T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE ÖTELEME YÜZEYLERİ

Melike ÇETİN

Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

MANİSA–2019

TEZ ONAYI

Melike ÇETİN tarafından hazırlanan **"Minkowski 3-Uzayında Bishop Çatısına Göre Öteleme Yüzeyleri"**adlı tez çalışması 19/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Mustafa KAZAZ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI** Bitlis Eren Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Tanju KAHRAMAN** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Melike ÇETİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	Reel sayılar kümesi
$R_1^3,\ E_1^3$	3-boyutlu Lorentz uzayı
κ	Eğrilik
τ	Burulma
k_g	Geodezik eğrilik
k_n	Normal eğrilik
τ_g	Geodezik burulma
$M(u,v)$	Öteleme yüzeyi
$\alpha(u),\ \beta(v)$	Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri
I	Yüzeyin birinci temel formu
II	Yüzeyin ikinci temel formu
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
(T,N,B)	Frenet Çatısı
(T,N_1,N_2)	Bishop Çatısı
(T,g,U)	Darboux Çatısı
k_1	Birinci Bishop eğriliği
k_2	İkinci Bishop eğriliği

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, engin bilgi ve deneyimleri ile yol gösterip desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa KAZAZ' a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Bana duydukları ve hissettirdikleri sonsuz güven; maddi ve manevi bütün destekleri için aileme ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

Melike ÇETİN
Manisa, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE ÖTELEME YÜZEYLERİ

Melike ÇETİN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

Bu çalışmada düzlemsel olmayan uzay eğrileri tarafından oluşturulan öteleme yüzeyleri Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre incelenmiştir. Elde edilen spacelike ve timelike öteleme yüzeylerinin birinci temel form, ikinci temel form, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır.

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, Öklid uzaylarında ve 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet ve Darboux çatısına göre öteleme yüzeyleri üzerine yapılan çalışmalar üzerine literatür bilgisi verilmiştir. Ayrıca Öklid uzayında Frenet çatısına alternatif bir çatı olan Bishop çatı ve Darboux çatısına göre öteleme yüzeyleri ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Frenet çatısı ve Bishop çatısına göre türev formülleri verilerek bu iki çatı arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bir yüzeyin incelenmesi için gerekli olan birinci ve ikinci temel form ve yüzeyin eğrilikleri özet olarak verilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Minkowski uzayında temel kavramlar, eğriler ve yüzeylerin teorisi ile ilgili kavramlar özet olarak sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre öteleme yüzeylerinin birinci temel form, ikinci temel form, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamada spacelike ve timelike öteleme yüzeyleri ayrı ayrı ele alınarak farklı durumlarda incelenmiştir. Spacelike öteleme yüzeyleri için dört farklı durumda birinci, ikinci temel formlar, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikler hesaplanmıştır. Timelike öteleme yüzeyleri için ise yüzey üzerindeki eğrinin spacelike veya timelike olma durumu göz önüne alınarak karşılaşılan dokuz farklı durum için birinci, ikinci temel formlar, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikler hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-uzayı, öteleme yüzeyi, Bishop çatı, Darboux çatı, temel formlar.

2019, 50 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

TRANSLATION SURFACES ACCORDING TO BISHOP FRAME IN MINKOWSKI 3-SPACE

Melike ÇETİN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

In this study, translation surfaces generated by spatial curves which are not planar are investigated according to Bishop frame in Minkowski 3-space. First fundamental forms, second fundamental forms, Gaussian curvatures and mean curvatures of the obtained surfaces are calculated.

This thesis consists of three sections. In the first section, literature information of about studies on translation surfaces according to Frenet and Darboux frame in Euclidean spaces and Minkowski 3-space are stated. Moreover, some studies in Euclidean spaces are summarized on translation surfaces according to Bishop and Darboux frames which are alternatives to Frenet frame.

In the second section, basic concepts on the theory of curves and surfaces in Euclidean 3-space are stated. Derivative formulas according to Frenet and Bishop frames and relations between these frames are given. First and second funfamental forms and surface curvatures are summarized which are necessary to investigate a surface. Furthermore, basic concepts of Minkowski 3-space and theory of curves and surfaces in this space are given by details.

In the third section, first fundamental forms, second fundamental forms, Gaussian curvatures and mean curvatures of translation surfaces according to Bishop frame are calculated in Minkowski 3-space. During this calculation, spacelike and timelike translation surfaces are handled separately for different cases. For spacelike translation surfaces, first fundamental forms, second fundamental forms, Gaussian curvatures, and mean curvatures are calculated in four different cases. For timelike translation surfaces, first fundamental forms, second fundamental forms, Gaussian curvatures and mean curvatures are calculated in nine different cases with respect to the curve on the surface is spacelike or timelike.

Keywords: Minkowski 3-space, translation surface, Bishop frame, Darboux frame, fundamental forms.

2019, 50 pages

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında ilginç yüzeylerden biri iki eğri tarafından üretilen öteleme yüzeyidir. Öteleme yüzeyleri quadrilateral (dört kenarlı) yapıdaki yani, dört yüzlü yüzeylerdir. Bu özellik sayesinde bu yüzeyler, mimaride dizayn amaçlı ve cam tavan kaplamalarında kullanılır. Genellikle bu cam kaplamalar üçgensel cam yüzeyler ve cam levhalar ile yapılır, ancak dört kenarlı elemanlar daha ekonomiktir ve üçgensel yapıya göre daha şeffaftır. Bu nedenle hem görsel olarak hem de ekonomik olarak birçok yapının cam tavan kaplamaları öteleme yüzeyleridir.

Öteleme yüzeyleri ile ilgili bugüne kadar birçok çalışma yapılmıştır. 1992 yılında J. Walrave, L. Verstraelen ve S. Yaprak n-boyutlu Öklid uzayında minimal öteleme yüzeylerini incelediler [1]. 1999 yılında H. Liu 3-boyutlu uzaylarda öteleme yüzeylerinin Gauss eğriliğini ve ortalama eğriliğini inceledi [2]. 2002 yılında D. W. Yoon "3-boyutlu Minkowski Uzayında Öteleme Yüzeylerinin Gauss Dönüşümü Üzerine" adlı çalışmasında, Gauss dönüşümüne Laplasiyen operatörünü uygulayarak öteleme yüzeylerinin diferansiyel geometrik özelliklerini inceledi [3]. 2008 yılında M. I. Munteanu ve A. I. Nisor 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin ikinci temel formunu, ikinci Gauss eğriliğini ve ikinci ortalama eğriliğini incelediler [4]. 2010 yılında M. Çetin 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin diferansiyel geometrik özelliklerini inceledi [5]. 2012 yılında M. Çetin, H. Kocayiğit ve M. Önder Minkowski 3 uzayında Frenet çatısına göre öteleme yüzeylerini incelediler [6]. 2014 yılında F. Güler, G. S. Atalay ve E. Kasap Öklidyen 3-uzayda Bishop çatısına göre öteleme yüzeylerini incelediler [7]. 2008 yılında M. K. Karacan ve B. Bükçü Minkowski 3-uzayında timelike eğrilerin Bishop çatısını incelediler [8]. 2016 yılında H. Kocayiğit, B. Bükçü ve İ. Pektaş Minkowski 3 uzayında Bishop Darboux vektörüne göre spacelike eğrilerin karakterizasyonlarını incelediler [9].

Bu tez çalışmasında, literatürde yapılanlar göz önünde tutularak Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre öteleme yüzeyleri incelenmiştir. Bu incelemede, yüzeylerin ve eğrilerin karakterleri göz önünde tutularak Minkowski 3- uzayında Bishop çatısına göre öteleme yüzeylerinin birinci temel formu, ikinci temel formu, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri bulunmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel kavramlar verilecektir. Burada verilen tanım ve ifadeler için [10, 11, 12] nolu referanslara bakılabilir.

Tanım 2.1.1. $\mathrm{I} \subset R$ bir açık aralık olsun. E^3 Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir eğri (veya parametrik bir eğri) bir

$$\alpha : \mathrm{I} \to E^3, \quad t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

dönüşümü ile verilir. Eğer $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisi C^k sınıfından ise α eğrisine C^k sınıfından bir eğri denir. Buradaki $\alpha_i : \mathrm{I} \to R, \quad t \to \alpha_i(t), \quad 1 \le i \le 3$ fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir. $t \in \mathrm{I} \subseteq R$ parametresi zaman parametresi olarak düşünülürse, $\alpha(t)$ eğrisi hareketli bir noktanın E^3 deki yörünge eğrisi olarak alınabilir.

Tanım 2.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to E^3, \quad t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ eğrisi diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \in E^3$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörü veya hız vektörü denir.

$$\|\alpha'\| : \mathrm{I} \to R, \quad t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{[\alpha_1'(t)]^2 + [\alpha_2'(t)]^2 + [\alpha_3'(t)]^2}$$

olarak tanımlanan $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\| \in R$ reel sayısına da α eğrisinin t noktasındaki (skaler) hızı denir.

Tanım 2.1.3. $\forall t \in \mathrm{I}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ olan bir $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisine düzgün (regüler) eğri denir.

Tanım 2.1.4. $\forall t \in \mathrm{I}$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ olan bir $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda, t parametresine yay uzunluğu parametresi denir ve genellikle s ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. $\alpha : \mathrm{I} \subseteq R \to E^3$, $\alpha = \alpha(t)$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $t_0 \in \mathrm{I}$ olmak üzere α eğrisinin t_0 noktasından t ye kadar olan yay uzunluğu fonksiyonu

$$s : \mathrm{I} \to R, \quad t \to s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du$$

ile tanımlanan s fonksiyonudur. Yay uzunluğu fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olup, diferansiyeli

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = \|\alpha'(t)\|$$

olur. Böylece $\alpha(t)$, hareketli bir noktanın t anındaki konumu olarak düşünüldüğünde $\frac{ds}{dt}$, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı olur.

Tanım 2.1.6. $\alpha : \mathrm{I} \subseteq R \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliği ile verilen $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör denir. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlanan $\kappa(s) \in R$ reel sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir. $\kappa(s) \neq 0$ olan noktalarda $T'(s) = \kappa(s) N(s)$ eşitliği ile verilen $N(s)$ birim vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir. $B(s) = T(s) \times N(s)$ birim vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir. $B'(s) = -\tau(s) N(s)$ ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir.

Tanım 2.1.7. Birim hızlı bir α eğrisinin her bir s noktasında $T(s)$ teğet, $N(s)$ asli normal ve $B(s)$ binormal vektörlerden oluşan bir (T, N, B) ortanormal koordinat sistemi vardır. Bu (T, N, B) üçlüsüne hareketli üçyüzlü ya da Frenet çatısı denir.

α birim hızlı bir eğri ve $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha''(s) \neq 0$ olsun. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sayıları sırasıyla, α eğrisinin eğriliği ve burulması olmak üzere Frenet türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir.

Frenet çatısı en az üç kez türevlenebilen düzgün eğriler için verilen bir dik çatıdır. Ancak eğrinin bazı noktalarında eğriye ait eğrilik sıfırlanabilir. Yani, eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda eğrinin karakteri ile ilgili bir çalışma yapılabilmesi için yeni bir çatıya ihtiyaç duyulur. Böylece, ikinci türevin sıfır olduğu durumda da Bishop çatısı olarak isimlendirilen yeni bir çatı verilmiştir.

Tanım 2.1.8. Öklid uzayında düzgün bir α eğrisinin Bishop çatısı oluşturulurken bu eğrinin Frenet çatısında bulunan teğet vektör değiştirilmeksizin asli normal ve binormali belli bir açıyla döndürülür. Buna göre bir eğrinin Frenet çatısı (T, N, B) olmak üzere oluşturulan Bishop çatısında T vektörü aynen alınır. Bu vektöre dik bir düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{N_1, N_2\}$ bazını alalım. Bu iki vektörün türevleri sadece T vektörüne bağlıdır. Böylece oluşturulan (T, N_1, N_2) çatısı dik bir çatı olup, bu çatının türev formülleri;

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada k_1 ve k_2 Bishop çatısına göre α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleridir. α eğrisinin eğrilik ve burulması κ ve τ olmak üzere, eğrilikler arasında $k_1 = \kappa\cos\theta, \quad k_2 = \kappa\sin\theta,$

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \qquad \theta(s) = \arctan\frac{k_1}{k_2}, \qquad \tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

bağıntıları vardır [13].

Bir α eğrisinin Frenet ve Bishop çatıları sırasıyla (T, N, B) ve (T, N_1, N_2) olmak üzere bu iki çatı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır [9]:

$$\begin{aligned}
T &= T, \\
N &= \cos\theta N_1 + \sin\theta N_2, \\
B &= -\sin\theta N_1 + \cos\theta N_2.
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.9. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $n-1$ boyutlu yüzeye hiperyüzey adı verilir [14].

Tanım 2.1.10. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme denir [14].

Tanım 2.1.11. Ortalama eğriliği sıfır $(H = 0)$ olan regüler yüzeylere minimal yüzey adı verilir [15].

Tanım 2.1.12. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı U olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X U$ şeklinde tanımlanan, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [14].

Tanım 2.1.13. M, E^3 de bir düzgün yüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun. $K, H : M \to R$, $K(P) = \det(S(P))$ ve $H(P) = \frac{1}{2} iz(S(P))$ şeklinde tanımlanan K ve H fonksiyonlarına sırasıyla M nin Gauss eğrilik ve Ortalama eğrilik fonksiyonları denir. $K(P)$ ve $H(P)$ sayılarına da sırasıyla M nin P noktasındaki Gauss eğriliği ve Ortalama eğriliği denir [14, 15].

Tanım 2.1.14. $\alpha, \beta : (a,b) \to E^3$ iki uzay eğrisi olmak üzere α eğrisinin, β eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen $M(u,v) = \alpha(u) + \beta(v)$ yüzeyine

öteleme yüzeyi adı verilir. Burada α ve β eğrilerine, M yüzeyinin üreteç eğrileri denir [15].

3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerini Frenet çatısına göre birinci temel formu, ikinci temel formu, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği [25] de mevcuttur.

3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerini Bishop çatısına göre birinci temel formu, ikinci temel formu, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği [7] de hesaplanmıştır.

2.2. 3-Boyutlu Lorentziyen Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentziyen uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1. R^3 reel vektör uzayı üzerinde Lorentziyen iç çarpım

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : R^3 \times R^3 &\to R \\ (a,b) &\to \langle a,b \rangle = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $a=(a_1,a_2,a_3)$ ve $b=(b_1,b_2,b_3)\in R^3$ dür. Bu Lorentziyen iç çarpım ile birlikte R^3 Afin uzayı, Minkowski 3-uzayı (veya 3 boyutlu Lorentziyen uzayı veya Lorentziyen 3-uzay) olarak isimlendirilir ve R_1^3 veya E_1^3 ile gösterilir [16]. Lorentziyen iç çarpım pozitif tanımlı olmadığından R_1^3 deki vektörler aşağıdaki gibi üç farklı Lorentziyen karaktere sahip olabilirler.

Tanım 2.2.2. $a=(a_1,a_2,a_3)\in R_1^3$ herhangi bir vektör olsun.

i) $\langle a,a \rangle > 0$ ya da $a=0$ ise a vektörüne **spacelike,**

ii) $\langle a,a \rangle < 0$ ise a vektörüne **timelike,**

iii) $\langle a,a \rangle = 0$ ve $a \neq 0$ ise a vektörüne **null (lightlike)** vektör denir [16].

Tanım 2.2.3. $a,b\in R_1^3$ keyfi iki vektör olmak üzere, $\langle a,b \rangle = 0$ ise a ve b vektörlerine Lorentziyen anlamda diktirler denir [17].

Tanım 2.2.4. Bir $a=(a_1,a_2,a_3)\in R_1^3$ vektörünün normu

$$\|a\|=\sqrt{|\langle a,a\rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektörlere birim vektörler denir [16].

Tanım 2.2.5.

i) **Hiperbolik açı:** a ve b R_1^3 de iki timelike vektör olsun. $\langle a,b\rangle=-\|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir $\theta\geq 0$ reel sayısına, a ve b vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

ii) **Merkez açı:** a ve b R_1^3 de iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği düzlem timelike olsun. $\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|\cosh\theta$ olacak şekilde bir $\theta\geq 0$ reel sayısına, a ve b vektörleri arasındaki merkez açı denir.

iii) **Spacelike açı:** a ve b R_1^3 de iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike olsun. $|\langle a,b\rangle|=\|a\|\|b\|\cos\theta$ olacak şekilde bir $\theta\geq 0$ reel sayısına, a ve b vektörleri arasındaki spacelike açı denir.

iv) **Lorentziyen timelike açı:** a , R_1^3 de bir spacelike vektör ve b, R_1^3 de bir timelike vektör olsun. $|\langle a,b\rangle|=\|a\|\|b\|\sinh\theta$ olacak şekilde bir $\theta\geq 0$ reel sayısına, a ve b vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir [18, 19].

Tanım 2.2.6. $a=(a_1,a_2,a_3)$ ve $(b_1,b_2,b_3)\in R_1^3$ keyfi iki vektör olsun. Bu vektörlerin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$a\times b=(a_2b_3-a_3b_2,a_1b_3-a_3b_1,a_2b_1-a_1b_2)$$

biçiminde tanımlanır [19,20].

Teorem 2.2.1. $a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3)$, R_1^3 uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

i) $\langle a\times b,c\rangle=-\det(a,b,c)$

ii) $(a\times b)\times c=-\langle a,c\rangle b+\langle b,c\rangle a$

iii) $\langle a\times b,a\rangle=0,\quad \langle a\times b,b\rangle=0$

iv) $\langle a\times b, a\times b\rangle = -\langle a,a\rangle\langle b,b\rangle + \left(\langle a,b\rangle\right)^2$

dır [19].

Tanım 2.2.7. $\alpha : \mathrm{I}\subset R\to R_1^3$, $\alpha=\alpha(s)$ R_1^3 de birim hızlı bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer $\forall s\in \mathrm{I}$ için α eğrisinin teğet vektörü $\alpha'(s)$ bir spacelike, timelike veya null vektör ise $\alpha=\alpha(s)$ eğrisine sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri adı verilir [16].

Tanım 2.2.8. $\alpha : \mathrm{I}\to R_1^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\forall s\in \mathrm{I}$ için $\alpha=\alpha(s)$ eğrisi spacelike veya timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir [19,21]:

1. **Spacelike Durum:** α eğrisi birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrinin $T(s)$ birim teğet vektörü bir spacelike vektördür. Bu durumda $T'(s)$ vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarına göre Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

i) $T'(s)$ vektörü spacelike olsun. α eğrisinin eğriliği $\kappa(s)$ ve burulması $\tau(s)$ olmak üzere (T,N,B) Frenet çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $T(s)$ ve $N(s)$ vektörleri spacelike, $B(s)$ vektörü ise timelike vektör olup,

$$T(s)=\alpha'(s),\ N(s)=\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|},\ B(s)=T(s)\times N(s)$$

$$\kappa(s)=\|T'(s)\|,\ \ \tau(s)=-\langle N'(s),B(s)\rangle$$

dır.

ii) $T'(s)$ vektörü timelike olsun. Bu durumda (T,N,B) Frenet çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $T(s)$ ve $B(s)$ vektörleri spacelike, $N(s)$ vektörü ise timelike vektör olup,

$$T(s)=\alpha'(s),\ N(s)=\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|},\ B(s)=-T(s)\times N(s)$$

ve

$$\kappa(s)=\|T'(s)\|,\ \ \tau(s)=\langle N'(s),B(s)\rangle$$

dır.

iii) $T'(s)$ null vektör olsun. Bu durumda (T,N,B) Frenet çatısının türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada κ sadece iki değer alabilir. Eğer α bir doğru ise $\kappa=0$ ve diğer tüm durumlarda $\kappa=1$ dir.

2. **Timelike Durum:** α eğrisi birim hızlı bir timelike eğri olsun. Dolayısıyla, eğrini $T(s)$ birim teğet vektörü bir timelike vektördür. Bu durumda $T'(s)\neq 0$ vektörü bir spacelike vektördür. (T,N,B) Frenet çatısının türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $N(s)$ ve $B(s)$ vektörleri spacelike, $T(s)$ vektörü ise timelike vektör olup,

$$T(s)=\alpha'(s), N(s)=\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}, B(s)=-T(s)\times N(s)$$

$$\kappa(s)=\|T'(s)\|, \tau(s)=-\langle N'(s), B(s)\rangle$$

dır.

3. **Null Durumu:** α bir null eğri olsun. Bu takdirde Frenet türev formülleri matris formunda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada κ sadece iki değer alabilir. Eğer α bir null doğru ise $\kappa=0$ dır, ve diğer tüm durumlarda $\kappa=1$ dir.

Tanım 2.2.9. S R_1^3 uzayında bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise S ye spacelike yüzey denir. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentziyen metriği ise S ye timelike yüzey denir. Yani, R_1^3 uzayındaki spacelike (timelike) bir yüzeyin birim normal vektörü timelike (spacelike) karakterdedir[14]. S yüzeyinin bütün teğet düzlemleri lightlike (null), yani yüzeyin normal vektörü lightlike ise S ye lightlike yüzey denir [21].

Bir spacelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem spacelike düzlem olduğundan, bu yüzey üzerinde yatan bütün eğriler spacelike eğrilerdir. Dolayısıyla, yüzey üzerinde herhangi bir P noktasından geçen dik parametre eğrilerinin her ikisi de spacelike eğrilerdir. Bununla birlikte, bir timelike yüzey üzerindeki herhangi bir noktada teğet düzlem Lorentziyen düzlemi (yani, R_1^3 de bir timelike düzlem) olduğundan, bu yüzey üzerinde yatan eğriler spacelike, timelike veya lightlike (null) eğriler olabilir. Burada eğrilerin null olması durumunu göz önüne almıyoruz. Dolayısıyla, yüzey üzerinde herhangi bir P noktasından geçen dik parametre eğrilerinden biri spacelike, diğeri ise timelike eğridir [19].

Tanım 2.2.10. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ işaret fonksiyonlarını göstersin. R_1^3 de bir $M(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü U olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım:

$$\langle U_u,U_u\rangle=\varepsilon_1\|U_u\|^2,\quad \langle U_v,U_v\rangle=\varepsilon_2\|U_v\|^2$$

$$\langle M_u,M_u\rangle=\varepsilon_3E,\quad \langle M_v,M_v\rangle=\varepsilon_4G$$

$$\langle M_u,M_v\rangle=\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}},\langle U,U\rangle=\varepsilon_5$$

$$\langle M_{uu},U\rangle=-\langle M_u,U_u\rangle=\frac{l}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}},$$

$$\langle M_{vv},U\rangle=-\langle M_v,U_v\rangle=\frac{n}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}},$$

$$-\langle M_{uv},U\rangle=\langle M_v,U_u\rangle=\frac{m}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}},$$

$$-\langle M_{vu},U\rangle=\langle M_u,U_v\rangle=\frac{m}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.$$

Yüzey için I. ve II. temel formları sırasıyla,

$$I=\varepsilon_3Edu^2+\frac{2F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}dudv+\varepsilon_4Gdv^2,$$

$$II=\frac{l}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}du^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right)mdudv+\frac{n}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}dv^2$$

biçimindedir[22].

3-boyutlu Lorentziyen uzayında spacelike ve timelike yüzeylerin teorisi ile ilgili temel kavramlar aşağıdaki gibi verilebilir.

I) Spacelike Yüzeylerin Teorisi:

Diferansiyellenebilir bir spacelike $M = M(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir α spacelike eğrisi verilsin. α eğrisinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ve (T, g, U) ile gösterilen ikinci bir çatı mevcuttur. Burada T birim vektörü α spacelike eğrisinin bir P noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanı; U, yüzeyin P noktasındaki birim normal vektör alanı ve g vektörü $g = -U \times T$ eşitliği ile tanımlı birim geodezik normal vektör alanıdır. Ayrıca U timelike olduğundan, T ve g birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$U = T \times g, \qquad -\mathrm{T} = g \times U, \qquad -g = U \times \mathrm{T}$$

bağıntıları vardır. Burada T vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer N, B, g ve U vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, T spacelike ekseni etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ hiperbolik açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise g ile N arasındaki merkez açı ve U ile B arasındaki hiperbolik açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & \sinh\phi \\ 0 & \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. (T, g, n) Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğrilik, k_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır. Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= k_g^2 - k_n^2 \\ k_g &= \kappa \cosh\phi \\ k_n &= -\kappa \sinh\phi \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\phi}{ds} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir [19].

II) Timelike Yüzeylerin Teorisi

M bir timelike yüzey olsun. Bu yüzey üzerinde hem spacelike hem de timelike eğri mevcuttur.

i. Timelike Yüzeyler Üzerinde Yatan Spacelike Eğrileri

Diferansiyellenebilir bir timelike $M = M(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir α spacelike eğrisi verilsin. α eğrisinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Bu hareketli çatı, (T, g, U) ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır ve Darboux ani dönme vektörü denilen vektörü içeren bir eksen etrafında döner. Burada T birim vektörü, α spacelike eğrisinin bir P noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanı; U, yüzeyin P noktasındaki birim normal vektör alanı ve g vektörü, $g = U \times T$ eşitliği ile tanımlı birim geodezik normal vektör alanıdır. Ayrıca, g timelike olduğundan, T ve U birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$T \times g = -U, \qquad g \times U = -T, \qquad U \times T = g$$

bağıntıları vardır. Burada T vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer N, B, g ve U vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, T spacelike ekseni etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ hiperbolik açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise g ile N arasındaki hiperbolik açı ve U ile B arasındaki merkez açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & \sinh\phi \\ 0 & \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. (T, g, U) Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğrilik k_n normal eğrilik ve τ_g geodezik burulmadır. Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\kappa^2 = k_g^2 - k_n^2,$$
$$k_g = \kappa \cosh \phi,$$
$$k_n = \kappa \sinh \phi,$$
$$\tau_g = \tau + \frac{d\phi}{ds}$$

eşitlikleri elde edilir [19].

ii. Timelike Yüzeyler Üzerinde Yatan Timelike Eğriler

Diferansiyellenebilir bir timelike $M = M(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir α timelike eğrisi verilsin. α eğrisinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Bu hareketli çatı, (T, g, U) ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır ve Darboux ani dönme vektörü denilen vektörü içeren bir eksen etrafında döner. Burada T birim vektörü α timelike eğrisinin bir P noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan birim teğet vektör alanı; U, yüzeyin P noktasındaki birim normal vektör alanı ve g vektörü, $g = -U \times T$ eşitliği ile tanımlı birim geodezik normal vektör alanıdır. T timelike olduğundan U ve g birim vektörleri spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$T \times g = -U, \quad g \times U = T, \quad U \times T = -g$$

bağıntıları vardır. Burada T vektörü Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan diğer N, B, g ve U vektörleri aynı spacelike düzlemde bulunurlar. Frenet çatısı, T timelike ekseni etrafında pozitif yönde $\phi = \phi(s)$ spacelike açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise g ile N arasındaki ve U ile B arasındaki spacelike açının ϕ olması demektir. Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntı matris formda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \phi & \sinh \phi \\ 0 & -\sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile verilir. (T, g, U) Darboux çatısının s yayına göre türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada k_g geodezik eğriik, τ_g geodezik burulmadır. Frenet türev formülleri, Darboux türev formülleri ve Frenet ve Darboux çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2,$$

$$k_g = \kappa \cos\phi,$$

$$k_n = \kappa \sin\phi,$$

$$\tau_g = \tau + \frac{d\phi}{ds}$$

eşitlikleri elde edilir [19].

Lorentziyen 3-uzayında Frenet çatısına göre öteleme yüzeylerinin birinci temel formu, ikinci temel formu, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği [6] da verilmiştir.

3. MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE ÖTELEME YÜZEYLERİ

Bu bölümde Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre öteleme yüzeylerinin $I.$ ve $II.$ temel formları, ortalama eğriliği ve Gauss eğriliğini hesaplayacağız.

$\alpha : I \subset R \to R_1^3$ herhangi bir düzgün eğri olsun. α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki Bishop çatısı (T, N_1, N_2) ile gösterilsin. Eğer α eğrisi bir timelike eğri ise bu takdirde Bishop türev formülleri

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada

$\langle T, T\rangle = -1,\ \langle N_1, N_1\rangle = 1,\ \langle .N_2, N_2\rangle = 1,\quad \langle T, N_1\rangle = 0,\ \langle T, N_2\rangle = 0,\ \langle N_1, N_2\rangle = 0.$

Eğer α eğrisi bir spacelike eğri ise bu takdirde Bishop türev formülleri

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -\varepsilon k_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada

$\varepsilon = \pm 1,\quad \langle T, T\rangle = 1,\ \langle N_1, N_1\rangle = \varepsilon,\ \langle N_2, N_2\rangle = -\varepsilon,\ \langle T, N_1\rangle = \langle T, N_2\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = 0$

dır [23].

M , R_1^3 de herhangi bir düzgün yüzey olsun. $\alpha = \alpha(s)$ de M yüzeyi üzerinde herhangi bir eğri olsun. α eğrisi M yüzeyi üzerinde olduğundan eğrinin her bir noktasında (T, g, U) ile gösterilen Darboux çatısının var olduğunu biliyoruz. Burada T , α eğrisinin birim teğet vektörü; U $\alpha(s)$ eğrisi boyunca M yüzeyinin birim normal vektörü ve g vektörü de $g = U \times T$ ile verilen bir birim vektör (geodezik normal vektördür) dür. α eğrisinin T birim teğet vektörü; (T, N, B) Frenet çatısı, (T, N_1, N_2) Bishop çatısı ve (T, g, U) Darboux çatısında ortak olduğundan N, B, N_1, N_2, g, U vektörlerinin hepsi daima aynı düzlem üzerinde bulunurlar.

Şimdi, M yüzeyi yönlendirilmiş bir spacelike yüzey olsun. Bu takdirde M üzerinde yatan $\alpha(s)$ eğrisi de spacelike olacaktır. Bu durumda (T,g,U) Darboux çatısı ve (T,N_1,N_2) Bishop çatısı arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & \sinh\phi \\ 0 & \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada g ile N arasındaki açı γ, N ile N_1 arasındaki açı θ olmak üzere $\phi=\gamma+\theta$ dır. (T,g,U) Darboux çatısı ve (T,N,B) Frenet çatısı arasındaki ilişki ise matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & \sinh\phi \\ 0 & \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Burada θ açısı g ve N vektörleri arasındaki açıdır.

Şimdi de M yüzeyi yönlendirilebilir bir timelike yüzey olsun. Bu durumda M üzerinde yatan $\alpha(s)$ eğrisi bir timelike veya spacelike eğri olacaktır. Böylece bu çatılar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir;

Eğer $\alpha(s)$ eğrisi timelike ise bu takdirde Darboux ve Bishop çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

ile verilir, burada g ile N arasındaki açı γ, N ile N_1 arasındaki açı θ olmak üzere $\phi=\gamma+\theta$ dır. Darboux ve Frenet çatıları arasındaki ilişki ise

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Burada f açısı g ve N vektörleri arasındaki açıdır.

Eğer $\alpha(s)$ eğrisi spacelike ise bu takdirde

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & \sinh\phi \\ 0 & \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

dır. Burada g ile N arasındaki açı γ, N ile N_1 arasındaki açı θ olmak üzere $\phi = \gamma + \theta$ dır.

Darboux ve Frenet çatıları arasındaki ilişki ise

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & \sinh\phi \\ 0 & \sinh\phi & \cosh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dır. Burada θ açısı g ve N vektörleri arasındaki açıdır.

Herhangi bir spacelike veya timelike M yüzeyinin $I.$ ve $II.$ Temel formları sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

eşitlikleriyle verildiğini biliyoruz, burada

$$E = \langle M_u, M_u \rangle, \; F = \langle M_u, M_v \rangle, \; G = \langle M_v, M_v \rangle$$

ve

$$l = \langle U, M_{uu} \rangle, \; m = \langle U, M_{uv} \rangle \; n = \langle U, M_{vv} \rangle \text{ [21].}$$

M yüzeyinin Ortalama ve Gauss eğrilikleri $I.$ ve $II.$ temel formların katsayıları cinsinden aşağıdaki gibi verildiğini biliyoruz [27].

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2\left|EG - F^2\right|}$$

ve

$$K = \langle U, U \rangle \frac{\ln - m^2}{EG - F^2}.$$

Tanım 3.1. $\alpha, \; \beta : (a,b) \to R_1^3$ iki eğri olsun. Bu eğriler tarafından belirlenen M öteleme yüzeyi

$$M(u,v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

parametresi ile verilen bir yüzeydir. M öteleme yüzeyi, α eğrisinin bir noktası β eğrisi boyunca hareket ederken α eğrisinin kendisine paralel olacak şekilde hareket ettirilmesiyle oluşan yüzeydir [6,24].

$M(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$, R_1^3 de bir öteleme yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi spacelike ise bu takdirde M nin $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ üreteç eğrileri de spacelike olacaktır. Eğer M öteleme yüzeyi timelike ise bu takdirde M nin $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ üreteç eğrileri timelike ya da spacelike olabilirler. Şimdi bu durumlara göre öteleme yüzeylerini inceleyelim.

M yüzeyi üzerindeki $\alpha(u)$ eğrisinin Frenet çatısını $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$; Bishop çatısını $\{T_\alpha, N_1^\alpha, N_2^\alpha\}$; Bishop eğriliklerini k_1^α ve k_2^α; Darboux çatısını $\{T_\alpha, g_\alpha, U\}$ ile, $\beta(v)$ eğrisinin Frenet çatısını $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$, Bishop çatısını $\{T_\beta, N_1^\beta, N_2^\beta\}$ Bishop eğriliklerini k_1^β ve k_2^β, Darboux çatısını $\{T_\beta, g_\beta, U\}$ ile gösterelim. Ayrıca $U=U_\alpha=U_\beta$ olduğunu belirtelim.

3.1 Bishop Çatısına Göre Spacelike Öteleme Yüzeyleri

□

$M(u,v)$ bir spacelike öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda $M(u,v)$ nin $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ üreteç eğrileri spacelike eğrilerdir. Böylece aşağıdaki durumlar verilebilir.

DURUM 1: $\alpha(u)$, N_2^α spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, N_2^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun. Bu takdirde,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

I. Temel formunun katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$E = \langle M_u, M_u\rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle = 1,$$

$$F = \langle M_u, M_v\rangle = \langle T_\alpha, T_\beta\rangle = \cos\varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v\rangle = \langle T_\beta, T_\beta\rangle = 1,$$

burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki spacelike açıdır. Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\cos\varphi dudv + dv^2$$

olarak elde edilir.

Şimdi, bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım. M yüzeyi spacelike olduğundan α ve β eğrilerinin teğet vektörlerinin gerdiği düzlem daima bir spacelike düzlemdir. Dolayısıyla $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki spacelike açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$
\begin{aligned}
U(u,v) &= \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}} M_u \times M_v \\
&= \frac{1}{\sqrt{|1-\cos^2\varphi|}} T_\alpha \times T_\beta \\
&= \frac{1}{\sin\varphi} T_\alpha \times T_\beta
\end{aligned}
$$

dır. Şimdi de

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

II. temel formunun katsayılarını bulalım.

$l = \langle U, M_{uu} \rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu} \rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle$$

olur. Burada $\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|1-\cos^2\varphi|}} = \frac{1}{\sin\varphi}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\sin\varphi} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi} \langle U \sin\varphi, T_\alpha' \rangle \\
&= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha \rangle \\
&= k_1^\alpha \langle U, N_1^\alpha \rangle + k_2^\alpha \langle U, N_2^\alpha \rangle \\
&= -k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv} \rangle = 0$$

dır. Son olarak,

$n=\langle U,M_{vv}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\|M_u\times M_v\|},M_{vv}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$
\begin{aligned}
n&=\frac{1}{\|M_u\times M_v\|}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi,T_\beta^{'}\rangle\\
&=\langle U,T_\beta^{'}\rangle\\
&=\langle U,k_1^\beta N_1^\beta+k_2^\beta N_2^\beta\rangle\\
&=k_1^\beta\langle U,N_1^\beta\rangle+k_2^\beta\langle U,N_2^\beta\rangle\\
&=-k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II=\left(-k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha\right)du^2+\left(-k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir. M yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği ise sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
K&=\langle U,U\rangle\frac{\mathrm{ln}-m^2}{EG-F^2}\\
&=-1.\frac{\left(-k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha\right)\left(-k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)}{1-\cos^2\varphi}\\
&=-\frac{\left(-k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha\right)\left(-k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)}{\sin^2\varphi}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
H&=\frac{Gl+En-2Fm}{2|EG-F^2|}\\
&=\frac{-k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta-k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha}{2|\sin^2\varphi|}\\
&=\frac{-k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta-k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha}{2\sin^2\varphi}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

DURUM 2: $\alpha(u)$ N_2^α spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$ de N_1^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun

I. Temel formun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

eşitliği ile verildiğini biliyoruz. Buna göre M yüzeyi için birinci temel formun katsayıları şu şekilde elde edilir.

$$E = \langle M_u, M_u \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \cos\varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_\beta, T_\beta \rangle = 1$$

dır. Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki spacelike açıdır. Böylece öteleme yüzeyin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\cos\varphi dudv + dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım. $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki spacelike açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektörünün

$$U(u,v) = \frac{1}{\sin\varphi} T_\alpha \times T_\beta$$

olduğunu 1. durumdan biliyoruz.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

katsayılarını bulalım. $l = \langle U, M_{uu} \rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu} \rangle$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle$$

olur. Burada

$$\frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|1 - \cos^2\varphi|}} = \frac{1}{\sin\varphi}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u \times M_v , M_{uu}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi, T_\alpha^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha\langle U, N_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\langle U, N_2^\alpha\rangle \\
&= -k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. $M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv}\rangle = 0 .$$

Son olarak, $n = \langle U, M_{vv}\rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\left\| M_u \times M_v \right\|}, M_{vv}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\left\| M_u \times M_v \right\|}\langle M_u \times M_v , M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left| EG - F^2 \right|}}\langle M_u \times M_v , M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u \times M_v , M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle + k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta \sinh\phi_\beta - k_2^\beta \cosh\phi_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(-k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha\right)du^2 + \left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta - k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak bulunur. Bununla birlikte, yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
K &= \langle U, U\rangle \frac{\mathrm{ln} - m^2}{EG - F^2} \\
&= -\frac{\left(-k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta - k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)}{\sin^2\varphi}
\end{aligned}
$$

ve

$$H=\frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^2\right|}=\frac{k_1^\beta\sinh\phi_\beta-k_2^\beta\cosh\phi_\beta-k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha}{2\sin^2\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 3: $\alpha(u)$ N_1^α spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$ N_2^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun. I. Temel formun

$$I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

katsayılarını bulalım.

$$E=\langle M_u,M_u\rangle=\langle T_\alpha,T_\alpha\rangle=1,$$

$$F=\langle M_u,M_v\rangle=\langle T_\alpha,T_\beta\rangle=\cos\varphi,$$

$$G=\langle M_v,M_v\rangle=\langle T_\beta,T_\beta\rangle=1.$$

Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I=du^2+2\cos\varphi dudv+dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörü

$$U(u,v)=\frac{1}{\sin\varphi}T_\alpha\times T_\beta$$

dır. Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki spacelike açıdır.

Şimdi de bu yüzeyin $II=ldu^2+2mdudv+ndv^2$ ikinci temel formunun katsayılarını bulalım.

$l=\langle U,M_{uu}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|},M_{uu}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l=\frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$

olur. Burada $\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}=\frac{1}{\sqrt{\left|1-\cos^2\varphi\right|}}=\frac{1}{\sin\varphi}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{uu}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi, T_\alpha^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha\langle U, N_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\langle U, N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha - k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha
\end{aligned}
$$

bulunur. . Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv}\rangle = 0 .$$

Son olarak, $n = \langle U, M_{vv}\rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{vv}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\|M_u \times M_v\|}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle + k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle \\
&= -k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \sinh\phi_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha - k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)du^2 + \left(-k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \sinh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak bulunur.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
K &= \langle U, U\rangle \frac{\mathrm{ln} - m^2}{EG - F^2} \\
&= -\frac{\left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha - k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)\left(-k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \sinh\phi_\beta\right)}{\sin^2\varphi}
\end{aligned}
$$

ve

$$H=\frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^2\right|}=\frac{-k_1^{\beta}\cosh\phi_{\beta}+k_2^{\beta}\sinh\phi_{\beta}+k_1^{\alpha}\sinh\phi_{\alpha}-k_2^{\alpha}\cosh\phi_{\alpha}}{2\sin^2\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 4: $\alpha(u)$ N_1^{α} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, N_1^{β} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun. I. Temel formun

$$I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

ile verildiğini biliyoruz. Buradan öteleme yüzeyi için birinci temel formun katsayılarını kolayca elde edebiliriz:

$$E=\langle M_u,M_u\rangle=\langle T_{\alpha},T_{\alpha}\rangle=1$$

$$F=\langle M_u,M_v\rangle=\langle T_{\alpha},T_{\beta}\rangle=\cos\varphi$$

$$G=\langle M_v,M_v\rangle=\langle T_{\beta},T_{\beta}\rangle=1$$

olur. Burada φ, T_{α} ve T_{β} teğet vektörleri arasındaki spacelike açıdır. Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I=du^2+2\cos\varphi dudv+dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

M yüzeyinin birim normal vektörünün

$$U(u,v)=\frac{1}{\sin\varphi}T_{\alpha}\times T_{\beta}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de bu yüzeyin $II=ldu^2+2mdudv+ndv^2$ ikinci temel formunun katsayılarını bulalım.

$l=\langle U,M_{uu}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|},M_{uu}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l=\frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$

olur. Burada $\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}=\frac{1}{\sqrt{\left|1-\cos^2\varphi\right|}}=\frac{1}{\sin\varphi}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{uu}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi, T_\alpha^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha\langle U, N_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\langle U, N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha - k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha
\end{aligned}
$$

Bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv}\rangle = 0$$

dır. Son olarak, $n = \langle U, M_{vv}\rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{vv}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\|M_u \times M_v\|}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sin\varphi}\langle U\sin\varphi, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle + k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta \sinh\phi_\beta - k_2^\beta\cosh\phi_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha - k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)du^2 + \left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta - k_2^\beta\cosh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
K &= \langle U,U\rangle\frac{\ln - m^2}{EG-F^2} \\
&= -\frac{\left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha - k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta - k_2^\beta\cosh\phi_\beta\right)}{\sin^2\varphi}
\end{aligned}
$$

ve

$$H = \frac{En + 2Fm + Gl}{2\left|EG - F^2\right|} = \frac{k_1^\beta \sinh \phi_\beta - k_2^\beta \cosh \phi_\beta + k_1^\alpha \sinh \phi_\alpha - k_2^\alpha \cosh \phi_\alpha}{2\sin^2 \varphi}$$

olarak bulunur.

3.2 Bishop Çatısına Göre Timelike Öteleme Yüzeyleri

$M(u,v)$ bir timelike öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda $M(u,v)$ nin $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ üreteç eğrileri timelike ya da spacelike olabilir. Böylece M timelike öteleme yüzeyi için aşağıdaki durumlar verilebilir.

DURUM 1: $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrilerinin her ikisi de timelike eğriler olsunlar. Dolayısıyla $U, N_1^\alpha, N_2^\alpha, N_1^\beta, N_2^\beta$ spacelike vektörlerdir.

I. Temel formun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

eşitliği ile verildiğini biliyoruz. Buna göre $M(u,v)$ timelike öteleme yüzeyi için birinci temel formun katsayılarını kolayca elde edebiliriz:

$$E = \langle M_u, M_u \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = -1,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle = -\cosh \varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_\beta, T_\beta \rangle = -1$$

olur. Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = -du^2 - 2\cosh \varphi dudv - dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki hiperbolik açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$
\begin{aligned}
U(u,v) &= \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}} M_u \times M_v \\
&= \frac{1}{\sqrt{|1-\cosh^2\varphi|}} T_\alpha \times T_\beta \\
&= \frac{1}{\sinh\varphi} T_\alpha \times T_\beta
\end{aligned}
$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

katsayılarını bulalım.

$l = \langle U, M_{uu}\rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|}\langle M_u \times M_v, M_{uu}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}\langle M_u \times M_v, M_{uu}\rangle$$

olur. Burada $\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|1-\cosh^2\varphi|}} = \frac{1}{\sinh\varphi}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{uu}\rangle \\
&= \frac{1}{\sinh\varphi}\langle U\sinh\varphi, T_\alpha^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha\langle U, N_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\langle U, N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır.

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv}\rangle = 0 .$$

Son olarak,

$n = \langle U, M_{vv}\rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{vv}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$n = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v, M_{vv}\rangle$$

$$\begin{aligned}
n&=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u\times M_v, M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle U\sinh\varphi, T_\beta^{'}\rangle,\\
&=\langle U, T_\beta^{'}\rangle\\
&=\langle U, k_1^\beta N_1^\beta+k_2^\beta N_2^\beta\rangle\\
&=k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle+k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle\\
&=k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\cosh\phi_\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. . Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki merkez açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II=\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)du^2+\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\cosh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$\begin{aligned}
K&=\langle U,U\rangle\frac{\ln-m^2}{EG-F^2}\\
&=\frac{\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\cosh\phi_\beta\right)}{\sinh^2\varphi}
\end{aligned}$$

ve

$$H=\frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^2\right|}=\frac{-\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\cosh\phi_\beta\right)-\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)}{2\sinh^2\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 2: $\alpha(u)$ N_2^α spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, N_2^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun.

Şimdi I. Temel formun

$$I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

katsayılarını bulalım:

$$E=\langle M_u, M_u\rangle=\langle T_\alpha, T_\alpha\rangle=1,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \cosh\varphi ,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_\beta, T_\beta \rangle = 1 .$$

Burada φ , T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki merkez açıdır.Böylece yüzeyin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\cosh\varphi dudv + dv^2$$

olarak elde edilir.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki merkez açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v) = \frac{1}{\sinh\varphi} T_\alpha \times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

katsayılarını bulalım.

$l = \langle U, M_{uu} \rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu} \rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle$$

olur. Burada $\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|1-\cosh^2\varphi|}} = \frac{1}{\sinh\varphi}$ olduğundan

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sinh\varphi} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle \\ &= \frac{1}{\sinh\varphi} \langle U \sinh\varphi, T_\alpha^{'} \rangle \\ &= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha \rangle \\ &= k_1^\alpha \langle U, N_1^\alpha \rangle + k_2^\alpha \langle U, N_2^\alpha \rangle \\ &= k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha \end{aligned}$$

Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv} \rangle = 0 .$$

Son olarak,

$n = \langle U, M_{vv} \rangle = \langle \dfrac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{vv} \rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{vv} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{vv} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\sinh\varphi} \langle M_u \times M_v, M_{vv} \rangle \\ &= \frac{1}{\sinh\varphi} \langle U \sinh\varphi, T_\beta' \rangle \\ &= \langle U, T_\beta' \rangle \\ &= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta \rangle \\ &= k_1^\beta \langle U, N_1^\beta \rangle + k_2^\beta \langle U, N_2^\beta \rangle \\ &= k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right) du^2 + \left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right) dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$\begin{aligned} K &= \langle U, U \rangle \frac{\mathrm{ln} - m^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)}{\sinh^2\varphi} \end{aligned}$$

ve

$$H = \frac{En + 2Fm + Gl}{2|EG - F^2|} = \frac{\left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right) + \left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)}{2\sinh^2\varphi}$$

olarak elde edilir.

DURUM 3: $\alpha(u)$ N_2^α spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, N_1^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun.

Şimdi I. Temel formun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

katsayılarını kolayca elde edebiliriz:

$$E = \langle M_u, M_u \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \cosh\varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_\beta, T_\beta \rangle = 1.$$

Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki merkez açıdır. Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\cosh\varphi dudv + dv^2$$

olarak elde edilir.

Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım. $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki merkez açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v) = \frac{1}{\sinh\varphi} T_\alpha \times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

katsayılarını bulalım.

$l = \langle U, M_{uu} \rangle = \langle \dfrac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu} \rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle$$

olur. Burada $\dfrac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} = \dfrac{1}{\sqrt{|1 - \cosh^2\varphi|}} = \dfrac{1}{\sinh\varphi}$ olduğundan

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sinh\varphi} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle \\ &= \frac{1}{\sinh\varphi} \langle U \sinh\varphi, T_\alpha^{'} \rangle \\ &= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha \rangle \\ &= k_1^\alpha \langle U, N_1^\alpha \rangle + k_2^\alpha \langle U, N_2^\alpha \rangle \\ &= k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

$M_{uv}=0$ olduğundan

$$m=\langle U,M_{uv}\rangle=0\,.$$

Son olarak,

$n=\langle U,M_{vv}\rangle=\langle\dfrac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|},M_{vv}\rangle$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\begin{aligned}
n&=\frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle U\sinh\varphi,T_\beta^{'}\rangle\\
&=\langle U,T_\beta^{'}\rangle\\
&=\langle U,k_1^\beta N_1^\beta+k_2^\beta N_2^\beta\rangle\\
&=k_1^\beta\langle U,N_1^\beta\rangle+k_2^\beta\langle U,N_2^\beta\rangle\\
&=k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki merkez açıdır.

Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II=\left(k_1^\alpha\sinh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)du^2+\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K=\langle U,U\rangle\frac{\ln-m^2}{EG-F^2}=\frac{\left(k_1^\alpha\sinh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)}{\sinh^2\varphi}$$

ve

$$H=\frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^2\right|}=\frac{\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)+\left(k_1^\alpha\sinh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)}{2\sinh^2\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 4: $\alpha(u)$ N_1^{α} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, N_2^{β} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun.

Şimdi I. Temel formun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

katsayılarını bulalım:

$$E = \langle M_u, M_u \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \cosh\varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_\beta, T_\beta \rangle = 1.$$

Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki merkez açıdır.

Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\cos\varphi dudv + dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki merkez açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v) = \frac{1}{\sinh\varphi} T_\alpha \times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin $II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$ ikinci temel formunun katsayılarını bulalım.

$$l = \langle U, M_{uu} \rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu} \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle$$

olur. Burada $\dfrac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} = \dfrac{1}{\sqrt{|1 - \cosh^2\varphi|}} = \dfrac{1}{\sinh\varphi}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{uu}\rangle \\
&= \frac{1}{\sinh\varphi}\langle U \sinh\varphi, T_\alpha^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha\langle U, N_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\langle U, N_2^\alpha\rangle \\
&= k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır.

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv}\rangle = 0 .$$

Son olarak,

$$n = \langle U, M_{vv}\rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{vv}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\|M_u \times M_v\|}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\sinh\varphi}\langle U \sin\varphi, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle + k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha\right)du^2 + \left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \langle U, U\rangle \frac{\ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{\left(k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \sinh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)}{\sinh^2\varphi}$$

ve

$$H=\frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^{2}\right|}=\frac{\left(k_1^{\beta}\sinh\phi_{\beta}+k_2^{\beta}\cosh\phi_{\beta}\right)+\left(k_1^{\alpha}\cosh\phi_{\alpha}+k_2^{\alpha}\sinh\phi_{\alpha}\right)}{2\sinh^{2}\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 5: $\alpha(u)$ N_1^{α} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, N_1^{β} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun

Şimdi $I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ I. Temel formun katsayılarını bulalım:

$$E=\langle M_u,M_u\rangle=\langle T_{\alpha},T_{\alpha}\rangle=1,$$

$$F=\langle M_u,M_v\rangle=\langle T_{\alpha},T_{\beta}\rangle=\cosh\varphi,$$

$$G=\langle M_v,M_v\rangle=\langle T_{\beta},T_{\beta}\rangle=1.$$

Burada φ, T_{α} ve T_{β} teğet vektörleri arasındaki merkez açıdır. Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I=du^2+2\cos\varphi dudv+dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki merkez açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U\left(u,v\right)=\frac{1}{\sinh\varphi}T_{\alpha}\times T_{\beta}$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin $II=ldu^2+2mdudv+ndv^2$ ikinci temel formunun katsayılarını bulalım.

$$l=\langle U,M_{uu}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|},M_{uu}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l=\frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$

olur. Burada $\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}=\frac{1}{\sqrt{\left|1-\cosh^2\varphi\right|}}=\frac{1}{\sinh\varphi}$ olduğundan

$$l=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$
$$=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle U\sinh\varphi,T_\alpha^{'}\rangle$$
$$=\langle U,k_1^\alpha N_1^\alpha+k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle$$
$$=k_1^\alpha\langle U,N_1^\alpha\rangle+k_2^\alpha\langle U,N_2^\alpha\rangle$$
$$=k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır.

$M_{uv}=0$ olduğundan

$$m=\langle U,M_{uv}\rangle=0\,.$$

Son olarak,

$$n=\langle U,M_{vv}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|},M_{vv}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$n=\frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle$$
$$=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle$$
$$=\frac{1}{\sinh\varphi}\langle U\sinh\varphi,T_\beta^{'}\rangle$$
$$=\langle U,T_\beta^{'}\rangle$$
$$=\langle U,k_1^\beta N_1^\beta+k_2^\beta N_2^\beta\rangle$$
$$=k_1^\beta\langle U,N_1^\beta\rangle+k_2^\beta\langle U,N_2^\beta\rangle$$
$$=k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki merkez açıdır.

Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II=\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha\right)du^2+\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K=\langle U,U\rangle\frac{\ln-m^2}{EG-F^2}=\frac{\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)}{\sinh^2\varphi}$$

ve

$$H=\frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^2\right|}=\frac{\left(k_1^\beta\cosh\phi_\beta+k_2^\beta\sinh\phi_\beta\right)+\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\sinh\phi_\alpha\right)}{2\sinh^2\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 6: $\alpha(u)$ bir timelike eğri ve $\beta(v)$, N_2^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun.

Şimdi $I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ I. Temel formun katsayılarını bulalım:

$$E=\langle M_u,M_u\rangle=\langle T_\alpha,T_\alpha\rangle=-1,$$

$$F=\langle M_u,M_v\rangle=\langle T_\alpha,T_\beta\rangle=\sinh\varphi,$$

$$G=\langle M_v,M_v\rangle=\langle T_\beta,T_\beta\rangle=1.$$

Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

Böylece yüzeyin birinci temel formu

$$I=-du^2+2\sinh\varphi dudv+dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v)=\frac{1}{\cosh\varphi}T_\alpha\times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II=ldu^2+2mdudv+ndv^2$$

katsayılarını bulalım.

$$l=\langle U,M_{uu}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|},M_{uu}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l=\frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}=\frac{1}{\sqrt{\left|1-\sinh^2\varphi\right|}}=\frac{1}{\cosh\varphi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\cosh\varphi}\langle M_u\times M_v, M_{uu}\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh\varphi}\langle U\cosh\varphi, T_\alpha^{'}\rangle \\ &= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle \\ &= k_1^\alpha\langle U, N_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\langle U, N_2^\alpha\rangle \\ &= k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır.

$M_{uv}=0$ olduğundan

$$m=\langle U, M_{uv}\rangle = 0\,.$$

Son olarak,

$$n=\langle U, M_{vv}\rangle = \langle \frac{M_u\times M_v}{\left\|M_u\times M_v\right\|}, M_{vv}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\left\|M_u\times M_v\right\|}\langle M_u\times M_v, M_{vv}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u\times M_v, M_{vv}\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh\varphi}\langle M_u\times M_v, M_{vv}\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh\varphi}\langle U\cosh\varphi, T_\beta^{'}\rangle \\ &= \langle U, T_\beta^{'}\rangle \\ &= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta\rangle \\ &= k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle + k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle \\ &= k_1^\beta\sinh\phi_\beta + k_2^\beta\cosh\phi_\beta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II=\left(k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\right)du^2+\left(k_1^\beta\sinh\phi_\beta + k_2^\beta\cosh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \langle U,U\rangle \frac{\ln - m^2}{EG-F^2} = \frac{\left(k_1^\alpha \cosh \phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh \phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \sinh \phi_\beta + k_2^\beta \cosh \phi_\beta\right)}{\cosh^2 \varphi}$$

ve

$$H = \frac{En + 2Fm + Gl}{2\left|EG-F^2\right|} = \frac{-\left(k_1^\beta \sinh \phi_\beta + k_2^\beta \cosh \phi_\beta\right) + \left(k_1^\alpha \cosh \phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh \phi_\alpha\right)}{2\cosh^2 \varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 7: $\alpha(u)$ bir timelike eğri ve $\beta(v)$, N_1^β spacelike vektörü ile bir spacelike eğri olsun. Yüzeyin I. Temel formunun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

eşitliği ile verildiğini biliyoruz. Öteleme yüzeyi için birinci temel formun katsayılarını bulalım.

$$E = \langle M_u, M_u\rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle = -1,$$

$$F = \langle M_u, M_v\rangle = \langle T_\alpha, T_\beta\rangle = \sinh\varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v\rangle = \langle T_\beta, T_\beta\rangle = 1.$$

Burada φ, T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = -du^2 + 2\sinh\varphi dudv + dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v) = \frac{1}{\cosh\varphi} T_\alpha \times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

katsayılarını bulalım.

$$l=\langle U,M_{uu}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\|M_u\times M_v\|},M_{uu}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l=\frac{1}{\|M_u\times M_v\|}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle=\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$

olur. Burada

$$\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}=\frac{1}{\sqrt{|1-\sinh^2\varphi|}}=\frac{1}{\cosh\varphi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
l&=\frac{1}{\cosh\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle\\
&=\frac{1}{\cosh\varphi}\langle U\cosh\varphi,T_\alpha^{'}\rangle\\
&=\langle U,k_1^\alpha N_1^\alpha+k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle\\
&=k_1^\alpha\langle U,N_1^\alpha\rangle+k_2^\alpha\langle U,N_2^\alpha\rangle\\
&=k_1^\alpha\cosh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. . Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır.

$M_{uv}=0$ olduğundan

$$m=\langle U,M_{uv}\rangle=0\,.$$

Son olarak,

$$n=\langle U,M_{vv}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\|M_u\times M_v\|},M_{vv}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\begin{aligned}
n&=\frac{1}{\|M_u\times M_v\|}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
n&=\frac{1}{\cosh\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle\\
&=\frac{1}{\cosh\varphi}\langle U\cosh\varphi,T_\beta^{'}\rangle\\
&=\langle U,T_\beta^{'}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \langle U, k_1^{\beta} N_1^{\beta} + k_2^{\beta} N_2^{\beta} \rangle \\ &= k_1^{\beta} \langle U, N_1^{\beta} \rangle + k_2^{\beta} \langle U, N_2^{\beta} \rangle \\ &= k_1^{\beta} \cosh \phi_{\beta} + k_2^{\beta} \sinh \phi_{\beta} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, ϕ_{β} açısı U ve N_1^{β} vektörleri arasındaki merkez açıdır.

Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^{\alpha} \cosh \phi_{\alpha} + k_2^{\alpha} \cosh \phi_{\alpha}\right) du^2 + \left(k_1^{\beta} \cosh \phi_{\beta} + k_2^{\beta} \sinh \phi_{\beta}\right) dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \langle U, U \rangle \frac{\ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{\left(k_1^{\alpha} \cosh \phi_{\alpha} + k_2^{\alpha} \cosh \phi_{\alpha}\right)\left(k_1^{\beta} \cosh \phi_{\beta} + k_2^{\beta} \sinh \phi_{\beta}\right)}{\cosh^2 \varphi}$$

ve

$$H = \frac{En + 2Fm + Gl}{2\left|EG - F^2\right|} = \frac{-\left(k_1^{\beta} \cosh \phi_{\beta} + k_2^{\beta} \sinh \phi_{\beta}\right) + \left(k_1^{\alpha} \cosh \phi_{\alpha} + k_2^{\alpha} \cosh \phi_{\alpha}\right)}{2\cosh^2 \varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 8: $\alpha(u)$ N_2^{α} spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$, bir timelike eğri olsun. Şimdi I. Temel formun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

katsayılarını bulalım:

$$E = \langle M_u, M_u \rangle = \langle T_{\alpha}, T_{\alpha} \rangle = 1,$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_{\alpha}, T_{\beta} \rangle = \sinh \varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_{\beta}, T_{\beta} \rangle = -1.$$

Burada φ, T_{α} ve T_{β} teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

Böylece öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\sinh \varphi dudv - dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v)=\frac{1}{\cosh\varphi}T_\alpha\times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II=ldu^2+2mdudv+ndv^2$$

katsayılarını bulalım.

$$l=\langle U,M_{uu}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\|M_u\times M_v\|},M_{uu}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l=\frac{1}{\|M_u\times M_v\|}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle=\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle$$

olur. Burada

$$\frac{1}{\sqrt{|EG-F^2|}}=\frac{1}{\sqrt{|1-\sinh^2\varphi|}}=\frac{1}{\cosh\varphi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}l&=\frac{1}{\cosh\varphi}\langle M_u\times M_v,M_{uu}\rangle\\&=\frac{1}{\cosh\varphi}\langle U\cosh\varphi,T_\alpha^{'}\rangle\\&=\langle U,k_1^\alpha N_1^\alpha+k_2^\alpha N_2^\alpha\rangle\\&=k_1^\alpha\langle U,N_1^\alpha\rangle+k_2^\alpha\langle U,N_2^\alpha\rangle\\&=k_1^\alpha\sinh\phi_\alpha+k_2^\alpha\cosh\phi_\alpha\end{aligned}$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır.

$M_{uv}=0$ olduğundan

$$m=\langle U,M_{uv}\rangle=0\,.$$

Son olarak,

$$n=\langle U,M_{vv}\rangle=\langle\frac{M_u\times M_v}{\|M_u\times M_v\|},M_{vv}\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$n=\frac{1}{\|M_u\times M_v\|}\langle M_u\times M_v,M_{vv}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\sqrt{\left|EG-F^2\right|}}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\cosh\varphi}\langle M_u \times M_v, M_{vv}\rangle \\
&= \frac{1}{\cosh\varphi}\langle U\cosh\varphi, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, T_\beta^{'}\rangle \\
&= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta\langle U, N_1^\beta\rangle + k_2^\beta\langle U, N_2^\beta\rangle \\
&= k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki merkez açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)du^2 + \left(k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \langle U,U\rangle \frac{\ln - m^2}{EG-F^2} = \frac{\left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right)}{\cosh^2\varphi}$$

ve

$$H = \frac{En+2Fm+Gl}{2\left|EG-F^2\right|} = \frac{\left(k_1^\beta \cosh\phi_\beta + k_2^\beta \cosh\phi_\beta\right) - \left(k_1^\alpha \sinh\phi_\alpha + k_2^\alpha \cosh\phi_\alpha\right)}{2\cosh^2\varphi}$$

olarak bulunur.

DURUM 9: $\alpha(u)$ N_1^α spacelike vektörü ile bir spacelike eğri ve $\beta(v)$ bir timelike eğri olsun. Şimdi I. Temel formun

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

katsayılarını bulalım:

$$E = \langle M_u, M_u\rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle = 1,$$

$$F = \langle M_u, M_v\rangle = \langle T_\alpha, T_\beta\rangle = \sinh\varphi,$$

$$G = \langle M_v, M_v\rangle = \langle T_\beta, T_\beta\rangle = -1.$$

Burada φ , T_α ve T_β teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açıdır.

Böylece yüzeyin birinci temel formu

$$I = du^2 + 2\sinh\varphi du dv - dv^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin birim normal vektörünü bulalım.

$\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ teğet vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı $\varphi(u)$ olmak üzere M yüzeyinin birim normali

$$U(u,v) = \frac{1}{\cosh\varphi} T_\alpha \times T_\beta$$

dır.

Şimdi de bu yüzeyin ikinci temel formunun

$$II = l du^2 + 2m du dv + n dv^2$$

katsayılarını bulalım.

$$l = \langle U, M_{uu} \rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{uu} \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$l = \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle$$

olur. Burada

$$\frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|1 - \sinh^2\varphi|}} = \frac{1}{\cosh\varphi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\cosh\varphi} \langle M_u \times M_v, M_{uu} \rangle \\ &= \frac{1}{\cosh\varphi} \langle U \cosh\varphi, T_\alpha' \rangle \\ &= \langle U, k_1^\alpha N_1^\alpha + k_2^\alpha N_2^\alpha \rangle \\ &= k_1^\alpha \langle U, N_1^\alpha \rangle + k_2^\alpha \langle U, N_2^\alpha \rangle \\ &= k_1^\alpha \cosh\phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh\phi_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Burada, ϕ_α açısı U ve N_1^α vektörleri arasındaki merkez açıdır

$M_{uv} = 0$ olduğundan

$$m = \langle U, M_{uv} \rangle = 0 .$$

Son olarak,

$$n = \langle U, M_{vv} \rangle = \langle \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}, M_{vv} \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\|M_u \times M_v\|} \langle M_u \times M_v, M_{vv} \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left|EG - F^2\right|}} \langle M_u \times M_v, M_{vv} \rangle \\
&= \frac{1}{\cosh \varphi} \langle M_u \times M_v, M_{vv} \rangle \\
&= \frac{1}{\cosh \varphi} \langle U \cosh \varphi, T_\beta^{'} \rangle \\
&= \langle U, T_\beta^{'} \rangle \\
&= \langle U, k_1^\beta N_1^\beta + k_2^\beta N_2^\beta \rangle \\
&= k_1^\beta \langle U, N_1^\beta \rangle + k_2^\beta \langle U, N_2^\beta \rangle \\
&= k_1^\beta \cosh \phi_\beta + k_2^\beta \cosh \phi_\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, ϕ_β açısı U ve N_1^β vektörleri arasındaki merkez açıdır. Böylece yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \left(k_1^\alpha \cosh \phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh \phi_\alpha\right) du^2 + \left(k_1^\beta \cosh \phi_\beta + k_2^\beta \cosh \phi_\beta\right) dv^2$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \langle U, U \rangle \frac{\ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{\left(k_1^\alpha \cosh \phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh \phi_\alpha\right)\left(k_1^\beta \cosh \phi_\beta + k_2^\beta \cosh \phi_\beta\right)}{\cosh^2 \varphi}$$

ve

$$H = \frac{En + 2Fm + Gl}{2\left|EG - F^2\right|} = \frac{\left(k_1^\beta \cosh \phi_\beta + k_2^\beta \cosh \phi_\beta\right) - \left(k_1^\alpha \cosh \phi_\alpha + k_2^\alpha \sinh \phi_\alpha\right)}{2\cosh^2 \varphi}$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

1. Verstraelen, L., Walrave, J., Yaprak, S., The Minimal Translation Surfaces in Euclidean Space. Soochow J. Math., 1994, 20(1), 77-82.
2. Liu, H., Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, Journal of Geometry, 1999, 64, 141-149.
3. Yoon, D. W. , On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski 3-space, Taiwasene Journal of Mathematics, 2002, 6(3) , 389-398.
4. Munteanu, M., Nistor A.I., On the geometry of the second fundamental form of translation surfaces in E^3, Houston J. Math., 2011, 37 (4), 1087-1102.
5. Çetin, M., Öteleme Yüzeylerinin Diferansiyel Geometrisi. Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uşak, 2010, 69. (Yüksek Lisans Tezi)
6. Cetin, M., Kocayigit H., Önder M., Translation surfaces according to Frenet frame in Minkowski 3-space, Int. J. Phsy. Sci. 2012, 7 (47), 6135-6143.
7. Güler, F., Atalay, G., Kasap, E., Translation Surface according to Bishop Frame in Eucledean 3-Space, J. Math. Comput. Sci., 2014, 4 , No. 1, 50-57.
8. Karacan, M. K., Bükçü, B., Bishop Frame of Timelike Curve in Minkowski 3-Space, S.D.U. Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi (E-Dergi), 2008, 3(1), 80-90.
9. Kocayiğit, H., Bükçü, B., İ. Pektaş, Characterizations of Spacelike Curves According to Bishop Darboux Vector in Minkowski 3 Space E_1^3, Communication In Mathematical Modeling And Applications, 2016, 1(2), 1-7. (Yayın No: 2837049).
10. Sabuncuoğlu, A. Differansiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, 2006.
11. Hacısalihoğlu, H.H. Differansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları No:2, 1983
12. DoCarmo, M.P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice- Hall, New Jersey, 1976.
13. Bishop, L. R., There is More Than One Way to Frame a Curve, Amer. Math. Monthly, 1975, 82(3), 246-251.
14. Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri II. Cilt, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1-143, 2000.
15. Gray, A., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica 2. ed., CRC Press, Washington, 1998.
16. O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, London, 1983.
17. Birman, G. S., Nomizu, K., Trigonometry in Lorentzian Geometry. Amer. Math. Monthly., 1984, 91(9), 543-549.
18. Ratcliffe, J. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer, New York, 2006.
19. Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, 2012.
20. Turgut, A., 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995, 96 s. (Doktora Tezi)
21. Lopez, R., Differantial geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Int. Electron. J. Geom., 2014, 7 (1), 44-107.
22. Ekmekci, N., Tunçer Y., On differantial geometry of the Lorentz surfaces. Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. Haziran 2007, Sayı:13 ISSN:1302-3055, 20-24.

23. Özdemir, M., Ergin A.A., Parallel Frames of Non-Lightlike Curves, Missourİ J. of Math. Sci., 2008, 20(2), 127-137.
24. Baba-Hamed, Ch., Bekkar, M., Zaubir, H., “Translation Surface in the Three-Dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, Int. J. Math. Anal, 2010, 4(17), 797-808.
25. Cetin, M., Tuncer, Y., Ekmekci, N., Translation surfaces in Euclidean 3-space, World Acad. Sci. Engin. Tech., 2011, 52, 864-868.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Melike ÇETİN

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1992

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : melikeyagci@outlook.com

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Karşıyaka Behçet Uz Anadolu Lisesi, 2010

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014