değerlerine göre diğer yöntemlerle karşılaştırılması

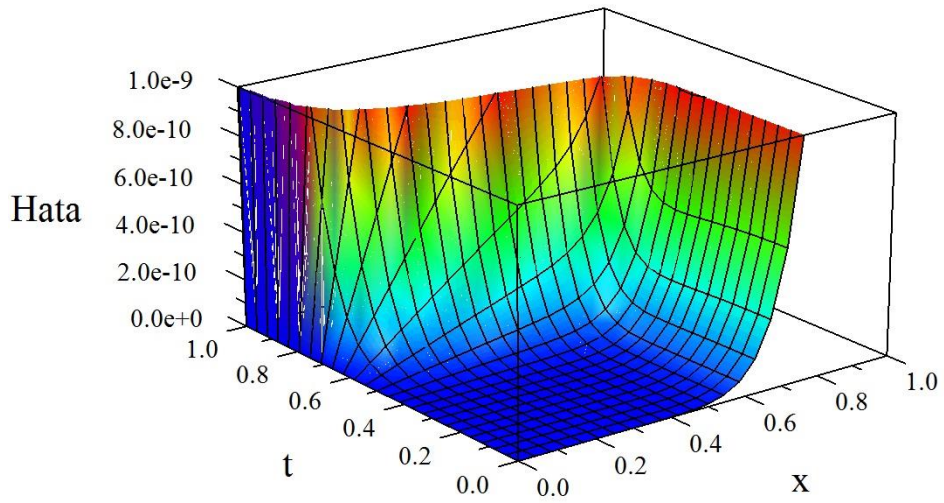
t	QBCM [50]	KBCM [51]	SGPM [49]	Bernstein Sıralama Metodu		
	$h = 0.005,$ $\Delta t = 0.001$	$h = 0.005,$ $\Delta t = 0.001$	$N = 4,$ $M_t = 5$	$N = 5$ $M = 6$	$N = 6$ $M = 8$	$N = 8$ $M = 10$
0.2	2.425E-5	6.827E-5	7.449E-6	1.55E-5	4.46E-6	3.8E-9
0.4	7.932E-5	1.494E-4	2.03E-5	0.66E-4	3.36E-6	1.07E-8
0.6	1.21E-4	2.241E-4	1.127E-6	1.43E-6	2.48E-7	5.36E-9
0.8	1.488E-4	2.898E-4	3.369E-5	2.88E-5	6.12E-6	1.25E-9
1	1.646E-4	3.439E-4	8.06E-5	7.71E-5	2.7E-7	8.3E-9



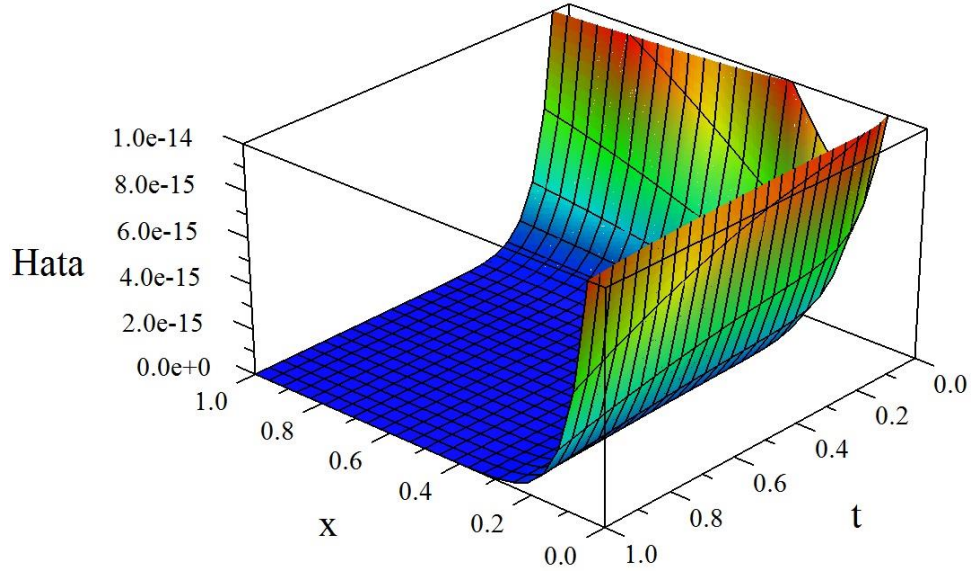
(a) $N, M = 5, 6$ için $|e_{5,6}^*(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği



(b) $N, M = 6, 8$ için $|e_{6,8}^*(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği

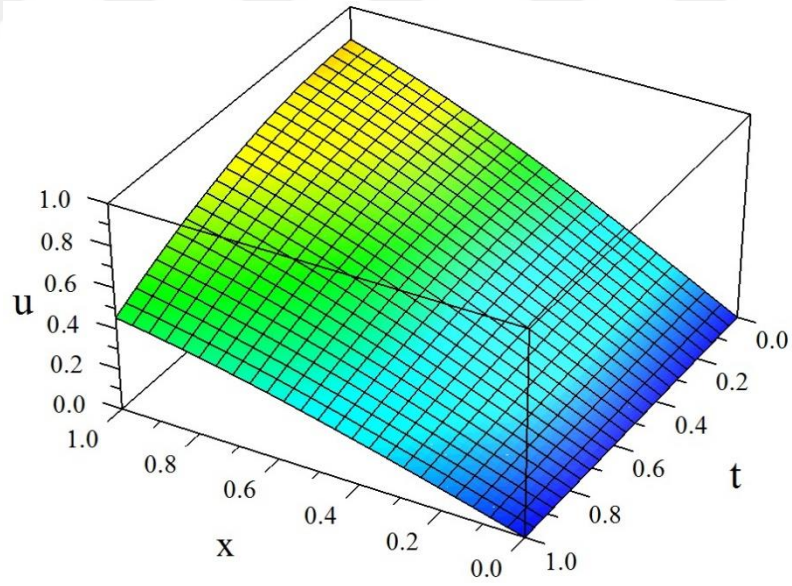


(c) $N, M = 8, 10$ için $|e_{8,10}^*(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği

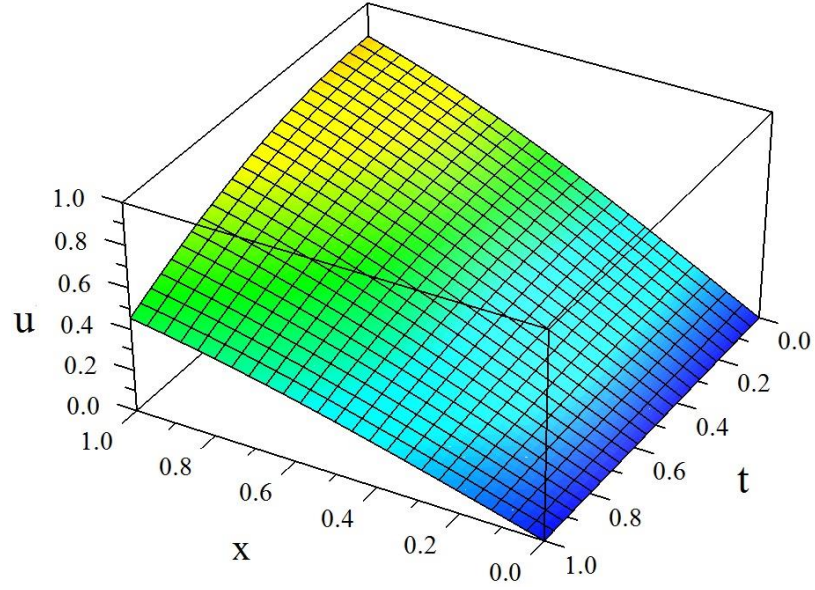


(d) $N, M = 12, 15$ için $|e_{12,15}^*(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonu grafiği

Şekil 4.7. (a)-(d) Rezidü fonksiyonları ile yöntemin $N = 5, 6, 8, 12$ ve $M = 6, 8, 10, 15$ değerleri için karşılaştırmalı hata grafikler

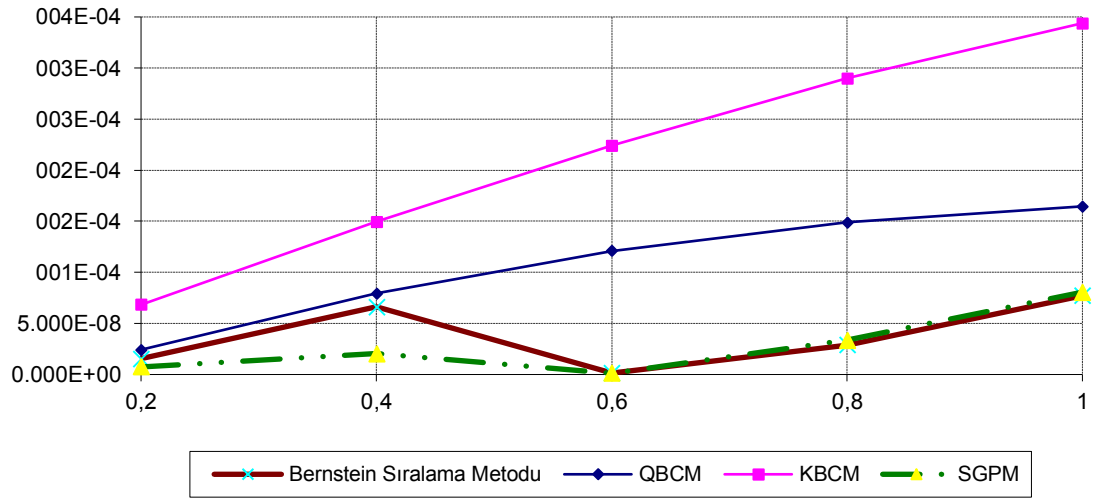


(a) Tam Çözüm



(b) $N, M = 10, 12$ için iyileştirilmiş Bernstein Sıralama metodu grafiği

Şekil 4.8. (a)-(b) Örnek 4.5 tam çözüm ve $N, M = 10, 12$ için yaklaşık çözüm grafikleri



Şekil 4.9. Örnek 4.6 için farklı yöntemler ile İyileştirilmiş Bernstein metodunun mutlak hatalarının karşılaştırılması

4.2. Bir Boyutlu Parabolik Konveksiyon-Difüzyon Problemleri İle İlgili Uygulamalar

Örnek 4.7. İlk olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \quad (4.14)$$

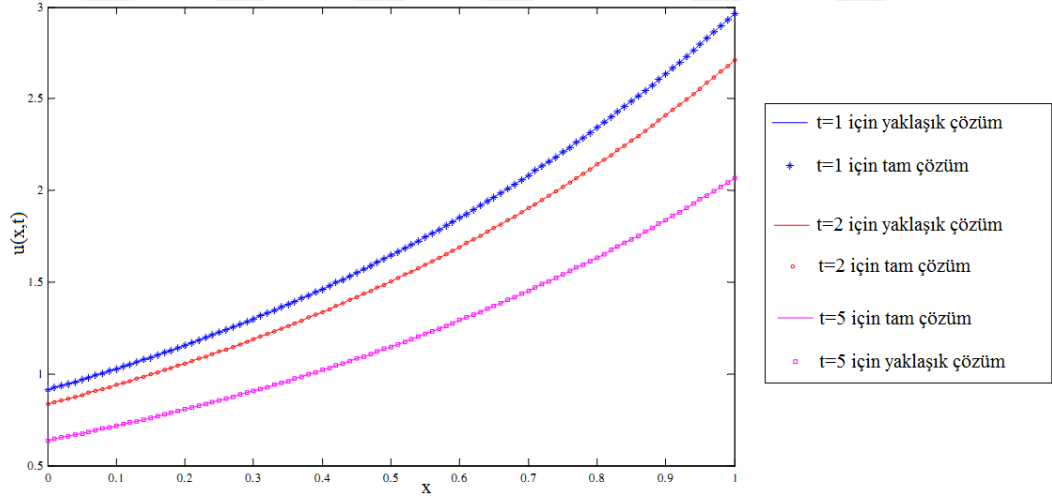
bir boyutlu parabolik konveksiyon-difüzyon denkleminin tam çözümünü kabul eden başlangıç ve Dirichlet sınır koşulları altında ele alalım. Burada $\gamma = 0.02$ parametresi viskozite katsayısı ve $\varepsilon = 0.1$ faz hızını göstermektedir. Denklemin tam çözümü $u(x, t) = \exp(1.1771243444677046x - 0.09t)$ şeklindedir. [52].

Kesim 3.3 de açıklanan Bernstein sıralama metodu ile $N = 12$ ve $M = 14$ değerleri için yaklaşık çözümleri hesapladık. $t = 1$, $t = 2$ ve $t = 5$ anında $(N, M) = (12, 14)$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırmalı grafiği Şekil 4.10 ve Rezidü fonksiyonuna dayalı $|e_{12,14}^*(x, t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata grafiği Şekil 4.11’de gösterilmiştir. Bölgeye ait ilk, orta ve son noktalar $x = 0.1, 0.5$ ve 0.9 olmak üzere $|e_{12,14}^*(x, t)|$ iyileştirilmiş mutlak hatalar, Redefined cubic B-splines collocation metodu (RB-Sp) [52], Restrictive Taylor Yaklaşımı (RT) [53], Sonlu Farklar Douglass (D) [54] yöntemlerinin mutlak hataları Çizelge 4.14’de karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalardan ortaya çıkan sonuç, Bernstein sıralama yönteminin tam çözüm bilindiğinde diğer yöntemlere göre daha etkili olduğunu göstermektedir. Ayrıca N değeri arttıkça hataların azaldığı ancak çözüm sürecinin diğer yöntemlere göre biraz daha uzadığı gözlemlenmektedir.

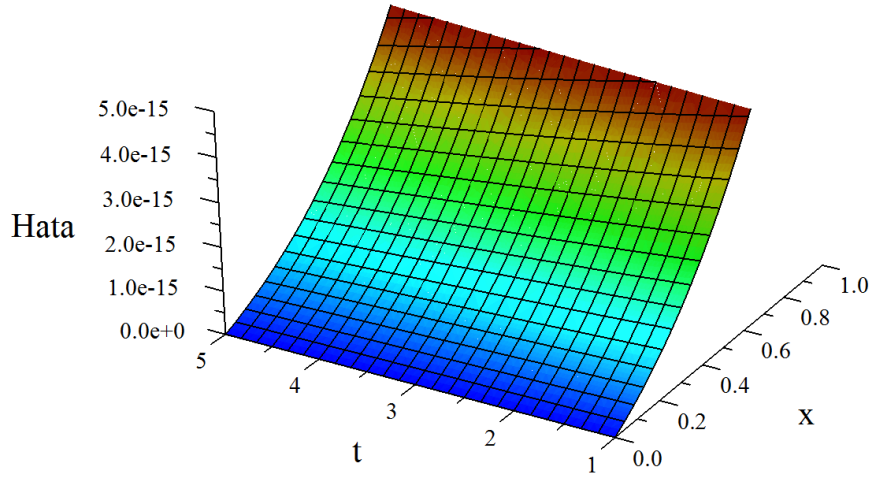
Çizelge 4.14. Örnek 4.7, $|e_{12,14}^*(x,t)|$ iyileştirilmiş mutlak hatasının diğer yöntemlerle karşılaştırılması

x	Bernstein Sıralama Metodu (N, M) = (12, 14)			RB-Sp Metodu [52]		
	$t=1$	$t=2$	$t=5$	$t=1$	$t=2$	$t=5$
0.1	1.06E-15	4.24E-14	2.42E-15	1.73E-07	2.29E-07	2.58E-07
0.5	2.37E-14	1.85E-13	7.93E-15	5.24E-07	9.13E-07	1.36E-06
0.9	8.47E-15	3.32E-14	1.21E-14	5.37E-07	8.09E-07	1.12E-06

x	Restrictive Taylor Yaklaşımı (RT) [53]			Douglass (D) Metodu [54]		
	$t=1$	$t=2$	$t=5$	$t=1$	$t=2$	$t=5$
0.1	2.22E-16	2.22E-16	3.33E-16	1.33E-04	1.77E-04	2.00E-04
0.5	8.88E-16	1.33E-15	2.44E-15	4.04E-04	7.02E-04	1.05E-03
0.9	0.00E-00	4.44E-16	8.88E-16	4.15E-04	6.30E-04	8.83E-04



Şekil 4.10. Örnek 4.7, $t = 1, 2$ ve 5 için tam çözüm ve $u_{12,14}(x,t)$ yaklaşık çözümün karşılaştırılması



Şekil 4.11. Örnek 4.7 problemine ait $N, M = 12, 14$ için $|e_{12,14}^*(x, t)|$ iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonu grafiği

Örnek 4.8. Bir boyutlu singüler konveksiyon-difüzyon problemi başlangıç koşulları altında aşağıdaki gibi ele alınsın:

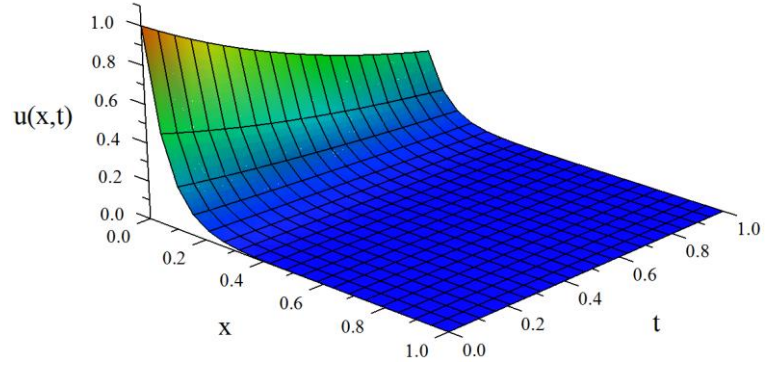
$$u_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(u, t) - cu_x(x, t) + au(x, t) + S(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (4.15)$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u(1, t) = e^{-t - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}. \quad (4.16)$$

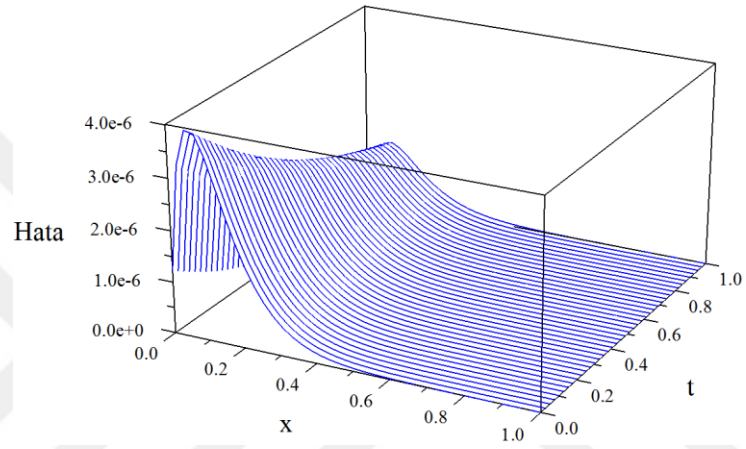
Burada $0 < \varepsilon = 0.005$ çok küçük difüzyon katsayısı, $a = 0.1$ parametresi reaksiyon hızı, $c = -(2 + a)\sqrt{\varepsilon}$ taşınım hızı ve $S(x, t) = 0$ kaynak terimini göstermektedir.

Denklemin tam çözümü $u(x, t) = \exp\left(-t - \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ şeklindedir. [55].

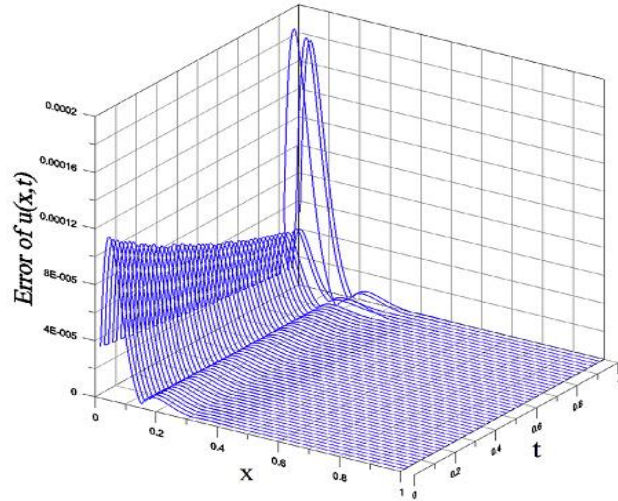
Problemin Bernstein polinom fonksiyonuna dayalı yaklaşık çözümlerini Kesim 3.3'de açıklanan $N = 5, 7, 9$ için Bernstein sıralama yöntemini kullanarak hesapladık. Çizelge 4.15'de N ve M 'in farklı değerleri için yönteme ait çözümlerin $|e_N(x, t)|$ maksimum hataları, iyileştirilmiş çözümlerin $|e_{N,M}^*(x, t)|$ maksimum hataları ve tahmin edilen $|e_{N,M}(x, t)|$ hataları verilmiştir. $t = 1$ zamanındaki tam çözüm ve tezde sunulan yöntemin $(N, M) = (7, 9)$ için $|e_{7,9}^*(x, t)|$ iyileştirilmiş mutlak hatası ile Weak-Form İntegral Denklem Metodunun (WFIEM) hata karşılaştırmaları Şekil 4.12 (a)-(c)'de gösterilmiştir.



(a) Tam Çözüm



(b) $(N, M) = (7, 9)$ için $|e_{7,9}^*(x, t)|$ hata fonksiyonu grafiği



(c) WFIEM yöntemine ait hata grafiği [55]

Şekil 4.12. (a)-(c) Örnek 4.8 için tam çözümün grafiği, yaklaşık çözüm ve WFIEM yöntemlerine ait hata grafikleri

Çizelge 4.15. Örnek 4.8 problemi için sunulan yönteme ait maksimum hataların karşılaştırılması

(N, M) değerleri	$ e_N(x, t) $ hatası	$ e_{N, M}(x, t) $ hatası	$ e_{N, M}^*(x, t) $ hatası
(5,7)	6.93E-04	1.05E-04	7.42E-04
(7,9)	4.00E-06	3.66E-06	1.45E-07
(9,9)	7.02E-08	5.21E-09	2.80E-09

Ayrıca, $t=1$ için WFIEM metodunun maksimum hatası 1.77×10^{-4} ve $t \in (0, 1]$ zaman aralığındaki maksimum hatası ise 1.91×10^{-4} şeklindedir [55]. Dolayısıyla tezde sunulan yönteme ait iyileştirilmiş çözümlere ait maksimum hataların diğer hatalara ve WFIEM yönteminin maksimum hatasına göre, rezidü fonksiyonu yardımıyla daha güçlü hale getirilmiş hata yayılımında herhangi bir problem olmayıp N değerleri arttıkça daha etkili sonuçlar verdiği görülmektedir.

4.3. İki Uzay Değişkenli Kısmi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Uygulamalar

Örnek 4.9. İkinci mertebeden iki-uzay değişkenli lineer hiperbolik telgraf denklemi $\partial\Omega$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset R^2$ hesaplama bölgesinin sınırını belirtmek üzere

$$u_{tt}(x, y, t) + 2\alpha u_t(x, y, t) + \beta^2 u(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + f(x, y, t) \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\alpha > 0$, β bilinen sabitlerdir. (4.17) denkleminde $\beta = 0$ alındığında sönümlü dalga denklemine, $\beta > 0$ olduğunda ise telgraf denklemine indirgenir. $t > 0$ için $(x, y) \in \Omega$ bölgesinde ikinci mertebeden telgraf denklemine ait aşağıdaki başlangıç koşullarını birleştirerek, iki uzay değişkenli başlangıç değer problemini aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (4.18)$$

sınır koşulları: (i) Dirichlet sınır koşulları

$$\begin{cases} u(0, y, t) = \varphi_1(y, t), & u(1, y, t) = \varphi_2(y, t), \\ u(x, 0, t) = \varphi_3(x, t), & u(x, 1, t) = \varphi_4(x, t), \end{cases} \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \quad (4.19)$$

veya (ii) Neumann sınır koşulları

$$\begin{cases} u_x(0, y, t) = \psi_1(y, t), & u(1, y, t) = \psi_2(y, t), \\ u_y(x, 0, t) = \psi_3(x, t), & u(x, 1, t) = \psi_4(x, t), \end{cases} \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0. \quad (4.20)$$

Burada $\psi, \varphi, \psi_i, \varphi_i$ ($1 \leq i \leq 4$) bilinen düzgün fonksiyonlardır.

İlk olarak Ω bölgesinde tanımlı (4.17) ile verilen telgraf denklemini ele alalım. Burada $\alpha = \beta = 1$, $f(x, y, t) = 2(\cos t - \sin t) \sin x \sin y$, $\varphi(x, y) = \sin x \sin y$, $\psi(x, y) = 0$ olsun. Probleme ait Drichlet sınır koşulları

$$\begin{cases} \varphi_1(y, t) = 0, & \varphi_2(y, t) = \cos t \sin(1) \sin y, & 0 \leq y \leq 1 \\ \varphi_3(x, t) = 0, & \varphi_4(x, t) = \cos t \sin x \sin(1), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

şeklinde verilsin. Bu problemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \cos t \sin x \sin y$$

şeklindedir [47].

$N = 4$ ve $M = 5$ alınıp Kesim 3.4'deki adımları uygulayarak, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ve $t > 0$ için problemin matris formunda gösterimi sıralama noktaları kullanılarak (3.67) ve (3.74)-(3.76) bağıntısından,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{X}\mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} - \mathbf{X}\mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{X}\mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}}^2 \\ + 2\alpha \mathbf{X}\mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{P}} + \beta^2 \mathbf{X}\mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \end{array} \right\} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F} \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. (3.71)-(3.73) matris ilişkisinde verilen $u(x, y, t)$ ve $u_t(x, y, t)$ eşitliklerinde sıralama noktaları yerine yazılarak, başlangıç koşulları için

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(t)\bar{\mathbf{A}} = \sin x \sin y, \\ u_t(x, y, 0) = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n^{(1)}(0)\bar{\mathbf{A}} = 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

Dirichlet sınır koşulları için

$$\begin{cases} u(0, y, t) = \mathbf{B}_n(0)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(t)\bar{\mathbf{A}} = 0 \\ u(1, y, t) = \mathbf{B}_n(1)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{R}_n(t)\bar{\mathbf{A}} = \cos t \sin(1) \sin y \\ u(x, 0, t) = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(0)\mathbf{R}_n(t)\bar{\mathbf{A}} = 0 \\ u(x, 1, t) = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(1)\mathbf{R}_n(t)\bar{\mathbf{A}} = \cos t \sin x \sin(1) \end{cases} \quad (4.24)$$

matris bağıntıları yazılabilir. (4.17) denkleminin (4.21) başlangıç ve sınır koşulları altında yaklaşık çözümünü elde etmek için, (3.78) denklemindeki gibi $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$ artırılmış matris koşulların (3.79) artırılmış matris formlarını ekleyerek

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & ; & \boldsymbol{\Phi} \\ \bar{\mathbf{U}} & ; & \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{V} & ; & \boldsymbol{\Phi}_1 \\ \bar{\mathbf{V}} & ; & \boldsymbol{\Phi}_2 \\ \mathbf{Z} & ; & \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \bar{\mathbf{Z}} & ; & \boldsymbol{\Psi}_2 \\ \mathbf{W} & ; & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

yeni artırılmış matrise sahip oluruz. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılar matrisi $\bar{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}$ olarak elde edilir. Son olarak bu lineer sistemin çözülmesiyle,

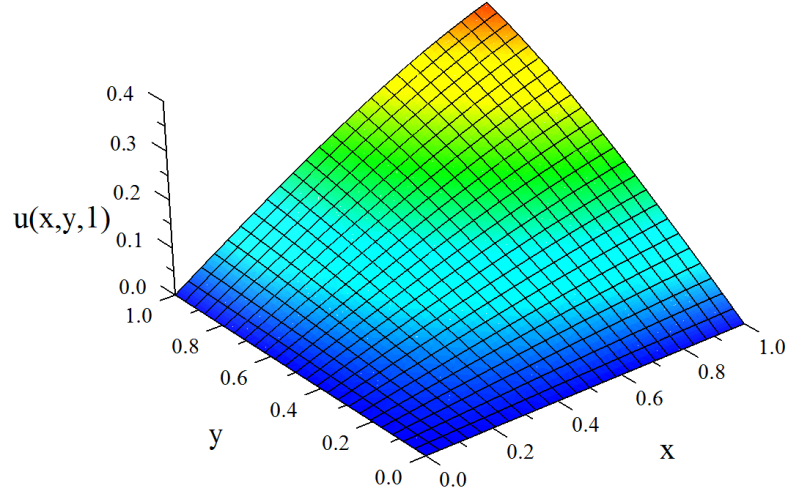
$$u(x, y, t) = u_{4,4,4}(x, y, t) = \sum_{p=0}^4 \sum_{q=0}^4 \sum_{r=0}^4 a_{p,q,r} B_{p,q,r}^{n,4}(x, y, t)$$

yaklaşık çözümü bulunur. (3.80) eşitliği yardımıyla $u_{4,5}(x, y, t)$ iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümü elde edilir. Bu çözümlere ait hata değerleri $N = 4$, $M = 5$

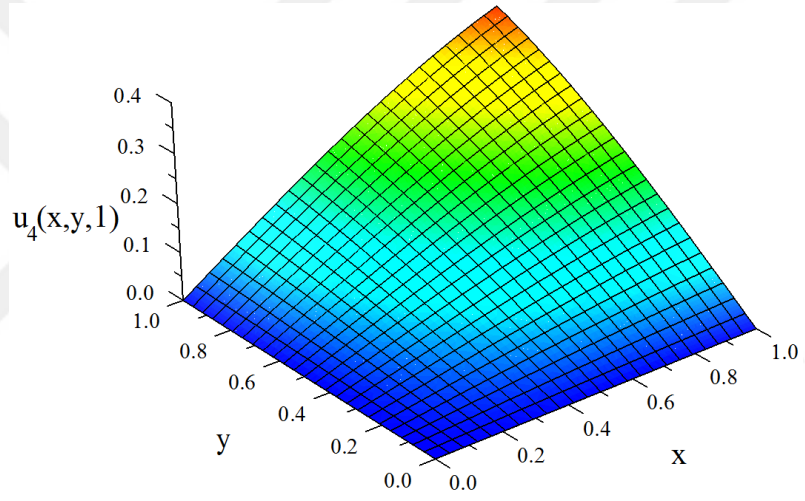
değerlerine karşılık $t \leq 10$ farklı zaman aralıklarında, iyileştirilmiş Bernstein polinom çözümlerinin L_∞ normunda maksimum hatası ve L_2 normundaki mutlak hatası ve R_e bağıl hatası; iyileştirilmiş kuadratik B-Spline metodu- mDQM [56], iyileştirilerek genişletilmiş kubik B-Spline metodu-mECDQ [57] ve İyileştirilmiş Bernstein sıralama metodları Çizelge 4.16’da karşılaştırılmıştır. Yöntemlerin birbirine yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. $u(x, y, t)$ Tam çözüm, $u_4(x, y, t)$ yaklaşık çözüm, $e_4(x, y, t)$ mutlak hata ve rezidü hatası kullanılarak elde edilen $e_{4,5}(x, y, t)$ mutlak hata grafikleri $t = 1, 2, 3$ ve $N = 4$, $M = 5$ olmak üzere sırasıyla Şekil 4.13. (a)-(f) ve Şekil 4.14. (a)-(f)’de verilmiştir.

Çizelge 4.16. Örnek 4.9 probleminde farklı zaman aralıklarında L_∞ , L_2 ve R_e hata değerleri karşılaştırması

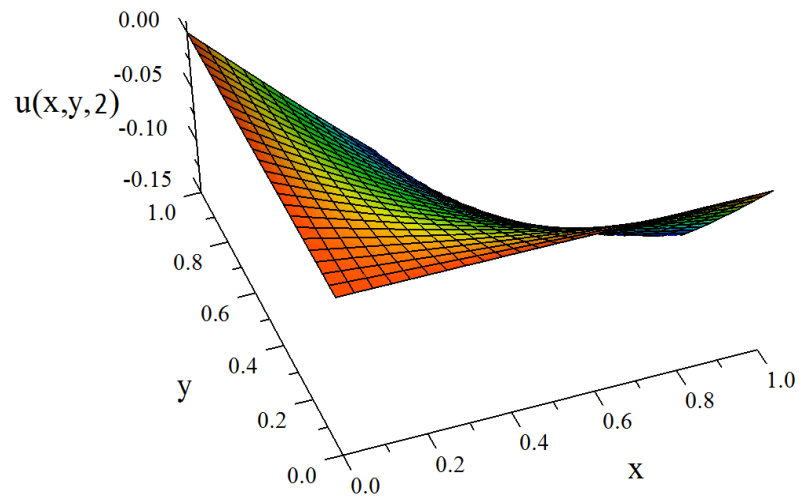
t	mDQM [56]			MECDQ [57]			İyileştirilmiş Bernstein Metodu		
	$\Delta t = 0.01, h_x = h_y = 0.1$			$\Delta t = 0.01, h_x = h_y = 0.1$			$N = 4, M = 5$		
	L_2	L_∞	R_e	L_2	L_∞	R_e	L_2	L_∞	R_e
1	9.97E-4	2.27E-3	5.97E-3	3.75E-6	4.57E-6	2.47E-5	1.76E-7	8.94E-7	1.3E-5
2	1.09E-3	2.87E-3	8.5E-3	4.47E-6	5.61E-6	3.82E-5	4.32E-6	4.35E-6	1.26E-4
3	2.29E-4	6.08E-4	7.47E-4	3.74E-6	6.28E-6	1.34E-5	3.33E-5	6.48E-6	2.17E-5
5	1.16E-3	2.99E-3	1.28E-3	4.41E-6	5.38E-6	5.35E-5	5.26E-6	1.61E-6	2.14E-4
7	7.29E-4	1.88E-3	3.16E-3	3.22E-6	3.75E-6	1.53E-5	5.18E-5	1.35E-5	1.02E-5
10	5.89E-4	1.52E-3	2.29E-3	3.18E-6	3.71E-6	1.36E-5	2.61E-6	3.22E-6	4.25E-5



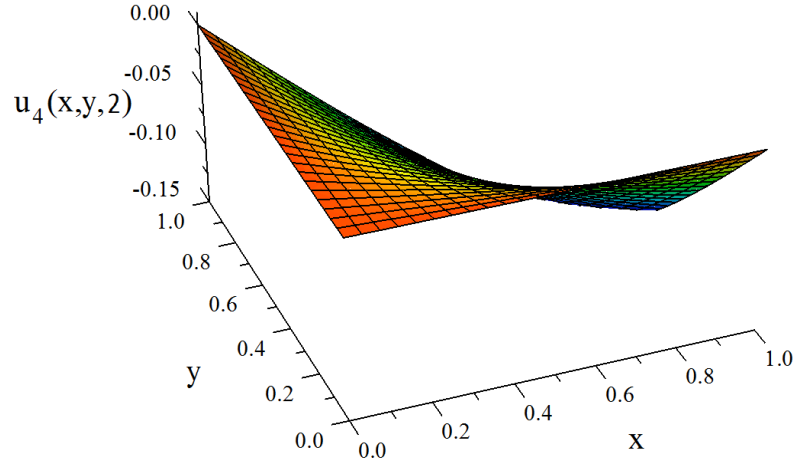
(a) $t=1$ için Tam çözüm



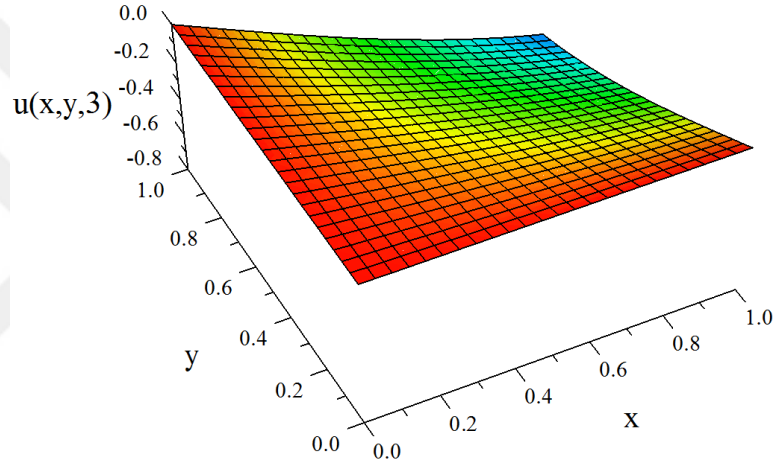
(b) $t=1$ için yaklaşık çözüm



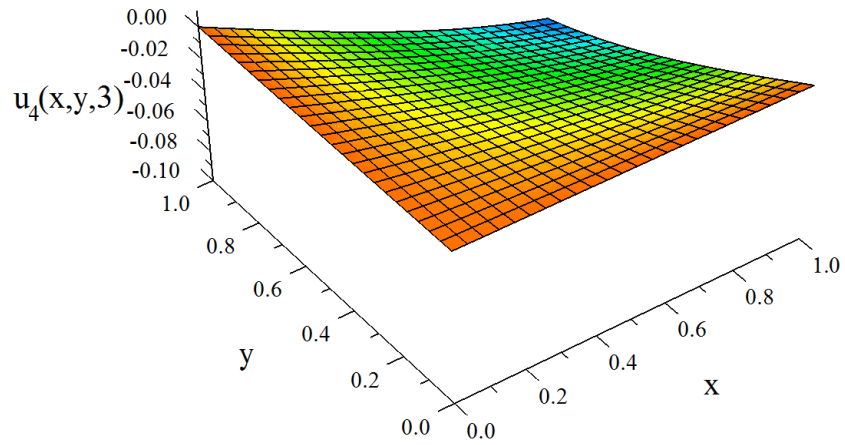
(c) $t=2$ için Tam çözüm



(d) $t = 2$ için yaklaşık çözüm

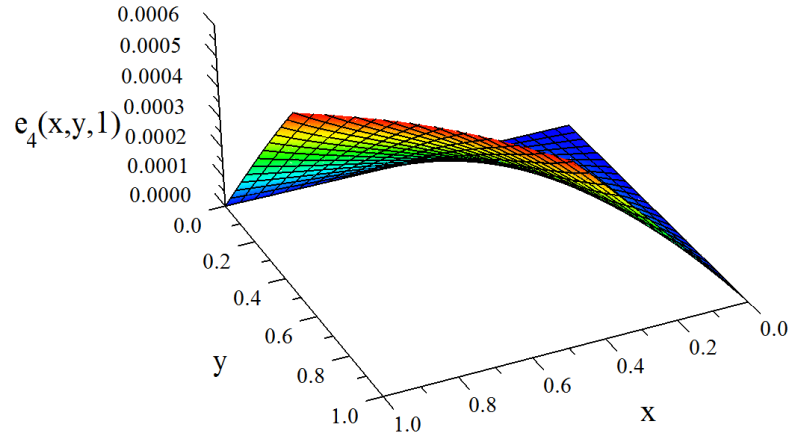


(e) $t = 3$ için Tam çözüm

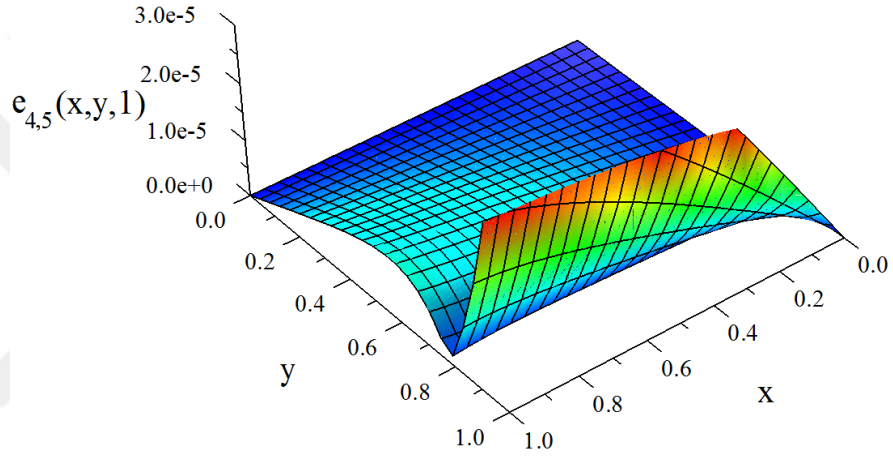


(f) $t = 3$ için yaklaşık çözüm

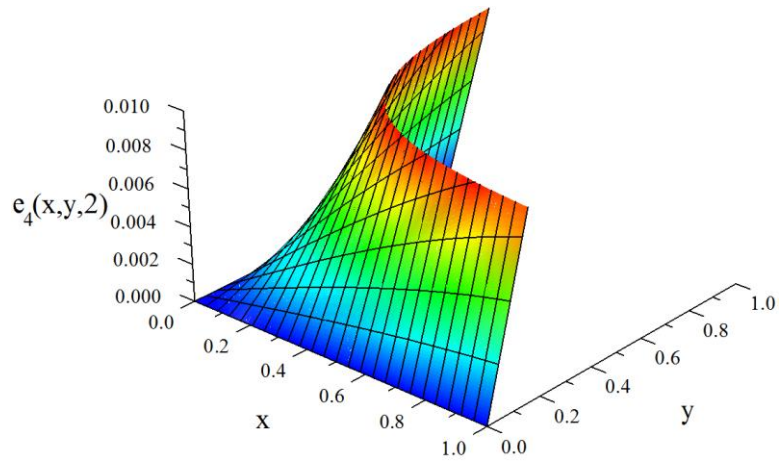
Şekil 4.13. (a)-(f) $t = 1, 2, 3$ için Tam çözüm ve yaklaşık çözüm grafikleri



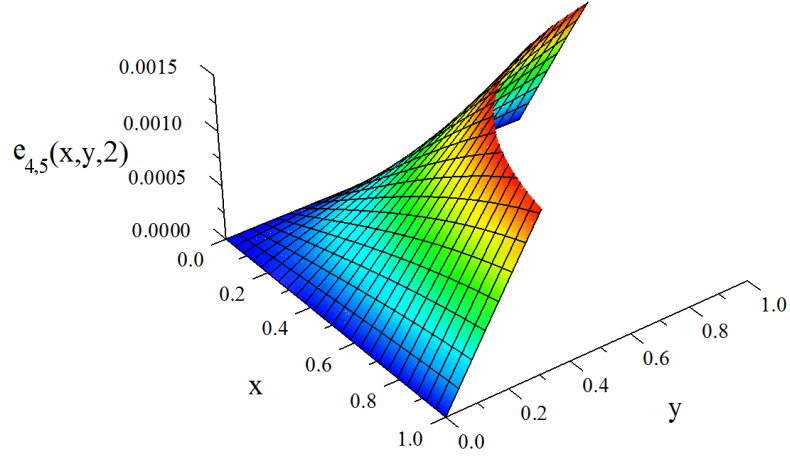
(a) $t=1$ için Mutlak hata $e_4(x, y, t)$ grafiği



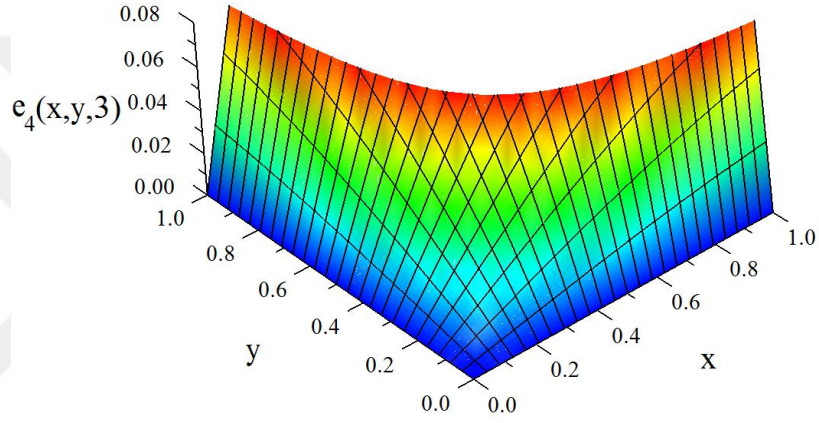
(b) $t=1$ için iyileştirilmiş mutlak hata $e_{4,5}(x, y, t)$ grafiği



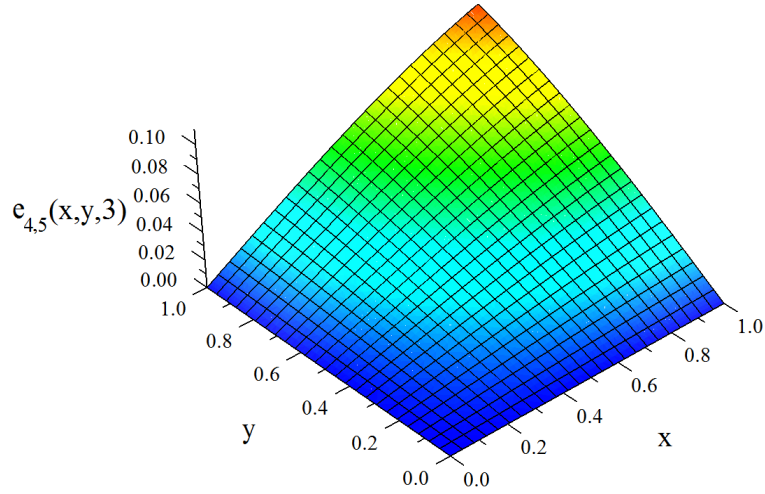
(c) $t=2$ için Mutlak hata $e_4(x, y, t)$ grafiği



(d) $t = 2$ için iyileştirilmiş mutlak hata $e_{4,5}(x, y, t)$ grafiği



(e) $t = 3$ için Mutlak hata $e_4(x, y, t)$ grafiği



(f) $t = 3$ için iyileştirilmiş mutlak hata $e_{4,5}(x, y, t)$ grafiği

Şekil 4.14. (a)-(f) $t = 1, 2, 3$ için Mutlak hata $e_4(x, y, t)$ ve iyileştirilmiş mutlak hata $e_{4,5}(x, y, t)$ grafikleri

4.4. Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler ile ilgili Uygulamalar

Örnek 4.10. Lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin bir sınıfı olan

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta_1 u + \dots + \beta_n u^n = f(x,t) \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \quad (4.26)$$

ile verilen kısmi diferansiyel denklemin

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= g_1(x) \\ u_t(x,0) &= g_2(x) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.27)$$

başlangıç koşulları altında çözümü araştırılacaktır.

1. Durum: $0 \leq x \leq 1$ aralığında kuadratik nonlineerliğe sahip Lineer olmayan Klein-Gordon denklemini ele alalım. Başlangıç koşulları

$$\left\{ \begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.28)$$

olmak üzere $\alpha = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ ve $f(x,t) = 6xt(x^2 - t^2) + x^6 t^6$ verilsin.

Problemin tam çözümünün $u(x,t) = x^3 t^3$ olduğu bilinmektedir [58].

$N = 4$ alınarak Kesim 3.5'deki adımları uygulayarak, $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$ için problemin matris formunda gösterimi (3.100) bağıntısından,

$$\{\mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} - \mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{M}}\} \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{X}_2(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_2(t_l) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{F}(x_k, t_l) \quad (4.29)$$

olarak elde edilir.

(3.97) matris ilişkisinde verilen $u(x,t)$ ve $u_t(x,t)$ eşitliklerinde sıralama noktaları yerine yazılarak,

$$u(x_k, 0) = \mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = 0, \quad u_t(x_k, 0) = \mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = 0 \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir ya da koşulların temel matrisi

$$\underbrace{\mathbf{X}\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{U}} = \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \quad , \quad \underbrace{\mathbf{X}(x_k)\mathbf{M}^T\bar{\mathbf{T}}(0)\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{V}} = \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}$$

olarak gösterilirse, (4.27) başlangıç koşulları (4.26) denkleminin lineer kısmına ait koşullar olması nedeniyle, denklemin lineer kısmına ait $\tilde{\mathbf{W}}_1$ matris formunun, 2×5 alt satırı silinerek (4.30) koşulların matris formları yerleştirilir ve $\tilde{\mathbf{W}}_2$ matrisinin 2×5 alt satırı sıfır kabul edilirse

$$\bar{\mathbf{W}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_0^1 \\ \tilde{\mathbf{W}}_1^1 \\ \tilde{\mathbf{W}}_2^1 \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{W}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_0^2 \\ \tilde{\mathbf{W}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{W}}_2^2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

biçiminde matrisler elde edilir. Böylece (4.26) denkleminin (4.27) koşulları altında

$$\bar{\mathbf{W}}_1\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{W}}_2\bar{\mathbf{A}}_2 = \bar{\mathbf{F}} \quad (4.31)$$

şeklinde temel matris denklemi elde edilir. Bu lineer olmayan sistemin çözülmesiyle,

$$u(x,t) = u_{4,4}(x,t) = \sum_{p=0}^4 \sum_{q=0}^4 a_{p,q} B_{p,q}^{n,4}(x,t) = x^3 t^3 .$$

yaklaşık çözümü bulunur. Bu çözüm polinom tipli olduğu için, aynı zamanda tam çözümdür.

2. Durum: Örnek 4.10'un 2. problemi, $-1 \leq x \leq 1$ aralığı için kuadratik tip Lineer olmayan Klein-Gordon denklem $\alpha = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ ve $f(x,t) = -x \cos t + x^2 \cos^2 t$ için başlangıç koşulları,

$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.32)$$

ile ele alınsın. Problemin analitik tam çözümü, $u(x,t) = x \cos t$ şeklinde verilmiştir [59]. Bernstein matris metoduyla yaklaşık çözümü bulmak için, sıralama noktaları olarak Chebyshev polinomlarının kökleri seçilirse, yani

$$\left\{ (x_k, t_l) : x_k = \cos \frac{k\pi}{N}, \quad t_l = \cos \frac{l\pi}{N}, \quad 0 \leq k, l \leq N \right\}$$

$N = 4, 6$ ve 8 değerlerine karşılık gelen sıralama noktaları, sırasıyla, (4.26) ve (4.32) denklemlerinde yerine yazılır. Bu durumda problemin temel matris denklemi,

$$\{\mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} - \mathbf{X}_1(x_k) \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1(t_l) \bar{\mathbf{M}}\} \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{X}_2(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_2(t_l) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{F}(x_k, t_l)$$

olarak elde edilir. Gösterim kolaylığı açısından temel matris denklemi,

$$\mathbf{X}_1 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1 \bar{\mathbf{P}}^2 \bar{\mathbf{M}} - \mathbf{X}_1 \mathbf{P}^2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_1 \bar{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{W}}_1 \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_2 \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}_2 \bar{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{W}}_2$$

olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{W}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1 + \tilde{\mathbf{W}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{F}$$

şeklinde gösterilebilir. Buradan koşullar için temel matris denklemleri, (3.97) matris ilişkisinde verilen $u(x,t)$ ve $u_t(x,t)$ eşitliklerinde sıralama noktaları yerine yazılarak,

$$u(x_k, 0) = \mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = x, \quad u_t(x_k, 0) = \mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_1 = 0 \quad (4.33)$$

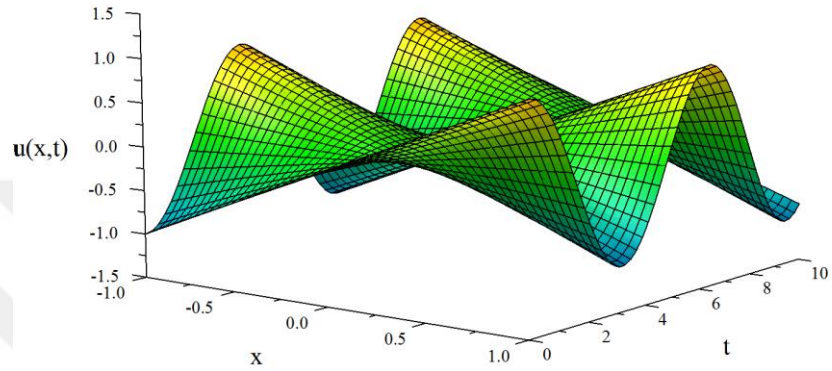
şeklinde yazılabilir ya da koşulların temel matrisi

$$\underbrace{\mathbf{X} \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{g}_1, \quad \underbrace{\mathbf{X}(x_k) \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{T}}(0) \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{g}_2 \quad (4.34)$$

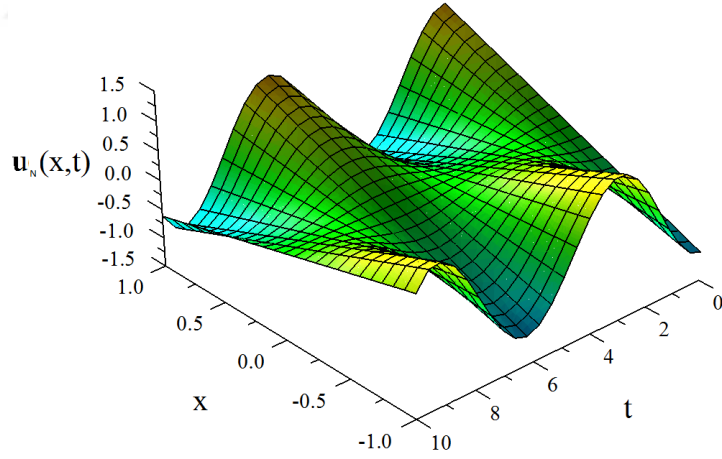
olarak gösterilebilir. Elde edilen temel matris denkleminin çözülmesiyle $N = 4, 6$ kesme sınırları için Bernstein polinomları cinsinden yaklaşık çözümler

$$u_{4,4}(x,t) = 4.1666397 \times 10^{-2} x t^4 - 0.4994150 x t^4 - 0.5000458 x t^2 + 0.99996718 x, \\ u_{6,6}(x,t) = -1.3880265 \times 10^{-3} x t^6 + 4.1666615 \times 10^{-2} x t^4 - 0.4999948 x t^2 + 1.0000051 x$$

şeklinde bulunmuş olup bu çözümlere ait hata değerleri $N=4,6$ ve $N=8$ değerlerine karşılık $x=0.02$ ve $t=1,3,5,7,10$ için, Bernstein polinom çözümlerinin L_∞ normunda maksimum hatası ve L_2 normunda mutlak hatası ve RMS hatası [39] Çizelge 4.17.'de gösterilmiştir. Ayrıca analitik ve yaklaşık çözüm grafikleri ile mutlak hata grafiği sırasıyla, Şekil 4.15. ve Şekil 4.16.'de verilmiştir.



(a) Tam Çözüm

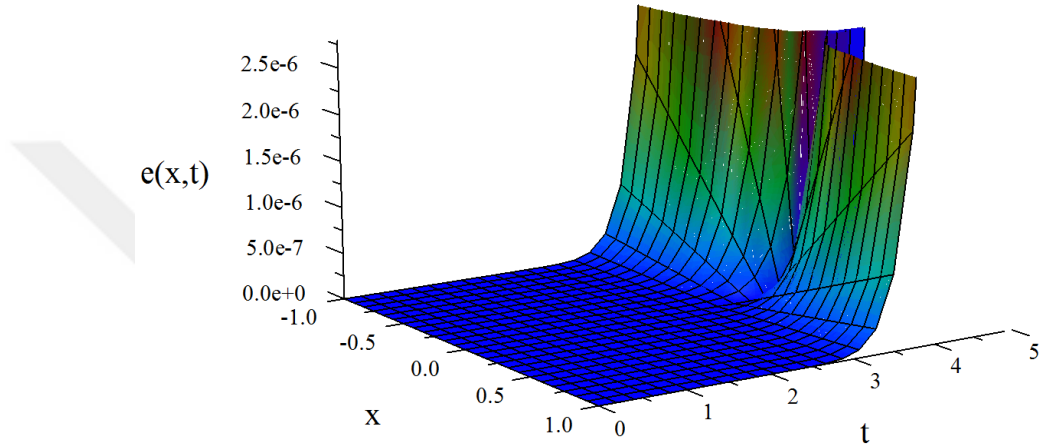


(b) $N=6$ için yaklaşık çözüm

Şekil 4.15. (a)-(b) Örnek 4.10, 2. Durum için $N=6$ kesme sınırında $(x,t) \in [-1,1] \times [0,10]$ uzay zaman aralığında tam çözüm ve yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.17. Örnek 4.10, 2. Durum için $N=4$ kesme sınırında farklı hata değerleri

t	$x = 0.2$		
	L_∞ -Hata	L_2 -Hata	RMS-Hata
1	2.23E-5	4.71E-5	6.50E-5
3	5.64E-5	1.17E-4	1.16E-5
5	3.38E-5	2.20E-4	9.19E-5
7	3.59E-5	8.24E-4	2.57E-4
10	1.30E-5	7.98E-5	6.94E-5



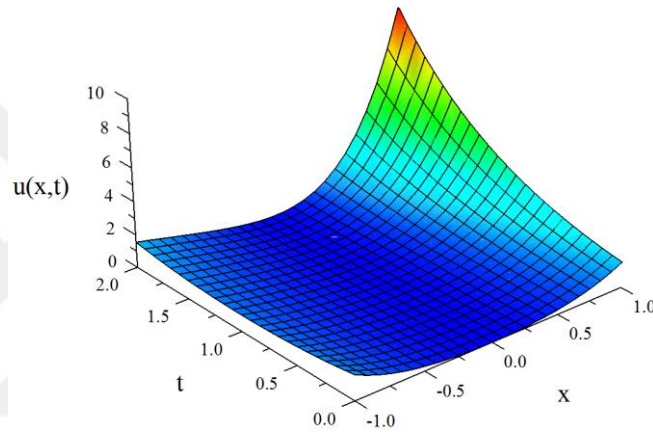
Şekil 4.16. Örnek 4.10, 2.Durum için $(x,t) \in [0,1] \times [0,5]$ uzay zaman aralığında $N = 6$ kesme sınırında $e(x,t) = |u(x,t) - u_{6,6}(x,t)|$ mutlak hata grafiği

3. Durum: Örnek 4.10'un, 3. problemi, $x \in [-1,1]$ aralığında tanımlı kübik tip 1-boyutlu lineer olmayan Klein-Gordon denklem $\alpha = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$ ve $0 \leq t$ olmak üzere $f(x,t) = (-2 + x^2) \cosh(x+t) + x^6 \cosh^3(x+t) - 4x \sinh(x+t)$ için başlangıç koşulları

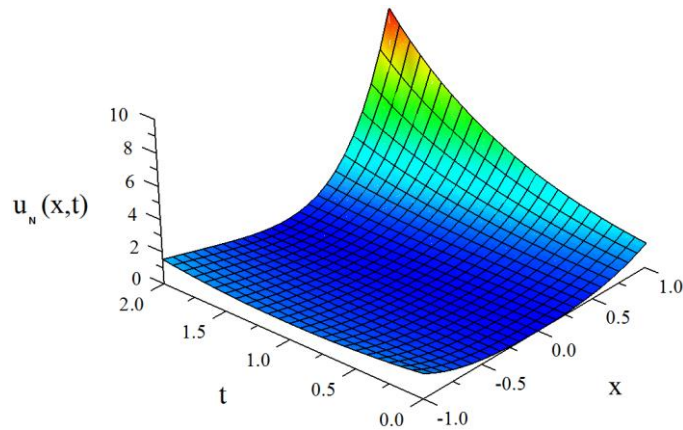
$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 \cosh x \\ u_t(x,0) = x^2 \sinh x \end{cases}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.35)$$

ile ele alınsın. Problemin tam çözümü, $u(x,t) = x^2 \cosh(x+t)$ dir [60]. Bernstein matris metoduyla yaklaşık çözümü bulmak için, sıralama noktaları olarak Chebyshev polinomlarının kökleri seçildiğinde $N=4$ ve $N=6$ değerlerine karşılık gelen sıralama noktaları, sırasıyla, (4.26) ve (4.35) denklemlerinde yerine yazılarak temel

matris denklemleri elde edilir. Elde edilen temel matris denkleminin çözülmesiyle Bernstein polinomları cinsinden yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Sunulan yöntem, $N = 4, 6$ kesme sınırları alınarak probleme uygulanmıştır. Tam çözüm, yaklaşık çözüm ve mutlak hata grafikleri Şekil 4.17. (a)-(b) ve Şekil 4.18.'de verilmiştir. Ayrıca farklı zamanlarda $N = 6$ için mutlak hata grafiği Şekil 4.19. ile gösterilmiştir. $t = 1$ için L_∞ , L_2 ve RMS hatası, radyal baz fonksiyonları [58], kübik B-Spline metodu [61], sonlu farklar metodu [60], $N = 6$ kesme sınırında Bernstein sıralama metotları ile Çizelge 4.18.'de karşılaştırılmış ve bu yöntemlere yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir.



(a) Örnek 4.10, 3. durumun Tam Çözümü

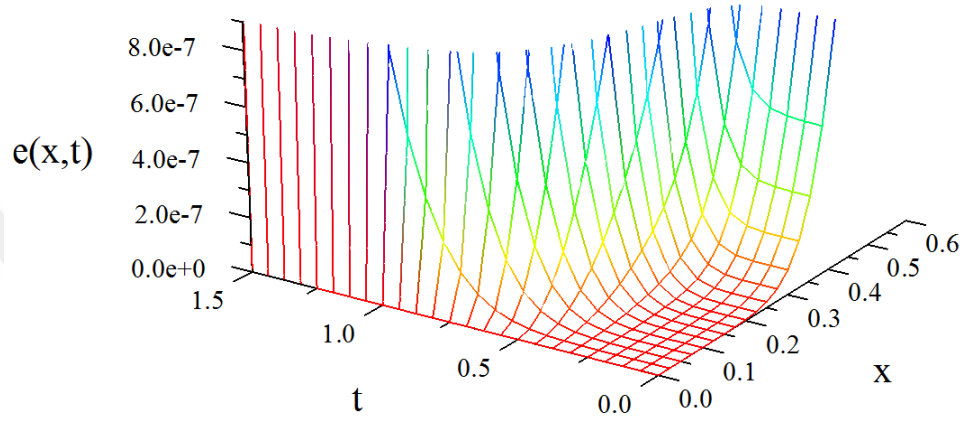


(b) Örnek 4.10, 3. durumun $N = 4$ için Yaklaşık Çözümü

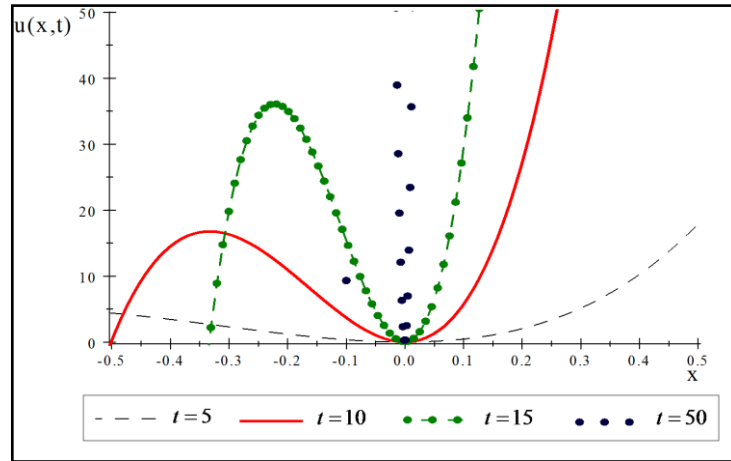
Şekil 4.17. (a)-(b) Örnek 4.10, 3. durumun $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, 2]$ uzay zaman aralığında tam çözüm ve $N = 4$ için yaklaşık çözüm grafikleri

Çizelge 4.18. Örnek 4.10, 3. Duruma ait $t = 1$ için L_∞ , L_2 ve RMS hata değerleri karşılaştırması

	Radyal Baz Fonksiyonları [58]	Sonlu Farklar Metodu [60]	Kübik B-Spline Metodu [61]	Bernstein Sıralama Metodu
L_∞	5.0705E-5	1.0284E-9	3.5666E-6	9.3228E-7
L_2	2.9474E-4	3.7079E-9	2.5993E-5	1.3394E-5
RMS	2.0789E-5	2.6153E-10	2.5930E-6	6.4770E-6



Şekil 4.18. Örnek 4.10, 3. Durumun $(x,t) \in [0,1] \times [0,2]$ uzay zaman aralığında $N = 6$ kesme sınırında $e(x,t) = |u(x,t) - u_{6,6}(x,t)|$ mutlak hata grafiği



Şekil 4.19. Farklı zamanlarda Örnek 4.10, 3. Durum için yaklaşık çözüm grafiği

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezdeki amaç, mühendislik dallarında sıklıkla karşılaşılan ikinci mertebe değişken ve sabit katsayılı kısmi diferansiyel denklemin, bir boyutlu singüler pertürbe parabolik tip konveksiyon-difüzyon probleminin, ikinci mertebeden iki uzay değişkenli kısmi diferansiyel denklemin ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan bir boyutlu kuadratik ve kübik nonlineerliğe sahip Klein-Gordon denklemin verilen belirli koşullar altında yaklaşık çözümünü, sıralama noktalarına dayalı Bernstein sıralama metodu ile bulmaktır. Matematiksel temellere dayandırılarak geliştirilen metodun, rezidü fonksiyonu kullanılarak hata analizi yapılmış ve çözümlerin doğruluğu incelenmiştir. Yöntemin tutarlılığını göstermek üzere değişik kapalı bölgelerde, eliptik, parabolik, hiperbolik tipten problemlerin verilen başlangıç koşulları (Cauchy Problemi) ve Sınır değer koşulları (Dirichlet, Neumann ve karışık koşul) altında çözümleri bulunmuştur. Tüm bu işlemlerden sonra, sıralama noktalarına dayalı Bernstein metodu ile elde edilen sonuçlar şu şekilde sıralanabilir:

- Bu metot, iteratif metotlar (B-Spline, Runge-Kutta, Adomian-Decomposition metodu gibi) ağır programlama algoritmaları gerektirmeyen direkt bir metottur.
- Problemin çözüm fonksiyonun polinom olması durumunda, kesme sınırı N 'in polinomun derecesine küçük ya da eşit seçilmesiyle Bernstein sıralama metoduyla elde edilen yaklaşık çözüm, aynı zaman da tam çözüme eşit olacaktır. Bilinen fonksiyonun polinom fonksiyon olmaması durumunda ise, Bernstein seri açılımına denk gelen Bernstein polinom tabanlı seri açılımı yani N 'in keyfi değerleri arttıkça yaklaşık çözüm tam çözüme yakınsayacaktır.
- Bilinen fonksiyonun Bernstein polinomu serisine açılabilirdiği durumlarda, en iyi yaklaşımı elde edebilmek için, fonksiyonun Bernstein açılımında daha fazla terim alınabilir. Ancak kesme sınırı N 'in çok büyük seçilmesi durumunda, bilgisayarda işlem yükü artacağından, kesme hataları artmakta ve bu durum verilen problemin çözümünden bizi uzaklaştırmaktadır. N 'in yeteri kadar büyük seçilmesi durumunda, tam çözüme oldukça yakın çözümler elde edilebilir.
- Tam çözümün bilindiği ya da bilinmediği durumlarda, Bernstein metoduyla yaklaşık çözüm elde edildikten sonra, verilen probleme rezidü fonksiyonu ilavesiyle iyileştirilmiş tahmini çözüm bulunabilir. Bu tahmini çözüme ait mutlak hata fonksiyonu yardımıyla, tam çözüm ile yaklaşık çözüm problemin tanım bölgesinde istenilen değerleri bulunarak hata analizi yapılabilir.

- Sunulan yöntem, verilen problemin tüm sonlu aralıklarında uygulanabilir. Ayrıca metot, dikdörtgensel olmayan, farklı kapalı bölgelerde de çözüm bulmaya uygun bir metottur.
- Örnek 4.3., 2. durum için Chebyshev sıralama noktalar kullanılarak elde edilen sonuçlar, sıralama yöntemi ile elde edilen sonuçlardan daha tutarlı olabilir.
- Verilen örneklerde, eşit aralıklı sıralama noktaları kullanıldığından $N \leq M$ için $|e_{N,M}^*(x_i, t_l)|$ hata fonksiyonu istenen çözüme sonsuz normda oldukça yakındır. Rezidü fonksiyonu eklenerek iyileştirilen Bernstein sıralama metodunun yaklaşık çözümü yine sonsuz normda verilen hatadan daha iyi sonuçlar vermiştir.
- Problemin kötü koşullu (ill-poses) olması halinde, çözümün doğruluk hassasiyeti azalmakta ve büyük N değerlerinde sapmalar olmaktadır. N kesme sınırının artması ile matris boyutlarının da oldukça yüksek oranda artması ve böylelikle yaklaşık çözümün hesaplanmasında sürenin uzaması gibi bir takım zorluklar ortaya çıkmaktadır.
- Sonuçların güvenilirliğini test etmek için hemen hemen tüm uygulamalarda farklı yöntemlerle karşılaştırma yapılmış, şekil ve tablolarla N değerleri büyüdükçe sonuçların daha fazla tutarlı olduğu görülmüştür.
- Yöntem için verilen rezidü fonksiyonuna dayalı hata analizi, problemlere uygulanmış ve farklı N değerleri için L_2 mutlak hata, L_∞ maksimum hata ve RMS hataları karşılaştırılmıştır. L_∞ maksimum hatanın N kesme değerleri büyüdükçe daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Daha sonraki çalışmalar için sunulan yöntem, farklı kapalı bölgelerde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere, yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere ve sistemlere, integro-kısmi diferansiyel denklemlere, gecikmeli kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Ayrıca bu çalışmada, iki boyutlu denklemler için çözümler elde edilmiştir. Bu metot geliştirilerek üç boyutlu denklemler içinde çözümler elde edilebilir. Bunlara ilaveten fractional türevli diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklem içeren mühendislik modellemelerinde de kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Myint-U, T., Debnath, L., Linear partial differential equations for scientists and Engineers, Birkhäuser, Boston, 2000, 778p.
- [2] Camassa, R., Holm, D., An integrable shallow water equation with peaked solitons, Phys. Rev. Lett., 1993, 71 (11): 1661-1664.
- [3] Degasperis, A., Procesi, M., Asymptotic Integrability, Symmetry and Perturbation Theory, World Scientific, Singapore, 1999, 23-37.
- [4] Eguiluz, V. Hernandez-Garcia E., Piro, O., Boundary effects in the complex. Ginzburg-Landau equation, Internat. J. Bifur. Chaos, 1999, 9 (11): 2209-2214.
- [5] Fuchssteiner, B., Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: Generalization of the Camassa-Holm equation. Physica D, 1996, 95: 229-243.
- [6] Fuchssteiner, B. Fokas, A., Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries. Physica D, 1981, 4 (1): 47-66.
- [7] Malfliet, W., Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Am. J. Phys., 1992, 60, (7): 650-654.
- [8] Hall, C. A. , Porsching, T. A., Numerical Analysis of partial differential equations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs., New Jersey, 07632, 1990.
- [9] Boyd, J. P., Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Dover Publications, Inc., Newyork, 2000.
- [10] Bülbül, B., İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin taylor polinom çözümleri, Muğla Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Muğla, 2011, 102s (Doktora Tezi).
- [11] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Chebyshev Polynomial Approximation for High-Order Partial Differential Equations with Complicated Conditions, Num. Meth. for Part. Diff. Equ., 2008, 25 (3) 610-621.
- [12] Yüksel, G., İkinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Chebyshev polinom çözümleri, Muğla Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Muğla, 2011, 106s (Doktora Tezi).
- [13] Şahin, S., Q-integer noktalarında Bernstein polinomları ve özellikleri. Muğla Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Muğla, Mayıs 2008, 61s (Yüksek Lisans Tezi).
- [14] Davis, P.J., Interpolation and Approximation, Dover, New York, 1975, 312.
- [15] Fidan, Z., Matematik IV Sayısal Çözümleme, Bornova, İzmir, 1990, 116.

- [16] Elyıldırım, Ö., Bernstein Polinomunun Genelleşmesi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1997.
- [17] Joy, K.I., Bernstein Polynomials, University of California, Davis, 2000, 12.
- [18] Lorentz, G.G., Bernstein Polynomials, Chelsea, New York, 1986, 134.
- [19] Phillips, G.M., Interpolation and Approximation by Polynomials, Springer, New York, 2003, 312.
- [20] Apostol, T., Calculus Vol 2., Wiley & Sons, Incorporated, John, 704p, 1969.
- [21] Anar, İ., Ethem, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Palme Yayıncılık, Ankara, 2005.
- [22] Çağlıyan, M., Çelebi, O., Kısmi Diferansiyel Denklemler, Dora Yayıncılık, 2010, 280 s.
- [23] Garabedian, R.P., Partial Differential Equations, Chelsea, 1963.
- [24] Koca, K., Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Yayıncılık, Ankara, 2003.
- [25] Bhatti M.I., Bracken, P., Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, J. Comput. and Appl. Math. 2007, (205) 272-280.
- [26] Gottlieb, D., Orszag, A. S., Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications, SIAM, Bristol, England, 1977.
- [27] Sneddon, N. I., Elements of Partial Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., ABD, 1957, 327 p.
- [28] Evans, L. C., Partial Differential Equations: Second Edition, the American Mathematical Society, Rhode Island, ABD, 2010, 662 p.
- [29] Knabner, P., Lutz, A., Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, Ed.: J. E. Marsden, L. Sirovich, S. S. Antman, Springer, New York, ABD, 2003, 424 p.
- [30] Shearer, M., Levy, R., Partial Differential Equations: An Introduction to Theory and Applications, Princeton University Press, New Jersey, ABD, 2015, 288 p.
- [31] Malfliet, W., Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Am. J.Phys., 1992, 60 (7) 650–654.
- [32] Işık, O.R., Lineer Fonksiyonel Denklemlerin Bernstein Polinomları ve Rasyonel Fonksiyonlara Dayalı Sıralama Yöntemi ile Çözümleri Üzerine. Muğla Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Muğla, 2012, 121s (Doktora Tezi).

- [33] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Chebyshev polynomial approximation for high order partial differential equations with complicated conditions, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2009, 25(3), 610-621.
- [34] Burden, R. L., Faires, J. D., Burden, A. M. *Numerical Analysis: 10th Edition*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, USA, 2016, 896 p.
- [35] Oliveira, F.A., Collocation and residual correction, *Numer. Math*, 1980, (36) 27-31.
- [36] Çelik, İ., Collocation method and residual correction using Chebyshev series, *Appl. Math. Comp.*, 2006, (174) 910-920.
- [37] Shahmorad, S., Numerical solution of general forms linear Fredholm Volterra integro differential equations by the tau method with error estimation, *Appl. Math. Comput.*, 2005, (167) 1418-1429.
- [38] Yüzbaşı, Ş., İkinci Mertebe Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri İçin Bessel Sıralama (Collocation) Metodu, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2012, 204 s. (Doktora Tezi).
- [39] Mahzoun, M.R., Kim, J., Sawazaki, S., Okazaki K., Tamura, S., A scaled multigrid optical flow algorithm based on the least RMS error between real and estimated second images, *Pattern Recogn.*, 1999, (32) 657-670.
- [40] M.K., Kadalbajoo, V. Gupta, Numerical solution of singularly perturbed convection–diffusion problem using parameter uniform B-spline collocation method, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, (355) 439-452.
- [41] W., Lenferink, A second order scheme for a time-dependent, singularly perturbed convection–diffusion equation, *Journal of Comput. and Appl. Math.*, 2002, 143 (1), 49-68.
- [42] Hacıoğlu, Z., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkcü, K.Ö., Bernstein Series Approximation for Dirichlet Problem. *Gazi University Journal of Science*, 2018, 31(2): 544-553.
- [43] Baykuş Savaşaneril, N., Sezer, M., Hybrid Taylor-Lucas Collocation Method for Numerical Solution of High-Order Pantograph Type Delay Differential Equations with Variables Delays, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 2017, 11 (6), 1795-1801.
- [44] Lakestani, M., Saray B.N., Numerical solution of telegraph equation using interpolating scaling functions, *Comp. Math. App.*, 2010, (60) 1964-1972.

- [45] Heydari M.H., Hooshmandasl M.R., Ghaini, F.M.M., A new approach of the Chebyshev wavelets method for partial differential equations with boundary conditions of the telegraph type, *Appl. Math. Modelling*, 2014, (38) 1597-1606.
- [46] El-Azab, M.S., El-Gamel, M., A numerical algorithm for the solution of telegraph equations, *Appl. Math. Comput.*, 2007, 190 (1) 757-764.
- [47] Saadatmandi, A., Dehghan, M., Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev Tau method, *Numer. Meth. Part. Diff. Equ.*, 2010, 26 (1) 239-252.
- [48] Liu, N., Lin E.B., Legendre wavelet method for numerical solutions of partial differential equations, *Num. Meth. Part. Diff. Equ.*, 2010, 26 (1) 81-94.
- [49] Elgindy K.T., High-order numerical solution of second-order one-dimensional hyperbolic telegraph equation using a shifted Gegenbauer Pseudospectral method, *Numer. Meth. Part. Diff. Equ.*, 2015, D E, 1-36.
- [50] Dosti M., Nazemi A., Quartic B-spline collocation method for solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation, *Journal of Information and Computing Science*, 2012, (7) 83-90.
- [51] Mittal R., Bhatia R., Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-Spline collocation method, *Appl. Math. and Comput.*, 2013, (220) 496-506.
- [52] Mittal R.C., Jain R.K., Redefined cubic B-splines collocation method for solving convection–diffusion equations, *Appl. Math. Modelling*, 2012, (36) 5555-5573.
- [53] Ismail, H.N.A., Elbarbary E.M.E., Restrictive Taylor’s approximation and parabolic partial differential equations, *Int. J. Comput. Math.*, 2001, (78) 73-82.
- [54] D.K. Salkuyeh, On the finite difference approximation to the convection–diffusion equation, *Appl. Math. Comput.*, 2006, (179) 79-86.
- [55] Liu, C.-S., Solving singular convection–diffusion equation by exponentially-fitted trial functions and adjoint Trefftz test functions, *Journal of King Saud University-Science* 2018, (30) 100-105.
- [56] Mittal R., Bhatia R., A numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation by modified B-spline differential quadrature method, *Appl. Math. and Comput.*, 2014, Vol. 244, 976-997.
- [57] Singh, B.K., Kumar, P., An algorithm based on a new DQM with modified extended cubic B-splines for numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Alexandria Engineering Journal*, 2018, (57) 175-191.

- [58] Dehghan M., Shokri A., Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation using radial basis functions, *Journal of Comput. and Appl. Math.*, 2009, (230) 400-410.
- [59] A.M. Wazwaz, The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations, *Appl. Math. Comput.*, 2006, (173) 165-176.
- [60] Encinas, A.H., Martín-Vaquero, J., Queiruga-Dios, A., Gayoso-Martínez, V., Efficient high-order finite difference methods for nonlinear Klein-Gordon equations. I: Variants of the phi-four model and the form-I of the nonlinear Klein-Gordon equation, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2015, Vol. 20, (2) 274-290.
- [61] J. Rashidinia, M. Ghasemi, R. Jalilian, Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 2010, 233 (8): 1866-1878.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hüseyin Hilmi SORKUN

Doğum Yeri –Yılı: Tavas, 1984

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : hilmisorkun@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Denizli Lisesi, 1998-2001

Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2001-2005

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Programı, Uygulamalı Matematik Bölümü, 2005-2009

Doktora : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Programı, Uygulamalı Matematik Bölümü, 2009-(Halen)

Mesleki Deneyim

Manisa C.B.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi , (Arş. Gör.) 2005-2008

Manisa, MABEM 2010-2011

Erzurum, Köprüköy Anadolu Lisesi, (Mat. Öğrt.) 2011- 2013

Manisa, Kula S.S.P.A.L, (Mat. Öğrt.) 2013-(Halen)

Yayımları

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

YALÇINBAŞ, S., SEZER, M., **SORKUN, H.Hilmi**, (2009), Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations, Applied Mathematics and Computation, vol:210, s:334-349.

SORKUN, H.Hilmi, YALÇINBAŞ, S., (2010), "Approximate solution of linear Volterra integral equation systems with variable coefficients", Applied Mathematical Modelling, vol:34, no: 11, s:3451-3464.

YALÇINBAŞ, S., Konuralp A., DÖNMEZ DEMİR, D., **SORKUN, H.Hilmi** (2010). The Solution of the Fractional Differential Equation with the Generalized Taylor Collocation Method. International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, 4(3), 296-303. (Yayın No: 1164724).

KONURALP A., **SORKUN, H.Hilmi** (2014). Variational Iteration Method for Volterra Functional Integrodifferential Equations with Vanishing Linear Delays. Journal of Applied Mathematics, 2014, 1-10., Doi: 10.1155/2014/678989.

YALÇINBAŞ, S., **SORKUN, H.Hilmi**, SEZER, M., (2015). A numerical method for solutions of pantograph type differential equations with variable coefficients using Bernstein polynomials, New Trends in Mathematical Sciences 3 (4), 179.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

SORKUN, H.Hilmi, KONURALP, A., (2009), “Variational iteration method for the Volterra functional integro-differential equations with vanishing delays”, Computational Methods and Function Theory, CMFT 2009 Symposium, Bilkent University, 08-12 June 2009, Ankara.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

YALÇINBAŞ, S., SEZER, M., **SORKUN, H.Hilmi**, (2009), “Yüksek mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri için Legendre polinom yaklaşımı”, Türk Matematik Derneği XX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü. 3-6 Eylül 2007, Erzurum, s:149-171. **(Bu çalışma, Applied Mathematics and Computation Dergisinde makale olarak yayınlanmıştır.)**

KONURALP, A., YALÇINBAŞ, S., **SORKUN, H.Hilmi**, (2008), “Lineer Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri için Legendre Polinom Yaklaşımının Varyasyonel İterasyon Metoduyla Karşılaştırılması, 3. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Ankara Üniversitesi, 22-23 Mayıs 2008, Ankara.

Katıldığı Ulusal ve Uluslararası bilimsel toplantılar

Atatürk Üniversitesi, XX. Ulusal Matematik Sempozyumu, 3-6 Eylül 2007, Erzurum.

Ankara Üniversitesi, III. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, 22-23 Mayıs 2008, Ankara.

Bilkent Üniversitesi, Computational Methods and Function Theory, CMFT 2009 Sempozyumu 08-12 Haziran 2009, Ankara.

Ödüller

TÜBİTAK Teşvik Ödülü, 09.04.2009, TÜBİTAK Teşvik Ödülü, 24.05.2010, MEB, Başarı Belgesi, 25.06.2012.