

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**ÇEŞİTLİ FONKSİYONEL İNTEGRO DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN MATRİS TABANLI  
MORGAN-VOYCE POLİNOM YAKLAŞIMI**

**Nilüfer YOLTAY**

**Danışman  
Doç. Dr. Ali KONURALP**



**MANİSA-2019**

**Nüfifer** **ÇEŞİTLİ FONKSİYONEL İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK**  
**YOLTAY** **ÇÖZÜMLERİ İÇİN MATRİS TABANLI MORGAN-VOYCE POLİNOM YAKLAŞIMI**

**2019**

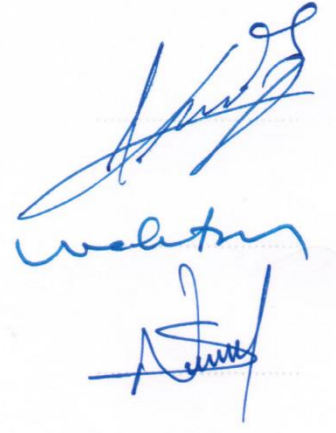
## TEZ ONAYI

Nilüfer YOLTAY tarafından hazırlanan "Çeşitli Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Matris Tabanlı Morgan-Voyce Polinom Yaklaşımı" adlı tez çalışması 19/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman** **Doç. Dr. Ali KONURALP**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi** **Prof. Dr. Mehmet SEZER**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi** **Prof. Dr. Nurcan Baykuş SAVAŞANERİL**  
Dokuz Eylül Üniversitesi



## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Nilüfer YOLTAY**



## İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
TABLO DİZİNİ .....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ .....	9
1.1.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin ve Morgan-Voyce Polinomlarının Kullanım Alanları.....	9
2. GENEL BİLGİLER .....	11
2.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Tanıtılması .....	11
2.2. Morgan-Voyce Polinomlarının Tanıtılması .....	12
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER .....	14
3.1. Birinci Mertebeden Linear Fredholm-Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri için Matris Tabanlı Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi. 14	
3.1.1. Problemin Tanıtılması.....	14
3.1.2. Çözüm Yöntemi ve Temel Matris İlişkileri .....	14
3.2. Yüksek Mertebeden Linear Gecikmeli Fredholm-Volterra İntegro- Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Morgan-Voyce Polinomları ile İncelenmesi .....	20
3.2.1. Problemin Tanıtılması.....	20
3.2.2. Çözüm Yöntemi ve Temel Matris İlişkileri .....	20
3.3. Rezidüel Hata Analizi .....	26
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA .....	30
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	62
6. KAYNAKLAR .....	63

7. ÖZGEÇMİŞ ..... 66



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a_n$	Çözüm Serisinin Bilinmeyen Katsayıları
$A$	Bilinmeyen Morgan-Voyce Polinomunun Katsayısı
$A^T$	$A$ 'nın Transpozu
$B(x)$	Morgan-Voyce Taban Matrisi
$B_N(x)$	Morgan-Voyce polinomu
$D(\alpha, \beta)$	Geçiş Matrisi
$e_N(x)$	Morgan-Voyce Polinom Çözümü için Hata Fonksiyonu
$e_{N,M}(x)$	Morgan-Voyce Polinom Çözümü için Tahmini Hata Fonksiyonu
$G$	Sağ Taraftaki Koşulları Kullanılmış Yeni Arttırılmış Matris
$K_f$	Fredholm İntegralinin çekirdeği
$K_v$	Volterra İntegralinin çekirdeği
$N$	Kesme Sınırı
$R_N(x)$	Morgan-Voyce Polinom Çözümü için Rezidüel hata fonksiyonu
$T$	Standart Tabana Göre Türev Geçiş Matrisi
$y(x)$	Tam Çözüm
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$y_{N,M}(x)$	$N$ ve $M$ Kesme Sınırları için İyileştirilmiş Morgan-Voyce Polinom Çözümü
$X(x)$	Standart Taban Matrisi
$W$	Temel Denkleme ait Katsayılar Matrisi
$\tilde{W}$	Koşulları Kullanılmış Yeni Arttırılmış Matris

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. Morgan-Voyce Polinomlarının grafiği .....	13
Şekil 4.1. Örnek 4.1'in grafiği .....	33
Şekil 4.2. Örnek 4.1'in hata grafiği .....	33
Şekil 4.3. Örnek 4.2'in grafiği .....	36
Şekil 4.4. Örnek 4.3'ün grafiği .....	39
Şekil 4.5. Örnek 4.3'ün hata grafiği .....	40
Şekil 4.6. Örnek 4.4'ün grafiği .....	43
Şekil 4.7. Örnek 4.4'in hata grafiği .....	43
Şekil 4.8. Örnek 4.5'in grafiği .....	47
Şekil 4.9. Örnek 4.5'in iyileştirilmiş çözüm grafiği .....	47
Şekil 4.10. Örnek 4.6'nın grafiği .....	51
Şekil 4.11. Örnek 4.6'nın iyileştirilmiş çözüm grafiği .....	51
Şekil 4.12. Örnek 4.8'in grafiği .....	58
Şekil 4.13. Örnek 4.8'in iyileştirilmiş çözüm grafiği .....	58
Şekil 4.14. Örnek 4.9'in grafiği .....	61



## TABLO DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
<b>Tablo 4.1.</b> Örnek 4.1'in $N=5$ için nümerik çözümleri .....	32
<b>Tablo 4.2.</b> Örnek 4.3'ün farklı $N$ değerleri için nümerik çözümleri.....	38
<b>Tablo 4.3.</b> Örnek 4.4'ün farklı $N$ değerleri için nümerik çözümleri .....	42
<b>Tablo 4.4.</b> Örnek 4.5'ün değeri için nümerik çözümleri .....	46
<b>Tablo 4.5.</b> Örnek 4.5'ün farklı ve $N$ değeri için nümerik karşılaştırmaları .....	46
<b>Tablo 4.6.</b> Örnek 4.5'in $N=7$ ve $N=10$ değeri için zaman karşılaştırmaları .....	46
<b>Tablo 4.7.</b> Örnek 4.6'nın $N=5$ değeri için nümerik çözümleri .....	50
<b>Tablo 4.8.</b> Örnek 4.6'nın $N=5$ değeri için nümerik karşılaştırmaları .....	50
<b>Tablo 4.9.</b> Örnek 4.8'in $N=6$ değeri için nümerik çözümleri .....	50
<b>Tablo 4.10.</b> Örnek 4.8'in farklı $N$ değerleri için literatürdeki nümerik çözüm karşılaştırmaları .....	57
<b>Tablo 4.11.</b> Örnek 4.8 in farklı $N$ değerleri için literatürdeki zaman karşılaştırmaları.....	57

## TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, bilgi ve tecrübeleri ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum, Sayın Doç. Dr. Ali KONURALP'e, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan annem Gülhanım EKE' ye, kardeşim Kadir AKTAŞ'a ve sevgili eşim Ulař YOLTAY'a yürekten teşekkür ederim.

Nilüfer YOLTAY  
Manisa, 2019

# ÖZET

## Yüksek Lisans Tezi

### Çeşitli Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Matris Tabanlı Morgan-Voyce Polinom Yaklaşımı

Nilüfer YOLTAY

Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ali KONURALP

Bu çalışmada, karışık koşullar altında çeşitli fonksiyonel integro diferansiyel denklemlerin Morgan-Voyce polinomlarının matris formülasyonları ile sayısal çözümlerini elde etmek için hızlı ve güvenilir sayısal bir yöntem önerilmektedir. Önerilen yöntemin verimliliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için, bazı örneklerle bu metod uygulanmış olup, bu örnekler için sayısal hesaplamalar tablolar ve grafiklerde verilmiştir.

Giriş bölümü dışında bu tez esas olarak dört bölüme ayrılmıştır. Giriş bölümünde tezin amacı ve kapsamı açıklanmaktadır.

İkinci bölümde, integro-diferansiyel denklemler ve Morgan-Voyce polinomları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde birinci mertebeden integro-diferansiyel denklemlerin ve yüksek mertebeden gecikmeli Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemlerin Morgan-Voyce polinomları ile çözümleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ele alınan farklı örnekler üzerinde yöntemle daha kısa zamanda düşük işlem hacmi ile iyileştirilmelerin olacağı gözlemlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Morgan-Voyce Polinomu, İntegro-Diferansiyel Denklem, Sıralama Metodu

2019, 70 sayfa

## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

### **Matrix Based Morgan-Voyce Approximation for the Numerical Solutions of Various Functional Integro Differential Equations**

**Nilüfer YOLTAY**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali KONURALP**

In this study, a fast and reliable numerical method is proposed in order to find numerical solutions of various functional integro differential equations subject to mixed conditions by using the matrix formulation of Morgan-Voyce polynomials. To show the applicability and productivity of the proposed method, we applied the Morgan-Voyce matrix method and their figures and tables are given with the obtained data.

Except from the introduction part, this thesis consists mainly of four chapters. The aim and scope of the thesis are explained in the introduction.

In the second chapter, basic concepts related to integro-differential equations and Morgan-Voyce polynomials are given.

In the third chapter, Morgan-Voyce polynomials of first order integro-differential equations and high order delayed Fredholm and Volterra integro-differential equations are examined.

It has been observed that there will be improvements with different process in a shorter time on different samples discussed in the fourth section.

**Keywords: Morgan-Voyce Polynomials, Integro-Differential Equation, Collocation Method.**

**2019, 70 pages**

## 1. GİRİŞ

### 1.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin ve Morgan-Voyce Polinomlarının Kullanım Alanları

Bilindiği üzere mühendislik, biyoloji, mekanik, endüstri gibi birçok alanda matematiksel ve fiziksel problemler integro-diferansiyel denklemler ile modellenebilmektedir [1]. Fiziksel problemlerin matematiksel modellemeleri, biyolojik modelleme, kimyasal kinetik, akışkanlar dinamiği, salgın hastalıkların modellemeleri, cama şekil verme gibi çeşitli alanlarda görülür. Bu tip denklemlerin çözümü için kullanılan analitik yöntemler, temel yöntemler olarak göz önüne alınır. Fakat denklemlerin çözümü analitik yöntemler ile bulunamadığında yeni hesaplamalara dayalı çözüm öneren teknikler uygulanabilir. Chebyshev Sıralama Yöntemi [25], Taylor Sıralama Yöntemi [26], Hermite Sıralama Yöntemi [27], Bessel Sıralama Yöntemi [28], Legendre Sıralama yöntemi [29], Laguerre Sıralama Yöntemi [30], Morgan-Voyce sıralama yöntemi [6] gibi farklı polinomlara özgü nümerik yöntemler geliştirilmiştir.

Yarı “T” şeklinde kendini tekrarlayan bir merdiven ağının matris parametreleri incelenirken ortaya atılan Morgan-Voyce polinomları 1959 yılında ilk defa Morgan-Voyce tarafından tanımlanmıştır [2]. Bu polinomlar, üzerinde elektrik devreleri bulunan merdiven ağı ile ilgili çalışmalarda kullanılmıştır [3,4,5]. Bu polinomlar çarpanlarına ayrılabilindiğinden, herhangi bir etkiye cevap vermek için matris parametreleri uygun şekilde kullanılabilir. Ayrıca, herhangi bir ağ fonksiyonunun kökleri ve kutupları, bu polinomların kökleri ile bulunabilir. Bu polinomlar, herhangi bir uyarımla tekrarlayan merdivenlerin ağ tepkisini belirlemek için kolaylıkla uygulanabileceğini göstermektedir.

Lineer diferansiyel denklemler [7], lineer diferansiyel fark denklemleri [21], multi-pantograph denklemler [22], genelleştirilmiş pantograph denklemler [23] ve değişken gecikmeli homojen olmayan diferansiyel denklemler [24] için özellikle matris tabanlı Morgan-Voyce Polinomları ile çözüm metodu geliştirilmiştir. Ancak literatür tarandığında lineer yüksek mertebeden fonksiyonel(oranlı veya değişken gecikmeli) Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemleri içeren karışık

koşullara sahip başlangıç-sınır değer problemleri bu polinom kullanımı ile çözüm önerisi veren herhangi bir çalışmaya rastlamadık.

Bu tez çalışmasının asıl amacı; daha önce yapılmamış lineer yüksek mertebeden fonksiyonel(orantılı veya değişken gecikmeli) Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemleri içeren karışık koşullara sahip başlangıç-sınır değer problemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için matris tabanlı Morgan-Voyce polinom yaklaşım tekniğini önermektir. Ayrıca oluşturduğumuz algoritma ile, sayısal çözümleri elde ederken optimum süre kullanımını sağlamayı amaçlamaktayız. Araştırmanın sonunda, önerilen yöntemin uygulanabilir ve verimli olduğunu göstermek için çeşitli nümerik örnekler verilir.



## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Tanıtılması

Bilinmeyen  $y(x)$  fonksiyonunun olduğu denkleme

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad , a \leq t \leq b \quad (2.1.1)$$

homojen olmayan Fredholm integral denklemi ve

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^t K(x,t)y(t)dt \quad , a \leq x \leq b \quad (2.1.2)$$

denklemine de Volterra integral denklemi denir. Aynı zamanda bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad , a \leq t \leq b \quad (2.1.3)$$

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt \quad , a \leq x \leq b \quad (2.1.4)$$

biçimindeki denklemlere sırasıyla Fredholm integro-diferansiyel ve Volterra integro-diferansiyel denklem denir. Bu denklemlerde;  $a \leq x, t \leq b$  olmak üzere  $a$  ve  $b$  sabitleri integralin sınırları,  $y$  bilinmeyen fonksiyon,  $g(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyon ve  $K(x,t)$  çekirdek fonksiyonu  $a \leq x, t \leq b$  bölgesinde tanımlıdır.  $\lambda \neq 0$  reel veya kompleks bir parametredir. Bu tez çalışması boyunca kullanacağımız Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemin genel formu

$$\sum_{k=0}^m f_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \lambda_2 \int_0^x K(x,t)y(t)dt \quad (2.1.5)$$

şeklinde olup denkleme ilişkin karışık koşullar

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}y^{(k)}(a) + b_{ik}y^{(k)}(b)) = \lambda_i \quad , i = 0, 1, \dots, m-1$$

ile verilir. Bununla birlikte  $I = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$  ve  $J \leq m$  olmak üzere fonksiyonel Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemleri ve bu denkleme ilişkin koşulları

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^m f_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^J P_j(x)y^{(j)}(\alpha x + \beta) \\
& = g(x) + \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x,t)y^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f) dt \\
& \quad + \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x,t)y^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v) dt,
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \tag{2.1.7}$$

olarak ele alacağız. Burada  $0 \leq k \leq m$  için  $f_k(x)$ ,  $0 \leq j \leq J$  için  $P_j(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları  $I$  aralığında tanımlanan fonksiyonlardır.  $i = 0, 1, \dots, m-1$  ve  $k = 0, 1, \dots, m-1$  için  $a_{ik}, b_{ik}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\lambda_i$  problemde verilen uygun sabitlerdir.  $y(x)$ , (2.1.6)-(2.1.7) başlangıç-sınır değer probleminin elde edilecek tam çözüm fonksiyonudur.

## 2.2. Morgan-Voyce Polinomlarının Tanıtılması

Bu tez boyunca göz önüne alacağımız Morgan-Voyce serisini oluşturan  $n = 0, 1, \dots, N$  için  $B_n(x)$  Morgan-Voyce polinomları

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n+j+1}{n-j} x^j \tag{2.2.1}$$

kapalı formuna sahiptir. İlk dört  $n$  değerine karşılık gelen Morgan-Voyce polinomları

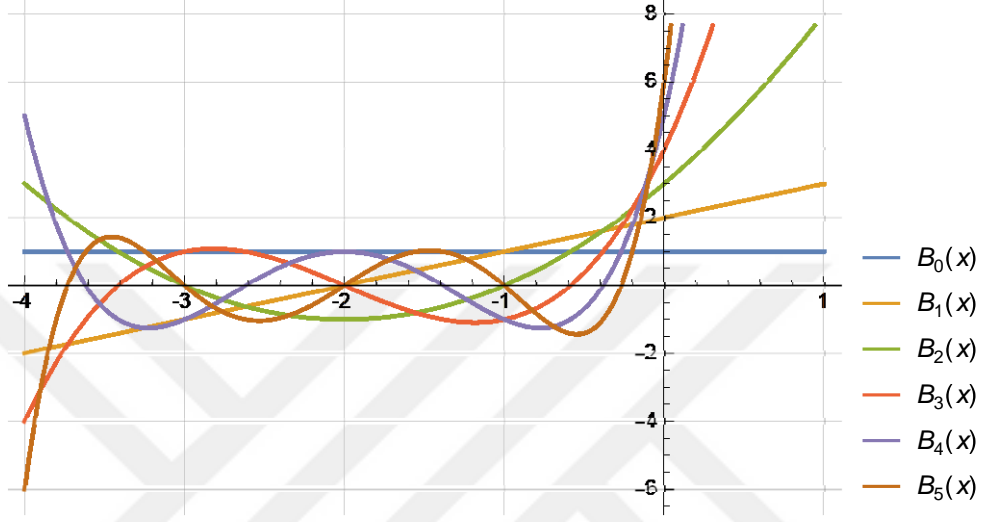
$$B_n(x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x + 2 & , n = 1 \\ x^2 + 4x + 3 & , n = 2 \\ x^3 + 6x^2 + 10x + 4 & , n = 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \tag{2.2.2}$$

ile verilebilir. Morgan-Voyce polinomlarının sağladığı diferansiyel denklem

$$x(x+4)B_n''(x) + 3(x+2)B_n'(x) - n(n+2)B_n(x) = 0 \tag{2.2.3}$$



formunda ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemdir.  $(-4,0)$  aralığı üzerinde  $\sqrt{x^2 + 4x}$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir fonksiyon dizisi olan Morgan-Voyce polinomlarının genel grafiği Şekil 2.1’de verilmiştir [2,6].



Şekil 2.1. Morgan-Voyce polinomlarının grafiği

### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

#### 3.1. Birinci Mertebeden Lineer Fredholm-Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri için Matris Tabanlı Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi

##### 3.1.1. Problemin Tanıtılması

$I = [a, b] \subset R$  aralığı üzerinde, başlangıç değer problemi olarak birinci mertebeden değişken katsayılı homojen veya homojen olmayan lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemi

$$f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = g(x) + \int_a^b K_f(x,t)y(t)dt + \int_{u(x)}^{v(x)} K_v(x,t)y(t)dt \quad (3.1.1.1)$$

ve

$$a_{00}y(a) + b_{00}y(b) = \lambda_0 \quad (3.1.1.2)$$

şartını göz önüne alalım. Bu problemde hem Fredholm hem de Volterra tipli integral kısımları mevcuttur. Denklemin yapısı gereği oluşturulacak çözüm yöntemi, bu denklemin herhangi bir terimi yada terimleri eksiltildiğinde birinci mertebeden değişken katsayılı homojen veya homojen olmayan lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denkleminin herhangi bir alt sınıfından seçilen bir denklemi de başarılı bir şekilde çözebilecek şekilde hazırlanmıştır. Burada  $a \leq u(x) \leq v(x) \leq b$  olmak üzere  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları  $x \in I$  aralığında tanımlanan fonksiyonlar,  $a_{00}$ ,  $b_{00}$  ve  $\lambda_0$  ise sabitlerdir. (3.1.1.1)-(3.1.1.2) probleminin çözümü  $y(x)$  fonksiyonudur.

##### 3.1.2. Çözüm Yöntemi ve Temel Matris İlişkileri

(3.1.1.1) denkleminin  $y(x)$  çözümüne yakınsayan kesilmiş Morgan-Voyce serisi

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), N \geq m, x \in I \quad (3.1.2.1)$$

olarak alınsın. Sonlu (3.1.2.1) serisini, Morgan-Voyce polinomlarının elemanı olduğu  $n = 0, 1, \dots, N$  için

$$B(x) = [B_0(x) \quad B_1(x) \quad \cdots \quad B_n(x)] \quad (3.1.2.2)$$

matrisini ve

$$A = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_n]^T \quad (3.1.2.3)$$

bilinmeyen katsayı matrisini kullanarak

$$y(x) \cong y_N(x) = B(x)A \quad (3.1.2.4)$$

matris formuna dönüştürebiliriz. Öte yandan,  $X(x) = [x^0 \ x^1 \ x^2 \ \cdots \ x^N]$  matrisi ve (2.2.1) bağıntısı kullanılarak elde edilen

$$R = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{4}{1} & \binom{5}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \binom{N+1}{N} & \binom{N+2}{N-1} & \binom{N+3}{N-2} & \cdots & \binom{2N+1}{0} \end{bmatrix}$$

katsayı matrisini ele aldığımızda,  $B(x)$  matrisi

$$B(x) = X(x)R^T \quad (3.1.2.5)$$

bağıntısını sağlamaktadır. Ayrıca, (3.1.2.5)'in her iki tarafının  $x$ 'e göre birinci mertebeden türevi alındığında

$$B'(x) = X'(x)R^T$$

olur.  $X(x)$  ile birinci mertebeden türevi arasında kurulacak bir matris bağıntısı için gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N & 0 \end{bmatrix}; \quad T^0 = I(\text{Birim matris})$$

katsayı matrisi bulunur ve bu matris yardımıyla Morgan-Voyce polinomlarının birinci mertebeden türev matrisi

$$B'(x) = X(x)T^T R^T \quad (3.1.2.6)$$

bağıntısı ile verilir. Böylece (3.1.2.4), (3.1.2.5) ve (3.1.2.6) eşitlikleri kullanıldığında bilinmeyen fonksiyon ve birinci türevi matris formunda

$$y(x) \cong y_N(x) = B(x)A = X(x)R^T A \quad (3.1.2.7)$$

ve

$$y'(x) \cong y'_N(x) = B'(x)A = X'(x)R^T A = X(x)T^T R^T A \quad (3.1.2.8)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Şimdi integral kısmının matris formlarını elde etmeye geçelim. Çekirdek fonksiyonları  $K_f(x,t)$ ,  $K_v(x,t)$  ve bunlara ait tamamlayıcı fonksiyonlar olan  $Q_f(x,t)$ ,  $Q_v(x,t)$ 'nin matris formuna dönüştürülmesi aşağıdaki gibidir:

Öncelikle Fredholm integral kısmındaki  $K_f(x,t)$  çekirdek fonksiyonunun Taylor seri

açılımı kullanıldığında  $m, n = 0, 1, \dots, N$  için  $k_f^{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_f(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}$  ve

$K_f = [k_f^{mn}]_{(N+1) \times (N+1)}$  olmak üzere çekirdek fonksiyona karşılık gelen matris form

$$K_f(x,t) = X(x)K_f X^T(t) \quad (3.1.2.9)$$

olup  $q_f^{mn} = \frac{b^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}$  olmak üzere tamamlayıcı fonksiyonu

$$Q_f = \int_a^b X^T(t)X(t)dt = [q_f^{mn}]_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.1.2.10)$$

formu ile verilir. Volterra integral kısmındaki  $K_v(x,t)$  çekirdek fonksiyonu için Taylor seri açılımı kullanıldığında benzer şekilde  $m, n = 0, 1, \dots, N$  için

$k_v^{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K_v(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}$  ve  $K_v = [k_v^{mn}]_{(N+1) \times (N+1)}$  olmak üzere çekirdek fonksiyona karşılık gelen matris form

$$K_v(x, t) = X(x) K_v X^T(t) \quad (3.1.2.11)$$

olup  $q_v^{mn}(x) = \frac{v^{m+n+1} - u^{m+n+1}}{m+n+1}$  olmak üzere tamamlayıcı fonksiyonu

$$Q_v(x) = \int_u^v X^T(t) X(t) dt = [q_v^{mn}(x)]_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.1.2.12)$$

şeklindedir.

Ayrıca değişken katsayılı fonksiyonların  $F_0(x)$  ve  $F_1(x)$  için matris formları

$$F_0(x) = \text{diag} [f_0(x) \quad f_0(x) \quad \dots \quad f_0(x)]$$

ve

$$F_1(x) = \text{diag} [f_1(x) \quad f_1(x) \quad \dots \quad f_1(x)]$$

ile verilir. Buna göre yukarıdaki matrisleri kullandığımızda (3.1.1.1) denklemini

$$\begin{aligned} (F_1(x) X(x) R^T T^T + F_0(x) X(x) R^T) A &= g(x) \\ &+ X(x) K_f Q_f R^T T^T A + X(x) K_v Q_v(x) R^T T^T A \end{aligned} \quad (3.1.2.13)$$

şeklinde kısaca yazabiliriz.  $i = 0, 1, \dots, N$  olmak üzere

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \quad (3.1.2.14)$$

tanımlı sıralama noktaları (3.1.2.14), (3.1.2.15) denkleminde yerine konursa, (3.1.1.1) denkleminin ilişkin temel matris denklemini kompakt formda

$$\left( F_1 X R^T T^T + F_0 X R^T - \overline{X} \overline{K_f} \overline{Q_f} \overline{R^T T^T} + \overline{X} \overline{K_v} \overline{Q_v} \overline{R^T T^T} \right) A = G \quad (3.1.2.15)$$

ile verilir. (3.1.2.15) denklemindeki matrislerin açık formları şöyledir:

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_0(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_0(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_0(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} f_1(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{K}_f = \begin{bmatrix} K_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\bar{Q}_f = \begin{bmatrix} Q_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\bar{T}^T = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}.$$

(3.1.2.15) denklemindeki parantez içi

$$W = [w_{ij}] = F_1 X R^T T^T + F_0 X R^T - \bar{X} \bar{K}_f \bar{Q}_f \bar{R}^T \bar{T}^T + -\bar{X} \bar{K}_v \bar{Q}_v \bar{R}^T \bar{T}^T \quad (3.1.2.16)$$

olmak üzere  $a_0, a_1, \dots, a_N$  ( $N+1$ ) bilinmeyenli ( $N+1$ ) cebirsel denklemden oluşan

(3.1.2.16) temel matris denklemini

$$WA = G \text{ veya } [W; G] \quad (3.1.2.17)$$

sistemine indirgenir.

Bu da  $U_0 = [u_{00} \ u_{01} \ \cdots \ u_{0N}]$  için

$$U_0 A = \gamma_0 \text{ veya } [U_0; \gamma_0], \quad (3.1.2.18)$$

denklem sistemi anlamına gelir. Sonuç olarak (3.1.1.1) denkleminin (3.1.1.2) koşulları altında (3.1.2.1) formunda çözümü elde etmek için, (3.1.2.17) matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen (3.1.2.18) deki  $m$ . satırının konulmasıyla yeni

$$\tilde{W}A = \tilde{G}$$

veya

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1(N+1)} & ; & g(x_1) \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2(N+1)} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1(N+1)} & ; & \gamma_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N+1)(N+1)} & w_{(N+1)(N+1)} & \cdots & w_{(N+1)(N+1)} & ; & g(x_{(N+1)(N+1)}) \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Eğer

$$\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W}, \tilde{G}]$$

ise bu taktirde

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G}$$

yazılabilir. Böylece içerisinde  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  katsayıları olan  $A$  matrisi tek olarak belirlenir. Şu halde

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

denklem sistemi anlamına gelir. Morgan- Voyce polinom çözümü ile elde edilir.

### 3.2. Yüksek Mertebeden Lineer Gecikmeli Fredholm-Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Morgan-Voyce Polinomları ile İncelenmesi

#### 3.2.1. Problemin Tanıtılması

$I = [a, b] \subset R$  aralığı üzerinde, başlangıç değer problemi olarak, yüksek mertebeden değişken katsayılı homojen veya homojen olmayan lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^m f_k(x) y^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j(x) y^{(j)}(\alpha x + \beta) = g(x) + \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x, t) y^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f) dt + \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x, t) y^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v) dt, J \leq m \quad (3.2.1.1)$$

fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin koşulları

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2.1.2)$$

olup  $f_k(x), P_j(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları,  $x \in I$  aralığında tanımlanan fonksiyonlardır.

$a, \beta, a_{ik}, b_{ik}$  ve  $\lambda_i$  uygun sabitlerdir.

#### 3.2.2. Çözüm Yöntemi ve Temel Matris İlişkileri

Yüksek mertebeden değişken katsayılı homojen veya homojen olmayan lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümü  $y(x)$  dir.

Bu çalışmanın amacı, problemin çözümünü (3.2.1.1) – (3.2.1.2) kesilmiş Morgan-Voyce serisi olarak almaktır.

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), N \geq m, \quad x \in I \quad (3.2.1.3)$$

Burada,  $a_n, n = 0, 1, \dots, N$  bilinmeyen katsayılarıdır. Yukarıda (2.2.1) ile tanımladığımız

$B_n(x), n = 0, 1, \dots, N$  için Morgan-Voyce polinomlarının tanımladığı fonksiyonlardır.



İlk olarak, kesilmiş Morgan-Voyce serisi (3.2.1.3) ile tanımlanan (3.2.1.1) denkleminin  $y(x)$  çözümünü ele alacağız; Sonlu (3.2.1.3) serisini, Morgan-Voyce polinomlarının elemanı olduğu  $n = 0, 1, \dots, N$  için

$$B(x) = [B_0(x) \ B_1(x) \ \dots \ B_n(x)]$$

matrisini ve

$$A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T$$

bilinmeyen katsayı matrisini kullanarak

$$y(x) \cong y_N(x) = B(x)A \quad (3.2.1.4)$$

matris formuna dönüştürebiliriz. Öte yandan,  $X(x) = [x^0 \ x^1 \ x^2 \ \dots \ x^N]$  matrisi ve (2.2.1) bağıntısı kullanılarak elde edilen

$$R = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} N+1 \\ N \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} N+2 \\ N-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} N+3 \\ N-2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 2N+1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

katsayı matrisini ele aldığımızda,  $B(x)$  matrisi

$$B(x) = X(x)R^T \quad (3.2.1.5)$$

bağıntısını sağlamaktadır. (3.2.1.5)' in her iki tarafının  $x$  ' e göre  $k$ . türevi alındığında

$$B^{(k)}(x) = X^k(x)R^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

$X(x)$  ile  $k$ . türevi arasında kurulacak bir matris bağıntısı için gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N & 0 \end{bmatrix}; T^0 = I \text{ (Birim Matris)}$$

katsayı matrisi bulunur ve bu matris yardımıyla Morgan-Voyce polinomlarının birinci mertebeden türev matrisi

$$B'(x) = X'(x)R^T = X(x)T^T R^T$$

ve sürecin tekrarlanmasıyla  $k$ . mertebeden türev matrisi

$$B^{(k)}(x) = X(x)(T^T)^k R^T, k=0,1,2,\dots,m \quad (3.2.1.6)$$

bağıntısı ile verilir. Böylece (3.2.1.4), (3.2.1.5) ve (3.2.1.6) eşitlikleri kullanıldığında bilinmeyen fonksiyon, birinci ve  $k$ . mertebeden türev matris formunda

$$y(x) \cong y_N(x) = B(x)A = X(x)R^T A$$

ve

$$y'(x) \cong y'_N(x) = B'(x)A = X'(x)R^T A = X(x)R^T T^T A \quad (3.2.1.7)$$

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) &= B^{(k)}(x)A = X^{(k)}(x)R^T A \\ &= X(x)(T^T)^k R^T A, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (3.2.1.8)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Gecikme kısmının  $k$ . mertebeden türev matris formunu elde edebilmek için (3.2.1.8) de  $x$  yerine  $ax + \beta$  dönüşümünü yazalım.  $k=0,1,2,\dots$  ve  $a \neq 0$  için

$$D(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha^0 \beta^0 & \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 & \binom{2}{0} \alpha^0 \beta^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha^0 \beta^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 & \binom{2}{1} \alpha^1 \beta^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha^1 \beta^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha^2 \beta^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha^2 \beta^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha^N \beta^0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$y^{(k)}(ax + \beta) = X(ax + \beta)(T^T)^k R^T A = X(x)D(a, \beta)(T^T)^k R^T A \quad (3.2.1.9)$$

şeklinindedir. Diğer tarafta ki integral kısmının matris formlarını elde etmeye geçelim. Çekirdek fonksiyonları  $K_f(x, t)$ ,  $K_v(x, t)$  ve bunlara ait tamamlayıcı fonksiyonlar olan  $Q_f(x, t)$ ,  $Q_v(x, t)$ 'nin matris formuna dönüştürülmesi (3.1.2.9), (3.1.2.10), (3.1.2.11), (3.1.2.12) de verilmiştir. Ayrıca değişken katsayılı fonksiyonların  $F_k(x)$  ve  $P_j(x)$  için matris formu

$$F_k(x) = \text{diag}[f_k(x) \quad f_k(x) \quad \cdots \quad f_k(x)]$$

ve

$$P_j(x) = \text{diag}[p_j(x) \quad p_j(x) \quad \cdots \quad p_j(x)]$$

ile verilir. Birinci mertebeden matris denklem sistemi (3.1.1.1) 'de verilmiş olup yüksek mertebeden genel matris denklemi  $J \leq m$  olmak koşuluyla

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m F_k X(x)(T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X(x)D(\alpha, \beta)(T^T)^{(j)} = g(x) \\ & + \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x, t) y^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f) dt + \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x, t) y^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v) dt \end{aligned} \quad (3.2.1.10)$$

Fredholm-Volterra integro diferansiyel kısmında çekirdek, tamamlayıcı ve türev fonksiyonları yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{k=0}^m F_k X(x)(T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X(x)D(\alpha, \beta)(T^T)^{(j)} \right] R^T A = \\ & g(x) + \sum_{f=0}^F X(x)K_f(x)Q_f(x)D(\lambda_f, \mu_f)T^T R^T \\ & + \sum_{v=0}^V X(x)K_v(x)Q_v(x)D(\lambda_v, \mu_v)T^T R^T, J \leq m \end{aligned} \quad (3.2.1.11)$$

elde edilir.  $i = 0, 1, \dots, N$  ile tanımlı

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i$$

sıralama noktaları (3.2.1.10) denkleminde yerine konursa temel matris denkleminin (kompakt form)

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \sum_{k=0}^m F_k X(T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta)(T^T)^{(j)} \right] R^T \right. \\ & \left. - \sum_{f=0}^f \overline{X K_f Q_f D(\lambda_f, \mu_f) R^T T^T} - \sum_{v=0}^v \overline{X K_v Q_v D(\lambda_v, \mu_v) R^T T^T} \right\} A = G \end{aligned} \quad (3.2.1.12)$$

şeklinindedir. Fonksiyonların matris formları

$$F_k = \begin{bmatrix} f_k(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_k(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_k(x) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad P_j = \begin{bmatrix} p_j(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_j(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_j(x) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\overline{K}_f = \begin{bmatrix} K_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\overline{Q}_f = \begin{bmatrix} Q_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\overline{T}^T = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

şeklindedir. Buradan

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T$$

$$\left. - \sum_{f=0}^f \overline{X K_f Q_f D(\lambda_f, \mu_f) R^T T^T} - \sum_{v=0}^v \overline{X K_v Q_v D(\lambda_v, \mu_v) R^T T^T} \right\} \quad (3.2.1.12)$$

kabulü altında (3.2.1.11),  $a_0, a_1, \dots, a_N$  ( $N+1$ ) bilinmeyen katsayılı ( $N+1$ ) cebrik denklemden oluşan

$$WA = G \text{ veya } [W; G] \quad (3.2.1.13)$$

sistemine indirgenir.

Bu da  $U_i = [u_{i0} \ u_{i1} \ \cdots \ u_{iN}]$  için

$$U_i A = \gamma_i \text{ veya } [U_i; \gamma_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2.1.14)$$

denklem sistemi anlamına gelir.

Sonuç olarak (3.2.1.1) denkleminin (3.2.1.2) koşulları altında (3.2.1.3) formunda çözümü elde etmek için, (3.2.1.13) matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen (3.2.1.14) deki  $m$ . satırının konulmasıyla yeni

$$\tilde{W}A = \tilde{G} \text{ veya}$$

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1(N+1)} & ; & g(x_1) \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2(N+1)} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1(N+1)} & ; & \gamma_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N+1)(N+1)} & w_{(N+1)(N+1)} & \cdots & w_{(N+1)(N+1)} & ; & g(x_{(N+1)(N+1)}) \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Eğer

$$\text{rank} \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W}, \tilde{G}]$$

ise bu taktirde

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G}$$

yazılabilir. Böylece içerisinde  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  katsayıları olan  $A$  matrisi tek olarak belirlenir. Şu halde

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

denklem sistemi anlamına gelir.

### 3.3. Rezidüel Hata Analizi

Değişken katsayılı, lineer, fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde edebilmek için Morgan-Voyce sıralama yöntemimizi kullandık. Elde edilen yaklaşık çözümlerin gerçek çözümlere daha iyi yaklaşabilmesi için ek araçlar kullanabilmekteyiz. Burada çözümlerin yaklaşıklıkının iyileştirilmesi için, yaklaşık çözümün orijinal denklemde yerine yazıldığında elde edilen kalıntı fonksiyonunun özdeş olarak sifıra denk olmasını sağlayan ek çözümleri göz önüne alacağız. Metot şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^m f_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^l P_j(x) y^{(i)}(\alpha x + \beta) \\
& - \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x, t) y^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f) dt \\
& - \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x, t) y^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v) dt = g(x), \quad a \leq x \leq b
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

denklemin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \tag{3.3.2}$$

şartları altındaki yaklaşık çözümü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), \quad N \geq m, a \leq x \leq b$$

ile ifade edilen kesilmiş Morgan-Voyce serisi olsun.  $y_N(x)$  ve gerekli türevleri alınıp orijinal denklemde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^m f_k(x) y_N^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^l P_j(x) y_N^{(i)}(\alpha x + \beta) \\
& - \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x, t) y_N^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f) dt \\
& - \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x, t) y_N^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v) dt = g(x) + R_N(x), \quad a \leq x \leq b
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme ait şartlar

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} y_N^{(k)}(a) + b_{ik} y_N^{(k)}(b)) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \tag{3.3.4}$$

şeklinindedir.  $R_N(x)$ , rezidü kalıntı fonksiyonudur.  $y_N(x)$  Morgan-Voyce polinom çözümü ile  $y(x)$  tam çözümü arasındaki fark hata fonksiyonu olup

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \tag{3.3.5}$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyonun tanım aralığındaki  $x$  değerleri için mutlak değerini mutlak hata olarak alacağız. Hata fonksiyonu ile ilgili denkleme ulaşmak için, (3.3.1)-(3.3.2) denkleminde (3.3.3)–(3.3.4) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m f_k(x)(y^{(k)} - y_N^{(k)})(x) + \sum_{i=0}^I P_j(x)(y^{(i)}(\alpha x + \beta) - y_N^{(i)}(\alpha x + \beta)) \\ & - \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x,t)(y^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f) - y_N^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f))dt \\ & - \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x,t)(y^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v) - y_N^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v))dt = -R_N(x) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}(y^{(k)}(a) - y_N^{(k)}(a)) + b_{ik}(y^{(k)}(b) - y_N^{(k)}(b))) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Şimdi (3.3.5), (3.3.6)-(3.3.7)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m f_k(x)e_N^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^I P_j(x)e_N^{(i)}(\alpha x + \beta) \\ & - \sum_{f=0}^F \int_{u_f(x)}^{v_f(x)} K_v(x,t)e_N^{(f)}(\lambda_f t + \mu_f)dt \\ & - \sum_{v=0}^V \int_{u_v(x)}^{v_v(x)} Q_v(x,t)e_N^{(v)}(\lambda_v t + \mu_v)dt = -R_N(x) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}e_N^{(k)}(a) - b_{ik}e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.3.9)$$

homojen koşullara sahip diferansiyel denklem elde edilmiş olur. (3.3.8)-(3.3.9) çözüldüğünde elde edilen  $e_N(x)$  hata fonksiyonu,  $y_N(x)$  çözümüne karşılık gelen tamamlayıcı fonksiyon olup yaklaşık çözümün iyileştirilmesini sağlar. (3.3.8) denkleminin yapısı (3.3.1) ana denklemin yapısına benzer olup bir önceki bölümde önerilen çözüm tekniği burada tekrar uygulanabilir. Morgan-Voyce polinom yaklaşımı (3.3.8) -(3.3.9) başlangıç-sınır değer problemine uygulandığında  $M$  kesme sınır olmak üzere  $e_{N,M}(x)$  tahmini hata fonksiyonu bulunur. Böylece



$y_N(x)$  Morgan-Voyce polinom çözümünün tahmini hata fonksiyonu ile birlikte  $(N, M)$  kesme sınırlı iyileştirilmiş yaklaşık çözümünün toplamı olan  $y_{N,M}(x)$

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x) \quad (3.3.10)$$

formundadır.



#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Morgan-Voyce sıralama yönteminin uygulanabilirliğini ve verimliliğini göstermek için, birinci mertebeden değişken katsayılı ve yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer gecikmeli integro-diferansiyel denklem örnekleri bu kısımda ele alınmıştır.

**Örnek 4.1.** [13] Tam çözümü  $y(x) = \sin x$  fonksiyonu olan  $y(0) = 0$  başlangıç

şartı altındaki 
$$y'(x) - \int_0^x y(t)dt = 1, 0 \leq x \leq 1$$

Volterra İntegro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin (3.1.1.1) formundaki  $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1, f_2(x) = 0, g(x) = 1$ , denklemin verilen katsayıları olup  $K_v(x) = 1$  çekirdek fonksiyonudur.

Morgan-Voyce polinomunun geçiş matrisi

$B_0(x) = 1, B_1(x) = x + 2$  şeklindedir.

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & \frac{1}{125} & \frac{1}{625} & \frac{1}{3125} \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{8}{125} & \frac{16}{625} & \frac{32}{3125} \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{9}{25} & \frac{27}{125} & \frac{81}{625} & \frac{243}{3125} \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{16}{25} & \frac{64}{125} & \frac{256}{625} & \frac{1024}{3125} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

Genel formda

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}$$

geçiş matrislerini elde ederiz. Çekirdek fonksiyonların matris formu

$$K_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \overline{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

ve

$$Q_v = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} \\ \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} & \frac{x^9}{9} \\ \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} & \frac{x^9}{9} & \frac{x^{10}}{10} \\ \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} & \frac{x^9}{9} & \frac{x^{10}}{10} & \frac{x^{11}}{11} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

şeklinde olup

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

formda belirtilmiştir. Sıralama noktaları  $N = 5$  için

$$x_0 = 0; x_1 = 0,2; x_2 = 0,4; x_3 = 0,6; x_4 = 0,8; x_5 = 1$$

$$W = [w_{ij}] = F_1 X R^T T^T - \overline{X} \overline{K}_v \overline{Q}_v \overline{R}^T \overline{T}^T$$

$W$  temel matris denklemi tarafından tanımlanır.

$$W = [w_{pq}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ \frac{1}{5} & \frac{71}{50} & \frac{1906}{375} & \frac{33841}{2500} & \frac{482051}{15625} & \frac{1001756}{15625} \\ \frac{1}{5} & \frac{47}{25} & \frac{2378}{375} & \frac{11134}{625} & \frac{703082}{15625} & \frac{4988167}{46875} \\ \frac{1}{5} & \frac{119}{50} & \frac{974}{125} & \frac{57361}{2500} & \frac{985793}{15625} & \frac{2587694}{15625} \\ \frac{1}{5} & \frac{73}{25} & \frac{3544}{375} & \frac{18154}{625} & \frac{1341824}{15625} & \frac{3846731}{15625} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{2} & \frac{34}{3} & \frac{145}{4} & \frac{571}{5} & \frac{1060}{3} \end{bmatrix}$$

şartların matris formu

$$[U_i] = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$$

olup, denklemin  $y(0) = 0$  başlangıç şartı altında çözümü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla

$$[U_i; \gamma_i] = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ ; \ 0]$$

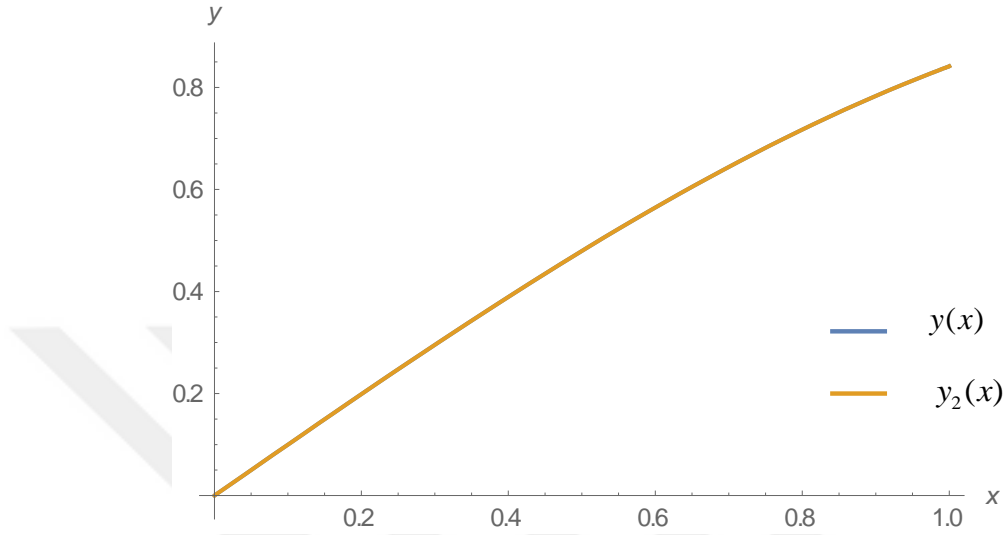
$\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse doğrusal cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık çözümünü verir.

**Tablo 4. 1.** Örnek 4.1 'in  $N = 5$  için nümerik çözümleri

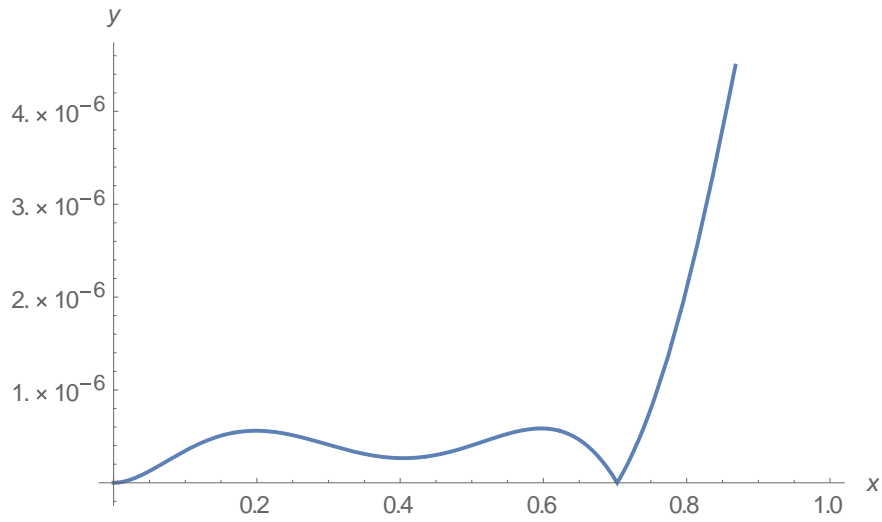
$i$	$x_i$	Tam Çözüm $N = 5$	Yaklaşık Çözüm $N = 5$	Mutlak Hata $N = 5$	Tau-err[13] $N = 5$
1	0.2	0.198669	0.198675	$5.8213 \times 10^{-6}$	$2.60 \times 10^{-9}$
2	0.4	0.389418	0.389427	$83049 \times 10^{-6}$	$3.24 \times 10^{-7}$
3	0.6	0.564642	0.56465	$731519 \times 10^{-6}$	$5.53 \times 10^{-6}$
4	0.8	0.717356	0.717363	$682656 \times 10^{-6}$	$4.12 \times 10^{-5}$
5	1.	0.841471	0.841476	$4.81927 \times 10^{-6}$	$1.96 \times 10^{-4}$

Bu tablodaki değerler Mathematica'da kendi yazdığımız kodlarla oluşturduğumuz program ile hesaplanmıştır. Program arttırılmış matris formunda şartların eklenmesi aşamasında bir dizi işlem yapıp optimize çözümü veren katsayıları

buldurmaktadır.  $N=5$  için Intel® Core™i5-2410M [CPU@2.30GHz](#) 2.30GHz işlemcili bilgisayarda Windows 7 Ultimate sürümü altında 4,00GB RAM ile Mathematica 11.0.1.0 programında yapılan işlem süresi 2.10 saniye olup çözüm tam çözüme en yakın olmak üzere çok hızlı bir sonuçtur.



Şekil 4. 1. Örnek 4.1'in grafiği



Şekil 4. 2. Örnek 4.1'in hata grafiği

**Örnek 4.2.** [14] Tam çözümü  $y(x) = x$  fonksiyonu olan  $y(0) = 0$  başlangıç şartı

altındaki 
$$y'(x) - \int_0^1 xty(t)dt = 1 - x/3, 0 \leq x, t \leq 1$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin (3.1.1.1)

formundaki  $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1, f_2(x) = 0, g(x) = 1 - x/3$ , denklemin verilen

katsayıları olup  $K_f(x) = xt$  çekirdek fonksiyonudur.

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{K_f} = \begin{bmatrix} K_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \overline{Q_f} = \begin{bmatrix} Q_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Sıralama noktaları  $N = 2$ , için

$$x_0 = 0; x_1 = 0,5; x_2 = 1$$

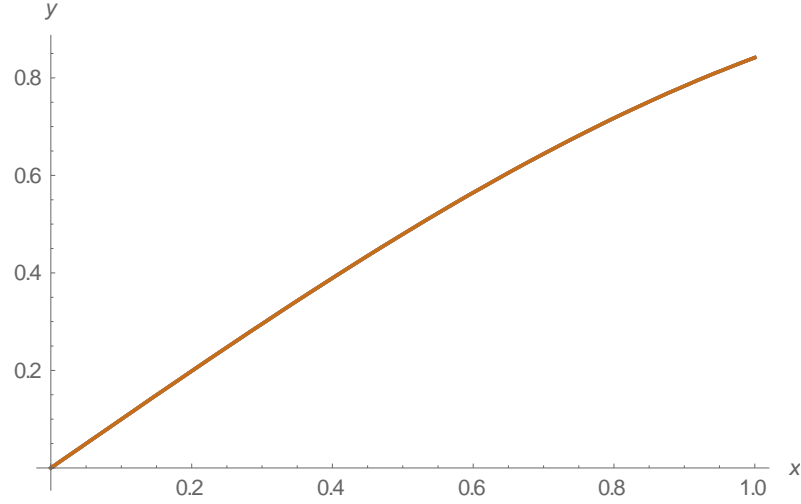
$$W = [w_{ij}] = F_1 X R^T T^T - \bar{X} \bar{K}_f \bar{Q}_f \bar{R}^T \bar{T}^T$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{83}{24} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{35}{12} \end{bmatrix}$$

$W$  temel matris denklemleri tarafından tanımlanır.

$$U_i = [1 \ 2 \ 3 \ 0]$$

Denklemin  $y(0) = 0$  başlangıç şartı altında çözümü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse, doğrusal cebirsel sistem elde edilir. Denklem de tam çözüm bulunmuştur.



**Şekil 4. 3.** Örnek 4.2'nin grafiği

**Örnek 4.3.** [15] Tam çözümü  $y(x) = (x-1)\sinh x$  fonksiyonu olan  $y(0) - y(1) = 0$  başlangıç şartları altında

$$y'(x) - y(x) - \int_0^1 (x+t)y(t)dt - \int_0^x xy(t)dt = e^x(1-\frac{x}{2}) + e^{-x}(\frac{3}{2}x-2), \quad 0 \leq x, \quad t \leq 1,$$

Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu denklemin (3.1.1.1) formundaki  $f_0(x) = -1, f_1(x) = 1, g(x) = e^x(1-\frac{x}{2}) + e^{-x}(\frac{3}{2}x-2)$ ,

denklemin verilen katsayıları olup  $K_f(x) = x+t, K_v(x) = x$  çekirdek fonksiyonlarıdır.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)},$$



$$K_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_f = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{bmatrix},$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_v = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} \\ \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} & \frac{x^9}{9} \\ \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} & \frac{x^9}{9} & \frac{x^{10}}{10} \\ \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \frac{x^8}{8} & \frac{x^9}{9} & \frac{x^{10}}{10} & \frac{x^{11}}{11} \end{bmatrix},$$

$$\overline{K}_f = \begin{bmatrix} K_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{Q}_f = \begin{bmatrix} Q_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\overline{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-17}{10e^{1/5}} + \frac{9e^{1/5}}{10} \\ \frac{-7}{5e^{2/5}} + \frac{4e^{2/5}}{5} \\ \frac{-11}{10e^{3/5}} + \frac{7e^{3/5}}{10} \\ \frac{-4}{5e^{4/5}} + \frac{3e^{4/5}}{5} \\ \frac{-1}{2e} + \frac{e}{2} \end{bmatrix}$$

Sıralama noktaları  $N = 6, N = 7, N = 8, N = 9$  için

$$W = [w_{ij}] = F_1 X R^T T^T + F_0 X R^T - \bar{X} \bar{K}_f \bar{Q}_f \bar{R}^T \bar{T}^T + -\bar{X} \bar{K}_v \bar{Q}_v \bar{R}^T \bar{T}^T$$

sorunun temel matris denklemleri tarafından tanımlanır.

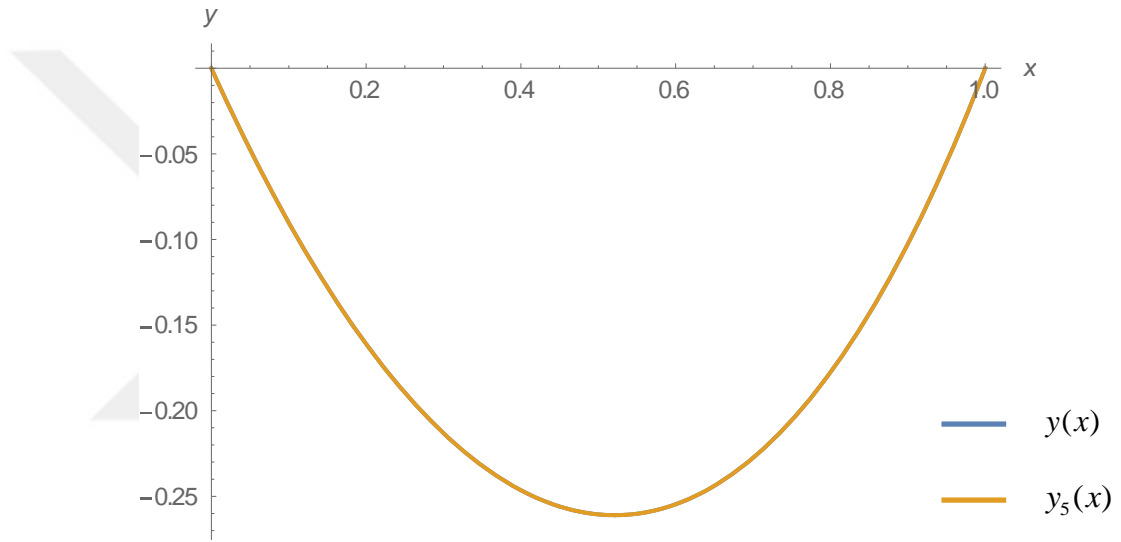
Denklemin  $y(0) - y(1) = 0$  başlangıç şartı altında çözümü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse, doğrusal cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık çözümünü verir.

**Tablo 4. 2.** Örnek 4.3' in farklı  $N$  ve  $N$  değeri için nümerik karşılaştırmaları

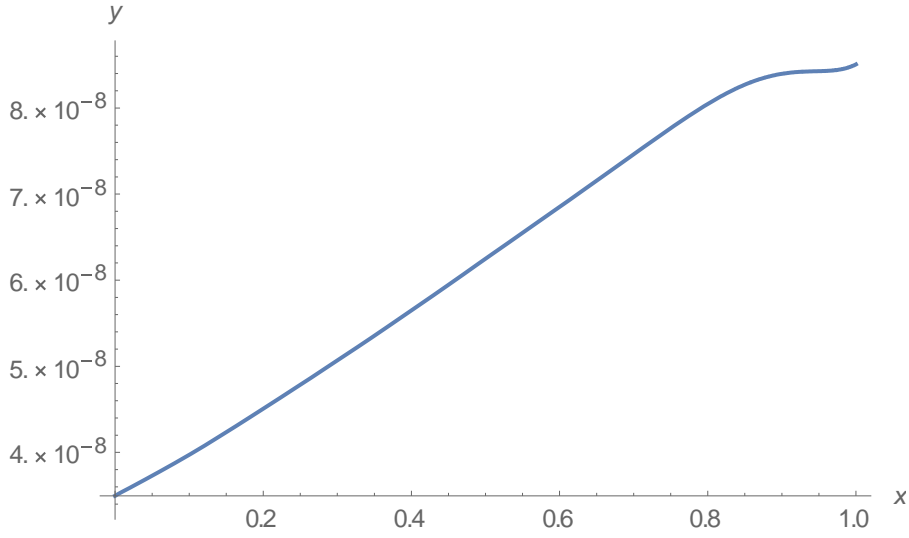
$x_i$	Morgan-Voyce Metodu $N = 6$	Hilbert Space Metodu $N = 51$ [15]
0.16	$2.69147 \times 10^{-7}$	$1.14499 \times 10^{-8}$
0.32	$2.3525 \times 10^{-7}$	$5.33005 \times 10^{-8}$
0.48	$3.69819 \times 10^{-7}$	$8.09302 \times 10^{-8}$
0.64	$6.90231 \times 10^{-8}$	$7.19185 \times 10^{-8}$
0.80	$5.30847 \times 10^{-7}$	$2.10790 \times 10^{-8}$
0.96	$4.03788 \times 10^{-8}$	$8.30909 \times 10^{-8}$

Giriş değerleri yukarıda belirtilmiş olup  $N = 6$  için tam çözümü  $y(x) = (x-1) \sinh x$  olmak üzere algoritmamızı Mathematica programına uygulayarak elde ettiğimiz program hesaplama işlemi yaptıktan sonra çözüm fonksiyonu için 6 farklı çözüm

üretip bu çözümlerin grafiklerini çizmeye çalışmıştır.  $N = 6$   $N = 8$  için Intel® Core™i5-2410M [CPU@2.30GHz](#) 2.30GHz işlemcili bilgisayarda Windows 7 Ultimate sürümü altında 4,00GB RAM ile Mathematica 11.0.1.0 programında yapılan işlemin süresi 3.35 saniyede gerçekleştirilmiştir. Farklı  $N$  değerleri ile bulunan sonuçlar, [15]'e ait olan  $N = 51$  değeri için oluşan sonuca göre daha verimlidir.  $N = 6$  için alınan kestirme değerine göre çok hızlı bir sonuçtur. Aynı zamanda bu süre içerisinde  $U$  ile tanımladığımız şart matrisini  $6 \times 6$  tipindeki  $W$  matrisin her bir satırıyla tek tek değiştirilerek elde edilen sonuçlar gösterilmiştir. Kısa sürede bu sonucu almak literatürde ki diğer makalelerin mevcut olduğu değerlere göre daha iyi olduğu söylenmelidir.



**Şekil 4. 4.** Örnek 4.3'ün grafiği



**Şekil 4.5.** Örnek 4.3'ün hata grafiği

**Örnek 4.4.** [16] Tam çözümü  $y(x) = e^x$  fonksiyonu olan  $y(0) = 1$  başlangıç şartları altında

$$y'(x) - y(x-1) - \int_{x-1}^x y(t) dt = 0, \quad 0 \leq x, \quad t \leq 1$$

gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

İlk olarak problemi açalım.

$$y'(x) - y(x-1) + \int_0^{x-1} y(t) dt - \int_0^x y(t) dt = 0$$

Bu denklemin (3.1.1.1) formundaki  $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1, p_0(x) = -1, g(x) = 1,$  denklemin verilen katsayıları olup  $K_v(x) = -1$  çekirdek fonksiyonudur.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$N=4$  için çekirdek ve yardımcı fonksiyonun matris formu;

$$K_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_v = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-(-1+x)^2 + x^2) & \frac{1}{3}(-(-1+x)^3 + x^3) & \frac{1}{4}(-(-1+x)^4 + x^4) & \frac{1}{5}(-(-1+x)^5 + x^5) \\ \frac{1}{2}(-(-1+x)^2 + x^2) & \frac{1}{3}(-(-1+x)^3 + x^3) & \frac{1}{4}(-(-1+x)^4 + x^4) & \frac{1}{5}(-(-1+x)^5 + x^5) & \frac{1}{6}(-(-1+x)^6 + x^6) \\ \frac{1}{3}(-(-1+x)^3 + x^3) & \frac{1}{4}(-(-1+x)^4 + x^4) & \frac{1}{5}(-(-1+x)^5 + x^5) & \frac{1}{6}(-(-1+x)^6 + x^6) & \frac{1}{7}(-(-1+x)^7 + x^7) \\ \frac{1}{4}(-(-1+x)^4 + x^4) & \frac{1}{5}(-(-1+x)^5 + x^5) & \frac{1}{6}(-(-1+x)^6 + x^6) & \frac{1}{7}(-(-1+x)^7 + x^7) & \frac{1}{8}(-(-1+x)^8 + x^8) \\ \frac{1}{5}(-(-1+x)^5 + x^5) & \frac{1}{6}(-(-1+x)^6 + x^6) & \frac{1}{7}(-(-1+x)^7 + x^7) & \frac{1}{8}(-(-1+x)^8 + x^8) & \frac{1}{9}(-(-1+x)^9 + x^9) \end{bmatrix}$$

$$\overline{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \quad \text{şeklindedir.}$$

Sıralama noktaları  $N=4, N=6, N=8$  için

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T - \sum_{v=0}^v \overline{X K_v Q_v D(\lambda_v, \mu_v) R^T T^T} \Bigg\}$$

sorunun temel matris denklemi tarafından tanımlanır.

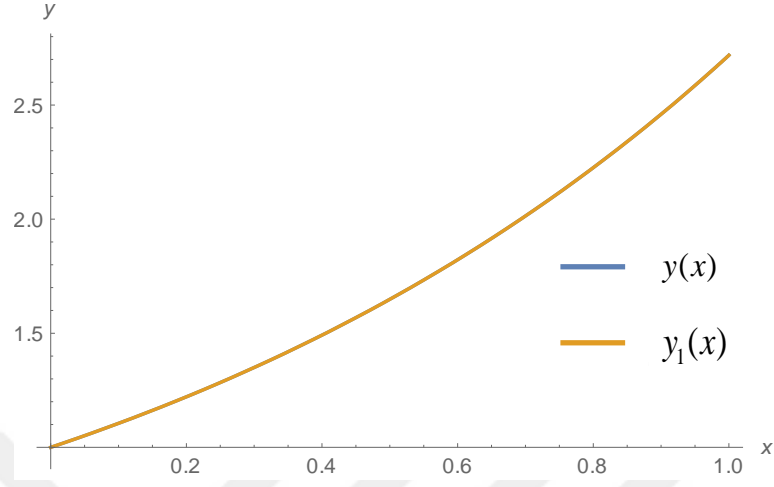
Denklemin  $y(0) = 1$  başlangıç şartı altında çözümü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse, doğrusal cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık çözümünü verir.

**Tablo 4. 3.** Örnek 4.4' in farklı  $N$  değeri için nümerik karşılaştırmaları

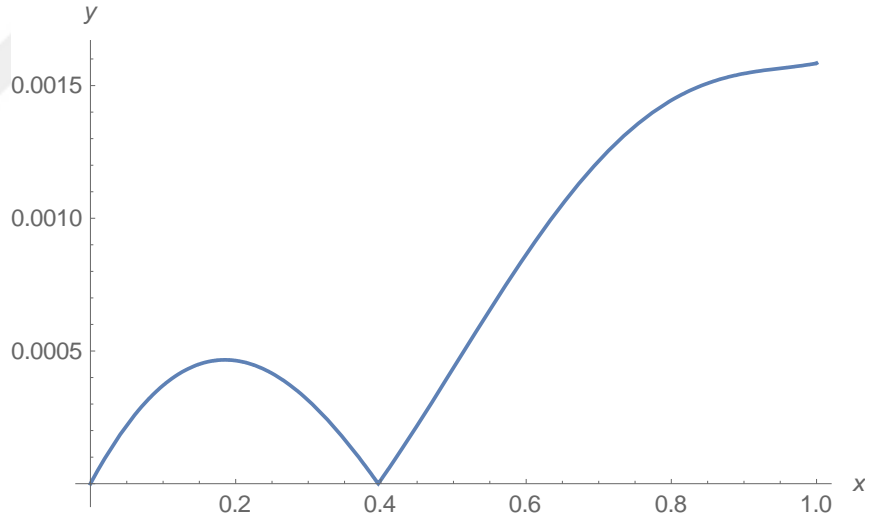
$x_i$	Laguerre Sıralama Metodu $N = 4$ [16]	Laguerre Sıralama Metodu $N = 8$ [16]	Morgan-Voyce Metodu $N = 4$	Morgan-Voyce Metodu $N = 8$
0.2	$4.1670 \times 10^{-4}$	$1.5829 \times 10^{-6}$	$4.63766 \times 10^{-4}$	$1.20523 \times 10^{-6}$
0.4	$1.4750 \times 10^{-3}$	$2.1689 \times 10^{-6}$	$1.44591 \times 10^{-5}$	$1.44122 \times 10^{-6}$
0.6	$2.47470 \times 10^{-3}$	$2.0004 \times 10^{-6}$	$8.63373 \times 10^{-4}$	$1.0799 \times 10^{-6}$
0.8	$2.9179 \times 10^{-3}$	$1.7385 \times 10^{-6}$	$1.44444 \times 10^{-3}$	$7.29389 \times 10^{-7}$
1.0	$3.0410 \times 10^{-3}$	$1.8455 \times 10^{-6}$	$1.58389 \times 10^{-3}$	$7.36354 \times 10^{-7}$

Giriş değerleri yukarıda belirtilmiş olup  $N = 4$  için tam çözümü  $y(x) = e^x$  olmak üzere algoritmamızı Mathematica programına uygulayarak elde ettiğimiz program hesaplama işlemi yaptıktan sonra çözüm fonksiyonu için 4 farklı çözüm üretip bu çözümlerin grafiklerini çizmeye çalışmıştır.  $N = 4$  için Intel® Core™i5-2410M [CPU@2.30GHz](#) 2.30GHz işlemcili bilgisayarda Windows 7 Ultimate sürümü altında 4,00GB RAM ile Mathematica 11.0.1.0 programında yapılan işlemin süresi 3.50 saniyede gerçekleştirilmiştir. Farklı  $N$  değerleri ile bulunan sonuçlar, [16] ya ait olan  $N$  farklı değerleri için oluşan sonuçlara göre kıyaslandığında  $N = 4$  için alınan kestirme değerine göre çok hızlı bir sonuçtur. Aynı zamanda bu süre içerisinde  $U$  ile

tanımladığımız şart matrisini  $4 \times 4$  tipindeki  $W$  matrisin her bir satırıyla tek tek değiştirilerek elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.



Şekil 4.6. Örnek 4.4'ün grafiği



Şekil 4.7. Örnek 4.4'ün hata grafiği

**Örnek 4.5.** [31] Tam çözümü  $y(x) = \sin(x)$  fonksiyonu olan  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  başlangıç şartları altında

$$y''(x) - \frac{3}{4}y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{11}{4}\sin(x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) + x\cos(x) + \int_0^x ty(t)dt = 0, \quad 0 \leq x, \quad t \leq 1,$$

gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu denklemin (3.1.1.1) formundaki

$$f_0(x) = -3/4, f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, p_0(x) = 1, g(x) = (-11/4)\sin(x) + \sin(x/2) + x\cos(x),$$

denklemin verilen katsayıları olup  $K_v(x) = t$  çekirdek fonksiyonudur.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{T}^T = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$N=7$  için çekirdek ve yardımcı fonksiyonun matris formu



$$K_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_v = [Q_v(x)]_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\overline{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \overline{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

şeklindedir. Sıralama noktaları  $N = 4, N = 7, N = 10$  için

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T - \sum_{v=0}^v \overline{X} \overline{K}_v \overline{Q}_v D(\lambda_v, \mu_v) \overline{R^T T^T} \}$$

sorunun temel matris denklemi tarafından tanımlanır.

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 0 \end{bmatrix}$$

Denklemin  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  başlangıç şartı altında çözümünü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin

$m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse, doğrusal cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık çözümünü verir.

**Tablo 4. 4.** Örnek 4.5' in  $N=7$  değeri için nümerik çözümleri

$i$	$x_i$	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
1	0.142857	0.142372	0.142372	$4.78481 \times 10^{-10}$
2	0.285714	0.281843	0.281843	$1.12754 \times 10^{-9}$
3	0.428571	0.415572	0.415572	$1.76329 \times 10^{-9}$
4	0.571429	0.540834	0.540834	$2.37813 \times 10^{-9}$
5	0.714286	0.655078	0.655078	$3.26687 \times 10^{-9}$
6	0.857143	0.755975	0.755975	$8.56322 \times 10^{-10}$
7	1.	0.841471	0.841471	$1.06247 \times 10^{-7}$

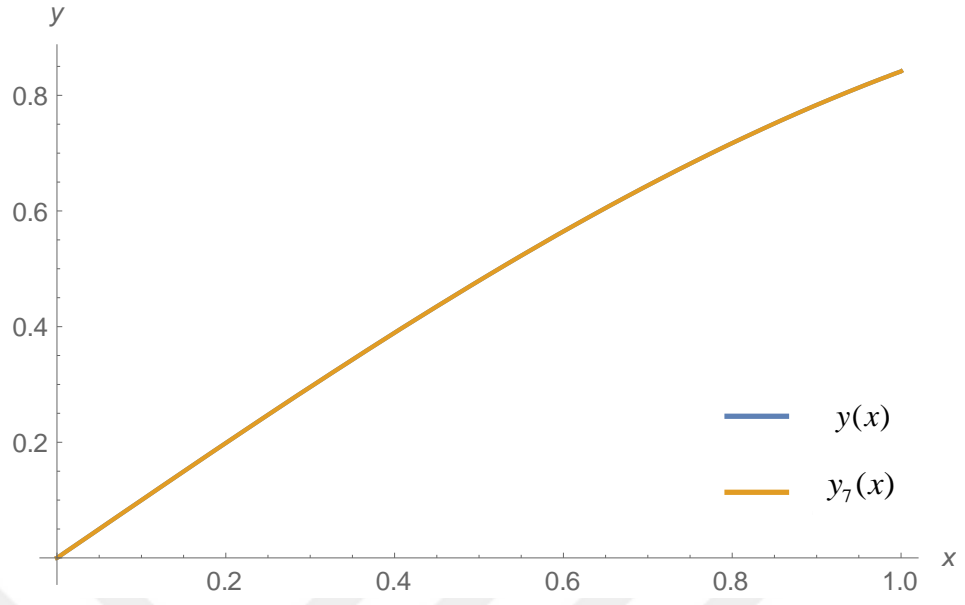
**Tablo 4. 5.** Örnek 4.5' in farklı  $N$  ve  $N$  değeri için nümerik karşılaştırmaları

$x_i$	Taylor Sıralama Metodu $N=7$ [31]	Taylor Sıralama Metodu $N=10$ [31]	Morgan-Voyce Metodu $N=7$	Morgan-Voyce Metodu $N=10$
0.2	$2.35 \times 10^{-7}$	$7.00 \times 10^{-10}$	$1.160878 \times 10^{-10}$	$3.419486 \times 10^{-14}$
0.4	$5.27 \times 10^{-7}$	$1.50 \times 10^{-9}$	$2.570925 \times 10^{-10}$	$8.065770 \times 10^{-14}$
0.6	$9.32 \times 10^{-7}$	$2.40 \times 10^{-9}$	$4.583513 \times 10^{-10}$	$2.567945 \times 10^{-13}$
0.8	$5.60 \times 10^{-7}$	$3.00 \times 10^{-9}$	$9.687931 \times 10^{-10}$	$5.357936 \times 10^{-13}$
1.0	$3.37 \times 10^{-5}$	$1.06 \times 10^{-7}$	$4.639874 \times 10^{-8}$	$3.186451 \times 10^{-12}$

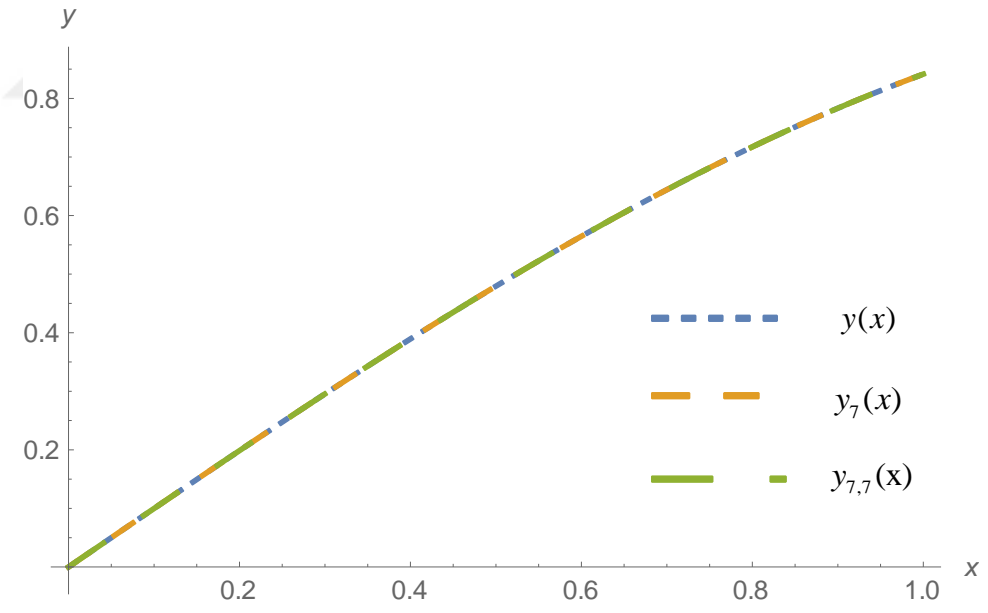
**Tablo 4. 6.** Örnek 4.5'in farklı  $N=7$  ve  $N=10$  değeri için zaman karşılaştırmaları

	$N=7$	$N=10$
Süre	4.90	7.28

Mathematica'da yazmış olduğumuz algoritmanın Örnek 4.5 için uygulanmasında elde edilen 4.90 saniyelik bir zaman diliminde diferansiyel denklemin  $N=7$  için 7 farklı yaklaşık çözüm fonksiyonunu hesaplayıp fonksiyonun tanım aralığındaki  $x$  değerleri için sonuçları gördüğümüz Tablo 4.4 vermektedir.



Şekil 4.8. Örnek 4.5'in grafiği



Şekil 4.9. Örnek 4.5'in iyileştirilmiş çözüm grafiği

**Örnek 4.6.** [32] Tam çözümü  $y(x) = 1 + e^{-x}$  fonksiyonu olan  $y(0) = 2, y'(0) = -1$  başlangıç şartları altında

$$y''(x) - e^{x+2}y'(x+1) - \int_0^1 y(t-1)dt = e^{-x}, \quad 0 \leq x, \quad t \leq 1$$

gecikmeli Fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu denklemin (3.1.1.1) formundaki

$f_0(x) = 0, f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, p_0(x) = 0, p_1(x) = -e^{x+2}, g(x) = e^{-x}$ , denklemin verilen katsayıları olup  $K_f(x) = 1$  çekirdek fonksiyonudur.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$N=5$  için çekirdek ve yardımcı fonksiyonun matris formu

$$K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{K}_f = \begin{bmatrix} K_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \overline{Q}_f = \begin{bmatrix} Q_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_f \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

şeklindedir. Sıralama noktaları  $N = 5$  için

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T - \left\{ \sum_{f=0}^f \overline{X K_f Q_f D(\lambda_f, \mu_f) R^T T^T} \right\}$$

sorunun temel matris denklemi tarafından tanımlanır.

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 2 \end{bmatrix}$$

Denklemin  $y(0) = 2, y'(0) = -1$  başlangıç şartı altında çözümü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse, doğrusal cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık çözümünü verir.

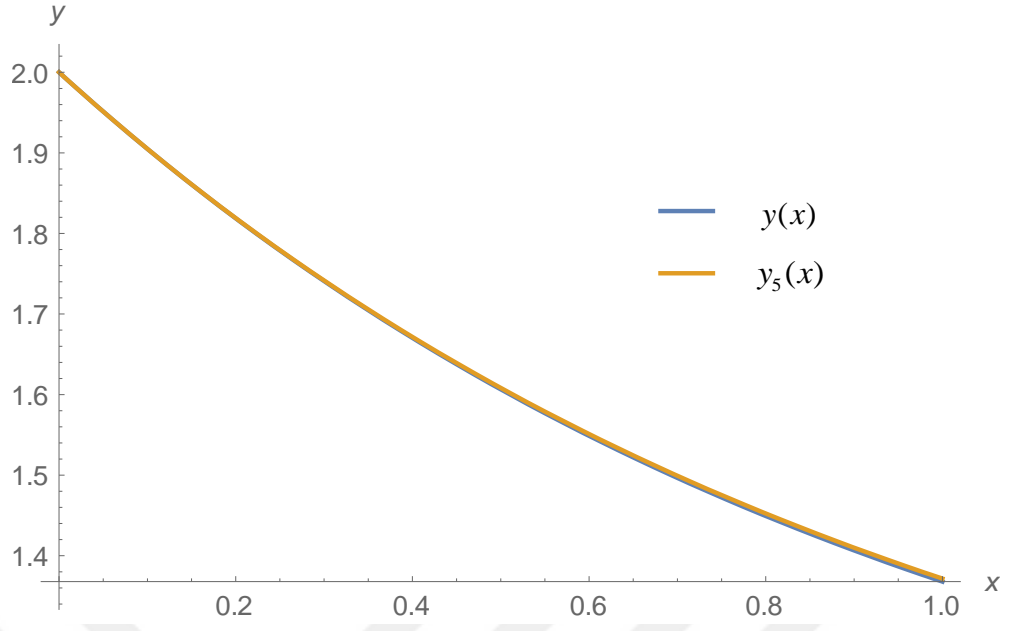
**Tablo 4. 7.** Örnek 4.6' nın  $N=5$  değeri için nümerik çözümleri

$i$	$x_i$	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
1	0.2	1.81873	1.81909	0.000363586
2	0.4	1.67032	1.67153	0.001217383
3	0.6	1.54881	1.55103	0.002220242
4	0.8	1.44932	1.45243	0.003108179
5	1.0	1.36787	1.37161	0.003731995

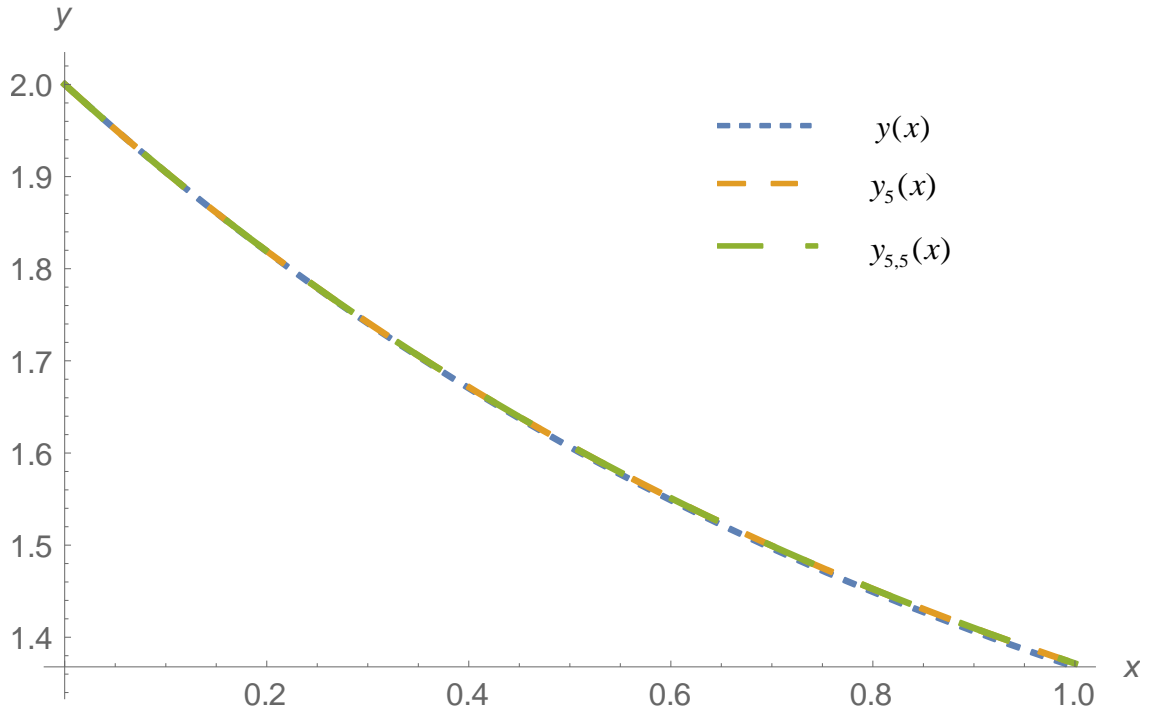
**Tablo 4. 8.** Örnek 4.6' nın  $N=5$  değeri için nümerik karşılaştırmaları

$x_i$	Laguerre Methot $N=5$ [32]	Morgan Voyce Methot $N=5$
0.2	$0.16719 \times 10^{-4}$	$3.63586 \times 10^{-4}$
0.4	$0.16719 \times 10^{-4}$	$1.217383 \times 10^{-3}$
0.6	$0.2035036 \times 10^{-2}$	$2.22042 \times 10^{-3}$
0.8	$0.291468 \times 10^{-2}$	$3.108179 \times 10^{-3}$
1.0	$0.3570559 \times 10^{-2}$	$3.731995 \times 10^{-3}$

Mathematica'da yazmış olduğumuz algoritmanın Örnek 4.6 için uygulanmasında elde edilen 7.30 saniyelik bir zaman diliminde diferansiyel denklemin  $N=5$  için 5 farklı yaklaşık çözüm fonksiyonunu hesaplayıp fonksiyonun tanım aralığındaki  $x$  değerleri için sonuçları gördüğümüz Tablo 4.7 vermektedir.



Şekil 4.10. Örnek 4.6'nın grafiği



Şekil 4.11. Örnek 4.6'nın iyileştirilmiş çözüm grafiği

**Örnek 4.7.** [18] Tam çözümü  $y(x) = x^2 + x$  fonksiyonu olan  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  başlangıç şartları altında

$$(x-1)y''(0.5x+1) = g(x) - \frac{1}{2} \int_{x/2}^{x^2+1} xt^2 y'(t+1) dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Denklemin verilen katsayıları

$$f_0(x) = 0, f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, p_2(x) = x - 1,$$

$$g(x) = -2 + 5x/4 - 5x^3/2 + x^4/16 - 191x^5/64 - 3x^7/2 - x^9/4,$$

çekirdek fonksiyonu  $K_v(x) = xt^2/2$  olup integralin alınan sınır değerleridir  $u_v(x) = x/2, v_v(x) = x^2 + x$  şeklindedir.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)},$$



$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{229}{128} \\ -\frac{507}{64} \end{bmatrix}$$

$N=2$  için çekirdek ve yardımcı fonksiyonun matris formu

$$K_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_v = [Q_v(x)],$$

$$\bar{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

Yukarıdaki matris tanımlamaları kullanılarak Örnek 4.6 daki denkleminin Morgan-Voyce polinomları göz önüne alınarak yazılmış çözümü için gerekli bilinmeyen katsayıları veren denklem sistemi

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T - \left. \sum_{v=0}^v \bar{X} \bar{K}_v \bar{Q}_v D(\lambda_v, \mu_v) \bar{R}^T \bar{T}^T \right\}$$

olmak üzere

$$WA = G$$

olarak verilir.

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, denklemin  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  başlangıç şartları altında çözümünü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşula karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$   $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık seri çözümündeki bilinmeyen Morgan-Voyce Polinomlarının katsayılarını verir.

Mathematica'da yazmış olduğumuz algoritmanın **Örnek 4.7** için uygulanmasında elde edilen 2.25 saniyelik bir zaman diliminde diferansiyel denklemin  $N=2$  için 2 farklı yaklaşık çözüm fonksiyonunu hesaplayıp fonksiyonun tanım aralığındaki tam çözümünü  $y(x) = x^2 + x$  vermiştir.

**Örnek 4.8.** [18] Tam çözümü  $y(x) = \ln^2(x+3)$  fonksiyonu olan  $y(0) = \ln^2(3), y'(0) = 2 \ln(3)/3$  başlangıç şartları altında

$$y''(x) + \ln(x+3)y'(x) + e^{-x}y(x/2) = g(x) - \int_0^x \frac{y(t)}{t+3} dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Denklemin verilen katsayıları

$$f_0(x) = 0, f_1(x) = \ln(x+3), f_2(x) = 1, p_0(x) = e^{-x},$$

$$g(x) = \frac{2(1 - \ln(x+3)) + 2(x+3)\ln^2(x+3)}{(x+3)^2} + e^{-x} \ln^2(x/2+3) + \frac{\ln^3(x+3) - \ln^3(3)}{3},$$

çekirdek fonksiyonu  $K_v(x) = -1/(t+3)$  olup integralin alınan sınır değerleri  $u_v(x) = 0, v_v(x) = x$  şeklindedir.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 21 & 8 & 1 & 0 \\ 6 & 35 & 56 & 36 & 10 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, G = \begin{bmatrix} 1.98967 \\ 1.95048 \\ 1.9248 \\ 1.91153 \\ 1.90964 \\ 1.91813 \\ 1.93605 \end{bmatrix}$$

$N = 6$  için çekirdek ve yardımcı fonksiyonun matris formu

$$K_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27} & \frac{1}{81} & -\frac{1}{243} & \frac{1}{729} & -\frac{1}{2187} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_v = [Q_v(x)]$$

$$\overline{K_v} = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \overline{Q_v} = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

şeklindedir. Yukarıdaki matris tanımlamaları kullanılarak Örnek 4.8 deki denklemin Morgan-Voyce polinomları göz önüne alınarak yazılmış çözümü için gerekli bilinmeyen katsayıları veren denklem sistemi

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T - \left\{ \sum_{v=0}^v \overline{X K_v Q_v D(\lambda_v, \mu_v) R^T T^T} \right\}$$

olmak üzere

$$WA = G$$

şeklindedir.

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1.20695 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 0.732408 \end{bmatrix}$$

olup, denklemin  $y(0) = \ln^2(3)$ ,  $y'(0) = 2\ln(3)/3$  başlangıç şartları altında çözümünü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşula karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$   $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  cebirsel sistem elde edilir. Bu sistem, problemin yaklaşık seri çözümündeki bilinmeyen Morgan-Voyce Polinomlarının katsayılarını verir. Bu örneğe karşılık gelen yaklaşık seri çözümleri farklı  $N$  değerleri için bulunmuş olup aşağıda tablo ve şekillerle gösterilmiştir.

**Tablo 4. 9.** Örnek 4.8' in  $N = 6$  değeri için nümerik çözümleri

$i$	$x_i$	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata
1	0.16666	1.32867	1.32867	$1.54076 \times 10^{-8}$
2	0.33333	1.44955	1.44955	$3.3279 \times 10^{-8}$
3	0.5	1.56942	1.56942	$4.76395 \times 10^{-8}$
4	0.66666	1.68814	1.68814	$4.87567 \times 10^{-8}$
5	0.83333	1.80562	1.80562	$1.15836 \times 10^{-7}$
6	1	1.92181	1.92181	$1.68287 \times 10^{-6}$

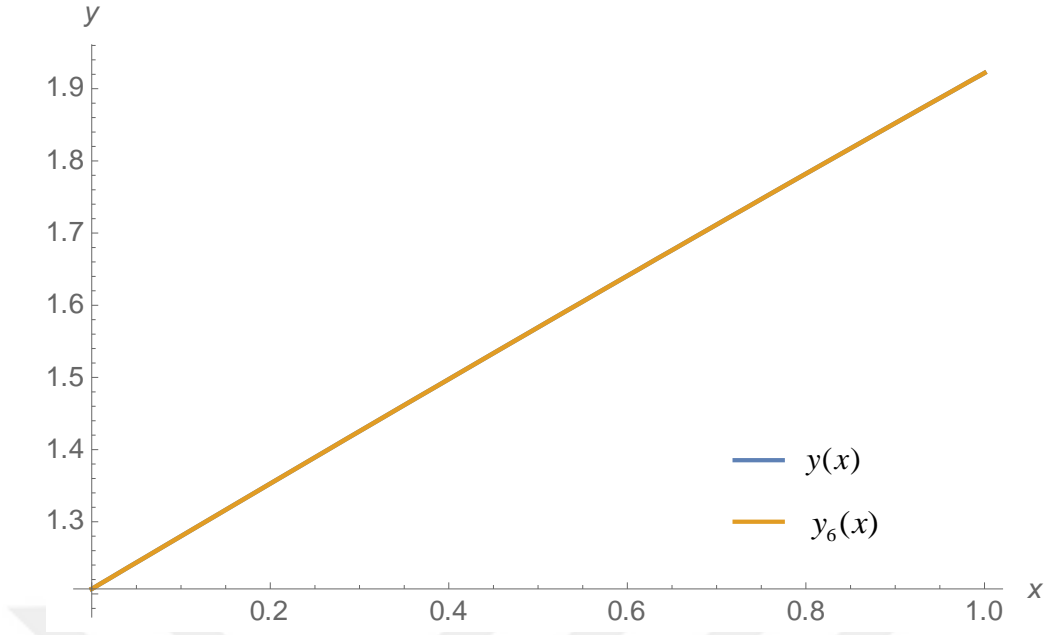
**Tablo 4. 10.** Örnek 4.8' in farklı  $N$  değerleri için literatürdeki nümerik karşılaştırmaları

$x_i$	Morgan-Voyce Metot $N = 6$	Morgan-Voyce Metot $N = 7$	Borhanifar and Sadri [19] $N = 7$	Dickson Polinom Metot [18] $N = 6$
0.2	$2.03937 \times 10^{-8}$	$2.10756 \times 10^{-9}$	$1.09 \times 10^{-8}$	$2.04 \times 10^{-8}$
0.4	$3.78686 \times 10^{-8}$	$3.9524 \times 10^{-9}$	$2.61 \times 10^{-8}$	$3.79 \times 10^{-8}$
0.6	$5.38006 \times 10^{-8}$	$5.53714 \times 10^{-9}$	$3.32 \times 10^{-8}$	$5.38 \times 10^{-8}$
0.8	$6.72077 \times 10^{-8}$	$1.17059 \times 10^{-8}$	$3.28 \times 10^{-8}$	$6.72 \times 10^{-8}$
1.0	$1.68287 \times 10^{-6}$	$1.41678 \times 10^{-7}$	$3.62 \times 10^{-8}$	$1.68 \times 10^{-6}$

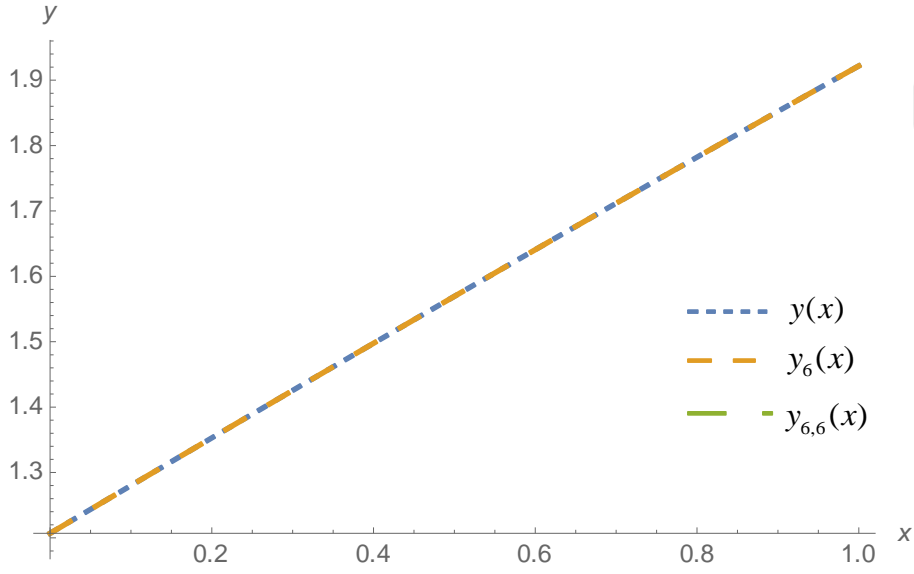
**Tablo 4. 11.** Örnek 4.8 in farklı  $N$  değerleri için literatürdeki zaman karşılaştırmaları

	Morgan-Voyce Metot $N = 6$	Morgan-Voyce Metot $N = 7$	Dickson Polinom Metot [18] $N = 7$	Borhanifar and Sadri [19] $N = 7$
Süre	1.02	0.85	2.152	2.917

Mathematica'da yazmış olduğumuz algoritmanın **Örnek 4.8** için uygulanmasında elde edilen 1.02 saniyelik bir zaman diliminde diferansiyel denklemin  $N = 6$  için 6 farklı yaklaşık çözüm fonksiyonunu hesaplayıp fonksiyonun tanım aralığındaki  $x$  değerleri için sonuçları gördüğümüz Tablo 4.10 vermektedir.



Şekil 4.12. Örnek 4.8'in grafiği



Şekil 4.13. Örnek 4.8'in iyileştirilmiş çözüm grafiği

**Örnek 4.9.** [33] Tam çözümü  $y(x) = x^2 + x - 1$  fonksiyonu olan  $y(0) = -1, y(1) = 3$

başlangıç şartları altında

$$(x^2 + 1)y''(0.2x) + xy'(x-1) - (x-1)y(x+2) + y(x) = g(x) \\ + 2 \int_0^1 x y'(t) dt - \int_0^{(\frac{1}{2})+1} (xt^2 + tx^2)y''(t) dt ,$$

$0 \leq x, t \leq 1$ , Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu denklemin (3.1.1.1) formundaki

$$f_0(x) = 1, p_0(x) = -(x-1), p_1(x) = x, p_2(x) = (x^2 + 1), g(x) = -\frac{x^4}{3} - \frac{5x^3}{2} - x^2 - \frac{14x}{3} + 6$$

denklemin verilen katsayıları olup  $K_f(x) = 2x, K_v(x) = xt^2 + tx^2$  çekirdek fonksiyonlarıdır.

Temel matris denklemindeki matris formları şu şekildedir :

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T^T} = \begin{bmatrix} T^T \\ T^T \\ \vdots \\ T^T \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}$$

$N = 2$  için çekirdek ve yardımcı fonksiyonun matris formu

$$K_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_v = [Q_v(x)],$$

$$\overline{K}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \overline{Q}_v = \begin{bmatrix} Q_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

şeklindedir. Yukarıdaki matris tanımlamaları kullanılarak Örnek 4.9. daki denklemin Morgan-Voyce polinomları göz önüne alınarak yazılmış çözümü için gerekli bilinmeyen katsayıları veren denklem sistemi

$$W = [w_{ij}] = \left[ \sum_{k=0}^m F_k X (T^T)^{(k)} + \sum_{j=0}^J P_j X D(a, \beta) (T^T)^{(j)} \right] R^T - \left\{ \sum_{f=0}^f X K_f Q_f D(\lambda_f, \mu_f) R^T T^T - \sum_{v=0}^v X K_v Q_v D(\lambda_v, \mu_v) R^T T^T \right\}$$

olmak üzere

$$WA = G$$

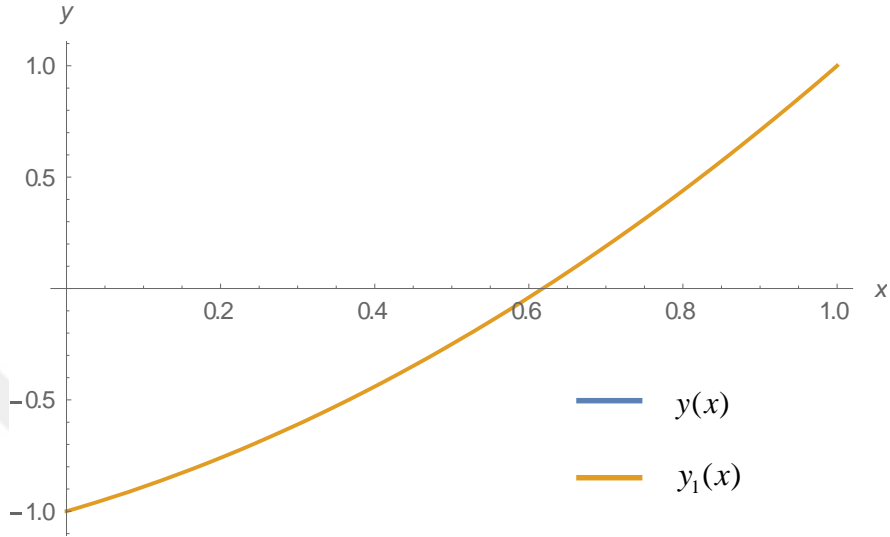
şeklindedir.

$$U_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Denklemin  $y(0) = -1$ ,  $y(1) = 3$  başlangıç şartı altında çözümü elde etmek için,  $WA = G$  matrisinin  $m$ . satırının silinerek yerine, koşullara karşı gelen  $U_i A = \gamma_i$  deki  $m$ . satırının konulmasıyla  $\tilde{W}A = \tilde{G}$  veya  $[\tilde{W}; \tilde{G}]$  'da ikame edilirse, doğrusal cebirsel sistem elde edilir.



Mathematica’da yazmış olduğumuz algoritmanın **Örnek 4.9** için uygulanmasında elde edilen 0.062 saniyelik bir zaman diliminde diferansiyel denklemin  $N=2$  için 2 farklı yaklaşık çözüm fonksiyonunu hesaplayıp fonksiyonun tanım aralığındaki tam çözümünü  $y(x) = x^2 + x - 1$  vermiştir.



**Şekil 4.14.** Örnek 4.9’in grafiği

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde çeşitli fonksiyonel Fredholm- Volterra integro diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmak için Morgan-Voyce Polinomlarına dayalı, matrislerin kullanılarak geliştirildiği Morgan-Voyce matris metodu önerilmiştir. Morgan-Voyce matris metodu bazı örneklerde problemin tam çözümüne ulaştırırken, bazı örneklerde problemin hassas yaklaşık çözümlerini elde etmeye imkan vermiştir. Bazı örneklerde yaklaşım polinomunun iyileştirilmesi için rezidü hata fonksiyonu kullanılmış ve tam çözüme yakınsayan daha hassas iyileştirilmiş çözümler bulunmuştur. Referans alınan örneklerdeki hata miktarları ile önerdiğimiz Morgan-Voyce matris metodunun kullanılmasıyla elde edilen hata miktarları karşılaştırıldığında metodumuzun başarısı tablolardan görülmektedir.

Morgan-Voyce yönteminin önemli bir avantajı; bilgisayar programları kullanılarak yaklaşık çözümler daha kolay elde ederiz. Daha kısa hesaplama zaman ve daha düşük işlem sayısı iyileştirme ile sonuçlanır. Örneklerin geçerliliği ve uygulanabilirliğini göstermek için çalışmamızda örnekler verilmiştir. Uyguladığımız teknik Wolfram Mathematica programı kullanarak bilgisayarda gerçekleştirilmiştir. Açıklayıcı örneklerle bu yöntemin uygulanmasını göstermek için tatmin edici sonuçlar elde edilmiştir. Önerilen yaklaşımlar bu yöntemi çok çekici hale getirir. Nümerik örneklerde elde edilen değerler kullanılan yöntemin etkinliğini göstermiş olur.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Rahman, M. Integral Equations and their Applications, WIT Press, USA, 2007, 385s.
- [2] Swamy, M. N. S. Properties of the Polynomial Defined by Morgan-Voyce. The Fibonacci Quarterly. 1966, 4(1), 73-81.
- [3] Swamy, M. N. S., Bhattacharyya, B. B. A Study of Recurrent Ladders Using the Polynomials Defined by Morgan-Voyce. IEEE Transactions on Circuit Theory. 1967, 14(3), 260-264.
- [4] Swamy, M. N. S. Further, Properties of Morgan-Voyce Polynomials. Fibonacci Quarterly. 1968, 6(2), 167-176.
- [5] Andr'e-Jeannin, R. A Generalization of Morgan-Voyce Polynomials. Fibonacci Quarterly. 1994, 32(3), 228-231.
- [6] İlhan, Ö. Morgan-Voyce polynomial solutions of linear differential and integro-differential equations. Muğla Üniversitesi, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2012, 123 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [7] İlhan, Ö., Şahin, N. On Morgan-Voyce Polynomials Approximation For Linear Differential Equations. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science. 2014, Article ID 20140048, 10 s.
- [8] Yalçınbaş, S., Sezer, M. The approximate solution of high-order linear Volterra-Fredholm integrodifferential equations in terms of Taylor polynomials. Appl. Math Comput. 2000, 112, 291-308.
- [9] Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu, A. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. J Comput Appl Math. 2007, 200, 217-225.
- [10] Kurt, N., Sezer, M. Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients. J Franklin Inst. 2008, 345, 839-850.
- [11] Sezer, M., Gülsu, M. A new polynomial approach for solving difference and Fredholm integrodifference equation with mixed argument. Appl Math Comput. 2005, 171, 332-344.
- [12] Sezer, M. A method for the approximate solution of the second order linear differential equations in terms of Taylor polynomials. Int J Math Educ Sci Technol. 1996, 27, 821-834.
- [13] Shahmorad, S. Numerical solution of the general form linear Fredholm-Volterra integro differential equations by the Tau method with an error estimation. Applied Mathematics and Computation. 2005, 167, 1418-1429.
- [14] Arqub, O. A. Al-Smadi, M., Shawagfeh, N. Solving Fredholm integro-differential equations using reproducing kernel Hilbert space method. Applied Mathematics and Computation. 2013, 219, 8938-8948.
- [15] Momani, S., Arqub, O. A., Hayat, T., Al-Sulami, H. A computational method for solving periodic boundary value problems for integro-differential equations of Fredholm-Volterra type. Applied Mathematics and Computation. 2014, 240, 229-239.
- [16] Yüzbaşı, Ş. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. Applied Mathematics and Computation. 2014, 232, 1183-1199.
- [17] Dordevic, G. B. Polynomials related to Morgan-Voyce polynomials, Fibonacci Quarterly 1999, 37(1), 61-66.

- [18] Sezer, M., İlhan, Ö., Kürkçü, Ö.K., Aslan, E. A Numerical Approach Technique for Solving Generalized Delay Integro-Differential Equations with Functional Bounds by Means of Dickson Polynomials. *International Journal of Computational Methods*. 2018, 15(1), 24.
- [19] Borhanifar, A., Sadri, K. A new operational approach for numerical solution of generalized functional integro-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 2015, 279,80-96.
- [20] Rashed, M. T. Numerical solution of functional differential, integral and integro differential equations, *Appl. Math. Comput.* 2004, 156, 485–492.
- [21] Türkyılmaz, B., Gürbüz, B., Sezer, M. Morgan-Voyce Polynomial Approach for Solution of High-Order Linear Differential-Difference Equations with Residual Error Estimation. *Düzce University Journal of Science & Technology*. 2016, 4, 252-263.
- [22] İlhan, Ö. An improved Morgan-Voyce collocation method for numerical solution of multi-pantograph equations. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2017, 4, 248-260.
- [23] İlhan, Ö. An improved Morgan-Voyce collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Jouarnal of Scientific and Engineering Research*. 2017, 4(10), 320-332.
- [24] Sezer, M., Tarakçı, M., Özel, M. A numerical approach for a nonhomogeneous differential equation with variable delays. *Mathematical Sciences*. 2018, 12, 145-155.
- [25] Sezer, M., Akyüz, A. A Chebyshev collocation method for the solution linear integro differential equations. *J. Comput. Math.* 1999, 72,491-507.
- [26] Maleknejad, K., Mahmoudi. Y. Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2003, 145, 641-653.
- [27] Yüzbaşı, Ş., Gök, E., Sezer, M. Residual correction of the Hermite polynomial solutions of the generalized pantograph equations. *New Trends in athematical Sciences*. 2015, 2, 118-125.
- [28] Şahin, Ş., Yüzbaşı, N., Sezer, M. Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomial bases. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, 61(10), 3079-3096.
- [29] Sezer, M., Yüzbaşı, Ş., Kemancı, B. Numerical solutions of integro-differential equations and application of a population model with an improved Legendre method. *Applied Mathematical Modelling*. 2013, 37(4), 2086–2101.
- [30] Gürbüz, B., Sezer, M., Güler, C. Laguerre collocation method for solving fredholm integro-differential equations with functional arguments. *Journal of Applied Mathematics*. 2014, 2014, 12.
- [31] Gülsu, M., Sezer, M. A collocation approach for the numerical solution of certain linear retarded and advanced integrodifferential equations with linear functional arguments. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2011, 27, 447–459.
- [32] Sezer, M., Balcı, M. A. Hybrid euler-Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro differential difference equation. *Applied Mathematics and Comptation*. 2016, 273, 33-41.
- [33] Aslan, E., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. A numerical approach with erro to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials. *Applied Mathematics and Comptation*. 2016, 276, 324-339.
- [34] Konuralp, A., Aktaş, N. Solutions of First Order Linear Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations by Morgan-Voyce Polynomials. 2nd International Students Science Congress, İzmir Katip Celebi University, UDEF. 4-5 Mayıs, 2018, İzmir (Bildiri Özetleri Kitabı, 124 s.).

- [35] Konuralp, A., Aktaş, N. Solutions for Higher Order Linear Delay Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations Using Morgan-Voyce Polynomials. II. International University Industry Cooperation, R&D And Innovation Congress, Manisa Celal Bayar Üniversitesi Üniversite-Sanayi İşbirliği Teknoloji Uygulama ve Araştırma Merkezi, 14-15 Kasım, 2018, Manisa.



## 7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nilüfer YOLTAY  
Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1993  
Medeni Hali : Evli  
Yabancı Dili : İngilizce  
E-posta : niluferyoltay@gmail.com

### Eğitim Durumu

Lise : Hayrettin Duran Lisesi, 2007  
Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011  
Lisans : Anadolu Üniversitesi, İşletme Bölümü, 2012  
Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016.

### Mesleki Deneyim

Zihni Üstün Ortaokulu	2015
Ticaret Borsası Ortaokulu	2016
Mustafa Uygur Ortaokulu	2016
ZEDEM Özel Zeka Değirmeni Eğitim Kurumları	2017
Özel Deneyim Kişisel Gelişim Kursu	2018
Özel Rota Eğitim Kurumları	2018-2019