

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

JİMBO-MİWA DENKLEMİNE SAYISAL YAKLAŞIMLAR

Gülay FİDAN

**Danışman
Prof. Dr. Necdet BİLDİK**



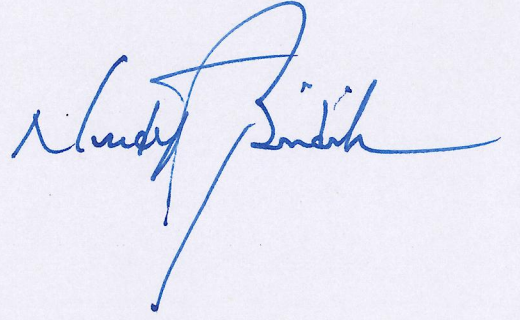
MANİSA-2019

TEZ ONAYI

Gülay FİDAN tarafından hazırlanan "Jimbo-Miwa Denkleminin Sayısal Yaklaşımlar" adlı tez çalışması 14/11/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Necdet Bildik
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



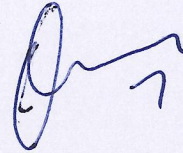
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Ali KONURALP
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIL
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi



TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Gülay FİDAN



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TABLO DİZİNİ	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET	VI
ABSTRACT.....	VII
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Planı.....	4
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Diferansiyel Denklemlerin Tanımı ve Sınıflandırılması	5
3.YÖNTEMLER.....	9
3.1. Lagrange Çarpan Metodu	9
3.1.1. Lagrange Metodunun Temel Fikri:.....	9
3.2. Parametre Genişletme Metodu	11
3.2.1. Parametre Genişletme Metodunun Temel Fikri:	11
3.3. Legendre Dalgacık Metodu	13
4. NÜMERİK METOTLARIN JİMBO-MİWA DENKLEMİNE UYGULAMALARI	16
4.1. Lagrange Metodu	16
4.2. Parametre Genişletme Metodu	25
4.3. Legendre Dalgacık Metodu	32
5. SONUÇ	38
KAYNAKÇALAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
HPM	Homotopi Pertürbasyon Metodu
JM	Jimbo-Miwa Denklemi
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
KDV	Korteweg ve De Vries denklemi
KP	Kadomtsev-Petviashvili denklemi
PEM	Parametre Genişletme Metodu
VİM	Varyasyonel İterasyon Metodu



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

- Şekil 4.1.1.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ ve $0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere, (4.1.15) denkleminin elde edilen çözümün ve analitik çözümün grafiği22
- Şekil 4.1.2.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ve $t = 1.8$ değeri için (4.1.15) denkleminin elde edilen çözümünün grafiği22
- Şekil 4.1.3.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ve $t = 1.8$ değeri için $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonunun grafiği.....23
- Şekil 4.1.4.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ve $t = 1.8$ değeri için $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonu ve (4.1.15) çözümünün grafiği.....23
- Şekil 4.1.5.** (4.2.3) ile ifade edilen ikinci mertebeden J-M denkleminin Lagrange çarpan metodu uygulandığında, $\lambda(\xi, s) = \frac{1}{4} e^{-2(s-\xi)} (e^{4(s-\xi)} - 1)$ ve ilk yaklaşım fonksiyonu; $v_0 = 2$ olarak bulunur. Üç iterasyon sonucunda bulunan yaklaşık çözümünde ve $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonunda, $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0, 0 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1$ ve $t = 2.7$ değerleri için elde edilen üç boyutlu grafik.....24
- Şekil 4.2.1.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ ve $0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere, (4.2.20) denkleminin çözümünün ve Jimbo-Miwa denkleminin tam çözümü olan $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonunun grafiği.....30
- Şekil 4.2.2.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0, t = 3, 0.5 \leq x \leq 1$ ve $0.5 \leq y \leq 1$ için (4.2.20) denkleminin çözümünün üç boyutlu grafiği.....30
- Şekil 4.2.3.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0, t = 3, 0.5 \leq x \leq 1$ ve $0.5 \leq y \leq 1$ için (4.2.20) çözümü ile $2 + 2 \tanh(x + 3y - 3)$ çözümünün üç boyutlu grafiği31
- Şekil 4.3.2.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0, t = 2.5, 0.5 \leq y \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 0.6$ değerleri için (4.3.4) çözümünün üç boyutlu grafiği36
- Şekil 4.3.3.** $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0, t = 2.5, 0.5 \leq y \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 0.6$ için (4.3.4) çözümü ile $2 + 2 \tanh(x + 3y - 2.5)$ çözümünün üç boyutlu grafiği36

TABLO DİZİNİ

Sayfa

Tablo 4.1.1. (4.1.15) denkleminin çözümünün $0 \leq \xi \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen sayısal sonuçların kıyaslanması:	24
Tablo 4.2.1. $\xi = x + 3y + 2z - t$ (4.2.21) denkleminin $0 \leq \xi \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen sayısal sonuçların kıyaslanması:	31
Tablo 4.3.1. $\xi = x + 3y + 2z - t$ (4.3.4) denkleminin $0 \leq \xi \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen sayısal sonuçların kıyaslanması:	37



TEŞEKKÜR

Öncelikle kendisi ile çalışmaktan gurur duyduğum, bu çalışmanın hazırlanmasında düşünce ve önerilerinden yararlandığım, rehberliğini ve ilgisini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle yoluma ışık tutan, yüreği kocaman, sevgi dolu, hayata karşı çınar ağacı gibi sağlam ve dik duruşuyla örnek aldığım, yılmamayı ve mücadele etmeyi ondan öğrendiğim, kendisini ve ailesini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili danışman hocam Sayın Prof. Dr. Necdet BİLDİK' e şükranlarımı ve minnetlerimi sunarım. Çalışmam boyunca desteğini esirgemeyen ve ne kadar yoğun olsa bile beni geri çevirmeyen, bilgi ve tecrübesi ile bana yol gösteren sevgili hocam Arş. Gör. Dr. Sinan DENİZ' e ve yüksek lisans eğitimim süresince destek ve emeğiyle yardımlarını esirgemeyip, bana yeniden başarabileceğim konusunda cesaret katan sevgili arkadaşım Arş. Gör. Gökçe ÖZALTUN' a yürekten kutlarım. Ayrıca, beni bu günlere bin bir emekle getirerek, hayatım boyunca maddi ve manevi olarak destekleyen, gücünden güç aldığım süper kahramanım babam Osman Nuri Fidan'a, her koşulda yanımda olan, sevgisini ne yaparsam yapayım hiç esirgemeyen sevgili annem Güldane FİDAN' a ve o hayatıma girdikten sonra herkesin bir kardeşi olmasını istediğim değerli kardeşim Yunus Hikmet Fidan' a çok teşekkür ederim.

Gülay FİDAN
MANİSA, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Jimbo-Miwa Denklemine Sayısal Yaklaşımlar

Gülay FİDAN

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Necdet BİLDİK

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan (3+1) boyutlu dalgaları tanımlamak için kullanılan, Jimbo-Miwa denklemine üç yöntem uygulanarak en iyi sayısal yaklaşım metotları araştırılmıştır. Bu metotlardan ilki Lagrange çarpan metodudur. Lagrange çarpan metodu ile lineer olmayan Jimbo-Miwa denklemi lineer bir probleme dönüştürülerek yaklaşık ve analitik çözümler elde edilmiştir. İkinci yöntem parametre genişletme yöntemidir. Bu yöntem lineer olmayan diferansiyel denklemleri analiz etmek için kuvvet serilerindeki bağımlı değişkenlerin küçük bir parametre ile genişletilmesi tanımlanarak art arda çözülebilen lineer diferansiyel denklemlerin toplanmasıyla oluşturulmuştur. Son olarak uygulanan Legendre dalgacık metodudur. Bu metot ile başlangıç koşulları altında ele alınan diferansiyel denklem, denklem sistemine dönüştürülmüş ve bu denklem sisteminden elde edilen katsayılar ile fonksiyon yaklaşımı yapılarak sayısal çözüm bulunmuştur.

Bunun yanında Jimbo-Miwa denklemine uygulanan metotların sonuçları diğer metotlarla kıyaslanarak en iyi sayısal çözümü veren metot tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, Lagrange çarpan metodu, Parametre genişletme metodu, Legendre dalgacık metodu

2019, 57 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Numerical Approaches to Jimbo-Miwa Equation

Gülay FİDAN

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Necdet BİLDİK

In this thesis study, the best numerical approximation methods are investigated by applying three methods to Jimbo-Miwa equation which is used to define nonlinear (3+1) dimensional waves. The first of these methods is the Lagrange multiplier method. By Lagrange multiplier method, non-linear Jimbo-Miwa equation is transformed into a linear problem. Finally approximate and analytical solutions are obtained. The second method is the Parameter expansion method. In order to analyze non-linear differential equations with this method, the extension of the dependable variables in the power series with a small parameter is defined and results in the addition of linear differential equations which can be formed consecutively. Finally, the third derivation matrix was used with method is Legendre wavelet method. The differential equation considered under initial conditions is converted to the system of equations and the numerical solution is found by using the functional approach with the coefficients obtained from this system of equation.

Besides that, the results of the methods applied to Jimbo-Miwa equation were compared with the other methods and the best numerical solution was discussed.

Keywords: (3+1) dimensional Jimbo-Miwa equation, Lagrange multiplier method, Parameter expansion method, Legendre wavelet method

2019, 57 pages

1. GİRİŞ

Doğadaki birçok fiziksel problem, lineer olmayan diferansiyel denklemler sayesinde modellenebilmiştir. Bu yüzden diferansiyel denklemler, uygulamalı matematiğin önemli alanlarından biri haline gelerek tarih boyunca birçok fiziksel problemin çözümünde kullanılan önemli bir araç olmuştur.

18. yüzyılın sonlarında kısmi diferansiyel denklemler kapsamlı olarak çalışılmaya başlanmıştır. Analitik yollarla çözülemeyen pek çok diferansiyel denklemin ortaya çıkması, sayısal yaklaşım metotlarının araştırılmasına sebep olmuştur. 1900'lerden sonra oldukça önemli sayısal integral alma metotları bulunmuştur. Fakat hesapların elle veya dönemin hesaplama araçlarıyla yapılması uygulamaları son derece kısıtlamıştır. Son yıllarda bilgisayarların gelişmesi ile sayısal metotların ve uygulama alanlarının çeşitliliğini arttırdığı gözlemlenmiştir. Bilgisayarlar, lineer olmayan denklemlerin keşfedilmemiş uygulamalarda önemli olan yeni anlayışların gelişmesini sağlamıştır [1].

Günümüzde de hala uygulamalı bilimlerde popülerliği devam etmekte olan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik ve yarı analitik çözümlerine ulaşmak için literatürde; tanh-coth metodu [2], F-genişleme metodu [3], genişletilmiş hiperbolik fonksiyon metodu [4], homojen denge yöntemi [5], homotopi pertürbasyon metodu [6,7], G'/G metodu [8,9], darboux dönüşüm metodu [10], jakobi eliptik fonksiyon metodu [11], ters saçılma metodu [12] gibi birçok metot kullanılmış olsa da lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşmak oldukça zordur.

(3+1) boyutlu dalgaları tanımlamak için kullanılan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan Jimbo-Miwa denklemi (J-M) [13], integrallenebilirlik testlerinden hiçbirini geçmeyen, KP bütünleşik sistemler hiyerarşisindeki ikinci denklem olup, Konopelchenko Dubrovsky denklemleri sınıfındadır. Genel olarak bu denklem $u = u(x, y, z, t)$ çözüm olmak üzere;

$$u_{xxxy} + 3u_{xy}u_x + 3u_yu_{xx} + 2u_{yt} - 3u_{xz} = 0 \quad (1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Bu denklemler lineer olmayan örgülerle bağlantılı olarak fizikte ortaya çıkmıştır. Literatürde son 20 yılda fiziksel olarak önemli olan JM denkleminin kesin veya sayısal çözümlerini oluşturmak için yapılan çalışmalar aşağıda kronolojik sıra ile verilmiştir:

Hong (2000), Bilgisayarlı sembolik hesaplama yaparak geleneksel entegrasyon testlerinden hiçbirisini geçmeyen (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa (J-M) denkleminin yeni analitik çözümlerini sunmuştur [14]. Senthivelan M. (2001), homojen denge yöntemini kullanarak fiziksel, doğrusal olmayan önemli evrimsel denklemlerin (2+1) ve (3+1) boyutlarında seyahat dalgası indirgemelerini incelemiştir [15]. Tang X.Y. ve Liang Z.F. (2006), doğrusal değişken ayırma yaklaşımıyla J-M denklemine iki tip değişken ayırma yaklaşımı sunmuştur [16]. Öziş T. ve Aslan İ. (2008), üstel fonksiyon yöntemini sembolik hesaplama aracı olan mathematicayı kullanarak J-M denklemine uygulamış, daha genel biçimde kesin ve açık soliter çözümler vermişlerdir [17]. Cao (2010), Xu' nun kararlı aralık yöntemini ve kararlı aralık yönteminin logaritmik genellemesini kullanarak bu denklemler için birden fazla parametre fonksiyonlu iki çözüm ailesi elde etmiştir [18]. Abazari R. (2012), G'/G açılım metodunu değiştirmiş ve J-M denklemine uygulayarak kesin çözümler bulmuştur [19]. Lü Z. ve ark. (2013), Bäcklund dönüşümü ve Wronskian üzerinden Jimbo-Miwa denkleminin kesin çözümlerini sağlayan doğrusal bir kısmi diferansiyel denklem sistemi elde etmişlerdir [20]. Kadkhoda (2015), Kudryashov yöntemini doğrusal olmayan evrim denklemlerinin genel çözümlerini elde etmek için kullanmıştır [21]. Singh M. (2015), Lineer olmayan evrim denklemleri için kesin soliter dalga çözümleri önermiş ve bunu J-M denklemine uygulamıştır. Elde edilen çözümler yüksek boyutlu doğrusal olmayan denklemlerin çözüm yapısını zenginleştirmiştir [22]. Hızel E., homotopi pertürbasyon yöntemini J-M denklemine uygulamış ve homojen denge metodu ile elde edilen kesin çözümleri analiz etmiştir [23].

Jimbo-Miwa denkleminin karakterizasyonu ve çözümlerinin elde edilmesi için yukarıda da belirtildiği gibi geçmişte birçok çalışma yapılmış olsa da hala çözümlerinin elde edilmesine ilişkin farklı yaklaşımlar ortaya çıkmaktadır. Plazma fiziğinde, akışkanlar mekaniğinde, özel olarak katı hal fiziğinde olduğu gibi birçok mühendislik alanında da bu tür denklemlerin sayısal veya tam çözümlerini elde etmek çok önemlidir. Kesin çözümler elde etmek ise, her zaman mümkün olmayabilir. Bu

yüzden Jimbo-Miwa denkleminin sayısal çözümlerinin elde edilmesi, gelecekte yapılacak olan bilimsel çalışmalar için de önem taşımaktadır.

Bu tezde ele alınan, ilk yöntem Lagrange çarpan metodudur. Bu metot uygulanmadan önce, (3+1) boyutlu Jimbo-Miwa denklemi, üstel dönüşüm yöntemi uygulanarak adi diferansiyel denklem haline getirilmiştir. Adi formdaki J-M denkleminin yaklaşık ve analitik çözümlerini elde etmek için varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmıştır. Lineer olmayan bir problemi lineer probleme dönüştürerek Lagrange çarpan metodunun gücü diğer metotlarla kıyaslanarak tartışılmıştır. Literatürde bu metot ile ilgili yapılan bazı çalışmalar referans [24-40] da gösterilmiştir.

İkinci yöntem ise parametre genişletme yöntemidir. Literatürde [41-51] de belirtildiği şekilde uygulamaları olan bu metot, lineer olmayan diferansiyel denklemleri analiz etmek için kuvvet serilerindeki bağımlı değişkenlerin küçük bir parametre genişletilmesiyle tanımlanarak, art arda çözülebilen lineer diferansiyel denklemlerin toplanmasıyla oluşmaktadır. Parametre genişletme metodu ilk kez He tarafından önerilmiştir. Bu metot doğrudan J-M denkleme uygulanarak lineer olmayan fiziksel olarak ilginç olan JM diferansiyel denklemin çözümü araştırılmıştır.

Son olarak ise J-M denkleme Legendre Dalgacık metodu uygulanmıştır. Bu yöntemde türevleme matrisi kullanılarak başlangıç koşulları altında ele alınan diferansiyel denklem, denklem sistemine dönüştürülmüştür. Denklem sisteminden elde edilen katsayılarla fonksiyon yaklaşımı yapılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. [52-58] olarak belirtilen referanslarda farklı tipteki diferansiyel denklemlere bu metodun uygulanışı açıkça görülebilir.

Bu metotlarla elde edilen sonuçlar, grafikler ile desteklenmiş ve özel olarak ele alınan J-M denkleminin çözümleri literatürdeki diğer çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılması yapılarak mutlak hata tabloları oluşturulmuştur.

1.1. Tezin Planı

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümü giriştir. Bu bölümde, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin geçmişten günümüze kadar önemini kaybetmeden bilime ışık tutmuş olan literatür çalışmaları öncelikli olarak verilmiştir. Daha sonra özel olarak ele alınan Jimbo-Miwa denklemi tanıtılarak sonraki bölümlerde uygulanacak yöntemler tanıtılmıştır. Bu yöntemlerin geçmişte yapılan bazı akademik çalışmaları da burada belirtilmiştir.

İkinci bölümde ise, diferansiyel denklemler ile ilgili bazı temel tanımlar verilmiş ve bazı özel kısmi diferansiyel denklem örnekleri sunulmuştur. Üstel dönüşüm metodu ile (1.1) de ifade edilen, lineer olmayan kısmi formdaki Jimbo-Miwa denkleminin adi diferansiyel denkleme dönüşümü bu kısımda yer almıştır.

Üçüncü bölümde ise, kullanılan Lagrange çarpan metodu, Parametre genişletme metodu ve Legendre dalgacık metotlarının temel fikirleri anlatılmıştır.

Dördüncü bölüm, üçüncü bölümde tanıtılan metotların Jimbo-Miwa denklemine uygulanmasından oluşur. Tezin orijinal kısmı bu bölümdür. Burada çözümler, grafikler ve tablolar ile desteklenmiştir. 3 boyutlu grafikler için Wolfram Mathematica 8.0 programı kullanılmıştır.

Beşinci bölüm ise, yapılan çalışmaların sonuçlarının anlatıldığı kısımdır. Burada Jimbo-Miwa denklemine uygulanan metotların en iyi sayısal sonucu veren metot tartışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Diferansiyel Denklemlerin Tanımı ve Sınıflandırılması

Diferansiyel denklem birtakım fonksiyonlar ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu kavram ilk olarak 1676 yılında Leibnitz tarafından kullanılmış ve uzun zamandır çok çeşitli pratik problemlerin modellenmesi ve çözülmesi için bilim adamları ve mühendisler tarafından da araştırma konusu olmuştur. Çoğu bilimsel problemlerin tarif edilmesi ise bazı anahtar değişkenlerin diğer değişkenlere göre olan değişimlerini içermektedir. Dolayısıyla sıvıların hareketi, elektrik devrelerindeki akımın akışı, katı cisimlerdeki ısı yayılımı, sismik dalgaların yayılımı ve algılanması, popülasyonların artması veya azalması gibi durumları içeren problemleri anlamak ve araştırmak için diferansiyel denklemler kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.1. Bir ya da daha çok bağımlı değişkenin, bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme *diferansiyel denklem* denir.

Genel olarak x bağımsız, y bağımlı değişkenli, n . mertebeden bir diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1.1)$$

veya

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1.2)$$

biçiminde yazılır. Kapalı formdaki denklemlerin incelenmesinde önemli bir kavram da diferansiyel denklemlerin lineer olmasıdır [1].

Tanım 2.1.2. Eğer n – inci mertebeden (2.1.1.) diferansiyel denklemindeki F fonksiyonu $y, y', \dots, y^{(n)}$ değişkenlerine göre lineer bir fonksiyon ise denkleme *lineer diferansiyel denklem*, aksi halde *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

Buna göre n – inci mertebeden lineer diferansiyel denklem, $a_0 \neq 0$ olmak üzere genel olarak,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (2.1.3)$$

şeklinde ifade edilir [1].

Tanım 2.1.3. Tek bağımsız değişkeni bulduran diferansiyel denklemlere *adi diferansiyel denklem* (A.D.D.) denir [59].

Tanım 2.1.4. İçerisinde iki ve daha fazla bağımsız değişken bulduran diferansiyel denklemlere ise *kısmi diferansiyel denklem* (K.D.D.) denir. Adi diferansiyel denklemler kısmi diferansiyel denklemlerin özel hali olarak düşünülebilir [59].

Tanım 2.1.5. n – inci mertebeden bir $L(y) = b(x)$ lineer diferansiyel denklemi için c_0, c_1, \dots, c_{n-1} keyfi sabitler olmak üzere, denklemin

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_0, \\ c_{n-1} &= y^{(n-1)}(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

şartlarına uyan çözümünün bulunması *başlangıç değer problemi* olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.1.6. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler *eliptik, parabolik ve hiperbolik* olmak üzere üç sınıfa ayrılır. x, y bağımsız değişkenler, v ise bağımlı değişken olmak üzere, ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak;

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlandığında, denklemin $B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik, $B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik, $B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik olduğu ifade edilir [60]. Aşağıda bazı özel diferansiyel denklemler verilmiştir:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{Laplace denklemi} \quad (2.1.6)$$

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \quad \text{Dalga denklemi} \quad (2.1.7)$$

$$v_t - v_{xx} = 0 \quad \text{Isı denklemi} \quad (2.1.8)$$

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0 \quad \text{KDV denklemi} \quad (2.1.9)$$

Tanım 2.1.7. Kısmi türevli ve lineer olmayan

$$G(u, u_x, u_t, u_y, u_{xy}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2.1.10)$$

tipindeki bir denklemi, adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için x , y ve t bağımsız değişkenleri yerine yeni değişkenler kullanılarak yapılan dönüşüme *üstel dönüşüm* denir. Örneğin, bu yeni değişken ξ ile ifade edilirse, α keyfi sabit, β dalga hızı ve $\xi = x + \alpha y + \beta t$, $u(x, t) = U(\xi)$ olmak üzere (2.1.10) denkleminde bu değerler yerine yazılarak

$$G(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (2.1.11)$$

elde edilir. Sonuçta (2.1.10) denklemi (2.1.11) formundaki adi diferansiyel denkleme dönüşür.

Örnek 2.1.1: (2.1.9) da belirtilen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 6v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

Kdv denklemi için α dalga hızı olmak üzere, $\xi = x + \alpha t$ ve $v(x, t) = V(\xi)$ dönüşümü yapılırsa, bu takdirde denklem

$$\alpha V' + 6VV' + V''' = 0 \quad (2.1.12)$$

veya

$$\alpha V' + 3(V^2)' + V''' = 0 \quad (2.1.13)$$

formundaki adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur.

Örnek 2.1.2: (1.1) ile ifade edilen

$$u_{xxy} + 3u_y u_{xx} + 3u_x u_{xy} + 2u_{yt} - 3u_{xz} = 0$$

Jimbo-Miwa denklemi için α, β, γ ve w keyfi sabitler olmak üzere $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z - wt$ ve $u(x, y, z, t) = U(\xi)$ dönüşümü yapılarak,

$$\alpha^3 \beta U^{(IV)} + 3\alpha^2 \beta U'' U' + 3\alpha^2 \beta U' U'' - 2\beta w U'' - 3\alpha \gamma U'' = 0$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$U^{(IV)} + \frac{3}{\alpha} \left((U')^2 \right)' - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2 \beta} \right) U'' = 0 \quad (2.1.14)$$

denklemi bulunur.

3. YÖNTEMLER

3.1. Lagrange Çarpan Metodu

Bu metot matematikte kısıtlanmış bir fonksiyonun yerel maksimum değerini veya yerel minimum değerini bulmak için uygulanan bir tekniktir. Ekonomide bir sistemin denge noktasını belirlemek için çok sık kullanılır. Matematikte ise doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin tam ya da yaklaşık çözümlerini elde etmek için çok önemlidir.

Varyasyonel iterasyon metodu He [24] tarafından geliştirilmiş olup, Lagrange çarpan yöntemi varyasyonel iterasyon yöntemine çok benzer bir yapıdadır.

3.1.1. Lagrange Metodunun Temel Fikri:

L doğrusal ve N ise doğrusal olmayan bir operatör olmak üzere,

$$Lu + Nu = g(x) \quad (3.2.1)$$

formundaki doğrusal olmayan sistemin x_0 noktasındaki değerini düzeltmek için $u_0(x)$, $Lu = 0$ in çözümü olduğu kabul edilirse; bu durumda $x_0 = 1$ için

$$u_{cor}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda (Lu_0 + Nu_0 - g) dx \quad (3.2.2)$$

düzeltilme formülü yazılabilir. Burada λ Lagrange çarpanı olup varyasyonel analiz yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Varyasyonel iterasyon metodu, bu metodun He tarafından geliştirilmesiyle elde edilmiştir [24,25]. He (3.2.2) denklemini u_0 fonksiyonunun ilk yaklaşımı olmak üzere,

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^x \lambda \{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\} d\xi \quad (3.2.3)$$

biçiminde temsil edilen bir iterasyon metoduna dönüştürmüştür. Bu denkleme düzeltme fonksiyoneli denir ve burada u_n , n . yaklaşık çözüm ve \tilde{u}_n kısıtlanmış varyasyondur. Yani $\delta\tilde{u}_n = 0$ dir. Düzeltme fonksiyoneline varyasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(x_0) &= \delta u_n(x_0) + \delta \int_0^x \lambda \{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\} d\xi \\ &= \delta u_n(x_0) + \delta \int_0^x \lambda(x, \xi) \{Lu_n(\xi) - g(\xi)\} d\xi \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Euler-Lagrange problemi çözülerek Lagrange çarpanı $\lambda(x, \xi)$ belirlenip, başlangıç koşulları sağlanacak şekilde de bir u_0 fonksiyonu seçilir.

Böylece iterasyon formülünde bu değerler yerlerine yazılarak $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere u_n yaklaşımları bulunur. Sonuç olarak çözüm $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ile verilir.

3.2. Parametre Genişletme Metodu

Son zamanlarda, lineer olmayan çeşitli problemlerin değişik modelleri, mühendislik ve fizik alanlarında geniş ölçüde incelenmiştir. Fizik ve mühendislik alanları gibi birçok alanda ortaya çıkan lineer olmayan diferansiyel problemlerinin incelenmesi bilimin gelişmesi açısından önemlidir.

Lineer olmayan problemleri analiz etmek için sık sık çeşitli pertürbasyon yöntemleri uygulanmış olup, bu yöntemler kuvvet serilerindeki bağımlı değişkenlerin küçük bir p parametresi ile genişletilerek, art arda çözülebilen lineer diferansiyel denklemleri bir araya getirilmesiyle ifade edilir. Parametre genişletme metodu yine ilk kez He tarafından önerilmiştir [24].

3.2.1. Parametre Genişletme Metodunun Temel Fikri:

$N(u,t)$ lineer olmayan terim olmak üzere;

$$\ddot{u} + \varepsilon u + 1.N(u,t) = 0 \quad (3.2.1)$$

genel formdaki Duffing denkleminin [40], p parametresine bağlı çözümü

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.2.2)$$

biçiminde kabul edilir ve u nun katsayısı olan ε , p parametresine bağlı olarak,

$$\varepsilon = \omega^2 + pd_1 + p^2d_2 + \dots \quad (3.2.3)$$

biçiminde ifade edilir. Burada lineer olmayan $N(u,t)$ teriminin katsayısı olan 1, yine p parametresine bağlı olarak pertürbe serisine

$$1 = pa_1 + p^2a_2 + \dots \quad (3.2.4)$$

şeklinde açılır. Bütün bu değerler, (3.2.1) denkleminde yerine yazılarak, p nin mertebesine göre aşağıdaki gibi ayrıştırılır:

$$\ddot{u}_0 + p\ddot{u}_1 + p^2\ddot{u}_2 + \dots + (\omega^2 + pd_1 + p^2d_2 + \dots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) + (pa_1 + p^2a_2 + \dots)N(u, t) = 0$$

$$p^0 : \ddot{u}_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (3.2.5)$$

$$p^1 : \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 + d_1 u_0 + a_1 N(u, t) = 0 \quad (3.2.6)$$

⋮

Daha sonra, $u_0(0) = A$ ve $\dot{u}(0) = 0$ başlangıç şartları dikkate alınarak (3.2.5) denkleminin çözümü $u_0 = A \cos(\omega t)$ olarak hesaplanır. Bu değerler ise, (3.2.6) denkleminde yerine yazılarak,

$$\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 + (d_1 A + a_1 b_1) \cos(\omega t) = 0 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Bu denklemdeki seküler terimi yok etmek için

$$(d_1 A + a_1 b_1) = 0 \quad (3.2.8)$$

alınır. (3.2.3) ve (3.2.4) denklemlerinde $p = 1$ yazıldığında,

$$d_1 = \varepsilon - \omega^2 A = 0 \quad (3.2.9)$$

$$a_1 = 0 \quad (3.2.10)$$

olduğu görülür. Sonuçta (3.2.9) ve (3.2.10) denklemleri (3.2.8) denkleminde yerine yazılır ve (3.2.1) denkleminin birinci mertebeden yaklaşık frekansı bulunur.

3.3. Legendre Dalgacık Metodu

Legendre dalgacıkları [58], $k, M \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, \dots, M$ ve $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ olmak üzere dört argümanlı $\psi_{nm} = \psi_{nm}(k, n, m, t)$ Legendre polinomlarından elde edilir ve

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k+1}{2}} L_m^*(2^{k+1}t - (2n+1)), & \frac{n}{2^k} < t < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & , \text{ diğ}er \text{ durumlarda} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

biçiminde tanımlanır [55]. Burada $L_m^*(t)$, m . dereceden $[-1, 1]$ aralığında $w(t) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan Legendre polinomudur. Bu polinomlar $L_0^*(t) = 1$ ve $L_1^*(t) = t$ olmak üzere,

$$L_{m+1}^*(t) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right)t L_m^*(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right)L_{m-1}^*(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

tekrarlama bağıntısını sağlar [56]. Diğ er yandan, (3.3.1) denkleminde yer alan t normalleştirilmiş zamandır ve $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ katsayısı ise ortonormalleştirme için gereken katsayıdır. $k = 0$ alınarak hesaplanan ilk birkaç Legendre dalgacığı aşağıdaki gibidir;

$$\psi_{00}(t) = 1$$

$$\psi_{01}(t) = \sqrt{3}(2t - 1)$$

$$\psi_{02}(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2t - 1)^2 - 1]$$

$$\psi_{03}(t) = \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2t - 1)^3 - 3(2t - 1)]$$

$$\psi_{04}(t) = \frac{3}{8} [35(2t - 1)^4 - 30(2t - 1)^2 + 3]$$

$$\psi_{05}(t) = \frac{\sqrt{11}}{8} [63(2t - 1)^5 - 70(2t - 1)^3 + 15(2t - 1)]$$

Ötelenmiş Legendre polinomları, $[0,1]$ aralığında tanımlı olup $t = 2x - 1$ değişken değişimi uygulanarak elde edilir ve

$$\tilde{L}_m(x) = L_m(2x-1)$$

biçiminde gösterilir. Bu polinomların analitik formdaki gösterimi ise,

$$\tilde{L}_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(m+k)! x^k}{(m-k)!(k!)^2}$$

şeklindedir [57,58].

Ötelenmiş Legendre polinomları ile bu polinomların türevleri arasında bir bağıntı vardır. Bu bağıntı aşağıda Teorem 3.3.1. ile verilir:

Teorem 3.3.1. $P_m(x)$, $[0,1]$ aralığında ötelenmiş Legendre polinomları olsun. Bu takdirde

$$P'_m(x) = 2 \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) P_k(x)$$

şeklindedir [55,58].

İspat 3.3.1. Farz edelim ki $u(x)$ fonksiyonunun Legendre açılımı

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k L_k(x) \quad (3.3.2)$$

olsun. O halde $u'(x)$ fonksiyonu ise,

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k^{(1)} L_k(x) \quad (3.3.3)$$

biçiminde yazılır. Burada $\hat{u}_k^{(1)}$ fonksiyonu

$$\hat{u}_k^{(1)} = (2k+1) \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ tek}}}^{\infty} \hat{u}_p, \quad k \geq 0$$

ile tanımlıdır. Eğer, (3.3.2) denkleminde $u(x) = L_m(x)$ olarak seçilirse, bu taktirde $i \neq m$ için $\hat{u}_m = 1$ ve $\hat{u}_i = 0$ olur. Sonuç olarak

$$\hat{u}_k^{(1)} = \begin{cases} 2k+1, & m+k \text{ tek ve } k \leq m-1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece (3.3.3) denklemi

$$L'_m(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ m+k \text{ tek}}}^{m-1} (2k+1) L_k(x) \quad (3.3.4)$$

şeklini alır. Sonuçta (3.3.4) denkleminde $x = 2t - 1$ alınır ise

$$P'_m(t) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ m+k \text{ tek}}}^{m-1} (2k+1) P_k(t)$$

olduğu görülür [55,58]

4. NÜMERİK METOTLARIN JIMBO-MİWA DENKLEMİNE UYGULAMALARI

4.1. Lagrange Metodu

(3+1) boyutlu Jimbo-Miwa (J-M) denklemi $u(x, y, z, t) = u$ olmak üzere,

$$u_{xxy} + 3u_{xy}u_x + 3u_yu_{xx} + 2u_{yt} - 3u_{xz} = 0$$

formunda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklem üstel dönüşüm metodu ile $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z - wt$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere

$$U^{(IV)} + \frac{3}{\alpha} \left((U')^2 \right)' - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2\beta} \right) U'' = 0$$

şeklinde dördüncü mertebeden adi diferansiyel denklem ile ifade edilir. Bu denklemde

$\frac{d}{d\xi} U(\xi) = U'(\xi)$ olarak tanımlanır ve $U'(\xi) = V(\xi)$ biçiminde alınırsa,

$$V''' + \frac{3}{\alpha} \left((V)^2 \right)' - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2\beta} \right) V' = 0 \quad (4.1.1)$$

veya

$$V''' + \frac{6}{\alpha} VV' - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2\beta} \right) V' = 0 \quad (4.1.2)$$

şeklinde üçüncü mertebeden adi diferansiyel denklem elde edilir. (4.1.2) denklemi için düzeltme fonksiyoneli

$$V_{n+1}(\xi) = V_n(\xi) + \int_0^\xi \lambda(\xi, s) \left\{ V_n'''(\xi, s) + \frac{6}{\alpha} V_n(\xi, s) V_n'(\xi, s) - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2\beta} \right) V_n'(\xi, s) \right\} ds \quad (4.1.3)$$

biçimindedir. Diğer yandan (4.1.3) denklemi düzeltme fonksiyon sabiti olan δ ile çarpılırsa,

$$\delta V_{n+1}(\xi) = \delta V_n(\xi) + \int_0^\xi \lambda(\xi, s) \left\{ \delta V_n''' + \frac{6}{\alpha} \delta \tilde{V}_n \tilde{V}_n' - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2 \beta} \right) \delta V_n' \right\} ds = 0 \quad (4.1.4)$$

bulunur. Burada $\delta VV'$ lineer olmayan terim olduğundan, dolayısıyla kısıtlı varyasyon olup $\delta \tilde{V}_n = 0$ şeklinde gösterilir. (4.1.4) denkleminde $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\beta = 3$ ve $w = 1$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\delta V_{n+1}(\xi) = \delta V_n(\xi) + \int_0^\xi \lambda(\xi, s) \left\{ \delta V_n''' - 4\delta V_n' \right\} ds \quad (4.1.5)$$

olur. (4.1.5) denkleminde bulunan integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\delta V_{n+1} = \delta V_n + \lambda \delta V_n'' \Big|_{s=\xi} - \lambda' \delta V_n' \Big|_{s=\xi} + \lambda'' \delta V_n \Big|_{s=\xi} - 4\lambda \delta V_n \Big|_{s=\xi} - \int_0^\xi (\lambda''' \delta V_n - 4\lambda' \delta V_n') ds \quad (4.1.6)$$

olduğu görülür. Burada δ nın mertebelerine göre V_n ler ayrıştırılırsa,

$$\delta V_n : \lambda''' - 4\lambda' = 0 \quad (4.1.6.a)$$

$$\delta V_n : 1 + \lambda'' - 4\lambda \Big|_{s=\xi} = 0$$

$$\delta V_n' : \lambda' \Big|_{s=\xi} = 0 \quad (4.1.6.b)$$

$$\delta V_n'' : \lambda \Big|_{s=\xi} = 0$$

denklemleri elde edilir ve Euler-Lagrange denklemi olarak adlandırılan (4.1.6.a) denklemi, (4.1.6.b) ile ifade edilen doğal sınır şartlarıyla birlikte çözüldüğünde

$$\lambda(\xi, s) = \frac{1 - \cosh(2\xi - 2s)}{4} \quad (4.1.7)$$

bulunur. (4.1.7) denklemi (4.3.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$V_{n+1}(\xi) = V_n(\xi) + \int_0^\xi \frac{1 - \cosh(2\xi - 2s)}{4} \{V_n'''(\xi, s) + 6V_n(\xi, s)V_n'(\xi, s) - 4V_n''(\xi, s)\} ds \quad (4.7.a)$$

olur. Bu metot ilk yaklaşım fonksiyonunu seçmek için kullanıcıya avantaj sağlar. Bu yüzden başlangıç fonksiyonunu belirlemek için J-M denkleminin başlangıç değerlerine ihtiyaç duyulur. J-M denkleminin analitik çözümünü elde etmek için J-M denklemine homojen balans metodu uygulanmış ve $\alpha_0 = 2k\alpha$ ve $w = 2k^2\alpha^3 - \frac{3\alpha\gamma}{2\beta}$ olmak üzere,

$$u = \alpha_0 + 2k\alpha \tanh[k(\alpha x + \beta y + \gamma z - wt)] \quad (4.1.8)$$

formunda tam çözüm elde edilmiştir [15]. Ayrıca alınan $k = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\beta = 3$ ve $\alpha_0 = 2$, $w = 1$ keyfi sabit değerleri için

$$u = 2 + 2 \tanh[x + 3y + 2z - t] \quad (4.1.9)$$

biçimindeki çözüm önce homotopi pertürbasyon metodu (HPM), J-M denklemine uygulanarak belirlenmiştir [23]. J-M denkleminin başlangıç şartlarını belirlemek için (4.1.9) çözümü ele alındığında, bu taktirde (4.1.2) denkleminin çözümü

$$U'(\xi) = V(\xi) = 2 \operatorname{sech}^2(\xi)$$

biçimindedir. O halde, (4.1.2) denkleminin başlangıç koşulları $V_0 = V(0) = 2$, $V_0' = V'(0) = 0$ ve $V_0'' = V''(0) = -4$ olarak belirlenir. Bu başlangıç şartlarına uygun olarak V_0 ilk yaklaşım fonksiyonu

$$V_0 = 2 - 2\xi^2 \quad (4.1.10)$$

olarak ele alındığında,

$$V_1(\xi) = V_0(\xi) + \int_0^\xi \frac{1 - \cosh(2\xi - 2s)}{4} \{V_0'''(\xi, s) + 6V_0(\xi, s)V_0'(\xi, s) - 4V_0''(\xi, s)\} ds$$

$$V_1 = \frac{9}{2} + 3\xi^2 + 3\xi^4 - 5 \cosh(2\xi) \quad (4.1.11)$$

çözümü elde edilir. Benzer şekilde iterasyona devam edildiğinde,

$$V_2(\xi) = \frac{9}{2} + 3\xi^2 + 3\xi^4 - \frac{5}{2} \cosh(2\xi) + \frac{1}{64} \left(-(81784 + 315\xi^2 + 180\xi^4) \cosh(2\xi) - 50 \cosh(4\xi) + 3(2(13639 + 26968\xi^2 + 8896\xi^4 + 1152\xi^6 + 72\xi^8) + \xi(825 + 280\xi^2 + 96\xi^4) \cosh(\xi) \sinh(\xi)) \right) \quad (4.1.12)$$

$$V_3(\xi) = \frac{9}{2} + 3\xi^2 + 3\xi^4 - \frac{5}{2} \cosh(2\xi) + \frac{1}{64} \left((-81784 - 315\xi^2 - 180\xi^4) \cosh(2\xi) - 50 \cosh(4\xi) + 3 \left(2(13639 + 26968\xi^2 + 8896\xi^4 + 1152\xi^6 + 72\xi^8) + \xi(825 + 280\xi^2 + 96\xi^4) \cosh(\xi) \sinh(\xi) \right) \right) - \frac{3}{32768} \left(-\frac{1705232309998451}{8} - \frac{1705070688591123\xi^2}{4} - 142071469073217\xi^4 - 18933514181784\xi^6 - 1349752298256\xi^8 - 59528556288\xi^{10} - 1750533120\xi^{12} - 34338816\xi^{14} - 373248\xi^{16} + \left(\frac{8839823473301839985}{41472} + \frac{598449498123\xi^2}{32} + \frac{55439735001\xi^4}{8} + 1194473175\xi^6 + 138457890\xi^8 + \frac{56931984\xi^{10}}{5} + 672192\xi^{12} + \frac{124416\xi^{14}}{7} \right) \cosh(2\xi) + \left(\frac{1574670229891}{648} + \frac{10589966935\xi^2}{36} + \frac{223034305\xi^4}{3} + 5447560\xi^6 + 350640\xi^8 + 6912\xi^{10} \right) \cosh(4\xi) + \frac{528746975}{512} \cosh(6\xi) + \frac{255375}{16} \xi^2 \cosh(6\xi) + 5625\xi^4 \cosh(6\xi) + \frac{500}{3} \cosh(8\xi) - \frac{53559921081}{5} \xi^5 \cosh(\xi) \sinh(\xi) - \frac{2320640983051}{64} \xi \sinh(2\xi) - \frac{197314485241}{8} \xi^3 \sinh(2\xi) - \frac{4388133852}{7} \xi^7 \sinh(2\xi) - 49452360\xi^9 \sinh(2\xi) - \frac{27703296}{11} \xi^{11} \sinh(2\xi) - \frac{1119744}{13} \xi^{13} \sinh(2\xi) - \frac{19949049665}{54} \xi \sinh(4\xi) - \frac{1627163135}{9} \xi^3 \sinh(4\xi) - 24396604\xi^5 \sinh(4\xi) - 1570560\xi^7 \sinh(4\xi) - 63360\xi^9 \sinh(4\xi) - \frac{1605375}{64} \xi \sinh(6\xi) - \frac{25125}{2} \xi^3 \sinh(6\xi) - 1800\xi^5 \sinh(6\xi) \right) \quad (4.1.13)$$

olarak ilk üç yaklaşım çözümleri bulunur. İterasyona böyle devam edildiğinde,

$$\begin{aligned}
V_n(\xi) = & \frac{9}{2} + 3\xi^2 + 3\xi^4 - \frac{5}{2} \cosh(2\xi) + \frac{1}{64} \left((-81784 - 315\xi^2 - 180\xi^4) \cosh(2\xi) - \right. \\
& 50 \cosh(4\xi) + 3 \left(2 \left(13639 + 26968\xi^2 + 8896\xi^4 + 1152\xi^6 + 72\xi^8 \right) + \xi \left(825 + 280\xi^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 96\xi^4 \right) \cosh(\xi) \sinh(\xi) \right) \left. \right) - \frac{3}{32768} \left(-\frac{1705232309998451}{8} - \frac{1705070688591123\xi^2}{4} \right. \\
& -142071469073217\xi^4 - 18933514181784\xi^6 - 1349752298256\xi^8 - 59528556288\xi^{10} \\
& -1750533120\xi^{12} - 34338816\xi^{14} - 373248\xi^{16} + \left(\frac{8839823473301839985}{41472} + \right. \\
& \frac{598449498123\xi^2}{32} + \frac{55439735001\xi^4}{8} + 1194473175\xi^6 + 138457890\xi^8 + \\
& \left. \frac{56931984\xi^{10}}{5} + 672192\xi^{12} + \frac{124416\xi^{14}}{7} \right) \cosh(2\xi) + \left(\frac{1574670229891}{648} + \right. \\
& \left. \frac{10589966935\xi^2}{36} + \frac{223034305\xi^4}{3} + 5447560\xi^6 + 350640\xi^8 + 6912\xi^{10} \right) \cosh(4\xi) + \\
& \frac{528746975}{512} \cosh(6\xi) + \frac{255375}{16} \xi^2 \cosh(6\xi) + 5625\xi^4 \cosh(6\xi) + \frac{500}{3} \cosh(8\xi) - \\
& \frac{53559921081}{5} \xi^5 \cosh(\xi) \sinh(\xi) - \frac{2320640983051}{64} \xi \sinh(2\xi) - \\
& \frac{197314485241}{8} \xi^3 \sinh(2\xi) - \frac{4388133852}{7} \xi^7 \sinh(2\xi) - 49452360\xi^9 \sinh(2\xi) - \\
& \frac{27703296}{11} \xi^{11} \sinh(2\xi) - \frac{1119744}{13} \xi^{13} \sinh(2\xi) - \frac{19949049665}{54} \xi \sinh(4\xi) - \\
& \frac{1627163135}{9} \xi^3 \sinh(4\xi) - 24396604\xi^5 \sinh(4\xi) - 1570560\xi^7 \sinh(4\xi) - \\
& \left. 63360\xi^9 \sinh(4\xi) - \frac{1605375}{64} \xi \sinh(6\xi) - \frac{25125}{2} \xi^3 \sinh(6\xi) - 1800\xi^5 \sinh(6\xi) \right) + \dots
\end{aligned}
\tag{4.1.14}$$

biçiminde olup, $V(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\xi)$ eşitliğinden $V(\xi)$ çözümü elde edilir. Diğer yandan bu değer $U'(\xi) = V(\xi)$ denkleminde yerine yazılır ve eşitliğin iki yanının bir kez integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
U(\xi) = & c + \frac{5115697266367065}{262144} \xi + \frac{1705070799183123}{131072} \xi^3 + \frac{426214434646467}{163840} \xi^5 \\
& + \frac{1014295465791}{4096} \xi^7 + \frac{28119841083}{2048} \xi^9 + \frac{697600269}{1408} \xi^{11} + \frac{5128515}{416} \xi^{13} \\
& + \frac{16767}{80} \xi^{15} + \frac{2187}{1088} \xi^{17} + \left(\frac{191819211762783}{4194304} \xi + \frac{15105545079381}{524288} \xi^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3545240004693\xi^5}{655360} + \frac{54617615307}{114688}\xi^7 + \frac{192138489}{8192}\xi^9 + \frac{3806109}{5632}\xi^{11} + \\
& \frac{8019}{832}\xi^{13} \Big) \cosh(2\xi) + \xi \Big(\frac{34057564355}{2359296} + \frac{16442771970\xi^2}{2359296} + \frac{2132140536\xi^4}{2359296} + \\
& \frac{142274880\xi^6}{2359296} + \frac{4354560\xi^8}{2359296} \Big) \cosh(4\xi) + \frac{6391625}{12582912}\xi \cosh(6\xi) + \frac{34625}{131072}\xi^3 \cosh(6\xi) \\
& + \frac{225}{8192}\xi^5 \cosh(6\xi) - \frac{95661}{512}\xi^{12} \cosh(\xi) \sinh(\xi) - \frac{8860540528162674821}{905969664} \sinh(2\xi) - \\
& \frac{92428624131615}{2097152}\xi^2 \sinh(2\xi) - \frac{7256799951669}{524288}\xi^4 \sinh(2\xi) - \\
& \frac{112818650139}{65536}\xi^6 \sinh(2\xi) - \frac{3666179637}{32768}\xi^8 \sinh(2\xi) - \frac{86796927}{20480}\xi^{10} \sinh(2\xi) \\
& - \frac{729}{896}\xi^{14} \sinh(2\xi) - \frac{419212113139}{7077888} \text{Sinh}(4\xi) - \frac{2351419115}{196608}\xi^2 \text{Sin}(4\xi) - \\
& \frac{92774905}{32768}\xi^4 \sinh(4\xi) - \frac{1885935}{8192}\xi^6 \sinh(4\xi) - \frac{99765}{8192}\xi^8 \sinh(4\xi) - \frac{81}{512}\xi^{10} \sinh(4\xi) \\
& - \frac{4784289275}{301989888} \sinh(6\xi) - \frac{393875}{1048576}\xi^2 \sinh(6\xi) - \frac{7125}{65536}\xi^4 \sinh(6\xi) - \frac{125}{65536} \sinh(8\xi) \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

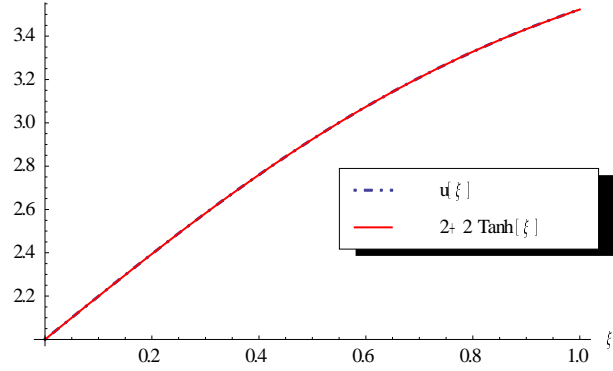
olduğu görülür. Burada c bir integral sabitidir. Başlangıç şartından $c = 2$ bulunur ve bu çözümün $[0,1]$ aralığında, $\xi = 0$ civarındaki Taylor açılımı ise,

$$\begin{aligned}
U(\xi) \cong & 2 + 2\xi - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{4\xi^5}{15} - \frac{34\xi^7}{315} + \frac{124\xi^9}{2835} - \frac{364\xi^{11}}{22275} + \frac{33914\xi^{13}}{6081075} - \frac{1091744^{15}}{638512875} \\
& + \frac{1815011\xi^{17}}{3947170500} - \frac{2559029\xi^{19}}{24105934125} + O(\xi^{21})
\end{aligned}$$

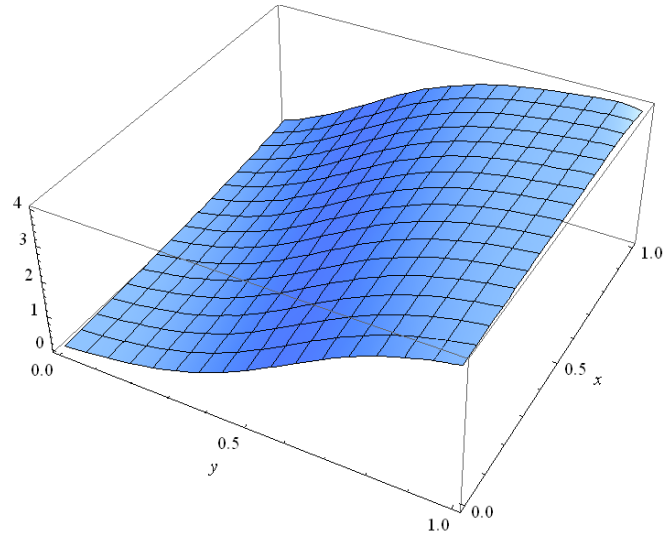
biçimindedir. Diğer yandan, Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümünün $\xi = 0$ civarındaki Taylor açılımı:

$$\begin{aligned}
2 + 2 \text{Tanh}(\xi) \cong & 2 + 2\xi - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{4\xi^5}{15} - \frac{34\xi^7}{315} + \frac{124\xi^9}{2835} - \frac{2764\xi^{11}}{155925} + \frac{43688\xi^{13}}{6081075} - \frac{1859138^{15}}{638512875} \\
& + \frac{12809164\xi^{17}}{10854718875} - \frac{887722324\xi^{19}}{1856156927625} + O(\xi^{21})
\end{aligned}$$

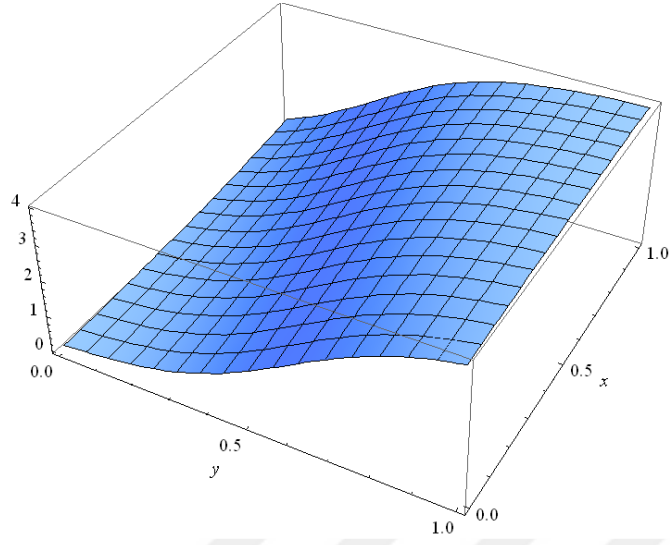
şeklindedir. Bu iki açılım karşılaştırıldığında, ilk altı terimin aynı olduğu görülür. Bu ise, iterasyona devam edildiğinde elde edilen çözümlerin analitik çözüme yakınsayacağını açıkça göstermektedir.



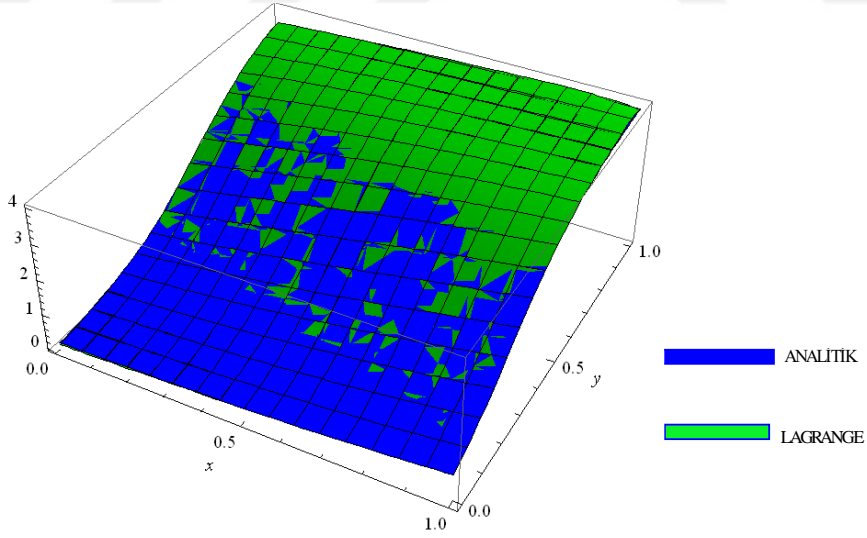
Şekil 4.1.1. $\xi = x + 3y + 2z - t$ ve $0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere, (4.1.15) denkleminin elde edilen çözümünün ve analitik çözümünün grafiği



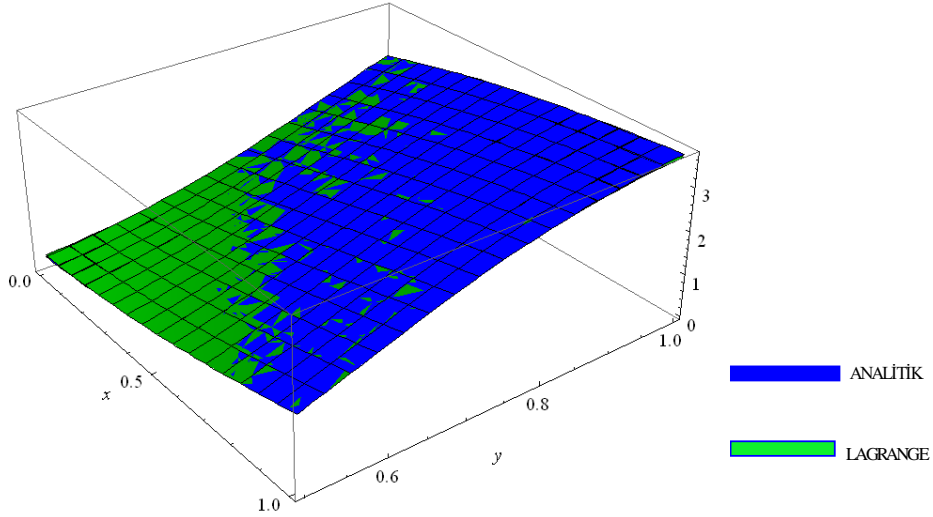
Şekil 4.1.2. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ve $t = 1.8$ değeri için (4.1.15) denkleminin elde edilen çözümünün grafiği



Şekil 4.1.3. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ve $t = 1.8$ değeri için $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.1.4. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ve $t = 1.8$ değeri için $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonu ve (4.1.15) çözümünün grafiği



Şekil 4.1.5. (4.2.3) ile ifade edilen ikinci mertebeden J-M denkleminde Lagrange çarpan metodu uygulandığında, $\lambda(\xi, s) = \frac{1}{4} e^{-2(s-\xi)} (e^{4(s-\xi)} - 1)$ ve ilk yaklaşım fonksiyonu; $v_0 = 2$ olarak bulunur. Üç iterasyon sonucunda bulunan yaklaşık çözüm ve $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonu göz önüne alındığında, $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere; $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0.5 \leq y \leq 1$ ve $t = 2.7$ değerleri için elde edilen üç boyutlu grafik

Tablo 4.1.1. (4.1.15) denkleminin çözümünün $0 \leq \xi \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen sayısal sonuçların kıyaslanması:

ξ	Lagrange Yöntemi $U(\xi)$	Tam Çözüm $2 + 2 \tanh(\xi)$	Mutlak Hata
0.2	2.394750675652176	2.394750640561313	$3.50908631041591 \times 10^{-8}$
0.4	2.759897569194436	2.759897924146533	$3.54952096603967 \times 10^{-7}$
0.6	3.074103411287069	3.074099133325187	$4.27796188207097 \times 10^{-6}$
0.8	3.328133136034012	3.328073539445834	$5.95965881782234 \times 10^{-5}$
1	3.523704528808594	3.523188311156701	$5.16217651892692 \times 10^{-4}$

4.2. Parametre Genişletme Metodu

(3+1) boyutlu aşağıdaki Jimbo-Miwa Denkleminde

$$U^{(IV)} + \frac{3}{\alpha} \left((U')^2 \right)' - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2 \beta} \right) U'' = 0$$

bir kez integral alınırsa,

$$U'''(\xi) + 3(U'(\xi))^2 - 4U''(\xi) = 0 \quad (4.2.1)$$

denklemini elde edilir. Burada integral sabiti ihmal edilmiştir. Bu denkleminde

$\frac{d}{d\xi} U = U'$ olmak üzere, $U'(\xi) = v(\xi)$ şeklinde tanımlanırsa,

$$v'' + \frac{3}{\alpha} v^2 - \left(\frac{2w}{\alpha^3} + \frac{3\gamma}{\alpha^2 \beta} \right) v = 0 \quad (4.2.2)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleminde $\alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 3$ ve $w = 1$ keyfi sabit değerleri için

$$v''(\xi) + 3v^2(\xi) - 4v(\xi) = 0 \quad (4.2.3)$$

biçimindeki diferansiyel denklemini bulunur. Parametre genişletme yöntemi şimdi (4.2.3) ile ifade edilen diferansiyel denkleminin doğrudan uygulanacaktır. Bu yöntemin ilk adımı, katsayıların ve çözümün p parametresine bağlı olarak yazılmasıdır. Buna göre, p parametresine bağlı olarak (4.2.3) denkleminin çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (4.2.4)$$

biçiminde tanımlanır. Denklemin katsayıları belirli olduğundan p parametresine bağlı olarak yazılmasına gerek duyulmaz. Bunun yerine lineer olmayan terimin katsayısı p ile çarpılır ve (4.2.4) çözümü (4.2.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-4v_0 + 3pv_0^2 - 4pv_1 + 6p^2v_0v_1 + 3p^3v_1^2 - 4p^2v_2 + 6p^3v_0v_2 + 6p^4v_1v_2 + 3p^5v_2^2 - 4p^3v_3 - 4p^4v_4 - 4p^5v_5 + 6p^6v_0v_5 - 4p^6v_6 - 4p^6v_6 + v_0'' + pv_1'' + p^2v_2'' + p^3v_3'' + p^4v_4'' + p^5v_5'' + p^6v_6'' = 0$$

elde edilir. Yöntemin ikinci adımında ise, elde edilen bu denklemin p nin mertebesine göre

$$p^0 : v_0''(\xi) - 4v_0(\xi) = 0 \quad (4.2.5)$$

$$p^1 : v_1''(\xi) - 4v_1(\xi) = -3(v_0(\xi))^2 \quad (4.2.6)$$

$$p^2 : v_2''(\xi) - 4v_2(\xi) = -6(v_0(\xi)v_1(\xi)) \quad (4.2.7)$$

$$p^3 : v_3''(\xi) - 4v_3(\xi) = -3(v_1(\xi))^2 - 6(v_0(\xi)v_2(\xi)) \quad (4.2.8)$$

$$p^4 : v_4''(\xi) - 4v_4(\xi) = -6(v_1(\xi)v_2(\xi)) \quad (4.2.9)$$

$$p^5 : v_5''(\xi) - 4v_5(\xi) = -3(v_2(\xi))^2 \quad (4.2.10)$$

$$p^6 : v_6''(\xi) - 4v_6(\xi) = -6(v_0(\xi)v_5(\xi)) \quad (4.2.11)$$

⋮

biçiminde ayrıştırılmasıdır. Bu şekilde elde edilen (4.2.5) denkleminin $v_0(0) = 2$, $v_0'(0) = 0$ şartları ile çözümlenerek $v_0 = 2 \cosh(2\xi)$ bulunur ve v_0 çözümü (4.2.6) denkleminde $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) = 0$ başlangıç şartları altında yerine yazılmasıyla,

$$v_1(\xi) = -\frac{1}{4}e^{-4\xi} (e^{2\xi} - 1)^2 (1 + e^{2\xi} + e^{4\xi}) \quad (4.2.12)$$

çözümü elde edilir. Benzer şekilde devam edildiğinde,

$$v_2 = \frac{1}{64}e^{-6\xi} (e^{2\xi} - 1)(-3 - 19e^{2\xi} - 48e^{4\xi} + 48e^{6\xi} + 19e^{8\xi} + 3e^{10\xi} - 120e^{4\xi}\xi - 120\xi e^{6\xi}) \quad (4.2.13)$$

$$v_3(\xi) = -\frac{1}{128}e^{-8\xi} (-1 + e^{2\xi})(-1 - 10e^{2\xi} - 106e^{4\xi} - 225e^{6\xi} + 225e^{8\xi} + 106e^{10\xi} + 10e^{12\xi} + e^{14\xi} - 120e^{4\xi}\xi - 480e^{6\xi}\xi - 480e^{8\xi}\xi - 120e^{10\xi}\xi) \quad (4.2.14)$$

$$v_4(\xi) = \frac{1}{20480} e^{-10\xi} \left(15 + 176e^{2\xi} + 1320e^{4\xi} + 1280e^{6\xi} + 40649e^{8\xi} - 86880e^{10\xi} + 40649e^{12\xi} \right. \\ \left. + 1280e^{14\xi} + 1320e^{16\xi} + 176e^{18\xi} + 15e^{20\xi} + 1800e^{4\xi}\xi + 9600e^{6\xi}\xi + 61440e^{8\xi}\xi - 61440e^{12\xi}\xi \right. \\ \left. - 9600e^{14\xi}\xi - 1800e^{16\xi}\xi + 50400e^{8\xi}\xi^2 + 50400e^{12\xi}\xi^2 \right) \quad (4.2.15)$$

$$v_5(\xi) = -\frac{1}{573440} e^{-12\xi} \left(27 + 420e^{2\xi} + 4354e^{4\xi} + 23520e^{6\xi} + 437605e^{8\xi} - 621956e^{10\xi} \right. \\ \left. + 312060e^{12\xi} - 621956e^{14\xi} + 437605e^{16\xi} + 23520e^{18\xi} + 4354e^{20\xi} + 420e^{22\xi} + 27e^{24\xi} \right. \\ \left. + 5040e^{4\xi}\xi + 50400e^{6\xi}\xi + 890400e^{8\xi}\xi + 1182720e^{10\xi}\xi - 1182720e^{14\xi}\xi - 890400e^{16\xi}\xi \right. \\ \left. - 50400e^{18\xi}\xi - 5040e^{20\xi}\xi + 504000e^{8\xi}\xi^2 + 1411200e^{10\xi}\xi^2 + 3024000e^{12\xi}\xi^2 \right. \\ \left. + 1411200e^{14\xi}\xi^2 + 504000e^{16\xi}\xi^2 \right) \quad (4.2.16)$$

$$v_6(\xi) = \frac{1}{18350080} e^{-14\xi} \left(27 + 576e^{2\xi} + 10862e^{4\xi} + 119616e^{6\xi} + 5327994e^{8\xi} + \right. \\ \left. 19885504e^{10\xi} - 21329667e^{12\xi} - 8029824e^{14\xi} - 21329667e^{16\xi} + 19885504e^{18\xi} \right. \\ \left. + 5327994e^{20\xi} + 119616e^{22\xi} + 10862e^{24\xi} + 576e^{26\xi} + 27e^{28\xi} + 10080e^{4\xi}\xi + \right. \\ \left. 161280e^{6\xi}\xi + 7640640e^{8\xi}\xi + 49835520e^{10\xi}\xi - 67836720e^{12\xi}\xi + 67836720e^{16\xi}\xi \right. \\ \left. - 49835520e^{18\xi}\xi - 7640640e^{20\xi}\xi - 161280e^{22\xi}\xi - 10080e^{24\xi}\xi + 3024000e^{8\xi}\xi^2 + \right. \\ \left. 22579200e^{10\xi}\xi^2 - 63705600e^{12\xi}\xi^2 - 135475200e^{14\xi}\xi^2 - 63705600e^{16\xi}\xi^2 + \right. \\ \left. 22579200e^{18\xi}\xi^2 + 3024000e^{20\xi}\xi^2 - 56448000e^{12\xi}\xi^3 + 56448000e^{16\xi}\xi^3 \right) \quad (4.2.17)$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler $p = 1$ için (4.2.4) denkleminde yerine yazıldığında,

$$v(\xi) = 2 \cosh(2\xi) + -\frac{1}{4} e^{-4\xi} \left(e^{2\xi} - 1 \right)^2 \left(1 + e^{2\xi} + e^{4\xi} \right) + \\ \frac{1}{64} e^{-6\xi} \left(e^{2\xi} - 1 \right) \left(-3 - 19e^{2\xi} - 48e^{4\xi} + 48e^{6\xi} + 19e^{8\xi} + 3e^{10\xi} - 120e^{4\xi}\xi - 120\xi e^{6\xi} \right) \\ - \frac{1}{128} e^{-8\xi} \left(-1 + e^{2\xi} \right) \left(-1 - 10e^{2\xi} - 106e^{4\xi} - 225e^{6\xi} + 225e^{8\xi} + 106e^{10\xi} + 10e^{12\xi} + \right. \\ \left. e^{14\xi} - 120e^{4\xi}\xi - 480e^{6\xi}\xi - 480e^{8\xi}\xi - 120e^{10\xi}\xi \right) + \frac{1}{20480} e^{-10\xi} \left(15 + 176e^{2\xi} + \right. \\ \left. 1320e^{4\xi} + 1280e^{6\xi} + 40649e^{8\xi} - 86880e^{10\xi} + 40649e^{12\xi} + 1280e^{14\xi} + 1320e^{16\xi} + \right. \\ \left. 176e^{18\xi} + 15e^{20\xi} + 1800e^{4\xi}\xi + 9600e^{6\xi}\xi + 61440e^{8\xi}\xi - 61440e^{12\xi}\xi - 9600e^{14\xi}\xi \right)$$

$$\begin{aligned}
& -1800e^{16\xi}\xi + 50400e^{8\xi}\xi^2 + 50400e^{12\xi}\xi^2) - \frac{1}{573440}e^{-12\xi}(27 + 420e^{2\xi} + 4354e^{4\xi} \\
& + 23520e^{6\xi} + 437605e^{8\xi} - 621956e^{10\xi} + 312060e^{12\xi} - 621956e^{14\xi} + 437605e^{16\xi} + \\
& 23520e^{18\xi} + 4354e^{20\xi} + 420e^{22\xi} + 27e^{24\xi} + 5040e^{4\xi}\xi + 50400e^{6\xi}\xi + 890400e^{8\xi}\xi + \\
& 1182720e^{10\xi}\xi - 1182720e^{14\xi}\xi - 890400e^{16\xi}\xi - 50400e^{18\xi}\xi - 5040e^{20\xi}\xi + \\
& 504000e^{8\xi}\xi^2 + 1411200e^{10\xi}\xi^2 + 3024000e^{12\xi}\xi^2 + 1411200e^{14\xi}\xi^2 + 504000e^{16\xi}\xi^2) + \\
& \frac{1}{18350080}e^{-14\xi}(27 + 576e^{2\xi} + 10862e^{4\xi} + 119616e^{6\xi} + 5327994e^{8\xi} + \\
& 19885504e^{10\xi} - 21329667e^{12\xi} - 8029824e^{14\xi} - 21329667e^{16\xi} + 19885504e^{18\xi} \\
& + 5327994e^{20\xi} + 119616e^{22\xi} + 10862e^{24\xi} + 576e^{26\xi} + 27e^{28\xi} + 10080e^{4\xi}\xi + \\
& 161280e^{6\xi}\xi + 7640640e^{8\xi}\xi + 49835520e^{10\xi}\xi - 67836720e^{12\xi}\xi + 67836720e^{16\xi}\xi \\
& - 49835520e^{18\xi}\xi - 7640640e^{20\xi}\xi - 161280e^{22\xi}\xi - 10080e^{24\xi}\xi + 3024000e^{8\xi}\xi^2 + \\
& 22579200e^{10\xi}\xi^2 - 63705600e^{12\xi}\xi^2 - 135475200e^{14\xi}\xi^2 - 63705600e^{16\xi}\xi^2 + \\
& 22579200e^{18\xi}\xi^2 + 3024000e^{20\xi}\xi^2 - 56448000e^{12\xi}\xi^3 + 56448000e^{16\xi}\xi^3) + \dots
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $U'(\xi) = v(\xi)$ tanımı gereğince ve (4.2.14) denkleminin bir kez integralinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned}
U(\xi) = c + \frac{1}{1835080} & \left(-\frac{27}{14}e^{-14\xi} + 24e^{-12\xi} + 672e^{-8\xi} - 672e^{8\xi} - 24e^{12\xi} + \frac{27}{14}e^{14\xi} + \right. \\
& e^{-10\xi}(-1187 - 1008\xi) + e^{10\xi}(1187 - 1008\xi) - 31348224\xi - 77414400\xi^3 + \\
& e^{-4\xi}(685464 - 3991680\xi - 1612800\xi^2) + e^{-6\xi}(-1128239 - 1441440\xi - 504000\xi^2) \\
& + e^{6\xi}(1128239 - 1441440\xi + 504000\xi^3) + e^{4\xi}(-685464 - 3991680\xi + 1612800\xi^2) \\
& \left. + e^{2\xi}\left(-\frac{72682651}{2} + 108107160\xi - 74188800\xi^2 + 28224000\xi^3\right) + e^{-2\xi}\left(\frac{72682651}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. 108107160\xi + 74188800\xi^2 + 28224000\xi^3\right) \right) + \dots
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

çözümü elde edilir. Burada ise c integral sabiti olup, Jimbo-Miwa denkleminin $U(0) = 2$, $U'(0) = 2$ ve $U''(0) = 0$ başlangıç şartlarının (4.2.19) denkleminde yerine yazılmasıyla $c = 2$ olarak bulunur. Neticede ise,

$$\begin{aligned}
U(\xi) = & 2 + \frac{1}{1835080} \left(-\frac{27}{14} e^{-14\xi} + 24e^{-12\xi} + 672e^{-8\xi} - 672e^{8\xi} - 24e^{12\xi} + \frac{27}{14} e^{14\xi} + \right. \\
& e^{-10\xi} (-1187 - 1008\xi) + e^{10\xi} (1187 - 1008\xi) - 31348224\xi - 77414400\xi^3 + \\
& e^{-4\xi} (685464 - 3991680\xi - 1612800\xi^2) + e^{-6\xi} (-1128239 - 1441440\xi - 504000\xi^2) \\
& + e^{6\xi} (1128239 - 1441440\xi + 504000\xi^3) + e^{4\xi} (-685464 - 3991680\xi + 1612800\xi^2) \\
& \left. + e^{2\xi} \left(-\frac{72682651}{2} + 108107160\xi - 74188800\xi^2 + 28224000\xi^3 \right) + e^{-2\xi} \left(\frac{72682651}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. 108107160\xi + 74188800\xi^2 + 28224000\xi^3 \right) \right) + \dots
\end{aligned}$$

(4.2.20)

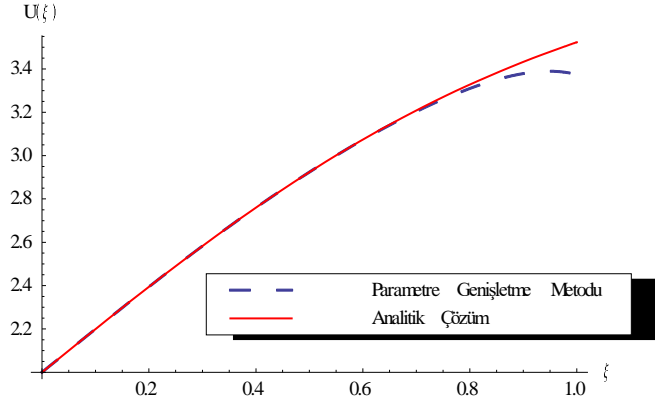
biçimindeki çözüm elde edilerek, (4.2.20) çözümünün $\xi = 0$ civarındaki Taylor açılımı yapılarak,

$$U(\xi) \cong 2 + 2\xi - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{4\xi^5}{15} - \frac{34\xi^7}{315} + \frac{281\xi^9}{2835} + O(\xi^{11})$$

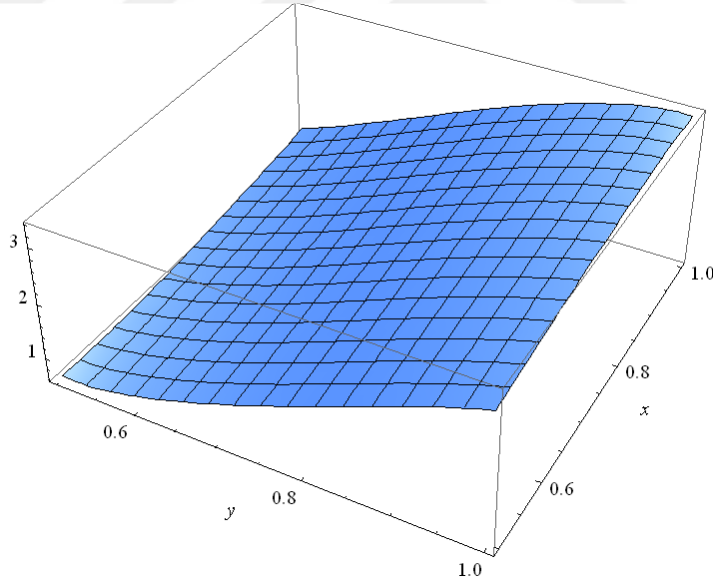
biçimindedir. Diğer yandan, Jimbo-Miwa denkleminin (4.1.9) analitik çözümünün $\xi = 0$ nokta civarındaki Taylor açılımı:

$$2 + 2 \operatorname{Tanh}(\xi) = 2 + 2\xi - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{4\xi^5}{15} - \frac{34\xi^7}{315} + \frac{124\xi^9}{2835} + O(\xi^{11})$$

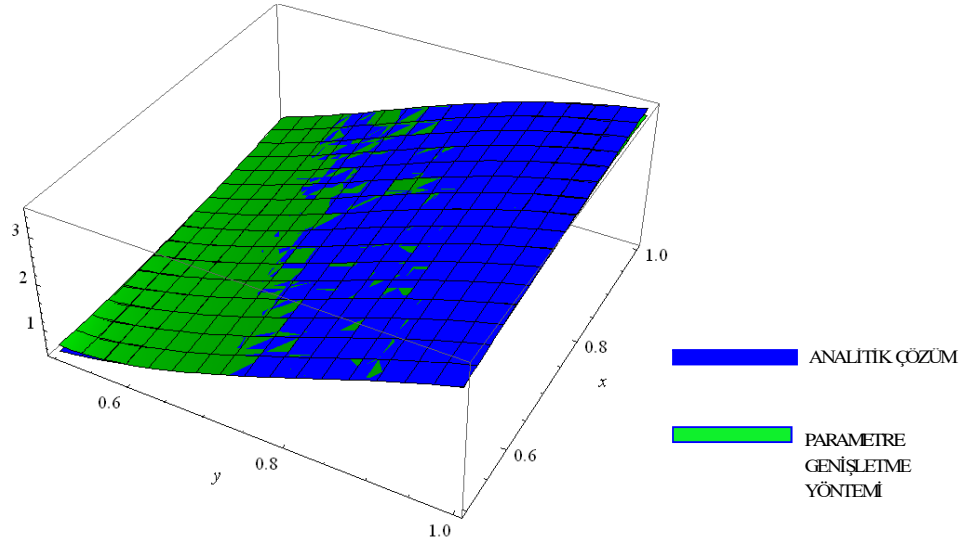
şeklindedir. Bu iki açılım karşılaştırıldığında, ilk beş terimin aynı olduğu görülür. Bu ise, pertürbasyona devam edildiğinde elde edilen çözümlerin analitik çözüme yakınsadığını açıkça göstermektedir.



Şekil 4.2.1. $\xi = x + 3y + 2z - t$ ve $0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere, (4.2.20) denkleminin çözümünün ve Jimbo-Miwa denkleminin tam çözümü olan $2 + 2 \tanh(\xi)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.2.2. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0$, $t = 3$, $0.5 \leq x \leq 1$ ve $0.5 \leq y \leq 1$ için (4.2.20) denkleminin çözümünün üç boyutlu grafiği



Şekil 4.2.3. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0$, $t = 3$, $0.5 \leq x \leq 1$ ve $0.5 \leq y \leq 1$ için (4.2.20) çözümü ile $2 + 2 \tanh(x + 3y - 3)$ çözümünün üç boyutlu grafiği

Tablo 4.2.1. $\xi = x + 3y + 2z - t$ (4.2.21) denkleminin $0 \leq \xi \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen sayısal sonuçların kıyaslanması:

ξ	Parametre Genişletme Yöntemi	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0.2	2.394750567832558	2.394750640561313	$5.311043697232 \times 10^{-8}$
0.4	2.759861500265934	2.759897924146533	$3.639283301293 \times 10^{-5}$
0.6	3.072736009736324	3.074099133325187	$1.363091706094 \times 10^{-3}$
0.8	3.309989970557172	3.328073539445834	$1.808353382606 \times 10^{-2}$
1	3.374000517905392	3.523188311156701	$1.491877808687 \times 10^{-1}$

4.3. Legendre Dalgacık Metodu

$$U'''(\xi) + 3(U'(\xi))^2 - 4U'(\xi) = 0 \quad (4.3.1)$$

formundaki Jimbo-Miwa denkleminde $U(0) = 2$, $U'(0) = 2$, $U''(0) = 0$ başlangıç şartları ile Legendre dalgacık metodunu uygulayalım. Burada gerçek çözüm $U(\xi) = 2 + 2 \tanh(\xi)$ dir. $k = 0$ ve $M = 4$ seçilirse, $U(\xi)$ yaklaşık fonksiyonu

$$U(\xi) = C^T \psi(\xi) = [c_{00} \quad c_{01} \quad c_{02} \quad c_{03} \quad c_{04}] \cdot \begin{bmatrix} \psi_{00} \\ \psi_{01} \\ \psi_{02} \\ \psi_{03} \\ \psi_{04} \end{bmatrix}$$

$$= [c_{00} \quad c_{01} \quad c_{02} \quad c_{03} \quad c_{04}] \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2\xi - 1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2\xi - 1)^2 - 1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2\xi - 1)^3 - 3(2\xi - 1)] \\ \frac{3}{8} [35(2\xi - 1)^4 - 30(2\xi - 1)^2 + 3] \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlik daha açık olarak

$$U(\xi) = c_{00} + c_{01} \sqrt{3}(2\xi - 1) + c_{02} \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2\xi - 1)^2 - 1] + c_{03} \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2\xi - 1)^3 - 3(2\xi - 1)] + c_{04} \frac{3}{8} [35(2\xi - 1)^4 - 30(2\xi - 1)^2 + 3] \quad (4.3.2)$$

biçiminde yazılabilir. Jimbo-Miwa denkleminde bulunan $U'(\xi)$, $U''(\xi)$ ve $U'''(\xi)$ fonksiyonlarını bulabilmek için ise D , D^2 ve D^3 türevleme matrisleri

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 123\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 843\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşturulur. Buradan da

$$U'(\xi) = C^T D\psi(\xi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2\xi-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2\xi-1)^2 - 1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2\xi-1)^3 - 3(2\xi-1)] \\ \frac{3}{8} [35(2\xi-1)^4 - 30(2\xi-1)^2 + 3] \end{bmatrix}$$

$$= c_{01} 2\sqrt{3} + c_{02} 6\sqrt{5} (2\xi - 1) + c_{03} \left(2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} [3(2\xi - 1)^2 - 1] \right) + c_{04} \left(18(2\xi - 1) + 21 [5(2\xi - 1)^3 - 3(2\xi - 1)] \right)$$

$$U''(\xi) = C^T D^2 \psi(\xi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 84\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2\xi-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2\xi-1)^2 - 1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2\xi-1)^3 - 3(2\xi-1)] \\ \frac{3}{8} [35(2\xi-1)^4 - 30(2\xi-1)^2 + 3] \end{bmatrix}$$

$$= c_{02} 12\sqrt{5} + c_{03} 60\sqrt{7}(2\xi-1) + c_{04} (120 + 210 [3(2\xi-1)^2 - 1])$$

$$U'''(\xi) = C^T D^3 \psi(\xi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 840\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2\xi-1) \\ \frac{\sqrt{5}}{2} [3(2\xi-1)^2 - 1] \\ \frac{\sqrt{7}}{2} [5(2\xi-1)^3 - 3(2\xi-1)] \\ \frac{3}{8} [35(2\xi-1)^4 - 30(2\xi-1)^2 + 3] \end{bmatrix}$$

$$= c_{03} 120\sqrt{7} + c_{04} (2520 (2\xi-1))$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler (4.3.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & c_{03} 120\sqrt{7} + c_{04} (2520(2\xi-1)) + 3 \cdot [c_{01} 2\sqrt{3} + c_{02} 6\sqrt{5}(2\xi-1) \\ & + c_{03} (2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} [3(2\xi-1)^2 - 1]) + c_{04} (18(2\xi-1) + 21 [5(2\xi-1)^3 - 3(2\xi-1)])]^2 \\ & - 4 [c_{01} 2\sqrt{3} + c_{02} 6\sqrt{5}(2\xi-1) + c_{03} (2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} [3(2\xi-1)^2 - 1]) + c_{04} (18(2\xi-1) + \\ & 21 [5(2\xi-1)^3 - 3(2\xi-1)])] = 0 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

bulunur. c_{00} , c_{01} , c_{02} , c_{03} , c_{04} katsayılarını hesaplamak için $2^k (M+1) = 5$ adet denkleme ihtiyaç duyulur. Bunun için ilk üç denklemin başlangıç koşulları kullanılarak,

$$U(0) = c_{00} + c_{01}(-\sqrt{3}) + c_{02}\sqrt{5} + c_{03}(-\sqrt{7}) + c_{04}3 - 2 = 0$$

$$U'(0) = c_{01}2\sqrt{3} + c_{02}(-6\sqrt{5}) + c_{03}12\sqrt{7} + c_{04}(-60) - 2 = 0$$

$$U''(0) = c_{02}12\sqrt{5} + c_{03}(-63\sqrt{7}) + c_{04}540 = 0$$

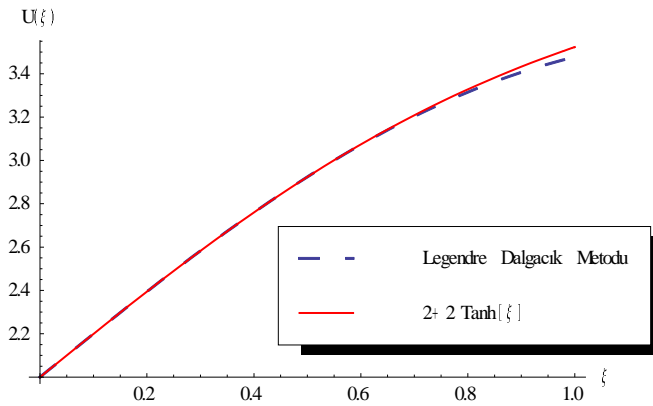
denklemleri elde edilir. Geriye kalan iki denklem ise (4.3.3) denkleminde ξ yerine $\xi = 0.04691$ ve $\xi = 0.23077$ değerleri ile hesaplanır. Böylece, beş bilinmeyenli beş denklemden oluşan denklem sistemi çözülerek c^T matrisi

$$c^T = [2.86088 \quad 0.436708 \quad -0.556906 \quad -0.665671 \quad 0.000810399]$$

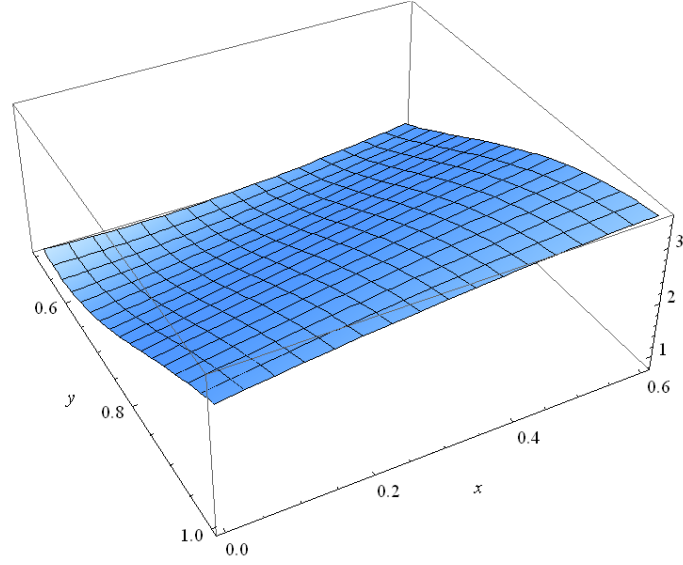
olarak bulunur ve daha sonra (4.3.2) denkleminde yerine yazılarak,

$$U(\xi) = 2.86088 + 0.436708\sqrt{3}(2\xi - 1) - 0.556906\frac{\sqrt{5}}{2}[3(2\xi - 1)^2 - 1] - 0.665671\frac{\sqrt{7}}{2}(5(2\xi - 1)^3 - 3(2\xi - 1)) + 0.000810399\frac{3}{8}[35(2\xi - 1)^4 - 30(2\xi - 1)^2 + 3] \quad (4.3.4)$$

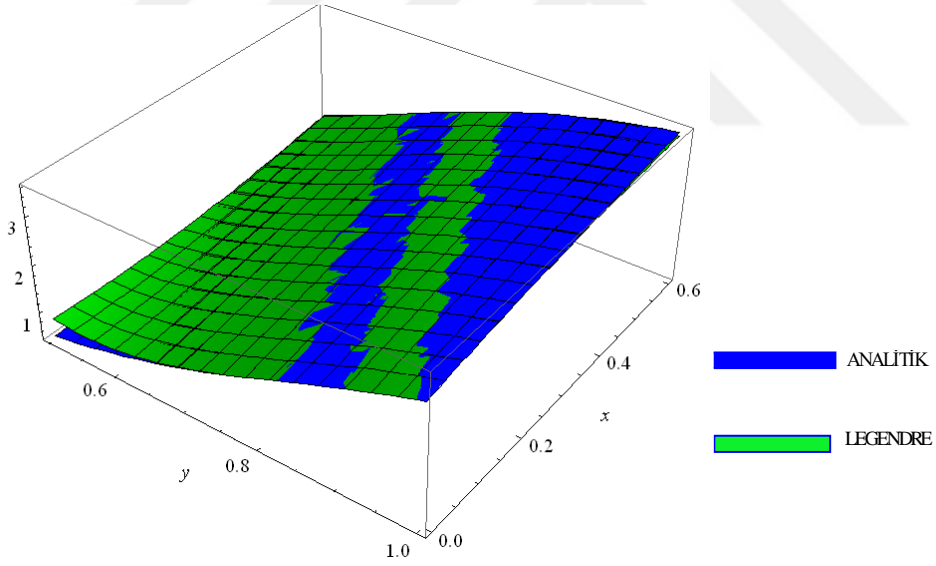
biçimindeki çözüm elde edilir. Aşağıda bu başlangıç değer problemine ait sayısal çözüm ve analitik çözüm grafiği birlikte verilmiştir.



Şekil 4.3.1. $M = 4$ için gerçek ve sayısal çözüm grafiği:



Şekil 4.3.2. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0$, $t = 2.5$, $0.5 \leq y \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 0.6$ değerleri için (4.3.4) çözümünün üç boyutlu grafiği



Şekil 4.3.3. $\xi = x + 3y + 2z - t$ olmak üzere, $z = 0$, $t = 2.5$, $0.5 \leq y \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 0.6$ için (4.3.4) çözümü ile $2 + 2 \tanh(x + 3y - 2.5)$ çözümünün üç boyutlu grafiği

Tablo 4.3.1. $\xi = x + 3y + 2z - t$ (4.3.4) denkleminin $0 \leq \xi \leq 1$ aralığındaki değerler için elde edilen sayısal sonuçların kıyaslanması:

ξ	Legendre Dalgacık Yöntemi	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0.2	2.39473143551264	2.394750640561313	$1.9185430353286 \times 10^{-5}$
0.4	2.76002983649978	2.759897924146533	$1.31943400829560 \times 10^{-4}$
0.6	3.07245263753218	3.074099133325187	$1.6464639102405 \times 10^{-3}$
0.8	3.31509233037656	3.328073539445834	$1.2981182505214 \times 10^{-2}$
1	3.47757646399559	3.523188311156701	$4.5611834778453 \times 10^{-2}$

5. SONUÇ

(3+1) Boyutlu dalgaları tanımlamak için kullanılan lineer olmayan Jimbo-Miwa denkleminin sırası ile Lagrange çarpan metodu, Parametre genişletme metodu ve Legendre dalgacık metodu başarı ile uygulanmıştır.

Lagrange çarpan metodu ile ξ civarında önce düzeltme fonksiyoneli tanımlanmış ve bu fonksiyonelin lineer olmayan terimler kısıtlanarak Lagrange çarpanı λ hesaplanmıştır. Bu çarpan yaklaşım fonksiyonelinde yerine yazılarak, ilk yaklaşım çözümü elde edilmiştir. Bunu takiben ikinci iterasyon yaklaşık çözümü bulunmuştur. Daha sonra Parametre genişletme yöntemiyle küçük bir p parametresine bağlı genel çözüm belirlenerek, katsayıların p parametresine göre genişletilmesiyle J-M denkleminin bu metot ile çözümü elde edilmiştir. Bu çözüm yardımıyla p parametresine bağlı genişletilmiş olan katsayılar $p = 1$ için tek tek hesaplanmıştır. Lagrange çarpan ve Parametre genişletme yöntemlerinin sonucunda bulunan çözümlerin $[0,1]$ aralığındaki değerleri tablolar ile gösterilerek üç boyutlu grafikleri Wolfram Mathematica 8 programı yardımıyla çizilmiştir. Son olarak Jimbo-Miwa denkleminin çözümü için Legendre dalgacık metodu uygulanmıştır. Bu metodun kullanılmasında önemli olan türevleme matrisi öncelikli olarak oluşturulmuş, ele alınan problemdeki diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları ile cebirsel denklem sistemi elde edilmiş ve bu denklem sistemi bilinmeyen c_{mn} katsayıları için çözülmüştür. Denklem sistemlerinin çözümünde MATLAB programından yararlanılmıştır. Elde edilen bu katsayılar, önceden tanımlanan çözüm fonksiyonunda yerine konularak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar ve yapılan literatür araştırmaları doğrultusunda aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Lagrange çarpan metodu ile sadece birkaç iterasyon ile lineer olmayan Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümüne yakınsadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, Lagrange çarpan metodunun başarısı tamamen ilk yaklaşım fonksiyonunun ve Lagrange çarpanı olan λ nın iyi belirlenmesine bağlıdır.

Parametre genişletme metodu, Jimbo-Miwa denkleminin yaklaşık çözümlerini üretebilmek için kuvvetli bir araçtır. Ayrıca bu metot, bu çalışmada kullanılan diğer sayısal yöntemlere göre daha az hesaplama gerektirmektedir.

Legendre dalgacık metodunun ise, Jimbo-Miwa denklemin kesin ve yaklaşık çözümlerini bulabilmek için uygun ve etkili bir yöntem olduğu sonucuna varılmıştır.



KAYNAKÇALAR

1. Boyce, William E., DiPrima, Richard C. Elementary differential equations and boundary value problems. Ed: Ken Santor, Mary Jochen, Jhon Wiley&Sons, Inc, New York, 2001, 1310 s.
2. Gözükızıllı, Ö.F., Akçağıl, S., Abdollahzadeh, A., Malekshah, M. M., The tanh-coth method for some non-linear pseudo parabolic equations with exact solutions. *Advances in Difference Equations*. 2013, (1), 143-161.
3. Hua, H.W. A Generalized extended F-expansion method and its application in (2+1)-dimensional dispersive long wave equation. *Commun. Theor. Phys*. 2006, 46(4), 580, DOI:10.1088/0253-6102/46/4/002.
4. Shang, Y. The extended hyperbolic function method and exact solutions of long-short wave resonance equations, *Chaos Solitons and Fractals*. 2008, 36(3), 762-771.
5. Wang, M. L., Zhou, Y. B., Li, Z. B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. *Physics Letters A*. 1996, 216, 67-75.
6. Mohyud-Din, S. T., Yildirim, A., Sariaydin, S. Approximate series solutions of the viscous Cahn-Hilliard equation via the homotopy perturbation method. *World Appl. Sci. J*. 2010, 11(7), 813-818.
7. Changbum, C., Rathinasamy, S. Homotopy perturbation technique for solving two-point boundary value problems— comparison with other methods. *Computer Physics Communications*. 2010, 181(6), 1021–1024, DOI: 10.1016/j.cpc.2010.02.007.
8. Wang, M., Li, X., Zhang, J. The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Phys. Lett. A*. 2008, 372, 417-423.
9. Khan, K., Akbar, M. A. Traveling wave solutions of nonlinear evolution equations via the enhanced (G'/G) -expansion method. *J Egyptian Math Soc* 2014, 22(2), 220–226.
10. Hu, H. C., Tang, X.Y., Lou, S.Y., Liu, Q. P. Variable separation solutions obtained from Darboux transformations for the asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004, 22, 327–334.
11. Parkes, E.J., Duffy, B. R., Abbott, P. C. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. *Physics Letters A*. 2002, 295, 280–286.

12. Ablowitz, M.J., Segur, H. Solitons and inverse scattering transform. SIAM, Philadelphia. 1981, DOI:10.1137/1.97816119708.
13. Darvishi, M.T., Najaf, M. Some complexiton type solutions of the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation. International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering. 2011, 5(7), 1097-1099.
14. Hong, W., Oh, K. New solitonic solutions to a (3+1) dimensional Jimbo-Miwa equation, Computer and Mathematics with Applications. 2000, 39, 29-31.
15. Senthilvelan, M. On the extended applications of homogenous balance method. Appl. Math. and Computation. 2001, 123, 381-388.
16. Tang, X.Y., Liang, Z.F. Variable separation solutions for the (3+1) dimensional Jimbo Miwa equation, Phys. Lett. A. 2006, 351, 398–402.
17. Öziş T., Aslan İ. Exact and explicit solutions to (3+1)-dimensional Jimbo Miwa equation via the exp-function method, Physics Letters A. 2008, 372, 7011-7015.
18. Cao, B. Solutions of Jimbo Miwa equation and Konopelchenko-Dubrovsky equations, Acta. Appl. Math. 2010, 112,181-203.
19. Abazari R. The Modified G'/G –expansion method for exact solutions of the (3+1) –dimensional Jimbo Miwa equation. Çankaya University Journal of Science and Engineering. 2012, 9(1), 59-61.
20. Lu, Z., Su, J., Xie, F. Constructions of exact solutions to the Jimbo Miwa equation through Bäcklund transformation and symbolic computation. Computers & Mathematics with Applications. 2013, 65, 648-656.
21. Kadkhoda, N. Exact solutions of (3+1) dimensional nonlinear evolution equations. Caspian Journal of Mathematical Sciences. 2015, 4(2), 189-195.
22. Singh, M. New exact solutions for (3+1) dimensional Jimbo Miwa equation. Nonlinear Dynamics. 2015, 84(2), 875-880.
23. Hızıl, E. Homotopy perturbation method for the Jimbo Miwa equation. Proceedings of 10th WSEAS International Conference on Evolutionary Computing. 2009.
24. He, J.H. An elementary introduction to recently developed asymptotic methods and nanomechanics in textile engineering. International Journal of Modern Physics B (IJMPB). 2008, 22(21),3487–3578.

25. Biazar, J., Ghazvini, H. Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples. *Computers & Mathematics with Applications*. 2007, 54(7-8), 1047–1054.
26. Ganji, D. D., Afrouzi G., Talarposhti R. Application of He's variational iteration method for solving the reaction-diffusion equation with ecological parameters. *Computers & Mathematics with Applications*. 2007, 54(7-8), 1010-1017.
27. Ganji D. D., Nourollahi, M., Rostamian M. A comparison of variational iteration method with Adomian's decomposition method in some highly nonlinear equations. *International Journal of Science & Technology*. 2007, 2(2), 179-188.
28. He, J. H. Variational iteration method-some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007, 34, 3–17.
29. He, J. H., Wu, X. H. Variational iteration method: new development and applications. *Computers & Mathematics with Applications*. 2007, 54(7-8), 881–894.
30. Khaleghi, H., Ganji, D. D., Sadighi A. Application of variational iteration and homotopy-perturbation methods to nonlinear heat transfer equations with variable coefficients. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 2007, 52(1), 25–42.
31. Lu, J. He's variational iteration method for the modified equal width equation. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009, 39(5), 2102–2109.
32. Marinca, V., Herisanu, N. Periodic solutions for some strongly nonlinear oscillations by He's variational iteration method. *Computers & Mathematics with Applications*. 2007, 54(7-8), 1188–1196.
33. Pakar, I., Bayat, M. On the approximate analytical solution for parametrically nonlinear excited oscillators. *Journal of Vibroengineering*. 2012, 14(1), 423–429.
34. Sadighi, A., Ganji, D.D. Exact solutions of nonlinear diffusion equations by variational iteration method. *Computers & Mathematics with Applications*. 2007, 54(7-8), 1112–1121.
35. Slota, D., Zielonka, A. A new application of He's variational iteration method for the solution of the one-phase Stefan problem. *Computers & Mathematics with Applications*. 2009, 58(11-12), 2489–2494.

36. Soltanian, F., Karbassi, S.M., Hosseini, M.M. Application of He's variational iteration method for solution of differential-algebraic equations. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009, 41(1), 436–445.
37. Tatari, M., Dehghan, M. On the convergence of He's variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007, 207(1), 121–128.
38. Wazwaz, A.M. The variational iteration method: A powerful scheme for handling linear and nonlinear diffusion equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2007, 54(7-8), 933–939.
39. Yildirim, A., Cherruault, Y. Analytical approximate solution of a sir epidemic model with constant vaccination strategy by homotopy perturbation method. *Kybernetes*. 2009, 38(9), 1566–1575.
40. Yousefi, S., Dehghan, M., Lotfi, A. Finding the optimal control of linear systems via He's variational iteration method. *International Journal of Computer Mathematics*. 2010, 87(5), 1042–1050.
41. Amore, P., Aranda, A. Improved Lindstedt-Poincar'e method for the solution of nonlinear problems. *Journal of Sound and Vibration*. 2005, 283(3-5), 1115–1136.
42. Cheung, Y., Chen, S., Lau, S. A modified Lindstedt-Poincar'e method for certain strongly non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1991, 26(3-4), 367–378.
43. Ganji, S.S., Sfahani, M.G., Tonekaboni, S.M.M., Moosavi, A., Ganji, D.D. Higher-order solutions of coupled systems using the parameter expansion method. *Mathematical Problems in Engineering*. 2009, 2009, 1-20.
44. He, J.H. Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005, 26(3), 827–833.
45. He, J. H., Shou, D. H. Application of parameter-expanding method to strongly nonlinear oscillators. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2007, 8, 121–124.
46. Kaya, M., Demirbag, S.A. Application of parameter expansion method to the generalized nonlinear discontinuity equation. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009, 42(4), 1967–1973.
47. Liu, H. M. Approximate period of nonlinear oscillators with discontinuities by modified Lindstedt-Poincare method, *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005, 23(2), 577–579.

48. Öziş, T., Yildirim, A. Determination of periodic solution for a $u^{1/3}$ force by He's modified Lindstedt-Poincaré method. *Journal of Sound and Vibration*. 2007, 301(1-2), 415–419.
49. Ramos, J. An artificial parameter-Linstedt-Poincaré method for oscillators with smooth odd nonlinearities. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009, 41(1), 380–393.
50. Xu, L. Application of He's parameter-expansion method to an oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire. *Physics Letters A*. 2007, 368(3-4), 259–262.
51. Xu, L. He's parameter-expanding methods for strongly nonlinear oscillators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007, 207(1), 148–154.
52. Ahmad, F.B., Alomari, A.K., Bataineh, A.S., Sulaiman, J., Hashim, I. On the approximate solutions of systems of ODEs by Legendre operational matrix of differentiation. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016, 36, 483-494.
53. Kumar, D., Upadhyay, S., Singh, S., Rai, K.N. Legendre wavelet collocation solution for system of linear and nonlinear delay differential equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2017, 3, 295-310.
54. Secer, A., Altun, S. A New operational matrix of fractional derivatives to solve systems of fractional differential equations via Legendre wavelets. *Mathematics*. 2018, 6(11), 238.
55. Mohammadi, F., Hosseini, M.M. A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations. *Journal of the Franklin Institute*. 2011, 348 (8), 1787–1796.
56. Dizicheh, A.K., Ismail, F., Kajani, M.T., Maleki, M. A Legendre wavelet spectral collocation method for solving oscillatory initial value problems. *Journal of Applied Mathematics*. 2013. DOI:10.1155/2013/591636.
57. Khader, M.M., Mahdy A.M.S., Shehata, M.M. An integral collocation approach based on Legendre polynomials for solving Riccati, logistic and delay differential equations. *Applied Mathematics*. 2014, 5, 2360-2369.
58. Gümgüm, S., Özdek, D.E., Özaltun, G., Bildik, N. Lineer ve lineer olmayan adi gecikmeli diferansiyel denklemlerin Legendre dalgacık çözümleri. *Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa* 2019, 93 s. (Yüksek Lisans Tezi).
59. Baskonus, H. M. New acoustic wave behaviors to the Davey-Stewartson equation with power nonlinearity arising in fluid dynamics. *Nonlinear Dynamics*. 2016, 86(1), 177-183.

60. Ma, W., Zhu, Z. Solving the (3+1) Generalized KP and BKP equations by the multiple exp-function algorithm. *Applied Mathematics and Computation*. 2012, 218, 11871-11879.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülay FİDAN

Doğum Yeri ve Yılı : İstanbul, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta :gulay-fidan@outlook.com

Eğitim Durumu

Lise : İstanbul Kadıköy Lisesi, 2011

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016