

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**KESİRLİ MERTEBEDEN FONKSİYONEL İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN GENİŞ BİR SINIFI İÇİN YENİ SAYISAL ÇÖZÜM
METODU**

Sercan ÖNER

**Danışman
Doç. Dr. Ali KONURALP**



MANİSA-2019

**Sercan
ÖNER**

**KESİRLİ MERTEBEDEN FONKSİYONEL İNTEGRO-DİFFERANSİYEL
DENKLEMLERİN GENİŞ BİR SINIFI İÇİN YENİ SAYISAL ÇÖZÜM METODU**

2019

TEZ ONAYI

Sercan ÖNER tarafından hazırlanan "**Kesirli Mertebeden Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Geniş Bir Sınıfı İçin Yeni Sayısal Çözüm Metodu**"adlı tez çalışması 23/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Doç. Dr. Ali KONURALP**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Mehmet SEZER**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Dr. Öğretim Üyesi Mehmet AÇIL**
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi



TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Sercan ÖNER



İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
TABLO DİZİNİ	VI
TEŞEKKÜR.....	VII
ÖZET.....	VIII
ABSTRACT.....	IX
1. GİRİŞ	1
1.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin ve Euler-Taylor Polinomlarının Kullanım Alanları.....	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Gecikme Terimli Volterra-Fredholm İntegral Denklemi.....	2
2.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemler.....	2
2.3. Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler.....	3
2.3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali ve Caputo Türevi.....	3
2.4. Gecikme Terimli Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler	6
2.5. Standart Baz Fonksiyonları ile Euler Polinomları	6
3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ.....	7
3.1. Gecikme Terimli Volterra-Fredholm İntegral Denkleminin Euler-Taylor Kolakasyon Metodu ile Çözümü.....	7
3.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemler.....	11
3.3. Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemlerin Euler-Taylor Kolakasyon Metodu ile Çözümü	16
3.4. Gecikme Terimli Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemlerin Euler-Taylor Kolakasyon Metodu ile Çözümü.....	20
3.5. Rezidüel Hata Fonksiyonu ve Mutlak Hata	23

3.5.1 Volterra-Fredholm İntegral Denklem ve İntegro-Diferansiyel Denklem için Rezidüel Hata	23
3.5.2. Gecikme Terimli Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler için Rezidüel Hata	24
4. ÖRNEKLER	25
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	54



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

a_n	Çözüm Serisinin Bilinmeyen Katsayıları
A^T	A'nın Transpozu
B	Geçiş Matrisi
$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x)$	Caputo Kesirli Türevi
$e_N(x)$	Euler-Taylor Sıralama Çözümü için Hata Fonksiyonu
$e_{N,M}(x)$	Euler-Taylor Sıralama Yöntemi Çözümü için Tahmini Hata
G	Sağ Taraftaki Homojen Olmayan Fonksiyonun Matrisi
$I_{0+}^\alpha f$	Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
K_f	Fredholm İntegralinin çekirdeği
K_v	Volterra İntegralinin çekirdeği
M	Geçiş Matrisi
m_1	Sistemin Mertebesi
m_2	Gecikmeli Terimlerin Sayısı
m_3	Volterra-Fredholm'un İçindeki Fonksiyonun Mertebesi
m_4	Gecikmeli Terimlerin Sayısı
N	Kesme Sınırı
$\Re(\alpha)$	Karmaşık Sayının reel kısmı
T	Standart Tabana Göre Türev Geçiş Matrisi
$y(x)$	Tam Çözüm
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
W	Temel Denkleme ait Katsayılar Matrisi
\tilde{W}	Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
$[[x]]$	Tam değer fonksiyonu
x_i	Sıralama Noktaları
$X(x)$	Standart Taban Matrisi
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 4.1. Örnek 4.1'in $N = 5$ için Hata grafiği.	26
Şekil 4.2. Örnek 4.3'ün $N = 2$ grafiği.	27
Şekil 4.3. Örnek 4.4'ün $N = 3$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	28
Şekil 4.4. Örnek 4.4'ün $N = 5$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	28
Şekil 4.5. Örnek 4.5'ün $N = 3$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	29
Şekil 4.6. Örnek 4.5'in $N = 10$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	29
Şekil 4.7. Örnek 4.7'in $N = 7$ Rezidü ve için Mutlak Hata Grafiği.	32
Şekil 4.8. Örnek 4.8'nin $N = 5$ Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	34
Şekil 4.9. Örnek 4.9'in $N = 6$ Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	37
Şekil 4.10. Örnek 4.12'un $N = 2$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği.	42
Şekil 4.11. Örnek 4.13'nin Farklı N Değerleri için Hata Grafiği.	43
Şekil 4.12. Örnek 4.14'ün Farklı $N = 5$ ve Çeşitli α Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.	44
Şekil 4.13. Örnek 4.15'ün $N = 7$ için Mutlak Hata Grafiği.	45
Şekil 4.14. Örnek 4.15'in $N = 7$ ve Çeşitli α Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği	45

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1. Örnek 4.1'in $N = 5$ için nümerik çözümleri.....	25
Tablo 4.2. Örnek 4.3'nin $N = 2$ için nümerik çözümleri	27
Tablo 4.3. Örnek 4.5'ün $N = 3$ için nümerik çözümleri	40
Tablo 4.4. Örnek 4.7'in $N = 7$ için nümerik çözümleri	31
Tablo 4.5. Örnek 4.8'nin $N = 5$ için nümerik karşılaştırmaları.....	34
Tablo 4.6. Örnek 4.9'in $N = 6$ için nümerik karşılaştırmaları.....	36
Tablo 4.7. Örnek 4.10'un $N = 5$ için nümerik çözümleri.....	39
Tablo 4.8. Örnek 4.11'nun $N = 4$ nümerik çözümleri.....	41
Tablo 4.9. Örnek 4.13'in Farklı N Değerleri için Literatürdeki Mutlak Hataları	42
Tablo 4.10. Örnek 4.14'in farklı $N = 10$ Nümerik Çözümleri	43
Tablo 4.11. Örnek 4.15'in Farklı N Değerleri için Literatürdeki Mutlak Hataları	44

TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aőamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ,bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aőamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum , Sayın Doç. Dr. Ali KONURALP' e, çalıőmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Sercan ÖNER
Manisa, 2019



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Kesirli Mertebeden Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Geniş Bir Sınıfı İçin Yeni Sayısal Çözüm Metodu

Sercan ÖNER

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Ali KONURALP

Bu çalışmada, karışık koşullar altında çeşitli fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin Euler-Taylor Polinomlarının matris formülasyonları ile sayısal çözümler elde etmek için hızlı ve güvenilir sayısal bir yöntem önerilmektedir. Verimliliği ve önerilen yöntemin uygulanabilirliğini göstermek için, bazı örnekler ve sayısal hesaplamalarının verileri verilmiştir.

Giriş bölümü dışında bu tez esas olarak iki bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde tezin amacı ve kapsamı açıklanmaktadır.

İkinci bölümde, integro-diferansiyel denklemler, Volterra-Fredholm integral denklemler, Kesirli diferansiyel denklemler ve Euler-Taylor Polinomları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde integro-diferansiyel denklemler, Volterra-Fredholm integral denklemler, Kesirli diferansiyel denklemlerin Euler-Taylor Polinomları ile çözümleri incelenmiştir. Ele alınan farklı örnekler üzerinde yöntemle daha kısa zamanda düşük işlem sayıları ile iyileştirilmelerin olacağı gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Euler-Taylor Polinomu, İntegro-Diferansiyel Denklem, Volterra-Fredholm Diferansiyel Denklem, Kesirli Lineer Diferansiyel Denklem, Gecikme Terimli Kesirli Lineer Diferansiyel Denklem.

2019, 66 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

New Numerical Solution Method for a Large Class of Fractional Functional Integro-Differential Equations

Sercan ÖNER

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali KONURALP

In this study, a fast and reliable numerical method is proposed to obtain numerical solutions with matrix formulations of Euler-Taylor Polynomials of various functional integro-differential equations under mixed conditions. To illustrate the efficiency and applicability of the proposed method, some examples and data of numerical calculations are given.

In the second chapter, basic concepts of integro-differential equations, Volterra-Fredholm integral equations, Fractional differential equations and EulerTaylor Polynomials are given.

In the third chapter, Euler-Taylor collocation method is proposed to find the solutions of integro-differential equations, Volterra-Fredholm integral equations and fractional differential equations. It is observed that there would be improvements in different samples in a shorter time with low process numbers.

Keywords: Euler-Taylor Polynomials, Integro-Differential Equation, Collocation Method, Volterra-Fredholm Differential Equation, Linear Delay Fractional, Linear Fractional.

2019, 66 pages

1. GİRİŞ

1.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin ve Euler-Taylor Polinomlarının Kullanım

Alanları

Son yıllarda geniş uygulama alanlarına sahip fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler fizik ve mühendislikte oldukça fazla kullanılmıştır. Bu denklemler adi diferansiyel, gecikmeli diferansiyel denklem impulsif denklemler, integral ve integro-diferansiyel denklemler ve pantograf tipteki denklemlerden oluşur[1-17]. Bu tip denklemler, matematiksel modellerle ifade edilen dinamik sistemler, kuantum mekaniği, elektrodinamik, populasyon dinamiği, bulaşıcı hastalık, gemi ve uçakların seyir kontrolü, kontrol problemleri, olasılık, sayılar teorisi, mekanik, astronomi, biyoloji, elektrostatik, endüstriyel uygulamalar gibi uygulamalı bilimlerde önemli rol oynar[18-40]. Yukarıda ifade edilen fonksiyonel denklemleri çözmek için oldukça güçtür. Bu yüzden, yaklaşık çözümlerini bazı nümerik metotlar kullanılarak elde etmek zorundayız. Bu metotların bazıları Lagrange ve Chebyshev interpolasyon yaklaşımı[1], Legendre-Gauss sıralama metodu[4], one-leg Q-methods[7], Laguerre sıralama metodu[8,12,17], Jacobian eliptik fonksiyon metodu[10],diferansiyel dönüşüm metodu[11], Bessel kolakasyon metodu[13,51,57], Bernstein seri metodu[22], Taylor seri açılımı metodu[30-32,50], Adomian ayrışım metodu[38,49], Geriye doğru değiştirme yöntemi[2.3], Varyasyonel iterasyon metodu[20,41,42,43,53], Chebyshev sıralama metodu[44,55], B-spline metodu[47], Runge-Kutta metodu[48], Üstel yaklaşım metodu[52,58,60], Taylor sıralama metodu[54], Bernoulli polinom yaklaşımı[56], Dickson matris metodu[62], Hibrit Euler-Taylor matris metodudur[59].Dikkat edilirse mümkün olduğunca farklı denklem yapıları için ihtiyaca ve kullanışlılığa göre farklı yöntemler geliştirilmiş ve bu denklemlere uygulanmıştır. Bu çalışmada oluşturulacak yöntem ise pek çok denklem sınıfını ihtiva eden daha geniş bir mastır denklem yapısının yaklaşık çözümlerini elde etmek için geliştirilecek olup, yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlere sahip başlangıç değer problemine de uygulanabilecektir. Üstelik önerilen yöntemin işlerliği yazılan algoritma sayesinde arttırılacak olup böylece yaklaşık çözümler hızlıca ve istenilen hassaslıkta elde edilecektir.

Bu çalışmada, bazı fonksiyonel denklemler için kullanılan matris ve sıralama metotları,

$$a \leq u_{rs}(x) \leq v_{rs}(x) \leq b$$

aralığında, çeşitli limitlerle, genelleştirilmiş yüksek mertebeden lineer fonksiyonel integro-diferansiyel denklemleri çözmek için iyileştirilip genişletildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Gecikme Terimli Volterra-Fredholm İntegral Denklemi

Bu yazıda Sezer'in bazı fonksiyonel denklemler için kullandığı matris ve sıralama yöntemleri, genelleştirilmiş doğrusal fonksiyonel integral denklemleri

$$a \leq u_s(x) \leq v_s(x) \leq b$$

aralıklı değişken ile çeşitli limitlerle çözmek için geliştirilmiş ve genişletilmiştir.

$$\sum_{j=0}^{m_1} P_j(x) y(\alpha_j x + \beta_j) = g(x) + \sum_{s=0}^{m_2} \int_{u_s(x)}^{v_s(x)} K_s(x, t) y(\lambda_s t + \mu_s) dt. \quad (2.1.1)$$

Burada $P_j(x)$, $g(x)$, $K_s(x, t)$, $u_s(x)$ ve $v_s(x)$ sürekli fonksiyonlar ve katsayılarımızdır.

2.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bu yazıda Sezer'in bazı fonksiyonel denklemler için kullandığı matris ve sıralama yöntemleri, genelleştirilmiş doğrusal fonksiyonel integral denklemleri aralıklı değişken limitlerle çözmek için geliştirilmiş ve genişletilmiştir [84,85].

Bu çalışmada, parçalı aralıklı yüksek mertebeden

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x) y^{(k)}(\alpha_{kj} x + \beta_{kj}) = g(x) + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} K_{rs}(x, t) y^{(r)}(\lambda_{rs} t + \mu_{rs}) dt \quad (2.2.1)$$

fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.2.2)$$

karışık koşullar altında,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x) \quad (2.2.3)$$

kesilmiş Euler serisi formunda yaklaşık çözümleri araştırılacaktır. Burada $k = 0, 1, \dots, m_1$, $j = 0, 1, \dots, m_2$, $r = 0, 1, \dots, m_3$ ve $s = 0, 1, \dots, m_4$ için $P_{kj}(x)$, $g(x)$, $u_{rs}(x)$, $v_{rs}(x)$ $a \leq x \leq b$ aralığında ve $K_{rs}(x, t)$ fonksiyonu da $a \leq x, t \leq b$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar; $a \leq u_{rs} < v_{rs} \leq b$, $E_n(x)$ Euler polinomları, n dereceli polinomlardır ve

$$E_n(x) + \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} E_s(x) = 2x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.4)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

2.3. Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler

Parçalı aralıklı kesirli mertebeden

$$\sum_{k=0}^{m_i} P_k(x) y^{(k\alpha)}(x) = g(x) \quad (2.3.1)$$

diferansiyel denklemlerin

$$\sum_{k=0}^{m_i-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (2.3.2)$$

karışık koşullar altında,

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x^\alpha) \quad (2.3.3)$$

kesilmiş Euler serisi formunda yaklaşık çözümleri araştırılacaktır.

2.3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali ve Caputo Türevi

İlk olarak 1695 yılında L'hospital'in Leibnitz'e yazdığı ve içinde 1/2. mertebeden türevin anlamını sorduğu mektup ile başlar. 1738 de Euler x^α kuvvet fonksiyonunun tam sayı olmayan mertebeden türev değerlerini gözlemlemiştir. 1823 yılında Abel tarafından kesirli mertebeden bir denklemin ilk çözümleri ortaya konmuştur.

Kesirli analizdeki en önemli araçlardan bir tanesi genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak tanımlanan Gamma(Γ) fonksiyonudur. Bu fonksiyon $x > 0$ için yakınsak olan has olmayan bir integral vasıtasıyla

$$\Gamma(x) = (x-1)! = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü üzere x 'in pozitif tamsayılarda faktöriyel değerini veren bu Gama fonksiyonu, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliği ve x 'in $[0,1]$ aralığındaki Gama fonksiyon değerleri kullanılarak negatif tam sayılar haricindeki negatif reel sayılarda tanımlanacak şekilde genişletilmektedir. Bu yüzden Gama fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denilebilmektedir.

Reel eksenin bir sonlu aralığında Riemann-Liouville kesirli integral tanımı şöyledir: $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $\Omega = [a, b]$ reel ekseninde bir sonlu aralık olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ için α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $I_{0+}^{\alpha} f$

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \Re(\alpha) > 0)$$

olarak tanımlanır. $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olduğu zaman $I_{0+}^n f$, f fonksiyonunun ardışık n defa integralini vermektedir. Aynı zamanda $I_{0+}^n f$ ifadesi ile

$$(I_{0+}^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

şeklinde Cauchy formülü elde edilebilmekte ve $I_{0+}^{\alpha} f$ tamsayı mertebeden n katlı adi integrale eşit olmaktadır.

Özellik: Eğer $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\beta) > 0$) ise, bu takdirde

$$(I_{0+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$$

Ω kapalı aralık olmak üzere $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Ω üzerinde mutlak süreklidir denir eğer $\forall \varepsilon > 0$ için, $x_k, y_k \in \Omega$ olmak üzere Ω 'nın (x_k, y_k) ayrık çiftlerden oluşan alt aralıkların bir sonlu dizisi

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir pozitif δ sayısı var ise

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

$f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ olacak şekilde Ω üzerinde $(n-1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip reel değerli $f(x)$ fonksiyonlarının uzayı $AC^n[a, b]$ ile gösterilsin. $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $n = \Re(\alpha) + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}$ için $n = \alpha$ olsun.

Eğer $y(x) \in AC^n[a, b]$ ise, bu takdirde $({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x)$ Caputo kesirli türevi, $[a, b]$ aralığında hemen hemen her yerde mevcuttur.

Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}$ ise, $D = \frac{d}{dx}$ ve $n = \lceil \Re \rceil + 1$ olmak üzere $({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x)$

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I_{0+}^{n-\alpha} D^n y)(x)$$

Özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $y(x) \in AC[a, b]$ olduğunda,

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha} =: (I_{a+}^{1-\alpha} Dy)(x)$$

yazılabilir.

Ayrıca

$$({}^C D_{0+}^0 y)(x) = y(x)$$

ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için

$$({}^C D_{0+}^n y)(x) = D^n y(x).$$

Özellik: $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $n = \lceil \Re(\alpha) \rceil + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}$ için $n = \alpha$ olsun. Ayrıca $\Re(\beta) > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

- i) $({}^C D_{0+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-1}, (\Re(\beta)) > n$
- ii) $({}^C D_{0+}^\alpha (t-a)^k)(x) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1.$
- iii) Sabit fonksiyonun Caputo türevi sıfırdır.

$\alpha \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}_0$ olduğu zaman, ${}^C D_{0+}^\alpha$ Caputo kesirli türev operatörü, I_{0+}^α Riemann-Liouville kesirli integrasyon operatörünün ters operatörlerini sağlar. Fakat $\Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ ve $\Im(\alpha) \neq 0$ olduğunda böyle bir özelliğe sahip değildir.

$\Omega = [a, b]$ aralığı üzerinde

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| < \infty$$

olacak şekilde Lebesgue reel değerli ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi $L_\infty(a, b)$ ile gösterilir. Burada $\operatorname{ess\,sup} |f(x)|$ fonksiyonunun esas maximum değeridir.

Lemma: $\Re(\alpha) > 0$ ve $y(x) \in L_\infty(a, b)$ veya $y(x) \in C[a, b]$ olsun.

(a) Eğer $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ veya $\alpha \in \mathbb{N}$ ise, bu takdirde $({}^C D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha y)(x) = y(x).$

(b) Eğer $\Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ veya $\Im(\alpha) \neq 0$ ise, bu takdirde

$$({}^C D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha y)(x) = y(x) - \frac{(I_{a+}^{\alpha+1-n} y)(a+)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha}.$$

2.4. Gecikme Terimli Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemler

Karışık koşullar altında lineer kesirli gecikmeli diferansiyel denklem [87]

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x) y^{(k\alpha)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) = g(x) \quad (2.4.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\lceil m_1 \alpha \rceil - 1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, \lceil m_1 \alpha \rceil - 1 \quad (2.4.2)$$

Burada $P_{kj}(x)$ ve $g(x)$ $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlar α_{kj} , β_{kj} , a_{ik} , b_{ik} ve γ_i katsayılarımızdır.

2.5. Standart Baz Fonksiyonları ile Euler Polinomları

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Taylor seri açılımı yardımıyla E_n , n Euler sayıları

$$F(t) = \frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \quad (2.5.1)$$

olarak tanımlanır.

$E_n(x)$ Euler polinomları, n dereceli polinomlardır ve

$$E_n(x) + \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} E_s(x) = 2x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.2)$$

bağıntısı ile bulunabilir ki buradan

$$E_0(x) = 1, E_1(x) = x - \frac{1}{2}, E_2(x) = x^2 - x, E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}$$

katsayıları elde edilir. Aynı zamanda $E_n(x)$ polinomları

$$E_n'(x) = nE_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

koşulunu sağlayan $n \geq 0$ dereceli polinomlardır.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

3.1. Gecikme Terimli Volterra-Fredholm İntegral Denkleminin Euler-Taylor Kolakasyon

Metodu ile Çözümü

(2.1.1) denkleminin kesilmiş seri formunda ifade edilen yaklaşık çözümü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x) \quad (3.1.1)$$

olup burada a_n $n = 0, 1, 2, \dots, N$ bilinmeyen katsayılar ve $E_n(x)$ Euler polinomları

$$E_n(x) + \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} E_s(x) = 2x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.2)$$

ile ifade edilir. İlk 5 Euler polinomu

$$E_0(x) = 1, E_1(x) = x - \frac{1}{2}, E_2(x) = x^2 - x, \quad (3.1.3)$$

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x, \dots$$

şeklindedir. Euler polinomları

$$E_m'(x) = mE_{m-1}(x), \quad m \geq 1 \quad (3.1.4)$$

koşulunu sağlayan polinomlardır.

(3.1.1) formundaki toplam matris formunda yazılırsa

$$y(x) \cong y_N(x) = E(x)A, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.1.5)$$

burada

$$E(x) = [E_0(x) \ E_1(x) \ \dots \ E_N(x)] \\ A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T \quad (3.1.6)$$

(3.1.5)'te $x \rightarrow \alpha_j x + \beta_j$ yazılırsa

$$y(\alpha_j x + \beta_j) \cong E(\alpha_j x + \beta_j)A \quad (3.1.7)$$

Öte yandan Euler polinomları ve Taylor açılımı ve (3.1.3) yardımıyla standart baz matris

arasındaki ilişki $X(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N]$ ve Euler temel matris $E(x) = [E_0(x) \ E_1(x) \ \dots \ E_N(x)]$

ile

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} \binom{1}{0} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} \binom{2}{0} & \frac{1}{2} \binom{2}{1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{2} \binom{N}{0} & \frac{1}{2} \binom{N}{1} & \frac{1}{2} \binom{N}{2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0(x) \\ E_1(x) \\ E_2(x) \\ \vdots \\ E_N(x) \end{bmatrix}$$

son denklemin transpozu alınıp $E(x)$ çekilirse

$$\begin{aligned} (X(x))^T &= T^T (E(x))^T \\ X(x) &= E(x)T \\ E(x) &= X(x)T^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

(3.1.8)'te $x \rightarrow \alpha_j x + \beta_j$ yazılırsa

$$\begin{aligned} E(\alpha_j x + \beta_j) &= X(\alpha_j x + \beta_j)T^{-1} \\ &= X(x)B(\alpha_j, \beta_j)T^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Burada B geçiş matrisi olup

$$B(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_j^0 \beta_j^0 & \binom{1}{0} \alpha_j^0 \beta_j^1 & \binom{2}{0} \alpha_j^0 \beta_j^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_j^0 \beta_j^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_j^1 \beta_j^0 & \binom{2}{1} \alpha_j^1 \beta_j^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_j^1 \beta_j^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_j^2 \beta_j^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_j^2 \beta_j^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_j^N \beta_j^0 \end{bmatrix}$$

(3.1.8)'i (3.1.5)'de ve (3.1.9)'u (3.1.7)'de yerine yazılırsa

$$y(x) \cong y_N(x) = X(x)T^{-1}MA \quad (3.1.10)$$

ve

$$y(\alpha_j x + \beta_j) \cong X(x)B(\alpha_j, \beta_j)T^{-1}MA. \quad (3.1.11)$$

Benzer şekilde

$$y(\lambda_s t + \mu_s) \cong X(t)B(\lambda_s, \mu_s)T^{-1}MA \quad (3.1.12)$$

olarak görülebilir. Çekirdek fonksiyonu $K_{rs}(x, t)$ 'nin matris formuna dönüştürülmesi

$$K_s(x, t) = \sum_{s=0}^N k_s^{mn} x^m t^n \quad (3.1.13)$$

$$= X(x)K_s X^T(t)$$

$$k_s^{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_s(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}$$

$$K_s = [k_s^{mn}], \quad m, n = 0, 1, \dots, N.$$

Temel matris denklemini oluşturmak için ilk olarak (3.1.11),(3.1.12) ve (3.1.15) matrisleri (2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{m_1} P_j(x)X(x)B(\alpha_j, \beta_j)T^{-1}M A = g(x) + \sum_{s=0}^{m_2} X(x)K_s Q_s(x)B(\lambda_s, \mu_s)T^{-1}M A \quad (3.1.14)$$

burada

$$Q_s(x) = \int_{u_s(x)}^{v_s(x)} X^T(t)X(t)dt = [q_s^{mn}(x)]$$

ve

$$q_s^{mn}(x) = \frac{(v_s(x))^{m+n+1} - (u_s(x))^{m+n+1}}{m+n+1}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N.$$

Şimdi sıralama noktalarını

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{yada} \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos(\pi i / N), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

(3.1.14)'de yerine koyarsak

$$\sum_{j=0}^{m_1} P_j(x_i)X(x_i)B(\alpha_j, \beta_j)T^{-1}M A - \sum_{s=0}^{m_2} X(x_i)K_s Q_s(x_i)B(\lambda_s, \mu_s)T^{-1}M A = g(x_i)$$

$$\left\{ \sum_{j=0}^{m_1} P_j(x_i)X(x_i)B(\alpha_j, \beta_j) - \sum_{s=0}^{m_2} X(x_i)K_s Q_s(x_i)B(\lambda_s, \mu_s) \right\} T^{-1}M A = g(x_i)$$

Matris denklemini sistemi veya kompakt formdaki gibi

$$\left\{ \sum_{j=0}^{m_1} P_j X B(\alpha_j, \beta_j) T^{-1} M - \sum_{s=0}^{m_2} \bar{X} \bar{K}_s \bar{Q}_s \bar{B}(\lambda_s, \mu_s) \bar{T}^{-1} \bar{M} \right\} A = G \quad (3.1.15)$$

temel matris denklemini elde edilir.

(3.1.15) 'deki matrislerin açılımı aşağıdaki gibidir:

$$P_j = \begin{bmatrix} P_j(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_j(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_j(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \bar{K}_s = \begin{bmatrix} K_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_s \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\bar{Q}_s = \begin{bmatrix} Q_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_s \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{B}(\lambda_s, \mu_s) = \begin{bmatrix} B(\lambda_s, \mu_s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B(\lambda_s, \mu_s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B(\lambda_s, \mu_s) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T^{-1} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} M \\ M \\ \vdots \\ M \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

Böylece;

$$W = [w_{pq}] = \sum_{j=0}^{m_1} P_j X B(\alpha_j, \beta_j) T^{-1} M - \sum_{s=0}^{m_2} \bar{X} \bar{K}_s \bar{Q}_s \bar{B}(\lambda_s, \mu_s) \bar{T}^{-1} \bar{M} \quad (3.1.16)$$

kabulu altında (3.1.15) temel matris denklemi a_0, a_1, \dots, a_N , $(N+1)$ bilinmeyen katsayılı $(N+1)$ denklemden oluşan

$$WA = G \text{ yada } [W; G] \quad (3.1.17)$$

sistemine indirgenir.

Eğer

$$\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W}, \tilde{G}] = N+1$$

ise bu taktirde

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} \quad (3.1.18)$$

yazılabilir. Böylece içerisinde a_i $i = 0, 1, \dots, N$ katsayıları olan A matrisi tek olarak belirlenir.

Şu halde

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x) \quad (3.1.19)$$

Euler polinom çözümü elde edilir.

3.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemler

Parçalı aralıklı yüksek mertebeden

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x) y^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) = g(x) + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} K_{rs}(x, t) y^{(r)}(\lambda_{rs}t + \mu_{rs}) dt \quad (3.2.1)$$

fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2.2)$$

karışık koşullar altında,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x) \quad (3.2.3)$$

kesilmiş Euler serisi formunda yaklaşık çözümleri araştırılacaktır. Burada $k = 0, 1, \dots, m_1$

$j = 0, 1, \dots, m_2$, $r = 0, 1, \dots, m_3$ ve $s = 0, 1, \dots, m_4$ için $P_{kj}(x)$, $g(x)$, $u_{rs}(x)$, $v_{rs}(x)$ $a \leq x \leq b$ aralığında

ve $K_{rs}(x, t)$ fonksiyonu da $a \leq x, t \leq b$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar; $a \leq u_{rs} < v_{rs} \leq b$,

$E_n(x)$ Euler polinomları, n dereceli polinomlardır ve

$$E_n(x) + \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} E_s(x) = 2x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.4)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

İstenilen

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x) \quad (3.2.5)$$

formundaki kesilmiş seri ifadesinin matris formunu, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$E(x) = [E_0(x) \ E_1(x) \ \dots \ E_N(x)] \quad (3.2.6)$$

$$A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T \quad (3.2.7)$$

olmak üzere

$$y(x) \cong y_N(x) = E(x)A \quad (3.2.8)$$

olarak yazabiliriz. Diğer yandan (2.5.3)'den $E(x)$ matrisi ve $E'(x)$ türevi arasındaki matris bağıntısı

$$E'(x) = E(x)M \quad (3.2.9)$$

olup işlemi tekrarlayarak

$$\begin{aligned} E''(x) &= E'(x)M = E(x)M^2 \\ E'''(x) &= E'(x)M^2 = E(x)M^3 \\ &\vdots \\ E^{(k)}(x) &= E'(x)M^{k-1} = E(x)M^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

bulunur. Burada M matrisi aşağıdaki gibidir:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad M^0 = I \text{ (Birim matris)}$$

(3.2.8) ve (3.2.10)'den $y_N^{(k)}(x)$ 'nin matris formu

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &\cong y_N^{(k)}(x) = E^{(k)}(x)A \\ &= E(x)M^k A, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

olur. (3.2.11)'de $x \rightarrow \alpha_{kj}x + \beta_{kj}$ konulursa

$$y^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) \cong E(\alpha_{kj}x + \beta_{kj})M^k A, \quad k = 0, 1, \dots, m_1 \quad (3.2.12)$$

elde edilir.

Diğer yandan, Euler polinomlarını ve Taylor açılımını kullanarak, $X(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N]$ standart taban matrisi ve $E(x) = [E_0(x) \ E_1(x) \ \dots \ E_N(x)]$ Euler taban matrisi arasındaki matris bağıntısını, (2.5.2) yardımı ile

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} \binom{1}{0} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} \binom{2}{0} & \frac{1}{2} \binom{2}{1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{2} \binom{N}{0} & \frac{1}{2} \binom{N}{1} & \frac{1}{2} \binom{N}{2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0(x) \\ E_1(x) \\ E_2(x) \\ \vdots \\ E_N(x) \end{bmatrix}$$

yazarak bu eşitlikte transpoz alınıp $E(x)$ çekilirse

$$\begin{aligned} (X(x))^T &= T^T (E(x))^T \\ X(x) &= E(x)T \\ E(x) &= X(x)T^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

elde edilir.

(3.2.13)'da $x \rightarrow \alpha_{kj}x + \beta_{kj}$ koyarak,

$$\begin{aligned} E(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) &= X(\alpha_{kj}x + \beta_{kj})T^{-1} \\ &= X(x)B(\alpha_{kj}, \beta_{kj})T^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

olur. Burada

$$B(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^0 & \binom{1}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^1 & \binom{2}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_{kj}^1 \beta_{kj}^0 & \binom{2}{1} \alpha_{kj}^1 \beta_{kj}^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_{kj}^1 \beta_{kj}^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_{kj}^2 \beta_{kj}^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_{kj}^2 \beta_{kj}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_{kj}^N \beta_{kj}^0 \end{bmatrix}$$

dır. (3.2.11)'ü (3.2.13)'de ve (3.2.12)'ü (3.2.14)'de yerine koyalım:

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = X(x)T^{-1}M^k A \quad (3.2.15)$$

ve

$$y^{(k)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) \cong X(x)B(\alpha_{kj}, \beta_{kj})T^{-1}M^k A \quad (3.2.16)$$

olacaktır. Benzer şekilde işlem yaparsak

$$y^{(r)}(\lambda_{rs}t + \mu_{rs}) \cong X(t)B(\lambda_{rs}, \mu_{rs})T^{-1}M^r A \quad (3.2.17)$$

olduğunu görürüz.

Çekirdek fonksiyonu $K_{rs}(x, t)$ 'nin matris formuna dönüştürülmesi aşağıdaki gibidir:

$$k_{rs}^{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_{rs}(0, 0)}{\partial x^m \partial t^n} \text{ ve } K_{rs} = [k_{rs}^{mn}], \quad m, n = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere

$$K_{rs}(x, t) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N k_{rs}^{mn} x^m t^n = X(x)K_{rs}X^T(t) \quad (3.2.18)$$

eşitliği sağlanır.

Temel matris denklemini kurmak için, önce (3.2.16),(3.2.17) ve (3.2.18) matris bağıntılarını (3.2.1) denkleminde yerleştiririz ve aşağıdaki matris denklemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x)X(x)B(\alpha_{kj}, \beta_{kj})T^{-1}M^k A = g(x) \\ + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} X(x)K_{rs}Q_{rs}(x)B(\lambda_{rs}, \mu_{rs})T^{-1}M^r A \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Burada

$$q_{rs}^{mn}(x) = \frac{(v_{rs}(x))^{m+n+1} - (u_{rs}(x))^{m+n+1}}{m+n+1} ; \quad m, n = 0, 1, \dots, N$$

olup

$$Q_{rs}(x) = \int_{u_{rs}(x)}^{v_{rs}(x)} X^T(t)X(t)dt = [q_{rs}^{mn}(x)]$$

biçimindedir. Sonra, (3.2.19)'de

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos(\pi i / N)$$

ile tanımlı sıralama noktalarını yerine koyarak $i = 0, 1, \dots, N$ için

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x_i)X(x_i)B(\alpha_{kj}, \beta_{kj})T^{-1}M^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} X(x)K_{rs}Q_{rs}(x)B(\lambda_{rs}, \mu_{rs})T^{-1}M^r \right\} A = g(x_i)$$

matris denklemleri veya kısaca temel matris denklemleri (kompakt form)

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj} X B(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) T^{-1} M^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} \bar{B}(\lambda_{rs}, \mu_{rs}) \bar{T}^{-1} \bar{M}^r \right\} A = G \quad (3.2.20)$$

elde edilir. (3.2.20)'daki matrislerin açılımları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 P_{kj} &= \begin{bmatrix} P_{kj}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{kj}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{kj}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \\
 \bar{X} &= \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \bar{K}_{rs} = \begin{bmatrix} K_{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{rs} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{rs} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \\
 \bar{Q}_{rs} &= \begin{bmatrix} Q_{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{rs} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{rs} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{B}(\lambda_{rs}, \mu_{rs}) = \begin{bmatrix} B(\lambda_{rs}, \mu_{rs}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B(\lambda_{rs}, \mu_{rs}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B(\lambda_{rs}, \mu_{rs}) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \\
 \bar{T}^{-1} &= \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T^{-1} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{M}^r = \begin{bmatrix} M^r \\ M^r \\ \vdots \\ M^r \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1} \\
 A &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}
 \end{aligned}$$

Böylece;

$$W = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj} X B(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) T^{-1} M^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{s=0}^{m_4} \bar{X} \bar{K}_{rs} \bar{Q}_{rs} \bar{B}(\lambda_{rs}, \mu_{rs}) \bar{T}^{-1} \bar{M}^r$$

kabulü altında (3.2.20) temel matris denklemi a_0, a_1, \dots, a_N ($N+1$) bilinmeyen katsayılı ($N+1$) cebrik denklemden oluşan

$$WA = G \text{ veya } [W; G] \quad (3.2.21)$$

sistemine indirgenir.

Diğer yandan (3.2.2) koşullarının matris formları, (3.2.15) matris bağıntısını kullanarak

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} X(a) + b_{ik} X(b)) T^{-1} M^k \right\} A = \gamma_i$$

şeklinde olur ve bu da $U_i = [u_{i0} \ u_{i1} \ \cdots \ u_{iN}]$ için

$$U_i A = \gamma_i \text{ veya } [U_i; \gamma_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2.22)$$

denklem sistemi anlamına gelir.

Sonuç olarak (3.2.1) denkleminin (3.2.2) koşulları altında (3.2.3) formunda çözümü elde etmek için, (3.2.21) matrisinin m . satırının silinerek yerine, koşullara karşılık gelen (3.2.22)'deki m . satırının konulmasıyla yeni

$$\tilde{W}A = \tilde{G} \text{ veya } [\tilde{W}; \tilde{G}] \quad (3.2.23)$$

arttırılmış matrisi elde edilir.

Eğer

$$\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W}, \tilde{G}] = N + 1$$

ise bu taktirde

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} \quad (3.2.24)$$

yazılabilir. Böylece içerisinde a_i $i = 0, 1, \dots, N$ katsayıları olan A matrisi tek olarak belirlenir.

Şu halde

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x) \quad (3.2.25)$$

Euler polinom çözümü elde edilir.

3.3. Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemlerin Euler-Taylor Kolakasyon Metodu ile Çözümü

Bu çalışmada parçalı aralıklı kesirli mertebeden

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(x) y^{(k\alpha)}(x) = g(x) \quad (3.3.1)$$

diferansiyel denklemlerin

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (3.3.2)$$

karışık koşullar altında,

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x^\alpha) \quad (3.3.3)$$

kesilmiş Euler serisi formunda yaklaşık çözümleri araştırılacaktır.

İstenilen formdaki kesilmiş seri ifadesinin matris formunu $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$E(x^\alpha) = [E_0(x^\alpha) \ E_1(x^\alpha) \ E_2(x^\alpha) \ \dots \ E_n(x^\alpha)]$$

$$A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$$

olmak üzere

$$y(x) \cong y_N(x) = E(x^\alpha)A \quad (3.3.4)$$

olarak yazabiliriz.

(3.3.4) denkleminde $x = x_i$ yazarsak

$$[y(x_i)] = E(x_i^\alpha)A \quad (3.3.5)$$

elde edilir.

$$X(x^\alpha) = [(x-c)^0 \ (x-c)^\alpha \ (x-c)^{2\alpha} \ \dots \ (x-c)^{(N-1)\alpha} \ (x-c)^{N\alpha}] \quad (3.3.6)$$

$$[X(x^\alpha)]^T = [TE(x^\alpha)]^T$$

Euler polinomları ve $X(x^\alpha)$ matrisimizin arasındaki bağıntının transpozunu alırsak

$$X(x^\alpha) = E(x^\alpha)T^T \quad (3.3.7)$$

elde edilir ki

$$X(x^\alpha)(T^T)^{-1} = E(x^\alpha) \quad (3.3.8)$$

dir.

T matrisimiz ise

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.9)$$

ve $X(x^\alpha)$

$$X(x^\alpha) = [1 \ x^\alpha \ x^{2\alpha} \ x^{3\alpha} \ \dots \ x^{N\alpha}]. \quad (3.3.10)$$

(3.3.8)'i (3.3.4)'te yerine yazarsak

$$y(x) = X(x^\alpha)(T^T)^{-1}A \quad (3.3.11)$$

bulunur.

Caputo türevini alırsak

$${}^c D^{k\alpha} y(x) = {}^c D^{k\alpha} X(x^\alpha)(T^T)^{-1}A \quad (3.3.12)$$

$${}^c D^{k\alpha} (X(x^\alpha)) = [{}^c D^{k\alpha} (x-c)^0 \quad {}^c D^{k\alpha} (x-c)^{1\alpha} \quad \dots \quad {}^c D^{k\alpha} (x-c)^{(N-1)\alpha} \quad {}^c D^{k\alpha} (x-c)^{N\alpha}] \quad (3.3.13)$$

olup $c = 0$ alınırsa matrisimiz

$${}^c D^{k\alpha} X^T(x^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Gamma(\alpha+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (x)^{1\alpha} \\ (x)^{2\alpha} \\ \vdots \\ (x)^{(N-1)\alpha} \\ (x)^{N\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

olur.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Gamma(\alpha+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.15)$$

geçiş matrisi için

$${}^c D^{k\alpha} X(x^\alpha) = X(x^\alpha)B^T \quad (3.3.16)$$

olup k defa Caputo türevi alırsak

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha {}^c D^\alpha X(x^\alpha) &= {}^c D^\alpha X(x^\alpha)B^T \\ {}^c D^{2\alpha} X(x^\alpha) &= X(x^\alpha)(B^T)^2 \\ &\vdots \\ {}^c D^{k\alpha} X(x^\alpha) &= X(x^\alpha)(B^T)^k \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

elde edilir.

(3.3.17)'yi (3.3.12)'de yerine yazarsak

$${}^c D^{k\alpha} X(x^\alpha) = X(x^\alpha)(B^T)^k (T^T)^{-1}A \quad (3.3.18)$$

$x = x_i$ kolakasyon noktalarını yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) y^{k\alpha}(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.3.19)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{pmatrix}}_{P_k} \underbrace{\begin{pmatrix} {}^c D^{k\alpha} y(x_0) \\ {}^c D^{k\alpha} y(x_1) \\ \vdots \\ {}^c D^{k\alpha} y(x_N) \end{pmatrix}}_{Y^{k\alpha}} = \underbrace{\begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}}_G \quad (3.3.20)$$

olur ve

$$\sum_{k=0}^m P_k Y^{k\alpha} = G \quad (3.3.21)$$

ifadesi elde edilir.

(3.3.18)'de x yerine x_i yazarsak

$${}^c D^{k\alpha} y(x_i) = X(x_i^\alpha) (B^T)^k (T^T)^{-1} A \quad (3.3.22)$$

$$\begin{pmatrix} {}^c D^{k\alpha} y(x_0) \\ {}^c D^{k\alpha} y(x_1) \\ \vdots \\ {}^c D^{k\alpha} y(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x_0^\alpha) \\ X(x_1^\alpha) \\ \vdots \\ X(x_N^\alpha) \end{pmatrix} (B^T)^k (T^T)^{-1} A \quad (3.3.23)$$

$$\sum_{k=0}^m P_k X^\alpha (B^T)^k (T^T)^{-1} A = G \quad (3.3.24)$$

A 'nın solundaki ifadeye W dersek

$$WA = G \quad (3.3.25)$$

elde edilir.

(3.3.25) denklemini çözmek için arttırılmış matrisi

$$[W; G] = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-1)0} & w_{(N-1)1} & \cdots & w_{(N-1)N} & ; & g(x_{N-1}) \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & g(x_N) \end{pmatrix} \quad (3.3.26)$$

şeklinde oluşturabiliriz.

Başlangıç şartlarının etkisini bu matrise katmak için herhangi bir satır veya satırların yerine

$$U_j = X^\alpha(x)(B^T)^j(T^T)^{-1} = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \cdots \quad u_{jN}] \quad (3.3.27)$$

olarak yerleştiririz. Burada

$${}^c D^j y(a) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, (m\alpha - 1) \quad (3.3.28)$$

şartlarından

$$X^\alpha(\alpha)(B^T)^j(T^T)^{-1} A = \lambda_j \quad (3.3.29)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$U_j A = \lambda_j \quad (3.3.30)$$

denklemini yine arttırılmış matris biçiminde

$$(U_j \ ; \ \lambda_j) = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m\alpha-1)0} & u_{(m\alpha-1)1} & \cdots & u_{(m\alpha-1)N} & ; & \lambda_{(m\alpha-1)} \end{pmatrix} \quad (3.3.31)$$

yazarız. (3.3.26)'nın m . satırını (3.3.30)'un arttırılmış matrisine ekleriz. Şu halde kısaca

$$\tilde{W}.A = \tilde{G} \quad (3.3.32)$$

cebirsel denkleminde ulaşılmış oluruz. Çözümün olması için \tilde{W} rankının arttırılmış matris olan

(\tilde{W}, \tilde{G}) matrisinin rankına eşit yani $(N + 1)$ olması gerekir.

Böylece

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} \quad (3.3.33)$$

katsayılar matrisini verecektir. Bu matris çözümün Euler polinomları kullanılarak yazılmış seri formatındaki katsayıları içerir. O halde

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x^\alpha) \quad (3.3.34)$$

kestirilmiş seri çözümü beklenen çözüm olacaktır.

3.4. Gecikme Terimli Kesirli Lineer Diferansiyel Denklemlerin Euler-Taylor Kolakasyon

Metodu ile Çözümü

(2.4.1) denklemini (2.4.2) koşulları altında çözmek için (3.3) bölümünde açıkladığımız gibi çözeceğiz. Burada $y^{(k\alpha)}(\alpha_{kj}x + \beta_{kj})$ elde etmek için (3.3.8) denkleminde $x \rightarrow \alpha_{kj}x + \beta_{kj}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} E(\alpha_{kj}x + \beta_{kj}) &= X(\alpha_{kj}x + \beta_{kj})(T^T)^{-1} \\ &= X(x)\theta(\alpha_{kj}, \beta_{kj})(T^T)^{-1} \end{aligned}$$

Burada

$$\theta(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^0 & \binom{1}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^1 & \binom{2}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_{kj}^0 \beta_{kj}^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_{kj}^1 \beta_{kj}^0 & \binom{2}{1} \alpha_{kj}^1 \beta_{kj}^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_{kj}^1 \beta_{kj}^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_{kj}^2 \beta_{kj}^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_{kj}^2 \beta_{kj}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_{kj}^N \beta_{kj}^0 \end{bmatrix}$$

olup (3.3.7)'yi (3.3.11)'de ve (3.3.8)'i (3.3.10) da yerine yazarsak

$$y^{(k\alpha)}(x^\alpha) \cong y_N^{(k\alpha)}(x^\alpha) = X(x^\alpha)(B^T)^k (T^T)^{-1} A$$

ve

$$y^{(k\alpha)}(\alpha_{kj}x^\alpha + \beta_{kj}) \cong X(x^\alpha)\theta(\alpha_{kj}, \beta_{kj})(B^T)^k (T^T)^{-1} A$$

elde edilir. Son olarak kolakasyon noktalarını $x = x_i$ için yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x_i) y^{(k\alpha)}(\alpha_{kj}x_i + \beta_{kj}) = g(x_i)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_{kj}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{kj}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{kj}(x_N) \end{bmatrix}}_{P_{kj}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^c D^{k\alpha} y(x_0) \\ {}^c D^{k\alpha} y(x_1) \\ \vdots \\ {}^c D^{k\alpha} y(x_N) \end{bmatrix}}_{y^{k\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}}_G$$

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x_i) y^{(k\alpha)}(\alpha_{kj}x_i + \beta_{kj}) = G$$

$${}^c D^{k\alpha} y(\alpha_{kj}x_i^\alpha + \beta_{kj}) = X(x_i^\alpha)\theta(\alpha_{kj}, \beta_{kj})M^k (T^T)^{-1} A$$

$$\begin{bmatrix} {}^c D^{k\alpha} y(\alpha_{kj}x_0^\alpha + \beta_{kj}) \\ {}^c D^{k\alpha} y(\alpha_{kj}x_1^\alpha + \beta_{kj}) \\ \vdots \\ {}^c D^{k\alpha} y(\alpha_{kj}x_N^\alpha + \beta_{kj}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(x_0^\alpha) \\ X(x_1^\alpha) \\ \vdots \\ X(x_N^\alpha) \end{bmatrix} \theta(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) (M)^k (T^T)^{-1} A$$

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(x_i) X(x_i^\alpha) \theta(\alpha_{kj}, \beta_{kj}) M^k (T^T)^{-1} A = G$$

matrisleri elde edilir ki A 'nın solundaki ifadeye W dersek (3.3.25) deklemini elde edilir. (3.3.25) denklemini çözmek için arttırılmış matrisi (3.3.26) denklemini oluştur.

Başlangıç şartlarının etkisini bu matrise katmak için herhangi bir satır veya satırların yerine

$$U_j = X^\alpha(x)(B^T)^j (T^T)^{-1} = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad u_{j2} \quad \cdots \quad u_{jN}]$$

olarak yerleştiririz. Burada

$${}^c D^j y(a) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, (m\alpha - 1)$$

şartlarından

$$X^\alpha(\alpha)(B^T)^j (T^T)^{-1} A = \lambda_j$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$U_j A = \lambda_j$$

denklemini yine arttırılmış matris biçiminde

$$(U_j \quad ; \quad \lambda_j) = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m\alpha-1)0} & u_{(m\alpha-1)1} & \cdots & u_{(m\alpha-1)N} & ; & \lambda_{(m\alpha-1)} \end{pmatrix}$$

yazarız. (3.3.26)'nın m . satırını (3.3.30)'un arttırılmış matrisine ekleriz. Şu halde kısaca

$$\tilde{W}.A = \tilde{G}$$

cebirsel denkleminin ulaşmış oluruz. Çözümün olması için \tilde{W} rankının arttırılmış matris olan

(\tilde{W}, \tilde{G}) matrisinin rankına eşit yani $(N + 1)$ olması gerekir.

Böylece

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G}$$

katsayılar matrisini verecektir. Bu matris çözümün Euler polinomları kullanılarak yazılmış seri formatındaki katsayıları içerir. O halde

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n E_n(x^\alpha)$$

kestirilmiş seri çözümü beklenen çözüm olacaktır.

3.5. Rezidüel Hata Fonksiyonu ve Mutlak Hata

3.5.1 Volterra-Fredholm İntegral Denklem ve İntegro-Diferansiyel Denklem için

Rezidüel Hata

Bu bölümde, rezidüel fonksiyona dayanan hata kestirimi yöntem için tanıtılmış ve bu nedenle yaklaşık çözüm rezidüel düzeltme tekniği ile iyileştirilmiştir

$$R_N(x) = \sum_{j=0}^{m_1} P_j(x) y_N(\alpha_j x + \beta_j) - g(x) - \sum_{s=0}^{m_2} \int_{u_s(x)}^{v_s(x)} K_s(x,t) y(\lambda_s t + \mu_s) dt$$

olarak göze alalım. Burada $y(x)$ probleminin tam çözümünü temsil ederken $e_N(x)$

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

formundaki hata fonksiyonunu göstermektedir.

$$e_{N,M}(x) = \sum_{j=0}^{m_1-1} P_j(x) e_N(\alpha_j x + \beta_j) - g(x) - \sum_{s=0}^{m_2} \int_{u_s(x)}^{v_s(x)} K_s(x,t) e_N(\lambda_s t + \mu_s) dt - R_N(x) \quad (3.5.1.1)$$

sahip oluruz.

Son olarak (3.5.1.1) denklemi için bölüm (3.1.2)'deki tanıtılan metod uygulanır ve

$$e_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_n E_n(x) \quad (3.5.1.2)$$

formunda $e_{N,M}(x)$ için optimize edilmiş Euler-Taylor seri polinomu elde edilir. Böylece $e_N(x)$ hata fonksiyonu için bir yaklaşım verilir. (3.2.25) ve (3.5.1.2)'yi toplayarak optimize edilmiş Euler-Taylor seri çözümü

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$$

bulunur.

3.5.2. Gecikme Terimli Linear Kesirli Diferansiyel Denklemler için Rezidüel Hata

(3.3.21) denkleminin (3.3.28) şartlarına ait yaklaşık çözümüm (3.3.34) eşitliği ile verilmişti. Bu çözümün denklemini sağlaması gerektiğinden

$$\left| \sum_{k=0}^m P_k(x_i) {}^c D^{k\alpha} y(x_i) - g(x_i) \right|$$

değeri $x = x_i$ noktasında yapılan rezidüel hatayı vermektedir. Hatayı minimize etmek için N kesme değeri

$$E(x_i) = \left| \sum_{k=0}^m P_k(x_i) {}^c D^{k\alpha} y(x_i) - g(x_i) \right| < 10^{-k\alpha}$$

olacak şekilde seçilir. Buradan genel hata fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) {}^c D^{k\alpha} y(x_i) - g(x_i)$$

N 'nin artması durumunda sifıra yaklaşan bir fonksiyon olmalıdır.

4. ÖRNEKLER

Örnek 4.1.

[70] Volterra-Fredholm fonksiyonel integral denklemi

$$0.12328764756963483e^{-2+x} + 0.25e^x - 0.5e^{3x} \cos(2x)$$

$$-\int_0^{2x} e^{t+x} y(t) dt - \int_0^1 -e^{-2t+x} y(t) dt - x^2 \sin(x) - e^x \sin(2x) + 0.5e^{3x} \sin(2x) + x^2 y(x) + e^x y(2x) = 0$$

problemini çözelim. Problemin bize verdiği tam çözüm $y(x) = \sin(x)$ olup burada katsayılarımız

$$P_{0,0}(x) = x^2, P_{0,1}(x) = e^x, \alpha_{0,0} = 1, \alpha_{0,1} = 2, \beta_{0,0} = 0, \beta_{0,1} = 0$$

$$\lambda_{0,0} = 1, \lambda_{0,1} = 2, \mu_{0,0} = 0, \mu_{0,1} = 0, Ker_{0,0}(x, t) = e^{x+t}, Ker_{0,1}(x, t) = -e^{(x-2)t}$$

$$u_{0,0}(x) = 0, u_{0,1}(x) = 0, v_{0,0}(x) = 2x, v_{0,1}(x) = 2x, v_{0,1}(x) = 1$$

$$g(x) = -0.25e^x - 0.25e^{x-2} \cos(2) + 0.5e^{3x} \cos(2x) - 0.25e^{x-2} \sin(2) + x^2 \sin(x) + e^x \sin 2x - 0.5e^{3x} \sin(2x)$$

$$m_1 = 1, m_2 = 1, a_0 = 0, b = 1$$

Tablo 4.1. Örnek 4.1 'in $N = 5$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0.	0.	-0.004956195760486892	0.004956195760486892
1	0.2	0.19866933	0.23447781527841494	0.0358084844833572
2	0.4	0.389418342	0.3952434767335987	0.005825134424948197
3	0.6	0.564642473	0.5541787256301774	0.010463747764857922
4	0.8	0.717356091	0.7196883210137508	0.002332230114228006
5	1.	0.841470985	0.8646744913451849	0.02320350653728842

Bu tablodaki değerler Mathematica'da ile yazdığımız kodlarla oluşturulmuş ve hesaplanmıştır.

$N = 5$ kesme değeri için Intel® Core™i7-2670QM [CPU@2.20GHz](#) işlemcili bilgisayarda Windows 10

Pro sürümü altında 4,00GB RAM ile Mathematica 11.1.1 programında yapılan işlem süresi 0.1073

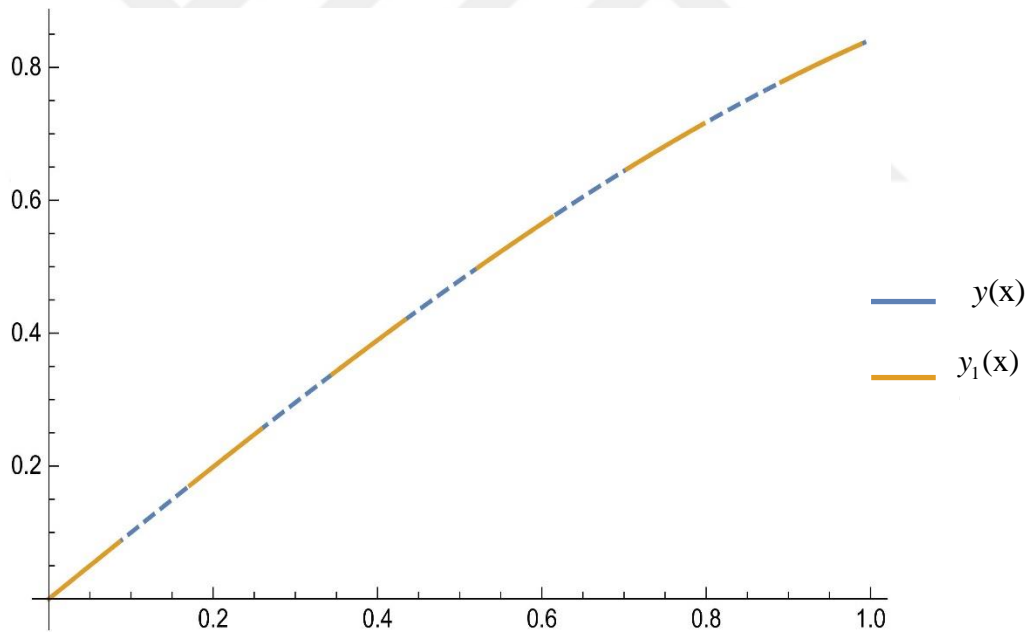
saniyede gerçekleşmiştir.

$\tau = 1, Te = 1, P_{0,0}(x) = 1, P_{0,1}(x) = 0, \alpha_{0,0} = 1, \alpha_{0,1} = 1, \beta_{0,0} = 0, \beta_{0,1} = 0, \lambda_{0,0} = 1,$
 $\lambda_{0,1} = 1, \mu_{0,0} = -\tau, \mu_{0,1} = 0, \psi_0 = 1, \psi_1 = 0, Ker_{0,0}(x,t) = xt, Ker_{0,1}(x,t) = 0,$
 $u_{0,0}(x) = 0, u_{0,1}(x) = 0, v_{0,0}(x) = Te, v_{0,1}(x) = 0$
 $g(x) = x(Te \cos(Te - \tau) - \sin(Te - \tau) - \sin(\tau)) + \sin(x), m_1 = 1, m_2 = 1, a_0 = 0, b = 1$

denklemin katsayılarıdır.

Tablo 4.2. Örnek 4.3 'in $N = 5$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0.	0.	0	0.
1	0.2	0.19866933	0.198694744	0.00002541343852757727
2	0.4	0.389418342	0.389469169	0.00005082687705509903
3	0.6	0.564642473	0.564718714	0.00007624031558273181
4	0.8	0.717356091	0.717457745	0.00010165375411030908
5	1.	0.841470985	0.841598052	0.00012706719263788635



Şekil 4.2. Örnek 4.3'ün Grafiği

Örnek 4.4.

$$y(x) - \int_0^x e^{t-x} y(t) dt - \int_0^{-1+x} x \sin(t) y(t) dt - \frac{1}{4} e^{-x} \left(2 + e^x (4x \cos(1-x) + 2 \cos(x) - x(2 + 2x + \sin(2-2x)) + 2 \sin(x)) \right) = 0$$

[72] Volterra denklemini ele alalım. Problemin tam çözümü $y = \sin(x) + 1$ ve katsayılarımız

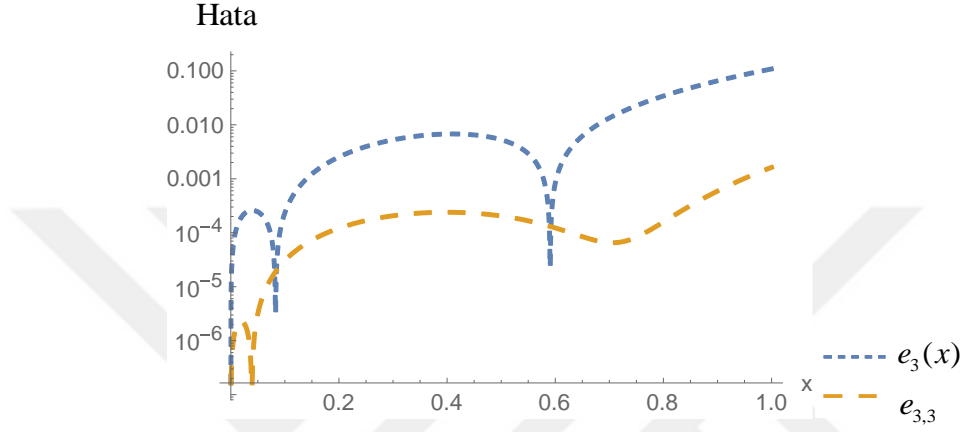
$$P_{0,0}(x) = 1, P_{0,1}(x) = 0, \alpha_{0,0} = 1, \alpha_{0,1} = 0, \beta_{0,0} = 0, \beta_{0,1} = 0, \lambda_{0,0} = 1, \lambda_{0,1} = 1, \mu_{0,0} = 0, \mu_{0,1} = 0,$$

$$Ker_{0,0}(x, t) = e^{t-x}, Ker_{0,1}(x, t) = x \cdot \sin(t), u_{0,0}(x, t) = 0, u_{0,1}(x) = 0, v_{0,0}(x) = x, v_{0,1}(x) = x - 1$$

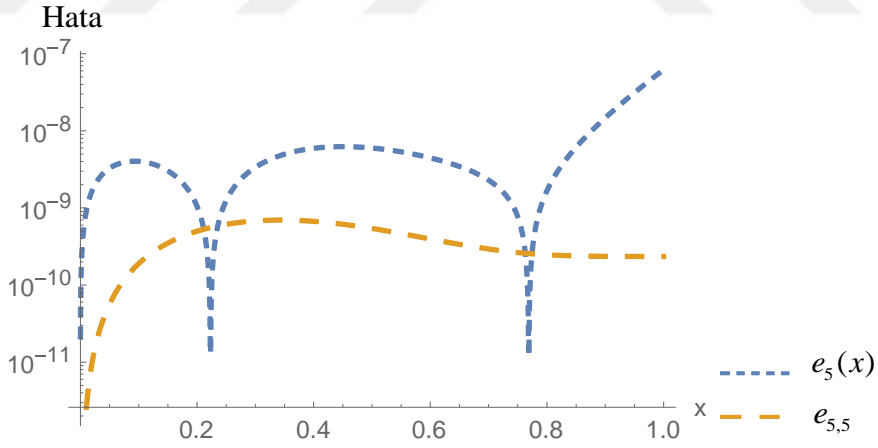
$$g(x) = \frac{1}{4} e^{-x} \left(2 + e^x \left(4x \cos(1-x) + 2 \cos(x) - x(2 + 2x + \sin(2-2x)) + 2 \sin(x) \right) \right)$$

$$m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 1, a_0 = 0, b = 1$$

olup denklemi iki farklı N kesme değeri için hata grafiğini inceledik.



Şekil 4.3. Örnek 4.4'ün $N = 3$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği



Şekil 4.4. Örnek 4.4'ün $N = 5$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği

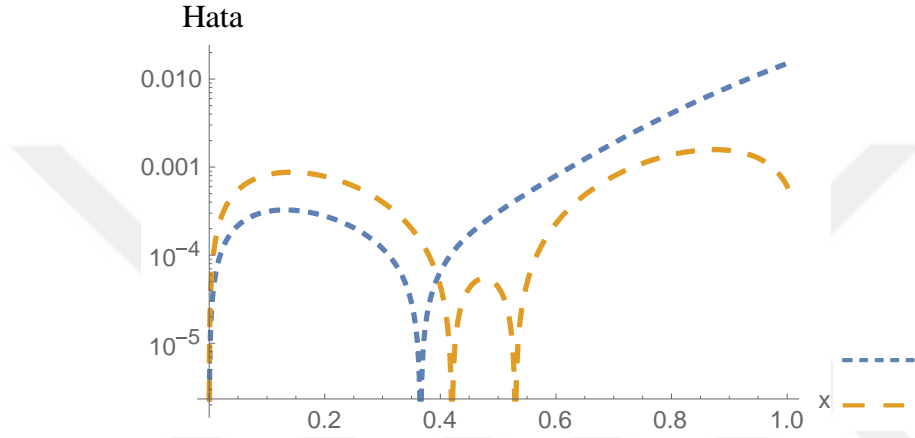
Örnek 4.5.

$$y(x) - \int_0^x e^t y\left(\frac{t}{2}\right) dt - e^x - \frac{2}{3} \left(1 - e^{\frac{3}{2}x} \right) = 0$$

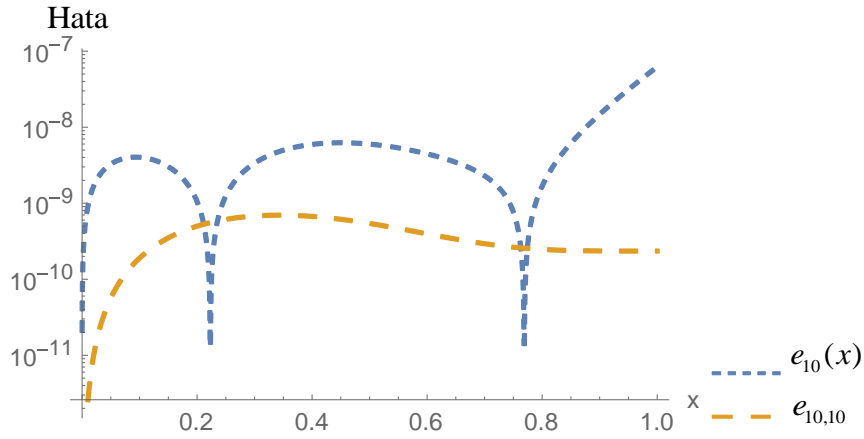
Volterra denklemini alalım [73]. Problemin tam çözümü $y(x) = e^x$ fonksiyonudur.

Tablo 4.3. Örnek 4.5 'in $N = 3$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0.	1.0	0.9999999999999998	$2.22044604925 \times 10^{-16}$
1	0.333	1.39561242	1.395671607521933	0.00005918243584357441
2	0.667	1.94773404	1.9463108481153177	0.0014231929393579978
3	1.0	2.718281833	2.7032410795239015	0.015040748935143622



Şekil 4.5. Örnek 4.5'in $N = 3$ için Rezidü ve Mutlak Hata Grafiği



Şekil 4.6. Örnek 4.5'ün $N = 10$ için Rezidü ve Mutlak Hata grafiği

Örnek 4.6.

$$y'(x) - 2xy'(\frac{x}{2} - 2) - y(x) + 2y(2x) = g(x) - \int_0^{\frac{x}{2}} xy'(2t+1)dt + \int_0^1 (x+t)y(t-1)dt$$

Birinci mertebeden Volterra-Fredholm fonksiyonel integro-diferansiyel denklemini $y(0) = 0$

şartıyla $0 < x < 1$ aralığında göz önüne alalım. Burada $g(x) = \frac{1}{6}(3x^2 + 9x + 7)$ olup denklemin

analitik çözümü $y(x) = x$ 'tir.

Bu denklemin seçilmiş olması yapısının, orantılı(proportional), gecikmeli, Volterra-Fredholm terimli integro-diferansiyel denklem içermesindedir. Daha önce 3. bölümde önerdiğimiz metodu uygulamak için kullanılacak parametre ve fonksiyonlar şöyledir:

$$P_{0,0}(x) = 2, P_{0,1}(x) = -1, P_{1,0}(x) = 1, P_{1,1}(x) = -2x, K_{0,0}(x,t) = x+t, K_{1,0}(x,t) = -x, \\ v_{0,0}(x) = 1, v_{1,0}(x) = x/2, \alpha_{0,0} = 2, \alpha_{0,1} = 1, \alpha_{1,1} = 1/2, \beta_{1,1} = -2, \\ \lambda_{0,0} = 1, \lambda_{1,0} = 2, \mu_{0,0} = -1, \mu_{1,0} = 1, m_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$$

Bu takdirde $N = 3$ kesme değeri alındığında

$$[W;G] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{11}{12} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{10} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{59}{36} & \frac{227}{108} & \frac{18089}{1620} & \frac{31}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{89}{36} & \frac{733}{108} & \frac{14347}{810} & \frac{43}{18} \\ -\frac{1}{2} & \frac{41}{12} & \frac{155}{12} & -\frac{319}{20} & \frac{19}{6} \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi ve şart içinde

$$[U_i; \gamma_i] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.

$[U_i; \gamma_i]$ satır matrisini $[W;G]$ matrisinin herhangi bir satırı ile yer değiştirdiğimizde elde edilen

$\tilde{W}A = \tilde{G}$ matrisinin çözülmesiyle

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} = \begin{bmatrix} \frac{29175578}{34122245} & \frac{60969699}{68244490} & -\frac{27217593}{34122245} & \frac{18681627}{68244490} \\ \frac{10109874}{34122245} & \frac{63427239}{34122245} & \frac{58526496}{34122245} & \frac{20431497}{34122245} \\ \frac{3268818}{34122245} & \frac{9528138}{34122245} & \frac{4323402}{34122245} & \frac{1920456}{34122245} \\ \frac{86616}{6824449} & \frac{983016}{6824449} & -\frac{1636524}{6824449} & \frac{699948}{6824449} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{31}{18} \\ \frac{43}{18} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix}$$

böylece aradığımız katsayılar $a_0 = 1/2, a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$ dir.

Bu katsayıların kullanılmasıyla denkleminin analitik çözümü olan

$$y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n E_n(x) = x$$

$N = 3$ kesme değeri için bulmuş oluyoruz. Diğer taraftan $N = 2$ alınarak da tam çözümü veren bir polinom çözümünü yakalıyoruz.

Örnek 4.7.

$$\begin{aligned} y'(x) - 2xy'(\frac{x}{2} - 2) - y(x) + 2y(2x) \\ = g(x) - \int_0^{\frac{x}{2}} xy'(2t+1)dt + \int_0^1 (x+t)y(t-1)dt \end{aligned}$$

Birinci mertebeden Volterra-Fredholm fonksiyonel integro-diferansiyel denklemini $y(0) = 0$ şartıyla $0 < x < 1$ aralığında göz önüne alalım [74]. Burada

$$g(x) = -(x-x^2)e^{x/2-1} + 2e^{x-1/2} - x^2e^{x/2} + xe^{x/2}$$

olup denklemin analitik çözümü $y(x) = e^x$ tir.

Bu denklemin seçilmiş olması yapısının, orantılı(proportional), gecikmeli, Volterra-Fredholm terimli integro-diferansiyel denklem içermesindedir. Kesme sınırı $N = 7$ alındığında elde edilen yaklaşık çözüm

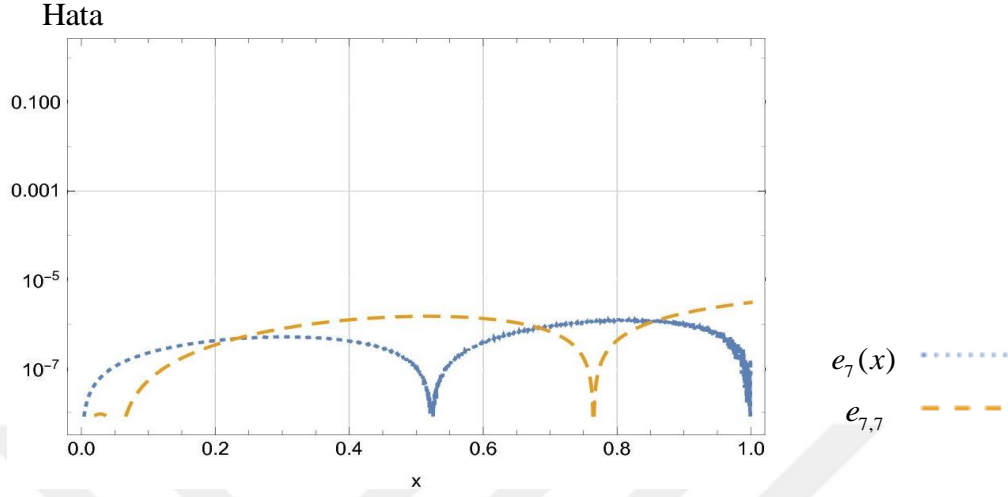
$$\begin{aligned} y_7(x) = 1 + 0.41901x + 0.152463x^2 + 0.0257258x^3 - 0.00524124x^4 \\ + 0.0057787x^5 - 0.00106103x^6 + 0.000245807x^7 \end{aligned}$$

olup mutlak hatası aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.4. Örnek 4.7 'in $N = 7$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0	1.0	1	0
1	0.1	1.15356499	1.15356514	1.49395×10^{-7}
2	0.3	1.33071219	1.33071291	7.19364×10^{-7}
3	0.4	1.53506301	1.53506435	1.34125×10^{-6}
4	0.6	1.77079495	1.77079637	1.42539×10^{-6}
5	0.7	2.04272707	2.04272761	5.41283×10^{-7}
6	0.9	2.35641844	2.35641727	1.17355×10^{-6}
7	1.0	2.71828183	2.71827876	3.06653×10^{-6}

Tablodan maximum hatanın 3.06653×10^{-6} olduğu görülmektedir. Ayrıca $N=7$ alındığında hata fonksiyonunu gösteren grafik şöyledir:



Şekil 4.7. Örnek 4.7'nin $N=7$ için Hata Grafiği

Örnek 4.8.

$$D^2 y + D^{1/2} y + y = x^2 + 2 + \frac{2.66666666667x^{1.5}}{\Gamma(0.5)}$$

İkinci mertebeden kesirli diferansiyel denkleminin analitik çözümü $y = x^2$ dir [75].

3. bölümde önerdiğimiz metodu uygulamak için kullanılacak parametre ve fonksiyonlar

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 1, P_2(x) = 0, P_3(x) = 0, P_4(x) = 1, N = 5, \alpha = 1/2 \text{ ile verilir.}$$

Kesme değeri $N=5$ alındığında kullandığımız matrisler

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15\sqrt{\pi}}{16} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 & 5 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{x} & x & x^{3/2} & x^2 & x^{5/2} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.17457 \\ 2.54061 \\ 3.05923 \\ 3.71654 \\ 4.50451 \end{pmatrix}$$

matrisleri ile

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{4} & 2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{11}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5\pi}} & -\frac{1}{20} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{20} - \frac{3}{\sqrt{5\pi}} & \frac{51}{25} + \frac{3}{5\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{5} + \frac{8}{15\sqrt{5\pi}} & -\frac{51}{10} + \frac{1}{25\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{80} - \frac{4}{3\sqrt{5\pi}} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{7}{20} + \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} - 3\sqrt{\frac{2}{5\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{10} & \frac{54}{25} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{16\sqrt{2}}{15\sqrt{5\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{10} & -\frac{49}{10} + \frac{4\sqrt{5}}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5\pi}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{20} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{13}{20} + \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5\pi}} + \frac{9\sqrt{\pi}}{20} & \frac{59}{25} - \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{3}}{5\sqrt{5\pi}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{5} & -\frac{49}{10} + \frac{9\sqrt{3}}{25} + \frac{3\sqrt{15}}{4} - 4\sqrt{\frac{3}{5\pi}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}} + \frac{27\sqrt{\pi}}{80} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{4}{\sqrt{5\pi}} & -\frac{19}{20} + \frac{8}{5\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{5} - \frac{6}{\sqrt{5\pi}} & \frac{66}{25} - \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{7\sqrt{\pi}}{10} + \frac{64}{15\sqrt{5\pi}} & -\frac{51}{10} + \frac{32}{25\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{\frac{5}{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{5} - \frac{32}{3\sqrt{5\pi}} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & 2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} - \sqrt{\pi} & -\frac{3}{4} - \frac{5}{3\sqrt{\pi}} + \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \end{pmatrix}$$

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5\sqrt{5}} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{4}{25} & \frac{4\sqrt{2}}{25} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{3}{5} & \frac{3\sqrt{3}}{5} & \frac{9}{25} & \frac{9\sqrt{3}}{25} \\ 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5\sqrt{5}} & \frac{16}{25} & \frac{32}{25\sqrt{5}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleridir burada bulunmak istenen matris

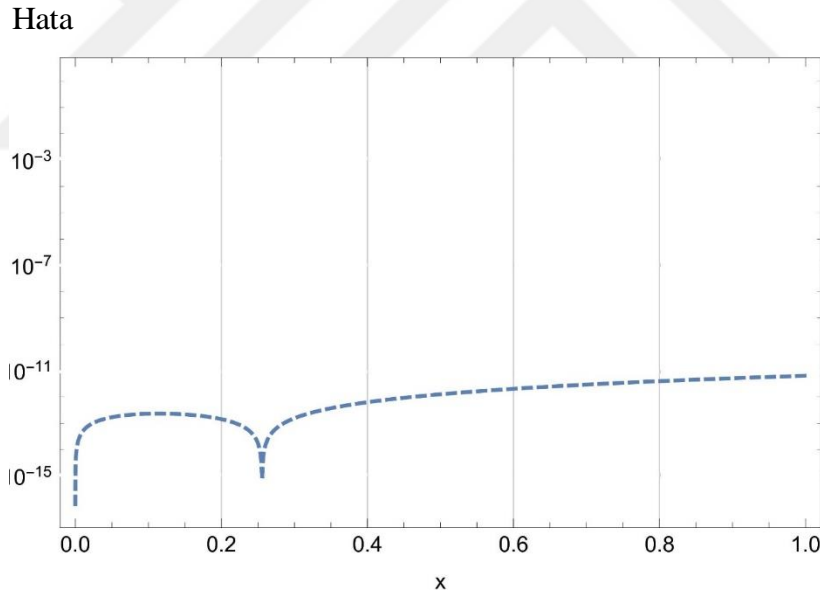
$$A = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]$$

matrisidir. Yukarıdaki matrisleri hesaba kattığımızda örneğimize ait çözüm ve hata tablosu şöyledir:

Tablo 4.5. Örnek 4.8 'in $N = 5$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0	0	3.330669×10^{-16}	3.330669×10^{-16}
1	0.2	0.04	0.04	4.468857×10^{-13}
2	0.4	0.16	0.16	6.131206×10^{-14}
3	0.6	0.36	0.36	9.535705×10^{-13}
4	0.8	0.64	0.64	2.543631×10^{-12}
5	1	1.	1.	4.68824×10^{-12}

Tabloda maximum hatanın 4.68824×10^{-12} olduğu görülmektedir. $N = 5$ için hata fonksiyonunun grafiği şöyledir:



Şekil 4.8. Örnek 4.8'in $N = 5$ için Hata Grafiği

Bu tablodaki değerler Mathematica'da ile yazdığımız kodlarla oluşturulmuş ve hesaplanmıştır. $N = 5$ kesme değeri için Intel® Core™i7-2670QM [CPU@2.20GHz](#) işlemcili bilgisayarda Windows 10 Pro sürümü altında 4,00GB RAM ile Mathematica 11.1.1 programında yapılan işlem süresi 0.046875 saniyede gerçekleşmiştir.

Örnek 4.9.

$$D^2y + D^{1/2}y + y = x^3 + 6x + \frac{3.2x^{2.5}}{\Gamma(0.5)}$$

Kesirli diferansiyel denkleminin analitik çözümü $y = x^3$ dir[75]. Parametre ve kullanacağımız fonksiyonlar $P_4(x) = 1, P_3(x) = 0, P_2(x) = 0, P_1(x) = 1, P_0(x) = 1, N = 6, \alpha = 1/2$ olup denklemlerle ilgili matrisler şöyledir:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15\sqrt{\pi}}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{5\sqrt{\pi}} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 & 5 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{15}{2} & 10 & \frac{15}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_k = \begin{pmatrix} P_k[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_k\left[\frac{1}{6}\right] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_k\left[\frac{1}{3}\right] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_k\left[\frac{1}{2}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_k\left[\frac{2}{3}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_k\left[\frac{5}{6}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_k[1] \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.0251033570057086 \\ 2.152853928747359 \\ 3.444153824321146 \\ 4.951455572330829 \\ 6.7232198578464875 \\ 8.80540666735282 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & -\frac{3\sqrt{\pi}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri ile

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{4} & 2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{11}{2} & \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} & \frac{73}{36} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9\sqrt{3\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} & -\frac{371}{72} + \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{36\sqrt{6}} - \frac{5}{9\sqrt{3\pi}} + \frac{5\sqrt{\pi}}{192} + \frac{5}{\sqrt{6\pi}} & \frac{217}{216} - \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{45\sqrt{3\pi}} - \frac{61\sqrt{\pi}}{64} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3\pi}} & \frac{1}{4} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} & \frac{19}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{9\sqrt{3\pi}} & -\frac{89}{18} + \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{\pi}}{48} + \frac{25}{9\sqrt{3\pi}} & \frac{55}{27} + \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{19\sqrt{2}}{4} - \frac{9\sqrt{\pi}}{16} + \frac{16}{45\sqrt{3\pi}} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} & \frac{9}{4} + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} & -\frac{39}{8} + 2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{3} + \frac{15\sqrt{\pi}}{64} + \frac{5}{\sqrt{2\pi}} & \frac{25}{8} - \frac{25}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{21\sqrt{\pi}}{64} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{22}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{16}{9} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{89}{18} + \frac{4}{9} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{9\sqrt{3\pi}} + \frac{5\sqrt{\pi}}{12} & \frac{116}{27} + 2\sqrt{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6} + \frac{64}{45} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -1 + \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{5\sqrt{\pi}}{8} & \frac{97}{36} - \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{10}{9} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & -\frac{371}{72} + \frac{25\sqrt{5}}{36} + \frac{5\sqrt{15}}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{6\pi}} - \frac{25}{9} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3\pi}} + \frac{125\sqrt{\pi}}{192} & \frac{1205}{216} + \frac{25\sqrt{5}}{12} - \frac{19\sqrt{15}}{4} + \frac{10}{9} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3\pi}} - \frac{21\sqrt{\pi}}{64} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{4} - \frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & 2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} - \sqrt{\pi} & \frac{3}{4} - \frac{5}{3\sqrt{\pi}} + \frac{15\sqrt{\pi}}{16} & -\frac{21}{4} + \frac{16}{5\sqrt{\pi}} - \frac{9\sqrt{\pi}}{16} \end{pmatrix}$$

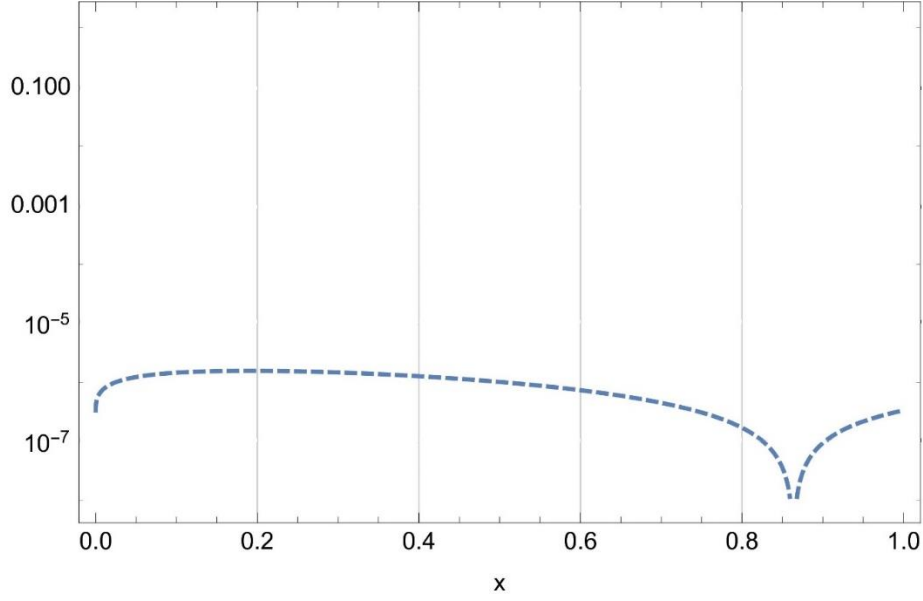
Yukarıdaki matrisleri hesaba kattığımızda örneğimize ait çözüm ve hata tablosu şöyledir:

Tablo 4.6. Örnek 4.9 'in $N = 6$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0.	0	0	$4.4408920985006 \times 10^{-16}$
1	0.1	0.0046296	$3.139502546822825 \times 10^{-13}$
2	0.3	0.037037	$5.136446823428287 \times 10^{-13}$
3	0.5	0.125	$6.177280909014371 \times 10^{-13}$
4	0.7	0.29629	$6.397105067890152 \times 10^{-13}$
5	0.8	0.5787	$5.853095785823825 \times 10^{-13}$
6	1	1	$4.731770530952417 \times 10^{-13}$

Örneğimize ait grafiğimiz ise

Hata



Şekil 4.9. Örnek 4.9'un $N = 6$ için Hata Grafiği

Bu tablodaki değerler Mathematica'da ile yazdığımız kodlarla oluşturulmuş ve hesaplanmıştır. $N = 5$ kesme değeri için Intel® Core™i7-2670QM [CPU@2.20GHz](#) işlemcili bilgisayarda Windows 10 Pro sürümü altında 4,00GB RAM ile Mathematica 11.1.1 programında yapılan işlem süresi 5.234375 saniyede gerçekleşmiştir.

Örnek 4.10.

$$D^{1/2}y + y = x^2 + \frac{2x^{1.5}}{\Gamma(2.5)}$$

Kesirli Lineer diferansiyel denklemin analitik çözümü $y = x^2$ 'dir [76]. Parametre ve kullanacağımız fonksiyonlar ise

$$P_2(x) = 0, P_1(x) = 1, P_0(x) = 1, N = 5, \alpha = 1/2$$

olup denkleme ait matrislerimiz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15\sqrt{\pi}}{16} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 5 & 5 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_k = \begin{pmatrix} P_k[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_k\left[\frac{1}{5}\right] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_k\left[\frac{2}{5}\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_k\left[\frac{3}{5}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_k\left[\frac{4}{5}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_k[1] \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{25} + \frac{8}{15\sqrt{5\pi}} \\ \frac{4}{25} + \frac{16}{15}\sqrt{\frac{2}{5\pi}} \\ \frac{9}{25} + \frac{8}{5}\sqrt{\frac{3}{5\pi}} \\ \frac{16}{25} + \frac{64}{15\sqrt{5\pi}} \\ 1 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5\sqrt{5}} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{2}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{4}{25} & \frac{4\sqrt{2}}{25} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{3}{5} & \frac{3\sqrt{3}}{5} & \frac{9}{25} & \frac{9\sqrt{3}}{25} \\ 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5\sqrt{5}} & \frac{16}{25} & \frac{32}{25\sqrt{5}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5\pi}} & \frac{1}{20} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{20} - \frac{3}{\sqrt{5\pi}} & \frac{1}{25} + \frac{3}{5\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{5} + \frac{8}{15\sqrt{5\pi}} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{25\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5}{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{80} - \frac{4}{3\sqrt{5\pi}} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{2}{5\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{7}{20} + \frac{2\sqrt{2}}{5} - 3\sqrt{\frac{2}{5\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{10} & \frac{4}{25} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{16}{15}\sqrt{\frac{2}{5\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{10} & \frac{1}{10} + \frac{4\sqrt{2}}{25} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{5\pi}} + \sqrt{\frac{10}{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{20} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{13}{20} + \frac{3\sqrt{3}}{5} - 3\sqrt{\frac{3}{5\pi}} + \frac{9\sqrt{\pi}}{20} & \frac{9}{25} - \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{8}{5}\sqrt{\frac{3}{5\pi}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{5} & \frac{1}{10} + \frac{9\sqrt{3}}{25} - 4\sqrt{\frac{3}{5\pi}} + \sqrt{\frac{15}{\pi}} + \frac{27\sqrt{\pi}}{80} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{4}{\sqrt{5\pi}} & -\frac{19}{20} + \frac{8}{5\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{5} - \frac{6}{\sqrt{5\pi}} & \frac{16}{25} - \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{7\sqrt{\pi}}{10} + \frac{64}{15\sqrt{5\pi}} & -\frac{1}{10} + \frac{32}{25\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{5} - \frac{32}{3\sqrt{5\pi}} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{3}{\sqrt{\pi}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} - \sqrt{\pi} & \frac{1}{2} - \frac{5}{3\sqrt{\pi}} + \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \end{pmatrix}$$

matrisleri ile örneğimize ait hata tablosu

Tablo 4.7. Örnek 4.10 'in $N = 5$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0	0	0	-2.16326×10^{-13}	$2.163269563482117 \times 10^{-13}$
1	0.2	0.04	0.03999999944	$3.560346462094799 \times 10^{-14}$
2	0.4	0.16	0.16000008696	$8.695821840376539 \times 10^{-14}$
3	0.6	0.36	0.36000006397	$1.639799407371356 \times 10^{-13}$
4	0.8	0.64	0.64000000042	$2.041700142285663 \times 10^{-13}$
5	1	1.	1.000000000003	$2.162714451969805 \times 10^{-13}$

Örnek 4.11.

$$D^2 y(x) + D^{3/2} y(x) + y(x) = x + 1$$

Bagley-Torvik denkleminde $N = 2, 3, 4, \dots$ değerleri için başlangıç şartını hesaba katmadan tam sonuçlar bulunmaktadır [77]. Ancak eğer başlangıç şartını örneğin $y(0) = 1$ alınırsa önerdiğimiz metod çözümlere büyük hata miktarlarıyla ulaşmaktadır. Bu yüzden Bagley-Torvik denkleminin çözümü için compact çözümün dikkate alınması gerekir. Eğer başlangıç şartı kabul edilip matris formunda yazıldıktan sonra arttırılmış $[W, G]$ matrisine yerleştirdiğimizde sistemin çözümünün olabilmesi için hem W nin hem de yeni $[W, G]$ nin ranklarının birbirine eşit olması gerekir ve $N+1$ olması gerekir. Özellikle seçtiğimiz bu örnekte şart matrisinin sadece arttırılmış $[W, G]$ matrisinin ilk satırında yerine yazılmasıyla elde edilen

yeni arttırılmış matrisin rankı $N+1$ olmaktadır. Diğer hallerde sistem çözümü 1 parametreye bağlı çözümler vermektedir.

Denkleme ait parametre ve matrisler aşağıdaki gibidir:

$$P_0(x) = P_3(x) = P_4(x) = 1, P_1(x) = P_2(x) = 0, N=4, \alpha = 1/2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{\pi}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_k[\frac{1}{4}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_k[\frac{1}{2}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_k[\frac{3}{4}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_k[1] \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{9}{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri ve

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{16} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{7}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{9}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[W;G] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & ; & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{16} & ; & \frac{5}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & ; & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{7}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{9}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4} & ; & \frac{7}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

ve

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Örneğimize ait tablo ise

Tablo 4.8. Örnek 4.11 'in $N = 4$ için nümerik çözümleri

i	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0	1.0	1.0	0.
1	0.3	1.25	1.25	0.
2	0.5	1.5	1.5	0.
3	0.8	1.75	1.75	0.
4	1.	2.0	2.0	0.

Örnek 4.12.

Gecikme terimli lineer kesirli

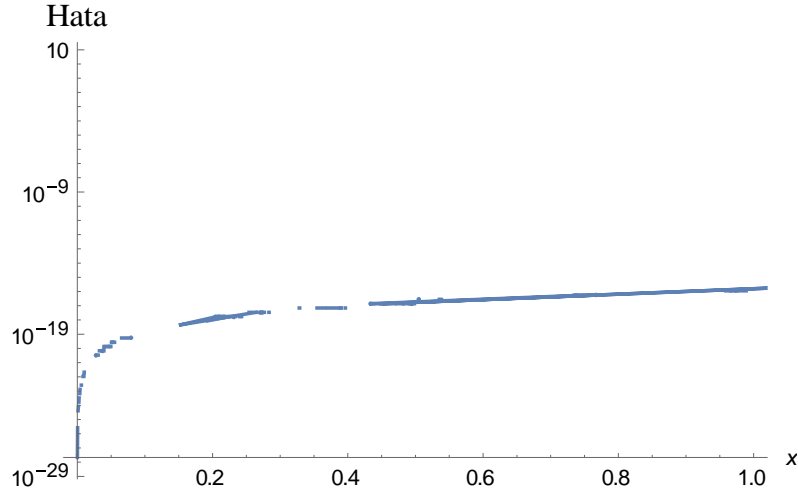
$$D^{1.5}y(x) + y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{7}{8}x^3 + \frac{6x^{1.5}}{\Gamma(2.5)}$$

diferansiyel denklemi $y(0) = 0$ ve $y(1) = 1$ sınır şartları ile verilen denklemin tam çözümü

[78,79] $y = x^3$ olup denklemi katsayıları

$$P_{1,0}(x) = 0, P_{1,1}(x) = 1, P_{0,0}(x) = 1, P_{0,1}(x) = -1, \alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 1, \alpha_{0,0} = 1, \alpha_{0,1} = 0.5, \beta_{1,0} = 0, \beta_{1,1} = 0, \beta_{0,0} = 0, \beta_{0,1} = 0, a_{0,0} = 1, a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 0, a_{0,1} = 0, b_{e,0,0} = 0, b_{e,1,0} = 1, b_{e,0,1} = 0, b_{e,1,1} = 0, \gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, g(x) = 6/[2.5].x^{(3/2)} + 7/8.x^3, m = 1.5, m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 0, a_0 = 0, b = 1$$

olup denklemimizin hata grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.10. Örnek 4.12'nin $N=2$ için grafiği

Örnek 4.13.

Gecikme terimli lineer kesirli

$$D^{0.3}y(x) + y(x) - y(x-1) = 1 - 3x + 3x^2 + \frac{2000}{1071\Gamma(0.7)}x^{2.7}, \quad 0 < x$$

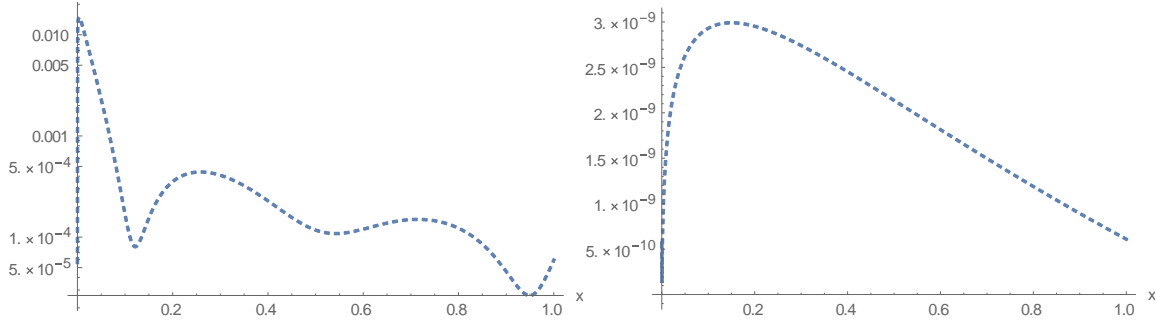
$$y(x) = x^3, \quad -1 \leq x \leq 0$$

diferansiyel denklemin tam çözümü x^3 tür [80,81]. Sayısal değerleri gösterir tablo aşağıdadır:

Tablo 4.9. Örnek 4.13 'ün farklı N değerleri için literatürdeki mutlak hataları

	Mutlak Hata		
	Kullandığımız Yöntem	[80]	[81]
N=4	0.1920505	-	-
N=10 (h=0.1)	9.048704×10^{-9}	0.0710508	7.0×10^{-5}
N=20 (h=0.05)	-	0.0411543	-

Yaklaşımın mutlak hata grafiği şöyledir:



(a) N=7

(b) N=10

Şekil 4.11. Örnek 4.13'ün farklı N Değerleri için Hata Grafiği

Örnek 4.14.

Gecikme terimli lineer kesirli

$$D^\alpha y(x) + y(x) = 0.1y(0.8x) + 0.5D^\alpha y(0.8x) + (0.32x - 0.5)e^{-0.8x} + e^{-x}, \quad 0 \leq x$$

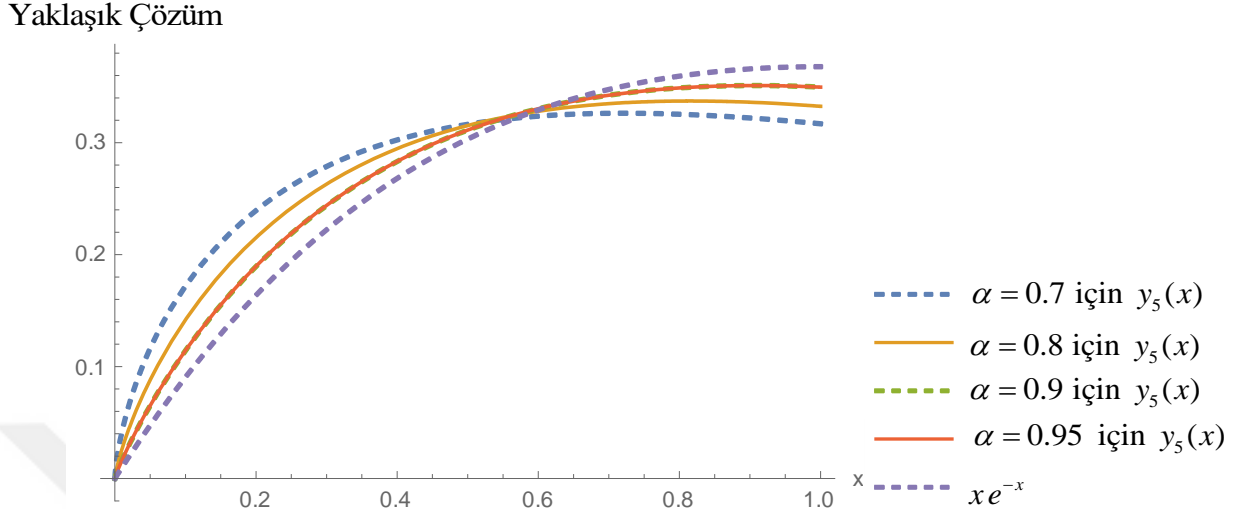
$$y(0) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

diferansiyel denklemin analitik çözümü $a = 1$ için xe^{-x} 'tir [82,83].

Tablo 4.10. Örnek 4.14 'ün $N = 10$ için nümerik çözümleri

$N =$ kes	x_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
0.	0	0	$5.1522805119 \times 10^{-13}$	$5.1522805119 \times 10^{-13}$
1	0.1	0.0904837418	0.0904837418	$1.7270351815 \times 10^{-12}$
2	0.2	0.16374615	0.16374615	$1.4430401318 \times 10^{-12}$
3	0.3	0.222245466	0.222245466	$1.1357026430 \times 10^{-12}$
4	0.4	0.268128018	0.268128018	$8.0752071696 \times 10^{-13}$.
5	0.5	0.30326533	0.30326533	$5.2019499818 \times 10^{-13}$
6	0.6	0.329286981	0.329286981	$2.2115642650 \times 10^{-13}$
7	0.7	0.347609712	0.347609712	$2.1793677973 \times 10^{-13}$
8	0.8	0.359463171	0.359463171	$4.2432724001 \times 10^{-13}$
9	0.9	0.365912694	0.365912694	$6.6113781116 \times 10^{-14}$
10	1.	0.367879441	0.367879441	$1.6232015731 \times 10^{-12}$

Tabloda maximum hatanın 1.7270×10^{-12} olduğu görülmektedir. Örneğe ait yaklaşık çözüm grafiği aşağıdadır:



Şekil 4.12. Örnek 4.14'ün $N = 5$ ve Çeşitli α Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği

Örnek 4.15.

Gecikme terimli lineer kesirli

$$D^\alpha y(x) + y(x) + y(x-0.3) = e^{-x+0.3}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 2 < \alpha \leq 3$$

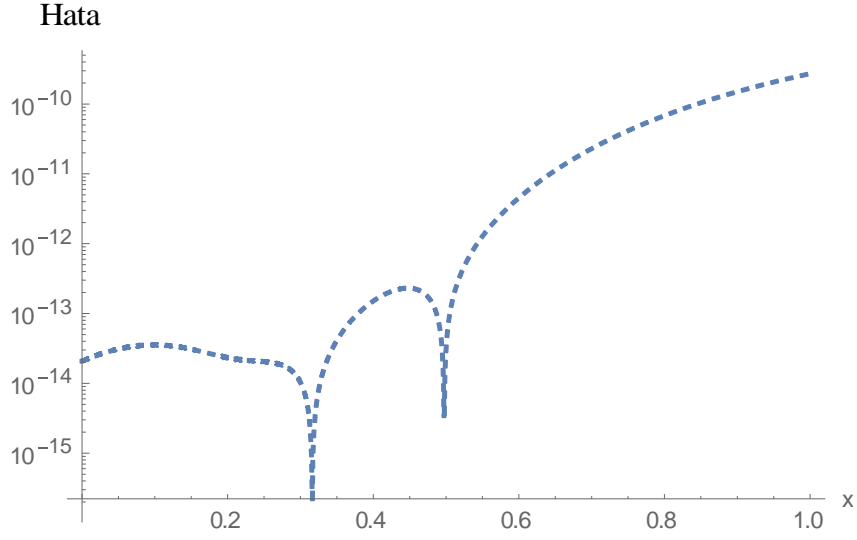
diferansiyel denklemin $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ ve $y''(0) = -1$ başlangıç şartlarıyla analitik çözümü

$\alpha = 1$ için e^{-x} 'tir[82].

Tablo 4.11. Örnek 4.15 'in farklı N değerleri için nümerik çözümleri

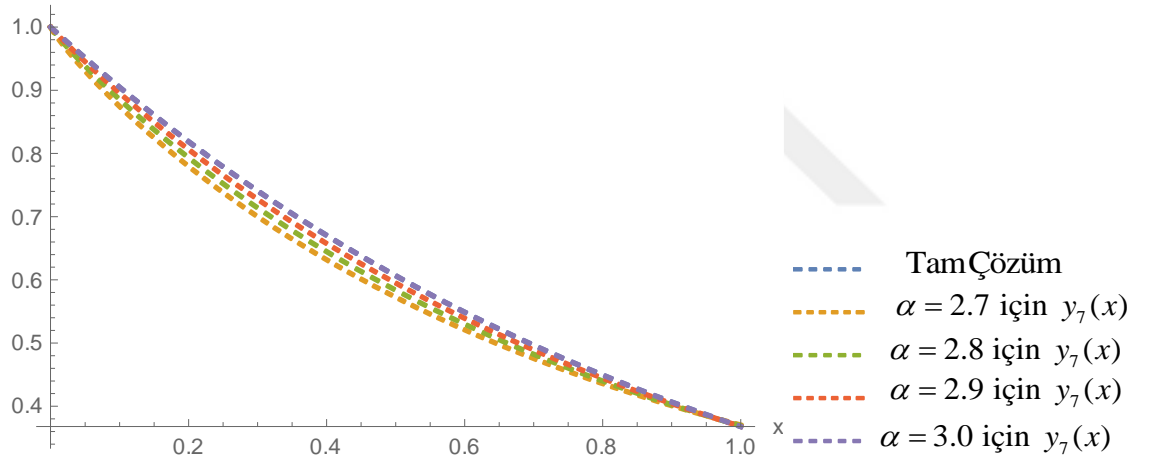
	Mutlak Hata		
	Kullandığımız Yöntem	Kesirli Geri adım Fark Metodu [80]	Reproducing Kernel Metot[81]
N=5	-	-	6.8701×10^{-6}
N=7	6.927355×10^{-7}	-	4.9867×10^{-8}
N=10 (h=0.1)	9.048704×10^{-9}	0.0710508	-
N=20 (h=0.05)	-	0.0411543	-

Grafiğimiz ise



Şekil 4.13. Örnek 4.15'in $N = 7$ için Mutlak Hata Grafiği

Tam Çözüm



Şekil 4.14. Örnek 4.15'ün $N = 7$ ve Çeşitli α Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada parçalı ve değişken aralıklarda tanımlanmış Volterra, Fredholm ve her iki integral terimlerini içeren yüksek mertebeden genelleştirilmiş lineer fonksiyonel diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemler karışık koşullar altında geliştirilmiş Euler-Taylor matris metodu ile çözülmüştür. Bu metodla bulunan polinom çözümleri ya tam çözümü ya da tam çözüme karşılık gelen belirli kesme hatasına sahip seri çözümlerini vermiştir. Ayrıca kesme sınırının arttırılmasıyla yani çözüm polinomun mertebesinin arttırılmasıyla mutlak maximum hata değerinin azaldığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışmamız daha sonra hata miktarlarının azaltmasını öngören literatürde kullanılan kalan fonksiyon yaklaşımını (rezidü hata fonksiyonu) göz önüne alarak önerdiğimiz metottaki hata miktarlarını düşürmeye çalışarak genişletilmiştir.

Literatürde bulunan belirli çalışmalardan elde edilen verileri kullanarak çalışmalarımızın doğruluğunu ve sağlamasını da yapmaktayız. Burada, tek bir Caputo türev terimine sahip olan kesirli gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri, Euler polinomlarından oluşan seri çözümlerin matris formları yardımı ile incelenmiştir. Bu çalışmanın temel amacı, kesirli diferansiyel denklemlere de uygulanabilen kesirli gecikmeli diferansiyel denklemler için farklı bir sıralama matris yöntemi önermektir. Algoritmayı geliştirirken, önerilen yöntem literatürdeki çeşitli ilk verilerle birlikte ondan fazla probleme uygulandı. Öte yandan, henüz ilgilenmediğimiz bazı kesirli gecikmeli diferansiyel denklem sınıfları vardır. Burada geliştirilen yöntemle bir miktar ilave ile, bu yöntemle çözülebilecek ilgili sorunların sayısı arttırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] M.T. Rashed, Numerical solution of functional differential, integral and integro- differential equations, *Appl.Math.Comput* 2004, 156 , 485-492.
- [2] S.Yu. Reutskiy , The backward substitution method for multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2016, 296, 724–738.
- [3] S.Yu. Reutskiy, A new collocation method for approximate solution of the pantograph functional differential equations with proportional delay, *Appl.Math.Comput.* 2015, 266, 642–655.
- [4] A.H.Bhrawy, L.M.Assas, E.Tothidi, M.A.Alghamdi, A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional differential equations with proportional delays,*Advances in Difference Equations*, 2013, 63
- [5] M.Heydari,G.B.Loghmani,S.M.Hosseini, Operational matrices of Chebyshev cardinal functions and their application for solving delay differential equations arising in elektrodynamics with error estimation,*Appi.Math.Model* 2013, 37 ,7789-7809.
- [6] S.Sedaghat,Y.Ordokhani,M.Deaghan, Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials,*Common Nonlinear Sci Numer Simulat* 2012,174815-4830.
- [7] W.S.Wang,S.F.Li, On the one-leg Q-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations,*Appl.Math.Comput* 2007, 193 (1) 285-301.
- [8] B.Gürbüz,M.Sezer,C.Güler, Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments,*J.Appl.Math.*2014, Article ID 682398,12 pages.
- [9] C.Oğuz,M.Sezer, Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations, *Appl.Math.Comput* 2015, 259 943-954.
- [10] C.Dai,J.Zhang, Jacobian elliptic function method for nonlinear differential difference equations, *Caos,Soliton Frac* 2006, 27 1042-1047.
- [11] A.Arıkoğlu, I. Özkal, Solution of differential equations by using differential transform method, *Appl.Math.Comput* 2006, 174 1216-1228

- [12] Ş. Yüzbaşı, Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integrodifferential equations, *Appl. Math. Comput.* 2014,232, 1183–1199.
- [13] Ş. Yüzbaşı, On the solutions of a system of linear retarded and advanced differential equations by the Bessel collocation approximation, *Comput. Math. Appl.* 2012, 63 1442-1455.
- [14] H. Brunner, Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations, in: *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, 2004, 1-15.
- [15] A. Bellen, Preservation of superconvergence in the numerical integration of delay differential equations with proportional delay, *IMA J. Numer. Anal.* 2002 , 22, 529-536.
- [16] L. Fox, D.F. Mayers, J.R. Ockendon and A.B. Tayler, On a functional differential equation, *J.Inst. Math. Appl.* 1971, 8, 271-307
- [17] B. Gürbüz, M. Sezer, C. Güler, Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments, *J. Appl. Math.* 2014, Article ID 682398, 12 pages.
- [18] T. L. Saaty, *Modern Nonlinear Equations*, Dover Publications, Inc. New York, 1981, pp. 213-262.
- [19] G. Derfel, On compactly supported solutions of a class of functional-differential equations, in “*Modern Problems of Function Theory and Functional Analysis*”, Karaganda Univ. Press 1980, 48-50 (in Russian).
- [20] A. Saadatmandi, M. Dehghan, Variational iteration method for solving a generalized pantograph equation, *Computers and Mathematics with Applications* 2009, 58(11-12) 2190-2196.
- [21] E. Çelik, E. Karaduman, M. Bayram, Numerical solutions of chemical differential-algebraic equations, *Appl. Math. Comput.* 2003, 139(2-3), 259-264.
- [22] O. R. Işık, Z. Güney, M. Sezer, Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, *J. Difference Equations and Applications* 2012, 18(3) 357-374.
- [23] S. K. Vanani, J. S. Hafshejani, F. Soleymani, M. Khan, On the numerical solution of generalized pantograph equation, *World Applied Sciences Journal* 2011, 13(12), 2531-2335.
- [24] J. R. Ockendon, A. B. Tayler, The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proc. Roy. Soc. London Ser* 1971, A, 322, 447-468.
- [25] S5. K. Vanani, A. Aminataei, Multiquadric approximation scheme on the numerical solution of delay differential systems of neutral type. *Mathematical and Computer Modelling* 2009, 49(1-2), 234-241.

- [26] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering 1986, Vol. 180, Academic Press, London.
- [27] Y. Kuang , *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Mathematics in Science and Engineering, 1993, Vol. 191, Academic Press, London.
- [28] M. Z. Liu, D. Li, Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation, *Appl. Math. Compt* 2004, 155 (3) 853-8
- [29] K. Maleknejad, Y. Mahmoudi, Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions, *Appl. Math* 2004, *Comput.* 149 799–806.
- [30] Y. Ren, B. Zhang, H. Qiao, A simple Taylor-series expansion method for a class of second kind integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* 1999, 110 15–24.
- [31] W. Wang, An algorithm for solving the higher-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation with mechanization, *Appl. Math. Comput* 2006, 172 1–23.
- [32] S. Yalçınbaş, M. Sezer, The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials, *Appl. Math. Comput* 2000, 112 291–308.
- [33] M. Dehghan, F. Shakeri, Solution of an integro-differential equation arising in oscillating magnetic field using He’s homotopy perturbation method, *Prog. Electromagnet* 2008, *Res. PIER* 78 361–376.
- [34] X. Menga, L. Chenb, B. Wu, A delay SIR epidemic model with pulse vaccination and incubation times, *Nonlinear Anal.* 2010, *RWA* 11 88–98.
- [35] M. Kot, *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press, 2001.
- [36] J. Biazar, M. Shahbala, H. Ebrahimi, VIM for solving the pollution problem of a system of lakes, *J. Control Sci. Eng.* 2010, 1–6.
- [37] J. Wonga, O. J. Abilez, E. Kuhl, Computational optogenetics: a novel continuum framework for the photo-electrochemistry of living systems, *J. Mech. Phys. Sol.* 2012, 60 1158–1178.
- [38] M. Dehghan, F. Shakeri, The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, *Phys. Scr.* 2008, 78 11 pages (Article No. 065004).
- [39]] L. Fox, D.F. Mayers, J.A. Ockendon, A.B. Tayler, On a functional differential equation, *J. Inst. Math. Appl* 1971, 8 271-307.
- [40] J.R. Ockendon, A.B. Tayler, The Dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 322, 2015, (1971) 447-468.

- [41] Konuralp A. and H. H. Sorkun, “Variational Iteration Method for Volterra Functional Integro-differential Equations with Vanishing Linear Delays,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2014, Article ID 678989, 10 pages. doi:10.1155/2014/678989
- [42] Bildik N, Konuralp A., S. Yalçınbaş, Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations, *Comput. Math. with Appl.* 2010, 59 , pp. 1909–1917.
- [43] J. Biazar , M. G. Porshokouhi , B. Ghanbari ,M.G. Porshokouhi, Numerical solution of functional integral equations by the variational iteration method, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2011, 235 2581-2585.
- [44] E. Babolian, S. Abbasbandy, F. Fattahzadeh, A numerical method for solving a class of functional and two dimensional integral equations, *Applied Mathematics and Computation* 2017, 198 35–43.
- [45] M.T. Rashed, Numerical solutions of functional integral equations, *Applied Mathematics and Computation* 2004, 156 507–512,
- [46] S. Nemati, Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using Legendre collocation method, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2015,278, 29-36.
- [47] R. Firouzdana, A. H. Khoob, Z. Mollaramezani, Numerical solution of functional integral equations by using B-splines, *Journal of Linear and Topological Algebra*.2012, 01(01),45- 53.
- [48] D. Li, M. Z. Liu, Runge-Kutta methods for the multi-pantograph delay equation, *Appl. Math. Comput* 2005, 163(1), 383-395.
- [49] D. J. Evans, K. R. Raslan, The Adomian decomposition method for solving delay differential equations, *Int. J. Comput. Math* 2005, 82(1) , 49-54.
- [50] M. Sezer, S. Yalçınbaş, M. Gülsu, A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogenous term, *Int. J. Comput. Math.* 2008, 85(7) ,1055-1063.
- [51] Ş. Yüzbaşı, N. Şahin, M. Sezer, A Bessel polynomial approach for solving linear neutral delay differential equations with variable coefficients, *J. Adv. Res. Diff. Equ.* 2011, 3(1) 81-101.
- [52] Ş. Yüzbaşı, M. Sezer, An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations, *Applied Mathematical Modelling* 2013.
- [53] X. Chen, L. Wang, The variational iteration method for solving a neutral functional–differential equation with proportional delays, *Comput. Math. Appl* 2010. 59 (8) 2696–2702.
- [54] S. Yalçınbaş, M. Sezer, A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm–Volterra integro-difference equations with mixed argument, *Appl. Math. Comput* 2006. 175 675-690.

- [55] M. Gülsu, Y. Öztürk, M. Sezer, A new Chebyshev polynomial approximation for solving delay differential equations, *J. Differ. Equ. Appl.* 2012. 18 (6) ,1043-1065.
- [56] K. Erdem, S. Yalçınbaş, M. Sezer, A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations, *J. Differ. Equ. Appl.* 2013. 19 (10) , 1619-1631.
- [57] N. Şahin, Ş. Yüzbaşı, M. Sezer, A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro-differential–difference equations, *Int. J. Comput. Math.* 88 (14) ,2011, 3093-3111.
- [58] M.A.Balcı, M.Sezer, Numerical approach based on exponential polynomials for solving of Fredholm Integro-Differential-Difference equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 2015, NTMSCI 3, No. 2, 44-54 .
- [59] M.A.Balcı, M.Sezer, Hybrid Euler-Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2016, vol. 273, pp. 33–41.
- [60] M.M.Bahşı, M.Çevik, M.Sezer, Orthoexponential polynomial solutions of delay pantograph differentialequations with residual error estimation, *Applied Mathematics and Computation*,271,2015, 11-21.
- [61] S. Yüzbaşı, M. Sezer, Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, 39(2015) 6529-6542.
- [62] Ö. K. Kürkçü, E.Aslan, M.Sezer, A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials, *Applied Mathematics and Computation* 2016, 276, 324–339.
- [63] G. Bretti, P.E. Ricci, Euler polynomials and the related quadrature rule, *Georgian Mathematical Journal* 2001, 8(3), 447-453.
- [64] G.S. Cheon, A note on the Bernoulli and Euler polynomials, *Applied Mathematics Letters* 2003, 16, 365-368.

- [65] F. Mirzae, S. Bimesl, A new Euler matrix method for solving systems of linear Volterra integral equations with variable coefficients, *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 2014, 22(2), 238-248.
- [66] W. Chu, R.R. Zhou, Convolutions of Bernoulli and Euler polynomials, *Sarajevo Journal of Mathematics* 2016, 6(18) 147-163.
- [67] H. Pan, Z.W. Sun, New identities involving Bernoulli and Euler polynomials, *Journal of combinatorial Theory, Series A.* 2006, 113 56-175.
- [68] E.E. Scheufens, Euler polynomials, Fourier Series and Zeta numbers, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 2012, 78(1),37-47.
- [69] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New York, 1995.
- [70] Nemati, S., Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations using Legendre collocation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2015, 278, 29-36.
- [71] Nouri M., K. Maleknejad, Numerical solution of delay integral equations by using block pulse functions arises in biological sciences, *Int. Journal of Math. Modelling and Computations.* 2016, 6, 3, 221-232.
- [72] Bellour A., Boussealsal M., A Taylor collocation method for solving delay integral equations, *Numer Algor.* 2016.
- [73] Avaji M, Hafshejani J.S., Dehcheshmeh S.S., Ghahfarokhi D.F., Solution of Delay Volterra integral equations using the Variational iteration method, *Journal of Applied Sciences.* , 2012,12(2) 196-200.
- [74] Ş. Yüzbaşı, Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integrodifferential equations, *Appl. Math. Comput.* 2014, 232, 1183–1199
- [75] Neville J. Ford, Joseph A. Connolly, Mathematics Department, University of Chester, Parkgate Road, Chester, *CH1 4BJ, UK*, Systems-based decomposition schemes for the approximate solution of multi-term fractional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2009, 229 382–391.

- [76] Ayaz, F., Pirim Akgönüllü, N., Solution of multi-term fractional order differential equations by Hermite collocation method. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*. 2018. 8(2), 228-236.
- [77] Khader M. M., Hendy A. S., A Legendre Computational Matrix Method for Solving High-Order Fractional Differential Equations, *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)*, *Walailak J Sci & Tech* 2014; 11(4): 289-305.
- [78] Khader M.M., Hendy A.S.. The approximate and exact solutions of the fractional-order delay differential equations using Legendre Pseudo-spectral Method, *Int. J. of Pure and Applied Mathematics* 2012. 74(3), 287-297
- [79] Khader, M. M. The Use of Generalized Laguerre Polynomials in Spectral Methods for Solving Fractional Delay Differential Equations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 2013. 8(4), 41018.
- [80] Morgado, M.L., Ford, N.J. & Lima P. Analysis and numerical methods for fractional differential equations with delay. *J. Comput. Appl. Math.* 2013. 252, 159–168.
- [81] Xu M.Q., Lin Y.Z. Simplified reproducing kernel method for fractional differential equations with delay, *Appl. Math.* 2016. Lett. 52, pp. 156-161.
- [82] Umer Saeed and Mujeeb ur Rehman, “Hermite Wavelet Method for Fractional Delay Differential Equations,” *Journal of Difference Equations*. 2014. Article ID 359093, 8 pages.
- [83] Singh, H., Pandey, R.K., Baleanu, D., Stable Numerical Approach for Fractional Delay Differential Equations, 2017. *Few-Body Syst* 58, 156, 1-18.
- [84] Konuralp A., Oner, S., . Improved Euler-Taylor Matrix Method For Generalized Functional Integro-Differential Equations, *International Students Science Conference*, May 2017.
- [85] Balcı, M.A., & Sezer, M.. Hybrid Euler–Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations, *Applied Mathematics and computation*. 2016. 273, 33-41.
- [86] Konuralp, A., Öner, S., Improved Euler-Taylor Matrix Method for Generalized Functional Integro-Differential Equations. *International Students Science Conference*. 2017, 40.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sercan ÖNER

Doğum Yeri ve Yılı : Batman, 1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sercanoner57@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Raman Anadolu Lisesi, 2009

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2019.

Mesleki Deneyim

Sınav Dershanesi 2013

Zafer Dershanesi 2013

Kavram Dershanesi 2014

MABEM Eğitim Kurumları 2015

Tam Akademi Etüt-Eğitim Merkezi 2017-.....(halen)