T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİN FARKLI KARAKTERİZASYONLARI

Merve BOZKURT

Danışman
Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA–2019

T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİN FARKLI KARAKTERİZASYONLARI

Merve BOZKURT

Danışman
Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA–2019

TEZ ONAYI

Merve BOZKURT tarafından hazırlanan **"3-Boyutlu Öklid Uzayında Binormal Vektörüne Göre Sabit Genişlikli Eğrilerin Karakterizasyonları"** adlı tez çalışması 08/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI Bitlis Eren Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Merve BOZKURT

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
κ	Frenet çatıya göre eğrilik
τ	Frenet çatıya göre burulma
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\lVert \ \rVert$	Norm
ρ	Eğrilik yarıçapı fonksiyonu
λ_i	Sıralama noktaları

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e, yüksek lisans eğitimimi tamamlamam için her türlü fedakârlığı gösteren, güven, anlayış ve destekleri için değerli aileme yürekten teşekkür ederim.

Merve BOZKURT
Manisa, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-Boyutlu Öklid Uzayında Sabit Genişlikli Eğrilerin Farklı Karakterizasyonları

Merve BOZKURT

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu Öklid uzayında sabit genişlikli eğrilerin farklı karakterizasyonları incelenmiştir. İlk olarak, konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verildi. İkinci olarak bir (C) uzay eğrisi verildiğinde, verilen eğri ile karşılıklı noktalardaki teğetleri paralel, zıt yönlü ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları sabit olan bir (C^*) uzay eğrisinin bulunabileceği gösterildi. Üçüncü olarak 3-boyutlu Öklid uzayında sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklem sistemleri incelendi. Dördüncü olarak, 3-boyutlu Öklid uzayında s ve s^* parametrelerine göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler verildi. Son olarak 3-boyutlu Öklid uzayında θ açısına göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler verildi.

Anahtar Kelimeler: 3-boyutlu Öklid uzayı, sabit genişlikli eğriler

2019, 33 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

The Different Characterizations of Curves of Constant Breadth in 3-Dimensional Euclidean Space

Merve BOZKURT

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

In this thesis, it is shown that the different characterizations of curves of constant breadth in 3-dimensional Euclidean space. Firstly, basic definitions and theorems about the subject are given. Secondly, it is shown that when a space curve (C) is given, a space curve (C^*) can be determined so that at corresponding points the curves have parallel tangents in the opposite directions the distance between these points is constant. Thirdly, the differential equation systems characterizing curves of constant breadth in 3-dimensional Euclidean space are given. Forthly, the differential equations characterizing curves of constant breadth with respect to s and s^* in 3-dimensional Euclidean space are given. Finally, the differential equations characterizing curves of constant breadth with respect to θ in 3-dimensional Euclidean space are given.

Keywords: 3-dimensional Euclidean space, curves of constant breadth

2019, 33 pages

1. GİRİŞ

Sabit genişlikli eğriler matematikte en önemli konulardan biridir. Bu eğriler özellikle mühendislik alanında çok sık karşılaşılan ve kullanılan eğrilerdir. Bu sebeple birçok matematikçi bu eğriler üzerinde çalışmalar yapmış ve bilimsel makaleler yayınlamışlardır.

Düzlemde sabit genişlikli eğrilere örnek olarak, en yaygını olan çemberi verebiliriz. Bunun dışında en çok bilineni Reuleaux üçgenidir. Sabit genişlikli eğrilerin, makine parçaları ve madeni para şekilleri gibi birçok uygulama alanı vardır.

Sabit genişlikli eğriler üzerinde ilk çalışma Euler tarafından yapılmıştır [1]. Euler bu çalışmada düzlemde sabit genişlikli eğrileri tanımlamıştır. Daha sonra Fujiwara, sabit genişlikli eğrileri 3-boyutlu Öklid uzayına taşıyarak, bu eğrileri 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlamıştır [2]. Birçok matematikçi bu eğrileri inceleyerek önemli sonuçlar elde etmişlerdir [3,4,5,6,7,8]. Reuleaux, sabit genişlikli eğrilerin mühendislik ve kinematikteki uygulamalarını incelemiştir [9]. Köse, 1982 yılındaki doçentlik tezinde sabit genişlikli eğriler ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarını incelemiştir [10]. Ardından Mellish'in (1931) sonuçlarını Minkowski fonksiyonuna ve bu fonksiyonun türevine bağlayarak ovalin karşıt noktalarındaki eğrilik yarıçapları ile ilgili bazı önemli sonuçlara ulaşmıştır [11]. 1986 yılındaki makalesinde Köse, bir uzay eğrisi verildiğinde eğri ile karşılıklı noktalarındaki teğetleri paralel, zıt yönlü ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları sabit olan bir uzay eğrisinin bulunabileceğini göstermiştir [12]. Sezer, sabit genişlikli eğrilerin diferensiyel karakterizasyonlarını vermiş ve 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin sabit genişlikli olması için gerekli kriteri ortaya koymuştur [13]. Akdoğan ve Mağden, sabit genişlikli eğrileri n-boyutlu Öklid uzayına taşıyarak, sabit genişlikli eğrileri karakterize eden bir diferensiyel denklem sistemi elde etmiş ve bu denklem sisteminin yaklaşık bir çözümünü vermişlerdir [14,15]. Daha sonra Önder, Kocayiğit ve Candan 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrileri incelemiş ve bu eğrilerin bir diferensiyel denklem karakterizasyonunu elde etmişlerdir [16]. Ayrıca 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin sabit genişlikli olması için gerekli kriteri vermişlerdir. Ardından Kocayiğit ve Önder 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrilerin bazı durumlarda normal eğriler, helis ve küresel eğriler olma durumlarını incelemişlerdir. Kapalı sabit genişlikli spacelike bir eğrinin toplam burulmasının 0 (sıfır), sabit genişlikli timelike bir eğrinin toplam burulmasının ise $2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) olduğunu göstermişlerdir [17].

Yukarıda bahsedilen çalışmalar göz önünde bulundurularak s ve s^* paratmetrelerine göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklem sistemleri ve lineer diferensiyel denklemler elde edildi. Burada kontengenez açısı kullanılarak θ parametresine göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklem sistemleri ve lineer diferensiyel denklemler verildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. 3-boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde tez çalışmamızda kullanılacak olan 3-boyutlu Öklid uzayındaki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında iki vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olsun.

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(\vec{a},\vec{b})\to\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu çarpıma, $\mathbb{R}^3$ uzayının *Öklid iç çarpımı* denir [18].

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^3$uzayında bir vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ olmak üzere

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{\langle \vec{a},\vec{a}\rangle}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\vec{a}\to\|\vec{a}\|$ fonksiyonuna, $\mathbb{R}^3$ uzayında *norm* denir [18].

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ de bir açık cümle U olmak üzere bir

$$f:U\to\mathbb{R}$$

fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k *sınıfından diferensiyellenebilirdir*, denir [18].

Tanım 2.4. $\mathbb{R}^3$uzayında birim hızlı $\alpha:I\to\mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{T}(s)=\vec{\alpha}'(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birim teğet vektörü* denir [18].

Tanım 2.5. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa: I \to \mathbb{R}, \quad \kappa(s)=\left\|\vec{T}'(s)\right\|$$

fonksiyonuna, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *eğrilik fonksiyonu* denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *eğriliği* denir [18].

Tanım 2.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{N}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\vec{T}'(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *asli normal vektörü* denir [18].

Tanım 2.7. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\wedge\vec{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *binormal vektörü* denir [18].

Tanım 2.8. $\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)$ vektörlerine $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet vektörleri* denir.

$$\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\right\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet çatısı* denir [18].

Tanım 2.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\left\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \right\rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *burulma fonksiyonu* denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *burulması* denir [18].

Teorem 2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

olur. Bu eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için *Frenet türev formülleri* denir [18].

Teorem 2.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı olmayan $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, eğrilik ve burulma fonksiyonları κ, τ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \qquad \vec{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, \qquad \vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \qquad \tau = \frac{\left\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \right\rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

[18].

Tanım 2.10. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna, α eğrisinin *eğrilik yarıçapı fonksiyonu* denir ve ρ ile gösterilir [18].

Tanım 2.11. θ, (C) eğrisinin herhangi bir $x(s)$ noktasındaki teğetinin sabit bir doğrultu ile yaptığı açı olsun. Bu eğrinin $\vec{T}(s)$ ve $\vec{T}(s+\Delta s)$ teğetleri arasındaki $\Delta\theta$ kontengenez açısı için

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \kappa(s)$$

yazılabilir [19].

Tanım 2.12. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler* eğri denir [19].

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA FRENET ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİN KONUM VEKTÖRÜ

E^3 Öklid uzayında (C) ve (C^*) birim hızlı ve sabit genişlikli iki eğriyi göz önüne alalım. Bu eğriler üzerinde alınan x, x^* karşıt noktalarındaki $\vec{T}$ ve $\vec{T}^*$ teğet vektörleri paralel ve zıt yönlüdür [12].

Teorem 3.1. (C^*) sabit genişlikli eğrisinin $\vec{x}^*(s^*)$ noktasındaki konum vektörü

$$\vec{x}^*(s^*) = \vec{x}(s) + \lambda_1(s)\vec{T}(s) + \lambda_2(s)\vec{N}(s) + \lambda_3(s)\vec{B}(s) \tag{3.1}$$

olup -eşitlikteki $\lambda_i(s)$ $(i=1,2,3)$ değerleri (C) eğrisinin yay parametresi olan s 'ye göre türevlenebilen fonksiyonlardır- burada

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= A\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) + B\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) \\
\lambda_3 &= B\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) - A\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right)
\end{aligned}$$

yazılır [12].

İspat: (3.1) eşitliğinde s 'ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}^*}{ds} &= \frac{d\vec{x}^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds}, \\
&= \frac{d\vec{x}}{ds} + \frac{d\lambda_1}{ds}\vec{T} + \lambda_1\left(\kappa\vec{N}\right) + \frac{d\lambda_2}{ds}\vec{N} + \lambda_2\left(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}\right) + \frac{d\lambda_3}{ds}\vec{B} + \lambda_3\left(-\tau\vec{N}\right) \\
&= \vec{T}^*.\frac{ds^*}{ds}, \\
&= \vec{T} + \frac{d\lambda_1}{ds}\vec{T} + \lambda_1\kappa\vec{N} + \frac{d\lambda_2}{ds}\vec{N} - \lambda_2\kappa\vec{T} + \lambda_2\tau\vec{B} + \frac{d\lambda_3}{ds}\vec{B} - \lambda_3\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{T}^* = -\vec{T}$ olduğundan,

$$-\frac{ds^*}{ds}\vec{T}=\left(1+\frac{d\lambda_1}{ds}-\lambda_2\kappa\right)\vec{T}+\left(\lambda_1\kappa+\frac{d\lambda_2}{ds}-\lambda_3\tau\right)\vec{N}+\left(\lambda_2\tau+\frac{d\lambda_3}{ds}\right)\vec{B}$$

bulunur. Buradan,

$$-\frac{ds^*}{ds}=1+\frac{d\lambda_1}{ds}-\lambda_2\kappa,\quad \lambda_1\kappa+\frac{d\lambda_2}{ds}-\lambda_3\tau=0,\quad \lambda_2\tau+\frac{d\lambda_3}{ds}=0,$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler düzenlenirse,

$$\frac{d\lambda_1}{ds}=\kappa\lambda_2-\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right), \tag{3.2}$$

$$\frac{d\lambda_2}{ds}=-\kappa\lambda_1+\tau\lambda_3, \tag{3.3}$$

$$\frac{d\lambda_3}{ds}=-\tau\lambda_2 \tag{3.4}$$

denklem sistemi elde edilir. Şimdi de sabit genişlikli eğrileri θ 'ya göre karakterize eden diferensiyel denklem sistemini bulalım. (3.2) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{d\lambda_1}{ds}=-\frac{ds^*}{ds}-1+\lambda_2\kappa,$$
$$\frac{d\lambda_1}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}=-\frac{ds^*}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}-1+\lambda_2\kappa,$$
$$\frac{d\lambda_1}{d\theta}\kappa=-\frac{\kappa}{\kappa^*}-1+\lambda_2\kappa$$

elde edilir. Tanım 2.10. ve Tanım 2.11. göz önüne alınır ve her iki taraf κ ile bölünürse,

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta}=-\frac{1}{\kappa^*}-\frac{1}{\kappa}+\lambda_2,$$
$$\frac{d\lambda_1}{d\theta}=\lambda_2-\left(\rho+\rho^*\right)$$

elde edilir. Burada $\rho+\rho^*=f\left(\theta\right)$ yazılırsa,

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta}=\lambda_2-f\left(\theta\right) \tag{3.5}$$

elde edilir. Şimdi aynı şekilde (3.3) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{d\lambda_2}{ds} = -\lambda_1\kappa + \lambda_3\tau ,$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = -\lambda_1\kappa + \lambda_3\tau ,$$

$$\frac{d\lambda_2}{d\theta}\kappa = -\lambda_1\kappa + \lambda_3\tau$$

elde edilir. Her iki taraf κ ile bölünürse,

$$\frac{d\lambda_2}{d\theta} = -\lambda_1 + \lambda_3\tau\rho \tag{3.6}$$

bulunur. Son olarak (3.4) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{d\lambda_3}{ds} = -\lambda_2\tau ,$$

$$\frac{d\lambda_3}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = -\lambda_2\tau ,$$

$$\frac{d\lambda_3}{d\theta}\kappa = -\lambda_2\tau$$

elde edilir. Her iki taraf κ ile bölünürse,

$$\frac{d\lambda_3}{d\theta} = -\lambda_2\tau\rho \tag{3.7}$$

bulunur. (C) ve (C^*) eğrilerinin karşıt noktaları arasındaki uzaklık sabit olduğundan,

$$\left\|\vec{x}^* - \vec{x}\right\| = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{sabit} \tag{3.8}$$

yazılır. (3.8) eşitliğinin θ'ya göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} &2\lambda_1\lambda_1' + 2\lambda_2\lambda_2' + 2\lambda_3\lambda_3' = 0, \\ &\lambda_1\lambda_1' + \lambda_2\lambda_2' + \lambda_3\lambda_3' = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7), (3.9) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\lambda_1\lambda_1' + \lambda_2\left(-\lambda_1 + \tau\rho\lambda_3\right) + \lambda_3\left(-\tau\rho\lambda_2\right) = 0,$$

$$\lambda_1\lambda_1' - \lambda_1\lambda_2 + \tau\rho\lambda_2\lambda_3 - \tau\rho\lambda_2\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1\left(\lambda_1' - \lambda_2\right) = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. $\lambda_1' - \lambda_2 = 0$ olması halinde (3.5) denkleminden $f(\theta) = 0$ olduğu görülür. Buna göre $\left(C^*\right)$ eğrisi, (C) eğrisinin $\vec{d} = \lambda_1\vec{t} + \lambda_2\vec{n} + \lambda_3\vec{b}$ sabit vektörü ile ötelenmesidir. $f(\theta) = 0 \Leftrightarrow \vec{d}$ vektörü sabittir.

Şimdi, (3.5), (3.6) ve (3.7) denklemlerini göz önüne alalım. İki durum vardır:

1. $\lambda_1 = \text{sabit}$ ve $\lambda_2 = 0$ olsun. Bu durumda

(3.5) denkleminden $f(\theta) = 0$

(3.6) denkleminden $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} = \dfrac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$

(3.7) denkleminden $\lambda_3 = \text{sabit}$

elde edilir. Bu ise (C) eğrisinin eğilim çizgisi (helis) olmasıdır.

2. $\lambda_1 = 0$ olsun. Bu durumda

(3.5) denkleminden $\lambda_2 = f(\theta)$

(3.6) denkleminden $\lambda_2' = \tau\rho\lambda_3$ (3.11)

(3.7) denkleminden $\lambda_3' = -\tau\rho\lambda_2$ (3.12)

elde edilir. (3.11) denkleminin θ'ya göre türevi alınırsa,

$$\lambda_2'' = \tau'\rho\lambda_3 + \tau\rho'\lambda_3 + \tau\rho\lambda_3'$$

elde edilir. Bu eşitlik, (3.11) ve (3.12) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse,

$$\lambda_2'' = \tau'\rho\lambda_3 + \tau\rho'\lambda_3 + \tau\rho\left(-\tau\rho\lambda_2\right),$$

$$\lambda_2'' - \left(\tau'\rho + \tau'\rho\right)\lambda_3 + \tau^2\rho^2\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_2'' - \left(\tau'\rho + \tau'\rho\right)\frac{\lambda_2'}{\tau\rho} + \tau^2\rho^2\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_2'' - \frac{\left(\tau'\rho + \tau'\rho\right)}{\tau\rho}\lambda_2' + \tau^2\rho^2\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_2'' - \frac{\left(\tau\rho\right)'}{\tau\rho}\lambda_2' + \left(\tau\rho\right)^2\lambda_2 = 0,$$

$$\left(\tau\rho\right)\lambda_2'' - \left(\tau\rho\right)'\lambda_2' + \left(\tau\rho\right)^3\lambda_2 = 0 \qquad (3.13)$$

2. mertebeden lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Burada $\frac{dz}{d\theta} = \tau\rho$ dönüşümü yapılırsa ve bu dönüşüm, (3.13) denkleminde yerine yazılarak eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{dz}{d\theta}.\frac{d^2\lambda_2}{d\theta^2} - \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\lambda_2}{d\theta} + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\lambda_2 = 0\,,$$

$$\frac{dz}{d\theta}.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\lambda_2}{d\theta}\right) - \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\lambda_2}{d\theta} + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\lambda_2 = 0\,,$$

$$\frac{dz}{d\theta}.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\lambda_2}{dz}.\frac{dz}{d\theta}\right) - \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\lambda_2}{d\theta} + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\lambda_2 = 0\,,$$

$$\frac{dz}{d\theta}\left(\frac{d^2\lambda_2}{dz^2}.\frac{dz}{d\theta}.\frac{dz}{d\theta} + \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\lambda_2}{dz}\right) - \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\lambda_2}{dz}.\frac{dz}{d\theta} + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\lambda_2 = 0\,,$$

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\frac{d^2\lambda_2}{dz^2} + \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{dz}{d\theta}.\frac{d\lambda_2}{dz} - \frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\lambda_2}{dz}.\frac{dz}{d\theta} + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\lambda_2 = 0\,,$$

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\frac{d^2\lambda_2}{dz^2} + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^3.\lambda_2 = 0\,,$$

$$\frac{d^2\lambda_2}{dz^2} + \lambda_2 = 0 \qquad (3.14)$$

λ_2 ye göre 2. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemi elde edilir. Şimdi, (3.14) denklemini çözelim.

$$\left(D^2 + 1\right)\lambda_2 = 0 \qquad D^2 + 1 = 0 \qquad \mathrm{D} = \pm i\,,$$

$$\lambda_2 = A\cos z + B\sin z,$$

$$\lambda_2 = A\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) + B\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) \tag{3.15}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.12) denkleminin θ'ya göre türevi alınırsa,

$$(\tau\rho)\lambda_3'' - (\tau\rho)'\lambda_3' + (\tau\rho)^3\lambda_3 = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{d^2\lambda_3}{dz^2} + \lambda_3 = 0$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü de,

$$\lambda_3 = C\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) + D\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) \tag{3.16}$$

olur. (3.15) ve (3.16) çözümleri, (3.11)'de yerlerine yazılırsa,

$$-A\tau\rho\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) + B\tau\rho\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) = \tau\rho\left(C\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) + D\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right)\right)$$

elde edilir. Buradan $C = B$ ve $D = -A$ bulunur. Böylece,

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = A\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) + B\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right),$$
$$\lambda_3 = B\cos\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right) - A\sin\left(\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerleri (3.1)'de yerine yazılırsa (C^*) sabit genişlikli eğrisinin $\vec{x}^*(s^*)$ noktasındaki konum vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\vec{x}^* = \vec{x} + \left[A\cos\int_0^\theta \tau\rho d\theta + B\sin\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right]\vec{n} + \left[B\cos\int_0^\theta \tau\rho d\theta - A\sin\int_0^\theta \tau\rho d\theta\right]\vec{b}.$$

Şimdi, $\vec{x}(s)$ ve $\vec{x}^*(s^*)$ noktaları arasındaki uzaklığın sabit olduğunu gösterelim. Burada,

$$\vec{d} = \vec{x}^* - \vec{x} = \lambda_1 \vec{t} + \lambda_2 \vec{n} + \lambda_3 \vec{b}$$

olup, bunun normu daima sabittir. Çünkü,

$$\left\| \vec{d} \right\| = \left(\begin{array}{l} A^2 \cos^2 \int_0^\theta \tau\rho d\theta + 2AB \cos \int_0^\theta \tau\rho d\theta . \sin \int_0^\theta \tau\rho d\theta + B^2 \sin^2 \int_0^\theta \tau\rho d\theta \\ + B^2 \cos^2 \int_0^\theta \tau\rho d\theta - 2AB \cos \int_0^\theta \tau\rho d\theta . \sin \int_0^\theta \tau\rho d\theta + A^2 \sin^2 \int_0^\theta \tau\rho d\theta \end{array} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\| \vec{d} \right\| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

elde edilir.

4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Teorem 4.1. (C) ve (C^*) birim hızlı ve sabit genişlikli iki eğri, (C^*) eğrisinin $\vec{x}^*(s^*)$ noktasındaki konum vektörü (3.1)'de ifade edildiği gibi

$$\vec{x}^*(s^*) = \vec{x}(s) + \lambda_1(s)\vec{T}(s) + \lambda_2(s)\vec{N}(s) + \lambda_3(s)\ \vec{B}(s)$$

olmak üzere, bu eğriyi s ve s^* parametrelerine göre karakterize eden diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{ds} &= \kappa\lambda_2 - \left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right) \\ \frac{d\lambda_2}{ds} &= -\kappa\lambda_1 + \tau\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} &= -\tau\lambda_2 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir [12].

İspat: (3.1) ifadesinin s'ye göre türevi alınırsa Teorem 2.1. de ifade edilen Frenet formülleri de kullanılarak,

$$\frac{d\vec{x}^*}{ds} = \frac{d\vec{x}^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = \frac{d\vec{x}}{ds} + \frac{d\lambda_1}{ds}\vec{T} + \lambda_1\left(\kappa\vec{N}\right) + \frac{d\lambda_2}{ds}\vec{N} + \lambda_2\left(-\kappa\vec{T} + \tau\ \vec{B}\right) + \frac{d\lambda_3}{ds}\ \vec{B} + \lambda_3\left(-\tau\vec{N}\right)$$

elde edilir. Burada $\frac{d\vec{x}^*}{ds^*} = \vec{T}^*$ ve $\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{T}$ yazılarak,

$$\vec{T}^*.\frac{ds^*}{ds} = \vec{T} + \frac{d\lambda_1}{ds}\vec{T} + \lambda_1\kappa\vec{N} + \frac{d\lambda_2}{ds}\vec{N} - \lambda_2\kappa\vec{T} + \lambda_2\tau\ \vec{B} + \frac{d\lambda_3}{ds}\ \vec{B} - \lambda_3\tau\vec{N}$$

elde edilir. $\vec{T}^* = -\vec{T}$ olduğundan,

$$-\frac{ds^*}{ds}\vec{T} = \left(1 + \frac{d\lambda_1}{ds} - \lambda_2\kappa\right)\vec{T} + \left(\lambda_1\kappa + \frac{d\lambda_2}{ds} - \lambda_3\tau\right)\vec{N} + \left(\lambda_2\tau + \frac{d\lambda_3}{ds}\right)\vec{B}$$

yazılır. Buradan,

$$-\frac{ds^*}{ds}=1+\frac{d\lambda_1}{ds}-\lambda_2\kappa,\quad \lambda_1\kappa+\frac{d\lambda_2}{ds}-\lambda_3\tau=0,\quad \lambda_2\tau+\frac{d\lambda_3}{ds}=0$$

denklem sistemi elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2. (C) ve (C^*) birim hızlı ve sabit genişlikli iki eğri, (C^*) eğrisinin $\vec{x}^*(s^*)$ noktasındaki konum vektörü (3.1)'de ifade edildiği gibi

$$\vec{x}^*(s^*)=\vec{x}(s)+\lambda_1(s)\vec{T}(s)+\lambda_2(s)\vec{N}(s)+\lambda_3(s)\ \vec{B}(s)$$

olmak üzere, bu eğriyi Tanım 2.11. de ifade edilen θ açısına göre karakterize eden diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{d\theta}&=\lambda_2-f(\theta)\\ \frac{d\lambda_2}{d\theta}&=-\lambda_1+\tau\rho\lambda_3\\ \frac{d\lambda_3}{d\theta}&=-\tau\rho\lambda_2\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir [12].

İspat: Tanım 2.10. ve Tanım 2.11.'deki gibi $\frac{d\theta}{ds}=\kappa$, $\frac{d\theta}{ds^*}=\kappa^*$, $\frac{1}{\kappa}=\rho$, $\frac{1}{\kappa^*}=\rho^*$ olduğundan; (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemindeki (3.2) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{d\lambda_1}{ds}=-\frac{ds^*}{ds}-1+\lambda_2\kappa,\\ &\frac{d\lambda_1}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}=-\frac{ds^*}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}-1+\lambda_2\kappa,\\ &\frac{d\lambda_1}{d\theta}\kappa=-\frac{\kappa}{\kappa^*}-1+\lambda_2\kappa\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf κ ile bölünerse ve $\rho+\rho^*=f(\theta)$ alınırsa,

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} = -\frac{1}{\kappa^*} - \frac{1}{\kappa} + \lambda_2$$
$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} = \lambda_2 - \left(\rho + \rho^*\right),$$
$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} = \lambda_2 - f\left(\theta\right)$$

elde edilir. Şimdi de, denklem sistemindeki (3.3) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\lambda_1\kappa + \frac{d\lambda_2}{ds} - \lambda_3\tau = 0,$$
$$\frac{d\lambda_2}{ds} = -\lambda_1\kappa + \lambda_3\tau,$$
$$\frac{d\lambda_2}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = -\lambda_1\kappa + \lambda_3\tau,$$
$$\frac{d\lambda_2}{d\theta}\kappa = -\lambda_1\kappa + \lambda_3\tau$$

yazılır. Her iki taraf κ ile bölünürse,

$$\frac{d\lambda_2}{d\theta} = -\lambda_1 + \lambda_3\tau\rho$$

elde edilir. Son olarak benzer şekilde (3.4) eşitliği için de,

$$\frac{d\lambda_3}{ds} = -\lambda_2\tau,$$
$$\frac{d\lambda_3}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = -\lambda_2\tau,$$
$$\frac{d\lambda_3}{d\theta}\kappa = -\lambda_2\tau$$

yazılır. Her iki taraf κ ile bölünürse,

$$\frac{d\lambda_3}{d\theta} = -\lambda_2\tau\rho$$

bulunur. Bu denklemlerin oluşturduğu oluşturduğu denklem sistemi,

$$\frac{d\lambda_1}{d\theta} = \lambda_2 - f\left(\theta\right),$$
$$\frac{d\lambda_2}{d\theta} = -\lambda_1 + \tau\rho\lambda_3,$$
$$\frac{d\lambda_3}{d\theta} = -\tau\rho\lambda_2$$

şeklinde yazılır. Bu da, teoremin ispatıdır.

5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA s VE s^* PARAMETRELERİNE GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Teorem 5.1. 3-boyutlu Öklid uzayında s ve s^* parametrelerine göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerden biri

$$a_3\lambda_1''' + a_2\lambda_1'' + a_1\lambda_1' + a_0\lambda_1 = a_4 \tag{5.1}$$

olmak üzere, burada a_3, a_2, a_1, a_0, a_4 değerleri,

$$\begin{aligned}
&a_3 = \kappa^3\tau,\\
&a_2 = \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa,\\
&a_1 = \kappa^5\tau + \kappa^3\tau^3 + \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa' - \kappa^2\tau\kappa'',\\
&a_0 = 3\kappa^4\kappa'\tau - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa^3,\\
&a_4 = -\kappa^3\tau\frac{d^3s^*}{ds^3} + \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa\frac{d^2s^*}{ds^2} + \left(\kappa^2\tau\kappa'' - \kappa^3\tau^3 - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa'\right)\left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: (3.2) denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\lambda_1'' = \kappa'\lambda_2 + \kappa\lambda_2' - \frac{d^2s^*}{ds^2} \tag{5.2}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.2) denkleminden λ_2 yalnız bırakılarak,

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1' + \left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right)}{\kappa} \tag{5.3}$$

bulunur. (5.3), (5.2)'de yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\kappa\lambda_1'' = \kappa'\lambda_1' + \kappa'\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) + \kappa^2\lambda_2' - \kappa\frac{d^2s^*}{ds^2} \tag{5.4}$$

olur. (3.3) denklemindeki λ_2' değeri, (5.4)'te yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\kappa\lambda_1'' = \kappa'\lambda_1' + \kappa'\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) + \kappa^2\left(-\kappa\lambda_1 + \tau\lambda_3\right) - \kappa\frac{d^2s^*}{ds^2},$$

$$\kappa\lambda_1'' = \kappa'\lambda_1' + \kappa'\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) - \kappa^3\lambda_1 + \kappa^2\tau\lambda_3 - \kappa\frac{d^2s^*}{ds^2} \tag{5.5}$$

bulunur. (5.5)'te her iki tarafın tekrar türevi alınır ve düzenlenirse,

$$\kappa'\lambda_1'' + \kappa\lambda_1''' = \kappa''\lambda_1' + \kappa'\lambda_1'' + \kappa''\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) + \kappa'\frac{d^2s^*}{ds^2} - 3\kappa'\kappa^2\lambda_1 - \kappa^3\lambda_1' + \left(\kappa^2\tau\right)'\lambda_3 + \kappa^2\tau\lambda_3'$$
$$-\kappa'\frac{d^2s^*}{ds^2} - \kappa\frac{d^3s^*}{ds^3},$$

$$\kappa^3\tau\lambda_1''' - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa\lambda_1'' - \left(\kappa^2\tau\kappa'' - \kappa^5\tau - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa' - \kappa^3\tau^3\right)\lambda_1' - \left(-3\kappa^4\kappa'\tau + \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa^3\right)\lambda_1$$
$$+\kappa^3\tau\frac{d^3s^*}{ds^3} - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa\frac{d^2s^*}{ds^2} - \left(\kappa^2\kappa''\tau - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa' - \kappa^3\tau^3\right)\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$a_3 = \kappa^3\tau,$$
$$a_2 = \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa,$$
$$a_1 = \kappa^5\tau + \kappa^3\tau^3 + \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa' - \kappa^2\tau\kappa'',$$
$$a_0 = 3\kappa^4\kappa'\tau - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa^3,$$
$$a_4 = -\kappa^3\tau\frac{d^3s^*}{ds^3} + \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa\frac{d^2s^*}{ds^2} + \left(\kappa^2\tau\kappa'' - \kappa^3\tau^3 - \left(\kappa^2\tau\right)'\kappa'\right)\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)$$

olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.2. 3-boyutlu Öklid uzayında s ve s^* parametrelerine göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerden bir diğeri de

$$b_3\lambda_2''' + b_2\lambda_2'' + b_1\lambda_2' + b_0\lambda_2 = b_4 \tag{5.6}$$

olup, burada b_3, b_2, b_1, b_0, b_4 değerleri,

$$\begin{aligned}
b_3 &= \kappa'\tau - \kappa\tau', \\
b_2 &= -(\kappa''\tau - \kappa\tau''), \\
b_1 &= -\left[\kappa'\tau'' - \kappa''\tau' - (\kappa'\tau - \kappa\tau')(\kappa^2 + \tau^2)\right], \\
b_0 &= -\kappa''(\kappa^2\tau + \tau') + \tau''\kappa(\kappa^2 + \tau^2) - 3\kappa'\tau'(\kappa^2 - \tau^2) - 3\kappa\tau\left[(\tau')^2 - (\kappa')^2\right], \\
b_4 &= \left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right)\left[2\kappa'(\kappa'\tau - \kappa\tau') - \kappa''\kappa\tau + \kappa^2\tau''\right] + \kappa\frac{d^2s^*}{ds^2}(\kappa'\tau - \kappa\tau')
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: (3.3) denkleminin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_2'' = -\lambda_1'\kappa - \lambda_1\kappa' + \lambda_3'\tau + \lambda_3\tau' \tag{5.7}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.3) eşitlikleri, (5.7)'de yerine yazılırsa,

$$\lambda_2'' = -\lambda_1\kappa' - \lambda_2(\kappa^2 + \tau^2) + \lambda_3\tau' + \kappa\left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right) \tag{5.8}$$

denklemi elde edilir. (3.3) eşitliğinin her iki tarafı $-\kappa'$ ile, (5.8) eşitliğinin her iki tarafı κ ile genişletilirse,

$$\lambda_2''\kappa = -\lambda_1\kappa\kappa' - \lambda_2\kappa(\kappa^2 + \tau^2) + \lambda_3\kappa\tau' + \kappa^2\left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right), \tag{5.9}$$

$$-\lambda_2'\kappa' = \lambda_1\kappa\kappa' - \lambda_3\kappa'\tau \tag{5.10}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.9) ve (5.10) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\lambda_2''\kappa - \lambda_2'\kappa' = \lambda_3(\kappa\tau' - \kappa'\tau) - \lambda_2\kappa(\kappa^2 + \tau^2) + \kappa^2\left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right) \tag{5.11}$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_2'\kappa' - \lambda_2''\kappa - \lambda_2\kappa^3 + \kappa^2\left(\dfrac{ds^*}{ds}+1\right) - \lambda_2\kappa\tau^2}{\kappa'\tau - \kappa\tau'} \tag{5.12}$$

yazılır. Şimdi (3.3) eşitliğinin her iki tarafı $-\tau'$ ile, (5.8) eşitliğinin her iki tarafı τ ile genişletilirse,

$$\lambda_2''\tau = -\lambda_1\kappa'\tau - \lambda_2\tau\left(\kappa^2+\tau^2\right) + \lambda_3\tau'\tau + \kappa\tau\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right), \tag{5.13}$$

$$-\lambda_2'\tau' = \lambda_1\kappa\tau' - \lambda_3\tau\tau' \tag{5.14}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.13) ve (5.14) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\lambda_2''\tau - \lambda_2'\tau' = \lambda_1\left(\kappa\tau' - \kappa'\tau\right) - \lambda_2\kappa^2\tau - \lambda_2\tau^3 + \kappa\tau\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) \tag{5.15}$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2'\tau' - \lambda_2''\tau - \lambda_2\kappa^2\tau + \kappa\tau\left(\dfrac{ds^*}{ds}+1\right) - \lambda_2\tau^3}{\kappa'\tau - \kappa\tau'} \tag{5.16}$$

yazılır. (5.8) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\lambda_2''' =& -\lambda_1'\kappa' - \lambda_1\kappa'' - \lambda_2'\left(\kappa^2+\tau^2\right) - \lambda_2\left(\kappa^2+\tau^2\right)' + \lambda_3'\tau' + \lambda_3\tau'' \\ &+\kappa'\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) + \kappa\frac{d^2s^*}{ds^2}\end{aligned} \tag{5.17}$$

elde edilir. (3.2), (5.12) ve (5.16) eşitlikleri, (5.17)'de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\lambda_2''' = -\lambda_2\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\kappa'\kappa+\kappa'\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)+\lambda_2''\kappa''\tau+\lambda_2\kappa''\kappa^2\tau+\lambda_2\kappa''\tau^3$$
$$-\lambda_2'\kappa''\tau'-\kappa''\kappa\tau\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)+\lambda_2'\kappa'\tau''-\lambda_2''\kappa\tau''-\lambda_2\kappa^3\tau''+\kappa^2\tau''\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)$$
$$-\lambda_2\kappa\tau''\tau^2-\lambda_2'\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\lambda_2\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\left(\kappa^2+\tau^2\right)'$$
$$-\lambda_2\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\tau'\tau+\kappa'\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)+\kappa\frac{d^2s^*}{ds^2}\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right),$$
$$=\left(\kappa''\tau-\kappa\tau''\right)\lambda_2''+\left[\kappa'\tau''-\kappa''\tau'-\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right]\lambda_2'$$
$$+\begin{bmatrix}\kappa''\kappa^2\tau+\kappa''\tau'-\kappa^3\tau''-\kappa\tau''\tau^2-\kappa'\tau'\tau^2+\kappa\left(\tau'\right)^2\tau-\left(\kappa'\right)^2\kappa\tau\\+\kappa'\kappa^2\tau'-2\left(\kappa'\right)^2\kappa\tau+2\kappa'\kappa^2\tau'-2\kappa'\tau'\tau^2+2\kappa\left(\tau'\right)^2\tau\end{bmatrix}\lambda_2$$
$$+\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)\left[2\kappa'\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)-\kappa''\kappa\tau+\kappa^2\tau''\right]+\kappa\frac{d^2s^*}{ds^2}\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$b_3=\kappa'\tau-\kappa\tau',$$
$$b_2=-\left(\kappa''\tau-\kappa\tau''\right),$$
$$b_1=-\left[\kappa'\tau''-\kappa''\tau'-\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)\left(\kappa^2+\tau^2\right)\right],$$
$$b_0=-\kappa''\left(\kappa^2\tau+\tau'\right)+\tau''\kappa\left(\kappa^2+\tau^2\right)-3\kappa'\tau'\left(\kappa^2-\tau^2\right)-3\kappa\tau\left[\left(\tau'\right)^2-\left(\kappa'\right)^2\right],$$
$$b_4=\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)\left[2\kappa'\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)-\kappa''\kappa\tau+\kappa^2\tau''\right]+\kappa\frac{d^2s^*}{ds^2}\left(\kappa'\tau-\kappa\tau'\right)$$

olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.3. 3-boyutlu Öklid uzayında s ve s^* parametrelerine göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden 3. diferensiyel denklem

$$c_3\lambda_3'''+c_2\lambda_3''+c_1\lambda_3'+c_0\lambda_3=c_4 \tag{5.18}$$

olmak üzere, burada c_3,c_2,c_1,c_0,c_4 değerleri,

$$c_3 = \tau^3\kappa,$$
$$c_2 = -\left(\tau^2\kappa\right)'\tau,$$
$$c_1 = -\tau^2\tau''\kappa + \left(\tau^2\kappa\right)'\tau' + \tau^3\kappa^3 + \tau^5\kappa,$$
$$c_0 = -\left(\tau^2\kappa\right)'\tau^3 + 3\tau^4\tau'\kappa,$$
$$c_4 = -\tau^4\kappa^2\left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right)$$

şeklindedir.

İspat: (3.4) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda_3'' = -\tau'\lambda_2 - \tau\lambda_2' \tag{5.19}$$

elde edilir. Burada (3.3) ve (3.4) eşitliklerinden λ_2 ve λ_2' değerleri çekilip, (5.19)'da yerine yazılırsa,

$$\lambda_3'' = \frac{\tau'\lambda_3'}{\tau} + \tau\kappa\lambda_1 - \tau^2\lambda_3,$$

$$\tau\lambda_3'' = \tau'\lambda_3' + \tau^2\kappa\lambda_1 - \tau^3\lambda_3 \tag{5.20}$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$\lambda_1 = \frac{\tau\lambda_3'' - \tau'\lambda_3' + \tau^3\lambda_3}{\tau^2\kappa} \tag{5.21}$$

yazılır. Şimdi (5.20) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\tau'\lambda_3'' + \tau\lambda_3''' = \tau''\lambda_3' + \tau'\lambda_3'' + \left(\tau^2\kappa\right)'\lambda_1 + \tau^2\kappa\lambda_1' - 3\tau^2\tau'\lambda_3 - \tau^3\lambda_3' \tag{5.22}$$

elde edilir. (3.2) ve (5.21) eşitlikleri (5.22)'de yerlerine yazılır ve eşitlik düzenlenirse,

$$\tau\lambda_3''' = \tau''\lambda_3' + \left(\tau^2\kappa\right)'\left(\frac{\tau\lambda_3'' - \tau'\lambda_3' + \tau^3\lambda_3}{\tau^2\kappa}\right) + \tau^2\kappa\left[\kappa\lambda_2 - \left(\frac{ds^*}{ds} + 1\right)\right] - 3\tau^2\tau'\lambda_3 - \tau^3\lambda_3',$$

$$\tau^3\kappa\lambda_3''' = \tau^2\tau''\kappa\lambda_3' + \left(\tau^2\kappa\right)'\tau\lambda_3'' - \left(\tau^2\kappa\right)'\tau'\lambda_3' + \left(\tau^2\kappa\right)'\tau^3\lambda_3 + \tau^4\kappa^3\lambda_2 - \tau^4\kappa^2\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)$$
$$-3\tau^4\tau'\kappa\lambda_3 - \tau^5\kappa\lambda_3'$$

bulunur. Burada (3.4) denkleminden λ_2 'nin eşiti yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\tau^3\kappa\lambda_3''' - \left(\tau^2\kappa\right)'\tau\lambda_3'' - \left(\tau^2\tau''\kappa - \left(\tau^2\kappa\right)'\tau' - \tau^3\kappa^3 - \tau^5\kappa\right)\lambda_3' - \left[\left(\tau^2\kappa\right)'\tau^3 - 3\tau^4\tau'\kappa\right]\lambda_3$$
$$+\tau^4\kappa^2\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
c_3 &= \tau^3\kappa, \\
c_2 &= -\left(\tau^2\kappa\right)'\tau, \\
c_1 &= -\tau^2\tau''\kappa + \left(\tau^2\kappa\right)'\tau' + \tau^3\kappa^3 + \tau^5\kappa, \\
c_0 &= -\left(\tau^2\kappa\right)'\tau^3 + 3\tau^4\tau'\kappa, \\
c_4 &= -\tau^4\kappa^2\left(\frac{ds^*}{ds}+1\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

6. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA θ AÇISINA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Teorem 6.1. . 3-boyutlu Öklid uzayında θ kontengenez açısına göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerden biri

$$a_3\lambda_1''' + a_2\lambda_1'' + a_1\lambda_1' + a_0\lambda_1 = a_4 \tag{6.1}$$

olmak üzere, burada a_3, a_2, a_1, a_0, a_4 değerleri,

$$\begin{aligned}
a_3 &= \tau\rho, \\
a_2 &= -(\tau\rho)', \\
a_1 &= \tau\rho\left(1+\tau^2\rho^2\right), \\
a_0 &= -(\tau\rho)', \\
a_4 &= -\tau\rho f''(\theta) + (\tau\rho)' f'(\theta) - \tau^3\rho^3 f(\theta)
\end{aligned}$$

şeklindedir [12].

İspat: (3.5) denkleminin θ 'ya göre türevi alınırsa,

$$\lambda_1'' = \lambda_2' - f'(\theta) \tag{6.2}$$

elde edilir. (3.6), (6.2)'de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\lambda_1'' = -\lambda_1 + \tau\rho\lambda_3 - f'(\theta),$$

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1'' + \lambda_1 + f'(\theta)}{\tau\rho} \tag{6.3}$$

bulunur. (6.3) denkleminin θ 'ya göre türevi alınırsa,

$$\lambda_3' = \frac{\left(\lambda_1''' + \lambda_1' + f''(\theta)\right)\tau\rho - (\tau'\rho + \tau\rho').\left(\lambda_1'' + \lambda_1 + f'(\theta)\right)}{(\tau\rho)^2} \tag{6.4}$$

elde edilir. Şimdi (3.7), (6.4)'te yerine yazılırsa,

$$-\tau^3\rho^3\lambda_2=\tau\rho\lambda_1'''+\tau\rho\lambda_1'+\tau\rho f''(\theta)-\tau'\rho\lambda_1''-\tau'\rho\lambda_1-\tau'\rho f'(\theta)-\tau\rho'\lambda_1''-\tau\rho'\lambda_1-\tau\rho' f'(\theta)$$

bulunur. Burada, (3.5) eşitliğinden elde edilen $\lambda_2=\lambda_1'+f(\theta)$ değeri kullanılarak ve düzenlenerek,

$$\begin{aligned}
-\tau^3\rho^3\lambda_1'-\tau^3\rho^3 f(\theta)&=\tau\rho\lambda_1'''+\tau\rho\lambda_1'+\tau\rho f''(\theta)-\tau'\rho\lambda_1''-\tau'\rho\lambda_1-\tau'\rho f'(\theta)-\tau\rho'\lambda_1''-\tau\rho'\lambda_1\\
&\quad-\tau\rho' f'(\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\tau\rho)\lambda_1'''-(\tau'\rho+\tau\rho')\lambda_1''+\tau\rho\left(1+\tau^2\rho^2\right)\lambda_1'-(\tau'\rho+\tau\rho')\lambda_1+\tau\rho f''(\theta)-(\tau'\rho+\tau\rho')f'(\theta)\\
&+\tau^3\rho^3 f(\theta)=0,
\end{aligned}$$

$$(\tau\rho)\lambda_1'''-(\tau\rho)'\lambda_1''+\tau\rho\left(1+\tau^2\rho^2\right)\lambda_1'-(\tau\rho)'\lambda_1+\tau\rho f''(\theta)-(\tau\rho)' f'(\theta)+\tau^3\rho^3 f(\theta)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, $\left(C^*\right)$ eğrisini λ_1 e göre karakterize eden diferansiyel denklemdir. Buradan a_3,a_2,a_1,a_0,a_4 katsayıları,

$$\begin{aligned}
a_3&=\tau\rho,\\
a_2&=-(\tau\rho)',\\
a_1&=\tau\rho\left(1+\tau^2\rho^2\right),\\
a_0&=-(\tau\rho)',\\
a_4&=-\tau\rho f''(\theta)+(\tau\rho)' f'(\theta)-\tau^3\rho^3 f(\theta)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.2. 3-boyutlu Öklid uzayında θ kontengenez açısına göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerden bir diğeri

$$b_3\lambda_2'''+b_2\lambda_2''+b_1\lambda_2'+b_0\lambda_2=b_4 \tag{6.5}$$

olmak üzere, burada b_3,b_2,b_1,b_0,b_4 değerleri,

$$b_3 = (\tau\rho)',$$
$$b_2 = -(\tau\rho)'',$$
$$b_1 = (\tau\rho)'\left(1+(\tau\rho)^2\right),$$
$$b_0 = 3\tau\rho\left((\tau\rho)'\right)^2 - (\tau\rho)''\left(1+(\tau\rho)^2\right),$$
$$b_4 = (\tau\rho)' f'(\theta) - (\tau\rho)'' f(\theta)$$

şeklindedir.

İspat: (3.6) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\lambda_2'' = -\lambda_1' + (\tau\rho)'\lambda_3 + \tau\rho\lambda_3'$$

elde edilir. (3.5) ve (3.7) kullanılarak,

$$\lambda_2'' = -\lambda_2 + f(\theta) + (\tau\rho)'\lambda_3 - (\tau\rho)^2\lambda_2$$

bulunur. Buradan,

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_2'' + \lambda_2 - f(\theta) + (\tau\rho)^2\lambda_2}{(\tau\rho)'}$$

elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\left((\tau\rho)'\right)^2\lambda_3' = \left[\lambda_2''' + \lambda_2' - f'(\theta) + 2\tau\rho(\tau\rho)'\lambda_2 + (\tau\rho)^2\lambda_2'\right](\tau\rho)' - \begin{bmatrix}\lambda_2'' + \lambda_2 - f(\theta) \\ +(\tau\rho)^2\lambda_2\end{bmatrix}(\tau\rho)''$$

elde edilir. (3.7) eşitliği kullanılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&(\tau\rho)'\lambda_2''' - (\tau\rho)''\lambda_2'' + (\tau\rho)'.\left(1+(\tau\rho)^2\right)\lambda_2' + \left[3\tau\rho\left((\tau\rho)'\right)^2 - (\tau\rho)''.\left(1+(\tau\rho)^2\right)\right]\lambda_2 \\ &-(\tau\rho)' f'(\theta) + (\tau\rho)'' f(\theta) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan b_3, b_2, b_1, b_0, b_4 katsayıları,

$$
\begin{aligned}
b_3 &= (\tau\rho)', \\
b_2 &= -(\tau\rho)'', \\
b_1 &= (\tau\rho)'\left(1+(\tau\rho)^2\right), \\
b_0 &= 3\tau\rho\left((\tau\rho)'\right)^2 - (\tau\rho)''\left(1+(\tau\rho)^2\right), \\
b_4 &= (\tau\rho)' f'(\theta) - (\tau\rho)'' f(\theta)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6.3. 3-boyutlu Öklid uzayında θ kontengenez açısına göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden 3. diferensiyel denklem

$$
c_3\lambda_3''' + c_2\lambda_3'' + c_1\lambda_3' + c_0\lambda_3 = c_4 \tag{6.6}
$$

olmak üzere, burada c_3, c_2, c_1, c_0, c_4 değerleri,

$$
\begin{aligned}
c_3 &= (\tau\rho)^2, \\
c_2 &= -2\tau\rho(\tau\rho)', \\
c_1 &= -\tau\rho(\tau\rho)'' + 2\left((\tau\rho)'\right)^2 + (\tau\rho)^2\left(1+(\tau\rho)^2\right), \\
c_0 &= (\tau\rho)'(\tau\rho)^3, \\
c_4 &= (\tau\rho)^3 f(\theta)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat: (3.7) denkleminin türevi alınarak,

$$
\lambda_3'' = -(\tau\rho)'\lambda_2 - (\tau\rho)\lambda_2'
$$

elde edilir. Bu eşitlik, (3.5) ve (3.7) denklemleri kullanılarak ve düzenlenerek,

$$
\lambda_3'' = (\tau\rho)'\frac{\lambda_3'}{\tau\rho} + \tau\rho\lambda_1 - (\tau\rho)^2\lambda_3
$$

$$\tau\rho\lambda_3'' = (\tau\rho)'\lambda_3' + (\tau\rho)^2\lambda_1 - (\tau\rho)^3\lambda_3 \tag{6.7}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\lambda_1 = \frac{\tau\rho\lambda_3'' - (\tau\rho)'\lambda_3' + (\tau\rho)^3\lambda_3}{(\tau\rho)^2} \tag{6.8}$$

yazılır. (6.7) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$(\tau\rho)'\lambda_3'' + \tau\rho\lambda_3''' = (\tau\rho)''\lambda_3' + (\tau\rho)'\lambda_3'' + 2(\tau\rho)'\tau\rho\lambda_1 + (\tau\rho)^2\lambda_1' - 3(\tau\rho)^2.(\tau\rho)'\lambda_3 - (\tau\rho)^3\lambda_3'$$

elde edilir. (3.5) ve (6.8) eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}(\tau\rho)'\lambda_3'' + \tau\rho\lambda_3''' &= (\tau\rho)''\lambda_3' + (\tau\rho)'\lambda_3'' + 2(\tau\rho)'\tau\rho\left[\frac{\tau\rho\lambda_3'' - (\tau\rho)'\lambda_3' + (\tau\rho)^3\lambda_3}{(\tau\rho)^2}\right]\\ &+ (\tau\rho)^2.\left[\lambda_2 - f(\theta)\right] - 3(\tau\rho)^2.(\tau\rho)'\lambda_3 - (\tau\rho)^3\lambda_3'\end{aligned}$$

bulunur. Burada, (3.7) eşitliği yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}(\tau\rho)'\lambda_3'' + \tau\rho\lambda_3''' &= (\tau\rho)''\lambda_3' + (\tau\rho)'\lambda_3'' + 2(\tau\rho)'\tau\rho\left[\frac{\tau\rho\lambda_3'' - (\tau\rho)'\lambda_3' + (\tau\rho)^3\lambda_3}{(\tau\rho)^2}\right]\\ &+ (\tau\rho)^2.\left[-\frac{\lambda_3'}{\tau\rho} - f(\theta)\right] - 3(\tau\rho)^2.(\tau\rho)'\lambda_3 - (\tau\rho)^3\lambda_3',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\tau\rho)^2\lambda_3''' - 2(\tau\rho)'\tau\rho\lambda_3'' - \left[(\tau\rho)''\tau\rho - 2\left((\tau\rho)'\right)^2 - (\tau\rho)^2.\left(1 + (\tau\rho)^2\right)\right]\lambda_3' + (\tau\rho)'.(\tau\rho)^3\lambda_3\\ &+ (\tau\rho)^3.f(\theta) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan c_3, c_2, c_1, c_0, c_4 katsayıları,

$$c_3 = (\tau\rho)^2,$$
$$c_2 = -2\tau\rho(\tau\rho)',$$
$$c_1 = -\tau\rho(\tau\rho)'' + 2\left((\tau\rho)'\right)^2 + (\tau\rho)^2.\left(1 + (\tau\rho)^2\right),$$
$$c_0 = (\tau\rho)'.(\tau\rho)^3,$$
$$c_4 = -(\tau\rho)^3 f(\theta)$$

şeklinde bulunur.

KAYNAKLAR

1. Euler, L., De Curvis Triangularibus, Acta Acad. Petropol., 1778 (1780), 3-30.
2. Fujiwara, M., On Space Curves of Constant Breadth, Tohoku Mathematical Journal, 1914, 5, 180-184.
3. Barbier, E., Note sur le probleme de I’aiguille et le je udu joint couvert, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1860, 2(5), 273-286.
4. Blaschke, W., Leibziger Berichte, 1917, 67, 290.
5. Ball, N.H., On ovals, American Mathematical Monthly, 1930, 37(7), 348-353.
6. Hammer, P.C., Constant Breadth Curves in the Plane, Procedings of the American Mathematical Society, 1955, 6(2), 333-334.
7. Mellish, A.P., Notes on Differential Geometry, Annals of Mathematics, 1931, 32(1), 181-190.
8. Smakal, S., Curves of Constant Breadth, Czechoslovak Mathematical Journal, 1973, 23(1), 86-94.
9. Reuleaux, F., The Kinematics of Machinery (Translated by A. B. W. Kennedy), Dover Pub., New York, 1963,653 p.
10. Köse, Ö., Sabit Genişlikli Eğriler ve Yüzeylerin Bazı Özellikleri, Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Erzurum, 1982, 55 s. (Doçentlik Tezi).
11. Köse, Ö., Düzlemde Ovaller ve Sabit Genişlikli Eğrilerin Bazı Özellikleri, Doğa Bilim Dergisi, Seri B, 1984, 8(2), 119-126.
12. Köse, Ö., On Space Curves of Constant Breadth, Doğa Tr. J. Math, 1986, 10(1), 11-14.
13. Sezer, M., Differential Equations Characterizing Space Curves of Constant Breadth and a Criterion for These Curves, Turkish J. Of Math, 1989, 13(2), 70-78.
14. Akdoğan, Z., n-Euclidean Uzayında Sabit Genişlikli Eğriler, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Erzurum, 1994, 43 s. (Doktora Tezi).
15. Akdoğan, Z., Mağden, A., Some Characterization of Curves of Constant Breadth in E^n Space, Turk J Math, 2001, 25, 433-444.

16. Önder, M., Kocayiğit, H., Candan, E., Differential Equations Characterizing Timelike and Spacelike Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space E_1^3, J. Korean Math. Soc., 2011, 48(4), 849-866.
17. Kocayiğit, H., Önder, M., Space Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space, Annali di Matematica, 2013, 192(5), 805-814.
18. Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2006, 440 s.
19. Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri I. Cilt, Ankara Yayınları, Ankara, 2000, 271 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Merve BOZKURT
Doğum Yeri ve Yılı	: İzmir, 1989
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: merwebozkurt@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Salih Dede Anadolu Lisesi, 2007
Lisans	: Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2011

Mesleki Deneyim

Aziziye Anadolu İmam Hatip Lisesi, ERZURUM	2013-2018
Emet Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, KÜTAHYA	2018-…….. (halen)