

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**DICKSON VE GRAPH-MATCHING POLİNOMLARININ TEMEL
MATRİS ÖZELLİKLERİ VE FONKSİYONEL İNTEGRO-
DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMALARI**

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER**

**II. Danışman
Doç. Dr. Ersin ASLAN**



MANİSA-2019

TEZ ONAYI

Ömür Kıvanç KÜRKCÜ tarafından hazırlanan "**Dickson ve Graph-Matching Polinomlarının Temel Matris Özellikleri ve Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları**" adlı tez çalışması **10/09/2019** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Prof. Dr. Mehmet SEZER**

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

II. Danışman **Doç. Dr. Ersin ASLAN**

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ**

SAVAŞANERİL
Dokuz Eylül Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Mustafa GÜLSU**

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Gökşen BACAĞ**

TURAN
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Ali KONURALP**

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ömür Kıvanç KÜRKCÜ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
TABLO DİZİNİ	IX
TEŞEKKÜR.....	XII
ÖZET.....	XIII
ABSTRACT.....	XIV
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Dickson Polinomu ve Temel Özellikleri	5
2.2. Çizge Teorisi ve Matching Polinomunun Temel Özellikleri	7
2.2.1. Matching Polinomu	8
2.3. Kesirli Analizin Oluşumu ve Temel Özellikleri.....	12
3. DICKSON VE MATCHING POLİNOMLARININ TEMEL MATRİS ÖZELLİKLERİ	15
3.1. Dickson Polinomunun Temel Matris Özellikleri	15
3.2. Matching Polinomunun Temel Matris Özellikleri	17
4. DICKSON MATRİS-SIRALAMA METODUNUN UYGULAMASI.....	21
4.1. Fen Bilimlerinde Ortaya Çıkan Bazı Model Problemlerin Çözümü	21
4.1.1. Kalan Fonksiyon ile Yakınsaklık Analizi.....	25
4.1.2. Model Problemler	27
4.2. En Genel Yapıdaki Fonksiyonel Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	42
4.2.1. Hata Analizi ve Ortoeksponansiyel Kalan Fonksiyonunun Karakteristik Davranışı	48
4.2.2. Sayısal Örnekler.....	50
4.3. Bazı Kesirli Model Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	62
4.3.1. Model Problemler	64
5. MATCHING MATRİS-SIRALAMA METODUNUN UYGULAMASI	70
5.1. Birleştirilmiş Çoklu Gecikmeli Fonksiyonel Nötr Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	70
5.1.1. Hata Analizi ve Laplace-Padé Metodu Yardımıyla Çözümün Salınım Hareketi	72
5.1.2. Sayısal Uygulamalar	74
5.2. Çoklu Gecikmeli ve Değişken Katsayılı Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	82
5.2.1. Kesirli Türeve Bağlı Olarak Kalan Hata Analizi.....	86
5.2.2. Kesirli Model Problemler	86
5.3. Üçüncü Dereceden Doğrusal Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	99
5.3.1. İkinci Ortalama Değer Teoremine Dayanan Yakınsaklık Analizi ve Hata Tahmini	103
5.3.2. Sayısal Problemler	105
5.4. Uygulamalı Bilimlerde Ortaya Çıkan Beşinci Dereceden Doğrusal Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	115
5.4.1. Kesirli Kalan Fonksiyonuna Göre Hata Analizi.....	119
5.4.2. Model Problemler	121

5.5. Çoklu Gecikmeli ve Uzay-Zaman Kesirli Kısmi Diferansiyel	
Denklemlerin Çözümü	135
5.5.1. Kalan Hata Tahmini ve Yakınsaklık Analizi.....	139
5.5.2. Model Problemler	141
5.6. Uzay-Zaman Kesirli Kısmi İntegro-Diferansiyel-Gecikmeli	
Denklemlerin Çözümü	150
5.6.1. Kalan Fonksiyonuna Dayalı Hata Tahmini ve Yakınsaklık Analizi	155
5.6.2. Sayısal Örnekler.....	157
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	166
KAYNAKLAR	168
ÖZGEÇMİŞ	179



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$D_n(t, \alpha)$	n . dereceden Dickson polinomu
${}^{RL}D_a^n$	Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}^cD_a^n$	Caputo kesirli türev operatörü
${}^J D_a^n$	Jumarie kesirli türev operatörü
${}^{CF}D_0^n$	Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
$E(G)$	Bir G_n çizgesinin ayrıtlar kümesi
G_n	Bağlantılı ve basit bir çizge
J_a^n	a değerine göre n . mertebeden kesirli integral operatörü
K_n	n tepeli tam çizge
$M_n(G_n, t)$	Bir G_n çizgesinin matching polinomu
N	Hesaplama limiti
P_n	n tepeli yol çizge
$p(G_n, k)$	Bir G_n çizgesinin k 'lı eşleme sayısı
$V(G)$	Bir G_n çizgesinin tepeler kümesi
$y(t)$	Problemlerin/Denklemelerin tam çözümü
$y_N(t)$	Dickson veya matching polinomuna göre yaklaşık çözüm
Ω	Kısmi diferansiyel denklemlerin tanımlı olduğu dikdörtgensel bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$\kappa(G)$	Bağlantılılık sayısı
$\Gamma(n)$	Euler gama fonksiyonu
ADM	Adomian ayrıştırma metodu
BOM	Bernoulli işlevsel matris metodu
CLSN	Chebyshev-Lobatto sıralama noktaları
CPU	Bilgisayarın merkezi işlem birimi (Central processing unit)
CWM	Chebyshev dalgacık metodu
DM	Fark metodu
DTM	Diferansiyel dönüşüm metodu
FTM	Fermat Tau metodu

HAM	Homotopi analiz metodu
HDM	Haar dalgacık metodu
HPM	Homotopi pertürbasyon metodu
LDM	Laplace ayrıştırma metodu
LeTM	Legendre Tau metodu
LGM	Laguerre-Gauss metodu
LM	Laplace metodu
LuTM	Lucas Tau metodu
LWM	Legendre dalgacık metodu
MC	Süreklilik metodu
PM	Pertürbasyon metodu
PSM	Kuvvet seri metodu
RKM	Çoğaltıcı çekirdek metodu
SCP	Chebyshev polinom metodu
SCT	Değiştirilmiş Chebyshev Tau metodu
SGM	Sinc-Galerkin metodu
SM	Spline metodu
SSN	Standart sıralama noktaları
TJPIM	Taylor-Jumarie parçalı interpolasyon metodu
TS	Taylor seri metodu
VIM	Varyasyonel iterasyon metodu

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.2.1. Yol (P_n) ve tam (K_n) çizge sınıfları.....	8
Şekil 2.2.2. K_{20} tam çizgesi (a) ve onun komşuluk matrisinin grafiği (b)	12
Şekil 4.1.1. Problem 4.1.1'in $\alpha = 0$ ve $N=2-5$ için kalan fonksiyonları	31
Şekil 4.1.2. Problem 4.1.3 için $N=2$ ve farklı α değerleri kullanarak Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması	33
Şekil 4.1.3. Problem 4.1.4'ün e_2 , $\lambda = 2$, $N=3,4$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	35
Şekil 4.1.4. Problem 4.1.4'ün e_1 , $\lambda = 2$, $N=3,4$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	36
Şekil 4.1.5. Problem 4.1.4'ün $\{e_1, e_2\}$, $\lambda = -2$, $N=4$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	36
Şekil 4.1.6. Problem 4.1.4'ün e_2 , $\lambda = -\pi^2$, $N=3$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.1.7. Problem 4.1.4'ün e_2 , $\lambda = 2$, $N=3,4$ ve $\alpha = 0$ değerleri için kalan fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.1.8. Problem 4.1.7 için Dickson polinom ve tam çözümlerin karşılaştırılması	41
Şekil 4.1.9. Problem 4.1.7 için kalan fonksiyonlarının fiziksel davranışlarının karşılaştırılması	42
Şekil 4.1.10. Problem 4.1.7 için mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	42
Şekil 4.2.1. Örnek 4.2.1'in $h_{00}(t) = \sin(t)$ değeri için $y_8(t) _{\alpha}$ kararlı çözümünün $I = [-4 \times 10^3, 8 \times 10^3]$ aralığındaki kontur grafiği.....	52
Şekil 4.2.2. Örnek 4.2.2 için tam ve Dickson polinom çözümlerinin karşılaştırılması	53
Şekil 4.2.3. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^2, e^t, s^2 - s\}$ ve $\lambda_{10} = 1$ değerleri için $y_9(t) _{\alpha}$ kararlı çözümünün $I = [-2 \times 10^3, 2 \times 10^3]$ aralığındaki kontur grafiği.....	55
Şekil 4.2.4. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^3 - t^2, \sin(t), s^2\}$ ve $\lambda_{10} = 1$ değerleri için tam ve Dickson polinom çözümlerinin karşılaştırılması	56
Şekil 4.2.5. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^2, e^t, s^2 - s\}$ ve $\lambda_{10} = -1$ değerleri için ortoeksponansiyel kalan fonksiyonların karakteristik davranışı	56
Şekil 4.2.6. Örnek 4.2.4'ün $h_{00}(t) = \lfloor t \rfloor$ için tam ve Dickson polinom çözümlerinin karşılaştırılması	57
Şekil 4.2.7. Örnek 4.2.4 için $y_8(t) _{\alpha}$ kararlı çözümünün $I = [-4 \times 10^2, 4 \times 10^2]$ aralığındaki kontur grafiği.....	58
Şekil 4.2.8. Örnek 4.2.5 için Dickson polinom çözümünün ε ve β parametrelerine göre davranışı	59

Şekil 4.2.9. Örnek 4.2.6 için Dickson polinom çözümünün α parametresine göre davranışı	60
Şekil 4.2.10. Örnek 4.2.6 için; (a) Tam çözümün kontur grafiği, (b) Dickson polinom çözümünün $\alpha \in [-100,100]$ aralığındaki kontur grafiği ...	60
Şekil 4.2.11. Örnek 4.2.7 için Dickson polinom çözümünün α parametresine göre davranışı	61
Şekil 4.2.12. Örnek 4.2.7 için kararlı çözümün $\alpha \in [-2 \times 10^3, 2 \times 10^3]$ aralığındaki kontur grafiği.....	62
Şekil 4.3.1. Model 4.3.1 için Dickson polinom çözümünün farklı kesirli türeve göre davranışı	65
Şekil 4.3.2. Model 4.3.1'in $\beta_0 = 2$ değeri için Dickson polinom çözümünün farklı α değerine göre davranışı.....	66
Şekil 4.3.3. Model 4.3.2'nin $P_0(t) = 0.1$, $Q_3(t) = 0.01$ ve $T=1$ değerleri için Dickson polinom çözümünün β_0 ve β_1 'e göre davranışı	67
Şekil 4.3.4. Model 4.3.2'nin $P_0(t) = Q_3(t) = 0.001$ ve $T=4$ değerleri için çözümlerin geniş aralıktaki simülasyonu	68
Şekil 4.3.5. Model 4.3.3'ün $\beta_0 = 1.8$ ve $T=1$ değerleri için (a): tam çözümün kontur çizgileri alanı; (b): Dickson polinom çözümünün $I = [-2 \times 10^2, 2 \times 10^2]$ aralığındaki kararlı kontur çizgileri alanı.....	69
Şekil 4.3.6. Model 4.3.3'ün $T=20$ için Dickson polinom çözümünün β_0 değerine göre davranışı	69
Şekil 5.1.1. Uygulama 5.1.1 için parçalı aralıktaki matching polinom ve tam çözümlerinin karşılaştırılması	75
Şekil 5.1.2. Uygulama 5.1.2 için farklı sıralama noktalarına göre L_∞ hata hesabının N değerine göre logaritmik ölçüde karşılaştırılması	77
Şekil 5.1.3. Uygulama 5.1.2 için Padé-matching polinom ve tam çözümünün $[0,14]$ zaman aralığındaki salınım hareketi	77
Şekil 5.1.4. Uygulama 5.1.2 için $y_{12}(t)$ çözümünün $[0,5]$ aralığındaki faz düzlemi	78
Şekil 5.1.5. Uygulama 5.1.3 için çözümlerin karşılaştırılması	79
Şekil 5.1.6. Uygulama 5.1.4 için mutlak hata değerlerinin N ve t zaman değişkenine göre karşılaştırılması	80
Şekil 5.1.7. Uygulama 5.1.4 için Padé-matching polinom ve tam çözümün $[0,150]$ zaman aralığındaki salınım hareketi	81
Şekil 5.1.8. Uygulama 5.1.4 için $y_{14}(t)$ çözümünün $[0,2]$ aralığındaki faz düzlemi	81
Şekil 5.2.1. Model 5.2.2 için tam ve matching polinom çözümlerinin karşılaştırılması	90
Şekil 5.2.2. Model 5.2.3 için C (a), CF (b), RL (c) ve J (d) kesirli türev yapılarını içeren metot ile elde edilen matching polinom çözümlerinin yer değiştirmesi	94
Şekil 5.2.3. Model 5.2.3 için mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	94
Şekil 5.2.4. Model 5.2.5 için tam ve matching polinom çözümlerinin n açısından yer değiştirmesi	97

Şekil 5.2.5. Model 5.2.5 için tam ve matching polinom çözümlerinin n açısından $[0,15]$ aralığındaki davranışı	98
Şekil 5.3.1. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.5$ yüksek sönüm kuvvetine ve $T = 1$ değerine göre çözümlerinin karşılaştırılması	107
Şekil 5.3.2. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.5$ yüksek sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin salınım hareketi	107
Şekil 5.3.3. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.5$ yüksek sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin faz düzlemlerinin karşılaştırılması	108
Şekil 5.3.4. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.1$ düşük sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin salınım hareketi	109
Şekil 5.3.5. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.1$ düşük sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin faz düzlemlerinin karşılaştırılması	110
Şekil 5.3.6. Problem 5.3.2 için kesirli türevinin matching polinom çözümünün üzerine etkisi.	111
Şekil 5.3.7. Problem 5.3.2'nin $\alpha = 1$ ve $T = 30$ değerleri için çözümlerinin salınım hareketi	112
Şekil 5.3.8. Problem 5.3.2'nin $\alpha = 1$ ve $T = 30$ değerleri için çözümlerinin faz düzlemindeki tutarlılığı	112
Şekil 5.3.9. Problem 5.3.3 için kesirli türevinin matching polinom çözümünün üzerine etkisi.	113
Şekil 5.3.10. Problem 5.3.5 için kesirli türevinin matching polinom çözümünün üzerine etkisi.....	115
Şekil 5.4.1. Model 5.4.1 için $y_3(t)$ çözümünün farklı kesirli türeve göre yer değiştirmesi	122
Şekil 5.4.2. Model 5.4.2'nin Durum 1 için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi	125
Şekil 5.4.3. Model 5.4.2'nin Durum 3 için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi	126
Şekil 5.4.4. Model 5.4.2'nin Durum 1-3 için metodun yakınsaklığının N ve α_1 parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu ...	127
Şekil 5.4.5. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.5$ değeri için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi.	129
Şekil 5.4.6. Model 5.4.3'ün $\lambda = 1$ değeri için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi	129
Şekil 5.4.7. Model 5.4.3'ün $\alpha_0 = 2$ ve λ değerleri için matching polinom çözümünün davranışı.....	131
Şekil 5.4.8. Model 5.4.3 için metodun yakınsaklığının N , α_0 ve λ parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu	132
Şekil 5.4.9. Model 5.4.4'ün $n = 4$, $\beta = 0.6$ ve farklı kesirli türev değerleri için $y_4(t)$ ile seri çözümünün [166] karşılaştırılması	134
Şekil 5.5.1. Model 5.5.1'in t ve α değerlerine göre yayıngan matching polinom çözümleri.....	142
Şekil 5.5.2. Model 5.5.2'nin $\alpha = 0.5$ değeri için (a) ${}^C u_{15}(x,t)$ matching polinom çözümü ve (b) mutlak hata fonksiyonunun grafiği	143
Şekil 5.5.3. Model 5.5.2'nin $\alpha = 0.9$ değeri için (a) ${}^C u_{15}(x,t)$ matching polinom çözümü ve (b) mutlak hata fonksiyonunun grafiği	143

Şekil 5.5.4. Model 5.5.3'ün (a) $^J u_{10}(x,t)$ matching polinom çözümü ve (b) mutlak hata fonksiyonunun grafiği.	144
Şekil 5.5.5. Model 5.4.3 için metodun yakınsaklığının N , C ve J parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu	145
Şekil 5.5.6. Model 5.5.4'ün C , $\alpha_0 = 0.3$, $\alpha_1 = 0.2$ ve $p = 1$ için akışkanın bir tüpteki simülasyonu ((a): yaklaşık çözüm; (b) tam çözüm).....	146
Şekil 5.5.7. Model 5.5.5'in $L = 1$ değeri için çözümünün ve mutlak hata grafiklerinin yayılımı.....	147
Şekil 5.5.8. Model 5.5.5'in $L = 3$ değeri için çözümünün ve mutlak hata grafiklerinin yayılımı.....	147
Şekil 5.5.9. Model 5.5.5 için metodun yakınsaklığının N , C ve J parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu	148
Şekil 5.5.10. Model 5.5.6 için çözümün ve mutlak hata hesabının grafikleri.....	149
Şekil 5.5.11. Model 5.5.6 için metodun yakınsaklığının N , C ve J parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu	149
Şekil 5.6.1. Örnek 5.6.1'in $\alpha_0 = 0.8$ için çözümün ve mutlak hata grafikleri....	158
Şekil 5.6.2. Örnek 5.6.1 için metodun yakınsaklığının N değerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu	158
Şekil 5.6.3. Örnek 5.6.2 için $u_8(x,0.5)$ matching polinom çözümünün α_0 değerine göre fiziksel hareketi	160
Şekil 5.6.4. Örnek 5.6.3 için matching polinom çözümünün iki ve üç boyutlu grafikleri	161
Şekil 5.6.5. Örnek 5.6.3 için metodun yakınsaklığının N değerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.	162
Şekil 5.6.6. Örnek 5.6.4 için $u_{10}(x,t)$ matching polinom çözümünün ve mutlak hata hesabının grafiği	164
Şekil 5.6.7. Örnek 5.6.4 için metodun yakınsaklığının N değerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu	165

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1.1. Problem 4.1.1 için Dickson polinom çözümlerinin diğer metotların çözümleri ile karşılaştırılması.	30
Tablo 4.1.2. Problem 4.1.4'ün $\lambda = 2$ için Dickson polinom çözümünün ve mutlak hatanın karşılaştırılması	35
Tablo 4.1.3. Problem 4.1.5 için metotların karşılaştırılması	38
Tablo 4.1.4. Problem 4.1.6 için metotların karşılaştırılması	39
Tablo 4.2.1. Örnek 4.2.1 için σ_N ve $\sigma_{N,M}$ hataların karşılaştırılması	51
Tablo 4.2.2. Örnek 4.2.2 için δ_N ve $\delta_{N,M}$ hata hesaplarının karşılaştırılması ...	53
Tablo 4.2.3. Örnek 4.2.3 $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^2, e^t, s^2 - s\}$ için mutlak ve δ_N hata hesaplamalarının karşılaştırılması	54
Tablo 4.2.4. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^3 - t^2, \sin(t), s^2\}$ değerleri için mutlak ve δ_N hata hesaplamalarının karşılaştırılması	55
Tablo 4.2.5. Örnek 4.2.4 için mutlak ve δ_N hata hesaplamalarının karşılaştırılması	57
Tablo 4.2.6. Örnek 4.2.6 için $ e_N(t_i) = y(t) - y_N(t) $ ve $ e_N^*(t_i) = y'(t) - y'_N(t) $ hata hesaplamalarının karşılaştırılması...	59
Tablo 4.3.1. Model 4.3.2'nin $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $P_0(t) = 0.1$ ve $Q_3(t) = 0.01$ değerlerine göre mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.....	67
Tablo 5.1.1. Uygulama 5.1.2 için hata hesaplamalarının farklı sıralama ve metotlara göre karşılaştırılması	76
Tablo 5.1.2. Uygulama 5.1.2 için CPU süresinin ve L_∞ hata hesabının N değerine ve çizge yapısına göre karşılaştırılması	76
Tablo 5.1.3. Uygulama 5.1.2 için CLSN'daki mutlak hataların karşılaştırılması	77
Tablo 5.1.4. Uygulama 5.1.3 için CLSN'nda farklı çizge yapısını içeren metodun mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması	78
Tablo 5.1.5. Uygulama 5.1.4 için CPU süresini ve L_∞ hata hesabının N değerine ve çizge yapısına göre karşılaştırılması	80
Tablo 5.1.6. Uygulama 5.1.5 için hata hesaplamalarının farklı sıralama noktalarına ve metoda göre karşılaştırılması	82
Tablo 5.2.1. Model 5.2.2 için L_∞ ve düzeltilmiş L_∞ hata hesaplamalarının N , M , ve C, CF, RL, J kesirli türevlerine göre karşılaştırılması	90
Tablo 5.2.2. Model 5.2.2 için CPU süresinin (sn.) N , M , ve C, CF, RL, J kesirli türevlerine göre karşılaştırılması	90
Tablo 5.2.3. Model 5.2.3'ün $n=2$ değeri için güncel ve var olan tam çözümlerin karşılaştırılması	92
Tablo 5.2.4. Model 5.2.4 için güncel ve var olan sonuçların karşılaştırılması. ...	95
Tablo 5.2.5. Model 5.2.5 için CPU süresinin ve L_∞ hata değerlerinin N , M , $L=1$, $n=2$ değişkenlerine göre karşılaştırılması.....	96

Tablo 5.2.6. Model 5.2.6 için mutlak hata ve düzeltilmiş mutlak hata hesaplarının C, CF, RL ve J türev tipleri açısından karşılaştırılması.....	99
Tablo 5.2.7. Model 5.2.6 için CPU süresinin N , C, CF, RL ve J parametrelerine göre karşılaştırılması.....	99
Tablo 5.3.1. Problem 5.3.1 için \hat{R}_N hata üst sınırının $\omega(\lambda t)$, N ve $\alpha = 2$ değerlerine göre karşılaştırılması.....	106
Tablo 5.3.2. Problem 5.3.1 için \hat{R}_N hata üst sınırının $\omega(\lambda t)$, N ve $\alpha = 1.99$ değerlerine göre karşılaştırılması.....	106
Tablo 5.3.3. Problem 5.3.2'nin $\alpha = 1$ için metotların sonuçlarının karşılaştırılması.....	111
Tablo 5.3.4. Problem 5.3.4'ün farklı α için farklı metotlara göre mutlak hataların karşılaştırılması.....	114
Tablo 5.3.5. Problem 5.3.4 için $\omega(\lambda t)$, N ve $\alpha = 1.5$ değerlerine göre \hat{R}_N hata üst sınırının karşılaştırılması.....	114
Tablo 5.4.1. Model 5.4.1'in $\alpha_1 = 2$ değeri için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması.....	122
Tablo 5.4.2. Model 5.4.1'in $\alpha_1 = 2$ değeri için hata testlerinin ve CPU süresinin (sn.) karşılaştırılması.....	123
Tablo 5.4.3. Model 5.4.2'nin Durum 1 ve $\alpha_1 = 2$ için mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.....	124
Tablo 5.4.4. Model 5.4.2'nin Durum 2 ve $\alpha_1 = 2$ için mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.....	125
Tablo 5.4.5. Model 5.4.2'nin Durum 3 ve $\alpha_1 = 2$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması.....	125
Tablo 5.4.6. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.1$ ve $\alpha_0 = 2$ değerleri için sayısal sonuçların karşılaştırılması.....	130
Tablo 5.4.7. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.5$ ve $\alpha_0 = 2$ değerleri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.....	130
Tablo 5.4.8. Model 5.4.3'ün $\lambda = 1$ ve $\alpha_0 = 2$ değerleri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.....	130
Tablo 5.4.9. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.5$ değeri için hata hesaplamalarının ve CPU süresinin (sn.) karşılaştırılması.....	131
Tablo 5.4.10. Model 5.4.4'ün $n = 4$ ve $\alpha_1 = 2$ değerleri için hata hesaplamalarının ve CPU süresinin (sn.) karşılaştırılması.....	133
Tablo 5.4.11. Model 5.4.4'ün $\beta = 0.6$ için α_1 ve doğrusal olmama durumlarına göre hata üst sınırı değerlerinin karşılaştırılması.....	134
Tablo 5.4.12. Model 5.4.5 için L_∞ hatasının karşılaştırılması.....	134
Tablo 5.5.1. Model 5.5.2'nin $\alpha = 0.5$ için CPU süresinin ve mutlak hata hesabının C ve J kesirli türevlerine göre karşılaştırılması.....	143
Tablo 5.5.2. Model 5.5.3 için mutlak hata hesabının karşılaştırılması.....	145
Tablo 5.5.3. Model 5.5.3 için sunulan metodun CPU süresinin C, J ve N hesaplama limitine göre karşılaştırılması.....	145
Tablo 5.5.4. Model 5.5.6 için güncel ve var olan metotların bağıl hatalarının karşılaştırılması.....	149

Tablo 5.6.1. Örnek 5.6.1 için hata hesaplamalarının metotlara göre karşılaştırılması.....	159
Tablo 5.6.2. Örnek 5.6.2 için metodun yakınsaklığının β_0 ve N değerlerine göre karşılaştırılması.....	159
Tablo 5.6.3. Örnek 5.6.3'ün $\alpha_1 = 1.8$ değeri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.....	162
Tablo 5.6.4. Örnek 5.6.3 için CPU süresinin (sn.) α_1 ve N değerlerine göre karşılaştırılması.....	162
Tablo 5.6.5. Örnek 5.6.4'ün $\alpha_0 = 2.9$ ve $\beta_1 = 0.9$ değerleri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.....	163



TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e ve Sayın Doç. Dr. Ersin ASLAN'a, bilgi ve tecrübeleri ile lisansüstü öğrenim hayatımın zorlu aşamalarında manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum değerli hocam Sayın Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL'e, bugünlere yetişmemde emeği geçen tüm hocalarıma, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ
Manisa, 2019



ÖZET

Doktora Tezi

Dickson ve Graph-Matching Polinomlarının Temel Matris Özellikleri ve Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Ömür Kıvanç KÜRKCÜ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

II. Danışman: Doç. Dr. Ersin ASLAN

Bu tez, fen bilimleri ve mühendislik gibi alanlarda ortaya çıkan fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler ve onların kesirli ve kısmi diferansiyel, integral denklemler gibi bazı genel alt sınıflarının yaklaşık çözümlerini, Dickson ve graf-matching polinomlarına dayanan matris-sıralama metotları kullanılarak elde edilmesini amaçlamaktadır. Bu metotlar, polinomların matris bağıntısından, sıralama noktalarından ve temel matris denklemlerinden oluşmaktadır. Metotlar, denklemlerdeki fonksiyonların sıralama noktalarındaki matris açılımları alındıktan sonra genel matris sisteminde çözümlenmesini gerçekleştirmektedir. Böylece, metotlar direkt olarak çözüme hızlı ve etkili bir biçimde ulaşabilmektedir. Ayrıca, metotların verimliliğini test edebilmek için kalan hata analizi, kalan fonksiyonuna ve birinci-ikinci ortalama değer teoremlerine dayalı yakınsaklık analizleri oluşturulmuştur. Her iki metodun bilgisayar programı, çözümlenecek genel yapıdaki denklemlere özgü olarak yazılmıştır. Bunun sonucunda, yaklaşımlar hassas ve kesin şekilde sağlanarak karşılaştırmalar bilimsel düzeyde gerçekleştirilebilmiştir. Sayısal ve grafiksel sonuçlar tablo ve şekillerde incelenip yorumlanmıştır.

Sunulan iki metod sayesinde analitik olarak çözülmesi zor olan denklemlerin sayısal çözümleri kolayca elde edilmiş ve tutarlı olduğu, yakınsaklık analizi yöntemleri ile saptanmıştır. Sonuçların incelenmesiyle; metotların pratik, basit, güvenilir ve kesin olduğu ve ayrıca yapıları sayesinde, program kodlarının algoritmiksel olarak karmaşık yapıda olmadığı görülmüştür. Özellikle, genel formül altında üretilen çeşitli yeni problem yapılarının sayısal çözümleri bulunarak gelecekteki çalışmalarda da ele alınabilecektir. Son olarak, sunulan metotların, doğrusal olmayan kısmi integro-diferansiyel, doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemler gibi yapılara geniş ölçüde uygulanacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dickson ve graf-matching polinomları, sıralama noktaları, integro-diferansiyel denklemler, matris-sıralama metodu, yakınsaklık analizi

2019, 182 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

The Fundamental Matrix Properties of Dickson and Graph-Matching Polynomials and Their Applications to Functional Integro-Differential Equations

Ömür Kıvanç KÜRKCÜ

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ersin ASLAN

This thesis aims to obtain the approximate solutions of the functional integro-differential equations and their some sub-classes, such as fractional and partial differential, integral equations arising in science and engineering by using two matrix-collocation methods based on Dickson and matching polynomials. These methods are made up of the matrix relations of the polynomials, collocation points and a fundamental matrix equation. After taking the matrix expansions of the functions at the collocation points in the equations, the methods are performed with solving them in the collocated matrix-system and so they can reach the solutions immediately. Furthermore, residual error analysis (or estimation), convergence analysis techniques based on residual function and first-second mean value theorems, are constructed to test their efficiency. The computer programs for each method are devised in accordance with the equations of general type to be considered. Hence, by precisely and sensitively providing the approximations, the comparisons can be materialized at the scientific level. Numerical and graphical results are investigated and interpreted in tables and figures.

Thanks to these methods, the numerical solutions of the equations, which are hardly solved analytically, are easily obtained and their consistencies are determined by the convergence analysis techniques. With the investigation of the results, it is observed that the methods are practical, simple and precise; also their programs are algorithmically in non-complex structure. Especially, some new problems derived from the general equation formulations can be directly considered in the future studies. One can conclude that the presented methods are widely applied to the nonlinear partial integro-differential and nonlinear fractional partial differential equations.

Keywords: Dickson and matching polynomials, collocation points, integro-differential equations, matrix-collocation method, convergence analysis

2019, 182 pages

1. GİRİŞ

Günümüzde bilim, teknoloji ve sanayinin günden güne hızlı gelişmesiyle karşılaşılan doğal ve fiziksel olayların bilimsel olarak yorumlanması, matematiksel yapılarının oluşturulması ve davranışlarının incelenmesi zorlaşmaktadır. Karşılaşılan bu olayların modellenmesinde matematiksel yapılara başvurulmaktadır. En çok kullanılan matematiksel yapılardan ikisini diferansiyel ve integral denklemler oluşturmaktadır. Söz konusu gelişmelerle bu denklemlerin yapıları, kullanılmaya başlandığı ilk yıllarından itibaren birçok değişime ve gelişmeye devam etmektedir.

Diferansiyel ve integral denklemlerin kullanılmasındaki en büyük avantajlardan birisi, olayların fiziksel anlamdaki hareketini/davranışını direkt olarak aktarılabilmesidir. Bu yüzden, bu yapıdaki denklemler fen, mühendislik ve sosyal bilimlerde gibi birçok alanlarda uygulama alanına sahiptir. Örnek olarak, mekanikteki bir sarkacın hareketi; basit harmonik hareket olarak bilinip diferansiyel denklem yapısıyla [1] ve iyonosferik yükseliğin hesabı; Schlömilch'in integral denklemi ile modellenebilmektedir [2]. Diğer taraftan, karmaşık olayların günümüzdeki karşılaşılmadaki artış sebebiyle ele alınan matematiksel yapıları da gelişmeye başlamıştır. Buradan yola çıkarak, diferansiyel ve integral denklemlerin birleştirilmesi sonucunda integro-diferansiyel denklemler ortaya çıkmıştır. Bu denklemler, ele alınan modelin çeşidine, zaman değişkenine göre adi türevli veya uzay-zaman değişkenlerine göre kısmi türevli yapıya sahiptirler. Ayrıca, bahsedilen gelişimi takip edebilmek için adi veya kısmi mertebeden integro-diferansiyel denklemlerin; gecikmeli, fonksiyonel sınırlı, fonksiyonel gecikmeli, oransal gecikmeli, değişkene göre gecikmeli yapıya sahip formlarının kullanımı gün geçtikçe artmaktadır. Bunun sebebi, bilim ve teknolojinin hızla gelişmesiyle ele alınan olayların modellenmesi bu yapıların kullanılması ile mümkün olabilmektedir. Bu genel formdaki denklemler, alt yapısını oluşturan çeşitli denklemlere kolayca indirgenebileceğinden ve bünyesindeki diferansiyel-integral kısımlarının yapısı, modelleme amacına göre geliştirilebileceğinden geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu alanlardan bazıları; matematik, biyoloji, fizik, mühendislik, mekanik, ekonomi, elektrodinamik, elektromanyetik, viskoelastisite, ısı ve kütle transferi olarak bilinmektedir [3-17].

Öte yandan, günümüzde kesirli analizin; fizik, akışkan mekaniği, kütle ve ısı transferi [38,41,74-77,138,180] gibi birçok alanlarda kullanımının artmasına bağlı olarak kesirli mertebeden integro-diferansiyel denklem yapılarına dönüştürülen karmaşık olayların fiziksel yorumu elde edilebilmektedir. Bu yorumun elde edilmesi için çeşitli matematiksel yapıları analitik ve sayısal metotlar üretilmektedir. Ayrıca metotların, güncel gelişmeleri yakalayabilmesi için yapılarının da gözden geçirilmesi gerekmektedir. Önemle belirtmek gerekecektir ki çoğu zaman bahsedilen denklem yapılarını analitik olarak çözmek oldukça zor veya mümkün değildir. Bu yüzden, son yıllarda, dünyanın birçok yerinde bilim insanları ve araştırmacılar sayısal metotların geliştirilmesinde ve uygulanmasında büyük çaba harcamaktadır. Buradan yola çıkarak;

- Adi mertebeden integro-diferansiyel denklemler ve gecikmeli, integral, fark gibi çeşitli formlarının çözümü için;
Legendre [8], Chebyshev [9], Dickson [10-11], Taylor [12], Bernoulli [13], Bessel [14], Chelyshkov [15] ve Laguerre [16] polinomlarına dayalı matris-sıralama yöntemleri geliştirildi. Ayrıca, tersine yerine koyma [17], Adomian ayrıştırma [18], varyasyonel iterasyon [19], homotopi pertürbasyon [20], Runge–Kutta–Nyström tipindeki Fourier sıralama [21] metotları yer almaktadır.
- Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için;
Taylor [22,23] ve Bernstein [24] matris-sıralama, tümlev (quadrature) [25], diferansiyel dönüşüm [26], Fermat Tau [27], çoklu ölçekli sıralama [28] ve homotopi pertürbasyon [29] metotları güncel olarak sunulan yöntemler arasındadır. Özel olarak, Heris ve Javidi [30] periyodik ve anti-periyodik koşullu kesirli gecikmeli diferansiyel denklemler üzerinde çalışma gerçekleştirdiler. Rahimkhani ve ark. [31] Bernoulli dalgacık metodunu uygulayarak kesirli pantograf diferansiyel denklemlerin çözümlerini araştırdılar. Cermák ve ark. [32] sabit gecikmeli kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin asimptotik ve kararlılık davranışlarını incelediler.
- Kesirli kısmi mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için;
Chebyshev dalgacık matris [33], öngörücü-düzeltilici yaklaşım [34], yarı analitik [35], Galerkin sonlu eleman yaklaşımı [36], ayrık Adomian ayrıştırma [37],

standart olmayan sonlu fark [38] metotları yer almaktadır. Özel olarak, Rihan [39] bazı φ -metotlar yardımıyla gecikmeli parabolik ve zaman değişkenine göre kesirli kısmi diferansiyel denklemleri ele almıştır.

- Kesirli kısmi mertebeden integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için; Günümüzde, bu yapıdaki denklemler için geliştirilen metotlar az sayıdadır fakat gün geçtikçe geliştirilme sayıları artmaktadır. Bunlardan bazıları, çoğaltıcı çekirdekli Hilbert uzay [40], sonlu fark- θ [41] ve ardışık algoritmik [42] metotları yer almaktadır.

Yukarıda belirtilen matris-sıralama metotlarının, problemlerin çözümünün elde edilmesinde ve var olan metotlar ile karşılaştırmalarında oldukça etkin yöntem oluşturdukları gözlemlenmiştir. Bu metotların işlevi ve tutarlılığı, polinomların sağlamış olduğu tekrarlı bağlantılarında ortaya çıkan katsayıların değerine göre değişmektedir. Buradaki katsayıların cebirsel değeri de polinomun kurulu yapısına bağlıdır. Daha özel olarak, bünyesinde bir cebirsel parametre bulunduran polinomun matris-sıralama yönteminde kullanılması sayesinde üretilen çözümlerin tutarlılığını arttırabilmek mümkün olabilir mi sorusu yer almaktadır.

Genellikle kimya alanındaki hesaplamalarda kullanılan ve günden güne uygulama alanları artan çizge polinomları, üretildikleri çizge sınıflarının yapısına göre değişmektedir. Yani, basit ve bağlantılı bir çizge sınıfının yapısı; tepe ve ayrıt sayısına ve bu çizge elemanlarının arasındaki ilişkiye göre değişim göstererek oluşturduğu polinomun iyi kurulu olup olmasını etkilemektedir. Dolayısıyla, bir çizgenin yapısı ile oluşturduğu polinomu arasındaki ilişki, bir sayısal metoda entegre edilerek, ortaya çıkan sonuçların tutarlılığı, çizge yapısına göre değişebilir mi sorusu meydana gelmektedir.

Bu çalışmada, parametrelili Dickson polinomuna ve matching çizge polinomuna dayalı metotlar geliştirilerek yukarıda bahsedilen iki sorunun cevabı aranmıştır. Bu iki metot sayesinde, özellikle literatürde önemli yere sahip olan fakat sayısal çözümlerine az rastlanan ve genellikle fen ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan problemlerin, tek bir genel denklem yapısı altında toplayarak parametrelili Dickson ve graf-matching

polinom çözümlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu genel denklem yapısı sayesinde, metotların çözüm formları direkt olarak oluşturup, programlama ve hesaplama aşamalarında kolaylıkla sonuca ulaşılmaktadır. Ayrıca, metotların yakınsaklığı, geliştirilen yeni yakınsaklık analiz testleriyle ve parametrelili çözümlerin tutarlılığı da kontur çizgileri yardımıyla incelenmesi amaçlanmıştır. Hesaplamalar, yakınsaklık analiz testleri ve simülasyonlar, bilgisayar ortamındaki programları yazılarak gerçekleştirilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

2.1. Dickson Polinomu ve Temel Özellikleri

Bu bölümde, gelecek bölümlerde aktarılacak olan Dickson polinomuna dayalı matris-sıralama metodunun temelini oluşturan Dickson polinomu ve temel özelliklerinin hakkında bilgi verilecektir.

Dickson polinomları sonlu alanlar üzerinde L.E. Dickson tarafından 1897 yılında keşfedildi [43] ve daha sonra B. W. Brewer tarafından yeniden ele alındı [44]. Dickson polinomları bir ve ikinci tip olmak üzere ikiye ayrılmaktadır [43-45]. n . dereceden birinci tip ve reel α parametrelili $\{D_0(t, \alpha), D_1(t, \alpha), \dots, D_n(t, \alpha), \dots\}$ Dickson polinomu aşağıdaki gibi genel formülde tanımlanmaktadır [43-46]:

$$D_n(t, \alpha) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-p} \binom{n-p}{p} (-\alpha)^p t^{(n-2p)}, \quad n \geq 1, \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.1)$$

burada, ilk beş Dickson polinomu $D_0(t, \alpha) = 2$, $D_1(t, \alpha) = t$, $D_2(t, \alpha) = t^2 - 2\alpha$, $D_3(t, \alpha) = t^3 - 3t\alpha$ ve $D_4(t, \alpha) = t^4 - 3t^2\alpha + \alpha^2$ olarak tanımlıdır. Birinci tip Dickson polinomlarının temel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

(2.1) formülüne ek olarak $D_n(t, \alpha)$ polinomları rekürans bağıntısını

$$D_n(t, \alpha) = tD_{n-1}(t, \alpha) - \alpha D_{n-2}(t, \alpha), \quad n \geq 2.$$

olarak oluşturmaktadır [45].

$y = D_n(t, \alpha)$ polinomları aşağıdaki ikinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemin çözümlerini oluşturabilmektedir [45]:

$$(t^2 - 4\alpha)y'' + ty' - n^2y = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$D_n(t, \alpha)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(t, \alpha) z^n = \frac{2-tz}{1-tz+\alpha z^2},$$

şeklinde tanımlıdır [45].

Dickson polinomları içerdiği α parametresinin kombinatorik özelliklerinin yanı sıra bilinen birçok polinom ailelerine dönüşebilmektedir. Örneğin, $\alpha = -1$ için $L_n(t)$ Lucas (w -) ve $Q_n(t/2)$ Pell-Lucas polinomlarına; $\alpha = 1$ için birinci tip $2T_n(t/2)$ Chebyshev polinomlarına; $\alpha = 2$ için $FL_n(t/3)$ Fermat-Lucas polinomlarına dönüşebilmektedir [45,46].

$D_n(t, \alpha)$ polinomları, vektör notasyonları kullanılarak matrisler açısından aşağıdaki gibi ifade edilebilir [45]:

$$(D_{m+1}(t, \alpha), D_{m+2}(t, \alpha)) = (D_m(t, \alpha), D_{m+1}(t, \alpha)) \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & t \end{bmatrix},$$

ve

$$(D_{m+n}(t, \alpha), D_{m+n+1}(t, \alpha)) = (D_m(t, \alpha), D_{m+1}(t, \alpha)) \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & t \end{bmatrix}^n,$$

burada, $m=0$ için

$$(D_n, D_{n+1}) = (D_0, D_1) \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & t \end{bmatrix}^n,$$

$D_0 = 2$ ve $D_1 = t$ için,

$$D_n(t, \alpha) = (2, t) \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & t \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tanımlıdır.

Dickson polinomlarının çeşitli alanlarda uygulamaları ve özellikleri mevcuttur. Özel olarak, sonlu alanlar teorisinde, Kloosterman toplamlarda, permütasyon polinomlar yapılarında, cebir ve sayılar teorisinde sıkça yer almaktadır [47-52].

Ayrıca, 2^m 'li sonlu alan üzerinde, tek dereceli $D_n(t,1)$ Dickson polinomları kriptografik uygulamaları, modern bilgisayarlar yardımıyla yapılmıştır [49]. Bu polinomlar için daha detaylı bilgi Lidl ve ark. [45]'nin kitabında ve [43-52] çalışmalarında bulunabilir.

Dickson polinomlarının, matris-sıralama metodunda kullanılmasının sebebi; Dickson polinomları bünyesinde α parametresini barındırması sayesinde elde edilecek çözümlerin kararlılık davranışını inceleyebilmektir. Buradan yola çıkarak, ilk kez, parametrelili kalan fonksiyonuna dayanan yakınsaklık analizi, ortoeksponansiyel kalan fonksiyonun karakteristiğinin incelenmesi mümkün olabilecektir. Bu gelişimler sayesinde ve α parametresinin yardımıyla simülasyonlar gerçekleştirilebilecektir.

2.2. Çizge Teorisi ve Matching Polinomunun Temel Özellikleri

Bu bölümde, gelecek bölümlerde bahsedilecek olan matching polinomuna dayalı matris-sıralama metodunun temelini oluşturan çizge teorisi ve matching polinomu hakkında temel bilgi verilecektir.

Çizge teorisi, bünyesinde birçok çalışma alanı barındırmaktadır. Bunlardan bazıları; zedelenebilirlik teorisi, gerçek hayat problemlerin ve ağların modellenmesi, ulaşım, algoritmalar ve matematiksel kimya alanları olarak bilinmektedir [53-59]. Bir basit ve bağlantılı çizge (graf), tepe ve tepeleri birleştiren ayrıtlardan oluşmaktadır [57,58]. Temel çizge sınıfları; tam (K_n), yol (P_n), çevre (C_n), tekerlek ($W_{m,n}$) ve yıldız ($K_{m,n}$) olarak bilinmektedir [57,58]. Tam ve yol grafları bazı sınıfları için Şekil 2.2.1'de gösterilmiştir ve kolayca tahmin edileceği üzere K_1 sadece bir tek tepe içermektedir.

Bir ağ yapısından modellenen bir çizge, çoğu zaman dışarıdan gelecek müdahalelere açıktır ve burada bu çizgenin göstereceği dayanma gücü, modellenen çizgenin yapısına göre değişecektir. Örneğin, Şekil 2.2.1'deki tam çizge ve yol çizge yapısından oluşan modellere bir müdahale olduğunda, bu iki çizge sınıfının göstereceği dayanma gücü farklı olacaktır. Bu düşünceden yola çıkarak, bir çizgenin veya ağın, bir müdahale veya bozuklukla karşılaştıktan sonra göstermiş olduğu dayanma gücünün ölçülebilmesi “zedelenebilirlik” olarak tanımlanmaktadır [53-

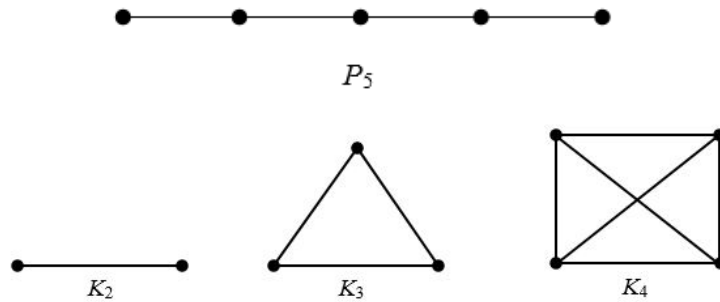
55,60]. Harary [57] tarafından sunulan bağlantılılık sayısı, bir çizgenin zedelenebilirliğini ölçen parametrelerden bir tanesidir.

Bu parametre, basit bir G çizgesini bağlantısız hale getirmek için çizgeden atılması gereken en az sayıdaki tepe sayısına bağlantılılık sayısı olarak tanımlanmıştır [57]. Matematiksel olarak, bir basit G çizgesinin, $\kappa(G)$ bağlantılılık sayısı

$$\kappa(G) = \min \{|S| : S \subseteq V(G)\},$$

formülü ile ifade edilebilir ve burada, $V(G)$, G 'nin tepe(ler) kümesi ve $|S|$, G 'nin tepe kesim kümesidir [57]. Benzer olarak, ayrıt bağlantılılık sayısı da tanımlanmıştır [57].

Şekil 2.2.1 için gösterilen çizge sınıflarının bağlantılılık sayıları; $\kappa(P_n) = 1$ ve $\kappa(K_n) = n - 1$ olarak elde edilmiştir [57]. $\kappa(K_n)$ değeri, $\kappa(P_n)$ değerinden oldukça büyük ve n değerine bağlıdır. Dolayısıyla, tam çizge yapısı, yol çizge yapısına göre daha sağlam ve güvenilir yapıya sahip olduğu bu parametre yardımıyla görülmektedir. Çünkü tam çizgenin tüm tepeleri birbirleriyle komşu olup, herhangi bir müdahale veya hasar ile karşılaştığında, bağlantılı yapısını kuvvetli bir biçimde sürdürebilecektir. Ayrıca, ayrıt saçılım sayısı [53] ve ayrıt kopma derecesi [54] gibi zedelenebilirlik parametreleri bahsedilen sonucu da desteklemektedir.



Şekil 2.2.1. Yol (P_n) ve tam (K_n) çizge sınıfları.

2.2.1. Matching Polinomu

1972 yılında, Heilman ve Lieb [61] monomer-dimer sistemlerin teorsinde kullandıkları bir polinom ileri sürdüler, fakat çalışmalarında bu polinom için özel bir

isim belirlemediler. 1979 yılına gelindiğinde, Farrell [62], bu polinomun adını “matching polinomu” olarak adlandırdı. Ayrıca, bu polinom günümüze gelene kadar birçok isimle kullanıldı. Örneğin, acyclic [63] ve reference [64] isimleri de literatürde yer almaktadır.

G_n çizgesi, n sayıdaki tepeye ve m sayıdaki ayrıta sahip olsun. Bu takdirde, G_n çizgesinin matching polinomu genel olarak (bkz. [61-66])

$$M_n(G_n, t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k p(G_n, k) t^{n-2k},$$

şeklindeki açık formülü ile tanımlıdır. Burada, $p(G_n, k)$, k 'lı eşleme sayısıdır ve ayrıca herhangi basit bir çizge için $k=0$ değerinde $p(G, 0) = 1$ eşleme sayısı olarak alınır [61-66].

1988'de Hosoya [59] kimya alanında yer alan matching ve bazı diğer polinomların matematiksel özelliklerini ve fiziksel-kimyasal yorumlarını oluşturdu. Aihara [64] tek dönüşlü konjuge edilmiş sistemler için reference (matching) polinomunu kullandı. Godsil ve Gutman [67] matching polinomunun özelliklerini ve bu polinomun, karakteristik (characteristic) polinom ile arasındaki bağıntıyı oluşturdu. Yan ve Yeh [68] altbölüm halindeki çizgelerin matching polinomu üzerine çalışma gerçekleştirdi. Araujo ve ark. [69] matching polinomu ile hipergeometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı bulmak için matching polinomunu genelleştirdiler. Babic ve ark. [70] poli-çizgelerin matching polinomunu elde etmek için bir genel metot sundular. Bian ve ark. [71] orto- ve üst-zincirlerin matching polinomu için rüküranslarını elde etti.

Matching polinomunun bazı temel cebirsel özellikleri [65]:

- $p(G, 1) = m$,
- $p(G, 2) = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2)$,

burada, d_i , G çizgesindeki v_i tepelerinin derecesidir.

- $k > n/2 \Rightarrow p(G, k) = 0,$
- $p(G, k) = 0 \Rightarrow p(G, k+1) = 0,$

olarak verilmiştir.

Diğer taraftan, matching ve independence polinomları arasında bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntı, bir G çizgesinin independence polinomunun, G 'nin line çizgesinin matching polinomuna eşit olarak ortaya çıkmaktadır [72]. Buna ek olarak, matching ve chromatic polinomlarının arasındaki bağıntı Farrell ve ark. [73] tarafından ileri sürülmüştür.

Bazı polinomlar, özel çizge sınıflarının matching polinomu ile elde edilebilir. Örneğin, K_n tam çizge sınıfının matching polinomu, modifiye edilmiş Hermite polinomuna eşittir [63,65]. Bu eşitliği, Gutman [63,65]'nin çalışmasından yararlanarak daha detaylı göstermek gerekirse; tanım gereği

$$M_0(K_0, t) = 1, M_1(K_1, t) = t,$$

mevcuttur ve K_2, K_3, K_4 çizgeleri için devam edilirse

$$M_2(K_2, t) = \sum_{k=0}^1 (-1)^k p(K_2, k) t^{2-2k} \begin{cases} k=0 \Rightarrow p(K_2, 0) = 1 \\ k=1 \Rightarrow p(K_2, 1) = m = 1 \end{cases}$$

$$= (-1)^0 \cdot 1 \cdot t^{2-0} + (-1)^1 \cdot 1 \cdot t^{2-2} = t^2 - 1,$$

$$M_3(K_3, t) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k p(K_3, k) t^{3-2k} \begin{cases} k=0 \Rightarrow p(K_3, 0) = 1 \\ k=1 \Rightarrow p(K_3, 1) = 3 \end{cases}$$

$$= (-1)^0 \cdot 1 \cdot t^{3-0} + (-1)^1 \cdot 3 \cdot t^{3-2} = t^3 - 3t,$$

$$M_4(K_4, t) = \sum_{k=0}^6 (-1)^k p(K_4, k) t^{4-2k} \begin{cases} k=0 \Rightarrow p(K_4, 0) = 1 \\ k=1 \Rightarrow p(K_4, 1) = 6 \\ k=2 \Rightarrow p(K_4, 2) = 3 \end{cases}$$

$$= (-1)^0 \cdot 1 \cdot t^{4-0} + (-1)^1 \cdot 6 \cdot t^{4-2} + (-1)^2 \cdot 3 \cdot t^{4-4} = t^4 - 6t^2 + 3,$$

burada, $p(K_4, 2) = \frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{1}{2}(3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2) = 3$ 'tür.

Bu işlemlere devam edildiğinde, K_n tam çizge sınıfının matching polinomunun genelleştirilmiş formülü (bkz. [63,65])

$$M_n(K_n, t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k} t^{n-2k}, \quad (2.2)$$

olarak elde edilir ve bu formülün yineleme bağıntısı (bkz. [63,65])

$$M_n(K_n, t) = tM_n(K_{n-1}, t) - (n-1)M_n(K_{n-2}, t),$$

şeklinde gerçekleşir ve bu formüller, modifiye edilmiş Hermite polinomuna eşittir [63,65]. Benzer şekilde, P_n yol çizge sınıfının matching polinomu (bkz. [66])

$$M_n(P_n, t) = t^{n-2}(t^2 - n + 1),$$

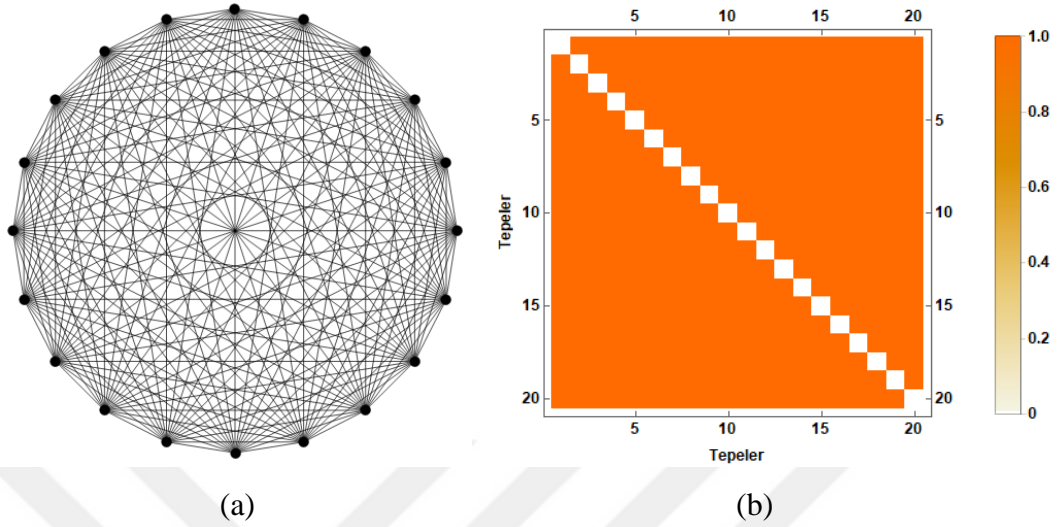
olarak veya

$$M_n(P_n, t) = tM_{n-1}(P_{n-1}, t) - M_{n-2}(P_{n-2}, t),$$

yineleme bağıntısı olarak tanımlanabilir. Burada, ilk dört polinom; $M_0(P_0, t) = 1$, $M_1(P_1, t) = t$, $M_2(P_2, t) = t^2 - 1$ ve $M_3(P_3, t) = t^3 - 2t$ olarak mevcuttur. Diğer çizge sınıfları için matching polinomu, Weisstein [66]'in çalışmasında da bulunabilir.

Matris-sıralama yönteminde, tam ve yol çizge sınıflarının matching polinomu kullanılacaktır. Özellikle, tam çizge sınıfının alınmasının sebebi; bu çizge sınıfının Bölüm 2.2.'de aktarılan zedelenebilirlik anlamındaki dayanıklı yapısı yani bağlantılılık durumunu müdahalelere rağmen sürdürebilmesidir. Tam çizgenin bu kararlı yapısı, bir diğer deyişle tüm tepelerinin birbirine komşu olmasıyla eşleme işlemlerinin tutarlı sayılar elde etmesine yol açmıştır. Aynı zamanda, tepe sayısı arttıkça bu tutarlılık bozulmadan devam edecektir. Şekil 2.2.2'de K_{20} tam çizgesinin dayanıklı yapısı kendi şeklinden (a) ve ayrıca komşuluk matrisinin grafiğinden (b) görülmektedir. Burada, (b) grafiğinde taralı alan, tepelerin birbirlerine göre komşuluk

değerlerini vermektedir ve beyaz köşegenel alan, tam çizgenin döngü (loop) olmayan yani basit bir çizge olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.2.2. K_{20} tam çizgesi (a) ve onun komşuluk matrisinin grafiği (b).

2.3. Kesirli Analizin Oluşumu ve Temel Özellikleri

Bu bölümde, kesirli mertebeden diferansiyel ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yapısını oluşturan kesirli analiz hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca, kesirli türev tanımları, Dickson ve matching polinomlarına dayalı matris-sıralama metotlarının alt yapısını oluşturacaktır.

$f(t)$ fonksiyonu $I = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon, D diferansiyel operatör ve $\Gamma(n)$ fonksiyonu Euler gamma fonksiyonu olsun. Bu takdirde, kesirli analizin temelini oluşturan aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 2.3.1. [74-76] Farz edelim ki $n > 0$ ve $t > a$ ($n, t \in \mathbb{R}$) olsun. Bu takdirde, $f(t)$ fonksiyonunun kesirli integrali

$$J_a^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds,$$

formülü ile elde edilir ve burada, J_a^n kesirli integral operatörüdür.

Tanım 2.3.2. [74-76] Farz edelim ki $t > a$ ve $n, t \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde, n . mertebeden kesirli Riemann-Liouville türevi

$${}^{RL}D_a^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lceil n \rceil - n)} D^{\lceil n \rceil} \int_a^t (t-s)^{\lceil n \rceil - n - 1} f(s) ds, & \lceil n \rceil - 1 < n < \lceil n \rceil, \\ f^{(n)}(t), & n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

olarak tanımlanır.

Riemann-Liouville türevi, ilk kesirli türev tanımlarından birisi olmasının yanında formülünde, reel sabitin türevi alınırken sorun meydana gelmektedir. Örneğin, 1'in 1/2'nci mertebeden Riemann-Liouville türevi $1/\sqrt{t\pi}$ olarak hesaplanmaktadır, yani kısaca ${}^{RL}D_0^{1/2}(1) = 1/\sqrt{t\pi}$ 'dir. Ancak temel analize göre reel bir sabitin türevi sıfırdır. Buradaki sorunu düzeltmek için Caputo [77] aşağıdaki kesirli türev formülünü oluşturmuştur:

Tanım 2.3.3. [77] Farz edelim ki $t > a$ ve $n, t \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde, n . mertebeden kesirli Caputo türevi

$${}_t^c D_a^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lceil n \rceil - n)} \int_a^t (t-s)^{\lceil n \rceil - n - 1} f^{(\lceil n \rceil)}(s) ds, & \lceil n \rceil - 1 < n < \lceil n \rceil, \\ f^{(n)}(t), & n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca, son yıllarda, Jumarie [78], Riemann-Liouville türevindeki sorunu düzeltmek için yapısında değişiklik gerçekleştirdi ve Ghosh ve ark. [79], Jumarie'nin oluşturduğu formülü genelleştirdiler. Caputo ve Fabrizio [80] bölgesel ve tekil olmayan yeni bir kesirli türev formülünü oluşturdular.

Tanım 2.3.4. [78] Farz edelim ki $t > 0$ ($t \in \mathbb{R}$) olsun. Bu takdirde, n . mertebeden kesirli Jumarie türevi

$${}^J D_0^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} D^1 \int_0^t (t-s)^{-n} (f(s) - f(0)) ds, \quad 0 < n < 1,$$

olarak tanımlanır. Ghosh ve ark. [79] bu formülün genelleştirilmiş halini

$${}^J D_a^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-n)} D^1 \int_a^t (t-s)^{-n} (f(s) - f(a)) ds, & 0 < n < 1 \\ D^m ({}^J D_a^{n-m} f(t)), & m \geq 1 \text{ \& } m \leq n < m+1 \end{cases},$$

olarak sundular.

Tanım 2.3.5. [80-81] Farz edelim ki $t \geq 0$ olsun. Bu takdirde, n . mertebeden kesirli Caputo-Fabrizio türevi

$${}^{CF} D_0^n f(t) = \frac{1}{1-n} \int_0^t \exp\left(-\frac{n(t-s)}{1-n}\right) f'(s) ds, \quad 0 < n < 1,$$

tanımlıdır.

Özel olarak, $m \geq 1$ ve $n \in [0,1]$ olduğunda ${}^{CF} D_0^{m+n} f(t)$ hesabı

$${}^{CF} D_0^{n+m} f(t) = {}^{CF} D_0^n ({}^C D_0^m f(t)),$$

olarak elde edilir [80-82].

Yukarıdaki tanımlar, tek değişkenli fonksiyonun t (zaman) değişkenine göre oluşturulmuştur. Benzer şekilde, çift değerli fonksiyonun t ve x (uzay) değişkenine göre tanımlanabilirler.

Tanım 2.3.2-2.3.5'de belirtilen kesirli türev operatörleri, Dickson ve matching polinomlarına dayalı matris-sıralama metotlarında kullanılıp, elde edilen sonuçlar bu operatörlere göre karşılaştırılacaktır.

3. DICKSON VE MATCHING POLİNOMLARININ TEMEL MATRİS ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Dickson ve matching polinomlarının temel matris özellikleri ve matris-sıralama metotlarının bu polinomları içeren genel çözüm formları oluşturulacaktır.

3.1. Dickson Polinomunun Temel Matris Özellikleri

(2.1) denklemindeki $D(t, \alpha)$ Dickson polinomunun matris bağıntısı

$$D(t, \alpha) = X(t)S(\alpha), \quad (3.1)$$

olarak yazılır ve burada,

$$D(t, \alpha) = [D_0(t, \alpha) \quad D_1(t, \alpha) \quad \cdots \quad D_N(t, \alpha)], \quad X(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \cdots \quad t^N],$$

ve N 'nin çift değerine göre

$$S^T(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} (-\alpha)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} (-\alpha)^1 & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} (-\alpha)^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} (-\alpha)^1 & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} (-\alpha)^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N}{2} \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} (-\alpha)^{\frac{N}{2}} & 0 & \frac{N}{\frac{N}{2}+1} \binom{\frac{N}{2}+1}{\frac{N}{2}-1} (-\alpha)^{\frac{N}{2}-1} & 0 & \cdots & \frac{N}{N} \binom{N}{0} (-\alpha)^0 \end{bmatrix},$$

matrisi oluşturulur ve tek değeri için

$$S^T(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} (-\alpha)^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} (-\alpha)^1 & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} (-\alpha)^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} (-\alpha)^1 & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} (-\alpha)^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-\alpha)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} & 0 & \frac{N}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} \binom{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} (-\alpha)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} & \dots & \frac{N}{N} \binom{N}{0} (-\alpha)^0 \end{bmatrix},$$

matrisi oluşturulmaktadır.

Ele alınan problemlerin veya denklemlerin Dickson polinomunu içeren genel çözüm formu

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N y_n D_n(t, \alpha), \quad (3.2)$$

olarak verilir. Burada y_n 'ler bilinmeyen Dickson polinomunun katsayılarıdır ve N çözümün derecesi olup metodun hesaplama limitini göstermektedir. Şimdi, (3.1) bağıntısını kullanarak, (3.2) Dickson polinom çözümünün matris bağıntısı

$$y(t) \cong y_N(t) = \mathbf{D}(t, \alpha) \mathbf{Y} \Rightarrow y(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}, \quad (3.3)$$

oluşturulmaktadır. Burada,

$$\mathbf{Y} = [y_0 \quad y_1 \quad \dots \quad y_N]^T,$$

katsayılar matrisidir.

(3.3) çözüm bağıntısının k . mertebeden adi türevini

$$y^{(k)}(t) = \mathbf{D}^{(k)}(t, \alpha) \mathbf{Y},$$

olarak ya da

$$y^{(k)}(t) = X^{(k)}(t)S(\alpha)Y \Rightarrow y^{(k)}(t) = X(t)B^k S(\alpha)Y, \quad k=0,1,\dots, \quad (3.4)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

olarak türevin geçiş matrisi mevcuttur.

Bu bölümdeki (3.2)-(3.4) matris bağıntıları, 4'ncü ana bölümdeki Dickson matris-sıralama metodunun:

- Bölüm 4.1'de diferansiyel ve integral denklem yapısındaki model problemlere,
- Bölüm 4.2'de en genel yapıdaki fonksiyonel gecikmeli integro-diferansiyel denklemlere,
- Bölüm 4.3'te bazı kesirli model diferansiyel denklemlere, uygulanmasında temel matris bağıntılarını oluşturmaktadır.

3.2. Matching Polinomunun Temel Matris Özellikleri

(2.2) denklemindeki tam çizgesinden üretilen $M(K_n, t)$ matching polinomunun matris bağıntısı

$$M_n(K_n, t) = X(t)K, \quad (3.5)$$

olarak yazılır ve burada

$$M_n(K_n, t) = [M_0(K_0, t) \quad M_1(K_1, t) \quad \dots \quad M_N(K_N, t)], \quad X(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N],$$

ve

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
(-1)^1 \frac{2!}{2!1!} \binom{2}{2} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 \\
0 & (-1)^1 \frac{2!}{2!1!} \binom{3}{2} & 0 & \binom{3}{0} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{\frac{N}{2}} \frac{N!}{2^{\frac{N}{2}} \frac{N-1}{2}!} \binom{N}{N} & 0 & (-1)^{\frac{N}{2}-1} \frac{(N-1)!}{2^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{N}{2}-1\right)!} \binom{N}{N-2} & 0 & \dots & \binom{N}{0}_{N_f} \\
0 & (-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{\left(2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\right)! \binom{N}{2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & (-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor-1} \frac{\left(2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 2\right)! \binom{N}{2 \lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 2}}{2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor-1} \left(\frac{N}{2}\right)!} & \dots & \binom{N}{0}_{N_f}
\end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur.

Ele alınan problemlerin veya denklemlerin, tam çizge ile üretilmiş matching polinom yapısındaki genel çözüm formu

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N y_n M_n(K_n, t), \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır ve burada y_n 'ler bilinmeyen matching polinomunun katsayılarıdır. (3.5) matris bağıntısını kullanarak, (3.6) matching polinom çözümünün matris bağıntısı

$$y(t) \cong y_N(t) = \mathbf{M}_n(K_n, t) \mathbf{Y} \Rightarrow y(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad (3.7)$$

olarak ifade edilebilir ve burada \mathbf{Y} matrisi, (3.3) bağıntısında yer alan matris ile aynı yapıya sahiptir.

(3.7) çözüm formunun k . mertebeden adi türevinin matris bağıntısı

$$y^{(k)}(t) = \mathbf{X}^{(k)}(t) \mathbf{K} \mathbf{Y} \Rightarrow y^{(k)}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{B}^k \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

ve burada \mathbf{B} matrisi, (3.4) bağıntısında yer alan matris ile aynı yapıya sahiptir.

Belirtmek gerekicektir ki yol çizgeye (P_n) dayanan matching polinom çözümünün ve türevinin matris bağıntıları; (3.7) ve (3.8) matris bağıntılarındaki gibi benzer şekilde elde edilebilir.

(3.7) ve (3.8) matris bağıntıları yardımıyla, kısmi integro-diferansiyel denklemlerin K_r tam çizgesinin matching polinomu ile üretilen genel çözüm formu

$$u(x,t) \cong u_N(x,t) = \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^N y_{pr} M_{pr}(K_r, x) M_{pr}(K_r, t), \quad (3.9)$$

yapısına sahiptir. Burada y_{pr} 'ler bilinmeyen matching polinom katsayılarıdır. (3.5) matris bağıntısı kullanarak, (3.9) çözüm formunun matris yapısı

$$u(x,t) \cong u_N(x,t) = \mathbf{M}_n(K_n, x) \overline{\mathbf{M}_n(K_n, t)} \mathbf{Y} = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}(\overline{\mathbf{X}(t)}) (\overline{\mathbf{K}}) \mathbf{Y}, \quad (3.10)$$

olarak oluşturulabilir. Burada,

$$\overline{\mathbf{X}(t)} = \text{diag}[\mathbf{X}(t)], \quad \overline{\mathbf{K}} = \text{diag}[\mathbf{K}],$$

$$\mathbf{Y} = [y_{00} \quad y_{01} \quad \cdots \quad y_{0N} \quad y_{10} \quad \cdots \quad y_{1N} \quad y_{N0} \quad \cdots \quad y_{NN}]^T,$$

öyle ki $\text{diag}[\mathbf{K}]$ ifadesi, \mathbf{K} matrisinin köşegen matris olarak yazılmasını ifade etmektedir.

Dickson ve matching polinomlarına dayalı matris-sıralama yöntemlerinde kullanılacak olan standart (SSN) ve Chebyshev-Lobatto (CLSN) sıralama noktaları sırasıyla

$$t_i = a + \left(\frac{b-a}{N}\right)i \quad \text{ve} \quad t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır ve burada $i=0,1,\dots,N$ ve $t \in [a,b]$ 'dir. Bu iki sıralama noktalarının metotlardaki kullanımı, ele alınan problemin cinsine göre (tekil, değişken katsayılı

olması gibi) belirlenebilmektedir. Örneğin, CLSN, tekil diferansiyel denklemlerin, sunulan metotlar ile çözümünde etkin rol oynamaktadır.

Bu bölümdeki (3.6)-(3.10) matris bağıntıları, 5'nci ana bölümdeki matching matris-sıralama metodunun:

- Bölüm 5.1'de birleştirilmiş çoklu gecikmeli fonksiyonel nötr diferansiyel denklemlere,
- Bölüm 5.2'de çoklu gecikmeli ve değişken katsayılı kesirli diferansiyel denklemlere,
- Bölüm 5.3'te üçüncü dereceden doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlere,
- Bölüm 5.4'de uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan beşinci dereceden doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlere,
- Bölüm 5.5'de çoklu gecikmeli uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlere,
- Bölüm 5.6'da uzay-zaman kesirli kısmi integro-diferansiyel-gecikmeli denklemlere,

uygulanmasında temel matris bağıntılarını oluşturmaktadır.

Belirtmek gerekir ki Bölüm 4 ve 5'deki Dickson ve matching polinomlarına dayalı matris-sıralama metotları için her bir problemin çözümüne özel genel bir bilgisayar programı Mathematica yazılımında oluşturulmuştur. Karşılaştırmalarda elde edilen CPU süresi; Mathematica'nın Timing modülü kullanılarak, programın işlem süresi hesaplanmıştır.

4. DICKSON MATRİS-SIRALAMA METODUNUN UYGULAMASI

4.1. Fen Bilimlerinde Ortaya Çıkan Bazı Model Problemlerin Çözümü

Bu bölümde, fen bilimlerinde ortaya çıkan bazı problemlerin Dickson matris-sıralama metodu ile çözümlerini elde edilecektir. Ele alınan problemler, aşağıdaki kapalı formda incelenecektir:

$$L[y(t)] + N[y(t)] = g(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (4.1)$$

burada,

$$L[y(t)] = \sum_{r=0}^m P_r(t) y^{(r)}(t) \text{ ve } N[y(t)] = \sum_{s=1}^2 \sum_{v=0}^2 Q_{sv}(t) y^s(t) y^{(v)}(t), \quad s = v \neq 2,$$

şeklindedir ve karışık koşullar

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) = \eta_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.2)$$

formunda olup burada, m sayısı, (4.1) denkleminin mertebesini belirlemektedir. (4.1) denkleminin Dickson polinom çözümü, (3.2) formunda araştırılacaktır.

Kürkçü ve ark. [10,11] tarafından $y(t)$, $y^2(t)$ ve $y^3(t)$ fonksiyonların, Dickson polinomuna dayanan matris bağıntıları daha önceden oluşturulmuştu. Bu matris bağıntılarıyla beraber yeni matris bağıntıları oluşturulsun.

İlk olarak, (3.11) sıralama noktalarını ve (3.4) matris bağıntısını kullanarak, (4.1) denkleminin, $L[y(t)]$ doğrusal kısmı için matris bağıntısı oluşturulsun:

$$\left[L[y(t_i)] \right]_{(N+1) \times 1} = \sum_{r=0}^m P_r X B^r S(\alpha) Y, \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlıdır ve burada,

$$\begin{aligned} \left[L[y(t_i)] \right]_{(N+1) \times 1} &= \begin{bmatrix} L[y(t_0)] \\ L[y(t_1)] \\ \vdots \\ L[y(t_N)] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} P_r(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_r(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_r(t_N) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_0) \\ \mathbf{X}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^N \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_N & \cdots & t_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{B}^0: \text{birim matris}). \end{aligned}$$

Şimdi, (4.1) denkleminin, $N[y(t)]$ doğrusal olmayan kısmı için matris bağıntıları oluşturulsun:

$$\left[Q_{10}(t_i) y^2(t_i) \right]_{(N+1) \times 1} = Q_{10} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha) (\bar{\mathbf{X}}) \bar{\mathbf{S}}(\alpha) \bar{\mathbf{Y}}, \quad (4.4)$$

burada Q_{sv} ($s = v \neq 2$) matrisi, \mathbf{P}_r matrisinin yapısıyla aynıdır ve

$$\bar{\mathbf{X}} = \text{diag} \left[\mathbf{X}(t_i) \right]_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{S}}(\alpha) = \text{diag} \left[\mathbf{S}(\alpha) \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1},$$

şeklindedir.

$$\left[Q_{11}(t_i) y(t_i) y'(t_i) \right]_{(N+1) \times 1} = Q_{11} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha) (\bar{\mathbf{X}}) (\bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{S}}(\alpha) \bar{\mathbf{Y}}, \quad (4.5)$$

burada,

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{diag} \left[\mathbf{B} \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

şeklindedir.

$$\left[\mathcal{Q}_{12}(t_i) y(t_i) y''(t_i) \right]_{(N+1) \times 1} = \mathcal{Q}_{12} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha) (\bar{\mathbf{X}}) (\bar{\mathbf{B}}^2) \bar{\mathbf{S}}(\alpha) \bar{\mathbf{Y}}, \quad (4.6)$$

burada,

$$\bar{\mathbf{B}}^2 = \text{diag} \left[\mathbf{B}^2 \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

şeklindedir.

$$\left[\mathcal{Q}_{20}(t_i) y^3(t_i) \right]_{(N+1) \times 1} = \mathcal{Q}_{20} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha) (\bar{\mathbf{X}}) \bar{\mathbf{S}}(\alpha) (\bar{\bar{\mathbf{X}}}) \bar{\bar{\mathbf{S}}(\alpha)} \bar{\bar{\mathbf{Y}}}, \quad (4.7)$$

burada,

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}} = \text{diag} \left[(\bar{\mathbf{X}}) \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}, \quad \bar{\bar{\mathbf{S}}}(\alpha) = \text{diag} \left[\bar{\mathbf{S}}(\alpha) \right]_{(N+1)^3 \times (N+1)^3} \quad \text{ve} \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = \begin{bmatrix} y_0 \bar{\mathbf{Y}} \\ y_1 \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ y_N \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times 1},$$

şeklindedir.

$$\left[\mathcal{Q}_{21}(t_i) y^2(t_i) y'(t_i) \right]_{(N+1) \times 1} = \mathcal{Q}_{21} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha) (\bar{\mathbf{X}}) \bar{\mathbf{S}}(\alpha) (\bar{\bar{\mathbf{X}}}') \bar{\bar{\mathbf{S}}}(\alpha) \bar{\bar{\mathbf{Y}}}, \quad (4.8)$$

burada,

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}}' = \text{diag} \left[\overline{\mathbf{X} \mathbf{B}} \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}, \quad \overline{\mathbf{X} \mathbf{B}} = \text{diag} \left[\mathbf{X}(t_i) \mathbf{B} \right]_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

şeklindedir.

Şimdi, (3.11) sıralama noktaları ve (4.3)-(4.8) matris bağıntıları yardımıyla çözüm metodunu oluşturulsun. (4.3) denklemini kullanarak, (4.1) denkleminin doğrusal kısmının genel matris bağıntısı

$$\left[L[y(t_i)] \right]_{(N+1) \times 1} = \underbrace{\sum_{r=0}^m \mathbf{P}_r \mathbf{X} \mathbf{B}^r \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}}_{\mathbf{W}},$$

şeklindedir ve benzer şekilde (4.4)-(4.8) matris bağıntılarını kullanarak, (4.1) denkleminin doğrusal olmayan kısmının genel matris bağıntısı

$$\left[N[y(t_i)] \right]_{(N+1) \times 1} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}},$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \left[N[y(t_i)] \right]_{(N+1) \times 1} &= \left[N[y(t_0)] \quad N[y(t_1)] \quad \cdots \quad N[y(t_N)] \right]^T, \\ \mathbf{V} &= \left\{ \mathbf{Q}_{10} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha)(\bar{\mathbf{X}}) + \mathbf{Q}_{11} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha)(\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{B}}) + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha)(\bar{\mathbf{X}})(\bar{\mathbf{B}}^2) \right\} \bar{\mathbf{S}}(\alpha), \\ \mathbf{Z} &= \left\{ \mathbf{Q}_{20} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha)(\bar{\mathbf{X}}) \bar{\mathbf{S}}(\alpha)(\bar{\bar{\mathbf{X}}}) + \mathbf{Q}_{21} \mathbf{X} \mathbf{S}(\alpha)(\bar{\mathbf{X}}) \bar{\mathbf{S}}(\alpha)(\bar{\bar{\mathbf{X}}}') \right\} \bar{\bar{\mathbf{S}}}(\alpha), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, temel matris denklemi

$$\mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = \mathbf{G},$$

ya da kısaca

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{Z} : \mathbf{G}], \quad (4.9)$$

olarak yazılabilir ve burada,

$$\mathbf{G} = \left[g(t_0) \quad g(t_1) \quad \cdots \quad g(t_N) \right]^T,$$

şeklindedir. Diğer taraftan, (4.2) karışık koşulların matris bağıntısı, (4.3) matris bağıntısını kullanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = \eta_i \Rightarrow [\mathbf{U}_i ; \eta_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.10)$$

burada,

$$\mathbf{U}_i = \left[u_{i0} \quad u_{i1} \quad \cdots \quad u_{iN} \right] = \sum_{k=0}^{m-1} \left[a_{ik} \mathbf{X}(a) + b_{ik} \mathbf{X}(b) \right] \mathbf{B}^k \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y},$$

yapısındadır. (4.9) formundaki sistemden m satır sayısı çıkartıldıktan sonra (4.10) koşul matris matrisi (4.9) formunda yerine yazılır. Böylece, aşağıdaki arttırılmış matris sistemi elde edilir:

$$[\tilde{W}; \tilde{V}; \tilde{Z} : \tilde{G}].$$

Bu arttırılmış matris sistemi çözüldüğünde, Y Dickson katsayılar matrisi elde edilir ve bu katsayılar, (3.2) çözüm formunda yerine yazıldığında Dickson polinom çözümüne ulaşılır.

4.1.1. Kalan Fonksiyon ile Yakınsaklık Analizi

Ayati ve Biazar [83] çalışmalarında homotopi pertürbasyon metodu için Banach uzayında yakınsaklık analizi gerçekleştirdiler. Bu çalışma doğrultusunda, Dickson polinom çözümünün tutarlılığını, kalan fonksiyonu yardımıyla Banach uzayında inceleyelim. Ayrıca, bazı yazarlar tarafından yaklaşık çözümleri geliştirmek için kalan fonksiyona dayanan hata analiz yöntemleri kullanıldı [10,11,17,84-86]. Kalan fonksiyonu farklı N ve α değerleri için ayırt edici bir özellik göstereceğinden, Dickson polinom çözümlerin davranışlarını inceleyebiliriz. $R_{N,\alpha}(t)$ kalan fonksiyonu, $y_N(t)$ çözümü, (4.1) denkleminde yerine yazıldığında, yani

$$R_{N,\alpha}(t) = L[y_N(t)] + N[y_N(t)] - g(t),$$

olarak elde edilir. Burada $R_{N,\alpha}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi $[a,b]$ veya (a,b) aralıkları için sırasıyla

$$R_{N,\alpha}(t): [a,b] \rightarrow \mathbb{R},$$

veya

$$R_{N,\alpha}(t): [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, (\varepsilon \text{ yeterince küçük reel sayı}),$$

olarak tanımlanabilir. Ayrıca, $R_{N,\alpha}(t)$, Taylor açılım formunda yazılabilir:

$$R_{N,\alpha}(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_N t^N = \sum_{n=0}^N d_n t^n .$$

Şimdi, yukarıdaki bilgileri kullanarak, yakınsaklık analizi için gerekli teoremi oluşturalım.

Teorem 4.1.1 B bir Banach uzayı göstereyin. $\{R_{N,\alpha}(t)\}_{N=2}^{\infty}$ kalan fonksiyon dizisi bu uzayda yakınsak olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|R_{N+1,\alpha}(t)\| \leq \mu_N \|R_{N,\alpha}(t)\| , \quad (4.11)$$

öyle ki $0 < \mu_N < 1$ ve μ_N , B 'de bir sabittir.

İspat. Göstermemiz gerekir ki $\{R_{N,\alpha}(t)\}_{N=2}^{\infty}$ kalan fonksiyon dizisi B 'de bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden, $\|R_{N+1,\alpha}(t)\|$ norm fonksiyonunu ele alarak, bu fonksiyonu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \|R_{N+1,\alpha}(t)\| &= \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N+1} d_n t^n \right| : t \in \{[a, b] \text{ ya da } [a + \varepsilon, b - \varepsilon]\} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N+1} d_n t^n \right| : t \in \{[a, b] \text{ ya da } [a + \varepsilon, b - \varepsilon]\} \right\} \\ &= |R_{N+1,\alpha}(b)|, \end{aligned}$$

böylece (4.11) eşitsizliği b noktasında

$$|R_{N+1,\alpha}(b)| \leq \mu_N |R_{N,\alpha}(b)|, \quad (4.12)$$

olarak yazılabilir. (4.12) eşitsizliği

$$|R_{N+1,\alpha}(b)| \leq |R_{N+1,\alpha}(b) - R_{N,\alpha}(b)| + |R_{N,\alpha}(b)| \leq (\mu_N - 1) |R_{N,\alpha}(b)| + |R_{N,\alpha}(b)|,$$

şeklinde yazabilir ve bu eşitsizlik aşağıdaki gibi genelleştirebilir:

$$\begin{aligned} |R_{N+1,\alpha}(b) - R_{N,\alpha}(b)| &\leq (\mu_N - 1) |R_{N,\alpha}(b)| \\ &\leq (\mu_N - 1)^2 |R_{N-1,\alpha}(b)| \leq \dots \leq (\mu_N - 1)^{N-1} |R_{2,\alpha}(b)|. \end{aligned}$$

$\forall N, K \in \mathbb{N}$ ve $N \geq K$ için

$$\begin{aligned} |R_{N,\alpha}(b) - R_{K,\alpha}(b)| &\leq |(R_{N,\alpha}(b) - R_{N-1,\alpha}(b)) + (R_{N-1,\alpha}(b) - R_{N-2,\alpha}(b)) + \\ &\quad \dots + (R_{K+1,\alpha}(b) - R_{K,\alpha}(b))| \\ &\leq |R_{N,\alpha}(b) - R_{N-1,\alpha}(b)| + |R_{N-1,\alpha}(b) - R_{N-2,\alpha}(b)| + \\ &\quad \dots + |R_{K+1,\alpha}(b) - R_{K,\alpha}(b)| \\ &\leq (\mu_N - 1)^{N-2} |R_{2,\alpha}(b)| + (\mu_N - 1)^{N-3} |R_{2,\alpha}(b)| + \\ &\quad \dots + (\mu_N - 1)^{K-1} |R_{2,\alpha}(b)| \\ &= \left(\frac{1 - (\mu_N - 1)^{N-2-K}}{1 - (\mu_N - 1)} \right) (\mu_N - 1)^{K-1} |R_{2,\alpha}(b)|, \end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve bu eşitsizlikte $\mu_N < 1$ olarak alındığında

$$\lim_{N,K \rightarrow \infty} |R_{N,\alpha}(b) - R_{K,\alpha}(b)| = 0,$$

olur. Böylelikle, $\{R_{N,\alpha}(b)\}_{N=2}^{\infty}$ dizisi B Banach uzayında Cauchy dizisi olup yakınsaktır.

4.1.2. Model Problemler

Bu bölümde, bazı model problemler çözülecektir ve elde edilen sonuçlar, farklı α parametresi ve N hesaplama limiti için değerlendirilip, bu sonuçlar şekil ve tablolarda gösterilecektir.

Problem 4.1.1. [86,87] Elektriksel problemlerde kullanılan, Van Der Pol osilatör denklemini

$$y''(t) - 0.05(1 - y^2(t))y'(t) + y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

olmak üzere başlangıç koşullarını $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0.5$ olarak ele alalım. Burada, $P_0(t) = P_2(t) = 1, P_1(t) = -0.05, Q_{21}(t) = 0.05$. Temel matris denklemini aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$\underbrace{\{P_0 X + P_1 X B + P_2 X B^2\}}_W S(\alpha) Y + \underbrace{Q_{21} X S(\alpha) (\bar{X}) \bar{S}(\alpha) (\bar{X}') \bar{S}(\alpha) \bar{Y}}_Z = G,$$

burada $N=2$ için

$$P_0 = P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}' = \text{diag} \left[(\bar{X} B) \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3},$$

$$\bar{X} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ve sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \right\},$$

olarak ifade edilir. Koşulların matris bağıntısı

$$[U_0; \eta_0] = [2 \quad 0 \quad -2\alpha \quad ; \quad 0] \text{ ve } [U_1; \eta_1] = [0 \quad 1 \quad 0 \quad ; \quad 0.5],$$

olarak yazılabilir. Koşul matrisleri, W matrisinde yerine yazıldığında, arttırılmış matrisi

$$\tilde{W}Y + \tilde{Z}\bar{Y} = G, \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) arttırılmış matris sistemi çözüldüğünde Dickson polinom katsayılar

$$\{y_0 = 0.012667, y_1 = 0.5, y_2 = 0.012667\},$$

olarak elde edilir. Bu katsayılar, (3.2) çözüm formunda yerine yazıldığında, Dickson çözümünü, $\alpha = 1$ için

$$\begin{aligned} y_2(t) \Big|_{\alpha=1} &= \sum_{n=0}^2 y_n D_n(t,1) = (0.012667)2 + (0.5)t + (0.012667)(t^2 - 2) \\ &= 0.5t + 0.012667t^2, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.13) sistemini, $N=2$ 'den $N=5$ 'e kadar çözümlenerek, kalan fonksiyonu farklı N ve α için bulunabilir. Tablo 1'de, $N=3$ ve $N=5$ için Dickson polinom çözümleri, Runge-Kutta, Gear ve Chebyshev seri metotlarının [87] çözümleri ile karşılaştırılmaktadır. Tablo 4.1.1'den görüleceği üzere diğer metotlara hızlı bir yaklaşım sağlanmıştır.

Şimdi, Teorem 4.1.1'i kullanarak, Dickson polinom çözümlerinin tutarlılığını inceleyelim:

$$\|R_{N+1,\alpha}(t)\| = \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N+1} d_n t^n \right| : t \in [0,1] \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N+1} |d_n t^n| : t \in [0,1] \right\} = |R_{N+1,\alpha}(1)|,$$

bu ifade

$$|R_{N+1,\alpha}(1)| \leq \mu_N |R_{N,\alpha}(1)|,$$

olarak ifade edilir. Bu takdirde, kalan fonksiyonlar dizisi, $\alpha = 0$ için

$$\begin{aligned} \left\{ |R_{N,0}(1)| \right\}_{N=2}^{\infty} &= \left\{ |R_{2,0}(1)|, |R_{3,0}(1)|, |R_{4,0}(1)|, |R_{5,0}(1)|, \dots \right\} \\ &= \{0.5182, 0.0568, 0.0286, 0.0031, \dots\}, \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve buradan

$$\mu_N = \left\{ \frac{|R_{3,0}(1)|}{|R_{2,0}(1)|}, \frac{|R_{4,0}(1)|}{|R_{3,0}(1)|}, \frac{|R_{5,0}(1)|}{|R_{4,0}(1)|}, \dots \right\} = \{0.1096, 0.5041, 0.1093, \dots\},$$

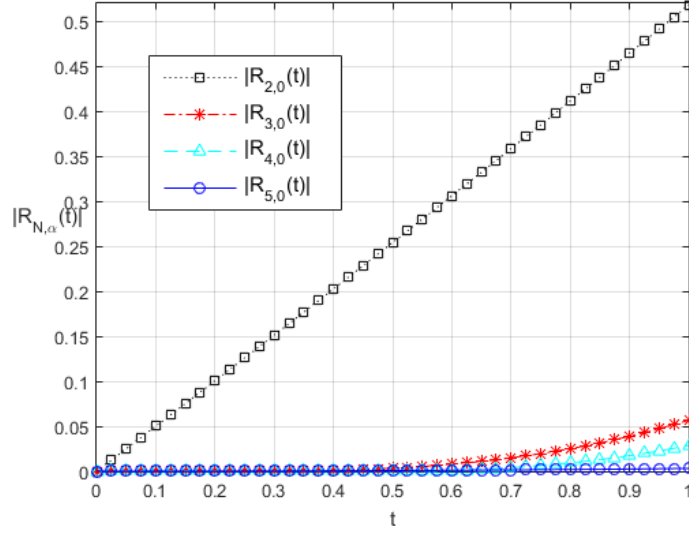
şeklinde yazılıp ve

$$\frac{|R_{N+1,0}(1)|}{|R_{N,0}(1)|} < 1,$$

olarak ifade edilir. Kolayca görülebilir ki $\{R_{N,0}(1)\}_{N=2}^{\infty}$ dizisi $|R_{N+1,0}(1)| \leq \mu_N |R_{N,0}(1)|$ eşitsizliğini, $\mu_N < 1$ ve $t=1$ değerlerine göre sağlar. Böylece $\{R_{N,0}(1)\}_{N=2}^{\infty}$ dizisi, B uzayında yakınsaktır. $\{R_{N,0}(t)\}_{N=2}^{\infty}$ dizisinin ilk dört terimi Şekil 4.1.1'de ayrıca gösterilmiştir. Görüleceği üzere N değeri arttırıldıkça, bu ilk dört terim sıfır değerine yaklaşmaktadır.

Tablo 4.1.1. Problem 4.1.1 için Dickson polinom çözümlerinin diğer metotların çözümleri ile karşılaştırılması.

t_i	$y_3(t_i);$ $N=3, \alpha = 0.5$	$y_5(t_i);$ $N=5, \alpha = 0$	Chebyshev seri $N=10$ [87]	Runge-Kutta metodu [87]	Gear metodu [87]
0.0	0	0	0	0	0
0.2	0.0998345862	0.0998313015	0.0998321663	0.0998321792	0.0998321668
0.4	0.1966697402	0.1966562669	0.1966564148	0.1966564313	0.1966564167
0.6	0.2865025553	0.2865564127	0.2865373683	0.2865373842	0.2865373709
0.8	0.3653301246	0.3658540489	0.3657715085	0.3657715349	0.3657715117
1.0	0.4291495412	0.4312717286	0.4310507066	0.4310507546	0.4310507104



Şekil 4.1.1. Problem 4.1.1'in $\alpha = 0$ ve $N=2-5$ için kalan fonksiyonları.

Problem 4.1.2. [2,88-91] İyonosferik yükseklik problemlerinde kullanılan doğrusal formdaki Schlömilch'in integral denklemini

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t \sin(s)) ds = 1 + \pi t^2, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

ele alalım. Bu denklemin tam çözümü $y(t) = 1 + 2\pi t^2$ 'dir. Wazwaz [88,89] bu denklemin bazı sınıflarını bir düzenleme yöntemiyle beraber Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak çözmüştür. Burada, bu denklem herhangi bir düzenleme yapmadan direkt olarak çözebilir yani başlangıç hesaplama limitini $N=2$ alarak temel matris denklemini

$$\frac{2}{\pi} \mathbf{XIS}(\alpha) \mathbf{Y} = \mathbf{G},$$

şeklinde olacaktır ve burada

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -\pi & \pi^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \int_0^{\pi/2} \text{diag} [1 \quad \sin(s) \quad \sin^2(s)] ds, \quad \mathbf{G} = [1 + \pi^3 \quad 1 \quad 1 + \pi^3]^T,$$

matris yapıları mevcuttur. Bu matris denklemini çözüldüğünde

$$\{y_0 = 0.5 + 2\pi\alpha, y_1 = 0, y_2 = 2\pi\},$$

Dickson polinom katsayıları elde edilir ve bu katsayılar, (3.2) formunda yerine yazıldığında, ele alınan problemin

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^2 y_n D_n(t, \alpha) = (0.5 + 2\pi\alpha)2 + 0 + (2\pi)(t^2 - 2\alpha) = 1 + 2\pi t^2,$$

olarak tam çözümüne ulaşılır. Ayrıca, $N > 2$ için aynı çözüm elde edilmektedir.

Problem 4.1.3. [89] Doğrusal olmayan formdaki Schlömilch'in integral denklemini

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} y^2(t \sin(s)) ds = \frac{3t^4}{8}, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

ele alalım. Denklemin tam çözümü $y(t) = t^2$ 'dir. Denklem, $N=2$ ve $\alpha = \{-1, 0, 0.1, 1\}$ için çözülsün. O halde temel matris denklemini

$$\frac{2}{\pi} \mathbf{X} \left(\int_0^{\pi/2} \mathbf{M}_1(s) \mathbf{S}(\alpha) \bar{\mathbf{M}}_2(s) ds \right) \mathbf{M}_3(\bar{\mathbf{S}}(\alpha)) \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G},$$

olarak oluşturulur. Burada,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -\pi & \pi^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_1(s) = \text{diag}[1 \quad \sin(s) \quad \sin^2(s)],$$

$$\mathbf{X}_1(\sin(s)) = [1 \quad \sin(s) \quad \sin^2(s)],$$

$$\bar{\mathbf{M}}_2(s) = \text{diag}[\mathbf{X}_1(\sin(s)) \quad \mathbf{X}_1(\sin(s)) \quad \mathbf{X}_1(\sin(s))], \quad \mathbf{X}_2(t) = \text{diag}[1 \quad t \quad t^2],$$

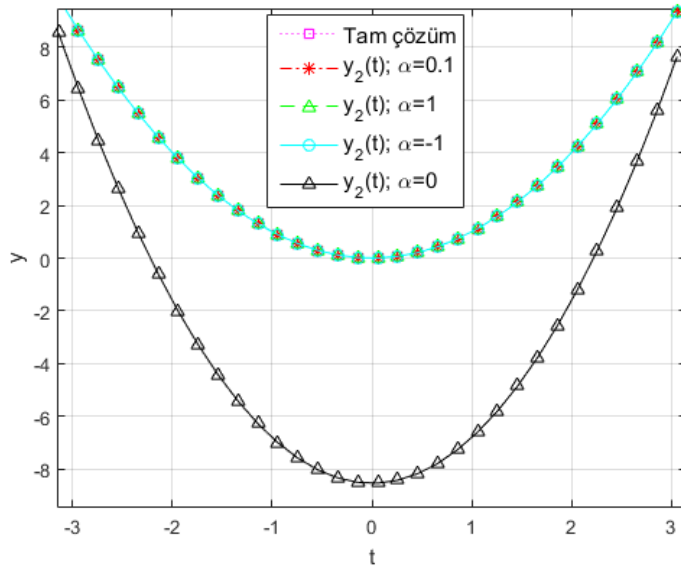
$$\mathbf{M}_3 = \text{diag}[\mathbf{X}_2(-\pi) \quad \mathbf{X}_2(0) \quad \mathbf{X}_2(\pi)], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{3\pi^4}{8} & 0 & \frac{3\pi^4}{8} \end{bmatrix}^T,$$

matris yapıları mevcuttur. Temel matris denklemleri çözüldüğünde farklı α için Dickson polinom çözümleri

$$y_2(t) \Big|_{\alpha=0} = -8.5473 + 1.7321t^2, \quad y_2(t) \Big|_{\alpha=0.1} = 2.7756 \times 10^{-17} + 4.291 \times 10^{-16}t + t^2,$$

$$y_2(t) \Big|_{\alpha=1} = t^2, \quad y_2(t) \Big|_{\alpha=-1} = -2.2205 \times 10^{-16} + 8.9548 \times 10^{-16}t + t^2,$$

elde edilir. Burada $y_2(t) \Big|_{\alpha=1}$ için tam çözüme ulaşılmıştır. Ayrıca, $y_2(t) \Big|_{\alpha=0.1}$ ve $y_2(t) \Big|_{\alpha=-1}$ çözümleri, tam çözüme çok yakın çözüm yapılarıdır. Bu çözümler Şekil 4.1.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.2. Problem 4.1.3 için $N=2$ ve farklı α değerleri kullanarak Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.

Problem 4.1.4. [89,92-98] Genel yapıdaki birinci tipteki Bratu problemini

$$y''(t) + \lambda e^{y(t)} = 0, \quad 0 < t < 1,$$

olmak üzere $y(0) = 0$ ve $y(1) = 0$ (veya $y'(0) = 0$) başlangıç (veya sınır koşulları) altında ele alalım. Birçok yazar, Bratu problemini sayısal levha üzerinde [92], termal yanma teorisinde [93], evrenin genişlemesini tasvir eden Chandrasekhar modelinde [94], elektro lif çekimi yönteminde [95] kullanmışlardır. Ayrıca, Adomian ayrıştırma ve homotopi pertürbasyon yöntemlerini kullanarak Bratu tipindeki problemleri çözmüşlerdir [89,96,98].

Şimdi, bu problemi çözmeden önce e^y fonksiyonunun Taylor seri açılımını kullanarak, bu problemi

$$e_1 : y''(t) + \lambda + \lambda y(t) + \frac{\lambda y^2(t)}{2} = 0 \text{ ve } e_2 : y''(t) + \lambda + \lambda y(t) + \frac{\lambda y^2(t)}{2} + \frac{\lambda y^3(t)}{6} = 0,$$

olarak iki formda yazabiliriz. e_1 ve e_2 denklemlerinin temel matris denklemi

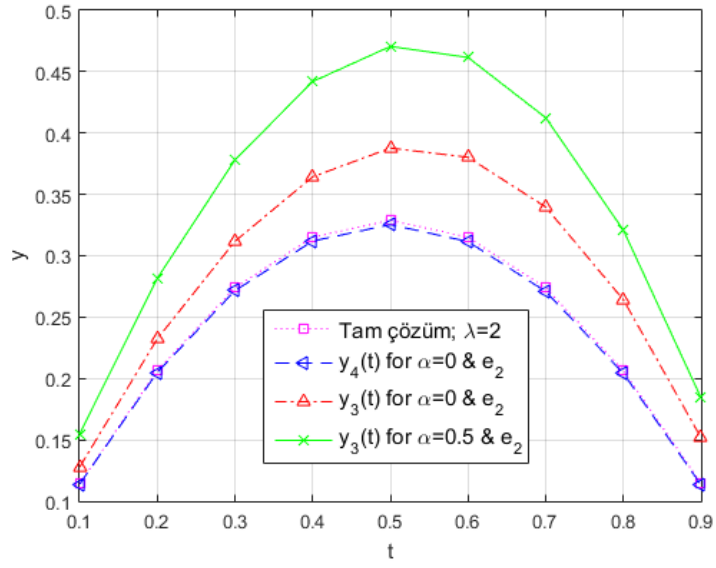
$$\begin{aligned} e_1 : \{P_0 X + P_2 X B^2\} S(\alpha) Y + Q_{10} X S(\alpha) \bar{X}(\bar{S}(\alpha)) \bar{Y} &= G, \\ e_2 : \{P_0 X + P_2 X B^2\} S(\alpha) Y + Q_{10} X S(\alpha) \bar{X}(\bar{S}(\alpha)) \bar{Y} \\ &+ Q_{20} X S(\alpha) \bar{X}(\bar{S}(\alpha)) \bar{\bar{X}}(\bar{\bar{S}}(\alpha)) \bar{\bar{Y}} = G, \end{aligned}$$

olarak oluşturulur.

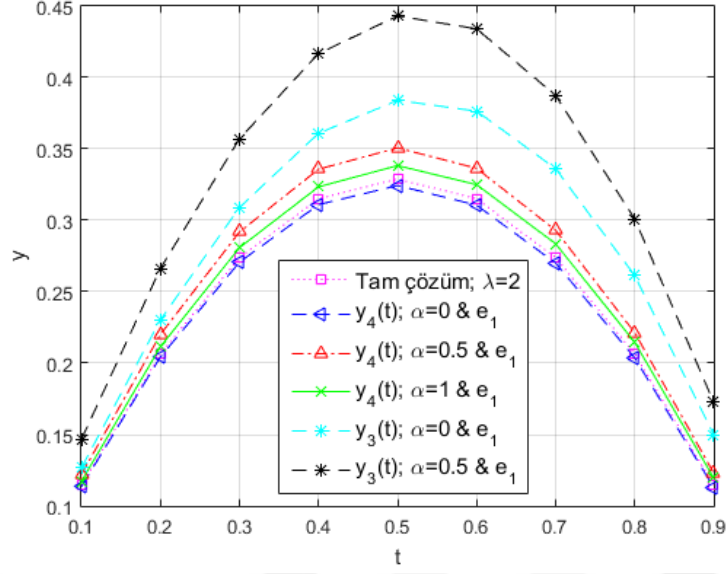
Yukarıdaki denklemler, $\lambda = \{-\pi^2, -2, 2\}$, $N=3, 4$ ve farklı α değerleri için çözülsün. Tablo 4.1.2'den görüleceği üzere elde edilen sonuçlar, Laplace ayrıştırma metodunun (LDM) [97] sonuçlarına göre çok daha tutarlıdır. Şekil 4.1.3-4.1.5'den görüleceği üzere farklı λ , α ve N değerleri için Dickson polinom çözümleri, denklemin tam çözümü ile uyum içerisindedir. Şekil 4.1.3-4.1.5'den ayrıca fark edileceği üzere α parametresi elde edilen çözümlerin davranışlarında önemli rol oynamaktadır. Şekil 4.1.6'da $\lambda = -\pi^2$ için tam çözüme yakın bir yaklaşım elde edilmiştir, benzer bir yaklaşım homotopi pertürbasyon metoduyla [98] elde edilmiştir. Kalan fonksiyonların grafikleri $\lambda = 2$ değeri için Şekil 4.1.7'de gösterilmektedir.

Tablo 4.1.2. Problem 4.1.4'ün $\lambda = 2$ için Dickson polinom çözümünün ve mutlak hatanın karşılaştırılması.

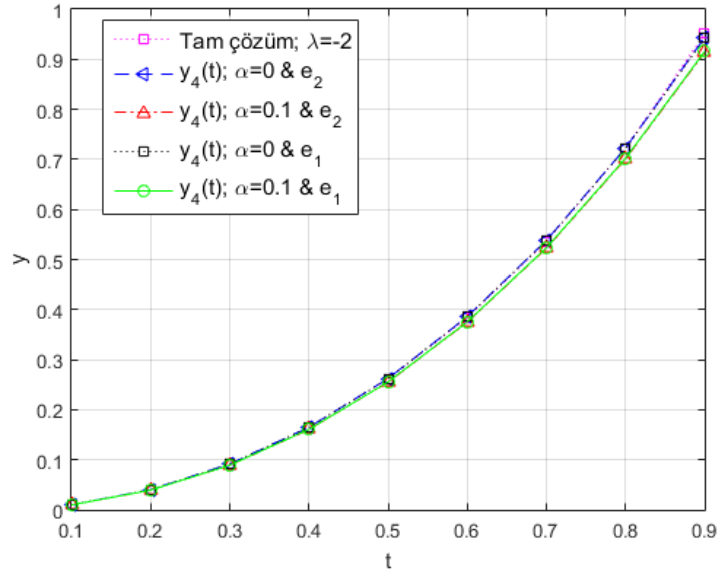
t_i	Tam çözüm $y(t_i)$ [97]	$y_4(t_i);$ $e_2, \alpha = 0$	LDM [97]	$ e_4(t_i) ;$ $e_2, \alpha = 0$	$ e_{LDM}(t_i) $ [97]
0.1	0.1144107440	0.1137542000	0.1122817141	$6.566e-04$	$2.129e-03$
0.2	0.2064191156	0.2049549134	0.2022094162	$1.464e-03$	$4.210e-03$
0.3	0.2738793116	0.2715097812	0.2676925058	$2.370e-03$	$6.187e-03$
0.4	0.3150893646	0.3119381017	0.3070874506	$3.151e-03$	$8.002e-03$
0.5	0.3289524214	0.3253708298	0.3193532294	$3.582e-03$	$9.599e-03$
0.6	0.3150893646	0.3115505775	0.3041598403	$3.539e-03$	$1.093e-02$
0.7	0.2738793116	0.2708316139	0.2619458909	$3.048e-03$	$1.193e-02$
0.8	0.2064191156	0.2041798649	0.1940413072	$2.239e-03$	$1.238e-02$
0.9	0.1144107440	0.1131729137	0.1035373785	$1.238e-03$	$1.087e-02$



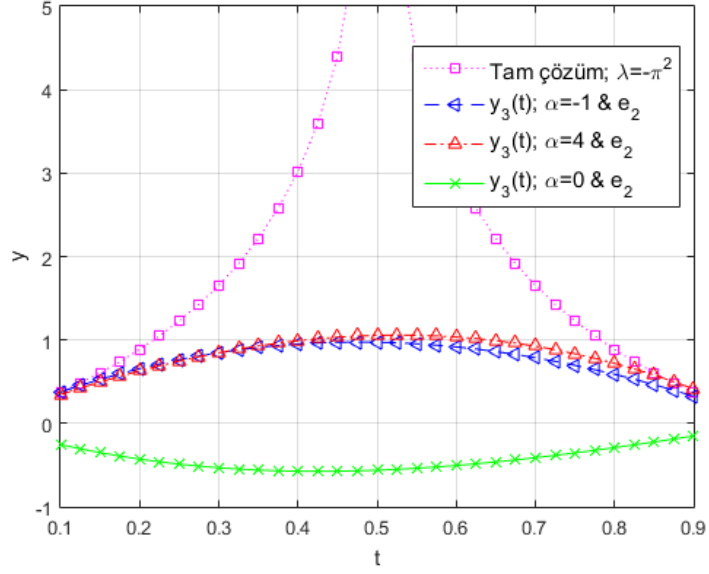
Şekil 4.1.3. Problem 4.1.4'ün e_2 , $\lambda = 2$, $N=3,4$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.



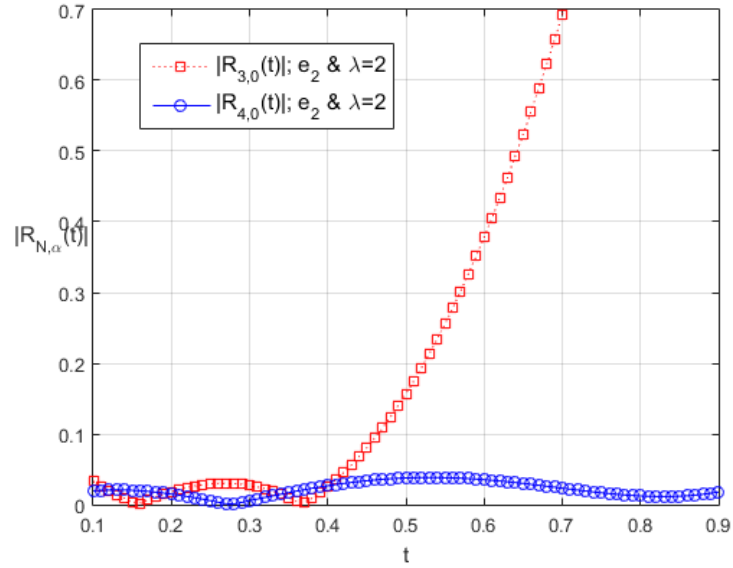
Şekil 4.1.4. Problem 4.1.4'ün e_1 , $\lambda = 2$, $N=3,4$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.



Şekil 4.1.5. Problem 4.1.4'ün $\{e_1, e_2\}$, $\lambda = -2$, $N=4$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.



Şekil 4.1.6. Problem 4.1.4'ün e_2 , $\lambda = -\pi^2$, $N=3$ ve farklı α değerleri için Dickson polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.



Şekil 4.1.7. Problem 4.1.4'ün e_2 , $\lambda = 2$, $N=3,4$ ve $\alpha = 0$ değerleri için kalan fonksiyonlarının karşılaştırılması.

Problem 4.1.5 [99-104] Blasius'un sınırlayıcı tabaka problemini

$$y^{(3)}(t) + \frac{1}{2}y(t)y''(t) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

olmak üzere $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\infty) = 1$ koşulları altında ele alalım. Bu problem akışkan mekaniğinde birçok bilim insanları tarafından kullanılmıştır [99,100]. Blasius [99] bu problem için seri metoduyla bir çözüm elde etti. Ayrıca, bazı sayısal ve yarı analitik yöntemler çözümünün davranışını incelemek için kullanılmıştır [101-104]. Burada üçüncü koşuldun görüleceği üzere problemi çözmek için bazı düzenlemeler yapmak gerekecektir. Bu amaç ile yazarlar üçüncü koşulu $y''(0) = \tau$ olarak belirledi ve böylece τ değerini, çözümün kesinliğini araştırarak hesapladılar [101-104]. Burada $\tau = 0.333338$ olarak alınacaktır [102]. O halde temel matris denklemi

$$P_3 X B^3 S(\alpha) Y + Q_{12} X S(\alpha) \bar{X} (\bar{B}^2) (\bar{S}(\alpha)) \bar{Y} = G,$$

olarak oluşturulur. Koşullar, bu matris denkleme eklendiğinde $t \in [0, 5.5]$ dahili durumu [102] için Tablo 4.1.3'te tasvir edilen sonuçlar, $N=5$ ve $\alpha = \{0, 0.5\}$ ile elde edilmiştir. Görüleceği üzere, sunulan metot, Taylor serisi (TS), Adomian ayrıştırma (ADM) ve diferansiyel dönüşüm (DTM) metotları [102] ile iyi uyum içerisindedir.

Tablo 4.1.3. Problem 4.1.5 için metotların karşılaştırılması.

t_i	$y_s(t_i);$ $\alpha = 0$	$y_s(t_i);$ $\alpha = 0.5$	TS [102]	ADM [102]	DTM [102]
0.0	0	0	0	0	0
0.5	0.0417	0.0415	0.0415	0.0415	0.0415
1.0	0.1664	0.1652	0.1656	0.1656	0.1656
1.5	0.3727	0.3685	0.3702	0.3701	0.3702
2.0	0.6560	0.6466	0.6502	0.6500	0.6501
2.5	1.0074	0.9902	0.9965	0.9963	0.9965
3.0	1.4121	1.3851	1.3971	1.3968	1.3971
3.5	1.8473	1.8101	1.8442	1.8377	1.8381
4.0	2.2816	2.2360	2.3065	2.3057	2.3063
4.5	2.6725	2.6240	2.7902	2.7901	2.7930
5.0	2.9652	2.9245	3.2422	3.2833	3.3284
5.5	3.0912	3.0757	3.2049	3.7806	4.4050

Problem 4.1.6. [105-108] Oksijen difüzyon problemini

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) = \frac{0.76129y(t)}{y(t)+0.03119}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

olmak üzere $y'(0) = 0$ ve $5y(1) + y'(1) = 5$ karışık koşulları altında inceleyelim. Bu problem, $N=4$ ve $\alpha = 60$ değerleri için çözüldükten sonra Tablo 4.1.4'de sayısal sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Tablo 4.1.4'ü inceleyerek belirtmek gerekir ki Dickson polinom çözümünü, α parametresi yardımıyla düzeltilip tutarlı hale getirilmiştir. Ayrıca, Tablo 4.1.4'den belirtmek gerekir ki sunulan metodun hesaplama limiti, Bernoulli işlevsel matris (BOM, $n=14$) [107] ve B-spline ($n=60$) [108] metodlarının hesaplama limitlerinden küçüktür.

Tablo 4.1.4. Problem 4.1.6 için metodların karşılaştırılması.

t_i	$y_4(t_i);$ $\alpha = 60$	BOM $n=14$ [107]	B-spline $n=60$ [108]
0.0	0.82391698	0.82848328	0.82848327
0.1	0.82525940	0.82970609	0.82970608
0.2	0.82925815	0.83337473	0.83337472
0.3	0.83586847	0.83948991	0.83948990
0.4	0.84504310	0.84805279	0.84805277
0.5	0.85673216	0.85906493	0.85906491
0.6	0.87088322	0.87252832	0.87252831
0.7	0.88744131	0.88844531	0.88844530
0.8	0.90634886	0.90681855	0.90681854
0.9	0.92754576	0.92765099	0.92765098
1.0	0.95096931	0.95094580	0.95094580

Problem 4.1.7. [109-114] Kiriş problemini

$$y^{(4)}(t) + f(t)y(t) = g(t), \quad 0 < t < 1,$$

olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y''(0) = 0$, $y''(1) = 0$ koşulları altında ele alalım. Kiriş problemi, matematik ve mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır [109-114]. Bu problemin analitik çözümü Timoshenko ve Woinowsky-Krieger [109]

tarafından sunulmuştur. Sonradan, Usmani [110] $f(t)$ fonksiyonsal katsayısını $-f(t) < \tau$ olarak belirledi ki bu da bir tek çözümü sağlamaktadır. Son yıllarda, problemin pozitif ve negatif çözümleri için varlık ve teklik teoremleri ayrıca çalışılmıştır [111]. Şimdi, Bougoffa ve ark. [112] ve Bonanno ve Bella [113] tarafından çalışılan elastik giriş problemini aşağıdaki formdaki gibi ele alalım:

$$y^{(4)}(t) + \frac{\pi^2}{4} y^{(2)}(t) - \frac{\pi^4}{4} y(t) = \frac{\pi^4}{2} \sin(\pi t), \quad 0 < t < 1,$$

koşullar yukarıdaki belirtilen koşullar olmak üzere problemin tam çözümü $y(t) = \sin(\pi t)$ 'dir. Temel matris denklemi

$$\{P_0 X + P_2 X B^2 + P_4 X B^4\} S(\alpha) Y = G,$$

şeklinde olacaktır. $N=5-11$ alarak metot uygulandıktan sonra problem çözülür. Dickson polinom çözümü, tam çözüm ile beraber Şekil 4.1.8'de resmedilmiştir. Buradan, çözümlerin tutarlı olduğu görülmektedir.

Teorem 4.1.1'den Dickson polinom çözümlerinin yakınsaklığı incelenirse teorem gereği

$$\|R_{N+1,\alpha}(t)\| = \sup \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N+1} d_n t^n \right| : t \in (0,1) \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N+1} |d_n t^n| : t \in (0,1) \right\} = |R_{N+1,\alpha}(1-\varepsilon)|,$$

olarak yazılır ve

$$|R_{N+1,\alpha}(1-\varepsilon)| \leq \mu_N |R_{N,\alpha}(1-\varepsilon)|,$$

şeklinde elde edilir. Burada ε yeterince küçük reel bir değerdir. $\varepsilon = 0.1$ olarak seçerek kalan fonksiyonlar dizisi $\alpha = 1$ için

$$\left\{ |R_{N,1}(0.9)| \right\}_{N=5}^{\infty} = \left\{ |R_{5,1}(0.9)|, |R_{6,1}(0.9)|, |R_{7,1}(0.9)|, |R_{8,1}(0.9)|, \right. \\ \left. |R_{9,1}(0.9)|, |R_{10,1}(0.9)|, |R_{11,1}(0.9)|, \dots \right\},$$

olarak yazılabilir ve

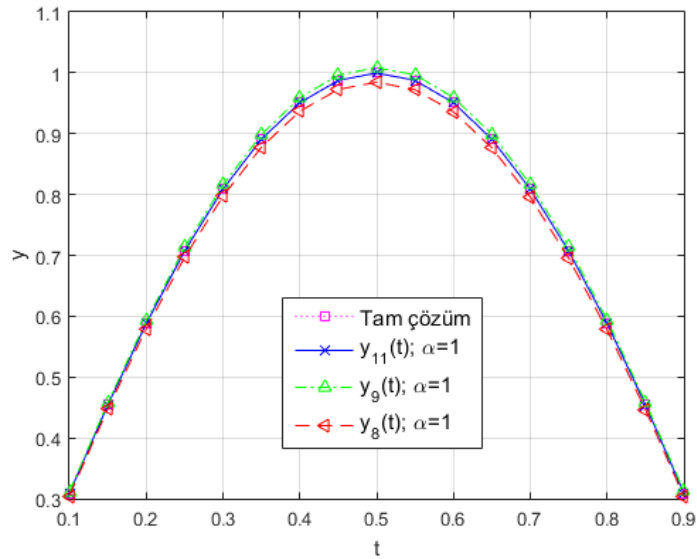
$$\mu_N = \left\{ \frac{|R_{6,1}(0.9)|}{|R_{5,1}(0.9)|}, \frac{|R_{7,1}(0.9)|}{|R_{6,1}(0.9)|}, \frac{|R_{8,1}(0.9)|}{|R_{7,1}(0.9)|}, \frac{|R_{9,1}(0.9)|}{|R_{8,1}(0.9)|}, \frac{|R_{10,1}(0.9)|}{|R_{9,1}(0.9)|}, \frac{|R_{11,1}(0.9)|}{|R_{10,1}(0.9)|}, \dots \right\} \\ = \{0.10755, 0.96580, 0.10102, 0.71674, 0.05613, 0.55576, \dots\},$$

olarak elde edilir yani

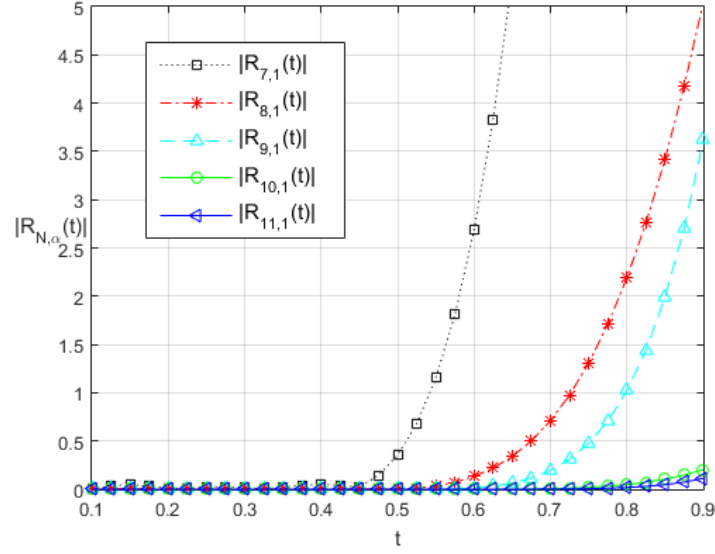
$$\frac{|R_{N+1,1}(0.9)|}{|R_{N,1}(0.9)|} < 1,$$

elde edilir. Burada görüleceği üzere $\{R_{N,1}(0.9)\}_{N=5}^{\infty}$ dizisi, $|R_{N+1,1}(0.9)| \leq \mu_N |R_{N,1}(0.9)|$ eşitsizliğini, $\mu_N < 1$ ve $t=0.9$ değerlerine göre sağlar.

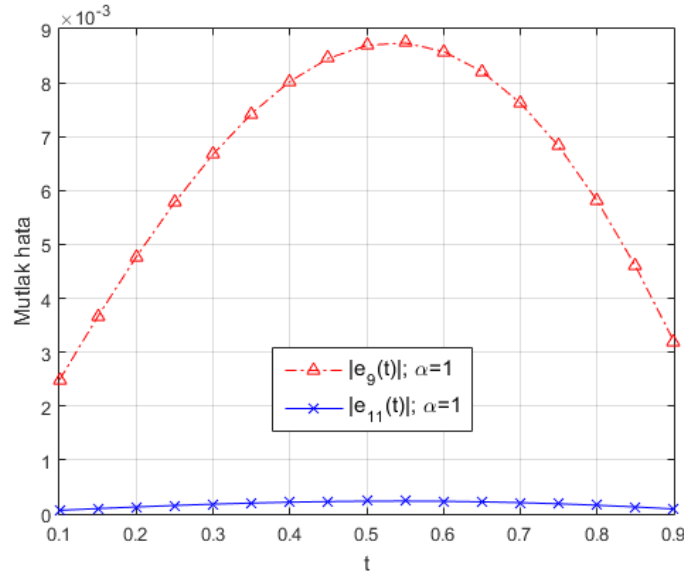
Dolayısıyla, bu dizi B uzayında bir Cauchy dizisi olup yakınsaktır. Kalan fonksiyonlar ve mutlak hata fonksiyon grafikleri sırasıyla Şekil 4.1.9 ve Şekil 4.1.10'da gösterilmiştir.



Şekil 4.1.8. Problem 4.1.7 için Dickson polinom ve tam çözümlerin karşılaştırılması.



Şekil 4.1.9. Problem 4.1.7 için kalan fonksiyonlarının fiziksel davranışlarının karşılaştırılması.



Şekil 4.1.10. Problem 4.1.7 için mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.

4.2. En Genel Yapıdaki Fonksiyonel Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, en genel yapıdaki fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Dickson matris-sıralama metodunu geliştirilecektir ve literatürde bulunmayan bu en genel yapıdaki denklemleri etkin bir şekilde sayısal çözümlerini elde edebilmesi amaçlanmaktadır. En genel yapıdaki fonksiyonel gecikmeli integro-diferansiyel denklemleri

$$\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} P_{kj}(t) y^{(k)}(h_{kj}(t)) = f(t) + \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv} \int_{u_{rv}(t)}^{\mathcal{G}_{rv}(t)} K_{rv}(t,s) y^{(r)}(g_{rv}(s)) ds, \quad (4.14)$$

olmak üzere ve

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) = \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 - 1, \quad (4.15)$$

karışık koşulları altında ele alalım. Burada, $t, s \in [a, b]$, $P_{kj}(t)$, $f(t)$, $K_{rv}(t, s)$, $h_{kj}(t)$, $g_{rv}(s)$, $u_{rv}(t)$ ve $\mathcal{G}_{rv}(t)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında analitik fonksiyonlardır ($a \leq u_{rv}(t) < \mathcal{G}_{rv}(t) \leq b$). λ_{rv} uygun bir sabittir. Fonksiyonel gecikme fonksiyonları $h_{kj}(t)$ ve $g_{rv}(s)$ yardımıyla (4.14) denklemi aşağıdaki denklem yapılarına kolayca dönüştürülebilir:

- $h_{kj}(t) = t$ ve $g_{rv}(s) = s$ için standart form,
- $h_{kj}(t) = t - \tau_{kj}$ ve $g_{rv}(s) = s - \sigma_{rv}$ için sabit gecikmeli form,
- $h_{kj}(t) = t - \tau_{kj}(t)$ ve $g_{rv}(s) = s - \sigma_{rv}(s)$ için değişken gecikmeli form,
- $h_{kj}(t) = \alpha_{kj} t$ ve $g_{rv}(s) = \beta_{rv} s$ için oransal gecikmeli form.

Ayrıca, yukarıdaki ifadelere ek olarak, (4.14) denklemi farklı yapılarda ele alınabilir. Örneğin, gecikmeli (ya da fark) diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel-fark denklemler ve integral denklemler vb.

(4.14) denklemi kısaca

$$D_d(t) = f(t) + I(t),$$

olarak yazılabilir ve burada $D_d(t)$ ve $I(t)$ ifadeleri sırasıyla diferansiyel ve integral kısımlarını göstermektedir.

Şimdi $X(t)$ Taylor polinomunun matris formu ile $E(t)$ ortoeksponansiyel polinomunun matris formu arasındaki bağıntıyı oluşturalım. Bu bağıntı kalan fonksiyonunun karakteristik davranışını belirlemede kullanılacaktır. Ama önce eksponansiyel ve ortoeksponansiyel polinomları hakkında temel bilgi verelim [115-118]. Son yıllarda her iki polinomda pantograf tipindeki gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanıldı [117,118]. $\{1, e^{-t}, e^{-2t}, \dots, e^{-Kt}, \dots\}$ eksponansiyel polinomlar dizisini belirtsin [117]. Benzer şekilde, sıklıkla ortoeksponansiyel olarak adlandırılan ortogonal eksponansiyel polinomlar, $E(t) = [e^{-t} \ e^{-2t} \ e^{-3t} \ \dots \ e^{-Kt}]$ matris formunda gösterilir [118]. Bu takdirde, $X(t)$ ile arasındaki $E(t)$ bağıntı

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ \vdots \\ e^{-(K+1)t} \end{bmatrix}}_{E^T(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{(-1)^1}{1} & \frac{(-1)^2}{2!} & \dots & \frac{(-1)^K}{K!} \\ 1 & \frac{(-2)^1}{1} & \frac{(-2)^2}{2!} & \dots & \frac{(-2)^K}{K!} \\ 1 & \frac{(-3)^1}{1} & \frac{(-3)^2}{2!} & \dots & \frac{(-3)^K}{K!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{(-K-1)^1}{1} & \frac{(-K-1)^2}{2!} & \dots & \frac{(-K-1)^K}{K!} \end{bmatrix}}_{T^T} \underbrace{\begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^K \end{bmatrix}}_{X^T(t)},$$

olarak oluşturabilir. Kısaca

$$E(t) = X(t)T \Rightarrow X(t) = E(t)T^{-1}, |T| \neq 0, \quad (4.16)$$

olarak tanımlanabilir. Şimdi, $D_d(t)$ ve $I(t)$ kısımlarının matris bağıntıları sırasıyla oluşturulsun. (3.4) bağıntısında $t \rightarrow h_{kj}(t)$ yerine yazarak aşağıdaki matris bağıntısı elde edilir:

$$y^{(k)}(h_{kj}(t)) = X(h_{kj}(t))B^k S(\alpha)Y, \quad (4.17)$$

burada,

$$X(h_{kj}(t)) = [1 \ h_{kj}(t) \ h_{kj}^2(t) \ \dots \ h_{kj}^N(t)],$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde,

$$y^{(r)}(g_{rv}(s)) = \mathbf{X}(g_{rv}(s)) \mathbf{B}^r \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}, \quad (4.18)$$

yazılabilir. (3.11) sıralama noktalarını ve (4.17) matris bağıntısını, $D_d(t)$ kısmına eklediğimizde, $D_d(t)$ kısmının temel matris denklemini

$$\mathbf{D}_d = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}, \quad (4.19)$$

şeklindedir ve burada

$$\mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} D_d(t_0) \\ D_d(t_1) \\ \vdots \\ D_d(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{kj} = \begin{bmatrix} P_{kj}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{kj}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{kj}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{kj} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(h_{kj}(t_0)) \\ \mathbf{X}(h_{kj}(t_1)) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(h_{kj}(t_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{kj}(t_0) & \cdots & h_{kj}^N(t_0) \\ 1 & h_{kj}(t_1) & \cdots & h_{kj}^N(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{kj}(t_N) & \cdots & h_{kj}^N(t_N) \end{bmatrix},$$

matris yapıları mevcuttur.

İntegral kısmında yer alan $K_{rv}(t, s)$ çekirdek fonksiyonu

$$K_{rv}(t, s) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N k_{ij}^{rv} t^i s^j \Rightarrow K_{rv}(t, s) = \mathbf{X}(t) \mathbf{C}_{rv} \mathbf{X}^T(s), \quad (4.20)$$

olarak yazabilir. Burada,

$$\mathbf{C}_{rv} = [c_{ij}^{rv}], \quad c_{ij}^{rv} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} K_{rv}(0,0)}{\partial t^i \partial s^j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N,$$

olarak hesaplanır. (4.18) ve (4.20) matris bağıntıları, $I(t)$ formunda yerine yazıldığında, $I(t)$ kısmı için

$$[I(t)] = \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv} \mathbf{X}(t) \mathbf{C}_{rv} \mathbf{Q}_{rv}(t) \mathbf{B}^r \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}, \quad (4.21)$$

matris formunu elde edilir. Burada,

$$\mathbf{Q}_{rv}(t) = \int_{u_{rv}(t)}^{g_{rv}(t)} \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(g_{rv}(s)) ds = \left[\int_{u_{rv}(t)}^{g_{rv}(t)} s^m g_{rv}^n(s) ds \right] = [q_{mn}^{rv}(t)], \quad m, n = 0, 1, \dots, N,$$

olarak ifade edilir. (3.11) sıralama noktalarını, (4.21) temel denkleminde yerine yazarak $I(t)$ kısmının temel matris denklemini

$$\mathbf{Z} = \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv} (\bar{\mathbf{X}}) (\bar{\mathbf{C}}_{rv}) (\bar{\mathbf{M}}_{rv}) \mathbf{B}^r \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}, \quad (4.22)$$

şeklide oluşturabilir. Burada,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} I(t_0) \\ I(t_1) \\ \vdots \\ I(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{rv} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rv} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{rv} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{rv} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{M}}_{rv} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rv}(t_0) \\ \mathbf{Q}_{rv}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{rv}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)},$$

matrisleri yer alır. (4.19) ve (4.22) matris denklemleriyle, (4.14) denkleminin temel matris denklemini

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X}_{kj} \mathbf{B}^k - \sum_{r=0}^{m_3} \sum_{v=0}^{m_4} \lambda_{rv} (\bar{\mathbf{X}}) (\bar{\mathbf{C}}_{rv}) (\bar{\mathbf{M}}_{rv}) \mathbf{B}^r \right\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y} = \mathbf{F} ,$$

elde edilir ya da kısaca

$$\underbrace{\{\mathbf{D}_a - \mathbf{Z}\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{Y} = \mathbf{F} ,$$

gösterilir. Bu ifade $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ bilinmeyen Dickson katsayıları için $(N+1)$ tane bir cebirsel denklem sistemine denktir [10,11]. Temel matris denklemini

$$\mathbf{WY} = \mathbf{F} \text{ veya } [\mathbf{W} ; \mathbf{F}] , \quad (4.23)$$

kompakt formunda yazabiliriz. Burada

$$\mathbf{F} = [f(t_0) \quad f(t_1) \quad \dots \quad f(t_N)]^T ,$$

matris yapısındadır.

(3.4) matris bağıntısı ile (4.15) karışık koşulların matris bağıntısı

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = \psi_i \Rightarrow [\mathbf{U}_i ; \psi_i] , \quad i = 0, 1, \dots, m_1 - 1, \quad (4.24)$$

olarak oluşturulur ve burada

$$\mathbf{U}_i = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \dots \quad u_{iN}] = \sum_{k=0}^{m_1-1} [a_{ik} \mathbf{X}(a) + b_{ik} \mathbf{X}(b)] \mathbf{B}^k \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y} ,$$

şeklindedir. (4.23) formunda yer alan m_1 satır sayısı kaldırılıp yerine satır sayısı kadar (4.24) koşul matris(leri) eklendiğinde aşağıdaki arttırılmış matris sistemini elde edilir:

$$\left[\tilde{\mathbf{W}} ; \tilde{\mathbf{F}} \right] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(t_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-m_1,0} & w_{N-m_1,1} & \cdots & w_{N-m_1,N} & ; & f(t_{N-m_1}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \psi_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \psi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m_1-1,0} & u_{m_1-1,1} & \cdots & u_{m_1-1,N} & ; & \psi_{m_1-1} \end{bmatrix},$$

burada $\text{rank} \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} \left[\tilde{\mathbf{W}} ; \tilde{\mathbf{F}} \right] = N + 1$ 'dir. Böylece, Dickson katsayılar matrisi

$$\mathbf{Y} = \left(\tilde{\mathbf{W}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}},$$

elde edilir. Son olarak bu katsayılar, (3.2) çözüm formunda yerine yazıldığında Dickson polinom çözümüne ulaşılır.

4.2.1. Hata Analizi ve Ortoeksponansiyel Kalan Fonksiyonun Karakteristik Davranışı

Kalan fonksiyona dayalı düzeltme ve teorisi, Oliveira [84] ve Çelik [85]'in çalışmalarında bulunabilir. Dickson matris-sıralama yöntemi için kalan fonksiyona dayalı hata analizi, Kürkçü ve ark. [10,11] tarafından geliştirilmiştir. Buradan yola çıkarak, kalan hata analizini, (4.14) denkleminin Dickson polinom çözümlerini geliştirmek için düzenlensin. Algoritmik olarak bu analiz aşağıdaki gibi verilebilir:

Adım 1: Yaz $R_N(t) \leftarrow L[y_N(t)] - f(t)$, burada $L[y_N(t)] = D_d(t) - I(t)$

şeklindedir;

Adım 2: Yaz $L[e_N(t)] \leftarrow L[y(t)] - L[y_N(t)] = -R_N(t)$,

burada $e_N(t) = y(t) - y_N(t)$ şeklindedir;

Adım 3: Yaz $\sum_{k=0}^{m_1-1} \left[a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b) \right] \leftarrow 0$;

Adım 4: 2. ve 3. adımdaki problemi çöz;

Adım 5: Bul $e_{N,M}(t) \leftarrow \sum_{n=0}^M y_n^* D_n(t, \alpha)$, burada $e_{N,M}(t)$, hata probleminin Dickson

polinom çözümüdür ayrıca tahmini hata fonksiyonu olarak da adlandırılabilir;

Adım 6: Yaz $y_{N,M}(t) \leftarrow y_N(t) + e_{N,M}(t)$, burada $y_{N,M}(t)$ düzeltilmiş Dickson polinom çözümüdür;

Adım 7: Yaz $E_{N,M}(t) \leftarrow y(t) - y_{N,M}(t)$, burada $E_{N,M}(t)$ düzeltilmiş hata fonksiyonudur.

Böylece, kalan hata analizi tamamlanmış olur. Ayrıca, sayısal karşılaştırmalarda kullanmak için δ_N ve σ_N hata hesaplarından yararlanılır [119,120]:

$$\delta_N = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N e_N^2(t_i)} \text{ ve } \sigma_N = \sqrt{\sum_{i=0}^N e_N^2(t_i)} / \sqrt{\sum_{i=0}^N y^2(t_i)}, \quad (4.25)$$

burada t_0, t_1, \dots, t_N noktaları (3.11) sıralama noktalarıdır. (4.25) formüllerinden yararlanarak aşağıdaki düzeltilmiş hata hesabı yapabilir:

$$\delta_{N,M} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=0}^M E_{N,M}^2(t_i)} \text{ ve } \sigma_{N,M} = \sqrt{\sum_{i=0}^M E_{N,M}^2(t_i)} / \sqrt{\sum_{i=0}^M y^2(t_i)},$$

burada $E_{N,M}(t)$, kalan hata analizinden elde edilen düzeltilmiş hata fonksiyonudur.

Şimdi, ortoeksponansiyel kalan fonksiyonunu oluşturarak, N hesaplama limitine göre karakteristik davranışını araştırılsın.

Teorem 4.1. N hesaplama limiti arttırıldıkça ve t, b değerine yakınsarken $|R_{e,N}(t)| \rightarrow 0$ gerçekleşir bu da ortoeksponansiyel kalan fonksiyonunun karakteristik davranışını belirler.

İspat Ortoeksponansiyel kalan fonksiyonunun matris bağıntısını oluşturmak için $R_N(t)$ fonksiyonunun K 'ncı dereceden Taylor açılımını alınsın. Burada K değeri $K \geq N = 2$ olarak alınır. Böylece, $R_N(t)$ 'nin matris bağıntısı

$$R_N(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_K t^K = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^K \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}(t)} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix} = \mathbf{X}(t) \mathbf{J}, \quad (4.26)$$

olarak yazılabilir ve burada c_0, c_1, \dots, c_K reel sabitlerdir. (4.16) matris bağıntısını, (4.26) denkleminde yerine yazarak $R_N(t)$ fonksiyonu

$$R_{e,N}(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} = d_0 e^{-t} + d_1 e^{-2t} + \dots + d_K e^{-(K+1)t}, \quad (4.27)$$

ortoeksponansiyel kalan fonksiyonu formunda olarak yazabilir. Burada, $R_{e,N}(t)$, bir azalan fonksiyon olup minimum değerini b noktasında alır ve d_K katsayıları, $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}$ matris işlemiyle bulunur.

(4.27) denklemini kullanılarak, N arttırıldıkça ve t, b değerine yakınsarken $|R_{e,N}(t)| \rightarrow 0$ olur ve bu ifade ortoeksponansiyel kalan fonksiyonun bir karakteristik davranışını belirler. Bir diğer deyişle $L[y_N(t)]$ ile $f(t)$ arasındaki fark azalır; bu durum $R_{e,N}(t)$ fonksiyonu üzerinde etkili olur.

4.2.2. Sayısal Örnekler

Metodun, uygulanabilirliğini ve etkinliğini göstermek için çeşitli örnekleri ele alınsın. Sayısal sonuçlar tablolarda tartışılıp ve Dickson polinom çözümleri, şekillerde yorumlanacak ve çözümlerin kararlılığı, α parametresine göre simüle edilecektir.

Örnek 4.2.1. [119] Fonksiyonel Fredholm integral denklemini

$$y(t) + e^{-t} y(h_{00}(t)) = 3e^t + e^{h(t)-t} - \int_{-1}^1 e^{t-s} y(s) ds, \quad -1 \leq t, s \leq 1,$$

ele alalım. Burada, $h_{00}(t) = \{t^2/2, \sin(t), te^{-t}\}$ fonksiyonlarını göstermektedir. Denklemin tam çözümü $y(t) = e^t$ 'dir. Şimdi, denklem, $N=8, M=9, \alpha = 0.5$ ve farklı $h_{00}(t)$ parametreleri için çözülsün. σ_N ve $\sigma_{N,M}$ hata hesaplamaları, Tablo 4.2.1'de Chebyshev sıralama metodu [119] ile karşılaştırılmıştır. Şekil 4.2.1'den görüleceği üzere kararlı Dickson polinom çözümleri, α parametresinin $I = [-4 \times 10^3, 8 \times 10^3]$ aralığında yer almaktadır ve $\alpha = -5 \times 10^3$ ya da $\alpha = 8.5 \times 10^3$ olduğunda, elde edilen çözüm, tam çözüm ile uyumlu değildir. Ayrıca, Taylor açılımını $K=50$ alarak, ortoeksponansiyel kalan fonksiyonu farklı N 'ler için oluşturulmuştur. $R_{e,2}(t)$, $R_{e,6}(t)$, $R_{e,7}(t)$, $R_{e,8}(t)$ ve $R_{e,12}(t)$ fonksiyonlarının karakteristik davranışı

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left\{ |R_{e,2}(t)|, |R_{e,6}(t)|, |R_{e,7}(t)|, |R_{e,8}(t)|, |R_{e,12}(t)| \right\} \\ = \{8.23e-01, 3.37e-04, 7.59e-05, 4.74e-06, 6.15e-09\},$$

olarak elde edilir.

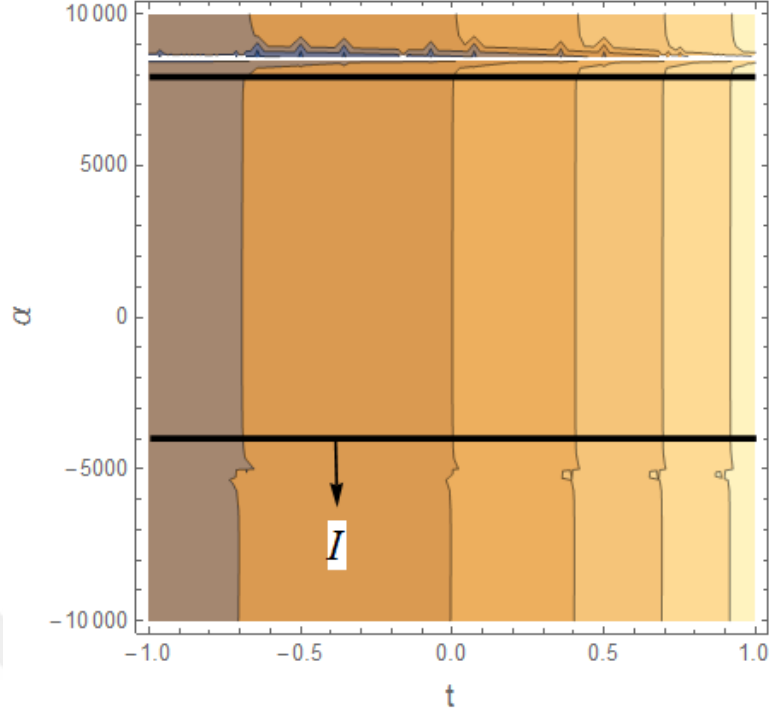
Tablo 4.2.1. Örnek 4.2.1 için σ_N ve $\sigma_{N,M}$ hataların karşılaştırılması.

$h_{00}(t)$	$t^2/2$		$\sin(t)$		te^{-t}	
	$\sigma_{8,9}$ $\alpha = 0.5$	σ_8 [119]	$\sigma_{8,9}$ $\alpha = 0.5$	σ_8 [119]	σ_8 $\alpha = 0.5$	σ_8 [119]
Hata	$4.12e-08$	$4.34e-07$	$1.14e-09$	$4.14e-09$	$1.29e-06$	$2.41e-06$

Örnek 4.2.2. [120,121] Volterra-Fredholm integral denklemini

$$y(t) = e^{-t} - e^t (h_{00}(t) - 1) + \int_0^{h_{00}(t)} e^{t+s} y(s) ds - \int_0^1 e^{t+h_{00}(s)} y(h_{00}(s)) ds, \quad 0 \leq t, s \leq 1,$$

ele alalım. Burada, $h_{00}(t) = \ln(t+1)$ olup ve denklemin tam çözümü $y(t) = e^{-t}$ 'dir.



Şekil 4.2.1. Örnek 4.2.1'in $h_{00}(t) = \sin(t)$ değeri için $y_8(t)|_{\alpha}$ kararlı çözümünün $I = [-4 \times 10^3, 8 \times 10^3]$ aralığındaki kontur grafiği.

Denklem, $N=\{2,5\}$ ve $M=\{3,6\}$ değerleri için çözüldüğünde elde edilen sonuçlar Tablo 4.2.2'de Lagrange ve Taylor metotlarının [120,121] sonuçları ile karşılaştırılır. Tablo 4.2.2 ve Şekil 4.2.2'den görüldüğü gibi Dickson polinom çözümü, N ve M değerlerinin artırılmasıyla geliştirilmiştir. $K=50$ için $R_{e,2}(t)$, $R_{e,3}(t)$, $R_{e,4}(t)$, $R_{e,5}(t)$ ve $R_{e,6}(t)$ ortoeksponansiyel kalan fonksiyonlarının karakteristik davranışı

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left\{ |R_{e,2}(t)|, |R_{e,3}(t)|, |R_{e,4}(t)|, |R_{e,5}(t)|, |R_{e,6}(t)| \right\} = \{5.31e-02, 2.38e-02, 6.42e-03, 1.04e-03, 2.48e-05\},$$

tutarlı olarak elde edilir.

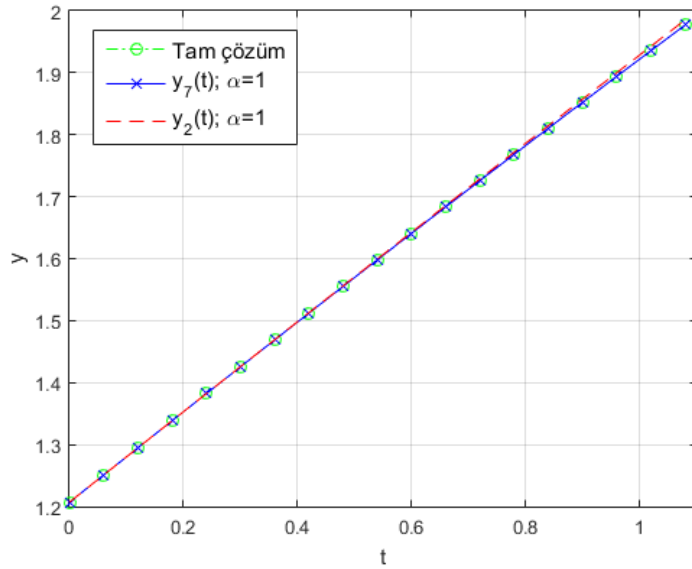
Örnek 4.2.3. İkinci mertebeden fonksiyonel integro-diferansiyel denklemini

$$y''(t+1) - ty'(h_{10}(t)) + y(h_{00}(t)) = f(t) + \lambda_{10} \int_t^{t+1} tsy'(g_{10}(s)) ds, \quad 0 \leq t, s \leq 1,$$

olmak üzere $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Tam çözüm $y(t) = \cos(t)$ 'dir. $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\}$ fonksiyonlarını sırasıyla $\{t^2, e^t, s^2 - s\}$ ve $\{t^3 - t^2, \sin(t), s^2\}$ olarak seçilsin ve burada belirtilen uygun fonksiyonları denklemde yerine yazarak tam çözüm ile $f(t)$ fonksiyonu kolayca hesaplanır. Farklı N ve λ_{10} değerleri için denklem çözüldüğünde mutlak ve δ_N hata hesaplamaları $\alpha = 1$ değeri için Tablo 4.2.3 ve Tablo 4.2.4'de gösterilmiştir. Görüleceği üzere hata toleransı, farklı λ_{10} değerleri için değişim göstermektedir.

Tablo 4.2.2. Örnek 4.2.2 için δ_N ve $\delta_{N,M}$ hata hesaplarının karşılaştırılması.

δ_N	Güncel metot $\alpha = 0.5$	Taylor metodu [121]	Lagrange metodu [120]
δ_2	$3.181e-02$	$3.594e-02$	$3.274e-03$
$\delta_{2,3}$	$6.086e-05$	–	–
δ_5	$2.145e-04$	$3.051e-04$	$4.302e-07$
$\delta_{5,6}$	$1.665e-09$	–	–



Şekil 4.2.2. Örnek 4.2.2 için tam ve Dickson polinom çözümlerinin karşılaştırılması.

Diğer taraftan, $y_9(t)|_{\alpha}$ kararlı Dickson polinom çözümü $\alpha \in I = [-2 \times 10^3, 2 \times 10^3]$ aralığında elde edilir ve bu aralığın haricinde, çözüm kararsız duruma geçer. Örneğin $\alpha = \pm 5 \times 10^3$ değeri için kararsız çözüm elde edilir. Bu yüzden, Şekil 4.2.3'ten gözlemleneceği üzere kontur eğrileri düz hatlarını kaybeder. Şekil 4.2.4'den ayrıca fark edilir ki çözümler, tam çözüme hızlı bir şekilde yaklaşmaktadır.

Bununla beraber Taylor açılım derecesini $K=50$ alarak, $R_{e,2}(t)$, $R_{e,6}(t)$, $R_{e,8}(t)$, $R_{e,9}(t)$ ve $R_{e,10}(t)$ ortoekspansiyel kalan fonksiyonlarının, $\alpha=1$ için karakteristik davranışı Şekil 4.2.5'de ve ayrıca sayısal olarak

$$\lim_{t \rightarrow 1} \{|R_{e,2}(t)|, |R_{e,6}(t)|, |R_{e,8}(t)|, |R_{e,9}(t)|, |R_{e,10}(t)|\} = \{5.41e-01, 2.00e-02, 2.48e-04, 5.98e-06, 0\},$$

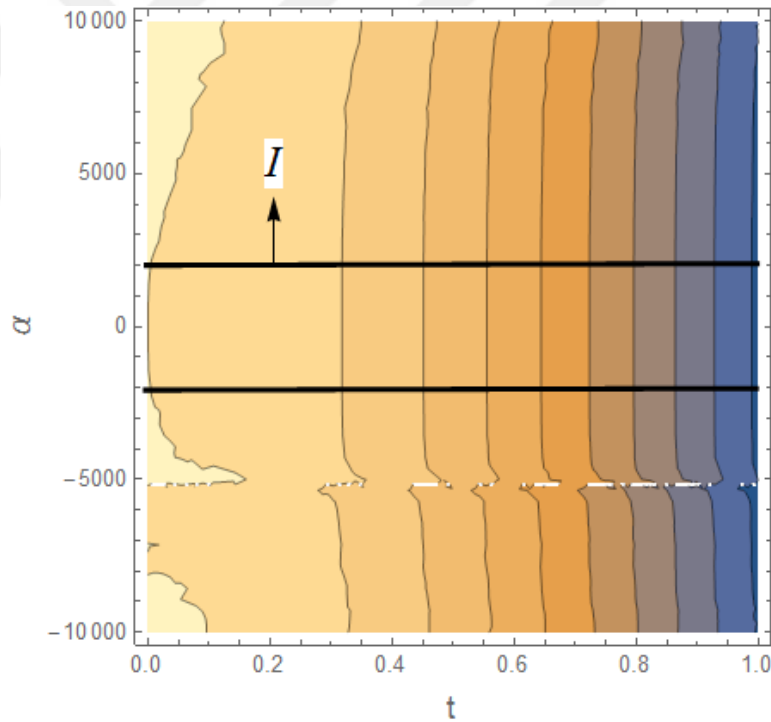
elde edilir.

Tablo 4.2.3. Örnek 4.2.3 $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^2, e^t, s^2 - s\}$ için mutlak ve δ_N hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

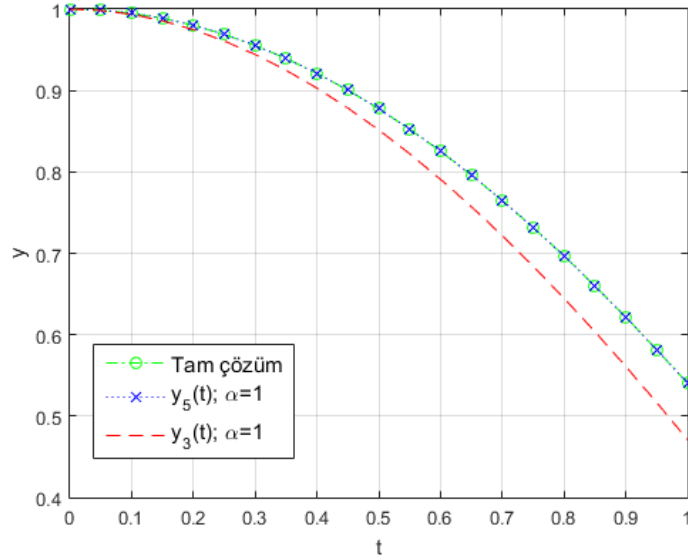
λ_{10}	-1		0		1	
	$ e_5(t_i) $ $N=5$	$ e_9(t_i) $ $N=9$	$ e_5(t_i) $ $N=5$	$ e_9(t_i) $ $N=9$	$ e_5(t_i) $ $N=5$	$ e_9(t_i) $ $N=9$
0.0	0	$6.66e-16$	$2.22e-16$	0	$1.11e-16$	$1.11e-16$
0.2	$4.48e-03$	$1.64e-07$	$6.92e-04$	$2.00e-07$	$3.74e-04$	$4.60e-09$
0.4	$1.42e-02$	$1.89e-07$	$2.15e-03$	$4.39e-07$	$1.14e-03$	$3.58e-08$
0.6	$2.56e-02$	$1.62e-08$	$3.83e-03$	$6.16e-07$	$2.00e-03$	$5.48e-08$
0.8	$3.69e-02$	$3.41e-07$	$5.50e-03$	$7.66e-07$	$2.87e-03$	$5.08e-08$
1.0	$4.78e-02$	$7.09e-07$	$7.13e-03$	$9.10e-07$	$3.73e-03$	$3.56e-08$
δ_N	$3.01e-02$	$3.29e-07$	$4.49e-03$	$6.05e-07$	$2.35e-03$	$3.98e-08$

Tablo 4.2.4. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^3 - t^2, \sin(t), s^2\}$ değerleri için mutlak ve δ_N hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

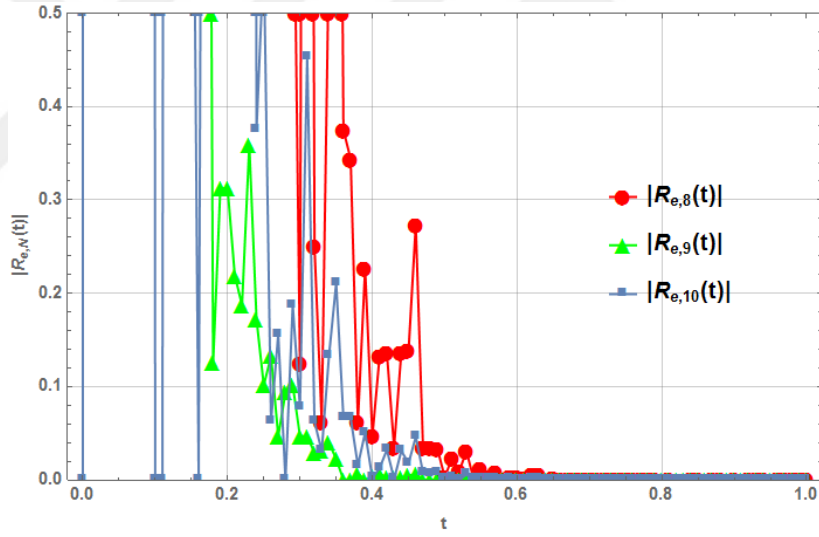
λ_{10}	-1		0		1	
	$ e_5(t_i) $ N=5	$ e_9(t_i) $ N=9	$ e_5(t_i) $ N=5	$ e_9(t_i) $ N=9	$ e_5(t_i) $ N=5	$ e_9(t_i) $ N=9
0.0	$1.11e-16$	$2.22e-16$	$2.22e-16$	0	$2.22e-16$	$6.66e-16$
0.2	$1.35e-03$	$4.91e-07$	$4.05e-03$	$5.02e-06$	$1.02e-04$	$3.71e-08$
0.4	$4.45e-03$	$1.72e-06$	$1.39e-02$	$1.79e-05$	$1.96e-04$	$3.72e-08$
0.6	$8.33e-03$	$3.40e-06$	$2.67e-02$	$3.55e-05$	$1.63e-04$	$1.08e-08$
0.8	$1.25e-02$	$5.32e-06$	$4.08e-02$	$5.53e-05$	$2.91e-05$	$1.77e-08$
1.0	$1.67e-02$	$7.30e-06$	$5.52e-02$	$7.56e-05$	$1.46e-04$	$4.61e-08$
δ_N	$1.03e-02$	$4.07e-06$	$3.36e-02$	$4.23e-05$	$1.40e-04$	$3.04e-08$



Şekil 4.2.3. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^2, e^t, s^2 - s\}$ ve $\lambda_{10} = 1$ değerleri için $y_9(t)|_\alpha$ kararlı çözümünün $I = [-2 \times 10^3, 2 \times 10^3]$ aralığındaki kontur grafiği.



Şekil 4.2.4. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^3 - t^2, \sin(t), s^2\}$ ve $\lambda_{10} = 1$ değerleri için tam ve Dickson polinom çözümlerinin karşılaştırılması.



Şekil 4.2.5. Örnek 4.2.3'ün $\{h_{00}(t), h_{10}(t), g_{10}(s)\} = \{t^2, e^t, s^2 - s\}$ ve $\lambda_{10} = -1$ değerleri için ortoeksponansiyel kalan fonksiyonların karakteristik davranışı.

Örnek 4.2.4. [122] Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan parçalı-sürekli argümanlı fonksiyonel diferansiyel denklemini

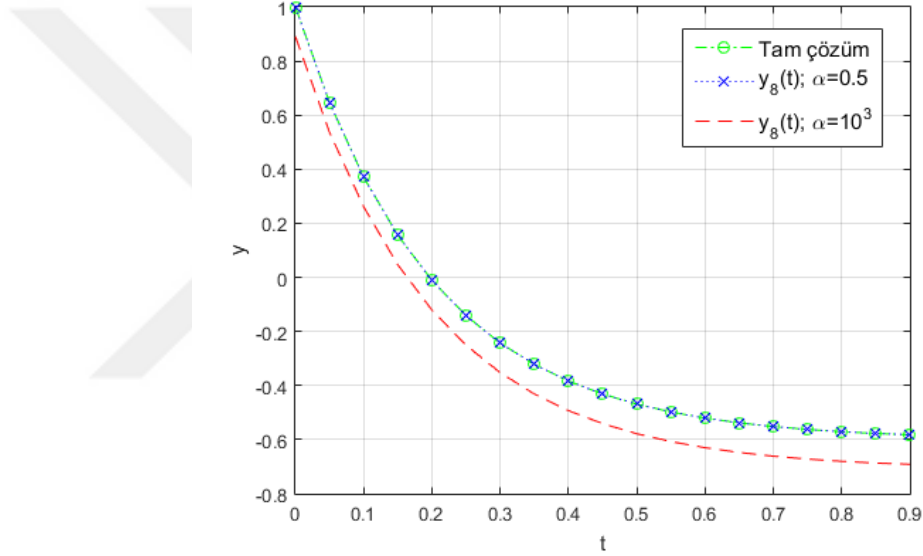
$$y'(t) + 5y(t) + 3y(\lfloor t \rfloor) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0.9,$$

olmak üzere $y(0)=1$ başlangıç koşulu altında ele alalım. Denklemin tam çözümü

$$y(t) = \left(e^{-5t} + \frac{3}{5}(e^{-5t} - 1) \right) \left(e^{-5} + \frac{3}{5}(e^{-5} - 1) \right)^{\lfloor t \rfloor} \text{ 'dir. Li ve Zhang [122] çalışmalarında}$$

bu tipteki denklemin asimptotik çözümünü belirlediler. Denklem çözüldüğünde, Dickson polinom çözümü, $\alpha=0.5$ ve $\alpha=10^3$ değerleri için Şekil 4.2.6'da resmedilmiştir. Ayrıca, Şekil 4.2.7'den görülür ki $y_8(t) |_{\alpha}$ kararlı Dickson polinom

çözümü α parametresinin $I = [-4 \times 10^2, 4 \times 10^2]$ aralığında bulunmaktadır. Mutlak hatalar $\alpha = 0.5$ için N değerinin değişimine göre Tablo 4.2.5'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.2.6. Örnek 4.2.4'ün $h_{00}(t) = \lfloor t \rfloor$ için tam ve Dickson polinom çözümlerinin karşılaştırılması.

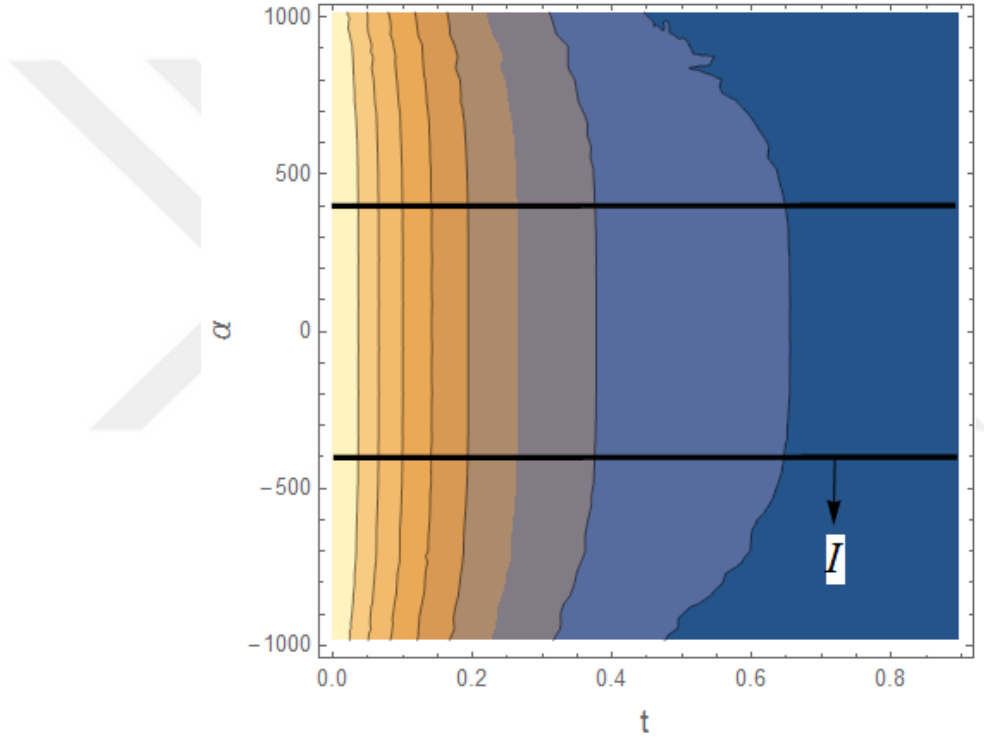
Tablo 4.2.5. Örnek 4.2.4 için mutlak ve δ_N hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

t_i	$ e_6(t_i) $	$ e_7(t_i) $	$ e_8(t_i) $
0.0	$1.56e-12$	$9.54e-12$	$4.97e-14$
0.2	$2.34e-04$	$2.99e-05$	$4.03e-06$
0.4	$1.08e-04$	$1.59e-05$	$1.58e-06$
0.6	$7.13e-05$	$1.32e-05$	$7.40e-07$
0.8	$2.49e-04$	$1.41e-05$	$7.93e-06$
0.9	$1.00e-02$	$2.01e-03$	$3.62e-04$
δ_N	$4.09e-03$	$7.59e-04$	$1.28e-04$

Örnek 4.2.5. [123] Kararlılık teorisinde kullanılan Hayes diferansiyel denklemini

$$y'(t) = \varepsilon y(t) + \beta y(t - \tau) + g(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

olmak üzere $y(0) = y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Gecikme parametresi $\tau = 1$ ve farklı ε , β parametreleri için tam çözüm $y(t) = e^t$ 'dir. Problem çözüldükten sonra farklı ε ve β parametreleri için Dickson polinom çözümleri Şekil 4.2.8'de gösterilir.

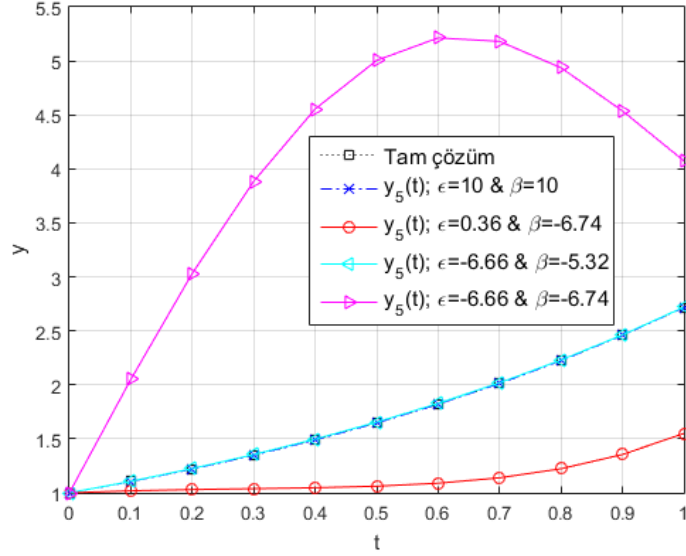


Şekil 4.2.7. Örnek 4.2.4 için $y_8(t)|_{\alpha}$ kararlı çözümünün $I = [-4 \times 10^2, 4 \times 10^2]$ aralığındaki kontur grafiği.

Örnek 4.2.6. [124] Gecikmeli ve sönümlü osilatör denklemini

$$y''(t) + y'(t-1) + y(t) = 1 - \sin(2-t) + 0.5 \sin(2-t), \quad 1 \leq t \leq 2,$$

olmak üzere $y(1) = 0.459698$ ve $y'(1) = 0.841471$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Tam çözümü



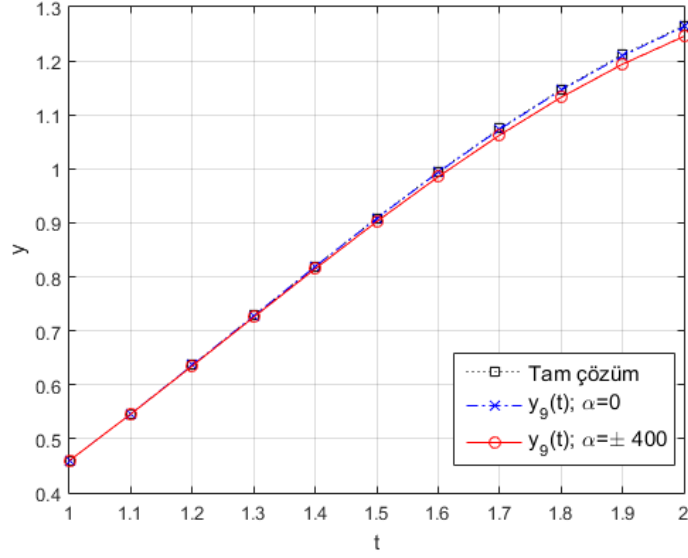
Şekil 4.2.8 Örnek 4.2.5 için Dickson polinom çözümünün ε ve β parametrelerine göre davranışı.

$$y(t) = 1 - \cos(t) + 0.5(t-1)\cos(t-1) - 0.5\sin(t-1),$$

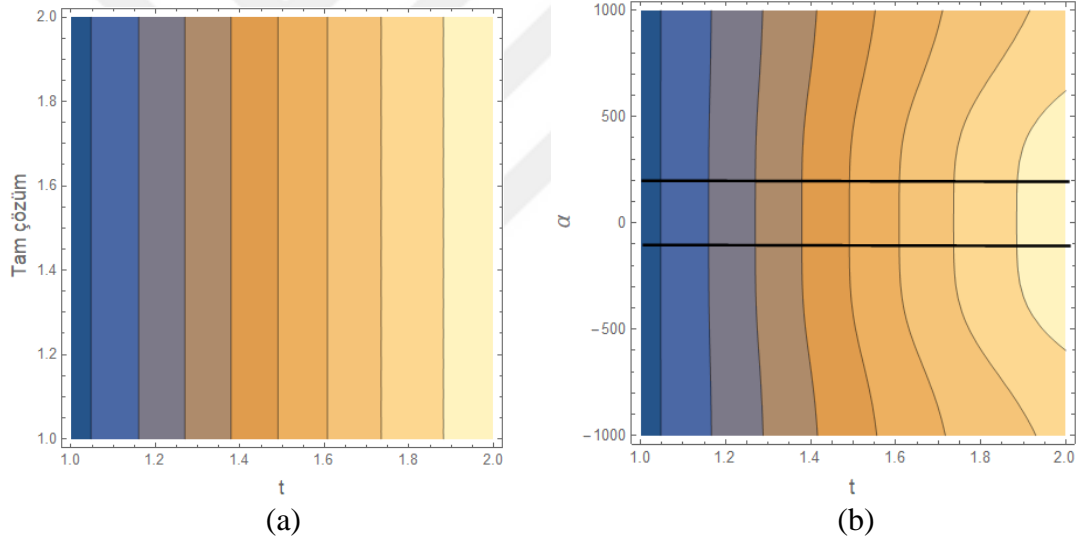
şeklinindedir. $N=9$ alarak problem çözülsün. Tablo 4.2.6’da elde edilen sonuçlar, spline metodunun [124] sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Görüleceği üzere daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 4.2.9, tam çözüm ile Dickson polinom çözümünün arasındaki tutarlılığı göstermektedir. Ayrıca, Şekil 4.2.10 bu çözümlerin kontur çizgilerini göstermektedir.

Tablo 4.2.6. Örnek 4.2.6 için $|e_N(t_i)| = |y(t) - y_N(t)|$ ve $|e_N^*(t_i)| = |y'(t) - y_N'(t)|$ hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

t_i	$ e_9(t_i) $ $\alpha = 0.1$	Spline metodu $ e_9(t_i) $ [124]	$ e_9^*(t_i) $ $\alpha = 0.1$	Spline metodu $ e_9^*(t_i) $ [124]
1.25	$1.98e-04$	$1.27e-02$	$1.25e-03$	$4.40e-02$
1.50	$7.20e-04$	$2.39e-02$	$2.56e-03$	$4.32e-02$
1.75	$1.42e-03$	$3.32e-02$	$2.98e-03$	$2.86e-02$
2.00	$2.15e-03$	$3.72e-02$	$2.75e-03$	$1.83e-03$



Şekil 4.2.9. Örnek 4.2.6 için Dickson polinom çözümünün α parametresine göre davranışı.



Şekil 4.2.10. Örnek 4.2.6 için; (a) Tam çözümün kontur grafiği, (b) Dickson polinom çözümünün $\alpha \in [-100, 100]$ aralığındaki kontur grafiği.

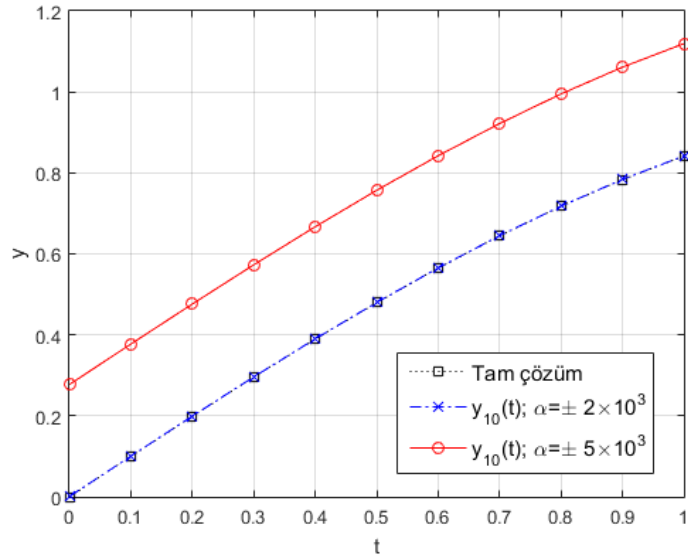
Örnek 4.2.7. Üçüncü dereceden çoklu gecikmeli ve değişken katsayılı diferansiyel denklemi

$$y'''(t) - t^2 y''(t+1) + e^t y'(0.5t-1) - (t^3 + 1)y(t-\pi) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

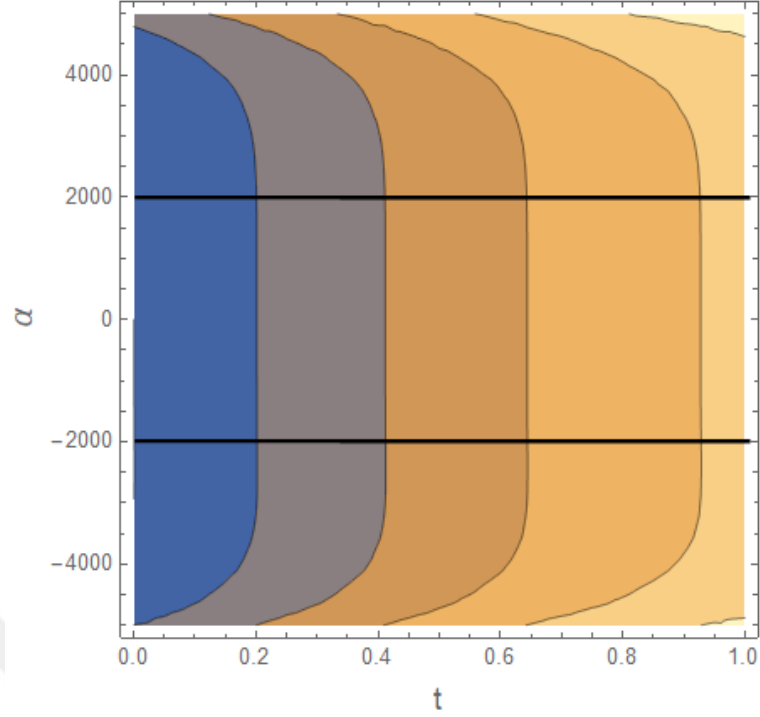
olmak üzere $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ve $y''(0) = 0$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Denklemin tam çözümü $y(t) = \sin(t)$ 'dir ve

$$g(t) = e^t \cos(1 - 0.5t) - \cos(t) - (1 + t^3) \sin(t) + t^2 \sin(t + 1),$$

şeklindedir. Problem, hesaplama limiti $N=10$ olarak çözülsün. Dickson polinom çözümü, $\alpha \in [-5 \times 10^3, 5 \times 10^3]$ aralığında incelensin. Şekil 4.2.11 tam çözüm ile elde edilen çözümleri farklı α parametresine göre karşılaştırmaktadır. Ayrıca, Şekil 4.2.12 Dickson polinom çözümünün kontur çizgileri $\alpha \in [-5 \times 10^3, 5 \times 10^3]$ aralığında gösterilmektedir. Bu şekilden görüleceği üzere kararlı çözümler, $\alpha \in [-2 \times 10^3, 2 \times 10^3]$ aralığında yer almaktadır.



Şekil 4.2.11. Örnek 4.2.7 için Dickson polinom çözümünün α parametresine göre davranışı.



Şekil 4.2.12. Örnek 4.2.7 için kararlı çözümün $\alpha \in [-2 \times 10^3, 2 \times 10^3]$ aralığındaki kontur grafiği.

4.3. Bazı Kesirli Model Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, bazı kesirli mertebeden model diferansiyel denklemleri çözmek için Dickson matris-sıralama metodunu uygulanacaktır. Ele alınan denklemlerin genel formülü

$$\sum_{k=0}^{m_1} P_k(t) y^{(\beta_k)}(t) + \sum_{r=1}^{m_2} Q_r(t) y^{(\gamma_r)}(t) y^r(t) = g(t), \quad m_1 \geq m_2, \quad (4.28)$$

olmak üzere ve

$$\sum_{i=0}^{m_3-1} y^{(i)}(a) = \psi_i, \quad m_3 = \max\{\lceil \beta_k \rceil : 0 \leq k \leq m_1\}, \quad (4.29)$$

başlangıç koşulları altında incelenecektir. Burada, $\{\beta_k, \gamma_r\} \in \mathbb{R}^{0+}$, $P_k(t)$, $Q_r(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlıdır, ayrıca ψ_i değerleri reel sayılardır.

Dickson polinom çözümlerini (3.2) formunun, (3.3) matris bağıntısı altında elde edilecektir ve matris sisteminde, (3.11) standart sıralama noktaları kullanılacaktır.

(3.3) matris bağıntısı, Caputo anlamındaki kesirli türeviyle [77] birleştirilerek aşağıdaki matris bağıntısını elde edilir:

$$y^{(\beta_k)}(t) = {}^C D_0^{\beta_k} y(t) = \mathbf{X}^{(\beta_k)}(t) \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y}, \quad \beta_k \in \mathbb{R}^{0+}, \quad (4.30)$$

burada,

$$\mathbf{X}^{(\beta_k)}(t) = \begin{bmatrix} {}^C D_0^{\beta_k}(1) & {}^C D_0^{\beta_k}(t) & \cdots & {}^C D_0^{\beta_k}(t^N) \end{bmatrix},$$

ve ${}^C D_0^{\beta_k}$ gösterimi Caputo anlamındaki türev gösterimidir (bkz. Caputo türevi [77]).

Benzer şekilde, $y^{(\gamma_r)}(t)$ ifadesi, (4.30) matris bağıntısı biçiminde yazılabilir. Sıralama noktaları yardımıyla, (4.28) denkleminin doğrusal kısmının matris formu

$$[\mathbf{W}]_{(N+1) \times 1} = \sum_{k=0}^{m_1} \mathbf{P}_k \mathbf{X}^{(\beta_k)} \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{Y},$$

burada,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(t_0) \\ W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_N) \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(t_N) \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Diğer taraftan, (4.28) denkleminin doğrusal olmayan kısmının matris formu

$$\left[\mathcal{Q}_r(t) y^{(\gamma_r)}(t) y^r(t) \right] = \underbrace{\prod_{k=1}^r \mathcal{Q}_r \mathbf{X}^{(\gamma_r)} \mathbf{S}(\alpha) \mathbf{X}^{*k} \mathbf{S}^{*k}(\alpha) \mathbf{Y}^{*r}}_{\mathbf{Z}_r}, \quad (4.31)$$

burada, $r = 1, 2, \dots, m_2$,

$$\mathbf{Z}_r = \left[z_{pq}^r \right]_{(N+1) \times (N+1)^{r+1}}, \quad p = 0, 1, \dots, (N+1), \quad q = 0, 1, \dots, (N+1)^{r+1},$$

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_r(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_r(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{Q}_r(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{*k} = \text{diag} \left[\mathbf{X}(t_i) \right]_{(N+1)^k \times (N+1)^{k+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{S}^{*k}(\alpha) = \text{diag} \left[\mathbf{S}^{*(k-1)}(\alpha) \right]_{(N+1)^{k+1} \times (N+1)^{k+1}}, \quad k=1 \text{ için: } \mathbf{S}^{*(k-1)}(\alpha) = \mathbf{S}(\alpha),$$

ve

$$\mathbf{Y}^{*r} = \left[y_0 \mathbf{Y}^{*(r-1)} \quad y_1 \mathbf{Y}^{*(r-1)} \quad \cdots \quad y_N \mathbf{Y}^{*(r-1)} \right]_{1 \times (N+1)^{r+1}}^T, \quad r=1 \text{ için: } \mathbf{Y}^{*(r-1)} = \mathbf{Y},$$

olacaktır. (4.30) ve (4.31) matris denklemlerini kullanarak (4.28) denkleminin temel matris denklemleri

$$\mathbf{W}\mathbf{Y} + \sum_{r=1}^{m_2} \mathbf{Z}_r \mathbf{Y}^{*r} = \mathbf{G}, \quad (4.32)$$

olarak oluşturabilir.

(4.32) denkleminde yer alan \mathbf{W} matrisinin son m_3 satırını kaldırıp, (3.3) matris bağıntısı yardımıyla oluşturulan başlangıç koşullarının matris bağıntıları, \mathbf{W} matrisinde yerine yazıldıktan sonra arttırılmış matris sistemi

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{Z}}_r \mathbf{Y}^{*r} = \tilde{\mathbf{G}}, \quad r = 1, 2, \dots, m_2,$$

olarak elde edilir. Bu matris sistemini çözümünden oluşan katsayıları, (3.2) formunda yerine yazarak çözüme ulaşılır.

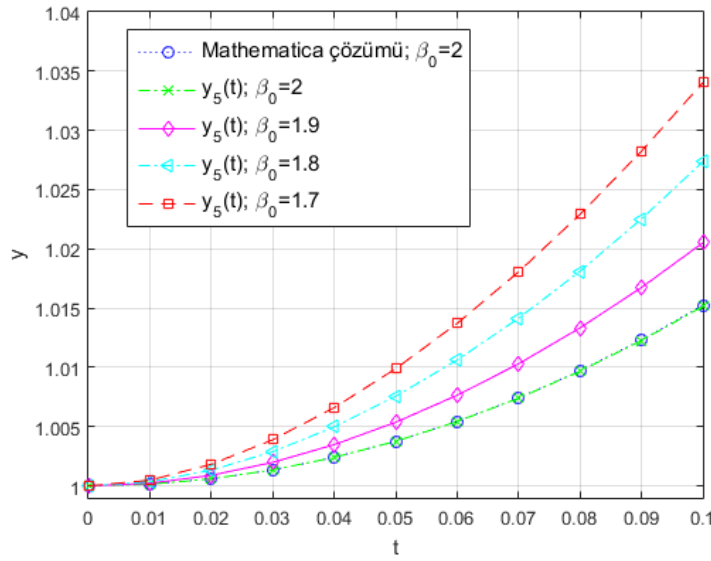
4.3.1. Model Problemler

Bu bölümde, sunulan metodun doğruluğunu ve güvenilirliğini test etmek için üç adet model problem ele alınacaktır ve elde edilen çözümler, α parametresine göre kontur çizgileri yardımıyla kararlılığını incelenecektir.

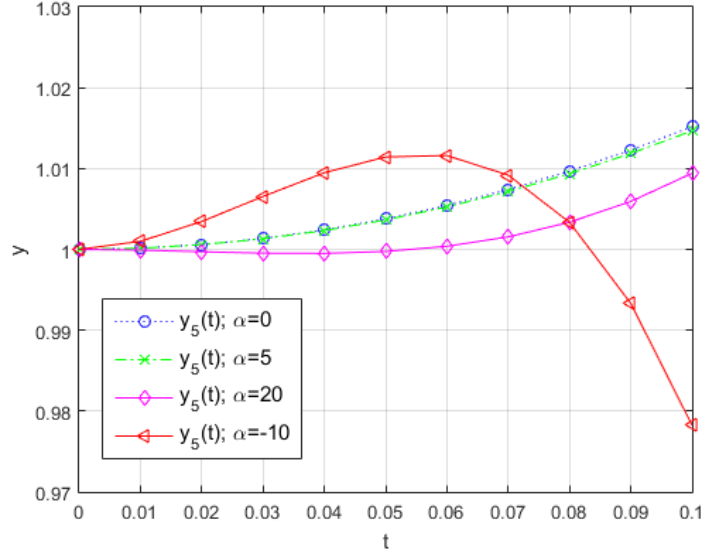
Model 4.3.1. [125] Yarı iletkenin elektrik alanı için kullanılan ikinci tip kesirli Painlevé diferansiyel denklemini

$$y^{(\beta_0)}(t) - ty(t) - 2y^3(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 1 < \beta_0 \leq 2,$$

olmak üzere $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Problemin tam çözümü bilinmemektedir. Metodu $N=2(1)7$ hesaplama limitlerini uygulayarak farklı β_0 için çözülsün. $y_5(t) \mid_{\alpha=0.1}$ Dickson polinom çözümü, Mathematica programı ile elde edilen çözüm ile Şekil 4.3.1'de gösterilmiştir. Ayrıca, Dickson polinom çözümünün fiziksel anlamdaki davranışı, farklı α parametreleri göz önüne alınarak Şekil 4.3.2'de verilmiştir.



Şekil 4.3.1. Model 4.3.1 için Dickson polinom çözümünün farklı kesirli türe ve göre davranışı.



Şekil 4.3.2. Model 4.3.1'in $\beta_0 = 2$ değeri için Dickson polinom çözümünün farklı α değerine göre davranışı.

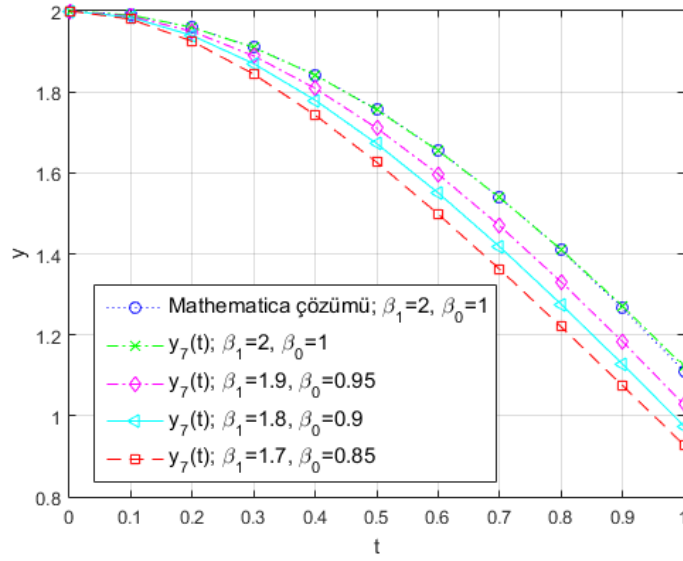
Model 4.3.2. [126] Titreşim kontrol ve elektriksel sistemlerde modellenen Van der Pol-Duffing osilatör denklemini

$$y^{(\beta_1)}(t) - P_0(t)(1 - y^2(t))y^{(\beta_0)}(t) + y(t) + Q_3(t)y^3(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

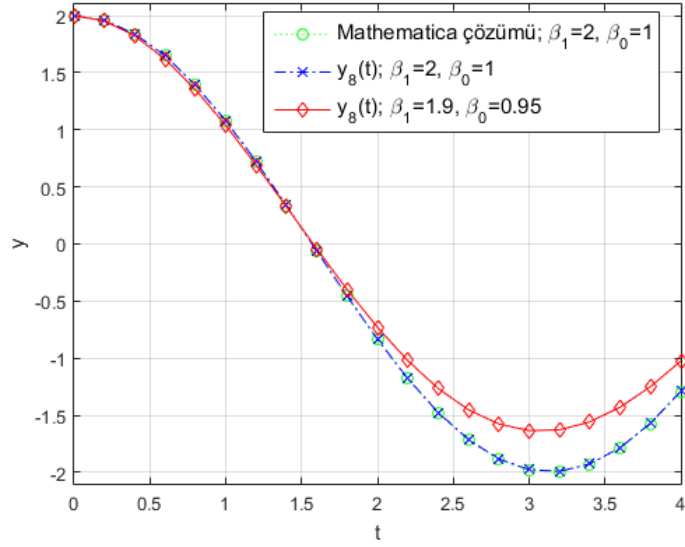
olmak üzere $y(0) = 2$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında inceleyelim. Burada, $0 < \beta_0 \leq 1$ ve $1 < \beta_1 \leq 2$ 'dir. Problemin tam çözümü bilinmemektedir. Problem, $P_0(t) = \{0.1, 0.001\}$ ve $Q_3(t) = \{0.01, 0.001\}$ olarak çözülsün. Şekil 4.3.3 $y_7(t) |_{\alpha=1}$ Dickson polinom çözümünün β_0 ve β_1 kesirli türevlerin durumlarına göre davranışını göstermektedir. Tablo 4.3.1 sunulan metodun ve Haar dalgacık metodunun (HDM) [126] mutlak hatalarını karşılaştırmaktadır. Ayrıca, $y_8(t) |_{\alpha=1}$ çözümü $T=4$ geniş zaman aralığı için Şekil 4.3.4'de simüle edilmiştir.

Tablo 4.3.1. Model 4.3.2'nin $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $P_0(t) = 0.1$ ve $Q_3(t) = 0.01$ değerlerine göre mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.

t_i	$ e_7(t_i) $ $\alpha = 1$	HDM $m=16$ [126]
0.0156	$1.94e-07$	$1.0e-05$
0.1094	$2.72e-05$	$1.0e-03$
0.2344	$2.14e-04$	$2.4e-03$
0.3594	$6.16e-04$	$3.9e-03$
0.4844	$1.06e-03$	$6.0e-03$
0.6094	$1.09e-03$	$9.1e-03$
0.7344	$7.15e-05$	$1.43e-02$
0.8594	$3.48e-03$	$2.26e-02$
0.9844	$1.04e-02$	$3.56e-02$



Şekil 4.3.3. Model 4.3.2'nin $P_0(t) = 0.1$, $Q_3(t) = 0.01$ ve $T=1$ değerleri için Dickson polinom çözümünün β_0 ve β_1 'e göre davranışı.

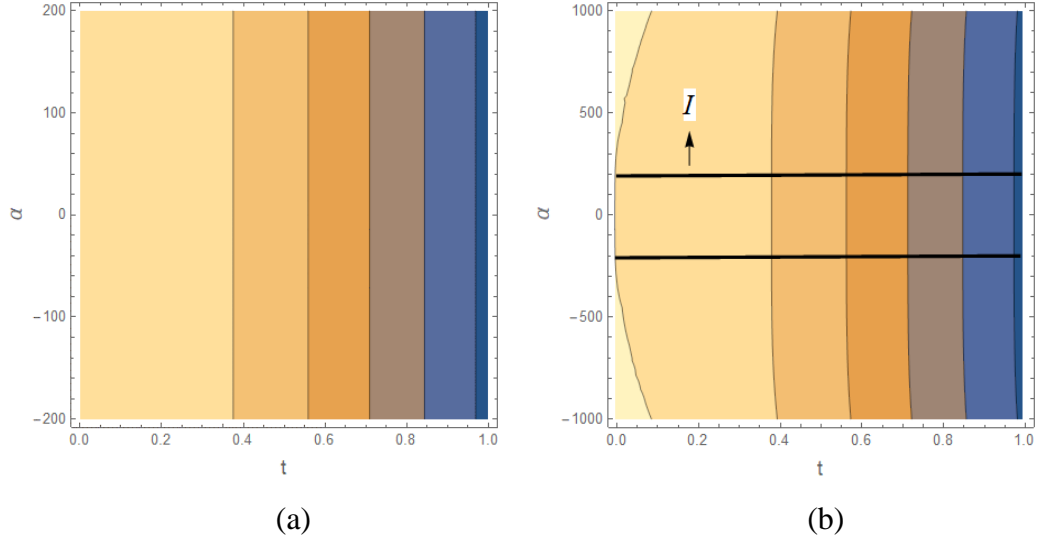


Şekil 4.3.4. Model 4.3.2'nin $P_0(t) = Q_3(t) = 0.001$ ve $T=4$ değerleri için çözümlerin geniş aralıktaki simülasyonu.

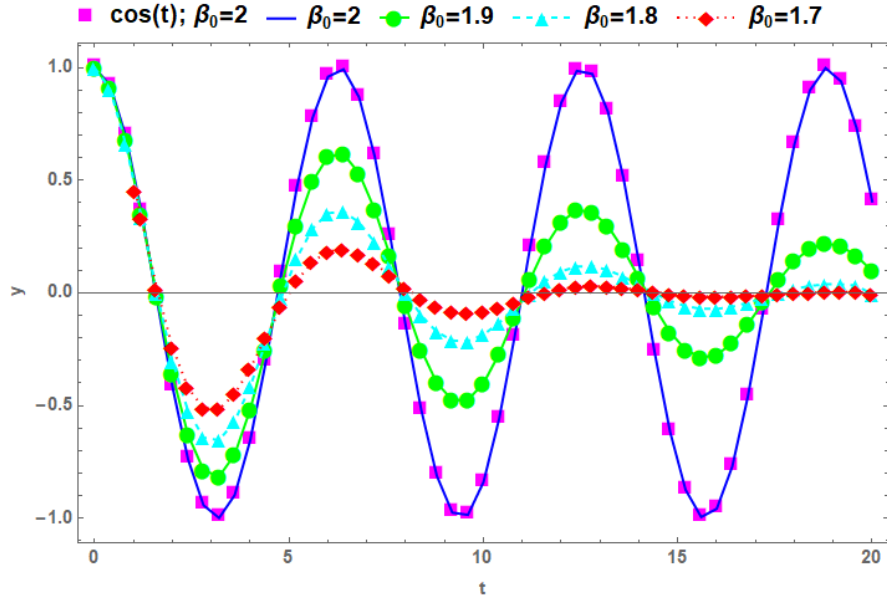
Model 4.3.3. [127-129] Mekaniksel titreşimlerde ortaya çıkan doğrusal osilatör denklemini

$$y^{(\beta_0)}(t) + y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 < \beta_0 \leq 2,$$

olmak üzere $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında inceleyelim. Problemin tam çözümü $y(t) = E_{\beta_0,1}(-t^{\beta_0})$ 'dır. Problem, $\beta_0 = 1.8$ için çözüldükten sonra Dickson polinom çözümünün, $\alpha \in I = [-2 \times 10^2, 2 \times 10^2]$ kararlılık aralığına karşılık gelen kontur çizgileri Şekil 4.3.5'de simüle edilmiştir. Ayrıca, $y_{30}(t) \big|_{\alpha=0.5}$ çözümü geniş zaman aralığında, β_0 kesirli türevine göre Şekil 4.3.6'da davranışı incelenmiştir.



Şekil 4.3.5. Model 4.3.3'ün $\beta_0 = 1.8$ ve $T=1$ değerleri için (a): tam çözümün kontur çizgileri alanı; (b): Dickson polinom çözümünün $I = [-2 \times 10^2, 2 \times 10^2]$ aralığındaki kararlı kontur çizgileri alanı.



Şekil 4.3.6. Model 4.3.3'ün $T=20$ için Dickson polinom çözümünün β_0 değerine göre davranışı.

5. MATCHING MATRİS-SIRALAMA METODUNUN UYGULAMASI

5.1. Birleştirilmiş Çoklu Gecikmeli Fonksiyonel Nötr Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, birleştirilmiş çoklu gecikmeli fonksiyonel nötr diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için matching polinomu matris-sıralama metodunda kullanılacaktır. Bu denklem sayesinde literatürde bulunan özel ve nötr yapıdaki denklemleri tek bir yapıda ele alınabilecektir. Burada, birleştirilmiş çoklu gecikmeli fonksiyonel nötr diferansiyel denklemleri

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(k)}(h_k(t)) + \left(Q(t) y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} R^{(j)}(t) y^{(n-j)}(\tau_j(t)) \right) = f(t), \quad (5.1)$$

olmak üzere ve

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) = \tau_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.2)$$

karişik koşulları altında sayısal çözümünü araştırılsın. Burada, $m \geq n$, $P_k(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $f(t)$ ve $\{h_k(t), \tau_j(t)\}$ fonksiyonel gecikme fonksiyonları olup $a \leq t \leq b$ aralığında analitiktirler.

(5.1) denkleminin matching polinom çözümü; (3.6) çözüm formu ile bulunacaktır ve burada tam çizge yapısı ile beraber yol çizge yapısının matching polinomu yardımıyla çözümler incelenecektir. (3.7) matris bağıntısında, $t \rightarrow h_k(t)$ yerine yazıldığında

$$y^{(k)}(h_k(t)) = \mathbf{X}(h_k(t)) \mathbf{B}^k \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad (5.3)$$

burada

$$\mathbf{X}(h_k(t)) = \begin{bmatrix} 1 & h_k(t) & h_k^2(t) & \cdots & h_k^N(t) \end{bmatrix},$$

şeklindedir ve benzer şekilde

$$y^{(n-j)}(\tau_j(t)) = \mathbf{X}(\tau_j(t)) \mathbf{B}^{n-j} \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad (5.4)$$

elde edilir. (3.11) sıralama noktaları ile birlikte (5.3) ve (5.4) matris bağıntılarını, (5.1) denkleminde yerine yazarak temel matris denklemini

$$\underbrace{\left\{ \mathbf{P}_k \mathbf{X}_k \mathbf{B}^k + \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{B}^n + \mathbf{R}^{(j)} \mathbf{X}_j \mathbf{B}^{n-j} \right\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{F}, \quad (5.5)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(t_0) \\ W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(j)} = \begin{bmatrix} R^{(j)}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R^{(j)}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R^{(j)}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(h_k(t_0)) \\ \mathbf{X}(h_k(t_1)) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(h_k(t_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_k(t_0) & \cdots & h_k^N(t_0) \\ 1 & h_k(t_1) & \cdots & h_k^N(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_k(t_N) & \cdots & h_k^N(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\tau_j(t_0)) \\ \mathbf{X}(\tau_j(t_1)) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(\tau_j(t_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_j(t_0) & \cdots & \tau_j^N(t_0) \\ 1 & \tau_j(t_1) & \cdots & \tau_j^N(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tau_j(t_N) & \cdots & \tau_j^N(t_N) \end{bmatrix},$$

matris formları mevcuttur. (5.5) matris denklemini kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{Y} = \mathbf{F} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W} ; \mathbf{F}], \quad (5.6)$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan, (5.2) koşullarının matris bağıntısı

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = \tau_i \Rightarrow [\mathbf{U}_i ; \tau_i], i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.7)$$

olarak ifade edilir ve burada

$$\mathbf{U}_i = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \dots \quad u_{iN}] = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} \mathbf{X}(a) + b_{ik} \mathbf{X}(b)] \mathbf{B}^k \mathbf{K} \mathbf{Y},$$

matris bağıntısı mevcuttur.

Daha önceki Dickson matris-sıralama metodunda olduğu gibi herhangi m satırı, (5.6) sisteminden kaldırıldıktan sonra (5.7) koşul matrisleri (5.6) sistemine eklenir ve bu arttırılmış matris sistemi çözüldükten sonra bilinmeyen matching polinom katsayıları elde edilir. Bu katsayılar (3.6) çözüm formunda yerine yazıldığında matching polinom çözümünü elde edilir.

5.1.1. Hata Analizi ve Laplace-Padé Metodu Yardımıyla Çözümün Salınım Hareketi

Bu bölümde hata analizini uygulamak için Bölüm 4.2.1’de aktarılan kalan hata analizinin benzer yapısı takip edilecektir. Burada kalan fonksiyonu

$$R_N(t) = \sum_{k=0}^m P_k(t) y_N^{(k)}(h_k(t)) + \left(Q(t) y_N^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} R^{(j)}(t) y_N^{(n-j)}(\tau_j(t)) \right) - f(t),$$

olarak tanımlıdır. Hata analizi uygulandıktan sonra $e_{N,M}(t)$ tahmini hata fonksiyonu bulunup düzeltilmiş matching polinom çözümü $y_{N,M}(t) = y_N(t) + e_{N,M}(t)$ olarak elde edilecektir.

Diğer taraftan, yakın tarihte, Pezza ve Pitolli [28] kendi metotlarının tutarlılığını ölçmek için tam ve yaklaşık çözümü içeren bir yakınsaklık oran testi

uyguladılar. Burada bir problemin tam çözümü olsun veya olmasın, kalan fonksiyonun, metodun tutarlılığını gözlemlemek için daha iyi bir yol sağladığını gösterilmesi amaçlanmaktadır. Bu sebeple, Pezza ve Pitolli [28]'nin formülü ve kalan fonksiyonu yardımıyla güncel bir yakınsaklık oran testini sonuç olarak verilsin.

Sonuç 5.1. $R_N(t)$ kalan fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında analitik olsun, bu takdirde N hesaplama limitine karşılık gelen yakınsaklık testi

$$Cr_N = \log \left(\frac{\max_{a \leq x \leq b} \{|R_N(x)|\}}{\max_{a \leq x \leq b} \{|R_{N+1}(x)|\}} \right) \frac{1}{\log(2)} > 0,$$

olarak hesaplanır. Burada, $Cr_N < 0$ kalırsa yakınsaklık tutarlılığı sağlanmaz.

Ayrıca, matching polinom çözümünün geniş zaman aralığında salınım hareketini tahmin etmek bir hayli zor olacaktır. Bu yüzden, matching matris-sıralama metodunu, Laplace-Padé metodu [130,131] ile birleştirerek çözümlerin geniş aralıktaki salınım hareketini belirlenebilecektir. Burada, Laplace-Padé metodu, Padé yaklaşım yöntemi [132] ve Laplace dönüşümünden oluşmaktadır. Padé yaklaşım yönteminin ve Laplace dönüşümün detaylı bilgisi [130-132] çalışmalarında bulunabilir.

(3.6) matching polinom çözümünü, Laplace-Padé metodunda [130,131] kullanarak, çözümün salınım hareketi aşağıdaki algoritma ile elde edebilir:

- $G(s) \leftarrow L\{y_N(t)\} = \int_0^{\infty} y_N(t) e^{-st} dt$, ($L\{\cdot\}$: Laplace dönüşümü);
- $G\left(\frac{1}{t}\right)_{s \rightarrow 1/t} \leftarrow G(s)$;
- $H(s) \leftarrow H\left(\frac{1}{t}\right)_{t \rightarrow 1/s} \leftarrow P\left[G\left(\frac{1}{t}\right)\right]$, burada $P[\cdot]$: Padé yaklaşım yöntemidir [132];
- $y_{p,N}(t) \leftarrow L^{-1}\{H(s)\}$, burada $y_{p,N}(t)$, Padé-matching polinom çözümüdür ve $L^{-1}\{\cdot\}$: ters Laplace dönüşümüdür.

Böylece, matching polinom çözümü ile elde edilen yeni çözümün salınımlı hareketi detaylıca incelenebilir olacaktır.

5.1.2. Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde, metodun verimliliğini gözlemlemek için aydınlatıcı bazı uygulamaları ele alınacaktır. Sayısal sonuçlar tablolarda, grafiksel sonuçlar ise şekillerde resmedilecektir. Burada, $|e_N^K(t)|$ ve $|e_N^P(t)|$ fonksiyonları, sırasıyla tam ve yol çizgesinin matching polinomuna dayanan metodun sonuçları göstermektedir. Benzer şekilde $y_N^K(t)$ ve $y_N^P(t)$ çözümleri gösterilmektedir.

Uygulama 5.1.1. [133] Nötr gecikmeli diferansiyel denklemi

$$y'(t) + \frac{1}{4}y'\left(t - \frac{1}{2}\right) = -y(t) + \frac{1}{4}y(t-1) + \frac{1}{4}y\left(t - \frac{3}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2},$$

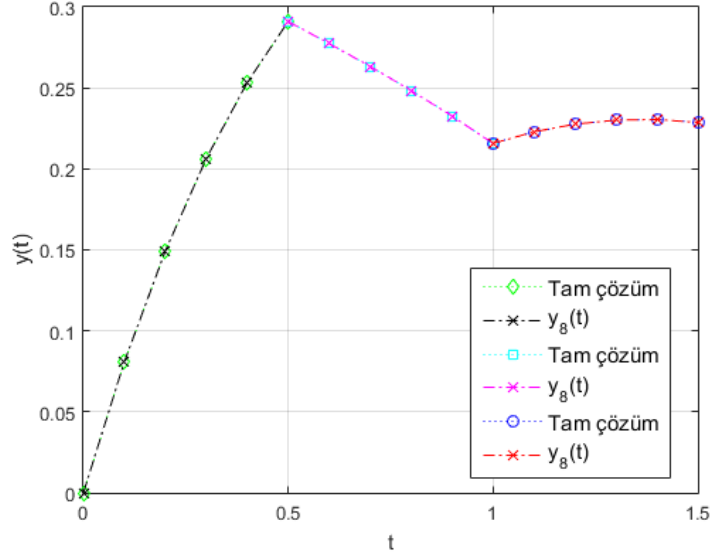
ele alınsın. Burada, denklemin parçalı aralıkta düzgün-olmayan tam çözümü aşağıdaki gibidir:

$$y(t) = -\frac{11}{8}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{11}{8}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2};$$

$$y(t) = \frac{5}{4} - \frac{t}{2} - \frac{11t}{32}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)} - \frac{11}{8}e^{-t} + \frac{19}{64}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1;$$

$$y(t) = \frac{43}{32} - \frac{3t}{8} - \frac{11t^2}{256}e^{-(t-1)} - \frac{11t}{32}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)} - \frac{9t}{64}e^{-(t-1)} + \frac{19}{64}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)} - \frac{9}{256}e^{-(t-1)} - \frac{11}{8}e^{-t}, \quad 1 \leq t \leq \frac{3}{2}.$$

Ayrıca, denklemin bu aralıklarda tanımlanan başlangıç koşulları sırasıyla $y(0) = 0$, $y(0.5) = 0.2910203$ ve $y(1) = 0.2157346$ şeklindedir. Problemi, tam çizge ile kurulmuş metodun, hesaplama limiti $N=8$ ve CLSN alınarak çözülsün. Metodun kesinliğini değerlendirebilmek için elde edilen çözümler, farklı aralıktaki tam çözümler ile Şekil 5.1.1'de gösterilmiştir. Diğer taraftan, Fabiano ve Payne [133]'nin çalışmasındaki Şekil 1'den görüleceği üzere sunulan metodun daha iyi yaklaşım sağladığı görülmektedir.



Şekil 5.1.1. Uygulama 5.1.1 için parçalı aralıktaki matching polinom ve tam çözümlerinin karşılaştırılması.

Uygulama 5.1.2. [134,135] Elektrodinamikte kullanılan fonksiyonel pantograf denklemini

$$y'(t) - y\left(\frac{t}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{t}{3}\right)y\left(\frac{t}{6}\right) - 2 \sin\left(\frac{t}{3}\right)y\left(\frac{t}{6}\right) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

olmak üzere ve $y(0) = 0.5$ başlangıç koşulu altında ele alalım. Burada, $T = \{1, 5, 14\}$, sınımlı tam çözümlü $y(t) = 0.5(\cos(2t) + \sin(2t))$ 'dir ve

$$f(t) = \cos(2t) - \sin(2t) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2t}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2t}{3}\right),$$

fonksiyonu mevcuttur. Denklemi, SSN ve CLSN kullanarak hesaplama limiti $N=2$ 'den $N=10$ 'a kadar alınarak çözülsün. Elde edilen sonuçlar, Adomian ayrıştırma [134] ve direkt [135] metotların sonuçları ile Tablo 5.1.1'de karşılaştırılmıştır. Ayrıca, kalan hata analizi uygulanarak yaklaşık çözümler Tablo 5.1.1'de geliştirilmiştir. Tablo 5.1.1'den dikkat edileceği üzere sunulan metot, belirtilen diğer metotlardan daha iyi yaklaşım sağlamıştır. Tablo 5.1.2 metodun işlem süresini ve L_∞ hata hesabını farklı N ve çizge tabanlı metoda göre karşılaştırmaktadır. Buradan kolayca görülür ki tam çizge

yapısını içeren metot, yol çizgesi yapısını içeren metottan çok daha iyi sonuçlar vermektedir. Tam ve yol çizgelerini içeren metodun ürettiği mutlak hata değerleri, CLSN’nda Tablo 5.1.3’te verilmiştir. Şekil 5.1.2 CLSN ve SSN’nda L_∞ hatalarını logaritmik ölçüde göstermektedir. Bu şekilden görüleceği üzere CLSN içeren metot N arttırıldıkça çok daha tutarlıdır.

Diğer taraftan, Padé-matching polinom çözümü, [0,14] zaman aralığında tam çözüm ile beraber Şekil 5.1.3’te verilmiştir. Ayrıca, matching polinom çözümünün [0,5] zaman aralığında faz düzlemi oluşturularak Şekil 5.1.4’de resmedilmiştir. Tam çizge yapısını içeren metodun yakınsaklık tutarlılığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\{Cr_7, Cr_8, Cr_9, Cr_{10}, Cr_{11}, Cr_{12}\} = \{6.00, 1.80, 6.36, 2.12, 6.65, 2.39\} > 0.$$

Tablo 5.1.1. Uygulama 5.1.2 için hata hesaplamalarının farklı sıralama ve metotlara göre karşılaştırılması.

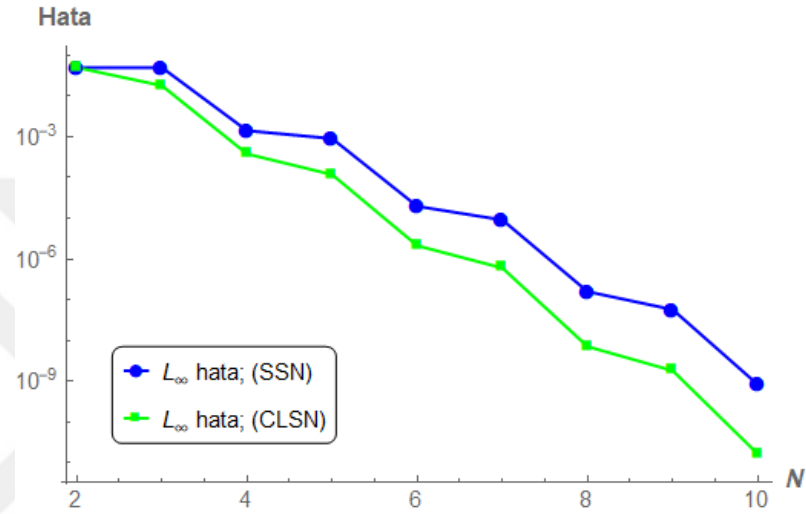
t_i	$ e_6^K(t_i) $ CLSN	$ e_{10}^K(t_i) $ CLSN	$ E_{10,12}^K(t_i) $ CLSN	$ e_{10}^K(t_i) $ SSN	Adomian metodu [134]	Direkt metodu [135]
0.2	$4.68e-08$	$9.72e-13$	$9.99e-16$	$3.02e-12$	$7.47e-11$	$2.98e-12$
0.4	$1.82e-07$	$7.71e-13$	$3.55e-15$	$3.02e-12$	$2.44e-09$	$9.65e-13$
0.6	$1.51e-08$	$3.38e-12$	$8.88e-15$	$2.34e-12$	$1.88e-08$	$3.17e-12$
0.8	$7.23e-07$	$1.07e-11$	$1.22e-15$	$5.67e-14$	$8.07e-08$	$6.27e-13$
1.0	$2.12e-06$	$1.60e-11$	$2.54e-14$	$8.16e-10$	$2.50e-07$	$3.09e-12$

Tablo 5.1.2. Uygulama 5.1.2 için CPU süresinin ve L_∞ hata hesabının N değerine ve çizge yapısına göre karşılaştırılması.

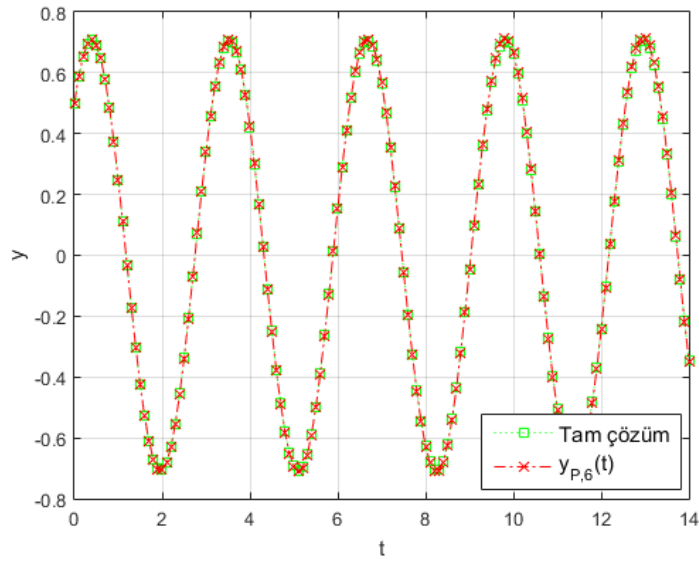
$y_N^{K,P}(t)$	$y_{50}^K(t)$	$y_{50}^P(t)$
Süre (sn.)	0.109	5.672
L_∞ hata	$1.55e-15$	$7.21e-13$
$y_N^{K,P}(t)$	$y_{200}^K(t)$	$y_{200}^P(t)$
Süre (sn.)	2.594	208.13
L_∞ hata	$7.43e-14$	$1.66e-01$

Tablo 5.1.3. Uygulama 5.1.2 için CLSN'daki mutlak hataların karşılaştırılması.

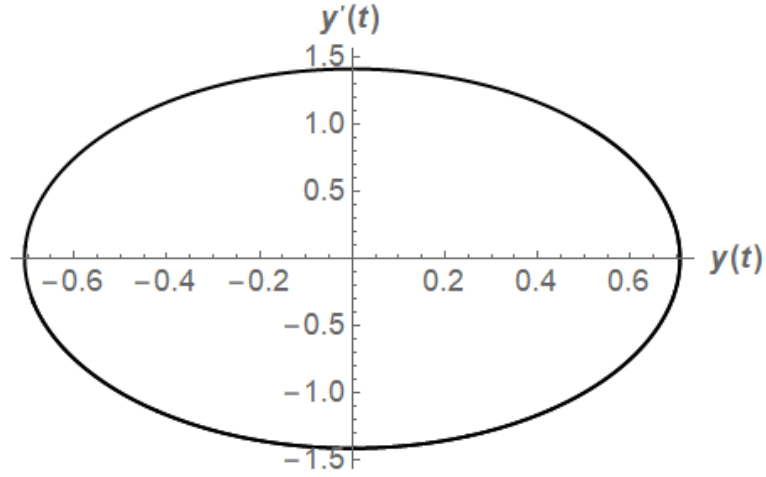
t_i	$ e_{10}^K(t_i) $	$ e_{10}^P(t_i) $
0.095492	$3.21632e-13$	$3.21965e-13$
0.345492	$2.43350e-12$	$2.43350e-12$
0.654509	$7.13041e-12$	$7.13063e-12$
0.904509	$1.35744e-11$	$1.30747e-11$
1.000000	$1.60165e-11$	$1.60166e-11$



Şekil 5.1.2. Uygulama 5.1.2 için farklı sıralama noktalarına göre L_∞ hata hesabının N değerine göre logaritmik ölçüde karşılaştırılması.



Şekil 5.1.3. Uygulama 5.1.2 için Padé-matching polinom ve tam çözümünün $[0,14]$ zaman aralığındaki salınım hareketi.



Şekil 5.1.4. Uygulama 5.1.2 için $y_{12}(t)$ çözümünün $[0,5]$ aralığındaki faz düzlemi.

Uygulama 5.1.3. [136] Duruma bağlı gecikme içeren diferansiyel denklemini

$$y'(t) + y(y(t)) - y(t) = \frac{1}{t} - \ln(t) + \ln(1 + \ln(t)), \quad 1 \leq t \leq 5,$$

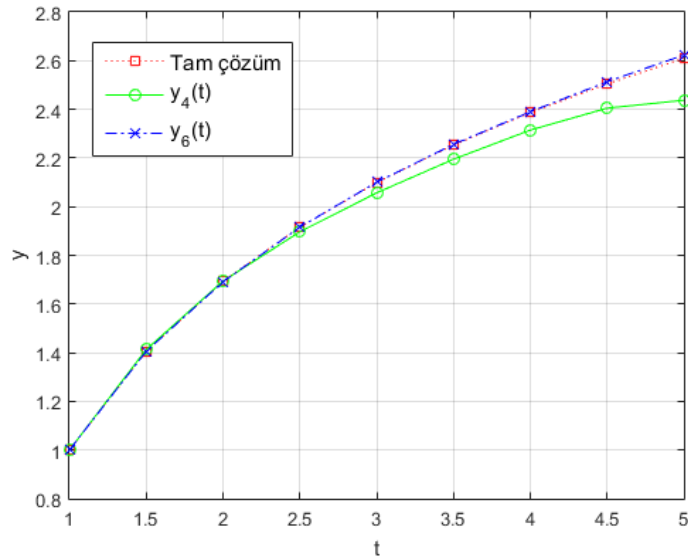
olmak üzere $y(1) = 1$ başlangıç koşulu altında ele alınsın. Problemin tam çözümü $y(t) = \ln(t) + 1$ 'dir. Bellen ve Zennaro [136] duruma bağlı gecikme içeren diferansiyel denklemler için bir yakınsaklık teoremi oluşturdu ve bu problemin yakınsaklık sonucunun, oluşturdukları teoremi sağladığını gösterdiler. Şimdi, $N = 12$ olarak, farklı çizge yapılarını içeren metot ile problem çözülsün. CLSN'ndaki sonuçlar Tablo 5.1.4'de verilmiştir. Kolayca görülebilir ki sayısal sonuçlar, farklı çizge yapısını içeren metoda göre değişmiştir. Elde edilen çözümlerin yer değiştirmesi Şekil 5.1.5'de tam çözüm ile karşılaştırılmıştır. Diğer taraftan, tam çizge yapısını içeren metoda göre yakınsaklık tutarlılığı

$$\{Cr_{10}, Cr_{11}, Cr_{12}, Cr_{13}, Cr_{14}\} = \{1.22, 1.23, 1.25, 1.26, 1.27\} > 0,$$

olarak elde edilir.

Tablo 5.1.4. Uygulama 5.1.3 için CLSN’nda farklı çizge yapısını içeren metodun mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.

t_i	$ e_{12}^K(t_i) $	$ e_{12}^P(t_i) $
1.267949	$8.76517e-07$	$1.75461e-05$
2.000000	$2.37452e-06$	$1.64821e-05$
3.000000	$1.84892e-06$	$1.65046e-05$
4.000000	$5.11436e-07$	$1.67478e-05$
4.732051	$2.19583e-06$	$1.89133e-05$
5.000000	$3.16548e-06$	$1.53346e-04$



Şekil 5.1.5. Uygulama 5.1.3 için çözümlerin karşılaştırılması.

Uygulama 5.1.4. Üçüncü mertebeden birleştirilmiş fonksiyonel nötr diferansiyel denklemi

$$y'''(t^2) + ty''(t) - e^t y''(t^3 - 1) - (t+1)y'(t-1) + y(0.5t) = f(t),$$

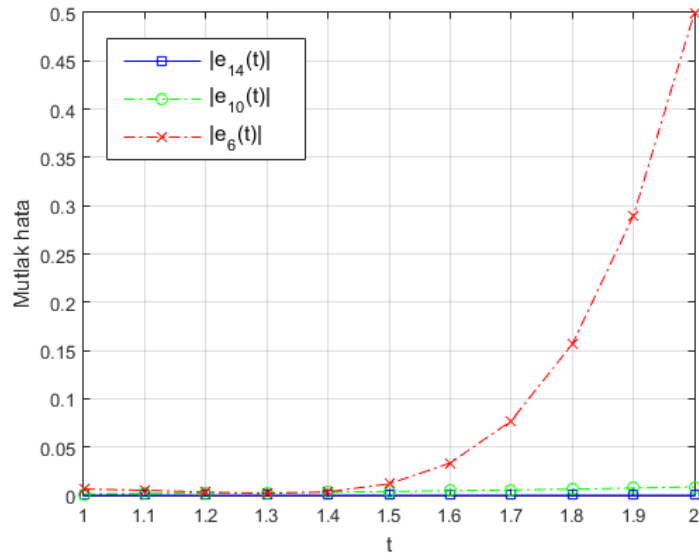
olmak üzere $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ve $y''(0) = -4$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Burada, $0 \leq t \leq T$, $T = \{2, 150\}$,

$$f(t) = \cos(t) - 4t \cos(2t) + 4e^t \cos(-2 + 2t^3) + 2(1+t) \sin(-2 + 2t) + 8 \sin(2t^2),$$

ve tam çözüm $y(t) = \cos(2t)$ 'dir. $N = 6, 10$ ve 14 değerlerine göre problem çözüldüğünde, N arttırıldıkça Şekil 5.1.6'dan görüleceği üzere mutlak hata değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. $y_{P,14}(t)$ Padé-matching polinom çözümünün $[0,150]$ aralığındaki salınım hareketi tam çözüm ile beraber Şekil 5.1.7'de simüle edilmiştir. Ayrıca, matching polinom çözümünün $[0,2]$ aralığındaki tutarlılığı faz düzlemi olarak Şekil 5.1.8'de verilmiştir. Tablo 5.1.5 tam çizge içeren metodun, yol çizge içeren yapısından çok daha iyi sonuçlar aldığını göstermektedir. Tam çizge yapısını içeren metodun yakınsaklık tutarlılığı

$$\{Cr_{18}, Cr_{19}, Cr_{20}, Cr_{21}, Cr_{22}\} = \{2.41, 1.02, 1.67, 0.81, 1.85\} > 0,$$

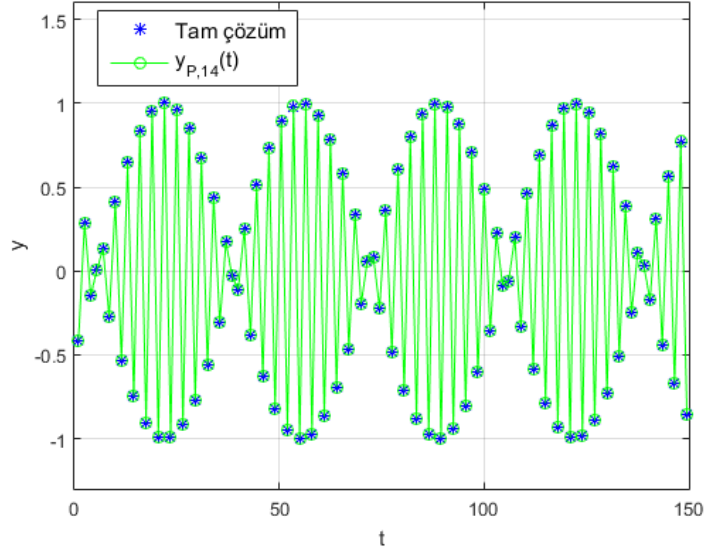
olarak elde edilir.



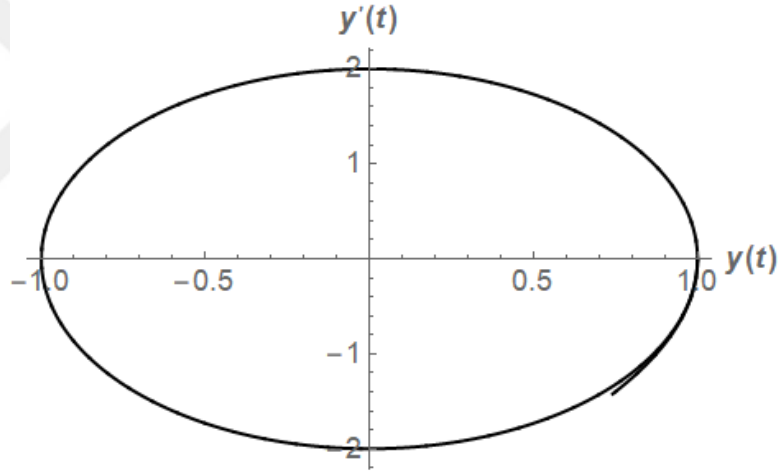
Şekil 5.1.6. Uygulama 5.1.4 için mutlak hata değerlerinin N ve t zaman değişkenine göre karşılaştırılması.

Tablo 5.1.5. Uygulama 5.1.4 için CPU süresini ve L_∞ hata hesabının N değerine ve çizge yapısına göre karşılaştırılması.

$y_N^{K,P}(t)$	$y_{100}^K(t)$	$y_{100}^P(t)$
Süre (sn.)	0.390	25.578
L_∞ hata	$2.70e-11$	$5.75e-09$



Şekil 5.1.7. Uygulama 5.1.4 için Padé-matching polinom ve tam çözümün $[0,150]$ zaman aralığındaki salınım hareketi.



Şekil 5.1.8. Uygulama 5.1.4 için $y_{14}(t)$ çözümünün $[0,2]$ aralığındaki faz düzlemi.

Uygulama 5.1.5 [137] Nötr gecikmeli diferansiyel denklemini

$$y'(t) + \sqrt{\cos t} y'(\sqrt{t}) + (\sin \sqrt{t} + e^t) y(\sin t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

olmak üzere ve $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında ele alınsın. Problemin tam çözümü

$y(t) = e^t$ 'dir ve

$$f(t) = e^t + e^{\sqrt{t}} \sqrt{\cos t} + e^{\sin t} (\sin \sqrt{t} + e^t),$$

şeklinde. Farklı N ve M değerlerine göre problemi çözülsün. Tablo 5.1.6'dan görüleceği üzere elde edilen mutlak ve L_∞ hata değerleri, Haar dalgacık seri metodunun (HDM) [137] hata değerlerine göre çok daha tutarlıdır. Buna ek olarak, kalan hata analizi ile geliştirilmiş çözümlerin sonuçları Tablo 5.1.6'da verilmiştir. Tam çizge yapısını içeren metodun yakınsaklık tutarlılığı

$$\{Cr_4, Cr_5, Cr_6, Cr_7, Cr_8, Cr_9, Cr_{10}\} = \{4.29, 4.52, 4.18, 6.69, 2.27, 6.40, 2.73\} > 0,$$

olarak elde edilir.

Tablo 5.1.6. Uygulama 5.1.5 için hata hesaplamalarının farklı sıralama noktaları ve metoda göre karşılaştırılması.

t_i	$ e_4^K(t_i) $ CLSN	$ E_{4,5}^K(t_i) $ CLSN	$ E_{4,6}^K(t_i) $ CLSN	$ E_{4,6}^K(t_i) $ SSN	HDM $M=4$ [137]
0.0625	$1.18e-05$	$8.72e-07$	$4.08e-08$	$4.24e-09$	$2.00e-04$
0.1875	$5.21e-05$	$2.42e-06$	$4.00e-08$	$6.87e-08$	$9.60e-02$
0.3125	$5.15e-05$	$5.40e-07$	$5.72e-08$	$1.18e-07$	$1.88e-02$
0.4375	$7.39e-06$	$1.47e-06$	$1.46e-08$	$2.99e-08$	$2.70e-02$
0.5625	$3.48e-05$	$5.04e-07$	$8.92e-08$	$3.80e-08$	$1.01e-02$
0.6875	$2.62e-05$	$1.95e-06$	$4.71e-08$	$3.26e-08$	$6.00e-03$
0.8125	$3.52e-05$	$1.38e-06$	$5.25e-08$	$4.58e-08$	$4.00e-03$
0.9375	$4.70e-05$	$1.51e-06$	$4.88e-08$	$3.60e-08$	$1.10e-03$
L_∞ hata	$\ e_{16}\ _\infty = 4.44e-016$			$\ e_{16}\ _\infty = 1.89e-004$ [137]	

5.2. Çoklu Gecikmeli ve Değişken Katsayılı Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, tam çizge yapısını içeren matching polinomuna dayanan matris-sıralama metodunu kullanılarak çoklu gecikmeye ve değişken katsayıya sahip kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü araştıracağız. Ele alınacak denklemler bir tek formül altında

$$\sum_{k=0}^m P_{k,n}(t) {}^M D_a^n y(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}) = f(t), \quad n \geq 0, \quad c \leq t \leq d, \quad (5.8)$$

olmak üzere ve

$$\sum_{j=0}^{\lceil n \rceil - 1} c_{j,n} D^j y(c) + d_{j,n} D^j y(d) = \tau_j, \quad (5.9)$$

karışık koşulları altında ele alınacaktır. Burada $P_{k,n}(t)$, $f(t)$ fonksiyonları $[c, d]$ aralığında analitiktir; $\lambda_{k,n}$, τ_j ve $\mu_{k,n}$ uygun sabitlerdir; ${}^M D_a^n y(t)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{R}^+$) operatörü, $y(t)$ fonksiyonun t değişkenine göre n . mertebeden tam sayı veya kesirli türevini göstermektedir; ayrıca M ifadesi Caputo (C) [77], Riemann-Liouville (RL) [74-76], Caputo-Fabrizio (CF) [80-82] ve Jumarie (J) [78,79] anlamındaki türevleri tek bir sembol altında ifade etmektedir.

Şimdi, metodu oluşturmak için gerekli matris bağıntılarını oluştursun. (5.8) denkleminin matching polinom çözümü; (3.6) çözüm formu ile elde edilip, (3.7) matris bağıntısının kesirli türevi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$${}^M D_a^n y(t) = {}^M X_{k,n}(t) KY, \quad n \in \mathbb{R}^+, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad M = \{C, CF, RL, J\}, \quad (5.10)$$

burada, $n = 0$ için

$$X_{k,0}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N],$$

ve $n \neq 0$ için

$${}^M X_{k,n}(t) = [{}^M D_a^n(1) \quad {}^M D_a^n(t) \quad \dots \quad {}^M D_a^n(t^N)],$$

matrisleri mevcuttur.

(5.10) denkleminde t yerine $\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}$ yazarak kesirli türeve ve çoklu gecikmeye sahip matris bağıntısı

$${}^M D_a^n y(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}) = {}^M X_{k,n}(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}) KY, \quad (5.11)$$

elde edilir ve burada,

$${}^M \mathbf{X}_{k,n}(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}) = \begin{bmatrix} {}^M D_a^n(1) & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}) & \cdots & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n})^N \end{bmatrix},$$

matrisi mevcuttur ve benzer olarak aşağıdaki matris $n = 0$ için elde edebilir:

$$\mathbf{X}_{k,0}(\lambda_{k,0}t + \mu_{k,0}) = \begin{bmatrix} 1 & (\lambda_{k,0}t + \mu_{k,0}) & \cdots & (\lambda_{k,0}t + \mu_{k,0})^N \end{bmatrix}.$$

(5.11) denkleminde belirtmek gerekir ki $M=RL$ alındığında bir reel sabitin türevi sıfırdan farklı çıkacaktır. Örneğin, ${}^{RL}D_0^{1/2}(1) = 1/\sqrt{t\pi}$ 'dir ki bu da $c=0$ için sonsuzluk elde edilmesine sebep olacaktır. Bu yüzden $c = 10^{-16}$ sıfıra çok yakın olduğu için hesaplamalarda kullanılacaktır.

(5.8) denkleminin temel matris denklemi, (3.11) sıralama noktalarını ve (5.11) matris bağıntısını (5.8) denkleminde yerine yazarak elde edilir:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{k,n} \mathbf{X}_{k,n} \mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{WY} = \mathbf{F}, \quad (5.12)$$

burada,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(t_0) \\ W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_N) \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{k,n} = \begin{bmatrix} P_{k,n}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{k,n}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{k,n}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{k,n} = \begin{bmatrix} {}^M \mathbf{X}_{k,n}(\lambda_{k,n}t_0 + \mu_{k,n}) \\ {}^M \mathbf{X}_{k,n}(\lambda_{k,n}t_1 + \mu_{k,n}) \\ \vdots \\ {}^M \mathbf{X}_{k,n}(\lambda_{k,n}t_N + \mu_{k,n}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^M D_a^n(1) & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t_0 + \mu_{k,n}) & \cdots & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t_0 + \mu_{k,n})^N \\ {}^M D_a^n(1) & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t_1 + \mu_{k,n}) & \cdots & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t_1 + \mu_{k,n})^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^M D_a^n(1) & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t_N + \mu_{k,n}) & \cdots & {}^M D_a^n(\lambda_{k,n}t_N + \mu_{k,n})^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [f(t_0) \quad f(t_1) \quad \cdots \quad f(t_N)]^T,$$

matris yapıları mevcuttur. (5.12) denklemi ayrıca

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{F}], \quad (5.13)$$

olarak yazılabilir.

(5.9) koşullarının matris bağıntısı

$$\mathbf{U}_j \mathbf{Y} = \tau_j \Rightarrow [\mathbf{U}_j ; \tau_j], \quad j = 0, 1, \dots, [n]-1, \quad (5.14)$$

olarak yazabilir ve burada,

$$\mathbf{U}_j = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] = \sum_{k=0}^{[n]-1} [c_{k,n} \mathbf{X}_{k,n}(c) + d_{k,n} \mathbf{X}_{k,n}(d)] \mathbf{K} \mathbf{Y},$$

matris yapısı mevcuttur.

(5.13) sisteminde yer alan m satırı kaldırıldıktan sonra (5.14) koşul matrisleri (5.13) sistemine eklenir ve bu arttırılmış matris sistemi çözüldükten sonra bilinmeyen matching polinom katsayılarını elde edilir. Bu katsayılar (3.6) çözüm formunda yerine yazıldığında matching polinom çözümüne ulaşılır. Buradaki arttırılmış matris sistemi

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(t_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-[n]+1,0} & w_{N-[n]+1,1} & \cdots & w_{N-[n]+1,N} & ; & f(t_{N-[n]+1}) \\ \mathbf{u}_{00} & \mathbf{u}_{01} & \cdots & \mathbf{u}_{0N} & ; & \tau_0 \\ \mathbf{u}_{10} & \mathbf{u}_{11} & \cdots & \mathbf{u}_{1N} & ; & \tau_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{[n]-1,0} & \mathbf{u}_{[n]-1,1} & \cdots & \mathbf{u}_{[n]-1,N} & ; & \tau_{[n]-1} \end{bmatrix},$$

formundadır ve $\text{rank } W = \text{rank } [W ; F] = N + 1$ olarak mevcuttur.

5.2.1. Kesirli Türeve Bağlı Olarak Kalan Hata Analizi

Bu bölümde hata analizini uygulamak için Bölüm 4.2.1’de aktarılan kalan hata analizinin benzer yapısı takip edilecektir. Buna ek olarak, kalan fonksiyonunun davranışı, N hesaplama limitinin yanı sıra kesirli türevin değişimine göre de bağlı olacaktır. (5.8) denklemi için kalan fonksiyonu

$$R_N(t) = \sum_{k=0}^m P_{k,n}(t) {}^M D_a^n y_N(\lambda_{k,n}t + \mu_{k,n}) - f(t),$$

olarak tanımlanır ve hata analizi uygulandıktan sonra $e_{N,M}(t)$ tahmini hata fonksiyonu bulunup düzeltilmiş matching polinom çözümü $y_{N,M}(t) = y_N(t) + e_{N,M}(t)$ elde edilecektir.

Ayrıca, buradan şu sonuç çıkar ki

$$\left. \begin{array}{l} |y(t) - y_N(t)| < \varepsilon_N \\ |y(t) - y_{N,M}(t)| < \varepsilon_{N,M} \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon_{N,M} < \varepsilon_N, \forall t \in [c, d], \quad (5.15)$$

olup, ε_N ve $\varepsilon_{N,M}$ pozitif tam sayıları sıfıra çok yakın olacaktır. Diğer bir deyişle, N ve M değerleri arttırıldıkça, $\varepsilon_{N,M}$ ve ε_N arasındaki fark artacaktır. Böylelikle, geliştirilmiş matching polinom çözümünün davranışı büyük ölçüde tahmin edilebilecektir.

5.2.2. Kesirli Model Problemler

Bu bölümde, bazı kesirli model problemleri, C, CF, RL ve J türev formüllerini içeren matching polinomuna dayanan matris-sıralama yöntemini kullanılarak çözülecektir. Sayısal sonuçlar tablolarda ve elde edilen çözümlerin davranışları farklı n türevi için şekillerde gösterilmiştir. ${}^M L_\infty$, ${}^M X_{k,n}$, ${}^M y_N(t)$, ${}^M e_N(t)$ ve ${}^M E_{N,M}(t)$ ifadeleri; $M = \{C, CF, RL, J\}$ kesirli türevlerine göre elde edilen sonuçları göstermektedir.

Model 5.2.1. [30] Periyodik olmayan koşullu ve gecikmeli kesirli diferansiyel denklemi

$${}_t^M D_0^{1/5} y(t) + y(t-1) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

olmak üzere ve $y(0) = -y(2)$ koşulları altında incelensin. Burada, $P_{0,0}(t) = P_{1,0.2}(t) = 1$, $\lambda_{0,0} = 1$, $\mu_{0,0} = -1$, $\lambda_{1,0.2} = 1$, $\mu_{1,0.2} = 0$ ve Caputo türevini kullanarak, $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) = \frac{\Gamma(3)t^{1.8}}{\Gamma(2.8)} - \frac{\Gamma(2)t^{0.8}}{\Gamma(1.8)} + t^2 - 3t + 1,$$

olarak elde edilir. Farklı kesirli türev tiplerini ve $N=3$ alarak problem çözülsün. (5.12) matris denklemi gereği

$$\underbrace{\{P_{0,0}X_{0,0} + P_{0,0.2}^M X_{1,0.2}\}}_{\tilde{W}} KY = F, \quad (5.16)$$

temel matris denklemi elde edilir. Burada,

$$P_{0,0} = P_{0,0.2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^C X_{1,0.2} = {}^J X_{1,0.2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0737 & 1.1930 \\ 0 & 1.8694 & 4.1542 \end{bmatrix}, \quad {}^{CF} X_{1,0.2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1060 & 1.1520 \\ 0 & 1.9673 & 4.2612 \end{bmatrix},$$

ve problemin tanım aralığı $10^{-16} \leq t \leq 2$ olarak alındığında, RL türevi kullanılarak

$${}^{RL} X_{1,0.2} = \begin{bmatrix} 1361.32 & 1.70e-13 & 1.89e-29 \\ 0.85894 & 1.07367 & 1.19297 \\ 0.74775 & 1.86937 & 4.15416 \end{bmatrix},$$

matrisi elde edilir.

${}^C X_{1,0,2}$, ${}^{CF} X_{1,0,2}$, ${}^{RL} X_{1,0,2}$ ve ${}^J X_{1,0,2}$ matrislerini içeren (5.16) matris denklemini hesaplanmıştır. Örnek olarak, ${}^C X_{1,0,2}$ matrisini içeren (5.16) denklemini hesaplayarak arttırılmış matris sistemini

$$[W ; F] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 1.07370 & 0.1930 & ; & -0.8807 \\ 1 & 0 & -1 & ; & -1 \end{bmatrix},$$

elde edilir. Belirtmek gerekir ki yukarıdaki matris sistemi, ${}^{CF} X_{1,0,2}$, ${}^{RL} X_{1,0,2}$ ve ${}^J X_{1,0,2}$, matris yapıları kullanıldığında farklı sayısal yapıya sahip olacaktır.

Yukarıdaki matris sistemi çözüldüğünde

$$Y = [0 \quad -1 \quad 1]^T,$$

bulunur ve matching polinom çözümü

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \sum_{n=0}^2 y_n M_n(K_n, t) = y_0 M_0(K_0, t) + y_1 M_1(K_1, t) + y_2 M_2(K_2, t) \\ &= (0) \cdot 1 + (-1) \cdot t + 1 \cdot (t^2 - 1) \\ &= t^2 - t - 1, \end{aligned}$$

olarak elde edilir ki bu çözüm, problemin tam çözümüdür. Bu bağlamda aynı çözüm, ${}^{CF} X_{1,0,2}$, ${}^{RL} X_{1,0,2}$ ve ${}^J X_{1,0,2}$ matris yapılarını kullanarak elde edildiği görülmüştür. Heris ve Javidi [30] çalışmalarında, kesirli geri diferansiyel formülünün adım boyunu $h = 0.0001$ kullanarak $y(1)$ 'in en iyi yaklaşık değerini $7.2526e - 05$ olarak elde ettiler. Görüleceği üzere burada problemin tam çözümü direkt olarak elde edilmiştir.

Model 5.2.2. [27,138,139] Newton akışkanında bir sert plakayı modelleyen Bagley-Torvik kesirli diferansiyel denklemi

$$D^2 y(t) + {}^M D_0^{3/2} y(t) + y(t) = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

olmak üzere $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında inceleyelim. C, CF, RL, J kesirli türevleri kullanılarak, $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) = \sqrt{2} \left(\cos(t) S \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right) - \sin(t) C \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right) \right), \quad f(t) = -e^{-x} + \cos(t) - \sin(t),$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t\pi}} + \sqrt{2} \cos(t) S \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right) - \sqrt{2} \sin(t) C \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right),$$

ve

$$f(t) = 0.02779t^{3.5} {}_1F_2(3; 3.75, 3.25; -t^2/4) - 0.687774t^{1.5} {}_1F_2(2; 2.75, 2.25; -t^2/4) + 0.56419 {}_1F_2(1; 1.75, 1.25; -t^2/4) / \sqrt{t},$$

belirtilen türev tipleri için sırasıyla elde edilmiştir. Burada,

$$S(t) = \int_0^t \sin \left(\frac{\pi x^2}{2} \right) dx \quad \text{ve} \quad C(t) = \int_0^t \cos \left(\frac{\pi x^2}{2} \right) dx,$$

integralleri Fresnel integralleridir [140] ve ${}_1F_2$ hipergeometrik fonksiyonu, ${}_pF_q$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun bir özel halidir [140]. Problemin tam çözümü $y(t) = \sin(t)$ 'dir. Farklı kesirli türev tiplerini içeren metodun hesaplama limitini $N=4$ 'den $N=32$ 'ye kadar alarak problem çözülsün. Ayrıca, kalan hata analizi kullanılarak elde edilen çözümler geliştirilsin. Tablo 5.2.1'de L_∞ ve düzeltilmiş L_∞ hata hesaplamaları, Fermat Tau (FTM) ve değiştirilmiş (shifted) Chebyshev Tau (SCT) işlemsel matris metotları [27,139] ile karşılaştırılmıştır. Görüleceği üzere güncel sonuçlar, belirtilen metotların sonuçlarından çok daha iyidir. Bunlara ek olarak, sunulan metodun CPU süresi, farklı N için FTM [27]'nin süresi ile karşılaştırılmıştır. Tablo 5.2.2'den görüleceği üzere sunulan metot, farklı kesirli türev tiplerini içermesine rağmen FTM'den çok daha kısa işlem süresinde çözüm üretmiştir ve fark edilecektir ki $N=32$ için CF'li metot, CF'nin kompakt eksponansiyel fonksiyon içermesi

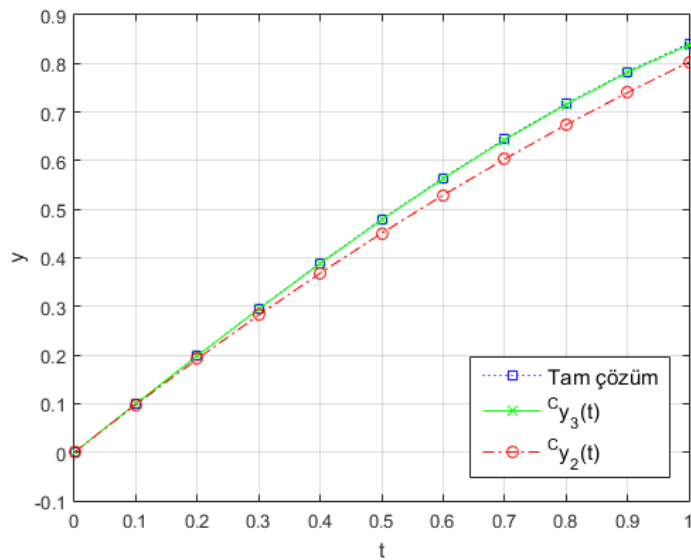
nedeniyle kısmen yavaş işlem göstermiştir. Bu yüzden, sunulan metodun uygulanabilirliği için C, CF, J türev yapılarını kullanılmalıdır. Elde edilen çözümler tam çözüm ile beraber Şekil 5.2.1’de resmedilmiştir.

Tablo 5.2.1. Model 5.2.2 için L_∞ ve düzeltilmiş L_∞ hata hesaplamalarının N , M , ve C, CF, RL, J kesirli türevlerine göre karşılaştırılması.

N, M	${}^C L_\infty$	${}^{CF} L_\infty$	${}^{RL} L_\infty$	${}^J L_\infty$	FTM [27]	SCT [139]
4	$5.1e-04$	$4.0e-04$	$5.1e-04$	$5.1e-04$	$2.7e-04$	$3.4e-04$
4,5	$2.2e-05$	$1.9e-05$	$2.6e-05$	$2.2e-05$	–	–
8	$6.5e-09$	$6.1e-09$	$6.1e-09$	$6.5e-09$	$3.5e-07$	$4.3e-07$
8,9	$1.5e-10$	$1.4e-10$	$1.5e-10$	$1.5e-10$	–	–
16	$1.6e-15$	$7.8e-16$	$5.6e-14$	$3.8e-15$	$4.2e-10$	$1.8e-08$
32	$9.9e-16$	$4.2e-14$	$4.4e-16$	$9.9e-16$	$5.8e-12$	$7.1e-10$

Tablo 5.2.2. Model 5.2.2 için CPU süresinin (sn.) N , M , ve C, CF, RL, J kesirli türevlerine göre karşılaştırılması.

N	C’li güncel metot	CF’li güncel metot	RL’li güncel metot	J’li güncel metot	FTM [27]
4	0.9375	0.4375	1.3125	0.2344	23.16
8	2.5156	1.4375	3.2344	0.3438	110.78
16	9.0313	32.094	10.063	0.6406	313.27
32	34.391	1469.0	36.203	1.2188	1023.85



Şekil 5.2.1. Model 5.2.2 için tam ve matching polinom çözümlerinin karşılaştırılması.

Model 5.2.3. [141] Mekaniksel, optiksel ve elektriksel sistemlerde parametrik rezonans için modellenen kesirli Mathieu diferansiyel denklemini

$${}^M D_0^n y(t) + (1 - 0.32 \cos(3t)) y(t) = 0, \quad 1 < n \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

olmak üzere ve $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ başlangıç koşulları altında $N=10$, farklı n ve kesirli türevleri için çözülsün. Ayrıca, kalan hata analizi $M = 12$ için uygulansın. Tablo 5.2.3 güncel metodu, Runge-Kutta [142] ve birinci-ikinci çeşit Chebyshev polinom metotları (SCP) [142] ile $n=2$ için karşılaştırmaktadır. Bu tablodan görüleceği üzere güncel sonuçlar, belirtilen metotların sonuçları ile iyi uyum içerisindedir. Farklı kesirli türev tiplerine ve n değeri bakımından matching polinom çözümlerinin yer değiştirmesi Şekil 5.2.2'de gösterilmiştir. Buradan görüleceği üzere matching polinom çözümü farklı kesirli türevlerine göre farklı yer değiştirmesi göstermiştir. Dolayısıyla, Şekil 5.2.2 aşağıdaki gibi yorumlanabilir:

- n değeri 2'ye yaklaştıkça; (a) şeklinde yer alan ${}^C y_{10}(t)$ çözümünün yer değiştirmesi, (b) şeklinde yer alan ${}^{CF} y_{10}(t)$ çözümünün yer değiştirmesinden daha tutarlıdır.
- n değeri 2'ye yaklaştıkça; (d) şeklinde yer alan ${}^J y_{10}(t)$ çözümünün yer değiştirmesi, (c) şeklinde yer alan ${}^{RL} y_{10}(t)$ çözümünün yer değiştirmesinden daha tutarlıdır.
- ${}^C y_{10}(t)$ çözümü diğerleri ile karşılaştırıldığında bu problem için en uygun çözüm yapısına sahiptir.

Diğer taraftan, Şekil 5.2.3 mutlak hataların 3-boyutlu grafik davranışlarını farklı N 'e göre resmetmektedir.

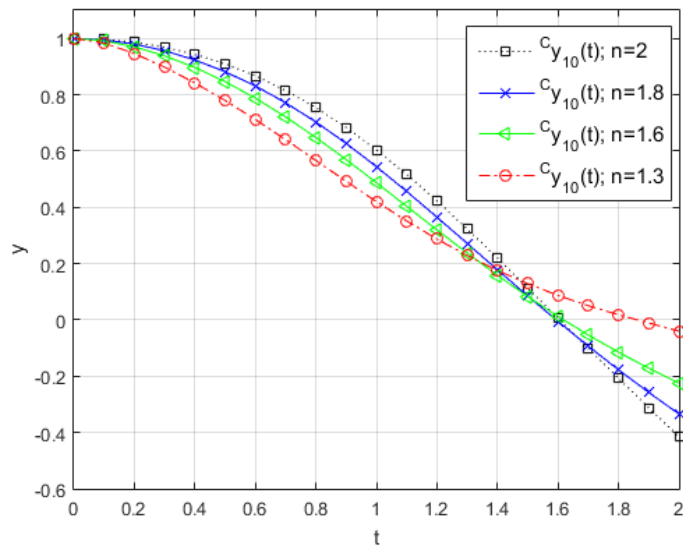
Model 5.2.4. [143] Genelleştirilmiş kesirli diferansiyel denklemini

$${}^M D_0^{5/2} y(t) + y(t) + y(t-0.5) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

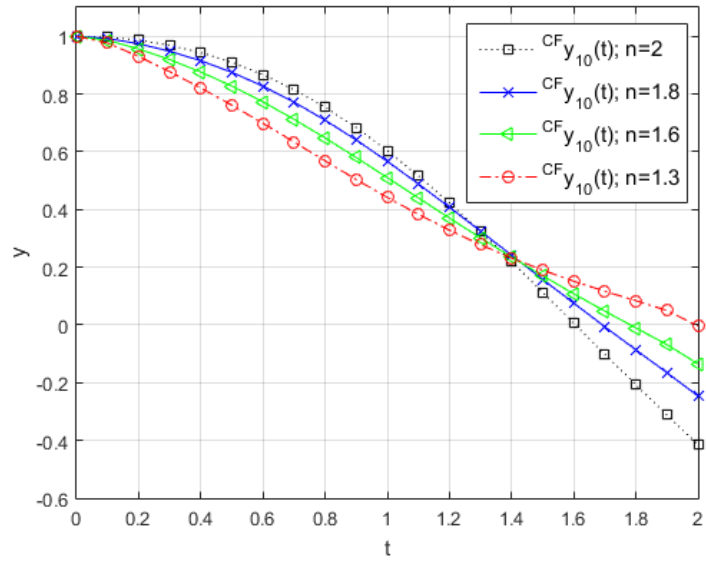
olmak üzere ve $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Problemin tam çözümü $y(t) = t^3$ 'dür. C türevini içeren metot ile problem çözüldüğünde Tablo 5.2.4'den gözlemlenir ki $N=3$ için elde edilen güncel sonuçlar, Laguerre-Gauss metodunun (LGM) $N=22$ [143] için elde etmiş olduğu sonuçlardan çok daha iyidir. Ayrıca, benzer sonuçlar; CF, RL ve J türevleri kullanıldığında da elde edilmiştir.

Tablo 5.2.3. Model 5.2.3'ün $n=2$ değeri için güncel ve var olan tam çözümlerin karşılaştırılması.

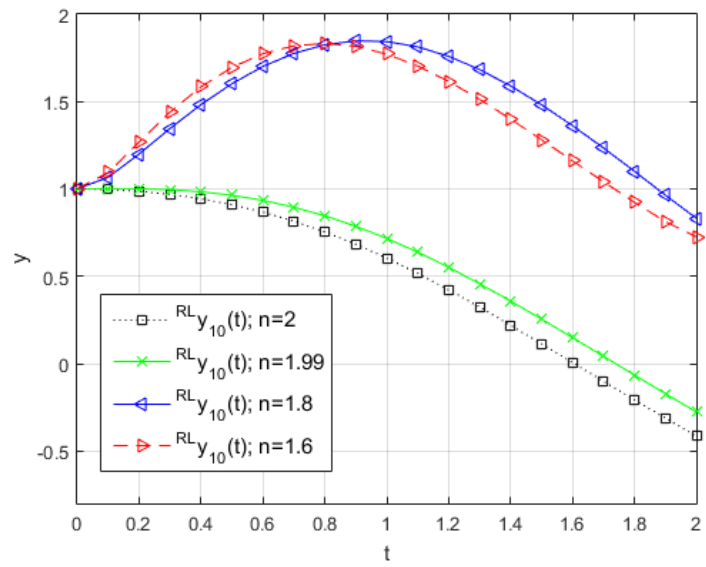
t_i	$^c y_{10}(t_i)$	$^c y_{10,12}(t_i)$	SCP (1. çeşit) $m=10$ [142]	SCP (2. çeşit) $m=10$ [142]	Runge-Kutta metodu [142]
0.1	0.996591	0.996590	0.996589	0.996582	0.996589
0.2	0.986247	0.986242	0.986247	0.986245	0.986242
0.4	0.943250	0.943236	0.943232	0.943233	0.943238
0.6	0.866936	0.866915	0.866922	0.866917	0.866917
0.8	0.753746	0.753718	0.753723	0.753722	0.753721
1.0	0.603763	0.603730	0.603727	0.603730	0.603734
1.2	0.422373	0.422336	0.422343	0.422342	0.422340
1.4	0.219367	0.219329	0.219338	0.219335	0.219333
1.6	0.006062	0.006024	0.006022	0.006025	0.006028
1.8	-0.207745	-0.207781	-0.207773	-0.207771	-0.207776
2.0	-0.415250	-0.415124	-0.415133	-0.415136	-0.415130



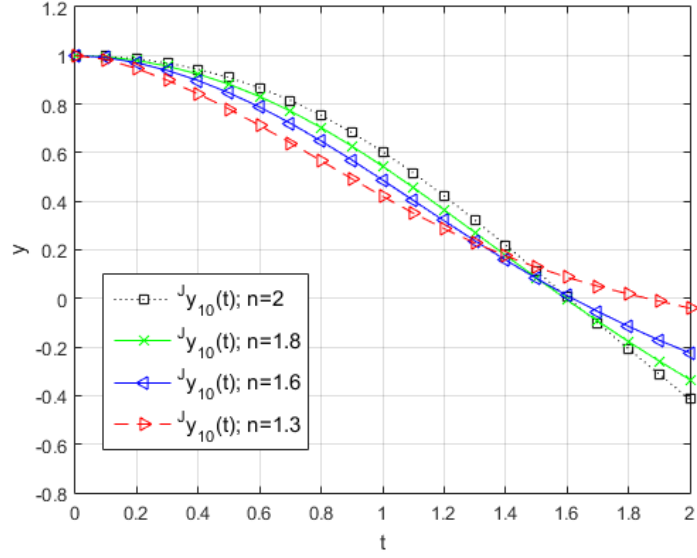
(a)



(b)

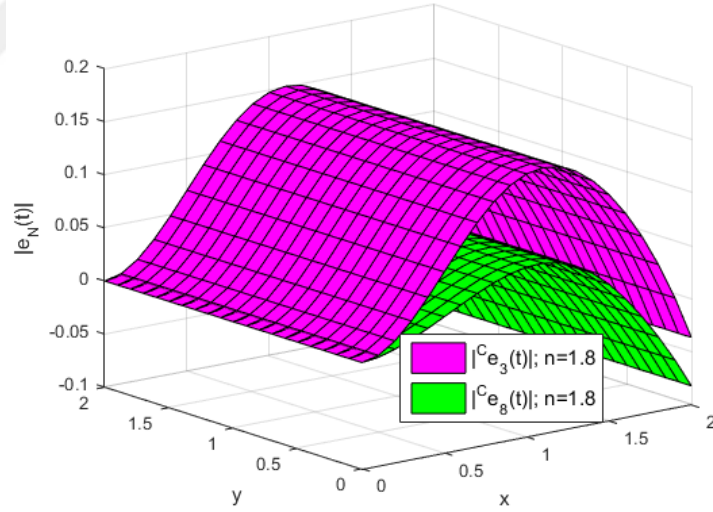


(c)



(d)

Şekil 5.2.2. Model 5.2.3 için C (a), CF (b), RL (c) ve J (d) kesirli türev yapılarını içeren metot ile elde edilen matching polinom çözümlerinin yer değıştirmesi.



Şekil 5.2.3. Model 5.2.3 için mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.

Tablo 5.2.4. Model 5.2.4 için güncel ve var olan sonuçların karşılaştırılması.

Zaman t_i	${}^c y_3(t_i)$	LGM $N=22$ [143]
0.1	$8.3e-17$	$6.3e-06$
0.2	$8.3e-17$	$3.9e-05$
0.3	$8.3e-17$	$1.0e-04$
0.4	$8.3e-17$	$1.9e-04$
0.5	$8.3e-17$	$2.9e-04$
0.6	$8.3e-17$	$4.1e-04$
0.7	$5.6e-17$	$5.3e-04$
0.8	$1.1e-16$	$6.6e-04$
0.9	$1.1e-16$	$8.0e-04$
1.0	$1.1e-16$	$9.5e-04$

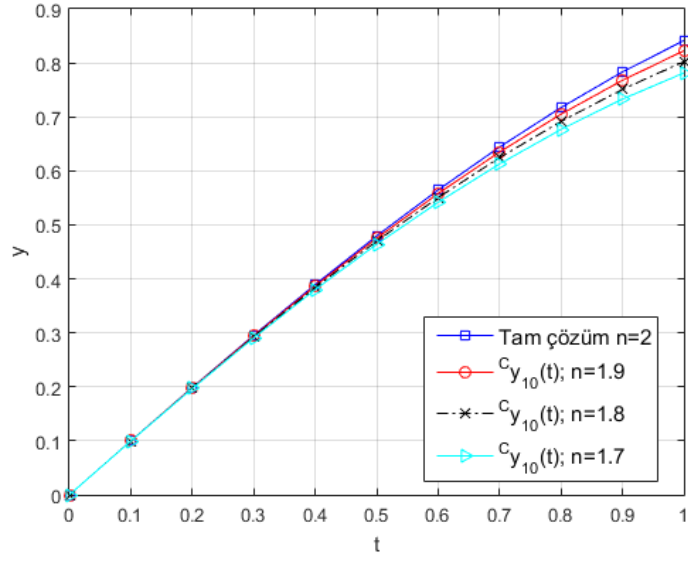
Model 5.2.5. [144] Fiziksel sarkacın davranışını belirleyen doğrusal kesirli osilatör denklemini

$${}^M D_0^n y(t) + w^2 y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq L, \quad 1 < n \leq 2,$$

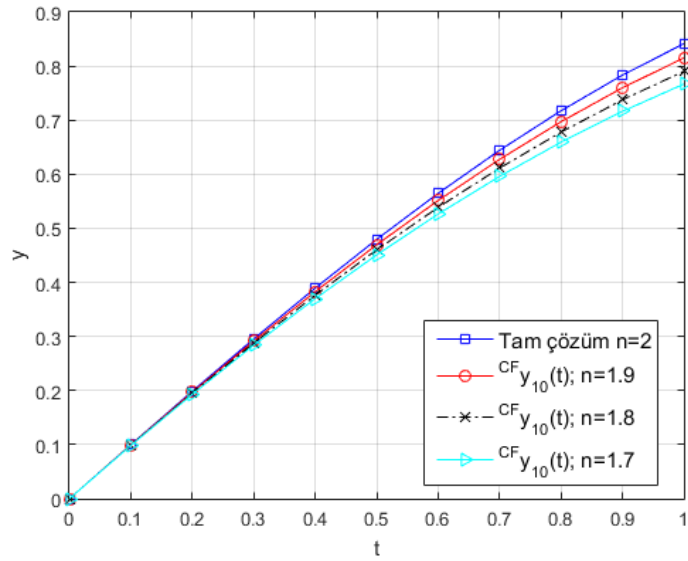
olmak üzere ve $y(0) = 0$, $y'(0) = w$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Burada, $w=1$, $L = \{1,15\}$ ve $n=2$ için tam çözüm $y(t) = \sin t$ 'dir. Farklı kesir türev tiplerine göre metot ve kalan hata analizi uygulandığında CPU süresi (sn.), Lucas- ve Legendre-Tau metotlarına (LuTM ve LeTM) [144] göre oldukça tutarlı sonuçlar Tablo 5.2.5'de verilmiştir. Şekil 5.2.4 $y_{10}(t)$ çözümünün yer değiştirmesini, $L=1$ ve n arttırıldığındaki durumu ile göstermektedir. Ayrıca, Şekil 5.2.5 $y_{20}(t)$ çözümünün $L=15$ geniş aralıktaki davranışını göstermektedir. Şekil 5.2.4 ve 5.2.5'de Caputo türev tipinin bu model için ($L=1$) en iyi kesirli türev yaklaşımını sunduğu anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, Caputo-Fabrizio türev tipinin en iyi yaklaşım sunduğu $L=15$ için de saptanmaktadır.

Tablo 5.2.5. Model 5.2.5 için CPU süresinin ve L_∞ hata değerlerinin $N, M, L=1, n=2$ değişkenlerine göre karşılaştırılması.

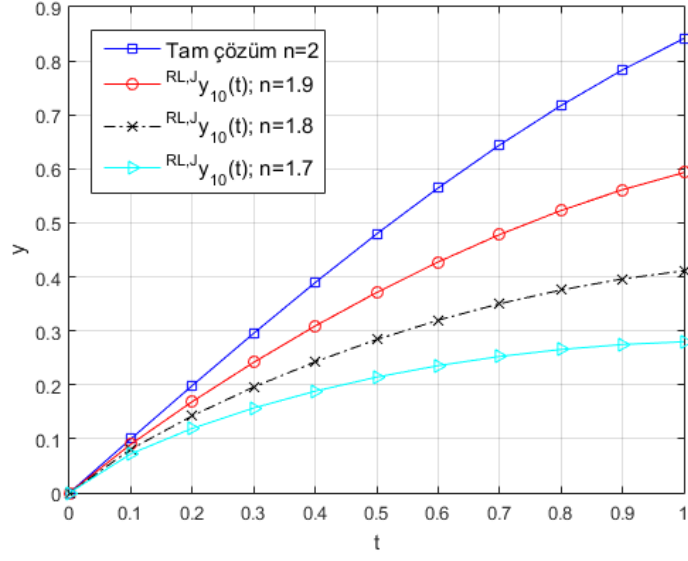
N, M	Güncel metot		LuTM [144]		LeTM [144]	
	${}^c L_\infty$	CPU sn.	L_∞	CPU sn.	L_∞	CPU sn.
4	$1.3e-03$	0.	$1.3e-04$	12.35	$8.3e-03$	19.47
4,6	$5.0e-06$	0.	–	–	–	–
8	$1.1e-08$	0.	$5.4e-07$	33.58	$2.5e-06$	45.17
8,10	$1.6e-11$	0.	–	–	–	–
16	$1.1e-16$	0.	$2.2e-14$	67.59	$5.4e-14$	95.24
32	$1.1e-16$	0.05	$4.4e-16$	91.27	$9.3e-15$	174.12



(a)

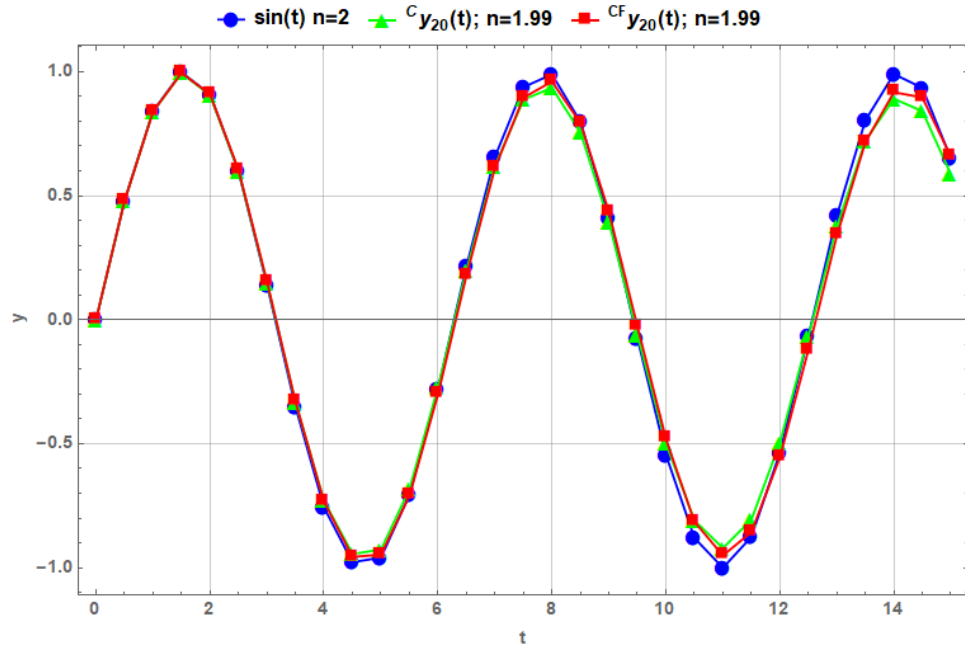


(b)

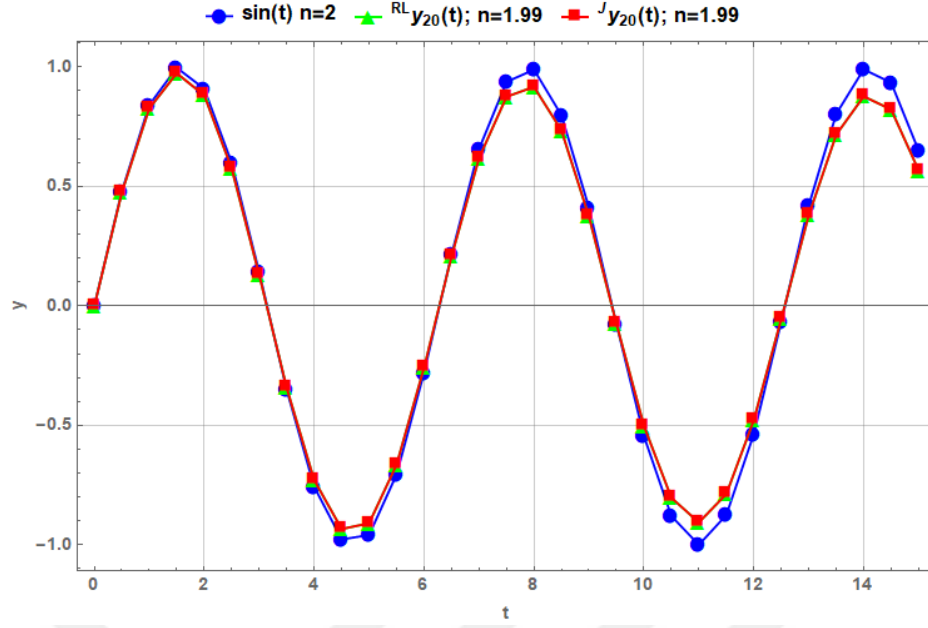


(c)

Şekil 5.2.4. Model 5.2.5 için tam ve matching polinom çözümlerinin n açısından yer değiştirmesi.



(a)



(b)

Şekil 5.2.5. Model 5.2.5 için tam ve matching polinom çözümlerinin n açısından $[0,15]$ aralığındaki davranışı.

Model 5.2.6. Çoklu gecikmeli ve değişken katsayılı kesirli diferansiyel denklemi

$$\sin(t) {}^M D_t^{8/5} y(t-1) + {}^M D_t^{13/10} y(0.5t) - t^2 D^1 y(t) + ty(2t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

olmak üzere ve $y(0) = y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında ele alınsın. Problemin tam çözümü $y(t) = e^t$ 'dir ve $f(t)$ fonksiyonu kesirli türev tipine göre değişmektedir. Problem çözüldükten sonra kalan hata analizi $N=8$, $M=10$ hesaplama limitleriyle çözümleri geliştirmek için kullanılmıştır. Tablo 5.2.6 kalan hata analizinin farklı kesirli türev tiplerine göre uyumlu olduğu açıkça ifade edilebilir. Ayrıca, (5.15) tahmininin Tablo 5.2.6'da sağlandığı görülmektedir. CF ve RL türev tiplerini içeren metodun daha iyi sonuçlar aldığı gözlemlenmiştir.

Bunlara ek olarak, metodun CPU süresi Tablo 5.2.7'de gösterilmiştir, buradan görüleceği üzere RL türevini metotta kullanmak uzun işlem süresi almıştır. Bu yüzden, problemi etkili şekilde çözmek için CF türev tabanlı metot seçilmelidir.

Tablo 5.2.6. Model 5.2.6 için mutlak hata ve düzeltilmiş mutlak hata hesaplarının C, CF, RL ve J türev tipleri açısından karşılaştırılması.

t_i	$ ^C e_8(t) $	$ ^C E_{8,10}(t) $	$ ^{CF} e_8(t) $	$ ^{CF} E_{8,10}(t) $
0.1	$2.25e-06$	$3.96e-10$	$6.31e-08$	$1.08e-09$
0.2	$1.10e-05$	$3.06e-09$	$8.32e-07$	$3.75e-09$
0.4	$5.79e-05$	$2.34e-08$	$7.79e-06$	$1.03e-08$
0.6	$1.51e-04$	$7.33e-08$	$2.63e-05$	$1.31e-08$
0.8	$2.85e-04$	$1.55e-07$	$5.97e-05$	$8.32e-09$
1.0	$4.37e-04$	$2.61e-07$	$1.10e-04$	$5.00e-09$
t_i	$ ^{RL} e_8(t) $	$ ^{RL} E_{8,10}(t) $	$ ^J e_8(t) $	$ ^J E_{8,10}(t) $
0.1	$1.28e-06$	$1.12e-10$	$1.34e-06$	$1.32e-09$
0.2	$5.23e-06$	$4.63e-10$	$5.14e-06$	$5.07e-09$
0.4	$2.05e-05$	$1.80e-09$	$1.77e-05$	$1.74e-08$
0.6	$4.17e-05$	$3.55e-09$	$3.03e-05$	$2.98e-08$
0.8	$6.12e-05$	$4.99e-09$	$3.44e-05$	$3.78e-08$
1.0	$7.09e-05$	$5.54e-09$	$2.30e-05$	$2.27e-08$

Tablo 5.2.7. Model 5.2.6 için CPU süresinin N, C, CF, RL ve J parametrelerine göre karşılaştırılması.

N	C'li metot	CF'li metot	RL'li metot	J'li metot
4	2.25	0.42	3.53	0.56
16	22.1	5.25	27.5	2.78

5.3. Üçüncü Dereceden Doğrusal Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, tam çizge yapısını içeren matching polinomuna dayanan matris-sıralama metodu kullanılarak üçüncü dereceden doğrusal olmama durumunu içeren kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde edilecektir. Ele alınacak denklemleri bir tek formül altında

$$\sum_{0 \leq \alpha \leq m_1} P_\alpha y^{(\alpha)}(t) + \sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \sum_{0 \leq r_3 \leq r_2} Q_{r_1, r_2, r_3} y^{(r_1)}(t) y^{(r_2)}(t) y^{(r_3)}(t) = g(t), \quad (5.17)$$

olmak üzere ve

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)] = \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.18)$$

karışık koşulları altında ele alalım. Burada, $t \in [a, b]$, $y(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında analitiktir; $\{\alpha, r_1, r_2, r_3\}$ parametreleri tam sayılı ve kesirli mertebeden türevlerdir; $m = \max\{m_1, m_2\}$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^{0+}$) ve P_α , Q_{r_1, r_2, r_3} , a_{ik} , b_{ik} uygun sabitlerdir.

Şimdi, (5.17) denklemini çözmek için metodun temel matris bağıntıları oluşturulsun. (3.7) denkleminin kesirli türev formülünü $\alpha \geq 0$ olarak alarak

$$y^{(\alpha)}(t) = \mathbf{M}^{(\alpha)}(K_n, t) \mathbf{Y} = \mathbf{X}^{(\alpha)}(t) \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad (5.19)$$

matris bağıntısı oluşturulur. Burada,

$$\mathbf{M}^{(\alpha)}(K_n, t) = \left[{}^c D_0^\alpha(M_0(K_0, t)) \quad {}^c D_0^\alpha(M_1(K_1, t)) \quad \cdots \quad {}^c D_0^\alpha(M_N(K_N, t)) \right],$$

ve

$$\mathbf{X}^{(\alpha)}(t) = \left[{}^c D_0^\alpha(1) \quad {}^c D_0^\alpha(t) \quad {}^c D_0^\alpha(t^2) \quad \cdots \quad {}^c D_0^\alpha(t^N) \right],$$

şeklindedir. Dolayısıyla, (5.19) matris bağıntısını ve (3.11) sıralama noktalarını kullanarak, (5.17) denkleminin doğrusal kısmının matris bağıntısı

$$\left[\sum_{0 \leq \alpha \leq m_1} P_\alpha y^{(\alpha)}(t_i) \right] = \sum_{0 \leq \alpha \leq m_1} P_\alpha \mathbf{X}^{(\alpha)} \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad (5.20)$$

olarak elde edilir. (5.17) denkleminin üçüncü dereceden doğrusal olmayan kısmı için matris bağıntısı

$$\left[\sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \sum_{0 \leq r_3 \leq r_2} \mathcal{Q}_{r_1, r_2, r_3} y^{(r_1)}(t_i) y^{(r_2)}(t_i) y^{(r_3)}(t_i) \right] = \sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \sum_{0 \leq r_3 \leq r_2} \mathcal{Q}_{r_1, r_2, r_3} \mathbf{X}^{(r_1)} \mathbf{K} \left(\overline{\mathbf{X}^{(r_2)}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \left(\overline{\overline{\mathbf{X}^{(r_3)}}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \left(\overline{\mathbf{Y}} \right), \quad (5.21)$$

olarak oluşturulabilir. Burada özellikle $m_2 = 0$ ve $r_1 = 0$ için

$$\left[\mathcal{Q}_{0,0,0} y^3(t_i) \right] = \mathcal{Q}_{0,0,0} \mathbf{X} \mathbf{K} \left(\overline{\mathbf{X}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \left(\overline{\overline{\mathbf{X}}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \left(\overline{\mathbf{Y}} \right),$$

gerçekleşir. Ayrıca, (5.21) matris bağıntısı kolayca ikinci dereceden doğrusal olmayan forma aşağıdaki gibi indirgenebilir:

$$\left[\sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \mathcal{Q}_{r_1, r_2} y^{(r_1)}(t_i) y^{(r_2)}(t_i) \right] = \sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \mathcal{Q}_{r_1, r_2} \mathbf{X}^{(r_1)} \mathbf{K} \left(\overline{\mathbf{X}^{(r_2)}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \overline{\mathbf{Y}}, \quad (5.22)$$

(5.20), (5.21) (veya (5.22)) denklemleri bir araya getirilerek

$$\sum_{0 \leq \alpha \leq m_1} \mathbf{P}_\alpha \mathbf{X}^{(\alpha)} \mathbf{K} \mathbf{Y} + \sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \sum_{0 \leq r_3 \leq r_2} \mathcal{Q}_{r_1, r_2, r_3} \mathbf{X}^{(r_1)} \mathbf{K} \left(\overline{\mathbf{X}^{(r_2)}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \left(\overline{\overline{\mathbf{X}^{(r_3)}}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}, \quad (5.23)$$

(5.23) matris bağıntısı

$$\mathbf{W} = \sum_{0 \leq \alpha \leq m_1} \mathbf{P}_\alpha \mathbf{X}^{(\alpha)} \mathbf{K} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z} = \sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \sum_{0 \leq r_3 \leq r_2} \mathcal{Q}_{r_1, r_2, r_3} \mathbf{X}^{(r_1)} \mathbf{K} \left(\overline{\mathbf{X}^{(r_2)}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right) \left(\overline{\overline{\mathbf{X}^{(r_3)}}} \right) \left(\overline{\mathbf{K}} \right), \quad (5.24)$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$\mathbf{P}_\alpha = \text{diag} \left[\mathbf{P}_\alpha \right]_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathcal{Q}_{r_1, r_2, r_3} = \text{diag} \left[\mathcal{Q}_{r_1, r_2, r_3} \right]_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$\mathbf{X}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(\alpha)}(t_0) \\ \mathbf{X}^{(\alpha)}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(\alpha)}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^c D_0^\alpha(1) & {}^c D_0^\alpha(t_0) & \cdots & {}^c D_0^\alpha(t_0^N) \\ {}^c D_0^\alpha(1) & {}^c D_0^\alpha(t_1) & \cdots & {}^c D_0^\alpha(t_1^N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^c D_0^\alpha(1) & {}^c D_0^\alpha(t_N) & \cdots & {}^c D_0^\alpha(t_N^N) \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{X}^{(r_2)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(r_2)}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^{(r_2)}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}^{(r_2)}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{X}^{(r_3)}}} = \text{diag} \left[\overline{\mathbf{X}^{(r_3)}} \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}, \quad \overline{\mathbf{K}} = \text{diag} \left[\overline{\mathbf{K}} \right]_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \text{diag} \left[\overline{\mathbf{K}} \right]_{(N+1)^3 \times (N+1)^3}, \quad \overline{\mathbf{Y}} = [y_0 \mathbf{Y} \quad y_1 \mathbf{Y} \quad \cdots \quad y_N \mathbf{Y}]^T,$$

$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}} = [y_0 \overline{\mathbf{Y}} \quad y_1 \overline{\mathbf{Y}} \quad \cdots \quad y_N \overline{\mathbf{Y}}]^T, \quad \mathbf{G} = [g(t_0) \quad g(t_1) \quad \cdots \quad g(t_N)]^T,$$

matrisleri mevcuttur. Diğer taraftan, (5.19) matris bağıntısını kullanarak (5.18) koşullarının matris bağıntısı

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} \mathbf{M}^{(k)}(K_n, a) + b_{ik} \mathbf{M}^{(k)}(K_n, b)] \mathbf{Y} = \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.25)$$

olarak yazılabilir ve

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = \psi_i \Rightarrow [\mathbf{U}_i : \psi_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

şeklinde kısaltılabilir. Burada,

$$\mathbf{U}_i \equiv [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \cdots \quad u_{iN}],$$

olarak yazılabilir. (5.24) matris denklemleri kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \overline{\overline{\mathbf{Y}}} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W} ; \mathbf{Z} : \mathbf{G}], \quad (5.26)$$

olarak ifade edilebilir.

(5.26) sisteminde yer alan herhangi m sayıdaki satır kaldırıldıktan sonra (5.25) koşul matrisleri (5.26) sistemine eklenir ve bu arttırılmış matris sistemi çözüldükten sonra bilinmeyen matching polinom katsayıları elde edilir. Bu katsayılar, (3.6) çözüm formunda yerine yazıldığında matching polinom çözümüne ulaşılır.

5.3.1. İkinci Ortalama Değer Teoremine Dayanan Yakınsaklık Analizi ve Hata Tahmini

Bu bölümde, metodun yakınsaklık analizini ve hata tahminini oluşturmak için Hobson [145]'nin ve Dixon [146]'nın 20. yy.'daki çalışmalarında görülen ikinci ortalama değer teoremini ve kalan fonksiyonu kullanılacaktır. İlk olarak ikinci ortalama değer teoremi lemma olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Lemma 5.3.1. [145,146] Let $f(t):[a,b] \mapsto \mathbb{R}^+$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $\omega(t):[a,b] \mapsto \mathbb{R}^+$ integrallenebilir bir pozitif fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = f(c)\int_a^b \omega(t)dt ,$$

gerçekleşir öyle ki $c \in [a,b]$ mevcuttur ve $f(c)$ değeri; $f(t)$ fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığında tanımlı $\omega(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre bir ortalama değeri olarak adlandırılır. Özellikle $\omega(t) = 1$ için

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = f(c)(b-a) ,$$

gerçekleşir ki bu ise integral hesabı için birinci ortalama değer teoremini ifade etmektedir.

Metodun yakınsaklık analizini ve hata tahmini oluşturulmadan önce bu hesaplamalarda kullanılacak olan $R_N(t)$ kalan fonksiyonu

$$R_N(t) = \sum_{0 \leq \alpha \leq m_1} P_\alpha y_N^{(\alpha)}(t) + \sum_{0 \leq r_1 \leq m_2} \sum_{0 \leq r_2 \leq r_1} \sum_{0 \leq r_3 \leq r_2} Q_{r_1, r_2, r_3} y_N^{(r_1)}(t) y_N^{(r_2)}(t) y_N^{(r_3)}(t) - g(t), \quad (5.27)$$

olarak tanımlanır. Lemma 5.3.1 ve (5.27) denklemi yardımıyla metodun N değerine göre yakınsaklık analizi aşağıdaki gibi oluşturabilir.

Teorem 5.1.1. $R_N(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve $\omega(\lambda t)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ parametrelili bir pozitif ağırlık fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

$$\hat{R}_N = \frac{\left| \int_a^b R_N(t) \omega(\lambda t) dt \right|}{\int_a^b \omega(\lambda t) dt},$$

gerçekleşir. Burada, \hat{R}_N değeri metodun hassasiyetini; N ve $\omega(\lambda t)$ parametrelili ağırlık fonksiyonuna göre hata üst sınırını belirtmektedir.

İspat İntegrallerin eşitsizlik özelliğinden

$$\left| \int_a^b R_N(t) \omega(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |R_N(t) \omega(\lambda t)| dt,$$

yazılabilir ve $\omega(\lambda t)$ fonksiyonu pozitif fonksiyon olduğu için

$$\left| \int_a^b R_N(t) \omega(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |R_N(t)| \omega(\lambda t) dt,$$

olarak ifade edilebilir. Lemma 5.3.1 gereğince

$$\left| \int_a^b R_N(t) \omega(\lambda t) dt \right| \leq |R_N(c)| \int_a^b \omega(\lambda t) dt \Rightarrow |R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(t)| \omega(\lambda t) dt}{\int_a^b \omega(\lambda t) dt} = \hat{R}_N,$$

elde edilir. Burada \hat{R}_N , N ve $\omega(\lambda t)$ değişkenlerine göre hatanın üst sınırını, kalan fonksiyonuna dayalı hesabını belirtmektedir.

5.3.2. Sayısal problemler

Bu bölümde, matching sunulan metodunu kullanarak bazıları uygulamalı bilimlerde olmak üzere beş adet zorlu problemi çözümlenecektir.

Problem 5.3.1. [147] Mekaniksel sistemlerde, kaos ve vibrasyon teorilerinde kullanılan kesirli mertebeden sönümlü ve harici kuvvet içermeyen Duffing diferansiyel denklemini

$$y^{(\alpha)}(t) + \mu y'(t) + 5y(t) + y^3(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

olmak üzere ve $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında çözülsün. Burada, problemin tam çözümü bilinmemektedir ve μ parametresi sönüm kuvvetini göstermektedir. (5.24) temel matris denklemini gereğince, problemin temel matris denklemini

$$\left(P_0 X + P_1 X^{(1)} + P_\alpha X^{(\alpha)} \right) K Y + Q_{0,0,0} X K \left(\bar{X} \right) \left(\bar{K} \right) \left(\bar{X} \right) \left(\bar{K} \right) \bar{Y} = G,$$

olmak üzere μ , T ve α değişkenleri ele alınarak daha önce bahsedilen işlemler takip edildikten sonra matching polinom çözümleri elde edilir. Ayrıca, Bölüm 5.1.1'de bahsedilen Laplace-Padé yöntemi kullanılarak çözümün salınım hareketi elde edilir. Şekil 5.3.1 matching polinom ve Mathematica çözümlerinin karşılaştırmasını vermektedir. Burada, Mathematica çözümü $\alpha = 1$ için

$$\text{NDSolve}\{\{y''[t] + \mu * y'[t] + 5y[t] + (y[t])^3 == 0, y[0] == 0, y'[0] == 1\}, y[t], \{t, 0, T\}\}[[1, 1, 2]],$$

modülü ile elde edilmiştir.

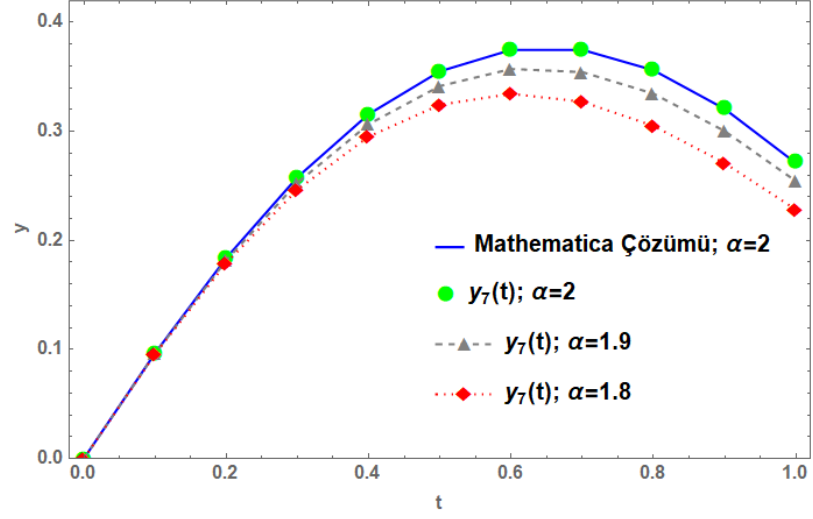
Şekil 5.3.2 ve 5.3.4 çözümlerin salınım hareketlerini, $[0, 50]$ zaman aralığında göstermektedir ve ayrıca kesirli türevin ve sönüm parametresinin matching polinom çözümü üzerindeki etkisi kolayca bu şekillerde görülmektedir. Şekil 5.3.3 ve 5.3.5 matching polinom ve Mathematica çözümlerinin faz düzlemleri arasındaki tutarlılığı belirtmektedir. Metodun üst hata sınırı $\omega(\lambda t)$, N ve α değerlerine göre Tablo 5.3.1 ve 5.3.2'de gösterilmektedir.

Tablo 5.3.1. Problem 5.3.1 için \hat{R}_N hata üst sınırının $\omega(\lambda t)$, N ve $\alpha = 2$ değerlerine göre karşılaştırılması.

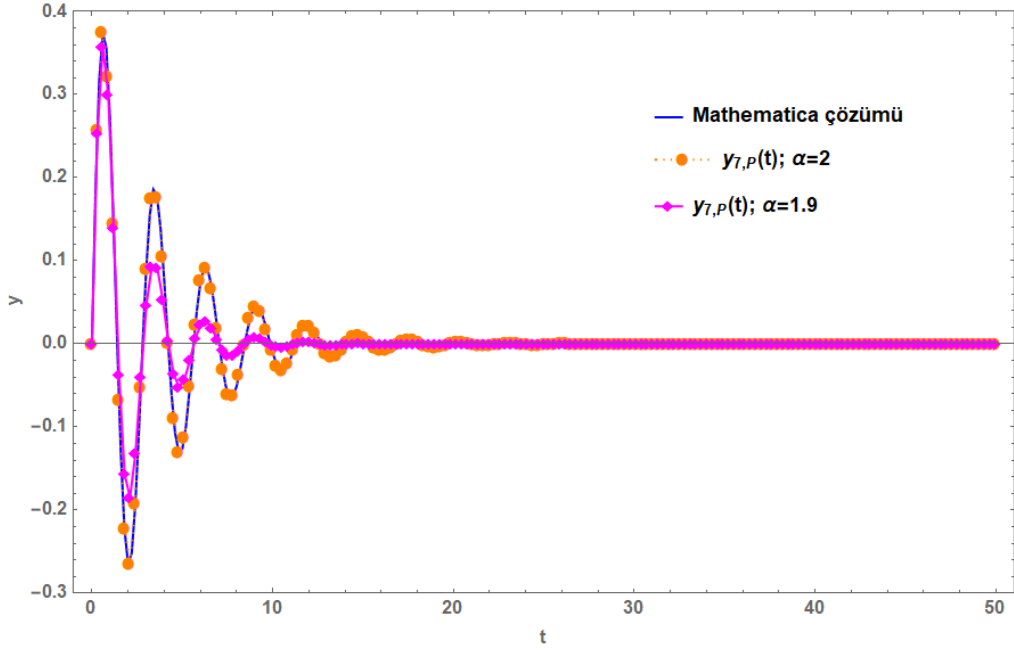
$\omega(\lambda t) / N$	4	5	6	7	8
$\Gamma(t + \lambda)$					
$\lambda = 10^{-3}$	$2.53 e-02$	$7.58 e-02$	$1.24 e-02$	$8.27 e-03$	$3.47 e-03$
$\lambda = 10^{-7}$	$3.04 e-02$	$6.54 e-02$	$1.41 e-02$	$9.57 e-03$	$2.92 e-03$
$exp(\lambda t)$					
$\lambda = 1$	$2.89 e-02$	$1.76 e-01$	$1.57 e-02$	$1.20 e-02$	$7.49 e-03$
$\lambda = -1$	$2.69 e-02$	$1.25 e-01$	$1.40 e-02$	$9.73 e-03$	$6.41 e-03$
$\lambda = -10^2$	$2.78 e-02$	$5.75 e-02$	$1.31 e-02$	$9.35 e-03$	$1.83 e-03$

Tablo 5.3.2. Problem 5.3.1 için \hat{R}_N hata üst sınırının $\omega(\lambda t)$, N ve $\alpha = 1.99$ değerlerine göre karşılaştırılması.

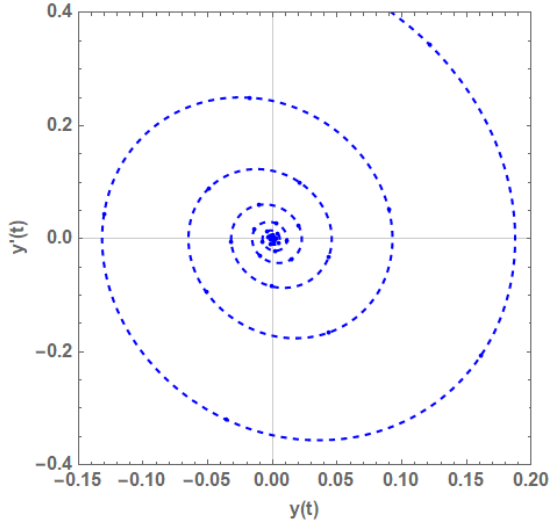
$\omega(\lambda t) / N$	5	6	7	8
$\Gamma(t + \lambda)$				
$\lambda = 10^{-3}$	$3.72 e-01$	$4.07 e-02$	$5.54 e-02$	$1.62 e-02$
$\lambda = 10^{-1}$	$2.55 e-01$	$1.94 e-02$	$4.28 e-02$	$1.08 e-02$
$exp(\lambda t)$				
$\lambda = -1$	$2.07 e-01$	$1.31 e-02$	$3.88 e-02$	$1.08 e-02$



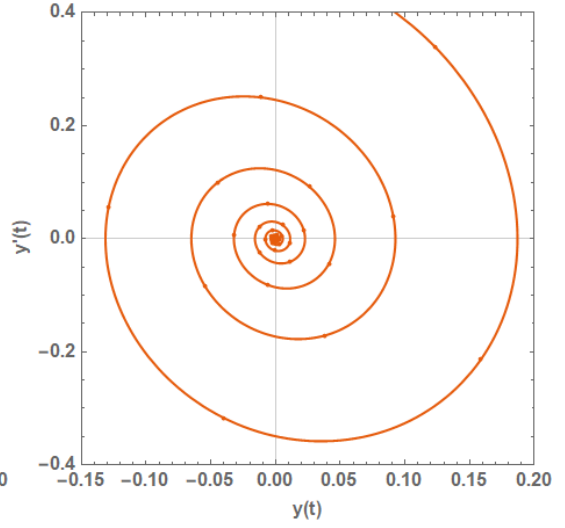
Şekil 5.3.1. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.5$ yüksek sönüm kuvvetine ve $T = 1$ değerine göre çözümlerinin karşılaştırılması.



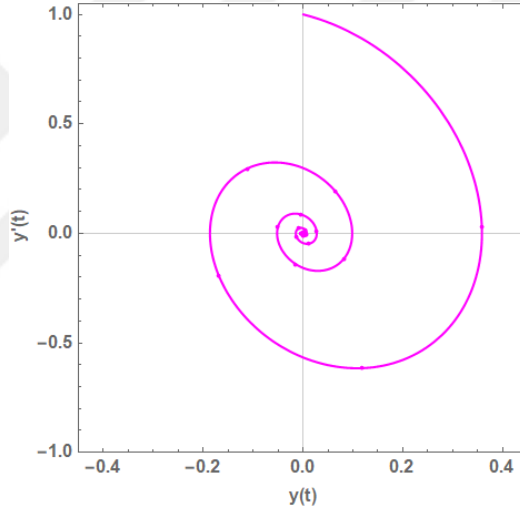
Şekil 5.3.2. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.5$ yüksek sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin salınım hareketi.



(a) MS; $\alpha = 2$

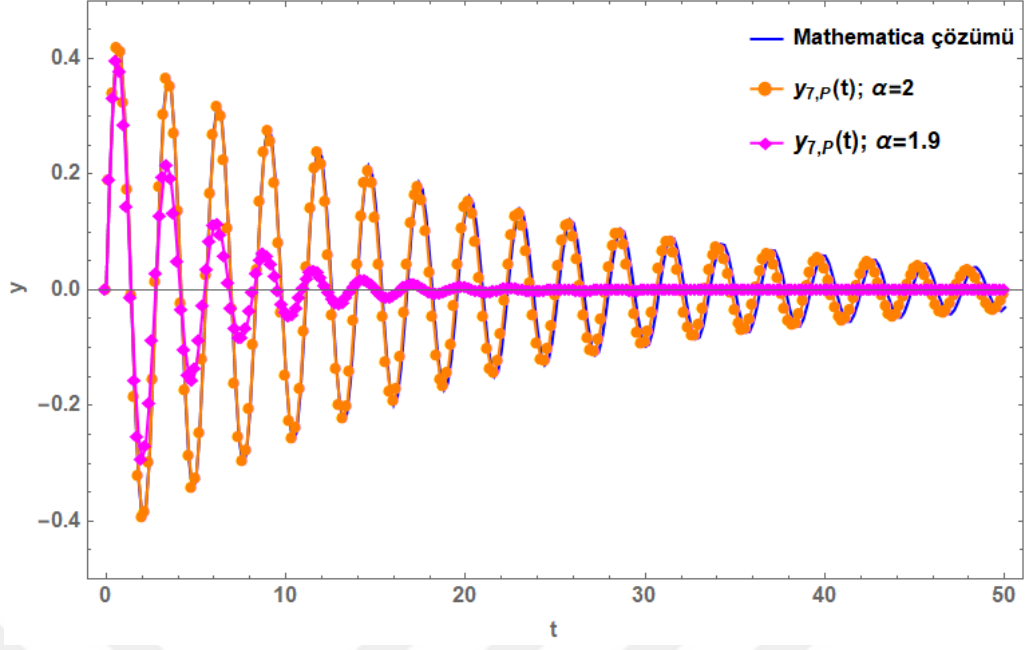


(b) $y_{7,P}(t)$; $\alpha = 2$

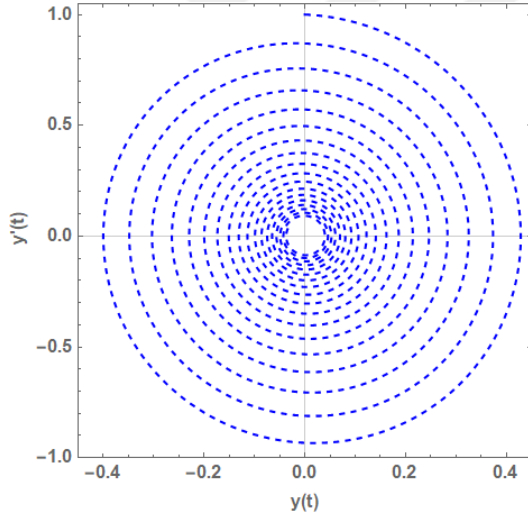


(c) $y_{7,P}(t)$; $\alpha = 1.9$

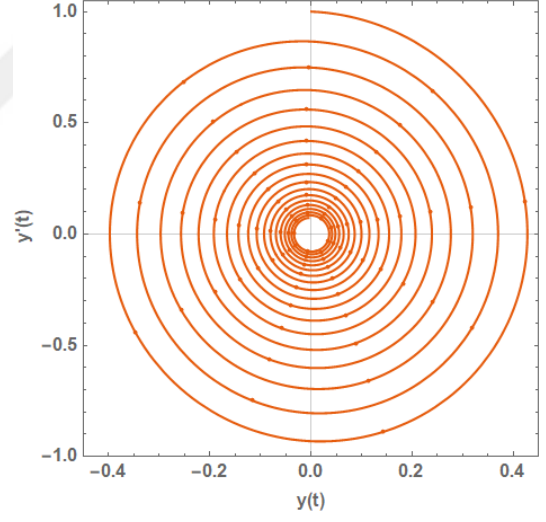
Şekil 5.3.3. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.5$ yüksek sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin faz düzlemlerinin karşılaştırılması.



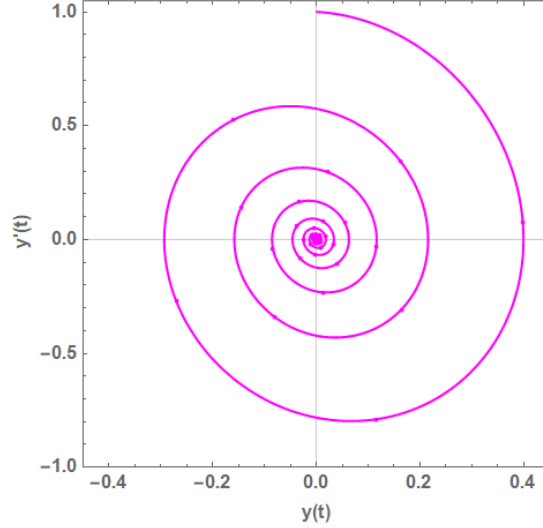
Şekil 5.3.4. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.1$ düşük sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin salınım hareketi.



(a) MS $\alpha = 2$



(b) $y_{7,p}(t); \alpha = 2$



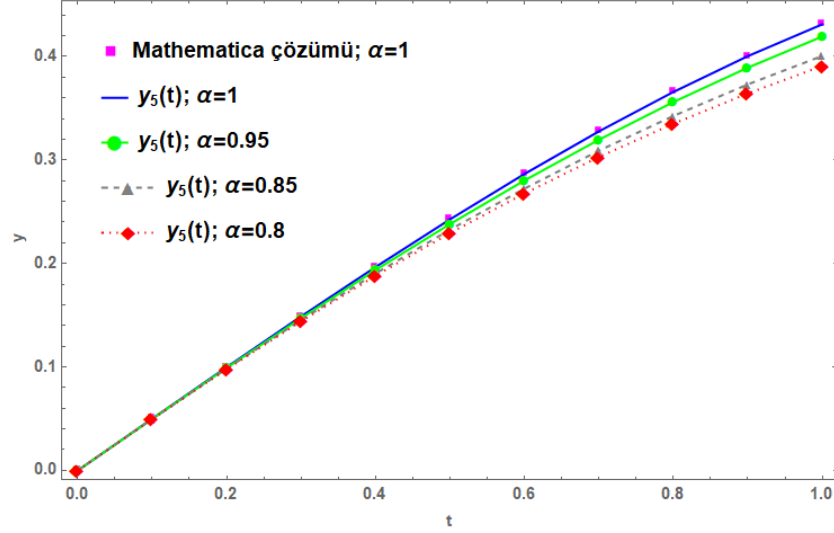
(c) $y_{7,p}(t)$; $\alpha = 1.9$

Şekil 5.3.5. Problem 5.3.1'in $\mu = 0.1$ düşük sönüm kuvvetine ve $T = 50$ değerine göre çözümlerinin faz düzlemlerinin karşılaştırılması.

Problem 5.3.2. Elektriksel devrelerde ve kaotik sistemlerde kullanılan kesirli mertebeden harici (dış) kuvvet içermeyen Van der Pol denklemini

$$y^{(2\alpha)}(t) - 0.05(1 - y^2(t))y^{(\alpha)}(t) + y(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

olmak üzere ve $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.5$ başlangıç koşulları altında inceleyelim. Problemin tam çözümü bilinmemektedir. $N=5$ alarak problemi çözümlenmiş, çözümün salınım hareketini elde etmek için Laplace-Padé yöntemini uygulansın. Şekil 5.3.6'da matching polinom çözümleri, α kesirli türevine göre belirtilmiştir. Ayrıca, Akyüz-Daşcıoğlu ve Çerdik-Yaslan [87]'in ve Kaur ve ark. [126]'nın çalışmalarında, yazarlar bu problemin, tam sayı mertebeli halinin çözümlerini; Runge-Kutta [87], Chebyshev seri [87] ve Haar dalgacık [126] metotlarını kullanarak elde ettiler. Burada, bu problem kesirli mertebeden hali ile çözümlenmiştir. Tablo 5.3.3 güncel sonuçlar ile bahsedilen metotların sonuçlarını tam sayılı mertebeye göre karşılaştırmaktadır. Görüleceği üzere güncel sonuçlar, var olan sonuçlar ile iyi uyum içerisindedir. Diğer taraftan, matching polinom ve Mathematica çözümlerinin geniş aralıktaki salınım hareketleri Şekil 5.3.7'de verilmiştir ve onların faz düzlemleri Şekil 5.3.8'de simüle edilmiştir.



Şekil 5.3.6. Problem 5.3.2 için kesirli türevinin matching polinom çözümünün üzerine etkisi.

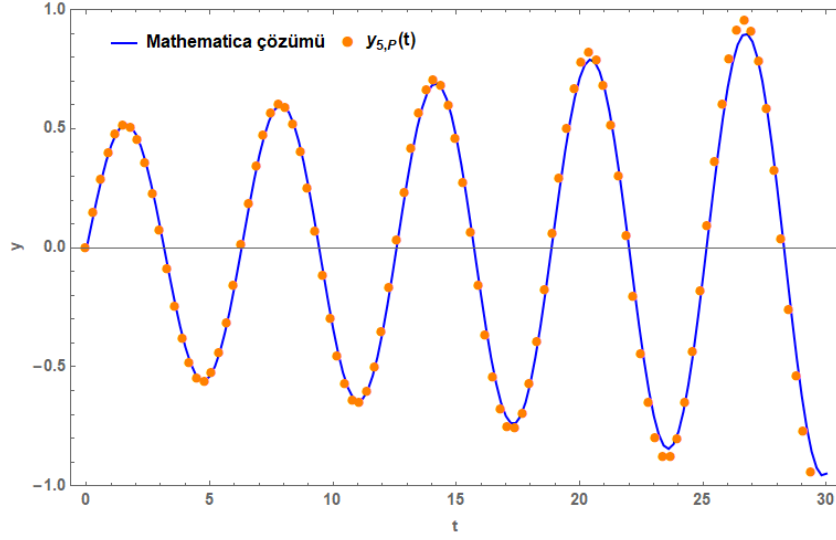
Tablo 5.3.3. Problem 5.3.2'nin $\alpha = 1$ için metotların sonuçlarının karşılaştırılması.

t_i	$y_5(t_i)$	Runge-Kutta [87]	Chebyshev [87]	Haar dalgacık [126]
0.1	0.05004	0.05004	0.05004	0.05004
0.2	0.09983	0.09983	0.09982	0.09983
0.3	0.14887	0.14886	0.14885	0.14886
0.4	0.19666	0.19965	0.19664	0.19665
0.5	0.24270	0.24270	0.24275	0.24270
0.6	0.28653	0.28653	0.28653	0.28653
0.7	0.32771	0.32770	0.32771	0.32770
0.8	0.36579	0.36577	0.36576	0.36577
0.9	0.40039	0.40034	0.40040	0.40034
1.0	0.43115	0.43105	0.43104	0.43105

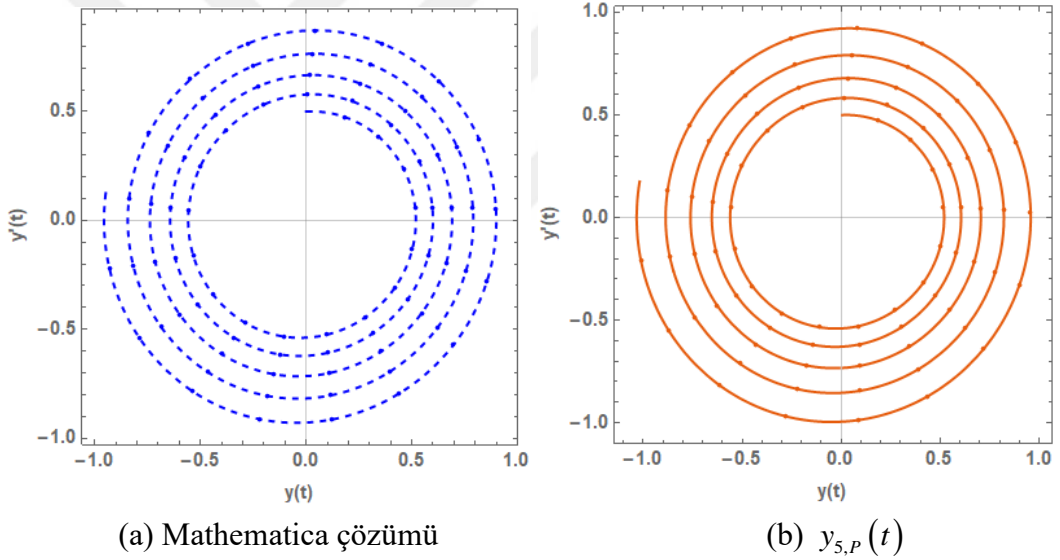
Problem 5.3.3. Mekanikteki bir problem için oluşturulan kesirli mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemi

$$y^{(2\alpha)}(t) - y(t) + \mu y^2(t) y^{(2\alpha)}(t) + \mu y(t) (y^{(\alpha)}(t))^2 + y^3(t) = 0, \quad t \in [0, 0.5], \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

olmak üzere ve $y(0) = A$, $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında ele alalım. Ayrıca, denklemin tam çözümü bilinmemektedir. Lev ve ark. [148] yakın geçmişte tam sayılı mertebeden ve hıza bağlı elastik modülü modelleyen bu mekaniksel problemi oluşturdu.

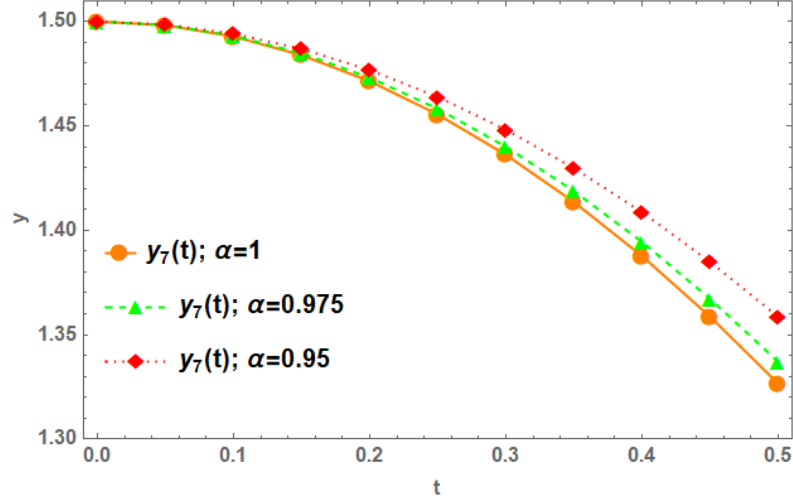


Şekil 5.3.7. Problem 5.3.2'nin $\alpha = 1$ ve $T = 30$ değerleri için çözümlerinin salınım hareketi.



Şekil 5.3.8. Problem 5.3.2'nin $\alpha = 1$ ve $T = 30$ değerleri için çözümlerinin faz düzlemindeki tutarlılığı.

Wu ve He [149] çalışmalarında tam sayılı mertebeli bu problemi çözmek için homotopi pertürbasyon metodunu uyguladılar ve $A > 2/\sqrt{3} \cong 1.1547$ değerinde periyodik çözüm elde edileceğini saptadılar. Burada, $N = 7$ alarak problem, farklı α ve $A = 1.5$ için çözülsün. Şekil 5.3.9'dan görüleceği üzere çözümler tutarlı formdadırlar.



Şekil 5.3.9. Problem 5.3.3 için kesirli türevinin matching polinom çözümünün üzerine etkisi.

Problem 5.3.4. [150] Kesirli mertebeden doğrusal olmayan sınır değer denklemini

$$y^{(\alpha)}(t) + e^{-2\pi} y^2(t) = g(t), \quad t \in [0,1], \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

olmak üzere $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları altında ele alalım. Burada, problemin tam çözümü $y(t) = t^{7/2}$ 'dir ve $\alpha = 1.5$ için $g(t) = 105/32t^2 + e^{2\pi}t^7$ elde edilir. Problem, farklı N ve α değerleri ile çözülsün. Tablo 5.3.4 α değerine göre güncel metodun ($N = 10$) ve Legendre dalgacık metodunun (LWM) ($\hat{m} = 12$) [150] mutlak hata hesaplamalarını karşılaştırmaktadır. Dikkat etmek gerekirse sunulan metodun hesaplama limiti N , $N = \hat{m} - 1$ olarak LWM'nin \hat{m} hesaplama limitine karşılık gelmektedir ve kolayca görülebilir ki elde edilen sonuçlar, LWM'nin sonuçlarına göre oldukça tutarlıdır. Ayrıca, üst hata sınırı parametreleştirilmiş $\omega(\lambda t)$ ağırlık fonksiyonuna, N ve α değerlerine göre Tablo 5.3.5'de verilmiştir.

Problem 5.3.5. [151] Sosyal ve biyoloji alanlarında ortaya çıkan kesirli mertebeden doğrusal olmayan lojistik diferansiyel denklemini

$$y^{(\alpha)}(t) - (0.01)^\alpha y(t)(1 - y(t)) = 0, \quad t \in [0,1], \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

olmak üzere ve $y(0) = 0.75$ başlangıç koşulu altında inceleyelim. Burada, tam çözüm

$$y(t) = 0.75 / (0.75 + (1 - 0.75)e^{-0.01t}),$$

olarak $\alpha = 1$ için tanımlıdır.

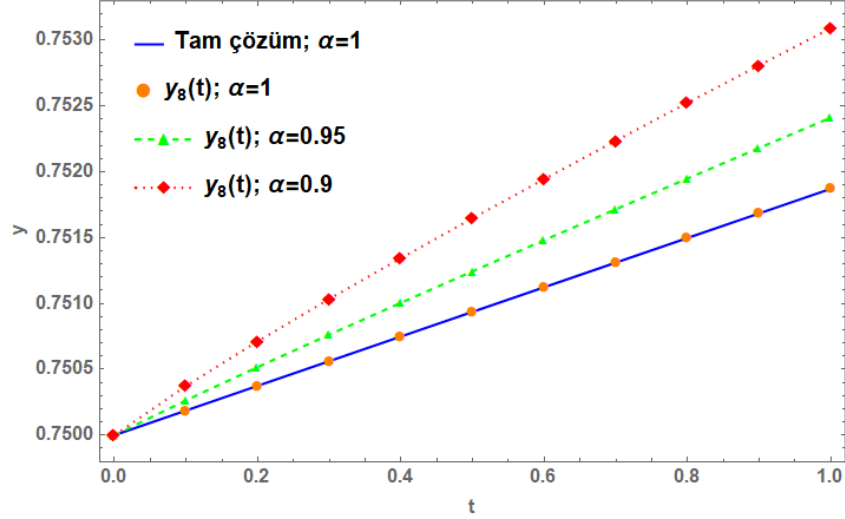
Hesaplama limitini $N = 8$ alarak problem çözülsün. Şekil 5.3.10'dan kolayca görülebilir ki farklı α değerine göre matching polinom çözümü, tam çözüm ile iyi uyum içerisindedir.

Tablo 5.3.4. Problem 5.3.4'ün farklı α için farklı metotlara göre mutlak hataların karşılaştırılması.

t_i	Güncel $\alpha = 1.1$	$\alpha = 1.1$ [150]	Güncel $\alpha = 1.3$	$\alpha = 1.3$ [150]	Güncel $\alpha = 1.5$	$\alpha = 1.5$ [150]
0.1	$1.76e-05$	$2.91e-04$	$2.86e-05$	$1.98e-04$	$2.67e-05$	$9.70e-05$
0.2	$3.49e-05$	$5.42e-03$	$1.68e-05$	$2.22e-03$	$3.35e-05$	$9.39e-04$
0.3	$1.09e-04$	$6.02e-03$	$2.09e-05$	$3.02e-03$	$2.07e-05$	$1.51e-03$
0.4	$1.57e-04$	$1.39e-03$	$5.83e-05$	$6.88e-04$	$3.96e-07$	$3.40e-04$
0.5	$1.50e-04$	$8.41e-03$	$7.42e-05$	$4.51e-03$	$1.71e-05$	$2.42e-03$
0.6	$8.19e-05$	$1.27e-03$	$5.77e-05$	$6.54e-04$	$2.03e-05$	$3.10e-04$
0.7	$2.97e-05$	$5.77e-03$	$1.01e-05$	$3.03e-03$	$6.12e-06$	$1.48e-03$
0.8	$1.54e-04$	$5.11e-03$	$5.79e-05$	$2.34e-03$	$2.41e-05$	$6.34e-04$
0.9	$2.33e-04$	$3.43e-03$	$1.18e-04$	$4.02e-03$	$5.90e-05$	$4.67e-03$

Tablo 5.3.5. Problem 5.3.4 için $\omega(\lambda t)$, N ve $\alpha = 1.5$ değerlerine göre \hat{R}_N hata üst sınırının karşılaştırılması.

$\omega(\lambda t) / N$	4	5	6	7	8	9	10
$\Gamma(t + \lambda)$							
$\lambda = 10^{-3}$	$8.07e-02$	$3.32e-02$	$2.81e-03$	$2.25e-03$	$2.18e-03$	$1.25e-03$	$9.36e-04$
$\lambda = 10^{-7}$	$3.73e-02$	$1.56e-02$	$1.41e-03$	$1.17e-03$	$1.10e-03$	$6.25e-04$	$4.85e-04$
$exp(\lambda t)$							
$\lambda = -1$	$1.69e-02$	$7.10e-02$	$4.69e-03$	$2.73e-03$	$3.85e-03$	$1.59e-03$	$9.84e-04$
$\lambda = -10^3$	$1.70e-02$	$8.05e-03$	$1.20e-03$	$1.17e-03$	$9.52e-04$	$5.20e-04$	$4.78e-04$



Şekil 5.3.10. Problem 5.3.5 için kesirli türevinin matching polinom çözümünün üzerine etkisi.

5.4. Uygulamalı Bilimlerde Ortaya Çıkan Beşinci Dereceden Doğrusal Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, tam çizgenin matching polinomuna dayanan matris-sıralama metodunu geliştirerek beşinci dereceden doğrusal olmama durumunu içeren kesirli diferansiyel denklemleri

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(\alpha_k)}(t) + \sum_{r=2}^5 Q_r(t) y^r(t) = g(t), \quad \alpha_k \geq 0, \quad a \leq t \leq b, \quad (5.28)$$

olmak üzere ve

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_{ij} y^{(j)}(a) + b_{ij} y^{(j)}(b)] = \tau_i, \quad m = \max_{k \geq 0} \lceil \alpha_k \rceil, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.29)$$

karışık koşulları altında ele alalım. Burada, $y(t)$, $P_k(t)$, $Q_r(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlardır; $\alpha_k \in \mathbb{R}^{0+}$ tam sayılı veya kesirli mertebeden türevi belirtmektedir; a_{ij} ve b_{ij} reel katsayılarıdır.

(5.28) denklemini indirgeyerek aşağıda detaylı bilgileri verilen; Lane-Emden, Lienard, Troesch ve Flierl-Petviashvili denklemleri çözümlenebilir:

- Lane-Emden denklemi; en çok karşılaşılan tekil problemlerden birisi olan ve termal akışı bir küresel gaz bulutu boyunca modelleyebilmektedir [152,153] ve ayrıca, beyaz cüce denkleminin yer çekimi tahminini gerçekleştirebilmektedir [94].
- Lineard denklemi; elektriksel devrelerin salınım hareketlerini, fizikteki sönümlü ve sönümlü olmayan sarkaç problemini ve ayrıca kaotik sistemlerin modellenmesinde önemli rol oynamaktadır [154-158].
- Troesch denklemi; bir kısıtlandırılmış plazmanın manyetostatik alana göre davranışının belirlenmesinde ve gaz gözenekli elektrotlar teorisinde kullanılmaktadır. Ayrıca, elektrokinetik araştırmalarında karşılaşılmaktadır [159-162].
- $(n+1)$ doğrusal olmama derecesini içeren Flierl-Petviashvili denklemi; Jüpiter gezegeninde bulunan büyük kızıl lekenin fiziksel yorumunda kullanılmasının yanı sıra yarı-jeostrofik teorisinde meydana gelmektedir [163-167].

Şimdi, (5.28) denklemini çözmek için tam çizgenin matching polinomunu içeren matris sıralama metodunun matris bağıntılarını geliştirelim. (3.6) tipindeki çözüm formuna ait (3.7) matris bağıntısının her iki tarafını α_k değerine göre türevi alındığında

$$y^{(\alpha_k)}(t) = M^{(\alpha_k)}(K_n, t)Y = X^{(\alpha_k)}(t)KY, \quad (5.30)$$

matris bağıntısı elde edilir. Burada,

$$M^{(\alpha_k)}(K_n, t) = \begin{bmatrix} {}^c D_0^{\alpha_k}(M_0(K_0, t)) & {}^c D_0^{\alpha_k}(M_1(K_1, t)) & \cdots & {}^c D_0^{\alpha_k}(M_N(K_N, t)) \end{bmatrix},$$

ve

$$X^{(\alpha_k)}(t) = \begin{bmatrix} {}^c D_0^{\alpha_k}(1) & {}^c D_0^{\alpha_k}(t) & {}^c D_0^{\alpha_k}(t^2) & \cdots & {}^c D_0^{\alpha_k}(t^N) \end{bmatrix},$$

matrisleri oluşturulur ve matris bağıntısındaki C sembolü, türevlerin Caputo anlamında [77] alındığını belirtmektedir.

(5.30) matris bağıntısını ve (3.11) sıralama noktalarını, (5.28) denkleminin doğrusal kısmında yerine yazıldığında, doğrusal kısmın matris formu

$$\sum_{k=0}^m P_k(t) y^{(\alpha_k)}(t) = \sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}^{(\alpha_k)} \mathbf{K} \mathbf{Y}, \quad (5.31)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{P}_k = \text{diag} [P_k(t)]_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$\mathbf{X}^{(\alpha_k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(\alpha_k)}(t_0) \\ \mathbf{X}^{(\alpha_k)}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(\alpha_k)}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^c D_0^{\alpha_k}(1) & {}^c D_0^{\alpha_k}(t_0) & \cdots & {}^c D_0^{\alpha_k}(t_0^N) \\ {}^c D_0^{\alpha_k}(1) & {}^c D_0^{\alpha_k}(t_1) & \cdots & {}^c D_0^{\alpha_k}(t_1^N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^c D_0^{\alpha_k}(1) & {}^c D_0^{\alpha_k}(t_N) & \cdots & {}^c D_0^{\alpha_k}(t_N^N) \end{bmatrix},$$

matrisleri tanımlıdır. Benzer şekilde, (5.28) denkleminin doğrusal olmayan kısmının matris formu

$$\sum_{r=2}^5 Q_r(t) y^r(t) = \sum_{r=2}^5 \left(\prod_{s=0}^{r-1} Q_r^{s-} \mathbf{X} \mathbf{K} \right)^{(r-1)-} \mathbf{Y}, \quad (5.32)$$

olarak oluşturulur. Burada,

$$\mathbf{Q}_r = \text{diag} [Q_r(t)]_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$\mathbf{X}^{s-} = \text{diag} \left[\mathbf{X}^{(s-1)-} \right]_{(N+1)^s \times (N+1)^{(s+1)}}, \quad \mathbf{X}^{1-} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\mathbf{K}^{s-} = \text{diag} \left[\mathbf{K}^{(s-1)-} \right]_{(N+1)^{(s+1)} \times (N+1)^{(s+1)}}, \quad \mathbf{Y}^{(r-1)-} = \begin{bmatrix} y_0 & \mathbf{Y}^{(r-2)-} & y_1 & \mathbf{Y}^{(r-2)-} & \cdots & y_N & \mathbf{Y}^{(r-2)-} \end{bmatrix}^T,$$

matrisleri mevcuttur ve ayrıca $(s-)$ (veya $(r-)$) işareti; matrislerin üzerindeki çizgi sayısını, doğrusal olmama derecesine göre belirtmektedir. Örneğin;

$$\overset{0-}{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \text{ veya } \overset{3-}{\mathbf{X}} = \overset{\equiv}{\mathbf{X}},$$

olarak verilebilir.

(5.31) ve (5.32) matris formlarını birleştirerek temel matris denklemi

$$\underbrace{\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X}^{(\alpha_k)} \mathbf{K} \mathbf{Y}}_{\mathbf{W}} + \sum_{r=2}^5 \underbrace{\left(\prod_{s=0}^{r-1} \mathbf{Q}_r \overset{s-}{\mathbf{X}} \mathbf{K} \right)^{(r-1)-}}_{\mathbf{Z}_r} \mathbf{Y} = \mathbf{G}, \quad (5.33)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{G} = \left[g(t_0) \quad g(t_1) \quad \cdots \quad g(t_N) \right]^T,$$

matrisi tanımlıdır. Kısaca, (5.33) matris denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{Y} + \sum_{r=2}^5 \mathbf{Z}_r = \mathbf{G} \text{ veya } [\mathbf{W}; \mathbf{Z}_2; \dots; \mathbf{Z}_5; \mathbf{G}], \quad (5.34)$$

matris sistemi olarak ifade edilebilir.

(5.30) matris bağıntısı yardımıyla, (5.29) karışık koşullarının matris formu

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[a_{ij} \mathbf{M}^{(j)}(K_n, a) + b_{ij} \mathbf{M}^{(j)}(K_n, b) \right] \mathbf{Y} = \tau_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

olarak oluşturulur ve kısaca

$$\mathbf{U}_i \mathbf{Y} = \tau_i \Rightarrow [\mathbf{U}_i; \tau_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.35)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{U}_i \equiv [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \cdots \quad u_{iN}],$$

matrisi mevcuttur.

(5.34) sisteminde yer alan m satırı kaldırıldıktan sonra (5.35) koşul matrisleri, (5.34) sistemine eklenir ve bu arttırılmış matris sistemi çözüldükten sonra bilinmeyen matching polinom katsayıları elde edilir. Bu katsayılar, (3.6) çözüm formunda yerine yazıldığında matching polinom çözümüne ulaşılır. Burada ki arttırılmış matris sistemi

$$\left[\mathbf{W} ; \mathbf{Z}_r ; \mathbf{G} \right] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & z_{00}^r & z_{01}^r & \cdots & z_{0N}^r & : & g(t_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & z_{10}^r & z_{11}^r & \cdots & z_{1N}^r & : & g(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & z_{N-m,0}^r & z_{N-m,1}^r & \cdots & z_{N-m,N}^r & : & g(t_0) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \tau_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \tau_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \tau_{m-1} \end{bmatrix},$$

formundadır.

5.4.1. Kesirli Kalan Fonksiyonuna Göre Hata Analizi

Bu bölümde, metodun geçerliliğini ve verimliliğini araştırmak için kesirli türev değerine ve N limitine göre bir hata analizi sunulacaktır. Bu hata analizi temel olarak ortalama değer teoremini ve (5.28) denkleminde elde edilen kesirli kalan fonksiyonunu içermektedir. Burada, kesirli kalan fonksiyonuna göre bir hata analizi oluşturulacaktır. Bu analizin avantajlarından birisi, ele alınan problemin tam çözümünün bilinmemesi durumunda metodun üretmiş olduğu matching polinom çözümünün kesinliğini değerlendirilebilecektir.

Teorem 5.4.1. $R_{\alpha_k, N}(t)$ ($\alpha_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, m$) kesirli kalan fonksiyonu, $L_1[a, b]$ uzayında tanımlansın. Bu takdirde, metoda ait hatanın üst sınırı

$$\left| R_{\alpha_k, N}(t_0) \right| \leq \frac{\int_a^b \left| R_{\alpha_k, N}(t) \right| dt}{(b-a)} = \hat{R}_{\alpha_k, N}, \quad t_0 \in (a, b),$$

olarak N ve α_k değerlerine göre belirlenebilir.

İspat (5.28) denkleminde $L_1[a, b]$ 'de tanımlı $R_{\alpha_k, N}(t)$ kesirli kalan fonksiyonu

$$R_{\alpha_k, N}(t) = \sum_{k=0}^m P_k(t) y_N^{(\alpha_k)}(t) + \sum_{r=2}^5 Q_r(t) y_N^r(t) - g(t),$$

elde edilir. Ayrıca, Oğuz ve Sezer [15]'in çalışmasından bilinmektedir ki $R_{\alpha_k, N}(t)$ fonksiyonu α_k değerine bağlı olarak

$$\left| \int_a^b R_{\alpha_k, N}(t) dt \right| \leq \int_a^b \left| R_{\alpha_k, N}(t) \right| dt, \quad (5.36)$$

yazılabilir ve integraller için ortalama değer teoremini kullanarak

$$\left| \int_a^b R_{\alpha_k, N}(t) dt \right| = (b-a) \left| R_{\alpha_k, N}(t_0) \right|, \quad t_0 \in (a, b), \quad (5.37)$$

elde edilir. Bu takdirde, (5.37) denklemi, (5.36) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\left| R_{\alpha_k, N}(t_0) \right| \leq \frac{\int_a^b \left| R_{\alpha_k, N}(t) \right| dt}{(b-a)} = \hat{R}_{\alpha_k, N},$$

ifadesi gerçekleşir. Burada, $t_0 \in (a, b)$ ve $\hat{R}_{\alpha_k, N}$ hata üst sınırı, N ve α_k değerlerine göre ifade etmektedir. Böylece, metodun geçerliliğini ve verimliliğini yüksek oranda tahmin edilebilir.

5.4.2. Model Problemler

Bu bölümde, bazı doğrusal olmayan model problemler sunulan metot ve hata analizi ile değerlendirilecektir. Diğer taraftan, E_{RMS} ortalama karesel hata ve σ_N hata hesaplamaları, çözümlerin tam çözümlere göre tutarlılığını ölçmek için kullanılacaktır. Bu iki hata hesabı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir [119,168]:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (y(t_i) - y_N(t_i))^2}{N}} \quad \text{ve} \quad \sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (y(t_i) - y_N(t_i))^2}{\sum_{i=0}^N (y(t_i))^2}},$$

burada, $y(t)$ tam çözüm, $y_N(t)$ matching polinom çözümü ve t_i 'ler sıralama noktalarıdır. Tüm sonuçlar tablo ve şekillerde verilmiştir.

Model 5.4.1. [169-171] Kesirli mertebeden doğrusal olmayan Lane-Emden diferansiyel denklemini

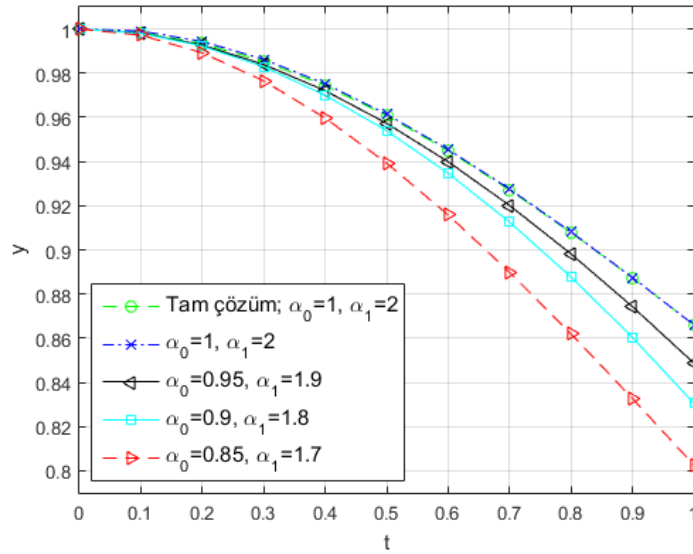
$$y^{(\alpha_1)}(t) + \frac{2}{t} y^{(\alpha_0)}(t) + y^5(t) = 0, \quad 0 < \alpha_0 \leq 1, \quad 1 < \alpha_1 \leq 2, \quad t \in (0,1),$$

olmak üzere ve $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları veya $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt{3/4}$ sınır koşulları altında ele alalım. Burada, $\alpha_1 = 2\alpha_0$ 'dır ve tam çözüm $\alpha_1 = 2$ için $y(t) = \sqrt{3/(3+t^2)}$ olarak tanımlıdır. Problemin temel matris denklemi

$$\left(P_0 X^{(\alpha_0)} + P_1 X^{(\alpha_1)} \right) KY + Q_5 X K X K X K X K X K X KY = G,$$

olarak oluşturulur. Sunulan metodu $N = 3$ ve CLSN için uygulandığında bu matris denklemi çözülür ve istenilen çözümler elde edilir. Şekil 5.4.1 açık olarak kesirli türevin, çözümün üzerine olan etkisini belirtmektedir. Tablo 5.4.1 sunulan metot ile varyasyonel iterasyon metodunu (VIM) [169] karşılaştırmaktadır. Dikkat edilirse burada VIM'in hesaplama limiti $m = 2$, güncel metodun $N = 12$ değerine karşılık gelmektedir.

Bunlara ek olarak, Tablo 5.4.2 hata hesaplamalarını ve CPU süresini N 'nin düşük değerleri için göstermektedir. Bu tablodan fark edileceği üzere sunulan metot L_∞ hata değerini $N = 3$ için $4.20e-04$ olarak verirken, Haar dalgacık-sıralama metodu [171] $m=8$ hesaplama limiti için $1.97e-03$ olarak vermiştir. Diğer taraftan, Tablo 5.4.2'den görüleceği üzere hata üst sınırı iki ondalık hassasiyetinde elde edilmiştir.



Şekil 5.4.1. Model 5.4.1 için $y_3(t)$ çözümünün farklı kesirli türeve göre yer değiştirmesi.

Tablo 5.4.1. Model 5.4.1'in $\alpha_1 = 2$ değeri için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması.

t_i	Tam çözüm	$y_3(t_i)$	VIM [169]	$ e_3(t_i) $	$ e_{12}(t_i) $ [169]
0.1	0.998337	0.998243	0.992067	$9.40e-05$	$6.27e-03$
0.2	0.993399	0.993148	0.987282	$2.51e-04$	$6.12e-03$
0.3	0.985329	0.984996	0.979461	$3.33e-04$	$5.87e-03$
0.4	0.974355	0.974070	0.968827	$2.85e-04$	$5.53e-03$
0.5	0.960769	0.960650	0.955679	$1.19e-04$	$5.09e-03$
0.6	0.944911	0.945020	0.940377	$1.08e-04$	$4.53e-03$
0.7	0.927146	0.927460	0.923325	$3.14e-04$	$3.82e-03$
0.8	0.907841	0.908253	0.904958	$4.12e-04$	$2.88e-03$
0.9	0.887357	0.887681	0.885714	$3.24e-04$	$1.64e-03$

Tablo 5.4.2. Model 5.4.1'in $\alpha_1 = 2$ değeri için hata testlerinin ve CPU süresinin (sn.) karşılaştırılması.

N	$\hat{R}_{2,N}$	E_{RMS}	L_∞	σ_N	Süre
2	$1.40 e-01$	$4.06 e-03$	$7.21 e-03$	$3.51 e-03$	0.0625
3	$1.96 e-02$	$2.88 e-04$	$4.20 e-04$	$2.64 e-04$	0.5156

Model 5.4.2. [154,172] Lienard tipindeki doğrusal olmayan diferansiyel denklemi

$$y''(t) + h_1(y(t))y'(t) + h_2(y(t)) = h_3(t), \quad (5.38)$$

ele alalım. Burada $h_1(y(t))y'(t)$, $h_2(y(t))$ ve $h_3(t)$ fonksiyonları sırasıyla sönüm, dengeleyici ve harici kuvvetleri ifade etmektedir [154,172]. Bu denklemden yararlanarak Van der pol osilatör denklemi $h_1(y(t)) = \mu(y^2(t) - 1)$ için elde edilebilir [157,158]. Feng [156] çalışmasında (5.38) denkleminin özel bir formunu

$$y''(t) + P_0 y(t) + Q_3 y^3(t) + Q_5 y^5(t) = 0, \quad (5.39)$$

ve bu denklemin farklı $\{P_0, Q_3, Q_5\}$ değerleri için birkaç tam çözümünü elde etti. Daha sonra, Kumar ve ark. [154] ve Syam [172] (5.39) denkleminin aşağıda belirtilen kesirli mertebeden modeli için yaklaşık çözümlerini elde ettiler:

$$y^{(\alpha_1)}(t) + P_0 y(t) + Q_3 y^3(t) + Q_5 y^5(t) = 0, \quad 1 < \alpha_1 \leq 2. \quad (5.40)$$

(5.40) denklemini üç durum altında inceleyelim:

Durum 1: $P_0 = -1$, $Q_3 = 4$ ve $Q_5 = -3$ olduğunda (5.40) denkleminin tam çözümü ve başlangıç koşulları [154,156]:

$$y(t) = \frac{\sqrt{2(1 + \tanh(t))}}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

şeklinde olacaktır.

Durum 2: $P_0 = -1$, $Q_3 = 3$ ve $Q_5 = -27/16$ olduğunda (5.40) denkleminin tam çözümü ve başlangıç koşulları [156,172]:

$$y(t) = \sqrt{\frac{2(1 + \tanh(t))}{3}}, y(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

şeklinde olacaktır.

Durum 3: $P_0 = -0.1$, $Q_3 = 2$ ve $Q_5 = 1$ olduğunda (5.40) denkleminin tam çözümü ve başlangıç koşulları [156]:

$$y(t) = 0.433437 \sqrt{\frac{\text{sech}^2(0.316228t)}{2 - 0.0606636\text{sech}^2(0.316228t)}}, y(0) = 0.311243, y'(0) = 0,$$

şeklinde olacaktır.

Bu üç durumda, farklı α_1 değerleri için (5.40) denklemini ele alınsın. Tablo 5.4.3 ve 5.4.4 bulunan sonuçlar ile kuvvet seri (PSM) [172] ve homotopi analiz metotlarının (HAM) [154] sonuçlarını Durum 1 ve 2 için karşılaştırmaktadır. Tablo 5.4.5 mutlak hata değerlerini $N = 5$ ve Durum 3 için ayrıca vermektedir. Kolayca görüleceği üzere sunulan metot, PSM ve HAM metotlarına göre oldukça tutarlıdır. Şekil 5.4.2 ve 5.4.3 çözümün farklı kesirli türev değerlerine göre davranışını belirtmektedir. Ayrıca, Şekil 5.4.4 N ve α_1 değerlerine bağlı olarak hatanın üst sınır değerlerini logaritmik ölçüde listelemiştir.

Tablo 5.4.3. Model 5.4.2'nin Durum 1 ve $\alpha_1 = 2$ için mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.

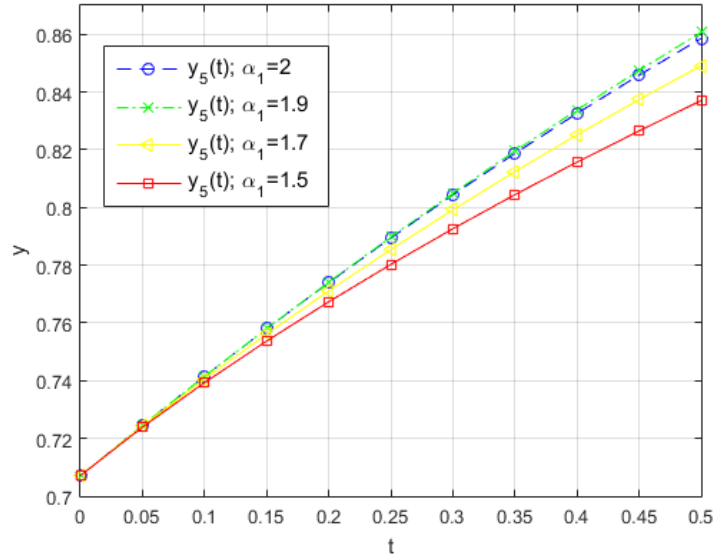
t_i	$ e_5(t_i) $	PSM [172]	HAM [154]
0.02	$1.2 e-07$	$1.9 e-06$	$1.9 e-06$
0.04	$2.2 e-06$	$1.5 e-05$	$6.3 e-06$
0.06	$9.0 e-06$	$4.9 e-05$	$4.9 e-05$
0.08	$2.3 e-05$	$1.1 e-04$	$1.1 e-04$
0.10	$4.6 e-05$	$2.2 e-04$	$2.2 e-04$

Tablo 5.4.4. Model 5.4.2'nin Durum 2 ve $\alpha_1 = 2$ için mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması.

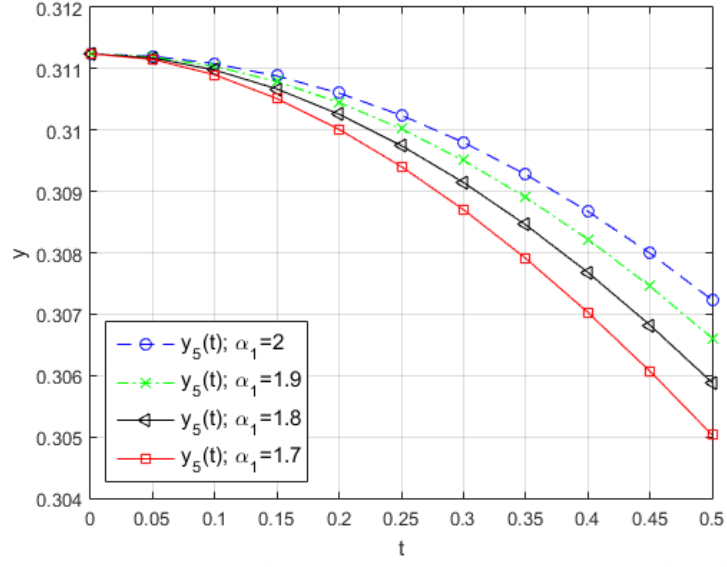
t_i	$ e_5(t_i) $	PSM [172]
0.02	$1.3 e-07$	$2.2 e-06$
0.04	$2.6 e-06$	$1.7 e-05$
0.06	$1.0 e-05$	$5.8 e-05$
0.08	$2.6 e-05$	$1.4 e-04$
0.10	$5.3 e-05$	$2.6 e-04$

Tablo 5.4.5. Model 5.4.2'nin Durum 3 ve $\alpha_1 = 2$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması.

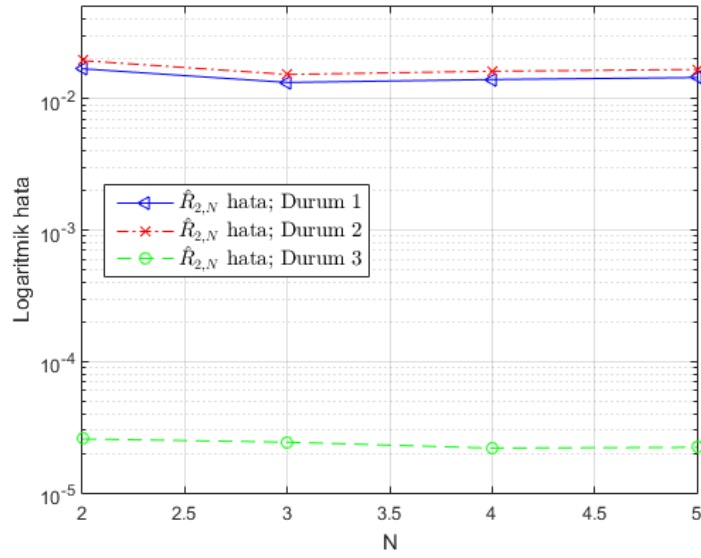
t_i	Tam çözüm	$y_5(t_i)$	$ e_5(t_i) $
0.02	0.3112361584	0.3112361584	$2.74 e-011$
0.04	0.3112169014	0.3112169004	$9.82 e-010$
0.06	0.3111848109	0.3111848046	$6.30 e-09$
0.08	0.3111398937	0.3111398723	$2.14 e-08$
0.10	0.3110821592	0.3110821054	$5.39 e-08$



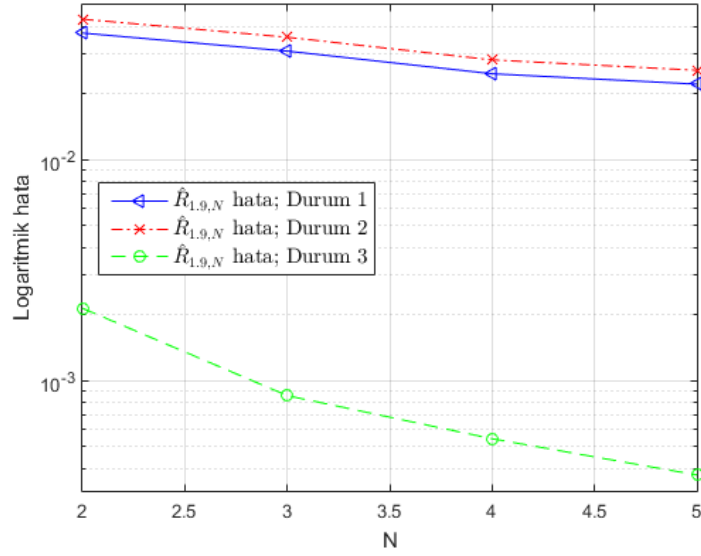
Şekil 5.4.2. Model 5.4.2'nin Durum 1 için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi.



Şekil 5.4.3. Model 5.4.2'nin Durum 3 için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi.



(a) $\alpha_1 = 2$ için



(b) $\alpha_1 = 1.9$ için

Şekil 5.4.4. Model 5.4.2'nin Durum 1-3 için metodun yakınsaklığının N ve α_1 parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

Model 5.4.3. [159,173-177] Kesirli mertebeden Troesch diferansiyel denklemi

$$y^{(\alpha_0)}(t) - \lambda \sinh(\lambda y(t)) = 0, \quad 1 < \alpha_0 \leq 2, \quad t \in [0,1],$$

olmak üzere ve $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ sınır koşulları altında ele alalım. $\alpha_0 = 2$ için problemin tam çözümü [177]:

$$y(t) = \frac{2}{\lambda} \sinh^{-1} \left(\frac{y'(0)}{2} \operatorname{sc} \left(\lambda t \mid 1 - 0.25(y'(0))^2 \right) \right),$$

şeklinde olup burada $\operatorname{sc}(\cdot \mid \cdot)$ Jacobi eliptik fonksiyonudur; $y'(0) = 2\sqrt{1-z}$ olup z aşağıdaki aşkın (transandantal) denklemini çözer [177]:

$$\frac{\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{1-z}} = \operatorname{sc}(\lambda \mid z).$$

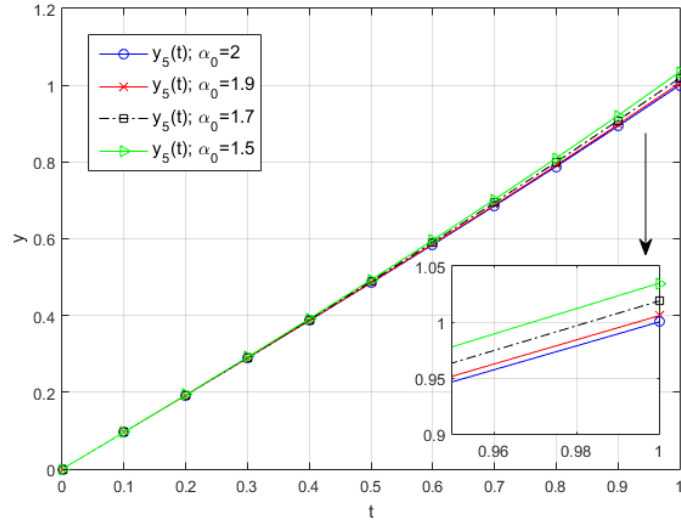
Diğer taraftan, $y(t)$ tam çözümünün $t_p = \lambda^{-1}(\ln(8) - \ln(y'(0)))$ değerinde tekil bir noktası mevcuttur yani $y(t_p) \rightarrow \infty$ gerçekleşir [159,177]. Dolayısıyla, bu özellik, problemin sayısal yöntemler ile çözümünün elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Bu yüzden, sunulan metodu probleme uygulayabilmek için bazı değişiklikler yapmak gerekecektir. İlk önce, $\sinh(y(t))$ fonksiyonunun Taylor seri açılımını kullanarak yukarıdaki problemi

$$y^{(\alpha_0)}(t) - \lambda^2 y(t) - \frac{\lambda^4 y^3(t)}{6} - \frac{\lambda^6 y^5(t)}{120} = 0,$$

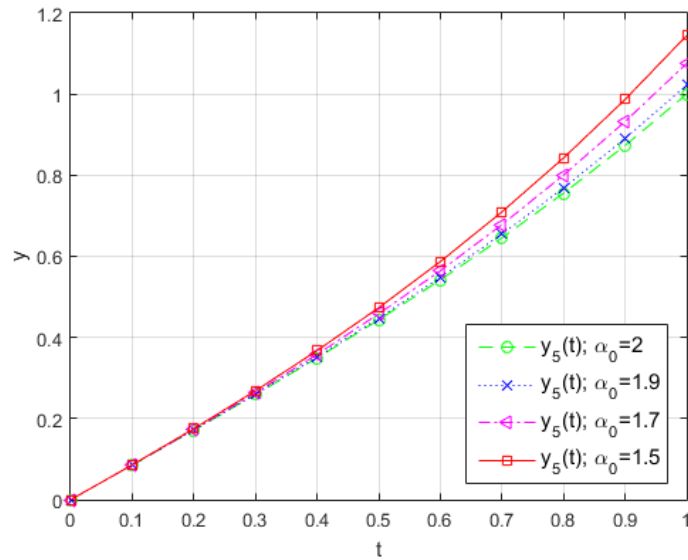
şeklinde yazabilir. Ayrıca çözümün kesirli türeve göre davranışı değerlendirilemeyeceği için $y(1)$ sınır koşulu yerine $y'(0)$ ikinci başlangıç koşulu bulunmalıdır. Bu yüzden, $N = 5$, $\alpha_0 = 2$ ve $\lambda = 0.5$ için problem çözüldüğünde ikinci başlangıç koşulu $y'(0) = 0.959444$ olarak elde edilir. Benzer şekilde $N = 5$, $\alpha_0 = 2$ ve $\lambda = 1$ için $y'(0) = 0.850795$ elde edilir. Şimdi bu ikinci başlangıç koşulunu dikkate alarak problemi kesirli türev anlamında çözülsün. Elde edilen sonuçlara göre bazı uygulamalar ve çıkarımlar aşağıdaki gibi oluşturabilir:

- Şekil 5.4.5 ve 5.4.6 çözümün farklı kesirli türeve göre yer değiştirmesini belirtmektedir.
- Tablo 5.4.6'dan görüleceği üzere $N=3$ için sunulan metot yedi onadalık hassasiyetinde yakınsama sağlarken süreklilik metodu (MC) [175] $\gamma = 9$ 'da dört ondalık hassasiyetinde yakınsama sağlamıştır.
- Tablo 5.4.7 ve 5.4.8'de sunulan metot, sinc-Galerkin (SGM) [176], homotopi pertürbasyon (HPM) [173], Laplace (LM) [174], pertürbasyon (PM) [174] ve spline (SM) [174] metotları ile karşılaştırılmaktadır. Fark edileceği üzere sunulan metot ile daha kesin sonuçlara ulaşılmıştır.
- Hata hesaplamaları ve CPU süresinin karşılaştırılması N değerine göre Tablo 5.4.9'da açıklanmıştır.

- Şekil 5.4.7’den ifade edileceği üzere λ ’nın değeri arttırıldıkça matching polinom çözümünün iç bükeyliği artmaktadır.
- Şekil 5.4.8’de N , α_0 ve λ değerlerine bağlı olarak hatanın üst sınır değerleri logaritmik ölçüde listelenmiştir.



Şekil 5.4.5. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.5$ değeri için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi.



Şekil 5.4.6. Model 5.4.3'ün $\lambda = 1$ değeri için matching polinom çözümünün kesirli türev bakımından yer değiştirmesi.

Tablo 5.4.6. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.1$ ve $\alpha_0 = 2$ değerleri için sayısal sonuçların karşılaştırılması.

t_i	Tam çözüm	$y_3(t_i)$	$ e_3(t_i) $	MC $\gamma = 9$ [175]
0.1	0.09983510	0.09983520	$9.76e-08$	0.0998
0.2	0.19968019	0.19968039	$1.99e-07$	0.1997
0.3	0.29954524	0.29954555	$3.05e-07$	0.2996
0.4	0.39944026	0.39944067	$4.15e-07$	0.3994
0.5	0.49937523	0.49937575	$5.20e-07$	0.4994
0.6	0.59936016	0.59936077	$6.07e-07$	0.5994
0.7	0.69940506	0.69940571	$6.49e-07$	0.6994
0.8	0.79951996	0.79952057	$6.09e-07$	0.7995
0.9	0.89971490	0.89971534	$4.37e-07$	0.8997

Tablo 5.4.7. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.5$ ve $\alpha_0 = 2$ değerleri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

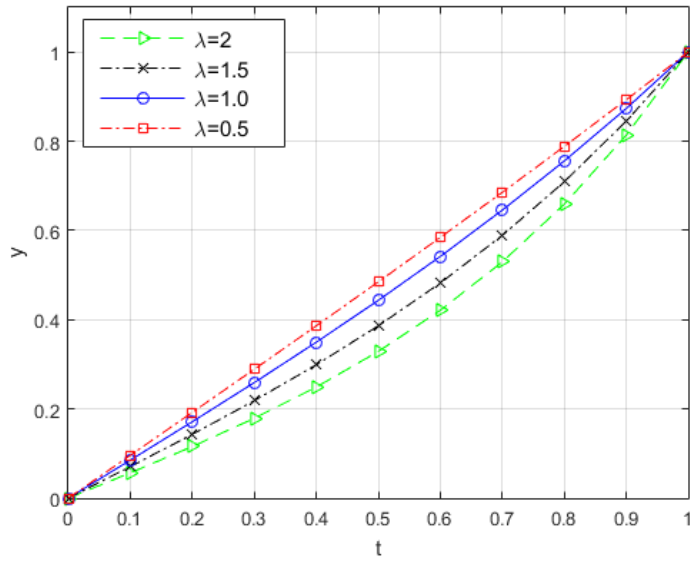
t_i	$ e_5(t_i) $	SGM [176]	HPM [173]	LM [174]	PM [174]	SM [174]
0.1	$4.0e-05$	$7.7e-04$	$7.7e-04$	$7.7e-04$	$8.2e-04$	$7.7e-04$
0.2	$8.0e-05$	$1.5e-03$	$1.5e-03$	$1.5e-03$	$1.6e-03$	$1.5e-03$
0.3	$1.2e-04$	$2.1e-03$	$2.2e-03$	$2.1e-03$	$2.3e-03$	$2.1e-03$
0.4	$1.6e-04$	$2.7e-03$	$2.7e-03$	$2.7e-03$	$2.9e-03$	$2.7e-03$
0.5	$2.0e-04$	$3.0e-03$	$3.0e-03$	$3.0e-03$	$3.2e-03$	$3.0e-03$
0.6	$2.2e-04$	$3.1e-03$	$3.1e-03$	$3.1e-03$	$3.4e-03$	$3.1e-03$
0.7	$2.3e-04$	$3.0e-03$	$3.0e-03$	$3.0e-03$	$3.2e-03$	$3.0e-03$
0.8	$2.1e-04$	$2.4e-03$	$2.5e-03$	$2.4e-03$	$2.7e-03$	$2.4e-03$
0.9	$1.4e-04$	$1.5e-03$	$1.5e-03$	$1.5e-03$	$1.6e-03$	$1.5e-03$

Tablo 5.4.8. Model 5.4.3'ün $\lambda = 1$ ve $\alpha_0 = 2$ değerleri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

t_i	$ e_5(t_i) $	SGM [176]	HPM [173]	LM [174]	PM [174]	SM [174]
0.1	$5.6e-04$	$2.9e-03$	$3.1e-03$	$2.9e-03$	$3.6e-03$	$2.8e-03$
0.2	$1.1e-03$	$5.6e-03$	$6.2e-03$	$5.9e-03$	$7.1e-02$	$5.6e-03$
0.3	$1.7e-03$	$8.2e-03$	$9.0e-03$	$8.2e-03$	$1.0e-02$	$8.2e-03$
0.4	$2.3e-03$	$1.0e-02$	$1.1e-02$	$1.0e-02$	$1.3e-02$	$1.0e-02$
0.5	$2.8e-03$	$1.2e-02$	$1.3e-02$	$1.2e-02$	$1.6e-02$	$1.2e-02$
0.6	$3.2e-03$	$1.3e-02$	$1.4e-02$	$1.3e-02$	$1.7e-02$	$1.3e-02$
0.7	$3.3e-03$	$1.3e-02$	$1.4e-02$	$1.3e-02$	$1.7e-02$	$1.3e-02$
0.8	$3.1e-03$	$1.1e-02$	$1.2e-02$	$1.1e-02$	$1.5e-02$	$1.1e-02$
0.9	$2.1e-03$	$7.4e-03$	$7.8e-03$	$7.4e-03$	$9.7e-03$	$7.4e-03$

Tablo 5.4.9. Model 5.4.3'ün $\lambda = 0.5$ değeri için hata hesaplamalarının ve CPU süresinin (sn.) karşılaştırılması.

N	E_{RMS} $\alpha_0 = 2$	L_∞ $\alpha_0 = 2$	σ_N $\alpha_0 = 2$	Süre $\alpha_0 = 2$	Süre $\alpha_0 = 1.9$
2	$8.72 e-03$	$1.29 e-02$	$1.11 e-02$	0.0625	0.2969
3	$2.51 e-04$	$3.84 e-04$	$3.52 e-04$	0.5469	1.0469
4	$1.79 e-04$	$2.66 e-04$	$2.65 e-04$	4.4688	5.3750
5	$1.59 e-04$	$2.31 e-04$	$2.42 e-04$	32.516	32.672

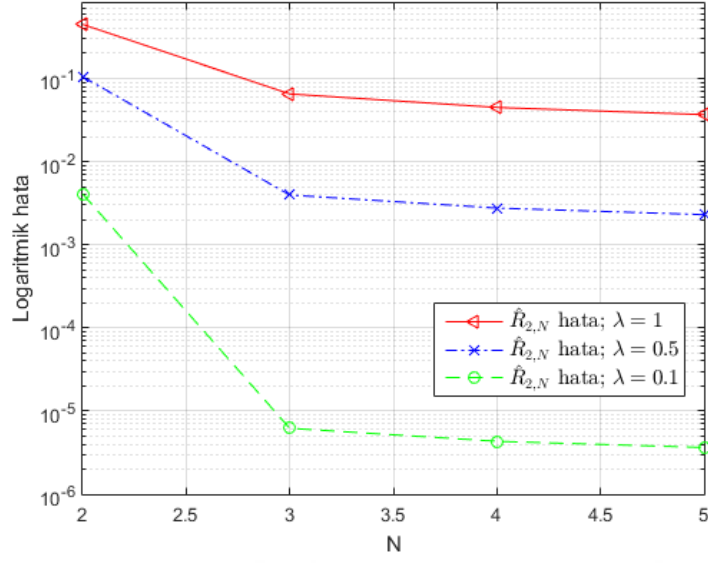


Şekil 5.4.7. Model 5.4.3'ün $\alpha_0 = 2$ ve λ değerleri için matching polinom çözümünün davranışı.

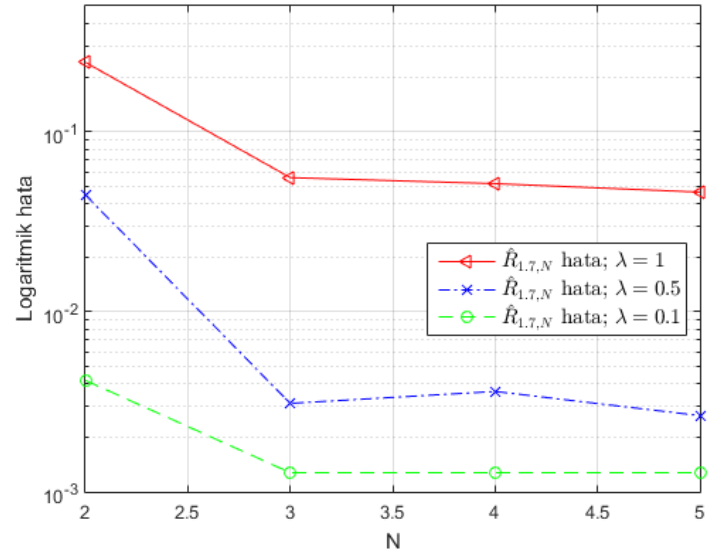
Model 5.4.4. [163-167] $n+1$ 'nci dereceden doğrusal olmayan Flierl-Petviashvili denklemini aşağıdaki gibi kesirli mertebeli formunu

$$y^{(\alpha_1)}(t) + \frac{1}{t} y^{(\alpha_0)}(t) - y^n(t) - y^{n+1}(t) = 0, \quad 0 < \alpha_0 \leq 1, \quad 1 < \alpha_1 \leq 2, \quad t \in [0, 0.1],$$

olmak üzere $y(0) = \beta$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında inceleyelim. Burada, $\alpha_1 = 2\alpha_0$ 'dır ve problemin tam çözümü bilinmemektedir, fakat Wazwaz [166] tam sayı mertebeli problemin ($\alpha_0 = 1$ ve $\alpha_1 = 2$ için) seri çözümünü sekizinci dereceye kadar elde etmiştir. Şimdi, N, n ve kesirli türevleri ele alarak problem çözülsün.



(a) $\alpha_0 = 2$ için



(b) $\alpha_0 = 1.7$ için

Şekil 5.4.8. Model 5.4.3 için metodun yakınsaklığının N , α_0 ve λ parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

Tablo 5.4.10'da elde edilen çözüm ile seri çözümü [166] arasındaki mutlak hata hesaplamaları, E_{RMS} , σ_N ve CPU süresinin karşılaştırmaları listelenmiştir. Bu tablodan görüleceği üzere sonuçlar ve programın işlem süresi oldukça tutarlı ve dikkate değerdir. Diğer taraftan, Tablo 5.4.11 n ve kesirli türev değeri bakımından metodun doğruluğunu hata üst sınırı değerleri vasıtasıyla doğrulamaktadır. Şekil 5.4.9

matching polinom tekel (monopol) çözümünün yer değiştirmesini kesirli türev değerine göre ifade etmektedir.

Tablo 5.4.10. Model 5.4.4'ün $n = 4$ ve $\alpha_1 = 2$ değerleri için hata hesaplamalarının ve CPU süresinin (sn.) karşılaştırılması.

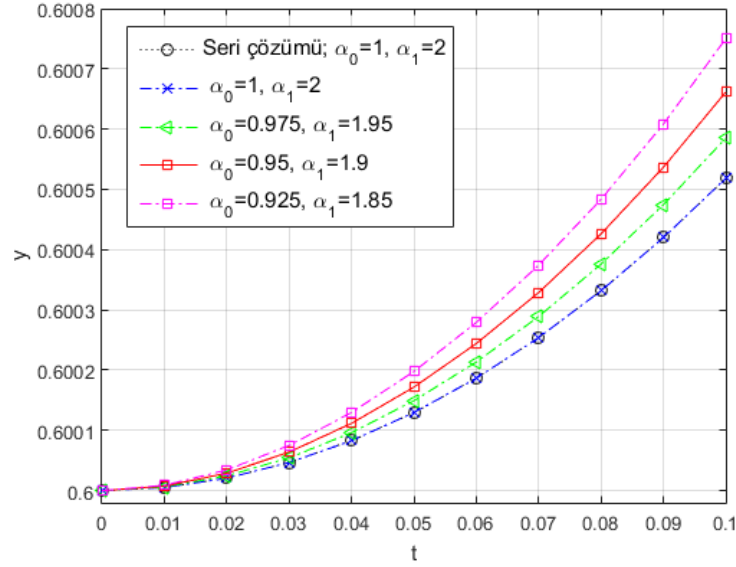
$\beta = 0.6$				
t_i	$ e_2(t_i) $	$ e_3(t_i) $	$ e_4(t_i) $	$ e_5(t_i) $
0.02	$5.17 e-09$	$2.61 e-09$	$1.39 e-09$	$9.66 e-10$
0.04	$3.01 e-08$	$1.67 e-08$	$1.28 e-08$	$1.11 e-08$
0.06	$1.03 e-07$	$6.56 e-08$	$5.61 e-08$	$5.23 e-08$
0.08	$2.71 e-07$	$1.92 e-07$	$1.68 e-07$	$1.61 e-07$
0.10	$6.00 e-07$	$4.56 e-07$	$3.98 e-07$	$3.88 e-07$
E_{RMS}	$4.26 e-07$	$2.99 e-07$	$2.10 e-07$	$1.89 e-07$
σ_N	$5.80 e-07$	$3.89 e-07$	$3.13 e-07$	$2.88 e-07$
Süre	3.0625	4.2969	9.1875	40.1094
$\beta = 1$				
t_i	$ e_2(t_i) $	$ e_3(t_i) $	$ e_4(t_i) $	$ e_5(t_i) $
0.02	$1.71 e-06$	$8.40 e-07$	$2.45 e-07$	$1.83 e-07$
0.04	$7.37 e-06$	$3.72 e-06$	$1.40 e-06$	$1.15 e-06$
0.06	$1.86 e-05$	$1.00 e-05$	$4.74 e-06$	$4.17 e-06$
0.08	$3.82 e-05$	$2.22 e-05$	$1.24 e-05$	$1.14 e-05$
0.10	$6.99 e-05$	$4.38 e-05$	$2.73 e-05$	$2.58 e-05$
E_{RMS}	$5.02 e-05$	$2.64 e-05$	$1.46 e-05$	$1.27 e-05$
σ_N	$4.09 e-05$	$2.29 e-05$	$1.30 e-05$	$1.16 e-05$
Süre	2.7344	4.2656	9.5781	38.9688

Model 5.4.5. [178] Dördüncü dereceden doğrusal olmayan kesirli mertebeden başlangıç değer problemini

$$y^{(1.5)}(t) - y^4(t) = 2.25676\sqrt{t} - t^8, t \in [0,1],$$

olmak üzere ve $y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında inceleyelim. Problemin tam çözümü $y(t) = t^2$ 'dir. $N=2$ alarak problem çözüldükten sonra, elde edilen çözümlerin tam çözüme göre mutlak hata hesaplamaları, çoğaltıcı çekirdek metodunun (RKM) [178] mutlak hata hesaplamaları ile Tablo 5.4.12'de karşılaştırılmıştır.

Buradan açıkça ifade edilir ki sunulan metodun ilk hesaplama limiti ($N=2$), RKM'nin ilk hesaplama limitine ($k=1$) [178] göre daha iyi yaklaşım sağlamaktadır.



Şekil 5.4.9. Model 5.4.4'ün $n = 4$, $\beta = 0.6$ ve farklı kesirli türev değerleri için $y_4(t)$ ile seri çözümünün [166] karşılaştırılması.

Tablo 5.4.11. Model 5.4.4'ün $\beta = 0.6$ için α_1 ve doğrusal olmama durumlarına göre hata üst sınırı değerlerinin karşılaştırılması.

$\hat{R}_{\alpha_1, N}$	3. dereceden doğrusal olmama ($n+1 = 3$)	4. dereceden doğrusal olmama ($n+1 = 4$)	5. dereceden doğrusal olmama ($n+1 = 5$)
$\hat{R}_{2,4}$	$7.16 e-04$	$4.25 e-04$	$2.10 e-04$
$\hat{R}_{2,3}$	$1.01 e-03$	$5.26 e-04$	$2.43 e-04$
$\hat{R}_{2,2}$	$1.51 e-03$	$7.12 e-04$	$3.05 e-04$
$\hat{R}_{1,9,4}$	$1.90 e-03$	$9.71 e-04$	$5.13 e-04$
$\hat{R}_{1,9,3}$	$2.43 e-03$	$1.46 e-03$	$8.67 e-04$
$\hat{R}_{1,9,2}$	$4.40 e-03$	$2.66 e-03$	$1.61 e-03$

Tablo 5.4.12. Model 5.4.5 için L_∞ hatasının karşılaştırılması.

Sunulan metod $N=2$	RKM $k, n = \{1, 5\}$ [178]	RKM $k, n = \{1, 10\}$ [178]	RKM $k, n = \{1, 20\}$ [178]
$2.45e-03$	$5.24e-03$	$5.06e-03$	$5.01e-03$

5.5. Çoklu Gecikmeli ve Uzay-Zaman Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, tam çizgenin matching polinomuna dayanan matris-sıralama metodunu, çoklu gecikmeli ve uzay-zaman değişkenlerine göre kesirli kısmi diferansiyel denklemleri tek bir formül altında çözümlenecektir. Bu formülü

$$\sum_{k=0}^m P_{k,\alpha}(x) {}^M D_{x,t}^\alpha u(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha}) = g(x,t), \quad 0 \leq \alpha \leq 2, \quad (5.41)$$

şeklinde olmak üzere ve

$${}_x D^n u(x,e) = {}_x \psi_n(x), \quad {}_t D^n u(x,e) = {}_t \psi_n(x), \quad n=0,1, \quad (5.42a)$$

$${}_{x,t} D^n u(c,t) = {}_{x,t} \gamma_n(t) \Big|_{x=c}, \quad {}_{x,t} D^n u(d,t) = {}_{x,t} \gamma_n(t) \Big|_{x=d}, \quad n=0,1, \quad (5.42b)$$

Ω 'daki başlangıç ve $\partial\Omega$ 'daki sınır koşulları altında ele alacağız. Burada $u(x,t)$, ${}_{x,t} P_{k,\alpha}(x)$ ve $g(x,t)$ fonksiyonları

$$\Omega = \{(x,t) : c \leq x \leq d, e \leq t \leq f\},$$

dikdörtgenel bölgede analitiktir; $\delta_{k,\alpha}$, $\tau_{k,\alpha}$, $\beta_{k,\alpha}$ ve $\sigma_{k,\alpha}$ uygun sabitlerdir; ${}^M D_{x,t}^\alpha u(x,t)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$) operatörü, $u(x,t)$ fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre α . mertebeden tam sayılı veya kesirli türevini göstermektedir ve ayrıca M sembolü Caputo (C) [77] ve Jumarie (J) [78,79] anlamındaki kesirli türev tiplerini tek bir sembol altında belirtmektedir.

Alternatif olarak (5.41) denkleminin

$$\sum_{k=0}^m P_{k,\alpha}(x) {}^M D_x^\alpha u(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha}) + {}_t P_{k,\alpha}(x) {}^M D_t^\alpha u(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha}) = g(x,t),$$

genişletilmiş formu elde edilir.

Şimdi, (5.41) denklemini çözmek için tam çizgenin matching polinomunu içeren matris sıralama metodunun matris bağıntıları oluşturulsun. (3.9) tipindeki çözüm formu altında, (3.10) matris bağıntısının her iki tarafını uzay ve zaman değişkenlerine göre α . mertebeden türevi alınırsa

$$\left. \begin{aligned} {}^M D_x^\alpha u(x,t) &= {}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(x) \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}(t)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} \\ {}^M D_t^\alpha u(x,t) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{S} \overline{{}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(t)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

matris bağıntıları elde edilecektir. Burada, $0 \leq \alpha \leq 2$, $k = 0, 1, \dots, m$, $M = \{C, J\}$ ve $\alpha = 0$ için

$$\mathbf{X}_{k,0}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N], \quad \mathbf{X}_{k,0}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N],$$

şeklindedir ve ayrıca $\alpha \neq 0$ için

$$\begin{aligned} {}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(x) &= [{}^M D_x^\alpha(1) \quad {}^M D_x^\alpha(x) \quad \dots \quad {}^M D_x^\alpha(x^N)], \quad \overline{{}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(t)} = \text{diag} [{}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(t)], \\ {}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(t) &= [{}^M D_t^\alpha(1) \quad {}^M D_t^\alpha(t) \quad \dots \quad {}^M D_t^\alpha(t^N)], \end{aligned}$$

matrisleri tanımlıdır.

(5.43) matris bağıntılarına $x \rightarrow \delta_{k,\alpha} x + \tau_{k,\alpha}$ ve $t \rightarrow \beta_{k,\alpha} t + \sigma_{k,\alpha}$ yazıldığında aşağıdaki matris bağıntıları meydana gelmektedir:

$$\left. \begin{aligned} {}^M D_x^\alpha u(\delta_{k,\alpha} x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha} t + \sigma_{k,\alpha}) &= {}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(\delta_{k,\alpha} x + \tau_{k,\alpha}) \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}(\beta_{k,\alpha} t + \sigma_{k,\alpha})} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} \\ {}^M D_t^\alpha u(\delta_{k,\alpha} x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha} t + \sigma_{k,\alpha}) &= \mathbf{X}(\delta_{k,\alpha} x + \tau_{k,\alpha}) \mathbf{K} \overline{{}^M \mathbf{X}_{k,\alpha}(\beta_{k,\alpha} t + \sigma_{k,\alpha})} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

öyle ki $\alpha = 0$ için

$${}^M \mathbf{X}_{k,0}(\delta_{k,0}x + \tau_{k,0}) = \begin{bmatrix} 1 & (\delta_{k,0}x + \tau_{k,0}) & \cdots & (\delta_{k,0}x + \tau_{k,0})^N \end{bmatrix},$$

ve

$$\mathbf{X}(\delta_{k,0}x + \tau_{k,0}) = \begin{bmatrix} 1 & (\delta_{k,0}x + \tau_{k,0}) & \cdots & (\delta_{k,0}x + \tau_{k,0})^N \end{bmatrix},$$

matris yapıları tanımlıdır.

(5.44) matris bağıntılarını kısaltılmış formda, yani ${}^M D_{x,t}^\alpha u(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha})$ terimini, (5.41) denkleminin özel haline ve uzay-zaman kesirli türeve göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$${}^M D_x^\alpha u(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha}) = \mathbf{F}_{uzay}, \quad {}^M D_t^\alpha u(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha}) = \mathbf{F}_{zaman}.$$

(5.44) matris bağıntılarını ve (3.11) sıralama noktalarını, (5.41) denkleminde yerine yazarak temel matris denklemi

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m ({}_x \mathbf{P}_{k,\alpha} \mathbf{F}_{uzay} + {}_t \mathbf{P}_{k,\alpha} \mathbf{F}_{zaman}) \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{WY} = \mathbf{G}, \quad (5.45)$$

olarak oluşturulur. Burada,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(x_0, t_0) & W(x_0, t_1) & \cdots & W(x_0, t_N) & \cdots & W(x_N, t_0) & \cdots & W(x_N, t_N) \end{bmatrix}^T,$$

$${}_x \mathbf{P}_{k,\alpha} = {}_t \mathbf{P}_{k,\alpha} = \begin{bmatrix} {}_{x,t} P_{k,\alpha}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}_{x,t} P_{k,\alpha}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}_{x,t} P_{k,\alpha}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(x_0, t_0) & G(x_0, t_1) & \cdots & G(x_0, t_N) & \cdots & G(x_N, t_0) & \cdots & G(x_N, t_N) \end{bmatrix}^T,$$

matrisleri yer almaktadır.

Şimdi (5.42a)-(5.42b) koşullarının matris bağıntıları oluşturulsun. Benzer şekilde, (3.11) sıralama noktalarını, (3.10) ve (5.43) matris bağıntılarını ele alarak, uzay-zaman türev formundaki başlangıç koşullarının matris bağıntısı

$$\left. \begin{aligned} {}_x D^n u(x_i, e) &= \mathbf{X}^{(n)}(x_i) \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}(e)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} = {}_x \psi_n(x_i) \\ {}_t D^n u(x_i, e) &= \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}^{(n)}(e)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} = {}_t \psi_n(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

olacaktır ve burada $n = 0, 1$ ve $i = 0, 1, \dots, N$. (5.46) matris bağıntılarının sol yanları

$$\left. \begin{aligned} {}_x \mathbf{U} &= \left[{}_x D^n u(x_0, e) \quad {}_x D^n u(x_1, e) \quad \cdots \quad {}_x D^n u(x_N, e) \right]^T \\ {}_t \mathbf{U} &= \left[{}_t D^n u(x_0, e) \quad {}_t D^n u(x_1, e) \quad \cdots \quad {}_t D^n u(x_N, e) \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde, sınır koşullarının matris bağıntıları

$$\left. \begin{aligned} {}_x D^n u(c, t_i) &= \mathbf{X}^{(n)}(c) \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}(t_i)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} = {}_x \gamma_n(t_i) \\ {}_t D^n u(c, t_i) &= \mathbf{X}(c) \mathbf{K} \overline{\mathbf{X}^{(n)}(t_i)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} = {}_t \gamma_n(t_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

oluşturulur ve (5.48) matris bağıntılarının sol yanları

$$\left. \begin{aligned} {}_x \mathbf{V}_c &= \left[{}_x D^n u(c, t_0) \quad {}_x D^n u(c, t_1) \quad \cdots \quad {}_x D^n u(c, t_N) \right]^T \\ {}_t \mathbf{V}_c &= \left[{}_t D^n u(c, t_0) \quad {}_t D^n u(c, t_1) \quad \cdots \quad {}_t D^n u(c, t_N) \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

olarak yazılabilir. Burada dikkat etmek gerekirse (5.48) ve (5.49) matris bağıntıları, diğer sınır değeri d' ye göre benzer şekilde tanımlanabilir.

s ele alınan problemin koşul sayısını göstermek üzere (5.45) denkleminde yer alan \mathbf{W} matrisinin son $(N+1)(N+1-s)$ sayıdaki satırı kaldırıldıktan sonra \mathbf{W} matrisi, (5.47) ve (5.49) koşul matrisleriyle birleştirildiğinde arttırılmış matris sistemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & ; & \mathbf{G} \\ {}_x\mathbf{U} & ; & {}_x\psi_n(x_i) \\ {}_x\mathbf{V}_c & ; & {}_x\gamma_n(t_i) \end{bmatrix},$$

olarak oluşturulur ve diğer koşul matrisleri, ele alınan probleme uygun olarak bu sistemde kullanılır. Ayrıca, bu sistem çözüm üretebilmesi için $\text{rank}\mathbf{W}=\text{rank}[\mathbf{W}; \mathbf{G}]=(N+1)^2$ olarak sağlanmalıdır. Sistem doğrusal olarak (lineer) çözüldüğünde \mathbf{Y} katsayılar matrisi elde edilir ve bu katsayılar (3.10) çözüm formunda yerine yazıldığında matching polinom çözümüne ulaşılır.

5.5.1. Kalan Hata Tahmini ve Yakınsaklık Analizi

Şimdi, (5.41) denkleminin elde edilen matching polinom çözümlerini geliştirmek için kesirli türeve dayalı kalan hata tahminini oluşturalım. İlk olarak, (3.10) matching polinom çözümünü, (5.41) denkleminde yerine yazarak Ω 'da tanımlı $R_N(x,t)$ kalan fonksiyonunu

$$R_N(x,t) = \sum_{k=0}^m \sum_{x,t} P_{k,\alpha}(x) {}^M D_{x,t}^\alpha u_N(\delta_{k,\alpha}x + \tau_{k,\alpha}, \beta_{k,\alpha}t + \sigma_{k,\alpha}) - g(x,t),$$

olarak elde edilir ve bu fonksiyon yardımıyla, $e_N(x,t)$ hata fonksiyonu L doğrusal operatörü altında

$$L[e_N(x,t)] = L[u(x,t)] - L[u_N(x,t)] = -R_N(x,t), \quad (5.50)$$

olarak tanımlanır. (5.42a)-(5.42b) koşulları ile birlikte (5.50) denklemi, sunulan metot yardımıyla çözülen bir hata problemini oluşturmaktadır. Bu takdirde, hata probleminin çözümü $e_{N,K}(x,t)$ tahmini hata fonksiyonu olup

$$e_{N,K}(x,t) = \sum_{p=0}^K \sum_{r=0}^K y_{pr}^* M_p(K_p, x) M_r(K_r, t), \quad K > N,$$

olarak elde edilir. Böylece, matching polinom çözümü

$$u_{N,K}(x,t) = u_N(x,t) + e_{N,K}(x,t) \text{ ve } E_{N,K}(x,t) = u(x,t) - u_{N,K}(x,t),$$

şeklinde geliştirilebilir. Burada, $u_{N,K}(x,t)$ düzeltilmiş matching polinom çözümünü ve $E_{N,K}(x,t)$ düzeltilmiş hata fonksiyonunu belirtmektedir.

Şimdi, sunulan metodun yakınsaklığını; Ω dikdörtgensel bölgede tanımlı olan kalan fonksiyonun ortalama değeri vasıtasıyla inceleyen yeni bir teorem sunulsun.

Teorem 5.5.1. $R_N(x,t)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun ve \hat{R}_N değeri hata üst sınırını N hesaplama limitine göre belirtsin. Bu takdirde, metodun yakınsaklığı

$$|R_N(x_0, t_0)| \leq \frac{\iint_{\Omega} |R_N(x,t)| dA}{\iint_{\Omega} dA} = \hat{R}_N, \quad (x_0, t_0) \in (c, d) \times (e, f),$$

formülü altında etkin bir şekilde hesaplanır.

İspat Çift katlı integraller için üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \iint_{\Omega} R_N(x,t) dA \right| \leq \iint_{\Omega} |R_N(x,t)| dA, \quad (5.51)$$

ifade edilebilir. Analiz'de yer alan iki değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer tanımına (teoremine) göre $R_N(x,t)$ fonksiyonunun Ω bölgesindeki ortalama değeri, mutlak değer fonksiyonu altında

$$R_N(x_0, t_0) = \frac{\iint_{\Omega} R_N(x,t) dA}{\iint_{\Omega} dA} \Rightarrow \left| \iint_{\Omega} R_N(x,t) dA \right| = |R_N(x_0, t_0)| \iint_{\Omega} dA, \quad (5.52)$$

olarak hesaplanır. Burada, $\iint_{\Omega} dA > 0$ ve $(x_0, t_0) \in (c, d) \times (e, f)$ 'dir.

(5.52) denklemini, (5.51) eşitsizliğinde yerine yazarak

$$|R_N(x_0, t_0)| \iint_{\Omega} dA \leq \iint_{\Omega} |R_N(x, t)| dA \Rightarrow |R_N(x_0, t_0)| \leq \frac{\iint_{\Omega} |R_N(x, t)| dA}{\iint_{\Omega} dA} = \hat{R}_N,$$

ifadesi gerçekleşir. Bu ise ispatı tamamlar.

Böylece, N hesaplama limitine göre metodun yakınsaklığı açık ve etkin bir şekilde hesaplanmış olur.

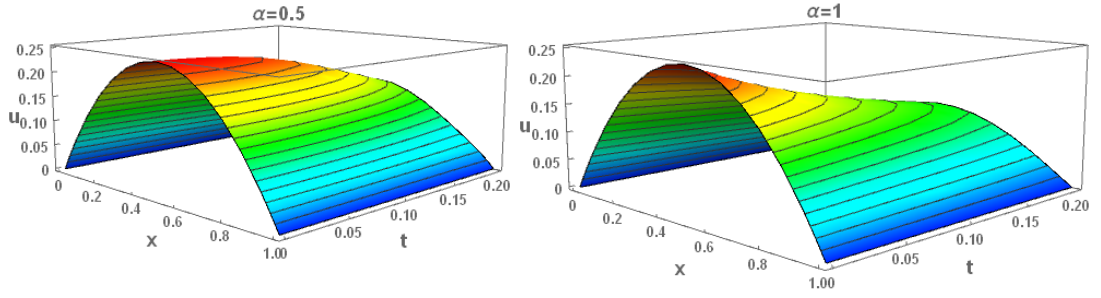
5.5.2. Model Problemler

Bu bölümde, sunulan metodu kullanarak literatürde yer alan bazı zor model problemlerin çözümleri araştırılacaktır. Sayısal sonuçlar tablolarda, matching polinom çözümleri ve onların hata fonksiyonunun değerleri şekillerde belirtilmiştir. ${}^M u_N(x, t)$ çözümü, metotta $M = \{C, J\}$ kesirli türev yapıları ele alınarak elde edildiğini ifade etmektedir.

Model 5.5.1. [39] Zaman kesirli gecikmeli difüzyon denklemini

$${}^M D_0^\alpha u(x, t) = {}_x D^2 u(x, t) + u(x, t + \sigma_{0,0}), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

olmak üzere $u(x, 0) = x - x^2$ başlangıç koşulu ve $u(0, t) = u(1, t) = 0$ sınır koşulları altında ele alalım. Problemin tam çözümü bilinmemektedir. $\alpha = \{0.5, 1\}$, zaman gecikmesi $\sigma_{0,0} = -0.5$ ve $M=C$ alınarak problemi hesaplama limiti $N=13$ için çözelim. Şekil 5.5.1'de matching polinom çözümlerinin, t ve α değerlerine göre farklı yayılma davranışı gösterdiği gözlemlenmiştir. Buradaki çözümler 2.14063 saniye gibi kısa sürede elde edilmiştir.



Şekil 5.5.1. Model 5.5.1'in t ve α değerlerine göre matching polinom çözümlerinin yayılım hareketleri.

Model 5.5.2. [34] Etki altındaki bir parçacığın olasılık yoğunluk işlevinin zamana göre gelişimini hesaplayan zaman kesirli Fokker-Planck denklemini

$${}_t D^1 u(x,t) = {}_t^M D_0^{1-\alpha} \left[{}_x D^1 (-1) + {}_x D^2 \right] u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (0,1],$$

olmak üzere $u(x,0) = x - x^2$ başlangıç koşulu ve

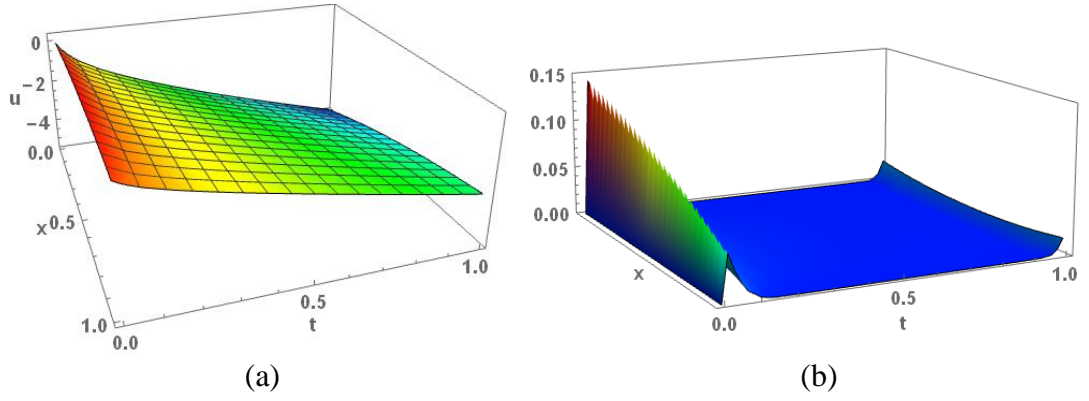
$$u(0,t) = -\frac{3t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \quad u(1,t) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)},$$

sınır koşulları altında inceleyelim. Problemin tam çözümü

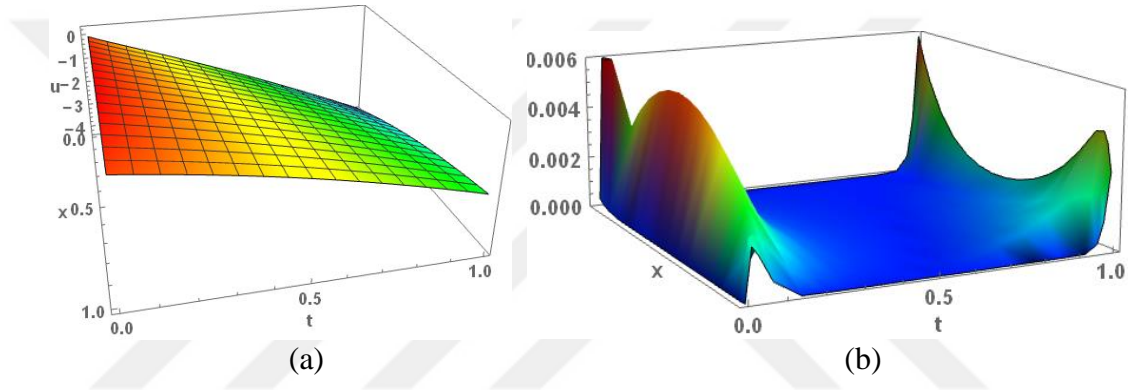
$$u(x,t) = x - x^2 + \frac{(2x-3)t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)},$$

olarak bilinmektedir.

C ve J'li metodu uygulayarak problemin çözümleri elde edilir. Şekil 5.5.2 ve 5.5.3 tam çözüm ile matching polinom çözümünün arasındaki tutarlılığı, α değerine göre mutlak hata hesabının grafiği olarak göstermektedir. Tablo 5.5.1 mutlak hata hesabının sıralama noktalarındaki değerlerini ve CPU süresini farklı kesirli türev değerine göre vermektedir.



Şekil 5.5.2. Model 5.5.2'nin $\alpha = 0.5$ değeri için (a) ${}^c u_{15}(x,t)$ matching polinom çözümü ve (b) mutlak hata fonksiyonunun grafiği.



Şekil 5.5.3. Model 5.5.2'nin $\alpha = 0.9$ değeri için (a) ${}^c u_{15}(x,t)$ matching polinom çözümü ve (b) mutlak hata fonksiyonunun grafiği.

Tablo 5.5.1. Model 5.5.2'nin $\alpha = 0.5$ için CPU süresinin ve mutlak hata hesabının C ve J kesirli türevlerine göre karşılaştırılması.

x_i	t_i	$ {}^c e_{15}(x_i, t_i) $	$ {}^J e_{15}(x_i, t_i) $
0.16	0.16	$2.85e-03$	$2.43e-03$
0.28	0.28	$1.53e-03$	$1.33e-03$
0.40	0.40	$1.03e-03$	$8.87e-04$
0.52	0.52	$7.00e-04$	$5.73e-04$
0.64	0.64	$4.94e-04$	$2.44e-04$
0.76	0.76	$2.86e-04$	$1.34e-03$
0.88	0.88	$1.20e-04$	$5.70e-03$
0.94	0.94	$1.94e-04$	$9.00e-03$
Süre (sn.)		2.98	3.25

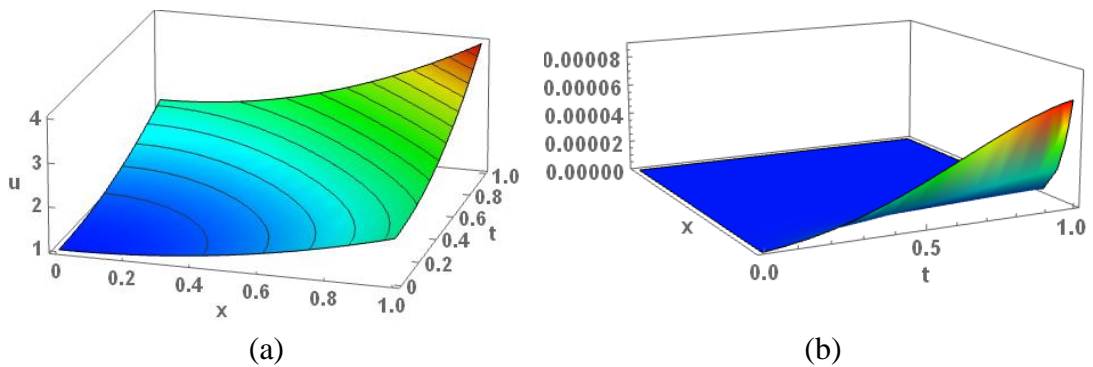
Model 5.5.3. [33] Uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini

$${}^M D_x^{\alpha_0} u(x,t) + {}^M D_t^{\alpha_1} u(x,t) = g(x,t), \quad x,t \in [0,1],$$

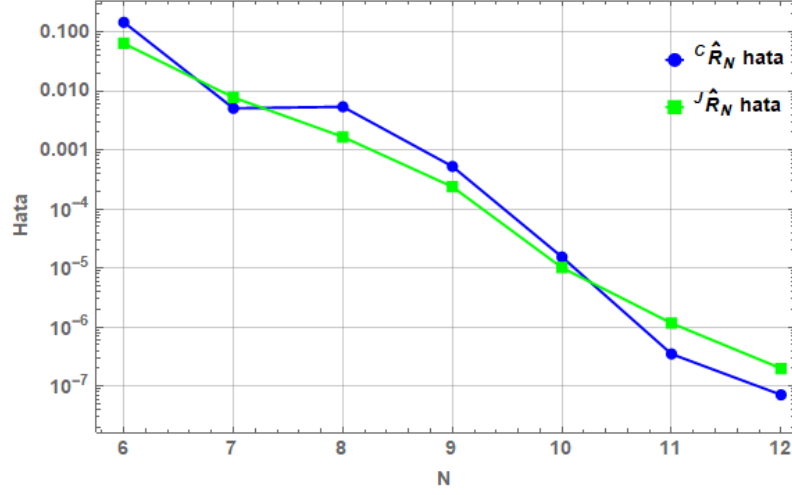
olmak üzere $u(x,0) = x^2 + 1$, $u_x(x,0) = 2x$, $u(0,t) = t^2 + 1$ ve $u_t(0,t) = 2t$ koşulları altında ele alalım. Problemin analitik çözümü $u(x,t) = (x^2 + 1)(t^2 + 1)$ 'dir ve

$$g(x,t) = \frac{\Gamma(3)x^{2-\alpha_0}(t^2+1)}{\Gamma(3-\alpha_0)} + \frac{\Gamma(3)t^{2-\alpha_1}(x^2+1)}{\Gamma(3-\alpha_1)},$$

fonksiyonu mevcuttur. Problemi, $\{\alpha_0 = 1/2, \alpha_1 = 1/3\}$, C ve J parametrelerine göre çözülsün ve yaklaşık çözümleri kullanarak kalan hata tahmini uygulansın. Şekil 5.5.4 matching polinom çözümünü ve mutlak hata fonksiyonunun grafiğini belirtmektedir. Tablo 5.5.2'de güncel sonuçlar, Chebyshev dalgacık metodunun (CWM) [33] sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmadan görüleceği üzere matching polinom çözümleri, CWM'nin çözümünden çok daha tutarlıdır ki sunulan metodun hesaplama limiti $N=10$ olup CWM'nin hesaplama limitinin $m'=11$ değerine karşılık gelmektedir ve çözümler, CWM'nin $m'=24$ değerine göre elde edilmiştir [33]. Ayrıca, C ve J kesirli türevlerine göre metodun hesaplama süresi Tablo 5.5.3'te verilmiştir. Teorem 5.5.1 gereğince C ve J kesirli türevlerine göre metodun yakınsaklığı Şekil 5.5.5'de logaritmik ölçüde incelenmiştir.



Şekil 5.5.4. Model 5.5.3'ün (a) ${}^J u_{10}(x,t)$ matching polinom çözümü ve (b) mutlak hata fonksiyonunun grafiği.



Şekil 5.5.5. Model 5.4.3 için metodun yakınsaklığının N , C ve J parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

Tablo 5.5.2. Model 5.5.3 için mutlak hata hesabının karşılaştırılması.

x_i	t_i	$ {}^c e_{10}(x_i, t_i) $	$ {}^J e_{10}(x_i, t_i) $	$ {}^c E_{10,12}(x_i, t_i) $	$ {}^J E_{10,12}(x_i, t_i) $	CWM $m' = 24$ [33]
0	0	$2.8666e-15$	$4.4409e-16$	$3.5527e-15$	$8.4377e-15$	$9.6888e-08$
1/8	1/8	$1.1520e-10$	$6.8812e-11$	$1.0159e-12$	$4.3405e-12$	$1.9934e-06$
2/8	2/8	$3.7782e-10$	$3.8862e-10$	$8.1162e-12$	$1.5427e-11$	$2.2430e-06$
3/8	3/8	$2.7052e-10$	$2.2098e-10$	$1.5479e-11$	$2.9850e-11$	$9.4261e-07$
4/8	4/8	$1.2312e-09$	$1.1474e-09$	$1.7972e-11$	$4.1307e-11$	$7.2845e-07$
5/8	5/8	$3.3416e-09$	$2.6789e-09$	$6.7362e-12$	$9.0832e-12$	$2.4646e-07$
6/8	6/8	$2.0019e-07$	$1.3094e-07$	$4.1009e-10$	$7.9464e-10$	$5.4979e-07$
7/8	7/8	$1.1738e-05$	$6.7186e-06$	$1.8830e-07$	$3.7623e-07$	$6.1688e-07$

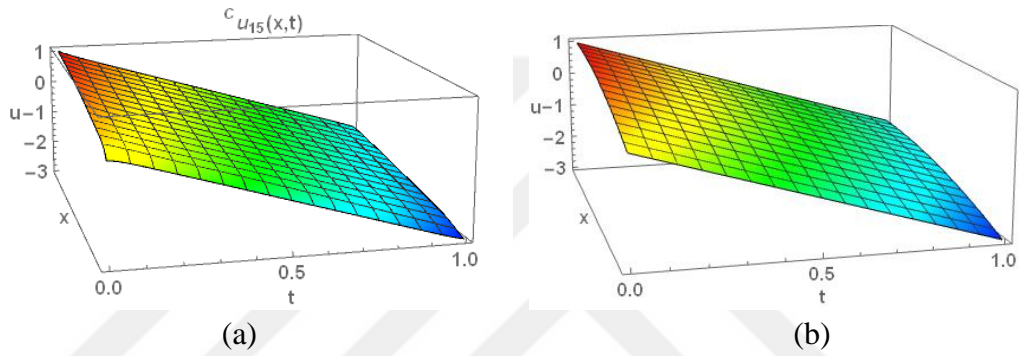
Tablo 5.5.3. Model 5.5.3 için sunulan metodun CPU süresinin C , J ve N hesaplama limitine göre karşılaştırılması.

M	Caputo formülü ile (C)			Jumarie formülü ile (J)		
$u_N(x, t)$	$u_{10}(x, t)$	$u_{12}(x, t)$	$u_{15}(x, t)$	$u_{10}(x, t)$	$u_{12}(x, t)$	$u_{15}(x, t)$
Süre (sn.)	1.07	1.55	3.61	1.17	1.78	3.92

Model 5.5.4. [179] Akışkanlar mekaniğinde kullanılan homojen olmayan uzay-zaman kesirli kısmi Navier-Stokes diferansiyel denklemini

$${}^M D_0^{\alpha_0} u(x, t) - {}^M D_0^{2\alpha_1} u(x, t) - \frac{1}{x} {}^M D_0^{\alpha_1} u(x, t) - p = 0, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_0 \leq 1,$$

olmak üzere $u(x,0)=1-x^2$, $u(0,t)=1+(p-4)t$ ve $u_x(0,t)=0$ koşulları altında çözelim. Burada, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere problemin tam çözümü, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ için $u(x,t)=1-x^2+(p-4)t$ 'dir ve $u(x,t)$ bir tüpteki akışkan hızını zaman ve kesirli türe ve bağlı olarak ifade etmektedir [179]. Problem, $N=15$ alınarak çözüldükten sonra ${}^C u_{15}(x,t)$ veya ${}^J u_{15}(x,t)$ çözümlerinin akış grafikleri, tam çözümün grafiği ile aynı davranışa sahip olduğu Şekil 5.5.6'da gözlemlenmektedir. Ayrıca, uygulanan bilgisayar programı, C ve J içeren metodun işlem süresini sırasıyla 10.08 saniye ve 10.39 saniye olarak vermiştir.



Şekil 5.5.6. Model 5.5.4'ün C, $\alpha_0 = 0.3$, $\alpha_1 = 0.2$ ve $p = 1$ için akışkanın bir tüpteki simülasyonu ((a): yaklaşık çözüm; (b) tam çözüm).

Model 5.5.5. Çoklu gecikmeli ve dalga tipindeki uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini

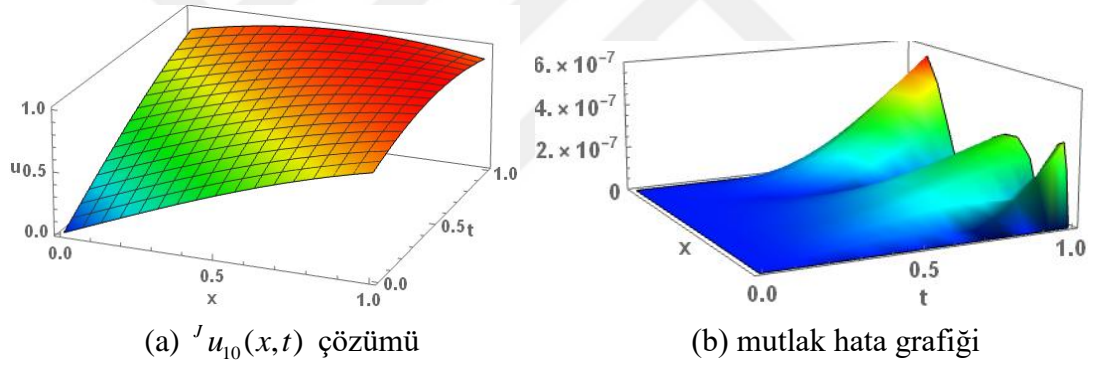
$${}^M_t D_0^{3/2} u(x,t) = {}^M_x D_0^{3/2} u(x-1,t-1) + {}_t D^1 u(x,0.5t-0.5) + u(x,0.2t) + g(x,t),$$

olmak üzere $u(x,0) = \sin(x)$, $u_t(x,0) = \cos(x)$ başlangıç koşulları ve $u(0,t) = \sin(t)$, $u(L,t) = \sin(L+t)$ Dirichlet sınır koşulları altında çözülsün. Burada, $x, t \in [0, L]$ 'dir ve problemin tam çözümü $u(x,t) = \sin(x+t)$ olarak tanımlanıp, $g(x,t)$ fonksiyonu $M=C$ için aşağıdaki formdadır:

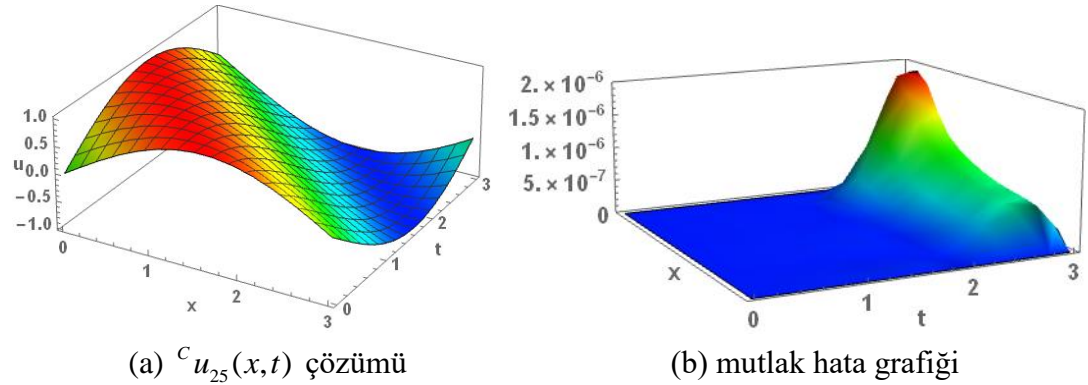
$$g(x,t) = -0.5 \cos(0.5 - x - 0.5t) + 0.75x^{1.5} \cos(2-t) {}_1F_2(1; 1.75, 1.25; -x^2/4) \\ - 0.75t^{1.5} \cos(x) {}_1F_2(1; 1.75, 1.25; -t^2/4) - 1.13t^{0.5} {}_1F_2(1; 1.25, 0.75; -t^2/4) \\ \sin(x) - 1.13x^{0.5} {}_1F_2(1; 1.25, 0.75; -x^2/4) \sin(2-t) - \sin(x+0.2t),$$

burada ${}_pF_q$ fonksiyonu genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonudur [140].

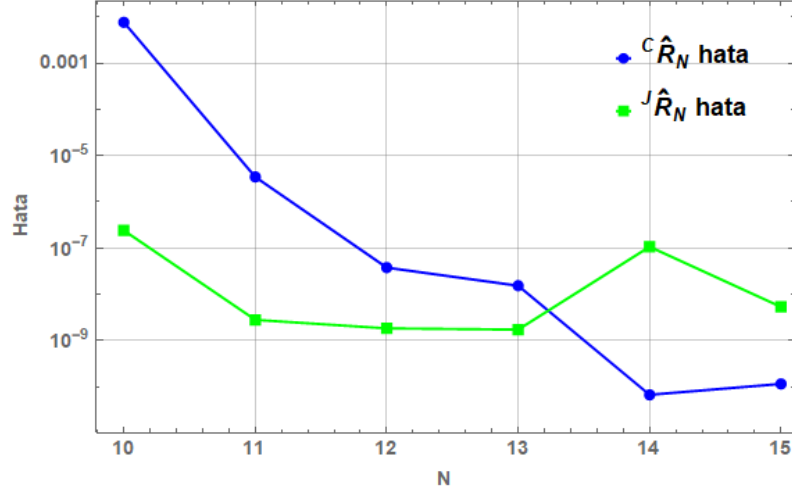
Problem, $N=10$, $N=25$, $L=1$ ve $L=3$ değerleri için çözüldüğünde çözümlerin yayılımı ve mutlak hata hesabının grafikleri Şekil 5.5.7 ve 5.5.8’de resmedilmiştir. Bu şekillerden görüleceği üzere matching polinom çözümleri, uzun zaman aralığında ve düşük N değeri için elde edilmesine rağmen tam çözüm ile iyi bir uyum içerisindedir. Belirtilen hesaplama limitlerini kullanarak, metodun işlem süresi, C ve J türevleri için sırasıyla 4.25 ve 10.61 saniye olarak elde edilmiştir. Teorem 5.5.1 gereğince metodun yakınsaklığı logaritmik ölçüdeki Şekil 5.5.9’da verilmiştir.



Şekil 5.5.7. Model 5.5.5’in $L = 1$ değeri için çözümünün ve mutlak hata grafiklerinin yayılımı.



Şekil 5.5.8. Model 5.5.5’in $L = 3$ değeri için çözümünün ve mutlak hata grafiklerinin yayılımı.



Şekil 5.5.9. Model 5.5.5 için metodun yakınsaklığının N , C ve J parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

Model 5.5.6. [180-182] gecikmeli ve zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini

$${}^M_t D_0^{0.5} u(x, t) = 0.25 {}_t D^1 u(x, t-1) + {}_x D^2 u(x, t) + g(x, t), \quad 0 \leq x, t \leq 1,$$

olmak üzere $u(0, t) = t^2$ ve $u(1, t) = et^2$ Dirichlet koşulları altında inceleyelim.

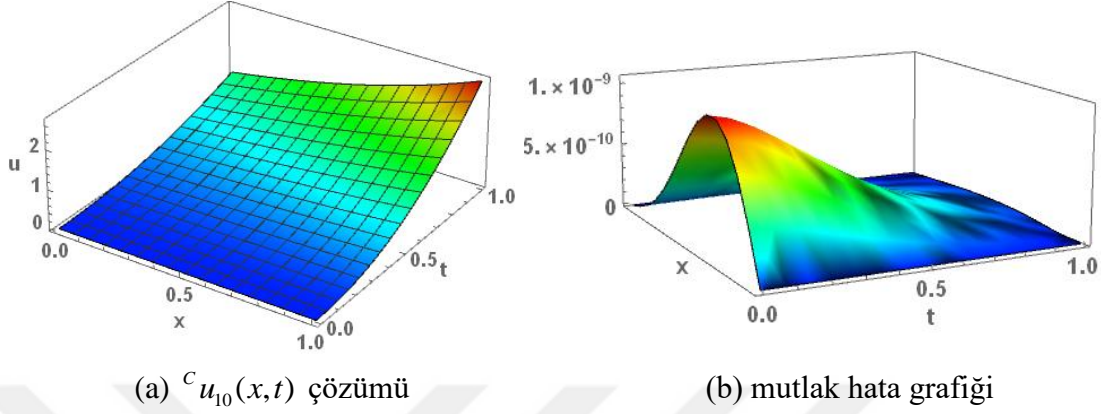
Burada, problemin tam çözümü $u(x, t) = \exp(x)t^2$ olup $g(x, t)$ fonksiyonu, $M=C$ ve

$M=J$ için aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$g(x, t) = -0.5 \exp(x)(t-1) + 1.50451 \exp(x)t^{1.5} - \exp(x)t^2.$$

Bu problem, sahil formasyonundaki kum yayılımının modellenmesinde ortaya çıkmaktadır [180-182] ve $u(x, t)$ fonksiyonu, x (alan) ve t (zaman) değişkenlerine göre çökelti konsantrasyonunu sergilemektedir [180-182]. Du ve ark. [180] yakın zamandaki çalışmalarında bu problemin çözümlerini, Taylor-Jumarie serileri ile birlikte parçalı interpolasyon tekniğini kullanarak elde ettiler. Şimdi, burada sunulan metodu kullanarak problem çözülsün. Elde edilen çözüm ve hatanın grafikleri Şekil 5.5.10'de verilmiştir. Şekil 5.5.11 metodun yakınsaklığını logaritmik ölçüde ilk on hesaplama limiti için ayrıca simüle etmiştir. Diğer taraftan, Tablo 5.5.4 güncel metot ile var olan metotlar arasındaki karşılaştırma yapmaktadır ve bu karşılaştırmadan ifade edileceği üzere $N = 10$ ($h = 0.1$) için güncel metot, fark metodu (DM) [182], çoğaltıcı

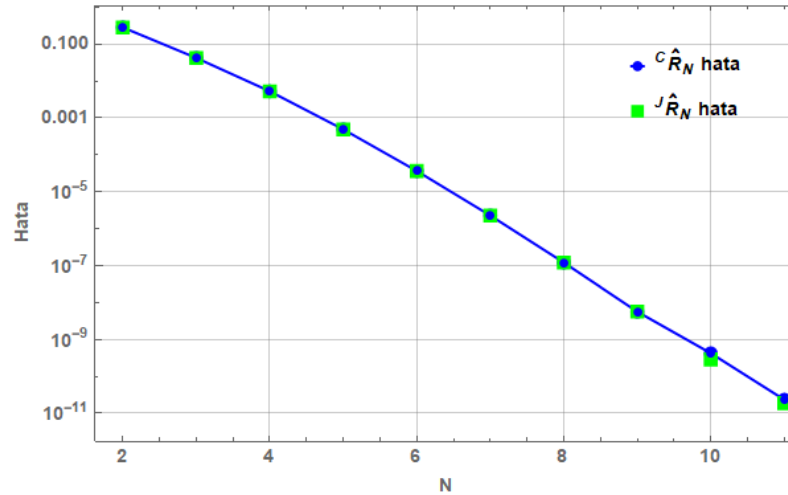
çekirdek (RKM) [180,183] ve Taylor-Jumarie parçalı interpolasyon (TJPIM) ($h=0.000001$) [180] metotlarına kıyasla tam çözüme çok daha iyi yaklaşım sağlamıştır.



Şekil 5.5.10. Model 5.5.6 için çözümün ve mutlak hata hesabının grafikleri.

Tablo 5.5.4. Model 5.5.6 için güncel ve var olan metotların bağıl hatalarının karşılaştırılması.

(x,t)	${}^C e_{10}$ $N = 10$ $(h = 0.1)$	${}^J e_{10}$ $N = 10$ $(h = 0.1)$	DM [182]	RKM [180,183]	TJPIM $h = 0.000001$ [180]
(0.2.1)	$3.0087 e-011$	$2.3630 e-011$	$5.2135 e-04$	$9.3154 e-02$	$2.0019 e-07$
(0.4.1)	$3.7722 e-011$	$3.4186 e-011$	$5.8586 e-04$	$1.1490 e-01$	$2.6208 e-07$
(0.6.1)	$2.7654 e-011$	$2.9658 e-011$	$6.0037 e-04$	$9.2228 e-02$	$2.2924 e-07$
(0.8.1)	$8.9031 e-012$	$1.1920 e-011$	$6.9588 e-04$	$4.8021 e-02$	$1.3398 e-07$



Şekil 5.5.11. Model 5.5.6 için metodun yakınsaklığının N , C ve J parametrelerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

5.6. Uzay-Zaman Kesirli Kısmi İntegro-Diferansiyel-Gecikmeli Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, tam çizgenin matching polinomuna dayanan matris-sıralama metodunu, uzay-zaman değişkenlerine göre kesirli kısmi integro-diferansiyel-gecikmeli denklemleri tek bir formül altında inceleyerek yaklaşık çözümlerini elde edilecektir. Bu formül

$$P_{\alpha_k} \frac{\partial^{\alpha_k} u(x,t)}{\partial t^{\alpha_k}} + Q_{\beta_k} \frac{\partial^{\beta_k} u(x-\tau_{\beta_k}, t-\sigma_{\beta_k})}{\partial x^{\beta_k}} = g(x,t) + \lambda_f \int_a^b K_f(x,t,s)u(x,s)ds + \lambda_v \int_a^t K_v(x,t,s)u(x,s)ds, \quad (5.53)$$

şeklinde olmak üzere ve $\partial\Omega$ 'daki

$$u(a,t) = c_1(t), u(b,t) = c_2(t), \quad (5.54)$$

Dirichlet sınır koşulları altında ele alınacaktır. Burada, $0 < \alpha_k \leq 3$, $0 \leq \beta_k \leq 2$ ($k = 0,1$) Caputo anlamındaki [77] kesirli türevleri belirtmektedir; gecikme parametreleri $\tau_{\beta}, \sigma_{\beta} \geq 0$ olarak tanımlıdır; $\{P_{\alpha_k}, Q_{\beta_k}, \lambda_f, \lambda_v\}$ reel katsayılarıdır; $\{K_f(x,t,s), K_v(x,t,s)\}$ çekirdek fonksiyonları $u(x,t)$ ve $g(x,t)$ fonksiyonları

$$\Omega = \{(x,t) : x \in [a,b], t \in [c,d]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

dikdörtgensel bölgede analitiktir.

(5.53) denklemi kullanılarak, difüzyon ve Barbashin tipindeki kısmi integro-diferansiyel denklemler [184-186], çoklu terimli ve uzay-zaman gecikmeli zaman kesirli kısmi integro-diferansiyel denklemler gibi bazı özel problemlere kolayca indirgenebilmektedir. Özellikle belirtmek gerekir ki radyasyon yayılımında, matematiksel biyolojide ve taşıma problemlerinde [184,185] ortaya çıkan Barbashin tipindeki bu denklemler, (5.53) denklemi sayesinde üretilebilmektedir.

Alternatif olarak, (5.53) denklemini kısaca

$$D(x,t) = g(x,t) + \lambda_f I_f(x,t) + \lambda_v I_v(x,t), \quad (5.55)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$D(x,t) = P_{\alpha_k} \frac{\partial^{\alpha_k} u(x,t)}{\partial t^{\alpha_k}} + Q_{\beta_k} \frac{\partial^{\beta_k} u(x-\tau_{\beta_k}, t-\sigma_{\beta_k})}{\partial x^{\beta_k}}, \quad I_f(x,t) = \int_a^b K_f(x,t,s)u(x,s)ds,$$

ve

$$I_v(x,t) = \int_a^t K_v(x,t,s)u(x,s)ds,$$

öyle ki $D(x,t)$, $I_f(x,t)$ ve $I_v(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla türevsel, Fredholm integral ve Volterra integral kısımlarını belirtmektedir.

(5.53) denkleminin çözümlerinin (3.9) formunda elde edilecektir. Şimdi, metodu oluşturabilmek için ilk olarak $D(x,t)$ kısmının matris bağıntısı oluşturulsun.

(3.10) matris bağıntısını, β_k uzay ve α_k zaman kesirli türevleri alındığında

$$\frac{\partial^{\beta_k} u(x,t)}{\partial x^{\beta_k}} = \mathbf{X}_{\beta_k}(x) \overline{\mathbf{KT}(t)} (\overline{\mathbf{K}}) \mathbf{Y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^{\alpha_k} u(x,t)}{\partial t^{\alpha_k}} = \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{KT}_{\alpha_k}(t)} (\overline{\mathbf{K}}) \mathbf{Y}, \quad (5.56)$$

matris bağıntısı elde edilir. Burada, $0 < \alpha_k \leq 3$, $0 \leq \beta_k \leq 2$ ($k = 0,1$),

$$\mathbf{X}_{\beta_k}(x) = \frac{\partial^{\beta_k}}{\partial x^{\beta_k}} [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N], \quad \mathbf{X}_{\alpha_k}(t) = \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial t^{\alpha_k}} [1 \quad t \quad \cdots \quad t^N],$$

ve

$$\overline{\mathbf{T}_{\alpha_k}(t)} = \text{diag} [\mathbf{X}_{\alpha_k}(t)].$$

(5.56) matris bağıntısının uzay türevli kısmına $x \rightarrow x - \tau_{\beta_k}$ ve $t \rightarrow t - \sigma_{\beta_k}$ yazılarak

$$\frac{\partial^{\beta_k} u(x - \tau_{\beta_k}, t - \sigma_{\beta_k})}{\partial x^{\beta_k}} = \mathbf{X}_{\beta_k}(x - \tau_{\beta_k}) \overline{\mathbf{KT}(t - \sigma_{\beta_k})} \overline{\mathbf{KY}}, \quad (5.57)$$

matris bağıntısı elde edilir ve burada,

$$\mathbf{X}_{\beta_k}(x - \tau_{\beta_k}) = \frac{\partial^{\beta_k}}{\partial x^{\beta_k}} \left[1 \quad (x - \tau_{\beta_k}) \quad \cdots \quad (x - \tau_{\beta_k})^N \right], \quad \overline{\mathbf{T}(t - \sigma_{\beta_k})} = \text{diag} \left[\mathbf{X}(t - \sigma_{\beta_k}) \right],$$

matris yapıları mevcuttur.

(3.11) sıralama noktaları ve (5.56), (5.57) matris bağıntıları yardımıyla, $D(x, t)$ kısmının matris formu

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{P}_{\alpha_k} \mathbf{X} \mathbf{K} \overline{\mathbf{T}_{\alpha_k}} + \mathbf{Q}_{\beta_k} \mathbf{X}_{\beta_k}(\tau_{\beta_k}) \overline{\mathbf{KT}(\sigma_{\beta_k})} \right\} \overline{\mathbf{K}}, \quad (5.58)$$

olarak elde edilir ve burada \mathbf{P}_{α_k} , \mathbf{Q}_{β_k} matrisleri sabit matrislerdir.

Şimdi, (5.53) denkleminin, Fredholm-Volterra integral kısımlarının matris bağıntılarını oluşturulsun. $K_f(x, t, s)$ çekirdek fonksiyonu Taylor serisi yardımıyla aşağıdaki gibi açılımı yazılabilir [187]:

$$K_f(x, t, s) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^N k_{pqr} x^p t^q s^r,$$

ve böylece bu fonksiyonun matris bağıntısı

$$\left[K_f(x, t, s) \right] = \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{T}(t)} \mathbf{K}_f \mathbf{X}^T(s), \quad (5.59)$$

şeklindedir ve burada,

$$\mathbf{K}_f = [k_{pqr}], k_{pqr} = \frac{1}{p!q!r!} \frac{\partial^{p+q+r} K_f(x,t,s)}{\partial x^p \partial t^q \partial s^r}, p, q, r = 0, 1, \dots, N,$$

tanımlıdır. Benzer şekilde, $K_v(x,t,s)$ çekirdek fonksiyonun matris bağıntısı

$$[K_v(x,t,s)] = \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{T}(t)} \mathbf{K}_v \mathbf{X}^T(s), \quad (5.60)$$

olarak tanımlıdır.

(3.10) ve (5.59) matris bağıntılarını kullanarak, Fredholm integral kısmının matris bağıntısı

$$\begin{aligned} [I_f(x,t)] &= \int_a^b \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{T}(t)} \mathbf{K}_f \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{K}\mathbf{T}(s)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} ds \\ &= \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{T}(t)} \mathbf{K}_f \mathbf{R}_f(x,t) \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathbf{R}_f(x,t) = \int_a^b \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{K}\mathbf{T}(s)} ds,$$

tanımlıdır. Benzer şekilde, (3.10) ve (5.60) matris bağıntılarını kullanarak Volterra integral kısmının matris bağıntısı

$$\begin{aligned} [I_v(x,t)] &= \int_a^t \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{T}(t)} \mathbf{K}_v \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{K}\mathbf{T}(s)} \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}} ds \\ &= \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{T}(t)} \mathbf{K}_v \mathbf{R}_v(x,t) \overline{\mathbf{K}\mathbf{Y}}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathbf{R}_v(x,t) = \int_a^t \mathbf{X}^T(s) \mathbf{X}(x) \overline{\mathbf{K}\mathbf{T}(s)} ds,$$

tanımlıdır.

(3.11) sıralama noktalarının, (5.61) ve (5.62) matris formlarında yerine yazarak, Fredholm ve Volterra integral kısımlarının matris formları sırasıyla

$$\mathbf{I}_f = \mathbf{X}^T \overline{\mathbf{K}}_f \mathbf{R}_f \overline{\mathbf{K}} \quad \text{ve} \quad \mathbf{I}_v = \mathbf{X}^T \overline{\mathbf{K}}_v \mathbf{R}_v \overline{\mathbf{K}}, \quad (5.63)$$

olarak son hallerini alırlar.

(5.58) ve (5.63) matris formları yardımıyla, (5.53) denkleminin temel matris denklemini

$$\{\mathbf{D} - \lambda_f \mathbf{I}_f - \lambda_v \mathbf{I}_v\} \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}], \quad (5.64)$$

olarak oluşturulur ve burada,

$$\mathbf{W} = \mathbf{D} - \lambda_f \mathbf{I}_f - \lambda_v \mathbf{I}_v,$$

ve

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0, t_0) & g(x_0, t_1) & \cdots & g(x_0, t_N) & \cdots & g(x_N, t_0) & \cdots & g(x_N, t_N) \end{bmatrix}^T,$$

matris yapıları mevcuttur.

Diğer taraftan, (5.54) Dirichlet sınır koşullarının matris bağıntıları, (3.10) matris bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \mathbf{X}(a) \overline{\mathbf{K}}^T(t) \overline{\mathbf{K}} \mathbf{Y} = c_1(t), \\ u(b, t) &= \mathbf{X}(b) \overline{\mathbf{K}}^T(t) \overline{\mathbf{K}} \mathbf{Y} = c_2(t), \end{aligned} \quad (5.65)$$

olarak oluşturulur ve (3.11) sıralama noktalarını, (5.65) matris bağıntılarında yerine yazarak

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} u(a, t_0) & \cdots & u(a, t_N) & u(b, t_0) & \cdots & u(b, t_N) \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1(t_0) & \cdots & c_1(t_N) & c_2(t_0) & \cdots & c_2(t_N) \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

matrisleri elde edilir. Burada, U ve C matrislerinin boyutları sırasıyla $(N+1)^2 \times 2(N+1)$ ve $1 \times 2(N+1)$ olarak tanımlıdır.

(5.64) matris denklemindeki W ve G matrislerinin $2(N+1)$ sayıdaki herhangi satırı kaldırıldıktan sonra W ve G matrisleri sırasıyla U koşul ve C değer matrisleri ile birleştirilir. Böylelikle, arttırılmış matris sistemi

$$\begin{bmatrix} W & : & G \\ U & : & C \end{bmatrix}, \quad (5.66)$$

elde edilir ve burada, W ve G matrisleri sırasıyla $\left((N+1)^2 - 2(N+1)\right) \times (N+1)^2$ ve $\left((N+1)^2 - 2(N+1)\right) \times 1$ boyutlarında matrislerdir.

(5.66) arttırılmış matris sisteminin rankı $(N+1)^2$ olduğunda bu sistem Y matrisini, yani katsayılar matrisini üretecektir. Böylelikle Y matrisini, (3.10) matris formunda yerine yazarak, (5.53) denkleminin matching polinom çözümü elde edilir.

5.6.1. Kalan Fonksiyona Dayalı Hata Tahmini ve Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde, (5.53) denkleminde elde edilen çözümleri geliştirmek için kalan fonksiyona dayalı hata tahmin yöntemini geliştirip ve daha sonra metodun yakınsaklığını incelenecektir. Hata tahminini uygulayabilmek için kalan fonksiyonu

$$R_{\alpha,\beta,N}(x,t) = D(x,t) - \lambda_f I_f(x,t) - \lambda_v I_v(x,t) - g(x,t),$$

olarak elde edilecektir ve $e_N(x,t)$ hata fonksiyonu

$$L[e_N(x,t)] = L[u(x,t)] - L[u_N(x,t)] = -R_{\alpha,\beta,N}(x,t), \quad (5.67)$$

eşitliğini vermektedir ve burada $L[\cdot]$ doğrusal operatördür.

Ayrıca, Dirichlet sınır koşulları homojen koşullar olarak belirlenmiştir. (5.67) denklemini ve homojen koşullar, sunulan metot ile çözülen bir hata problemini oluşturmaktadır. Bu problem çözüldüğünde

$$e_{N,K}(x,t) = \sum_{p=0}^K \sum_{q=0}^K \tilde{y}_{pq} M_{pq}(K_p, x) M_{pq}(K_q, t), \quad K > N,$$

tahmini hata fonksiyonu elde edilir ve bu fonksiyon yardımıyla, $u_{N,K}(x,t)$ geliştirilmiş yaklaşık çözüm ve düzeltilmiş hata fonksiyonu $E_{N,K}(x,t)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_{N,K}(x,t) = u_N(x,t) + e_{N,K}(x,t) \quad \text{ve} \quad E_{N,K}(x,t) = u(x,t) - u_{N,K}(x,t),$$

burada, $u(x,t)$ ele alınan problemin tam çözümüdür.

Şimdi, metodun yakınsaklığını, $\{\alpha_k, \beta_k\}$ kesirli türevlerini içeren $R_{\alpha,\beta,N}(x,t)$ kalan fonksiyonuna ve çift katlı integraller için ortalama değer teoremine dayalı yakınsaklık analizi oluşturalım. Bu analiz, esas olarak Teorem 5.5.1'de verilen analizin yapısından geliştirilmiştir. Buradaki hata üst sınırı, $R_{\alpha,\beta,N}(x,t)$ fonksiyonuna bağlı olup belirtilen teoremin formülüyle aynı yapıya sahiptir.

Teorem 5.6.1. $R_{\alpha,\beta,N}(x,t)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun ve $\hat{R}_{\alpha,\beta,N}$ hata üst sınırını; α , β kesirli türevlerine ve N hesaplama limitine göre belirtsin. Bu takdirde, metodun yakınsaklığı

$$\left| R_{\alpha,\beta,N}(x_0, t_0) \right| \leq \frac{\iint_{\Omega} |R_{\alpha,\beta,N}(x,t)| dA}{\iint_{\Omega} dA} = \hat{R}_{\alpha,\beta,N}, \quad (x_0, t_0) \in (a,b) \times (c,d),$$

olarak etkin bir şekilde hesaplanır.

İspat. Teorem 5.5.1'in ispatı ile aynı prosedür takip edilecektir.

5.6.2. Sayısal Örnekler

Bu bölümde, dört adet zorlu kesirli kısmi integro-diferansiyel denklemlerin matching polinom çözümleri elde edilecektir.

Örnek 5.6.1. [186] Difüzyon tipindeki zaman kesirli kısmi integro-diferansiyel denklemini

$$\frac{\partial^{\alpha_0} u(x,t)}{\partial t^{\alpha_0}} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t) - \int_0^t u(x,s) ds, \quad x \in [-1,1], \quad t \in [0,1], \quad 0 < \alpha_0 \leq 1,$$

olmak üzere $u(-1,t) = 0$ ve $u(1,t) = 0$ Dirichlet sınır koşulları altında matching polinom çözümü hesaplınsın. Burada, problemin tam çözümü $\alpha_0 = 1$ için $u(x,t) = (1-x^6) \sin(x+t)$ 'dir ve $g(x,t)$ fonksiyonu, $\alpha_0 = 1$ için

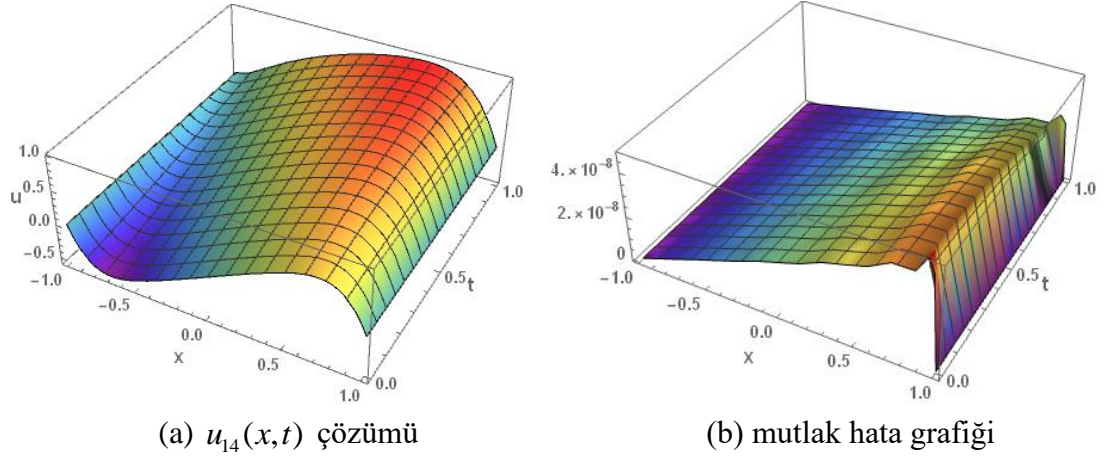
$$g(x,t) = (1-x^6) \cos(x) + 12x^5 \cos(x+t) + (1+30x^4 - x^6) \sin(x+t),$$

olarak elde edilir.

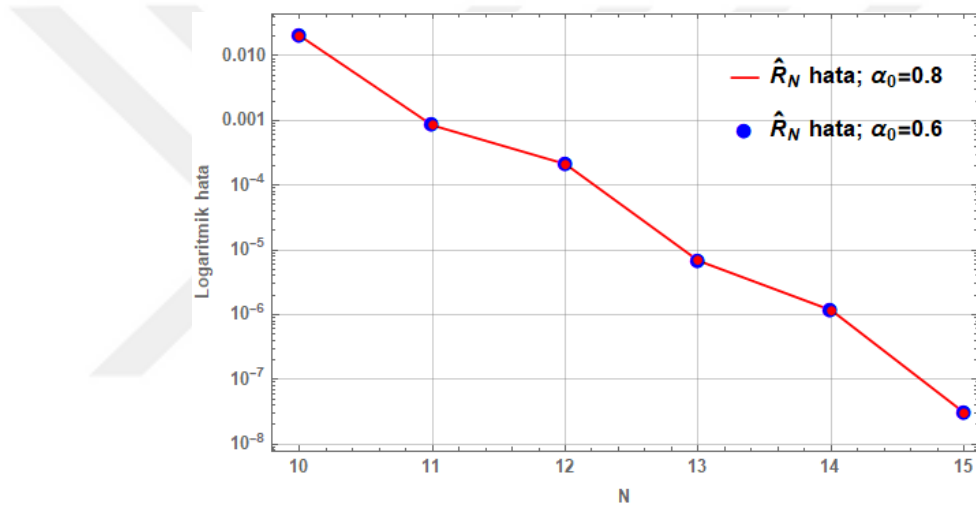
(5.64) temel matris denklemi yardımıyla, bu problemin temel matris denklemi

$$\left\{ \overline{XKT}_{\alpha_0} \overline{K} + \overline{Q}_{\beta} \overline{X}_{\beta} (\tau_{\beta}) \overline{KT} (\sigma_{\beta}) \overline{K} - \lambda_{\nu} \overline{XTK}_{\nu} \overline{R}_{\nu} \overline{K} \right\} \overline{Y} = \overline{G},$$

şeklindedir ve sunulan metodun prosedürü uygulandıktan sonra problemin çözümü elde edilir. Şekil 5.6.1'de $\alpha_0 = 0.8$ için çözümün ve mutlak hata fonksiyonunun grafiği resmedilmiştir. Şekil 5.6.2'de $\hat{R}_{\alpha_0, N}$ hata üst sınırının değeri, N ve α_0 değerlerine göre logaritmik ölçüde simüle edilmiştir. Ayrıca, Tablo 5.6.1'den ifade edilebilir ki $N = 10$ için elde edilen güncel mutlak hata değerleri, $N = \{16, 32\}$ için Haar dalgacık metodu (HDM) [186] ile elde edilen mutlak hata değerlerinden daha düşüktür.



Şekil 5.6.1. Örnek 5.6.1'in $\alpha_0 = 0.8$ için çözümün ve mutlak hata grafikleri.



Şekil 5.6.2. Örnek 5.6.1 için metodun yakınsaklığının N değerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

Örnek 5.6.2. Radyasyon yayılımında, matematiksel biyolojide ve taşınım problemlerinde karşılaşılan Barbashin tipindeki [184,185] uzay kesirli kısmi integro-diferansiyel denklemini

$$\frac{\partial^{\beta_0} u(x,t)}{\partial x^{\beta_0}} - 2u(x,t) = g(x,t) + \int_0^1 (x+t+s)u(x,s)ds, \quad x,t \in \Omega = [0,1]^2, \quad 0 < \beta_0 \leq 1,$$

olmak üzere $u(0,t) = t \exp(\beta_0 t)$ ve $u(1,t) = (1+t) \exp(\beta_0(1+t))$ Dirichlet sınır koşulları altında ele alalım. Burada, problemin tam çözümü

$u(x,t) = (x+t)\exp(\beta_0(x+t))$ 'dir ve $g(x,t)$ fonksiyonu, β_0 kesirli türev değerine göre değişecektir. $\beta_0 = 1$ için

$$g(x,t) = \exp(x)(2 - e + \exp(t) - t + x(x+t-2) - \exp(t)(x+t) - e(x^2 + xt)),$$

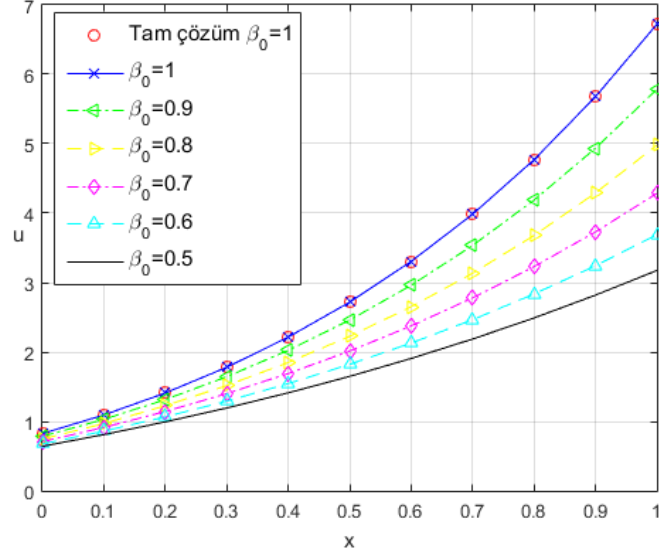
elde edilir. Problem güncel metot ile çözüldükten sonra matching polinom çözümünün fiziksel hareketi, Şekil 5.6.3'te kesirli ve tam sayılı mertebeye göre incelenmiştir. Buna ek olarak, $\hat{R}_{\beta_0,N}$ hata üst sınırı, β_0 ve N değerlerine göre Tablo 5.6.2'de değerlendirilmiştir ve bu tabloda sonuçların oldukça tutarlı olduğu görülmüştür.

Tablo 5.6.1. Örnek 5.6.1 için hata hesaplamalarının metotlara göre karşılaştırılması.

t	$ e_{10}(x,t) $ $\alpha_0 = 0.8$	$ E_{10,12}(x,t) $ $\alpha_0 = 0.8$	$ e_{10}(x,t) $ $\alpha_0 = 1$	HDM [186] $N = 16 \times 16$	HDM [186] $N = 32 \times 32$
0.1	1.5527e-03	6.2514e-06	1.8056e-03	1.1233e-02	9.4331e-03
0.2	1.5552e-03	6.6420e-06	1.6620e-03	2.1878e-02	4.2862e-03
0.3	1.5432e-03	6.8471e-06	1.6275e-03	2.6102e-02	5.1332e-03
0.4	1.5167e-03	7.1366e-06	1.5828e-03	1.2412e-02	1.1215e-02
0.5	1.4756e-03	7.6625e-06	1.5271e-03	3.8287e-02	1.7217e-02
0.6	1.4203e-03	8.0693e-06	1.4560e-03	1.3611e-02	7.9450e-03
0.7	1.3513e-03	7.7969e-06	1.3813e-03	1.5722e-02	3.0593e-03
0.8	1.2693e-03	7.4991e-06	1.2912e-03	2.3730e-02	4.6042e-03
0.9	1.1749e-03	8.4049e-06	1.1900e-03	7.8461e-03	1.0081e-02
1.0	1.0692e-03	1.5955e-08	1.0784e-03	3.2637e-02	1.5236e-02
L_∞	1.1812e-03	8.4049e-06	2.9553e-03	3.2394e-02	8.9718e-03

Tablo 5.6.2. Örnek 5.6.2 için metodun yakınsaklığının β_0 ve N değerlerine göre karşılaştırılması.

$N \beta_0$	0.5	0.7	0.9	1
8	3.18e-009	2.55e-005	4.52e-005	1.92e-008
9	7.61e-010	1.31e-009	5.19e-008	5.91e-010
10	1.16e-010	5.15e-011	1.91e-010	1.63e-011
11	7.37e-012	4.57e-009	5.37e-011	4.48e-013
12	2.57e-012	9.11e-012	3.05e-012	3.41e-013
13	1.15e-012	1.02e-012	1.34e-012	1.55e-013
14	1.50e-014	4.14e-014	2.11e-013	3.27e-013
15	1.25e-013	2.77e-014	1.13e-013	5.89e-013



Şekil 5.6.3. Örnek 5.6.2 için $u_8(x, 0.5)$ matching polinom çözümünün α_0 değerine göre fiziksel hareketi.

Örnek 5.6.3. Çoklu terimli ve zaman kesirli kısmi Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemini

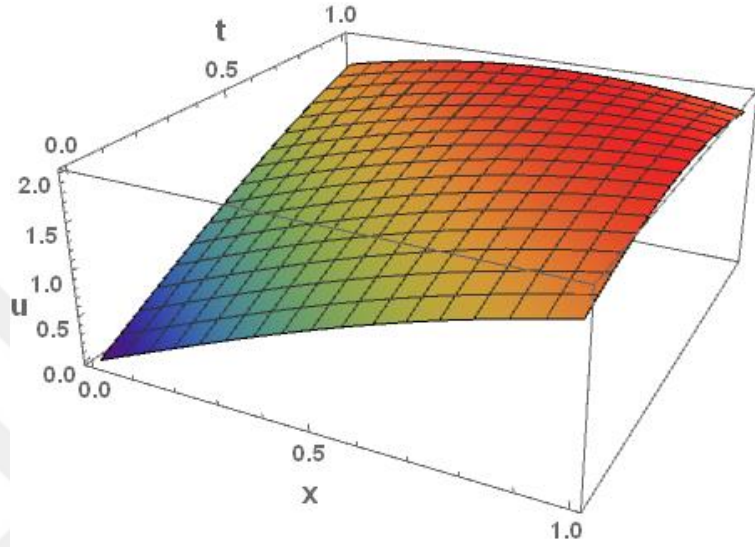
$$\frac{\partial^{\alpha_1} u(x, t)}{\partial t^{\alpha_1}} - \frac{\partial^{\alpha_0} u(x, t)}{\partial t^{\alpha_0}} + \frac{\partial u(x-1, t-1)}{\partial x} + u(x, t) = g(x, t) + \int_0^1 (x-t-s)u(x, s)ds - \int_0^t (xt)u(x, s)ds,$$

olmak üzere $u(0, t) = \alpha_1 \sin(t)$ ve $u(1, t) = \alpha_1 \sin(1+t)$ Dirichlet sınır koşulları altında çözümü araştırılsın. Burada, $x, t \in \Omega = [0, 1]^2$, $1 < \alpha_1 = 2\alpha_0 \leq 2$ ve $g(x, t)$ fonksiyonu, $\{\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2\}$ için

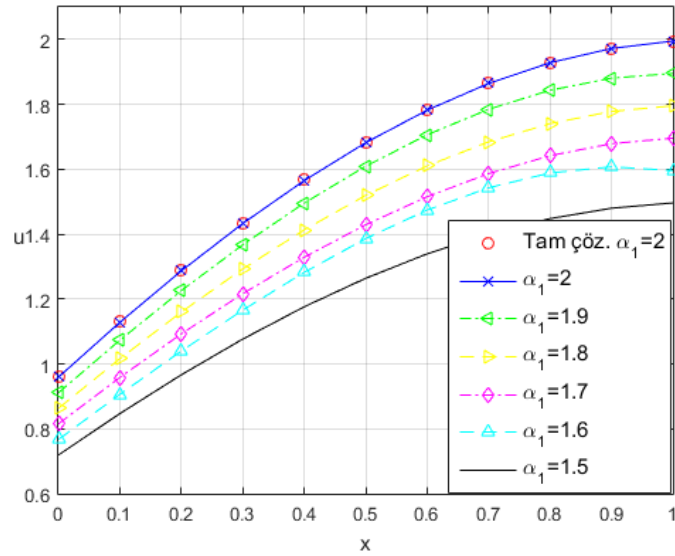
$$g(x, t) = 2((x(t-1)+t) \cos x + (x-t-1) \cos(x+1) + \cos(2-x-t) - (1+xt) \cos(x+t) - \sin x + \sin(x+1)),$$

olarak elde edilir. Problemin tam çözümü $u(x, t) = \alpha_1 \sin(x+t)$ 'dir. Problem, $N = 7$ için çözüldükten sonra iki ve üç boyutlu matching polinom çözümü α_1 değerine göre Şekil 5.6.4'de belirtilmiştir. N ve α_1 parametreleri değiştirildikçe, logaritmik ölçüdeki hata üst sınırının değerleri Şekil 5.6.5'de izlenmiştir. Görüleceği üzere N

değeri artırıldıkça metodun kesinliği de artmaktadır. Ayrıca, metodun farklı kesirli türev değerleri kullanıldığında, kesinliği ve tutarlılığında değişim olmadığı ifade edilmelidir. Mutlak ve düzeltilmiş mutlak hata değerleri düşük N değerleri için Tablo 5.6.3'te incelenmiştir ve CPU süresi, N limiti açısından Tablo 5.6.4'de değerlendirilmiştir.

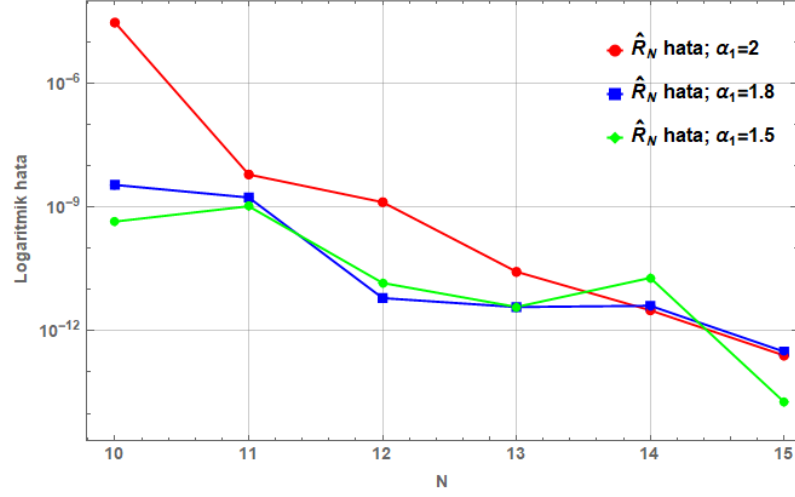


(a) $u_7(x,t)$ çözümünün $\alpha_1 = 2$ için üç boyutlu grafiği



(b) $u_7(x,0.5)$ çözümünün α_1 değerine göre iki boyutlu grafiği

Şekil 5.6.4. Örnek 5.6.3 için matching polinom çözümünün iki ve üç boyutlu grafikleri.



Şekil 5.6.5. Örnek 5.6.3 için metodun yakınsaklığının N değerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

Tablo 5.6.3. Örnek 5.6.3'ün $\alpha_1=1.8$ değeri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

(x, t)	$ e_8(x, t) $	$ e_9(x, t) $	$ e_{10}(x, t) $	$ E_{10,11}(x, t) $
(0.2,0.2)	$7.59e-04$	$3.06e-05$	$8.56e-06$	$2.55e-07$
(0.4,0.4)	$2.97e-03$	$9.61e-05$	$3.41e-05$	$1.88e-06$
(0.6,0.6)	$5.41e-03$	$1.59e-04$	$6.27e-05$	$4.11e-06$
(0.8,0.8)	$5.17e-03$	$1.45e-04$	$6.10e-05$	$4.46e-06$

Tablo 5.6.4. Örnek 5.6.3 için CPU süresinin (sn.) α_1 ve N değerlerine göre karşılaştırılması.

$\downarrow N \mid \alpha_1 \rightarrow$	1.5	1.8	2
7	3.25	2.88	2.20
8	3.98	4.52	3.70
9	5.98	6.13	5.48
10	8.28	8.55	7.42
11	11.77	11.64	10.25
13	20.73	20.73	18.95
15	35.61	35.64	32.72

Örnek 5.6.4. Çoklu uzay-zaman gecikmeli ve uzay-zaman değişkenlerine göre kesirli kısmi Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemini

$$\frac{\partial^{\alpha_0} u(x,t)}{\partial t^{\alpha_0}} - 2 \frac{\partial^{\beta_1} u(x-0.5,t-0.5)}{\partial x^{\beta_1}} + \frac{3}{2} u(x-0.8,t-0.8) = g(x,t) \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 (x-t^2+s^2) u(x,s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t (x+1)(t+1)(s+1) u(x,s) ds,$$

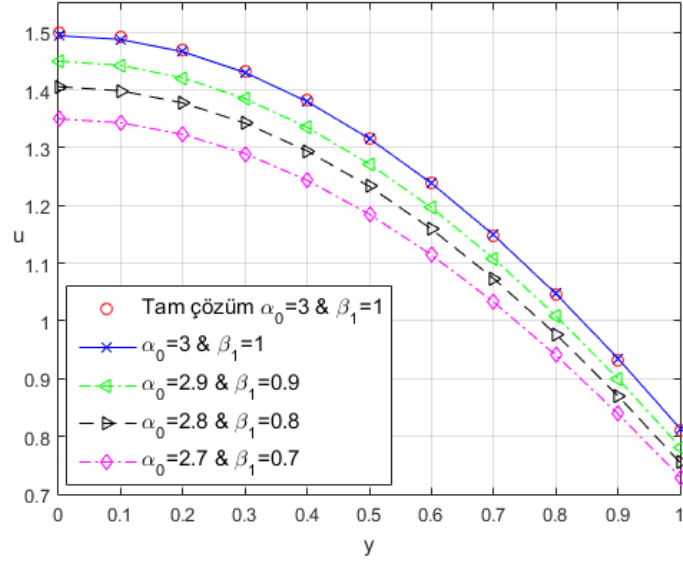
olmak üzere $u(0,t) = 0$ ve $u(1,t) = \alpha_0 \cos(t)$ Dirichlet sınır koşulları altında çözümü araştırılsın. Burada, $x,t \in \Omega = [0,1]^2$, $2 < \alpha_0 \leq 3$, $0 < \beta_1 \leq 1$ ve $g(x,t)$ fonksiyonu $\{\alpha_0 = 3, \beta_1 = 1\}$ için

$$g(x,t) = x(-0.3587 - 1.26221x + 1.26221t^2) - 6 \cos(0.5-t) \\ + 4.5(-0.8+x) \cos(0.8-t) + 3x \sin(t) - 1.5x(1+x)(1+t) \\ (-1 + \cos(t) + (1+t) \sin(t)),$$

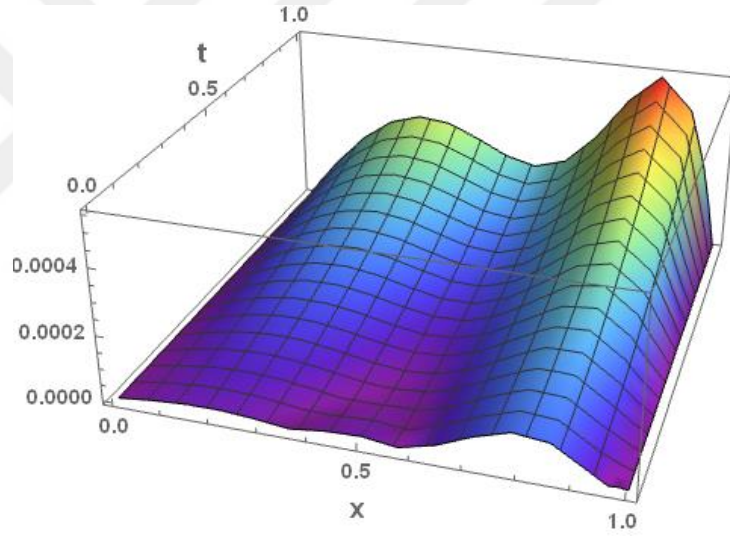
olarak elde edilir. Problemin tam çözümü $u(x,t) = \alpha_0 x \cos(t)$ 'dir. Sunulan metodu ve kalan hata analizi uygulandıktan sonra matching polinom çözümü N ve K değerlerine göre elde edilir. Çözüm ve mutlak hata hesabı farklı $\{\alpha_0, \beta_1\}$ değerleri için Şekil 5.6.6'da verilmiştir. Metodun yakınsaklığını, hesaplama limitine ve kesirli türev değerine göre gösteren hata üst sınır değeri Şekil 5.6.7'de simüle edilmiştir. Diğer taraftan, hata hesaplamalarının değerleri farklı N değerleri için Tablo 5.6.5'de değerlendirilmiştir ve bu tablodan görüleceği üzere $u_{10}(x,t)$ çözümü, kalan hata tahmin analizinin $K = 13$ hesaplama limiti ile geliştirilmiştir.

Tablo 5.6.5. Örnek 5.6.4'ün $\alpha_0 = 2.9$ ve $\beta_1 = 0.9$ değerleri için mutlak hata hesaplamalarının karşılaştırılması.

(x,t)	$ e_9(x,t) $	$ e_{10}(x,t) $	$ E_{10,13}(x,t) $
(0.1,0.1)	$5.36 e-04$	$9.27 e-05$	$2.05 e-05$
(0.2,0.2)	$1.54 e-03$	$2.22 e-04$	$5.12 e-05$
(0.3,0.3)	$2.96 e-03$	$3.70 e-04$	$8.15 e-05$
(0.4,0.4)	$4.54 e-03$	$5.20 e-04$	$9.98 e-05$
(0.5,0.5)	$5.83 e-03$	$6.53 e-04$	$1.18 e-04$
(0.6,0.6)	$6.31 e-03$	$7.28 e-04$	$1.82 e-04$
(0.7,0.7)	$5.67 e-03$	$6.54 e-04$	$3.15 e-04$
(0.8,0.8)	$4.11 e-03$	$3.05 e-04$	$3.75 e-04$
(0.9,0.9)	$2.28 e-03$	$2.54 e-04$	$5.89 e-05$

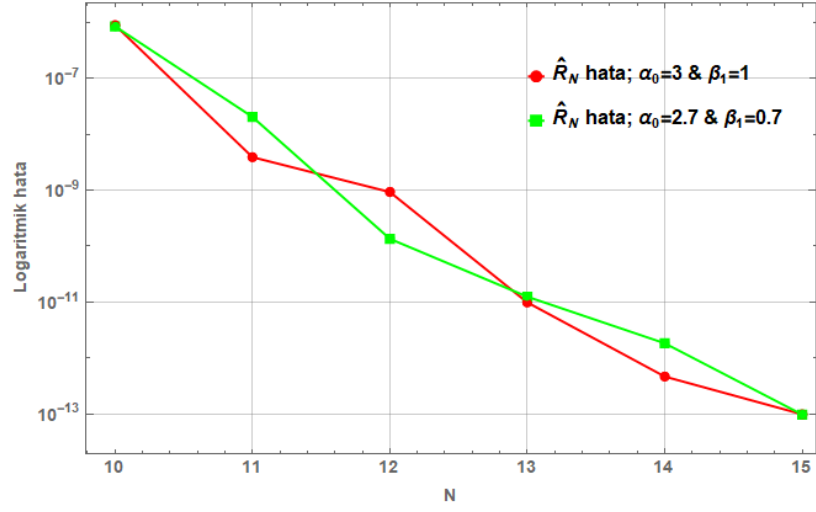


(a) $u_{10}(0.5, t)$ çözümünün iki boyutlu grafiği



(b) $\alpha_0 = 2.7$ ve $\beta_1 = 0.7$ için mutlak hata grafiği

Şekil 5.6.6. Örnek 5.6.4 için $u_{10}(x, t)$ matching polinom çözümünün ve mutlak hata hesabının grafiği.



Şekil 5.6.7. Örnek 5.6.4 için metodun yakınsaklığının N değerine göre logaritmik ölçüdeki simülasyonu.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez oluşturulmadan önce, geniş bir literatür araştırmasının ardından özenle seçilmiş çalışmalar kataloglanarak; bilim dünyasının hangi konular üzerine odaklandığı, güncel olarak çalışılan alanlar, hangi model problemler daha az ele alınmıştır ve bu modellerin literatürdeki önemleri araştırılmıştır. Buradan yola çıkarak, literatüre önemli katkı yapacak şekilde Bölüm 4 ve 5’de yer alan sunulan metotların uygulama çalışmalarında; metotlar, adım adım geliştirilerek güncel problemlerin çözümlenebilmesi ve var olan sonuçlar ile karşılaştırılabilmesi hedeflenmiştir.

Bu tezde, genellikle fen ve mühendislik alanında karşılaşılan integro-diferansiyel denklemler ve çeşitli sınıflarının parametrelili Dickson ve matching polinomlarına dayalı metotlar kullanılarak çözümleri elde edilmiştir. Çözümlerin tutarlılığı, yakınsaklık analizleri ve parametrelili yaklaşım ile incelenip, bilgisayar ortamında hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, Bölüm 4 ve 5’de yer alan her bir denklem yapısı için genel bir bilgisayar programı yazılmıştır. Böylece, elde edilen sonuçlar bilimsel olarak değerlendirilip literatürde yer alan çalışmalardaki sonuçlar ile birebir olarak karşılaştırılabilmiştir.

Dickson polinomuna dayalı matris-sıralama metodu; doğrusal olmayan diferansiyel ve bazı integral model denklemlerin, şu ana kadar yapılmış en genel yapıdaki fonksiyonel gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin ve güncel kesirli model diferansiyel denklemlerin çözümlenmesinde kullanılarak literatüre önemli katkıda bulunulmuştur. Matching polinomuna dayalı matris-sıralama metodu; şu ana kadar geliştirilen matris-sıralama metotlarından farklı olarak ilk kez çizge yapısı dikkate alınıp, oluşturulan polinomun iyi kurulumu vasıtasıyla oluşturulabilmiştir ve birleştirilmiş çoklu gecikmeli fonksiyonel nötr diferansiyel denklemlerin, çoklu gecikmeli ve değişken katsayılı kesirli diferansiyel denklemlerin, üçüncü dereceden doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin, uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan beşinci dereceden doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin, çoklu gecikmeli uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin, uzay-zaman kesirli kısmi integro-diferansiyel-gecikmeli denklemlerin çözümlenebilmesini mümkün kılmıştır.

Bölüm 4 ve 5’de elde edilen sonuçlar incelendiğinde, metotların literatürde yer alan diğer metotlara göre oldukça dikkat çekici olduğu ve iyi yaklaşım sağladığı gözlemlenmiştir. Çözümlerin, sayısal ve grafiksel sonuçları sırasıyla tablo ve şekillerde incelenip yorumlanmıştır. Ayrıca, Dickson polinom çözümlerinin α parametresine göre kararlılık alanlarının bilgisayar ortamında simülasyonu sağlanmıştır. Böylece, α parametresinin, çözümlerin davranışını belirleyebildiği gözlemlenmiştir. Diğer taraftan, kalan fonksiyonuna ve sabit nokta teoremine dayanan yakınsaklık analizi ve ortoeksponansiyel polinomu yardımıyla kalan fonksiyonun karakteristik davranışı Dickson matris-sıralama metodu için etkin bir şekilde kullanılmıştır. Bunlara ek olarak, N hesaplama limitine göre matching matris-sıralama metodunun yakınsaklığını inceleyen hata üst sınırı hesaplamaları teorik olarak ispatlanıp, problemlerde uygulaması yapılmıştır ve bu formülasyon, incelenen denklem yapılarına göre geliştirilmiştir. Örnek olarak, kesirli türeve sahip diferansiyel denklemler için kesirli türeve ve N 'e bağlı kalan fonksiyonunu içeren hata üst sınır hesaplaması gerçekleştirilmiştir.

Metotların, N hesaplama limiti arttırıldığı zaman, metodun yakınsaklığının artması yani çözümünün tutarlılığının geliştiği gözlemlenmiştir. Kalan hata analizi (tahmini) yaklaşımıyla elde edilen çözümlerin geliştirilmesi sağlanmıştır. Ayrıca, sayısal yaklaşım hesaplamalarında önemli bir karşılaştırma kıstası olan CPU işlem süresinin; sunulan metotların, bilgisayar programları sayesinde hesaplaması hassas bir şekilde yapıp karşılaştırmalarda kullanılmıştır.

Sonuç olarak, matematiksel yapıların günümüz dünyasında ne kadar önemli olduğu, çözümlenebilmesi ve aynı zamanda yorum getirilebilmesi için bir hayli çaba sarf edildiği görülmektedir. Bu yüzden, günümüzde kullanılan yöntemler, farklı yapılar ile birleştirilerek hızla gelişen; bilime, teknolojiye ve bunların getirdiği zorluklara uyum sağlayabilmesi amaçlanmaktadır. Bu düşüncüyü amaç edinerek, bu çalışmada farklı iki polinom yapılarına dayalı iki metot geliştirilmiştir. Tüm sonuçlara dayanarak, sunulan metotların; bilim, teknoloji çalışma alanlarına çözüm ve yenilik getirdiği açıkça görülmektedir. Gelecekte, ele alınacak daha ileri yapıdaki karmaşık problemler için metotların yapısındaki ufak düzenleme veya düzenlemelerle mümkün olabileceği vurgulanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Enns, R. H., McGuire, G. C. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Boston, Birkhäuser, 2001.
- [2] Unz, H. Schlomilch's integral equation. *J. Atmos. Terr. Phys.* 1963, 25, 101–102.
- [3] Dehghan, M., Shakeri, F. Solution of an integro-differential equation arising in oscillating magnetic field using He's homotopy perturbation method. *Prog. Electromagnet. Res. PIER* 2008, 78, 361–376.
- [4] Menga, X., Chen, L., Wu, B. A delay SIR epidemic model with pulse vaccination and incubation times. *Nonlinear Anal.: RWA.* 2010, 11, 88–98.
- [5] Kot, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, 2001.
- [6] Biazar, J., Shahbala, M., Ebrahimi, H. VIM for solving the pollution problem of a system of lakes. *J. Control Sci. Eng.* 2010, 2010, 1–6.
- [7] Wonga, J., Abilez, O. J., Kuhl, E. Computational optogenetics: a novel continuum framework for the photoelectrochemistry of living systems. *J. Mech. Phys. Sol.* 2012, 60, 1158–1178.
- [8] Yüzbaşı, Ş., Sezer, M., Kemancı, B. Numerical solutions of integro-differential equations and application of a population model with an improved Legendre method. *Appl. Math. Model.* 2013, 37(4), 2086–2101.
- [9] Akyüz-Daşcıoğlu, A. A Chebyshev polynomial approach for linear Fredholm–Volterra integro-differential equations in the most general form. *Appl. Math. Comput.* 2006, 181, 103–112.
- [10] Kürkcü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential–difference equations using Dickson polynomials. *Appl. Math. Comput.* 2016, 276, 324–339.
- [11] Kürkcü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A Novel Collocation Method Based on Residual Error Analysis for Solving Integro-Differential Equations Using Hybrid Dickson and Taylor Polynomials. *Sains Malays.* 2017, 46, 335–347.
- [12] Yalçınbaş, S., Sezer, M. A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm–Volterra integro-difference equations with mixed argument. *Appl. Math. Comput.* 2006, 175, 675–690.
- [13] Erdem, K., Yalçınbaş, S., Sezer, M. A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations. *J. Differ. Equ. Appl.* 2013, 19(10), 1619–1631.
- [14] Şahin, N., Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro-differential–difference equations. *Int. J. Comput. Math.* 2011, 88(14), 3093–3111.
- [15] Oğuz, C., Sezer, M. Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2015, 259, 943–954.
- [16] Yüzbaşı, Ş. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2014, 232, 1183–1199.

- [17] Reutskiy, S. Yu. The backward substitution method for multi point problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type. *J. Comput. Appl. Math.* 2016, 296, 724–738.
- [18] Adomian, G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J. Math. Anal. Appl.* 1988, 135, 501–544.
- [19] He, J. H. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Appl. Math. Comput.* 2000, 114, 115–123.
- [20] He, J. H. Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1999, 178, 257–262.
- [21] Wang, B., Meng, F., Fang, Y. Efficient implementation of RKN-type Fourier collocation methods for second-order differential equations. *Appl. Numer. Math.* 2017, 119, 164–178.
- [22] Gülsu, M., Öztürk, Y., Anapalı, A. Numerical approach for solving fractional relaxation–oscillation equation. *Appl. Math. Model.* 2013, 37, 5927–5937.
- [23] Gülsu, M., Öztürk, Y., Anapalı, A. Numerical solution the fractional Bagley–Torvik equation arising in fluid mechanics. *Int. J. Comput. Math.* 2017, 94, 173–184.
- [24] Yüzbaşı, Ş. Numerical solutions of fractional Riccati type differential equations by means of the Bernstein polynomials. *Appl. Math. Comput.* 2013, 219, 6328–6343.
- [25] Rehman, M., Idrees, A., Saeed, U. A quadrature method for numerical solutions of fractional differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2017, 307, 38–49.
- [26] Ünal, E., Gökdoğan, A. Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik.* 2017, 128, 264–273.
- [27] Youssri, Y. H. A new operational matrix of Caputo fractional derivatives of Fermat polynomials: an application for solving the Bagley-Torvik equation. *Adv. Differ. Equ.* 2017, 2017.
- [28] Pezza, L., Pitolli, F. A multiscale collocation method for fractional differential problems. *Math Comput Simul* 2018, 147, 210–219.
- [29] Abdulaziz, O., Hashim, I., Momani, S. Application of homotopy-perturbation method to fractional IVPs. *J. Comput. Appl. Math.* 2008, 216, 574–584.
- [30] Heris, M. S., Javidi, M. On fractional backward differential formulas for fractional delay differential equations with periodic and anti-periodic conditions. *Appl. Numer. Math.* 2017, 118, 203–220.
- [31] Rahimkhani, P., Ordokhani, Y., Babolian, E. Numerical solution of fractional pantograph differential equations by using generalized fractional-order Bernoulli wavelet. *J. Comput. Appl. Math.* 2017, 309, 493–510.
- [32] Cermák, J., Došláb, Z., Kisela, T. Fractional differential equations with a constant delay: stability and asymptotics of solutions. *Appl. Math. Comput.* 2017, 298, 336–350.

- [33] Zhu, L., Wang, Y. Solving fractional partial differential equations by using the second Chebyshev wavelet operational matrix method. *Nonlinear Dyn.* 2017, 89, 1915–1925.
- [34] Cao, X.-N., Fu, J.-L., Huang, H. Numerical method for the time fractional Fokker–Planck equation. *Adv. Appl. Math. Mech.* 2012, 4(6), 848–863.
- [35] Reutskiy, S. Yu. A new semi-analytical collocation method for solving multi-term fractional partial differential equations with time variable coefficients. *Appl. Math. Model.* 2017, 45, 238–254.
- [36] Zhang, H., Liu, F., Anh, V. Galerkin finite element approximation of symmetric space-fractional partial differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2010, 217, 2534–2545.
- [37] Dhaigude, D. B., Birajdar, G. A. Numerical solution of fractional partial differential equations by discrete Adomian decomposition method. *Adv. Appl. Math. Mech.* 2014, 6(1), 107–119.
- [38] Moaddy, K., Momani, S., Hashim, I. The non-standard finite difference scheme for linear fractional PDEs in fluid mechanics. *Comput. Math. Appl.* 2011, 61, 1209–1216.
- [39] Rihan, F. A. Computational methods for delay parabolic and time-fractional partial differential equations. *Numer. Methods Partial. Differ. Eq.* 2009, 26(6), 1556–1571.
- [40] Al-Smadi, M., Arqub, O. A. Computational algorithm for solving fredholm time-fractional partial integrodifferential equations of Dirichlet functions type with error estimates. *Appl. Math. Comput.* 2019, 342, 280–294.
- [41] Aslefallah, M., Shivanian, E. Nonlinear fractional integro-differential reaction-diffusion equation via radial basis functions. *Eur. Phys. J. Plus.* 2015, 130, 47.
- [42] Arqub, O. A., AlSmadi, M. Numerical algorithm for solving time fractional partial integrodifferential equations subject to initial and Dirichlet boundary conditions. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 2018, 34, 1577–1597.
- [43] Dickson, L. E. The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group I-II. *Ann. Math.* 1896, 11(1/6), 65–120.
- [44] Brewer, B. W. On certain character sums. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1961, 99(2), 241–245.
- [45] Lidl, R., Mullen, G. L., Turnwald, G. *Dickson Polynomials.* Pitman monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 65, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, 1993.
- [46] Weisstein, E. W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics,* Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [47] Fernando, N. *A Study of Permutation Polynomials over Finite Fields.* Graduate Theses and Dissertations, 2013, <http://scholarcommons.usf.edu/etd/4484>.
- [48] Bhargava, M., Zieve, M. E. Factorizing Dickson polynomials over finite fields. *Finite Fields Th. Appl.* 1999, 5(2), 103–111.
- [49] Wei, P., Liao, X., Wong, K.-W. Key Exchange based on Dickson Polynomials over Finite Field with 2^m . *Journal of Computers.* 2011, 6(12), 2546–2551.

- [50] Stoll, T. Complete decomposition of Dickson-type recursive polynomials and a related Diophantine equation. *J. Number Theory*. 2008, 128(5), 1157–1181.
- [51] Diene, A., Salim, M. A. Fixed Points of the Dickson Polynomials of the Second Kind. *J. Appl. Math.* 2013, 2013, Article ID 472350, 7 pages, DOI:10.1155/2013/472350.
- [52] Fried, M. On a conjecture of Schur. *Michigan Math. J.* 1970, 17, 41–55.
- [53] Aslan, E. A measure of graphs vulnerability: Edge scattering number. *Bull. Int. Math. Virtual Inst.* 2014, 4, 53–60.
- [54] Aslan, E. Edge-Neighbor-Rupture Degree of Graphs. *J. Appl. Math.* 2013, 2013, Article ID 783610.
- [55] Bacak-Turan, G., Kırlangıç, A. Neighbor rupture degree and the relations between other parameters. *Ars Combin.* 2011, 102, 333–352.
- [56] Gunther, G., Hartnell, B. L. On minimizing the effects of betrayals in a resistance movement. *Proc. Eighth Manitoba Conf. on Numer. Math. and Computing*, 1978, 285–306.
- [57] Harary, F. *Graph Theory*. New York, Addison-Wesley, 1969.
- [58] Gross, J. L., Yellen, J., Zhang, P. F. *Handbook of Graph Theory*. New York, CRC Press, 2013.
- [59] Hosoya, H. On some counting polynomials in chemistry. *Discrete Appl. Math.* 1988, 19, 239–257.
- [60] Kürkçü, Ö. K. Graflarda Bazı Zedelenebilirlik Ölçümleri ve Aralarındaki İlişkiler. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2016, 57 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [61] Heilmann, O. J., Lieb, E. H. Theory of monomer-dimer systems. *Commun. Math. Phys.* 1972, 25, 190–232.
- [62] Farrell, E. J. An introduction to matching polynomials. *J. Combin. Theory, Series B.* 1979, 27, 75–86.
- [63] Gutman, I. The acyclic polynomial of a graph. *Publ. Inst. Math. Beograd.* 1977, 22(36), 63–69.
- [64] Aihara, J. Matrix representation of an olefinic reference structure for monocyclic conjugated compounds. *Bull. Chem. Soc. Japan.* 1979, 52, 1529–1530.
- [65] Gutman, I. The matching polynomial. *Match Commun. Math. Co.* 1979, 6, 75–91.
- [66] Weisstein, E. W. Matching Polynomial. *Math World A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/MatchingPolynomial.html>.
- [67] Godsil, C. D., Gutman, I. On the theory of the matching polynomial. *J. Graph Theory* 1981, 5, 137–145.
- [68] Yan, W., Yeh, Y.-N. On the matching polynomial of subdivision graphs. *Discrete Appl. Math.* 2009, 157, 195–200.
- [69] Araujo, O., Estrada, M., Morales, D. A., Rada, J. The higher-order matching polynomial of a graph. *Int. J. Math. Math. Sci.* 2005, 10, 1565–1576.
- [70] Babić, D., Graovac, A., Mohar, B., Pisanski, T. The matching polynomial of a polygraph. *Discrete Appl. Math.* 1986, 15, 11–24.

- [71] Bian, H., Zhang, F., Wang, G., Yu, H. Matching polynomials for chains of cycles. *Discrete Math.* 2011, 311, 319–323.
- [72] Levit, V. E., Mandrescu, E. The independence polynomial of a graph—a survey. *Proc. 1st Int. Conf. Algebraic Informatics*, (Ed: S. Bozapalidis, A. Kalampakas, G. Rahonis), Thessaloniki, Greece, 2005, 233–254.
- [73] Farrell, E. J., Whitehead, E. G. Connections between the Matching and Chromatic Polynomials. *Int. J. Math. & Math. Sci.* 1992, 15(4), 757–766.
- [74] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations*. New York, Academic Press, 1999.
- [75] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. San Diego, Elsevier, 2006.
- [76] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2010.
- [77] Caputo, M. *Elasticità e Dissipazione*. Bologna, Zanichelli, 1969.
- [78] Jumarie, G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results. *Comput. Math. Appl.* 2006, 51, 1367–1376.
- [79] Ghosh, U., Sengupta, S., Sarkar, S., Das, S. Characterization of non-differentiable points in a function by fractional derivative of Jumarie type. *Eur. J. Acad. Essays*. 2015, 2(70).
- [80] Caputo, M., Fabrizio, M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Prog. Fract. Differ. Appl.* 2015, 1, 1–13.
- [81] Losada, J., Nieto, J. J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Prog. Fract. Differ. Appl.* 2015, 1, 87–92.
- [82] Baleanu, D., Mousalou, A., Rezapour, S. A new method for investigating approximate solutions of some fractional integro-differential equations involving the Caputo-Fabrizio derivative. *Adv. Differ. Equ.* 2017, 2017.
- [83] Ayati, Z., Biazar, J. On the convergence of Homotopy perturbation method. *J. Egyptian Math. Soc.* 2015, 23, 424–428.
- [84] Oliveira, F.A. Collocation and residual correction. *Numer. Math.* 1980, 36, 27–31.
- [85] Çelik, İ. Collocation method and residual correction using Chebyshev series. *Appl. Math. Comput.* 2006, 174, 910–920.
- [86] Van der Pol, B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Rev.* 1920, 1, 701–710.
- [87] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Çerdik-Yaslan, H. The solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by Chebyshev Series. *Appl. Math. Comput.* 2011, 217, 5658–5666.
- [88] Wazwaz, A. M. Solving Schlomilch's integral equation by the regularization Adomian method. *Rom. J. Phys.* 2015, 60, 56–71.
- [89] Wazwaz, A. M. *A First Course in Integral Equations*. (2nd ed.), New Jersey, World Scientific, 2015.
- [90] Unz, H. Schlomilch's integral equation for oblique incidence. *J. Atmos. Terr. Phys.* 1966, 28, 315–316.

- [91] De, S., Sarkar, B., Mal, M., De, M., Ghosh, B., Adhikari, S. On Schlömilch's Integral Equation for the Ionospheric Plasma. *Jpn. J. Appl. Phys.* 1994, 33, 4154–4156.
- [92] Ascher, U. M., Matheij, R., Russell, R. D. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Philadelphia, SIAM, 1995.
- [93] Buckmire, R. Investigations of nonstandard Mickens-type finite-difference schemes for singular boundary value problems in cylindrical or spherical coordinates. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 2003, 19, 380–398.
- [94] Chandrasekhar, S. *Introduction to the Study of Stellar Structure*. New York, Dover, 1967.
- [95] Wan, Y. Q., Guo, Q., Pan, N. Thermo-electro-hydrodynamic model for electrospinning process. *Int. J. Nonlin. Sci. Num.* 2004, 5, 5–8.
- [96] Wazwaz, A. M. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations. *Appl. Math. Comput.* 2005, 166, 652–663.
- [97] Khuri, S. A. A new approach to Bratu's problem. *Appl. Math. Comput.* 2004, 147, 131–136.
- [98] Feng, X., He, Y., Meng, J. Application of Homotopy Perturbation Method to The Bratu-Type Equations. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 2008, 31, 243–252.
- [99] Blasius, H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Angew. Math. Phys.* 1908, 56, 1–37.
- [100] Streeter, V. L., Wylie, E. B. *Fluid Mechanics*. Mc-Graw-Hill International Editions, Civil and Mechanical Engineering Series, 1983.
- [101] Wang, L. A new algorithm for solving classical Blasius equation. *Appl. Math. Comput.* 2006, 176, 700–703.
- [102] Çatal, S. Some of Semi Analytical Methods for Blasius Problem. *Appl. Math.* 2012, 3, 724–728.
- [103] Howarth, L. On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. *Aero Res. Counc. Lond. R. & M.* 1935, 164, 16–32.
- [104] Abbasbandy, S. A numerical solution of Blasius equation by Adomian's decomposition method and comparison with homotopy perturbation method. *Chaos Solitons Fract.* 2007, 31, 257–260.
- [105] Lin, S. H. Oxygen diffusion in a spherical cell with nonlinear oxygen uptake kinetics. *J. Theor. Biol.* 1976, 60, 449–457.
- [106] McElwain, D. L. S. A re-examination of oxygen diffusion in a spherical cell with Michaelis–Menten oxygen uptake kinetics. *J. Theor. Biol.* 1978, 71, 255–263.
- [107] Mohsenyadeh, M., Maleknejad, K., Ezzati, R. A numerical approach for the solution of a class of singular boundary value problems arising in physiology. *Adv. Differ. Equ.* 2015, 2015, 231–240.

- [108] Çağlar, H., Çağlar, N., Özer, M. B-Spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology. *Chaos Solitons Fract.* 2009, 39, 1232–1237.
- [109] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells.* New York, McGraw-Hill, 1959.
- [110] Usmani, R.A. A uniqueness theorem for a boundary value problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1979, 77, 329–335.
- [111] Dràbek, P., Holubová, G. Positive and negative solutions of one-dimensional beam equation. *Appl. Math. Lett.* 2016, 51, 1–7.
- [112] Bougoffa, L., Rach, R., Wazwaz, A.M. On Solutions of Boundary Value Problem for Fourth-Order Beam Equations. *Math. Model. Anal.* 2016, 21, 304–318.
- [113] Bonanno, G., Di Bella, B. A boundary value problem for fourth-order elastic beam equations. *J. Math. Anal. Appl.* 2008, 343, 1166–1176.
- [114] Lazer, A. C., McKenna, P. J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Rev.* 1990, 32, 537–578.
- [115] Bell, E. T. Exponential polynomials. *Ann. Math.* 1934, 35, 258–277.
- [116] Jaroch, O. Orthoexponential polynomials and the Legendre polynomials. *Apl. Mat.* 2000, 23(6), 467–471.
- [117] Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Appl. Math. Model.* 2013, 37, 9160–9173.
- [118] Bahşı, M. M., Çevik, M., Sezer, M. Orthoexponential polynomial solutions of delay pantograph differential equations with residual error estimation. *Appl. Math. Comput.* 2015, 271, 11–21.
- [119] Babolian, E., Abbasbandy, S., Fattahzadeh, F. A numerical method for solving a class of functional and two dimensional integral equations. *Appl. Math. Comput.* 2008, 198, 35–43.
- [120] Wang, K., Wang, Q. Lagrange collocation method for solving Volterra–Fredholm integral equations. *Appl. Math. Comput.* 2013, 219, 10434–10440.
- [121] Wang, K., Wang, Q. Taylor polynomial method and error estimation for a kind of mixed Volterra–Fredholm integral equations, *Appl. Math. Comput.* 229 (2014) 53–59.
- [122] Li, C., Zhang, C. Block boundary value methods applied to functional differential equations with piecewise continuous arguments. *Appl. Numer. Math.* 2017, 115, 214–224.
- [123] Insperger, T., Stépán, G. *Semi-discretization for time-delay systems: stability and engineering applications.* Applied Mathematical Sciences 178, New York, Springer, 2011.
- [124] Banks, H. T., Kappel, F. Spline approximations for functional differential equations. *J. Diff. Eqns.* 1979, 34, 496–522.

- [125] Ellahi, R., Abbasbandy, S., Hayat, T., Zeeshan, A. On comparison of series and numerical solutions for second Painlevé equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 2010, 26, 1070–1078.
- [126] Kaur, H., Mittal, R. C., Mishra, V. Haar wavelet solutions of nonlinear oscillator equations. *Appl. Math. Model.* 2014, 38, 4958–4971.
- [127] Blank, L. Numerical treatment of differential equations of fractional order. *Numerical Analysis Report 287*, Manchester Centre for Computational Mathematics, 1996.
- [128] Duan, B., Zheng, Z., Cao, W. Spectral approximation methods and error estimates for Caputo fractional derivative with applications to initial-value problems. *J. Comput. Phys.* 2016, 319, 108–128.
- [129] Edwards, J. T., Ford, N. J., Simpson, A. C. The numerical solution of linear multi-term fractional equations: system of equations. *J. Comput. Appl. Math.* 2002, 148, 401–418.
- [130] Momani, S., Ertürk, V. S. Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method. *Comput. Math. Appl.* 2008, 55, 833–842.
- [131] Sweilam, N. H., Khader, M. M. Exact solutions of some coupled nonlinear partial differential equations using the homotopy perturbation method. *Comput. Math. Appl.* 2009, 58, 2134–2141.
- [132] Barker Jr., G. A. *Essentials of Padé Approximants*. Academic Press, 1975.
- [133] Fabiano, R. H., Payne, C. Spline approximation for systems of linear neutral delay-differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2018, 338, 789–808.
- [134] Dehghan, M., Shakeri, F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Phys. Scr.* 2008, 78, Article No: 065004, 11 pages.
- [135] Heydari, M., Loghmani, G. B., Hosseini, S. M. Operational matrices of Chebyshev cardinal functions and their application for solving delay differential equations arising in electrodynamics with error estimation. *Appl. Math. Model.* 2013, 37(14-15), 7789–7809.
- [136] Bellen, A., Zennaro, M. *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford, Oxford University Press, 2003.
- [137] Raza, A., Khan, A. Haar wavelet series solution for solving neutral delay differential equations. *J. King Saud Univ. Sci.* 2018, DOI 10.1016/j.jksus.2018.09.013.
- [138] Bagley, R. L., Torvik, P. J. On the appearance of the fractional derivative in the behaviour of real materials. *J. Appl. Mech.* 1984, 51, 294–298.
- [139] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Ezz-Eldien, S. S. Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations. *Appl. Math. Model.* 2011, 35, 5662–5672.
- [140] Abramowitz, M., Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Nat. Bureau of Standards, Appl Math Series, 55, 1964.
- [141] Rand, R. H., Sah, S. M., Suchorsky, M. K. Fractional Mathieu equation. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010, 15, 3254–3262.

- [142] Sinha, S. C., Wu, D. H. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *J. Sound Vib.* 1991, 151, 91–117.
- [143] Bhrawy, A. H., Al-Zahrani, A. A., Alhamed, Y. A., Baleanu, D. A new generalized Laguerre-Gauss collocation scheme for numerical solution of generalized fractional pantograph equations. *Rom. J. Phys.* 2014, 59, 646–657.
- [144] Abd-Elhameed, W.M., Youssri, Y. H. Generalized Lucas polynomial sequence approach for fractional differential equations. *Nonlinear Dyn.* 2017, 89, 1341–1355.
- [145] Hobson, E. W. On the second meanvalue theorem of the integral calculus. *Proc. London Math. Soc.* 1909, 2-7, 14–23, DOI: 10.1112/plms/s2-7.1.14.
- [146] Dixon, A. The second mean value theorem in the integral calculus. *Math. Proc. Cambridge.* 1929, 25(3), 282–284.
- [147] Nourazar, S. Mirzabeigy, A. Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method. *Scientia Iranica B.* 2013, 20(2), 364–368.
- [148] Lev, B. I., Tymchyshyn, V. B., Zagorodny, A. G. On certain properties of nonlinear oscillator. *Phys. Lett. A.* 2017, 381, 3417–3423.
- [149] Wu, Y., He, J.-H. Homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with coordinate-dependent mass. *Results in Phys.* 2018, 10, 270–271.
- [150] Rehman, M., Khan, R. A. The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011, 16, 4163–4173.
- [151] West, B. J. Exact solution to fractional logistic equation. *Physica A.* 2015, 429, 103–108.
- [152] Davis, H. T. *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations.* New York, Dover, 1962.
- [153] Richardson, O. U. *The Emission of Electricity from Hot Bodies.* 2nd ed., London, Longmans, Green and Co, 1921.
- [154] Kumar, D., Agarwal, R. P., Singh, J. A modified numerical scheme and convergence analysis for fractional model of Lienard’s equation. *J. Comput. Appl. Math.* 2018, 339, 405–413.
- [155] Liénard, A. Etude des oscillations entretenues. *Rev. Gen. Electr.* 1928, 23, 901–912 and 946–954.
- [156] Feng, Z. On explicit exact solutions for the Lienard equation and its applications. *Phys. Lett. A.* 2002, 239, 50–56.
- [157] Guckenheimer, J. Dynamics of the van der Pol equation. *IEEE Trans. Circ. Syst.* 1980, 27, 983–989.
- [158] Zhang, Z. F., Ding, T., Huang, H. W., Dong, Z. X. *Qualitative Theory of Differential Equations.* Peking, Science Press, 1985.
- [159] Troesch, B. A. Intrinsic difficulties in the numerical solution of a boundary value problem. Internal Report NN–142, California, TRWInc., Redondo Beach, 1960.
- [160] Weibel, E. S. On the confinement of a plasma by magnetostatic fields. *Phys Fluids.* 1959, 2(1), 52–56.

- [161] Markin, V. S., Chernenko, A. A., Chizmadehev, Y. A., Chirkov, Y. G. Aspects of the theory of gas porous electrodes. (Ed.: V.S. Bagotskii, Y.B. Vasilev), Fuel Cells: Their Electrochemical Kinetics, Consultants Bureau, 1966, New York, 21–33.
- [162] Gidaspow, D., Baker, B. S. A model for discharge of storage batteries. J. Electrochem. Soc. 1973, 120, 1005–1010.
- [163] Early, J. J., Pohjanpelto, J., Samelson, R. M. Group foliation of equations in geophysical fluid dynamics. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. 2010, 27(4), 1571–1586.
- [164] Flierl, G. R. Baroclinic solitary waves with radial symmetry. Dyn. Atmos. Oceans. 1979, 3, 15–38.
- [165] Petviashvili, V. I. Red Spot of Jupiter and the drift soliton in a plasma. J. Exp. Theor. Phys. Lett. 1981, 32, 619–622.
- [166] Wazwaz, A. M. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Berlin, Springer and HEP, 2009.
- [167] Wazwaz, A. M. The Volterra integro-differential forms of the singular Flierl-Petviashvili and the Lane-Emden equations with boundary conditions. Rom. J. Phys. 2013, 58, 685–693.
- [168] Dehghan, M., Lakestani, M. The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second-order onedimensional telegraph equation. Numer. Methods Partial Differ. Equ. 2009, 25(4), 931–938.
- [169] Kanth, A. S. V. R., Aruna, K. He's variational iteration method for treating nonlinear singular boundary value problems. Comput. Math. Appl. 2010, 60, 821–829.
- [170] Saeed, U. Haar Adomian Method for the Solution of Fractional Nonlinear Lane-Emden Type Equations Arising in Astrophysics. Taiwanese J. Math. 2017, 21(5), 1175–1192.
- [171] Singh, R., Garg, H., Guleria, V. Haar wavelet collocation method for Lane-Emden equations with Dirichlet, Neumann and Neumann–Robin boundary conditions. J. Comput. Appl. Math. 2019, 346, 150–161.
- [172] Syam, M. I. A numerical solution of fractional Lienard's equation by using the residual power series method. Mathematics. 2018, 6(1), DOI: 10.3390/math6010001.
- [173] Mirmoradi, S. H., Hosseinpour, I., Ghanbarpour, S., Barari, A. Application of an approximate analytical method to nonlinear Troesch's problem. Appl. Math. Sci. 2009, 3(32), 1579–1585.
- [174] Khuri, S. A., Sayfy, A. Troesch's problem: a B-spline collocation approach. Math. Comput. Model. 2011, 54(9–10), 1907–1918.
- [175] Na, T. Y. Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems. New York, Academic Press, 1979.
- [176] Zarebnia, M., Sajjadian, M. The sinc–Galerkin method for solving Troesch's problem. Math. Comput. Model. 2012, 56, 218–228.
- [177] Roberts, S. M., Shipman, J. S. On the closed form solution of Troesch's problem. J. Comput. Phys. 1976, 21, 291–304.

- [178] Xu, M., Niu, J., Lin, Y. An efficient method for fractional nonlinear differential equations by quasi-Newton's method and simplified reproducing kernel method. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2018, 41, 5–14, DOI: 10.1002/mma.4590.
- [179] Thabet, H., Kendre, S. Analytical solutions for conformable space-time fractional partial differential equations via fractional differential transform. *Chaos Solitons Fract.* 2018, 109, 238–245.
- [180] Du, M., Qiao, X., Wang, B., Wang, Y., Gao, B. A novel method for numerical simulation of sand motion model in beach formation based on fractional Taylor–Jumarie series expansion and piecewise interpolation technique. *Appl. Math. Comput.* 2019, 347, 15–21.
- [181] Du, X. Q., Gao, S. An evolution of subaqueous dune morphology: numerical experiments. *Acta Oceanol. Sin.* 2012, 34, 121–134.
- [182] Qiu, N. Application of time fractional delay differential equations in fluid Dynamics. *J. Shenyang Univ.* 2016, 28, 170–172.
- [183] Wang, Y. L., Su, L. J. Using reproducing kernel for solving a class of singularly perturbed problems. *Comput. Math. Appl.* 2011, 61, 421–430.
- [184] Appell, J., Kalitvin, A., Zabrejko, P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC press, 2000.
- [185] Barbashin, E. A. On conditions for the conservation of stability of solutions to integro-differential equations, (in Russian), *Izv. VUZov Mat.* 1957, 1, 25–34.
- [186] Aziz, I., Khan, I. Numerical Solution of Diffusion and Reaction–Diffusion Partial Integro-Differential Equations. *Int. J. Comput. Methods.* 2018, 15(1), 1850047, (24 pages).
- [187] Gürbüz, B., Sezer, M. A new computational method based on Laguerre polynomials for solving certain nonlinear partial integro differential equations. *Acta Phys. Pol. A.* 2017, 132(3), 561–563.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ
Doğum Yeri ve Yılı : Ankara, 1991
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : omurkivanc@outlook.com

Eğitim Durumu

Lise : İzmir İnönü Lisesi, 2009.
Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014.
Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016.
Doktora : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü,
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, 2019.

Mesleki Deneyim

İzmir Ekonomi Üniversitesi (Arş. Görevlisi) 2017-2019

Yayımları

SCI/SSCI/AHCI İndekslerinde Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler

- [1] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. An integrated numerical method with error analysis for solving fractional differential equations of quintic nonlinear type arising in applied sciences. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2019, DOI: 10.1002/mma.5708. (Yayın aşamasında).
- [2] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. An advanced method with convergence analysis for solving space-time fractional partial differential equations with multi delays. *The European Physical Journal Plus*. 2019, 134, 393, DOI: 10.1140/epjp/i2019-12761-4.
- [3] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. An inventive numerical method for solving the most general form of integro-differential equations with functional delays and characteristic behavior of orthoexponential residual function. *Computational and Applied Mathematics*. 2019, 38(2), DOI:10.1007/s40314-019-0771-2.

- [4] Gümgüm, S., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. Lucas Polynomial solution of Nonlinear Differential Equations with Variable Delay. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2019, DOI:10.15672/hujms.460975. (Yayın aşamasında).
- [5] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A novel graph-operational matrix method for solving multidelay fractional differential equations with variable coefficients and a numerical comparative survey of fractional derivative types. Turkish Journal of Mathematics. 2019, 43(1), 373–392.
- [6] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E. A Comparison Between Edge Neighbor Rupture Degree and Edge Scattering Number in Graphs. International Journal of Foundations of Computer Science. 2018, 29(07), 1119–1142.
- [7] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E. Edge harmonic index of carbon nanocones and an algorithm. Bulgarian Chemical Communications. 2018, 50(3), 478–483.
- [8] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M., İlhan, Ö. A Numerical Approach Technique for Solving Generalized Delay Integro-Differential Equations with Functional Bounds by Means of Dickson Polynomials. International Journal of Computational Methods. 2018, 15(05), 1850039.
- [9] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A numerical method for solving some model problems arising in science and convergence analysis based on residual function. Applied Numerical Mathematics. 2017, 121, 134–148.
- [10] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A Novel Collocation Method Based on Residual Error Analysis for Solving Integro-Differential Equations Using Hybrid Dickson and Taylor Polynomials. Sains Malaysiana. 2017, 46(2), 335–347.
- [11] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential–difference equations using Dickson polynomials. Applied Mathematics and Computation, 2016, 276, 324–339.

E-SCI İndeksinde Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler

- [1] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A novel hybrid method for solving combined functional neutral differential equations with several delays and investigation of convergence rate via residual function. Computational Methods for Differential Equations. 2019, 7(3), 396–417.
- [2] Özel, M., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. Morgan-Voyce matrix method for generalized functional integro-differential equations of Volterra-type. Journal of Science and Arts. 2019, 2(47), 295–310.
- [3] Yıldızhan, İ., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. A Numerical Approach For Solving Pantograph–Type Functional Differential Equations with Mixed Delays using Dickson Polynomials Of The Second Kind. Journal of Science and Arts. 2018, 18(3), 667–680.

Ulusal Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

- [1] Gümgüm, S., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. Lucas Polynomial Solution for Neutral Differential Equations with Proportional Delays. *Journal of Applied and Engineering Mathematics*. 2019, (Kabul edildi.)
- [2] Kürkçü, Ö. K. A New Numerical Method for Solving Delay Integral Equations With Variable Bounds By Using Generalized Mott Polynomials. *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences And Engineering*. 2018, 19(4), 844–857.
- [3] Gümgüm, S., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. A numerical technique based on Lucas polynomials together with standard and Chebyshev-Lobatto collocation points for solving functional integro-differential equations involving variable delays. *Sakarya University Journal of Science*, 2018, 22(6), 1659–1668.

Diğer İndekslerde Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler

- [1] Dönmez Demir, D., Çınardalı, T., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. The Legendre Matrix-Collocation Approach for Some Nonlinear Differential Equations Arising in Physics and Mechanics. *European Journal of Science and Technology*. 2019, 15, 289–296.
- [2] Kürkçü, Ö. K., Aksan, H. Neighbor Toughness of Graphs. *Bulletin of The International Mathematical Virtual Institute*. 2016, 6(2), 135–141.
- [3] Aslan, E., Kürkçü, Ö. K. Edge Scattering Number of Gear Graphs. *Bulletin of The International Mathematical Virtual Institute*, 2015, 5(1), 25–31.
- [4] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E. Atom Bond Connectivity Index of Carbon Nanocones and An Algorithm. *Applied Mathematics and Physics*. 2015, 3(1), 6–9.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında (Proceedings) Basılan Bildiriler

- [1] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A Reliable Numerical Approximation to Physical Pendulum Equation using Dickson Polynomials. 3rd International Students Science Congress, 03-04 Mayıs, 2019, İzmir (Bildiriler Kitabı, 261–268.)
- [2] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A Hybrid Numerical Method Based on Dickson Polynomials for Solving Some Fractional Model Differential Equations. 2nd International University Industry Cooperation, Rn and Innovation Congress (Argeinv 2018), 14-15 Kasım, 2018, Manisa (Bildiriler Kitabı, 122-128.)
- [3] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A Numerical Method for Solving Functional Differential Equations with Delays. 2nd International Students Science Congress, 04-05 Mayıs, 2018, İzmir, (Bildiriler Kitabı, 72–77.)

- [4] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E., Sezer, M. A Dickson Matrix Technique for Solving Some Special Equations Arising in science. International Students Science Conference, 05-06 Mayıs, 2017, İzmir (Bildiri Özetleri Kitabı, 66 s.)

Ödüller

- [1] TÜBİTAK Yayın Teşvik Ödülü, 2019, (4 Defa).
[2] TÜBİTAK Yayın Teşvik Ödülü, 2018, (1 Defa).
[3] TÜBİTAK Yayın Teşvik Ödülü, 2017, (2 Defa).
[4] İzmir Ekonomi Üniversitesi Yayın Teşvik Ödülü, 2019, (6 Defa).
[5] İzmir Ekonomi Üniversitesi Yayın Teşvik Ödülü, 2018, (2 Defa).

