T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

ESNEK DİKDÖRTGENSEL METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Sedat ASLAN

Danışman
Prof. Dr. Ali MUTLU
II. Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

MANİSA–2020

TEZ ONAYI

Sedat ASLAN tarafından hazırlanan **"Esnek Dikdörtgensel Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri"** adlı tez çalışması 13/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
II. Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Erdal EKİCİ** Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Cihangir ALACA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Sena ÖZEN YILDIRIM** Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Sedat ASLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Φ	Boş Esnek Küme
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\tilde{\mathfrak{D}}_R$	Esnek Dikdörtgensel Metrik
$((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$	Esnek Dikdörtgensel Metrik Uzay
$\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$	Esnek Dizi
(F,E)	Esnek Küme
$\tilde{\cup}$	Esnek Kümelerde Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kümelerde Kesişim
$\tilde{\mathfrak{D}}$	Esnek Metrik
$(x,F(x))$	Esnek Nokta
(a,r)	Esnek Parametrik Skaler
(X,τ,E)	Esnek Topolojik Uzay
$\tilde{\pi}$	Skaler Değerli Parametrik Fonksiyon
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında değerli bilgi ve birikimini benimle paylaşan, desteklerini esirgemeyen ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olmak için ellerinden gelenin fazlasını sunan kendilerini tanımaktan ve öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum sayın hocalarım Prof. Dr. Ali MUTLU ve Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ ’a teşekkürü borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca çalışmam boyunca her anlamda bana destek olan ve bu günlere gelmemde büyük emeği olan aileme, beni sürekli motive eden hayattaki şansım Rengin KELEKÇİ ’ye ve tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sedat ASLAN
Manisa, 2020

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Esnek Dikdörtgensel Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Sedat ASLAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali MUTLU

II. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak çalışmaya ön hazırlık oluşturması açısından esnek küme teorisi, esnek metrik uzaylar ve sabit nokta teorisiyle ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

Esnek kümeler üzerinde esnek dikdörtgensel metrik tanımlanmış ve bu metrik $\mathfrak{D}_R$ ile gösterilmiştir. Esnek sabit nokta teoremlerini elde etmek ve ispatlamaya yönelik, esnek dikdörtgensel metrik uzaylarda esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi, esnek büzülme dönüşümü, esnek sabit nokta gibi kavramların tanımları verilmiştir. Altyapının oluşturulmasıyla esnek dikdörtgensel metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoremi, Caristi ve Kannan sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Son olarak iki esnek dönüşüm için ortak nokta kavramı kullanılarak bu iki dönüşümün zayıf uyumlu (weak compatible) olması durumu tanımlanmıştır. Değişmeli dönüşümler için ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca Jungck tipi esnek dizileri ve azalmayan (non- decreasing) fonksiyonları kullanarak zayıf uyumlu dönüşümler için ortak esnek sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Metrik, Dikdörtgensel Esnek Metrik Uzay, Sabit Nokta Teoremi.

2019, 49 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Fixed Point Theorems in Rectangular Soft Metric Spaces

Sedat ASLAN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ali MUTLU

Co-Supervisor: Assist. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ

In this thesis study at first fundamental concepts of soft set theory, soft metric spaces and fixed point theory are mentioned in order to preperation of the work in terms of preliminaries.

Soft rectangular metric is defined on soft sets by using parametric scaler valued functions on soft sets and this soft metric is symbolised by $\mathfrak{D}_R$. The definitions of some concept such as soft sequence, soft convergent sequence, soft Cauchy sequence, soft contraction, soft fixed point are given to obtain and prove soft fixed point theorems. Banach fixed point theorem, Caristi and Kannan fixed point theorems are proved in soft rectangular metric spaces by the creation of the substructure.

Finally, by using the concept of coincidience point for two soft mappings the situtation of weak compatible of these two soft mappings is defined. Common soft fixed point theorem for commuting mapping is proved. Also by using Jungck type soft sequences and non-decreasing functions, common soft fixed point theorem is proved for weak compatible mappings.

Keywords: Soft Set, Soft Metric, Rectangular Soft Metric Space, Fixed Point Theorem.

2019, 49 pages

1. GİRİŞ

Esnek küme kavramı ilk olarak 1999 yılında Rus matematikçi Dmitri Molodtsov tarafından ortaya atılmıştır [1]. Esnek küme teorisi belirsizliklerle ve açık olarak tanımlanmamış nesnelerle ilgili olan yeni bir genel matematiksel araç olarak literatürde yerini almıştır. Esnek küme kavramının tanımlanmasından bu yana bilgisayar bilimleri, mühendislik bilimleri, fen ve ekonomi gibi pek çok alanlarda teorinin uygulamaları sunulmuştur.

Esnek küme teorisinin cebirsel ve topolojik özellikleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Maji, Biswas ve Roy esnek kümeler üzerinde cebirsel işlemler üzerinde çalışmışlardır [2], [3]. Esnek topolojik uzaylar ilk olarak 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından tanımlanıştır [4]. Ayrıca esnek topolojik uzayların bazı özellikleri Zorlutuna, Aygünoğlu, Aygün ve Varol tarafından incelenmiştir [5], [6], [7]. Esnek dönüşümlerin ve esnek sürekli dönüşümlerin özellikleri ise Aras, Sönmez, Çakallı ve Zorlutuna ve Çakır tarafından çalışılmıştır [8-10].

Diğer taraftan sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar 1912 yılında Brouwer [11] tarafından başlatılmıştır. Brouwer $\mathbb{R}^n$ de kapalı birim yuvardan yine aynı kapalı birim yuvara tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını göstermiştir. Bu teorem literatüre "Brouwer sabit nokta teoremi" olarak geçmiştir. 1922 yılında Banach [12] tam metrik uzayları dikkate alarak Banach büzülme prensibi olarak da bilinen Banach sabit nokta teoremini vererek ilk defa tam metrik uzaylarda bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini garanti eden teoremi sunmuştur. Daha sonra Kannan, Caristi, Chatterjea, Reich, Hardy and Rogers, Ciric ve Jungck gibi matematikçiler çeşitli tip büzülmeler ve sabit nokta teoremleri üzerine çalışarak bu alana katkı sağlamışlardır [13-21].

Metrik uzayların birçok genelleştirmesi mevcut olup bunlardan biri de 2000 yılında Branciari tarafından tanımlanan dikdörtgensel (rectangular) metrik uzaylardır [22]. Ayrıca farklı tip metrik uzayların tanımlanması ve kullanılmasıyla sabit nokta teorisi üzerine çalışmalar zenginleştirilmiştir [23-26].

Das ve Samanta 2013 yılında esnek kümeleri ve esnek kümeler üzerindeki cebirsel işlemleri kullanarak "esnek metrik" kavramını ortaya atmıştır [27], [28]. 2017 yılında Hosseinzadeh [29] esnek noktaları, Das ve Samanta'dan farklı bir biçimde ifade ederek esnek metrik uzayları yeniden tanımlamıştır ve bu konuda farklı bir bakış açısı geliştirmiştir. Ayrıca Hosseinzadeh'in bu çalışması esnek metrik uzayların temel özelliklerinin incelenmesinin yanı sıra esnek büzülme, esnek sabit nokta kavramlarının ortaya atılması ve Banach, Caristi gibi bazı sabit nokta teoremlerinin esnek metrik uzaylarda ifade ve ispat edilmesi bakımından önem taşımaktadır. Esnek dönüşümler, esnek metrik uzaylar ve farklı tip esnek metrik uzaylarla ilgili çalışmalar [30-36] da bulunabilir.

Bu tez çalışmasında dikdörtgensel metrik kavramı esnek kümeler üzerinde ifade edilerek "Esnek dikdörtgensel metrik uzaylar" tanımlandı. Esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi, esnek büzülebilirlik gibi kavramlar esnek dikdörtgensel metrik uzaylarda ifade edilerek bazı esnek sabit nokta teoremleri elde edildi ve ispatlandı.

Diğer taraftan tezin son halini almasında uluslararası konferanslarda sunulan bildiriler [37-40] ve [41], [42] makaleleri katkı sağlamıştır.

Bu tezde farklı tip esnek metrik olarak tanımlanan $\mathfrak{D}_R$ esnek dikdörtgensel metrik göz önüne alınarak literatürde bilinen sabit nokta teoremlerinin elde edilmesi ve ispatlanması amaçlanmaktadır. Bununla birlikte bu tez çalışmasının sabit nokta teorisi ve esnek metrik uzaylar üzerine çalışan matematikçiler için faydalı bir kaynak olması hedeflenmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde esnek küme teorisi ve sabit nokta teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1. Esnek küme teorisi

Bu alt bölümde esnek kümeler ve esnek topolojilerle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilir.

X nesnelerin evrensel kümesi ve E, X 'deki nesnelerle ilgili parametrelerin kümesi olsun. $P(X)$, X 'in kuvvet kümesini göstersin ve $A, B \subseteq E$ olsun.

Tanım 2.1.1. [1] X evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(X)$, X 'in kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olmak üzere;

$$F : A \to P(X)$$

ise (F, A) çifti X üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Herhangi bir (F, A) esnek kümesi, her $e \in A$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e \in E \setminus A$ için $F(e) = \emptyset$ olmak üzere (F, E) şeklinde bir esnek kümeye genişletilebilir.

Tanım 2.1.2. [2] (F, A) ve (G, B), X üzerinde iki esnek küme olsun.

i) $A \subseteq B$, ve

ii) Her $a \in A$ için $F(a) \subseteq G(a)$ ise

(F, A)'ya (G, B)'nin esnek alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ile gösterilir. (F, A), (G, B) 'nin esnek alt kümesi ise (F, A) 'ya (G, B) 'nin esnek üst kümesi denir ve $(F, A) \tilde{\supseteq} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [2] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin kesişimi (H, C) esnek kümesidir. $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ olmak üzere $H(c) = F(c) \cap G(c)$ 'dir. Bu kesişim $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. [2] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin birleşimi yine bir esnek kümedir. $C = A \cup B$ ve $\forall \varepsilon \in C$ için,

$$H(\varepsilon)=\begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon\in A-B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon\in B-A \\ F(\varepsilon)\cup G(\varepsilon), & \varepsilon\in A\cap B. \end{cases}$$

Bu bağıntı $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [2] X üzerindeki bir (F,A) esnek kümesi $\forall a\in A$ için $F(a)=\varnothing$ ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. [2] X üzerindeki $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesi $\forall a\in A$ için $F(a)=X$ olacak şekilde tanımlı bir (F,X) esnek kümesidir.

Tanım 2.1.7. [2] (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. (F,A)'nın relatif tümleyeni $(F,A)^c$ olarak gösterilir ve $F^c: A\to P(X)$, her $a\in A$ için $F^c(a)=X-F(a)$ ile verilen bir dönüşüm olmak üzere $(F,A)^c=(F^c,A)$ ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.8. [2] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde $(F,A)-(G,B)=\{(x,F(x)): F(x)\notin G(B),\ x\notin B\}$ esnek kümesidir.

Tanım 2.1.9. [4] τ, X üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu ve E parametre kümesi olsun. Bu takdirde τ aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa X üzerinde bir esnek topoloji olarak adlandırılır.

i) $\Phi, \tilde{X}=(F,X)\in\tau$,

ii) τ 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi τ 'ya aittir.

iii) τ ' daki herhangi iki esnek kümenin kesişimi yine τ 'ya aittir.

(X,τ,E) üçlüsüne X üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.10. [8] (X,τ,E) ve (Y,τ',E) iki esnek topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x_e),E)$ ' nin her bir (H,E) esnek komşuluğu için $f((F,E))\subset(H,E)$ olacak şekilde (x_e,E)'nin bir (F,E) esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde f 'e (x_e,E)'de esnek sürekli dönüşüm denir.

Lemma 2.1.11. [8] (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. $1_X : X \to X$ birim dönüşümü esnek sürekli olmak zorunda değildir.

İspat: $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\phi,\tilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$ ve

$\tau'=\{\phi,\tilde{X},(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E)\}$, X üzerinde iki esnek topolojik uzay ve

$(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E),$ X üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere

$F_1(e_1)=\{h_2\}, F_1(e_2)=\{h_1\}, F_2(e_1)=\{h_2,h_3\}, F(e_1)=\{h_1\}, F_2(e_2)=\{h_1,h_2\}, F_3(e_1)=\{h_3\},$

$F_3(e_2)=\{h_1,h_2\},\ F_4(e_1)=\varnothing,\ F_2(e_2)=\{h_1\};$

ve

$G_1(e_1)=\{h_2\},\ G_1(e_2)=\{h_1\},\ G_2(e_1)=\{h_2,h_3\},\ G_2(e_2)=\{h_1,h_2\},\ G_3(e_1)=\{h_1,h_2\},$

$G_3(e_2)=X,\ G_4(e_1)=\{h_2\}, G_4(e\ )=\{h_1,h_2\}$

olarak tanımlansın. $f^{-1}((G_3,E))=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}\notin(X,\tau,E)$ ve

$f^{-1}((G_4,E))=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}\notin(X,\tau,E)$ dir. Bundan dolayı $f=1_x : X\to X$ dönüşümü esnek sürekli değildir.

Tanım 2.1.12. [29] $A\subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. Eğer $r\in\mathbb{R}$ ve $a\in A$ ise (a,r) sıralı ikilisi esnek parametrik skaler olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.13. [29] $A\subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. (a,r) ve (b,r') iki esnek parametrik skaler olsun. Bu takdirde esnek parametrik skalerler arasındaki toplamayı ve esnek parametrik skalerler üzerindeki skalerler çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$(a,r)\dot{+}(b,r')=(\{a,b\},r+r')$ ve

Her $\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lambda(a,r)=(a,\lambda r)$.

Tanım 2.1.14. [29] (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun.

$f(A,F(A))=(f_1,f_2)(A,F(A))$ olacak şekilde $f_1 : A\to A$ ve $f_2 : F(A)\to\mathbb{R}$

fonksiyonları varsa (F, A) üzerindeki bir f fonksiyonu parametrik skaler değerli bir fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde yukarıdaki tanımı $f_1 : A \times A \to A$ ve $f_2 : F(A) \times F(A) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(A \times A, F(A) \times F(A)) = (f_1, f_2)(A \times A, F(A) \times F(A))$ ile $f : (F, A) \times (F, A) \to (A, \mathbb{R})$ şeklinde genişletilebilir.

2.2. Metrik uzaylar ve esnek metrik uzaylar

Bu bölümde metrik uzaylar ve esnek kümeler (uzaylar) üzerinde tanımlı esnek metriklerle ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1. [43] X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

M(1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$

M(2) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M(3) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$

M(4) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.2.2. [22] X boştan farklı bir küme olsun ve $d : X \times X \to [0, \infty]$ fonksiyonunun her $x, y \in X$ ve her biri x ve y ’den farklı $u, v \in X$ ’ler için aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $d(x, y) = d(y, x),$
3. $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y).$

Bu takdirde d dönüşümü bir dikdörtgensel metrik olarak adlandırılır ve (X, d) ikilisine dikdörtgensel metrik uzay denir.

Tanım 2.2.3. [44] $X \neq \emptyset$ ve $x \in X$ olsun. $f : X \to X$ fonksiyonu için $f(x) = x$ ise $x \in X$ ’ e f ’in sabit noktası denir.

Tanım 2.2.4. [44] (X,d) metrik uzay ve $T:X\to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le\lambda\, d(x,y)$$

şartını sağlayan bir $\lambda\ge 0$ sabiti varsa T 'ye Lipschitz dönüşümü (Lipschitz mapping) denir. Burada $0\le\lambda<1$ ise T 'ye büzülme veya daralma (contraction) dönüşümü ve $\lambda=1$ ise T 'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir. Eğer her $x,y\in X$ için ($x\ne y$)

$$d(Tx,Ty)<d(x,y)$$

şartı sağlanıyorsa T 'ye büzülebilir (contractive) dönüşüm denir. Bu durumda aşağıdaki gerektirmenin doğruluğu kolayca görülebilir.

Büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz şartını sağlar.

Teorem 2.2.5. [12] (Banach Büzülme Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le\lambda\, d(x,y)$$

olacak şekilde bir $\lambda\in(0,1)$ sabiti bulunabiliyorsa T 'nin X 'de bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 2.2.6. [29] (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\pi}:A\times A\to A$ bir parametrik skaler değerli bir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\tilde{\mathfrak{D}}:(F,A)\times(F,A)\to(A,\mathbb{R}^+\cup\{0\})$ parametrik skaler değerli fonksiyonunun (F,A), X üzerinde bir esnek metrik olduğu söylenir.

1. $\tilde{\mathfrak{D}}((a,F(a)),(b,F(b)))\succeq(\tilde{\pi}(a,b),0)$, $a=b$ iken eşitlik sağlanır.
2. Her $a,b\in A$ için $\tilde{\mathfrak{D}}((a,F(a)),(b,F(b)))=\tilde{\mathfrak{D}}((b,F(b)),(a,F(a)))$
3. Her $a,b,c\in A$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}((a,F(a)),(c,F(c)))\prec\tilde{\mathfrak{D}}((a,F(a)),(b,F(b)))\tilde{+}\tilde{\mathfrak{D}}((b,F(b)),(c,F(c)))$$

$((F,A),\tilde{\mathfrak{D}})$ ikilisine X üzerinde bir esnek metrik uzay denir.

Tanım 2.2.7. [29] (F,A) ve (F',A') sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek küme olsun. $f_1 : A \to A'$ ve $f_2 : F(A) \to F'(A')$, $F(A) = \{F(a) : a \in A\}$ ve $F'(A') = \{F'(a') : a' \in A'\}$ olmak üzere dönüşümler olsun. Bu takdirde $f = (f_1, f_2) : (F,A) \to (F',A')$ ikilisi

$$f(V,B)(e') = \begin{cases} \cup_{e \in f_1^{-1}(e') \cap B} f_2(V(e)) & f_1^{-1}(e') \cap B \neq \varnothing \\ \varnothing & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Bu durumda f esnek dönüşüm olarak adlandırılır ve $(f(V,A),C)$, (V,B) esnek kümesinin esnek görüntüsü olarak adlandırılır. $(W,C) \in (F',A')$ olsun. Bu takdirde (W,C)'nin yukarıda tanımlanan f esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(W,C)(e) = \begin{cases} f_2^{-1}(W(f_1(e))) & f_1(e) \in C \\ \varnothing & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olmak üzere, $f^{-1}(W,C)$ ile gösterilen X üzerinde esnek kümedir.

Tanım 2.2.8. [29] $A \subseteq E$ parametrelerin kümesi olsun. Esnek parametrik skalerlerin bir dizisi $\{(a_n, r_n)\}$'dir ($i \neq j$ için $a_i = a_j$ olabilir). $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ olacak şekilde bir $r \in R$ mevcutsa $\{(a_n, r_n)\}$ bir esnek parametrik skalere yakınsaktır denir ve $\forall a \in A$ için $(a_n, r_n) \to (a, r)$ olarak yazılır.

Tanım 2.2.9. [29] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\{(a_n, r_n)\}$ ($i \neq j$ için $a_i = a_j$ olabilir) esnek parametrik skalerlerin bir dizisi olsun. $(a_{n+1}, r_{n+1}) \preceq (a_n, r_n)$ ise $\{(a_n, r_n)\}$ azalan $(a_n, r_n) \preceq (a_{n+1}, r_{n+1})$ ise $\{(a_n, r_n)\}$ artan olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.10. [29] (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. $f(F,A) = (f_1, f_2)(A, F(A))$ olacak şekilde $f_1 : A \to A$ ve $f_2 : F(A) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları varsa (F,A) üzerindeki parametrik skaler değerli f fonksiyonu azalan (artan) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.11. [29] (F, A), X üzerinde bir esnek ve $\tilde{\mathfrak{D}}, (F, A)$ üzerinde bir esnek metrik olsun. Her $(c, x) \in (F, A)$ esnek noktası için (c, x) ve $(a, F(a))$ arasındaki uzaklık $\tilde{\mathfrak{D}}((c, x), (a, F(a)))$ ile gösterilir.

X, d metriği ile birlikte bir metrik uzay ise (c, x) ve $(a, F(a))$ arasındaki uzaklık

$\tilde{\mathfrak{D}}((c, x), (a, F(a))) = (\tilde{\pi}(c, a), \inf_{y \in F(a)} d(x, y))$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.12. [4] (X, τ) bir esnek topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun. $x \in F_A$, $y \in G_B$ ve $F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi$ olacak şekilde F_A ve G_B esnek açık kümeleri mevcutsa (X, τ) esnek topolojik uzayı esnek Hausdorff uzayı veya esnek T_2 uzayı olarak adlandırılır.

Lemma 2.2.13. [29] Her esnek metrik uzay esnek Hausdorff uzayıdır.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Esnek dikdörtegensel metrik uzaylar

Bu bölümde esnek dikdörtgensel metrik uzay tanımı verilerek, sabit nokta teoremlerinde kullanmaya yönelik esnek dikdörtgensel metriğin kullanılmasıyla esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi tanımları ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.1. [29] $A \subseteq E$ parametrelerin bir kümesi olsun. Eğer $r \in \mathbb{R}$ ve $a \in A$ ise (a,r) sıralı ikilisi esnek parametrik skaler olarak adlandırılır. $r=0$ ise (a,r) sıralı ikilisi esnek anlamda 0 (sıfır) olduğu söylenir. $r \geq 0$ ise (a,r) esnek parametrik skaleri negatif olmayan olarak adlandırılır. (a,r) ve (b,r') iki esnek parametrik skalerler olsun. $r \geq r'$ ise (a,r)'nin (b,r')'den küçük olmadığını söylenir. ve $(a,r) \succeq (b,r')$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.2. $\tilde{\pi}: A \times A \to A$ bir parametrik skaler değerli fonksiyon olsun ve $(\tilde{\pi}(a,b),0)$ esnek parametrik skaleri $\tilde{\pi}(a,b) \in A,\ 0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere esnek anlamda 0 (sıfır) elemanını göstersin. $\tilde{\mathfrak{D}}_R$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\tilde{\mathfrak{D}}_R : (F,A) \times (F,A) \to (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ parametrik skaler değerli fonksiyonu (F,A) üzerinde bir esnek dikdörtgensel metrik olarak adlandırılır.

1. $\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(b,F(b))) \succeq (\tilde{\pi}(a,b),0)$ ve $a=b$ ise eşitlik sağlanır.
2. $\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(b,F(b))) = (\tilde{\pi}(a,b),0) \Leftrightarrow$ her $(a,F(a)),\ (b,F(b)) \in (F,A)$ ve $(a,F(a)) = (b,F(b))$ [her $a,b \in A,\ a=b$]
3. Her $a,b \in A$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(b,F(b))) = \tilde{\mathfrak{D}}_R((b,F(b)),(a,F(a)))$
4. Her $a,b,c,d \in A$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(b,F(b))) \preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(c,F(c))) \dotplus \tilde{\mathfrak{D}}_R((c,F(c)),(d,F(d))) \dotplus \tilde{\mathfrak{D}}_R((d,F(d)),(b,F(b))).$$

Bu takdirde $((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ ikilisine X üzerinde bir esnek dikdörtgensel metrik uzay denir.

Tanım 3.1.3. (F,A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. (F,A) 'daki bir esnek dizi $n\in\mathbb{N}$ için (F_n,A) , (F,A) 'nın bir esnek alt kümesi olacak şekilde $f(n)=(F_n,A)$ ile tanımlı bir $f:\mathbb{N}\to(F,A)$ fonksiyonudur ve $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. (F,A) , X üzerinde bir esnek küme olsun. $\mathfrak{D}_R$, (F,A) üzerinde bir esnek dikdörtgensel metrik $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$, (F,A) 'da bir esnek dizi ve $(x,F(x))\in(F,A)$ olsun. Bu takdirde her ϵ pozitif sayısı için $n\geq N$ olmak üzere her n doğal sayısı için $\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_n(a)),(x,F(x)))\preceq(\tilde{\pi}(a,x),\epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek dizisi $(x,F(x))$ 'e esnek yakınsaktır denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_n(a)),(x,F(x)))=(\tilde{\pi}(a,x),0)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.5. (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}_R$, (F,A) üzerinde bir esnek dikdörtgensel metrik, $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$, (F,A) 'da bir esnek dizi olsun. Bu takdirde her ϵ pozitif sayısı için $n,m\geq N$ olmak üzere her n,m doğal sayısı için $\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_n(a)),(a,F_m(a)))\preceq(\tilde{\pi}(a,a),\epsilon)$ olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bir esnek Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.1.6. (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}_R$, (F,A) üzerinde bir esnek dikdörtgensel metrik, $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$, (F,A) 'da bir esnek Cauchy dizisi olsun. $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$, (F,A) 'da esnek yakınsak ise bu takdirde (F,A)'nın bir tek elamanına yakınsar.

İspat: İspatı çelişki yöntemiyle yapmaya yönelik $(F_n,A)\to(x,F(x))$ ve $(F_n,A)\to(y,F(y))$ olacak şekilde $(x,F(x)),(y,F(y))\in(F,A)$ elemanlarının olduğunu kabul edelim. Her $n\in\mathbb{N}$ ve her $a\in A$ için

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y)))\preceq{}&\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(a,F_n(a)))+\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_n(a)),(a,F_m(a)))\\&+\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_m(a)),(y,F(y)))\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahibiz. Şimdi ϵ keyfi pozitif bir sayı olsun. $(F_n,A)_{n=1}^{\infty}$, $(x,F(x))$ ve $(y,F(y))$'ye yakınsadığından ve $(F_n,A)_{n=1}^{\infty}$ esnek Cauchy dizisi olduğundan $m>n>N_1$, $m>n>N_2$ ve $m>n>N_3$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(a,F_n(a))) \preceq (\tilde{\pi}(x,a),\epsilon/3) \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_m(a)),(y,F(y))) \preceq (\tilde{\pi}(a,y),\epsilon/3) \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F_n(a)),(y,F_m(a))) \preceq (\tilde{\pi}(a,a),\epsilon/3) \quad (3.3)$$

olacak şekilde N_1, N_2 ve N_3 doğal sayıları vardır. Şimdi $m > n \geq max\{N_1, N_2, N_3\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (3.1), (3.2) ve (3.3)'den

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y))) &\preceq (\tilde{\pi}(x,a),\epsilon/3)+(\tilde{\pi}(a,a),\epsilon/3)+(\tilde{\pi}(a,y),\epsilon/3)\\ &= (\{\tilde{\pi}(x,a),\tilde{\pi}(a,a),\tilde{\pi}(a,y)\},\epsilon)\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Bu her $\epsilon > 0$ ve $a \in A$ için

$\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y))) \preceq (\{\tilde{\pi}(x,a),\tilde{\pi}(a,a),\tilde{\pi}(a,y)\},\epsilon)$ anlamına gelir. Bundan dolayı $\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y))) = (\tilde{\pi}(x,y),0)$ 'dır. Tanım 3.1.2'in (1) koşulu $x = y$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $(x,F(x)) = (y,F(y))$ 'dir.

Tanım 3.1.7. (F,A), X üzerinde bir esnek küme olsun. $\tilde{\mathfrak{D}}_R$, (F,A) üzerinde bir esnek dikdörtgensel metrik olsun. Eğer (F,A) 'daki her esnek Cauchy dizisi (F,A) 'da esnek yakınsak ise (F,A) 'ya tam esnek dikdörtgensel metrik uzay denir.

Teorem 3.1.8. $((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ ve $((F',A'),\tilde{\mathfrak{D}}'_R)$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun. $f = (f_1, f_2) : ((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R) \to ((F',A'),\tilde{\mathfrak{D}}'_R)$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu takdirde f esnek süreklidir ancak ve ancak her $(x,F(x)) \in (F,A)$ ve $(y,F(y)) \in (F,A)$ olacak şekilde her ϵ pozitif sayısı için

$\tilde{\mathfrak{D}}'_R((f(x,F(x))), f((y,F(y)))) \preceq (\tilde{\pi}'(\tilde{\pi}(x,y)),\epsilon)$ iken

$\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y))) \preceq (\tilde{\pi}(x,y)),\delta)$ olacak şekilde bir δ pozitif sayısı vardır.

Tanım 3.1.9. $((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, X üzerinde esnek dikdörtgensel metrik uzay ve $f : ((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R) \to ((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ bir esnek dönüşüm olsun. Her $x, y \in A$ için

$\tilde{\mathfrak{D}}_R((f(x,F(x))), f((y,F(y)))) \preceq c\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y)))$ olacak şekilde $0 < c < 1$ olmak üzere bir c pozitif sayısı var ise f 'e esnek büzülme denir.

Teorem 3.1.10. $((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, X üzerinde esnek dikdörtgensel metrik uzayında esnek büzülme dönüşümü esnek süreklidir.

İspat: f ’in esnek sürekli olduğunu göstermek için keyfi bir $(x_0,F(x_0))\in(F,A)$ noktasında esnek sürekli olduğunu gösterelim. $\delta=\dfrac{\epsilon}{c}$ alırsak $\forall(x,F(x)),(x_0,F(x_0))\in(F,A)$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(x_0,F(x_0)))<(\tilde{\pi}(x,x_0),\delta)$ iken

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(x,F(x)),f(x_0,F(x_0)) &\preceq c\cdot\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(x_0,F(x_0)) \\ &\preceq c\cdot(\tilde{\pi}(x,x_0),\delta) \\ &=(\tilde{\pi}(x,x_0),c\cdot\delta) \\ &=(\tilde{\pi}(x,x_0),\epsilon)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f, $(x_0,F(x_0))$ noktasında esnek süreklidir. $(x_0,F(x_0))$, (F,A) ’nın keyfi bir noktası olduğundan esnek süreklidir. ■

Tanım 3.1.11. $((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, X üzerinde bir tam esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun ve $f:((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)\to((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ ’de bir esnek dönüşüm olsun. f için bir esnek sabit nokta kümesi $f((x,F(x)))=(x,F(x))$ olacak şekilde (F,A) ’nın $(x,F(x))$ şeklinde bir esnek alt kümesidir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Esnek Dikdörtgensel Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.1.1. (Esnek Dikdörtgensel Metrik Uzaylar için Banach Büzülme Teoremi)

$((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, X üzerinde bir tam esnek dikdörtgensel metrik uzay ve $f:((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)\to((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ bir esnek dikdörtgensel büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde f bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (F_0,A), (F,A) 'da keyfi bir esnek nokta olsun. $\{(F_n,A)_{n=1}^{\infty}\}$ esnek dizisini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$(F_{n+1},A)=f((F_n,A))=f^{n+1}((F_0,A)) \qquad (n=0,1,2,...) \tag{4.1}$$

f esnek büzülme olduğundan, her $n\geq 1$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_{n+1},A),(F_n,A))=\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_n,A)),f((F_{n-1},A)))\leq c\cdot\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_n,A),(F_{n-1},A)) \tag{4.2}$$

olacak şekilde bir $0<c<1$ vardır. İndiksiyonla $n=0,1,2...$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_{n+1},A),(F_n,A))\leq c^n\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_1,A),(F_0,A)) \tag{4.3}$$

olduğu sonucuna varırız.

Şimdi tüm $(F_0,A)\in(F,A)$ için esnek dikdörtgensel metriğin dikdörtgensel özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A),f^4((F_0,A)))&\preceq\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A),f((F_0,A)))+\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A),f^2((F_0,A)))\\&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(f^2((F_0,A)),f^4((F_0,A)))\\&\preceq\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A),f((F_0,A)))+c\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A),f((F_0,A)))\\&\quad+c^2\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_0,A)),f^2((F_0,A)))\end{aligned}$$

sahip oluruz.

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^6((F_0,A))) \preceq\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A))) \\
& + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f^2((F_0,A)), f^3((F_0,A))) \\
& + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f^3((F_0,A)), f^4((F_0,A))) \\
& + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f^4((F_0,A)), f^6((F_0,A))) \\
\preceq\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) + c\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
& + c^2\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
& + c^3\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A))) \\
& + c^4\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))
\end{aligned}
$$

Her $(F_0,A)\in(F,A)$ için $\preceq \sum_{i=1}^{3} c^i\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A)) + c^4\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))$

İndüksiyonla $k=2,3,4...$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^{2k}((F_0,A))) \preceq\ & \sum_{i=0}^{2k-3} c^i\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
& + c^{k-2}\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Üstelik her $(F_0,A)\in(F,A)$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^5((F_0,A))) \preceq\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A))) \\
& + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f^2((F_0,A)), f^3((F_0,A))) \\
& + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f^3((F_0,A)), f^4((F_0,A))) \\
& + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f^4((F_0,A)), f^5((F_0,A))) \\
\preceq\ & \sum_{i=0}^{4} c^i\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A)))
\end{aligned}
$$

İndüksiyonla $k=0,1,2,...$ için

$$
\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^{2k+1}((F_0,A))) \preceq \sum_{i=0}^{2k} c^i\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \tag{4.5}
$$

$k=1,2,3,...$ için (4.4) eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R(f^n((F_0,A)), f^{n+2k}((F_0,A))) &\preceq c^n \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^{2k}((F_0,A))) \\
&\preceq c^n \Big[\sum_{i=0}^{2k-3} c^i (\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))) \\
&\quad + c^{k-2}(\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A))))\Big] \\
&\preceq c^n \Big[\sum_{i=0}^{2k-2} c^i (\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A))))\Big] \\
&\preceq \frac{c^n(1-c^{2k-1})}{1-c}\Big[\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))\Big] \\
&\preceq \frac{c^n}{1-c}\Big[\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))\Big]
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $k = 0,1,2,...$ için (4.5) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R(f^n((F_0,A)), f^{n+2k+1}((F_0,A))) &\preceq c^n \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^{2k+1}((F_0,A))) \\
&\preceq c^n \Big[\sum_{i=0}^{2k} c^i (\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A)))\Big] \\
&\preceq \frac{c^n}{1-c}\Big[\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))\Big].
\end{aligned}
$$

Şu halde

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^{n+m}((F_0,A))) &\preceq \frac{c^n}{1-c}\Big[\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f((F_0,A))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_0,A), f^2((F_0,A)))\Big].
\end{aligned}
$$

Bu ifade $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$ esnek dizisinin (F,A) 'da bir esnek Cauchy dizisi olmasını gerektirir. (F,A) bir tam esnek dikdörtgensel metrik uzay olduğundan, bu takdirde $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$, $(x,F(x))$ esnek noktasına yakınsayacak şekilde $(x,F(x)) \in (F,A)$ vardır. f esnek sürekli olduğundan $f((F_n,A))$, $f((x,F(x)))$ 'e yakınsar. Bununla birlikte $\{(F_n,A)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tanımına göre $f((F_n,A))$, $f((x,F(x)))$ 'e yakınsar. Teorem 3.1.6'dan $f((x,F(x))) = (x,F(x))$ elde edilir. Şimdi $f((x,F(x)))$ 'in tekliğini gösterelim. $f((y,F(y)))=(y,F(y))$ ve $(x,F(x))\neq(y,F(y))$ olacak şekilde başka bir $(y,F(y))\in(F,A)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(f((x,F(x))),f((y,F(y))))\\ &\preceq c\,\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),(y,F(y)))\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlik $c>1$ olmasını gerektirir, bu ise bir çelişkidir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Lemma 4.1.2. [29] $A\subseteq E$ parametrelerin bir kümesi (a,r) ve (b,r') iki esnek parametrik skaler olsun. Her $\epsilon>0$ için $(a,r)<(b,r'+\epsilon)$ ise bu takdirde

$(a,r)\leq(b,r')$.

Teorem 4.1.3. $((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ nin X üzerinde bir tam esnek dikdörtgensel metrik uzay olduğunu varsayalım. $T=(T_1,T_2):((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)\to((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ dönüşümünün her $(e,F(e))\in(F,E)$ için $T(e,F(e))=(T_1(e),T_2(F(e)))=(T_1(e),F(T_1(e)))$ olacak şekilde esnek sürekli bir dönüşüm olsun ve parametrik skaler değerli $\varphi:(F,E)\to(E,\mathbb{R}^+)$ dönüşümü

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((e,F(e))),(e,F(e)))<\varphi((e,F(e)))-\varphi(T(e,F(e))) \tag{4.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde her $(e,F(e))\in(F,E)$ için $\{T^n((e,F(e)))\}$ dizisi bir esnek sabit noktaya yakınsar.

İspat: $T=(T_1,T_2)$ ve $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ olsun. Şimdi $T((e,F(e)))=(T_1(e),T_2(F(e)))$ ise $T((e,F(e)))=((e_1,F(e_1))$ alalım. Bu takdirde

$$\varphi(T((e,F(e))))=(\varphi_1(e_1),\varphi_2(F(e_1)))=(b_1,t_1).$$

Benzer bir yolla $n=1,2,...$ için $T^n((e,F(e)))=(e_n,F(e_n))$ yazarız. Şu hâlde

$$\varphi(T^n((e,F(e)))=(\varphi_1(e_n),\varphi_2(F(e_n)))=(b_n,r_n).$$

(4.6) bağıntısı

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((e,F(e))),(e,F(e)))+\varphi(T(e,F(e)))<\varphi((e,F(e))) \tag{4.7}$$

olmasını gerektirir. Bundan dolayı Lemma 4.1.2'den $\varphi(T((E,F(e)))) < \varphi((e,F(e)))$ elde edilir. Bu $\varphi(T^2((e,F(e)))) \le \varphi(T((e,F(e))))$ olması anlamına gelir. Bu yöntemi devam ettirirsek $\varphi(T^{n+1}((e,F(e)))) \le \varphi(T^n((e,F(e))))$ elde ederiz. Bu ise $\{\varphi(T^n((e,F(e))))\}$ 'nin artan olması anlamına gelir. Şu halde reel sayıların $\{r_n\}$ dizisi artandır. Bundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(T^n((e,F(e)))) = (b,t) \quad \text{(Her } b \in E \text{ için)} \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ vardır.

Açık olarak (b,t) negatif değildir. Bu takdirde $m \ge n$ olmak üzere tüm $n,m \in N$ için esnek dikdörtgensel özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n((e,F(e))),T^m((e,F(e)))) &\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n((e,F(e))),T^{n+1}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}((e,F(e))),T^{n+2}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+2}((e,F(e))),T^m((e,F(e))))\\
&\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n((e,F(e))),T^{n+1}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}((e,F(e))),T^{n+2}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+2}((e,F(e))),T^{n+3}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+3}((e,F(e))),T^{n+4}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+4}((e,F(e))),T^m((e,F(e))))\\
&\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n((e,F(e))),T^{n+1}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+2}((e,F(e))),T^{n+3}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+3}((e,F(e))),T^{n+4}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+4}((e,F(e))),T^{n+5}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+5}((e,F(e))),T^{n+6}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+6}((e,F(e))),T^m((e,F(e))))\\
&\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n((e,F(e))),T^{n+1}((e,F(e))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}((e,F(e))),T^{n+2}((e,F(e))))\\
&\quad\cdots+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+2k}((e,F(e))),T^m((e,F(e))))\\
&\preceq \varphi(T^n((e,F(e)))-\varphi(T^{n+1}((e,F(e)))\\
&\quad+\varphi(T^{n+1}((e,F(e)))-\varphi(T^{n+2}((e,F(e)))\\
&\quad\cdots+\varphi(T^{n+2k}((e,F(e)))-\varphi(T^m((e,F(e)))\\
&\preceq \varphi(T^n((e,F(e)))-\varphi(T^m((e,F(e)))
\end{aligned}$$

Elde edilir. Şu halde $\lim\limits_{m,n\to\infty} \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n((e,F(e))),T^m((b,F(b))))=(b,0)$. Bundan dolayı $\{T^n((e,F(e)))\}$ esnek Cauchy dizisidir. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} T^n((e,F(e))=(x,F(x))$ olacak şekilde bir $(x,F(x))\in(F,E)$ mevcuttur. ■

Tanım 4.1.4. [29] X üzerinde bir (F,E) esnek kümesini göz önüne alalım. $c\in E$ olmak üzere her $(c,F(c))\in(F,E)$ elemanı (F,E) 'nin bir esnek noktası olarak adlandırılır. $c\in E$ için $x\in F(c)$ ise (c,x) 'in (F,E) 'ye ait olmasına gerek yoktur. Fakat ait oluyorsa (c,x) 'i bir esnek nokta olarak kabul edebiliriz.

Tanım 4.1.5. (F,E) 'nin X üzerinde bir esnek küme olduğunu kabul edelim. $\tilde{\mathfrak{D}}_R$, (F,E) üzerinde esnek dikdörtgensel metrik ve t bir pozitif reel sayı olsun. (e',t) yarıçaplı, $(e,F(e))$ merkezli esnek yuvar

$$\{(c,F(c))\in(F,E):\ \tilde{\mathfrak{D}}_R((c,F(c)),(e,F(e)))\preceq(\tilde{\varphi}(c,e)=(e',t))\}$$

kümesidir. $(e,F(e))$ merkezli (e',t) yarıçaplı esnek yuvarı $\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((e,F(e)),(e',t))$ ile gösteririz, ifadeyi biraz daha kısaltmak için sadece $\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((e,F(e)),(e',t))$ ya da $\mathcal{B}_{(e',t)}(e,F(e))$ yazarız.

Teorem 4.1.6. $((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, X üzerinde tam esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun ve $T:\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t'))\to((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, $0<c<1$ iken

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((a,F(a)),(a,F(a))))\prec(1-2c)(a',t') \tag{4.9}$$

olmak üzere bir esnek büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde T, $\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t'))$ esnek yuvarında bir tek esnek sabit nokta kümesine sahiptir.

İspat: $\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((a,F(a)),(a,F(a))))\prec(1-2c)(a',t_0)$ olmak üzere $0\preceq(a',t_0)\preceq(a',t)$ olacak şekilde bir $r_0\geq 0$ mevcut olduğu açıktır.

$T:\overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t_0))}\to\overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t_0))}$ alarak,

$(b,F(b)),(c,F(c)),(d,F(d))\in\overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t_0))}$ ise bu takdirde

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((b,F(b)),(a,F(a)))) \preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(T((b,F(b)),(c,F(c)))).$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((b,F(b)),(a,F(a)))) &\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(T((b,F(b)),T(c,F(c)))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T((c,F(c)),T(d,F(d)))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T((d,F(d)),(a,F(a)))) \\
&\preceq c\cdot\tilde{\mathfrak{D}}_R(((b,F(b)),(c,F(c)))) \\
&\quad + c\cdot\tilde{\mathfrak{D}}_R(((c,F(c)),(d,F(d)))) + (1-2c)(a',t_0) \\
&\preceq c\cdot(a',t_0) + c\cdot(a',t_0) + (1-2c)(a',t_0) \\
&= (a',t_0).
\end{aligned}$$

Şimdi esnek dikdörtgensel metrik uzay için Banach Sabit nokta teoreminden T 'nin $\overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t_0))} \tilde{\subseteq} \overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{D}}_R}((a,F(a)),(a',t))}$ esnek yuvarında bir tek esnek sabit nokta kümesine sahip olduğunu elde ederiz. ■

Örnek 4.1.7. $d(x,y)=|x-y|$ metriği ile birlikte $X=[0,\infty]$ kümesini göz önüne alalım. $A=\mathbb{Q}^{+}=\{x\in\mathbb{Q}: x>0\}$ ve her $(a,F(a))\in(F,A)$, $(a,F(a))=[0,\infty]$ olacak şekilde (F,A), X üzerinde esnek küme olsun.

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(b,F(b))) = (max\{a,b\}, |a_1-b_1|+|a_2-b_2|)$$

ile tanımlı $\tilde{\mathfrak{D}}_R:(F,A)\times(F,A)\to(A,\mathbb{R}^{+}\cup\{0\})$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$T:((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)\to((F,A),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$, $T((a,F(a)))=\left(\frac{1}{4}a,F\left(\frac{1}{4}a\right)\right)=\left[0,\frac{1}{4}a\right]$ ile tanımlı bir esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((a,F(a))),T((b,F(b)))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R\left(\left(\frac{1}{4}a,F\left(\frac{1}{4}a\right)\right),\left(\frac{1}{4}b,F\left(\frac{1}{4}b\right)\right)\right) \\
&= \left(max\{\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}b\}, |\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}b_1|+|\frac{1}{4}a_2-\frac{1}{4}b_2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(max\{\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}b\}, \frac{1}{2}\left(|a_1-b_1|+|a_2-b_2|\right)\right) \\
&\preceq \frac{1}{2}\left(max\{a,b\}, |a_1-b_1|+|a_2-b_2|\right) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{D}}_R((a,F(a)),(b,F(b))).
\end{aligned}$$

Eşitsizliğin son ifadesinde $c=\frac{1}{2}$ olduğundan T 'nin bir esnek büzülme dönüşümü olduğu elde edilir. Teorem 4.1.1'e göre T bir tek esnek sabit kümeye sahiptir.

Tanım 4.1.8. (X,d) bir genelleştirilmiş metrik uzay olsun. $\alpha \to [0,\infty] \to [0,\frac{1}{2})$ artan dönüşüm olmak üzere herhangi bir $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \preceq \alpha(d(x,y))[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$$

ise $T:X \to X$ dönüşümüne genelleştirilmiş Kannan büzülme dönüşümü denir [13].

Teorem 4.1.9. $((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ bir esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun. α , $r \in [0,\infty)$ olmak üzere her bir r parametrik skaleri için $\lim\limits_{t\to r} sup\alpha < \frac{1}{2}$ şartını sağlayacak şekilde $T:(F,E) \to (F,E)$ Kannan tipinde bir dönüşüm olsun. Sınırlı bir yörünge ile birlikte $(x_0,F(x_0)) \in (F,E)$ olduğunu kabul edelim. Yani $\{T^n(x_0,F(x_0))\}$ sınırlıdır. Ayrıca her bir $(x,F(x)) \in (F,E)$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_R((x,F(x)),T(x,F(x))) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde T bir $(\tilde{x},F(\tilde{x})) \in (F,E)$ esnek sabit noktasına sahiptir. $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0,F(x_0)) = (\tilde{x},F(\tilde{x}))$ olsun. Bununla birlikte $(\tilde{y},F(\tilde{y}))$ esnek sabit noktasına sabit ise, bu takdirde $\tilde{\mathfrak{D}}_R((\tilde{x},F(\tilde{x})),(\tilde{y},F(\tilde{y}))) = \infty$ ve $(\tilde{x},F(\tilde{x})) = (\tilde{y},F(\tilde{y}))$ 'dır.

İspat: Keyfi bir $(x_0,F(x_0)) \in (F,E)$ alalım. $\{(F_n,E)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım. $(F_{n+1},E) = T^n(x_0,F(x_0)),\quad n=0,1,2,\ldots$ T Kannan tipinde bir dönüşüm olduğundan

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0))) = \tilde{\mathfrak{D}}_R(T(T^{n-1}(x_0,F(x_0))),T(T^n(x_0,F(x_0))))$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(T(T^{n-1}(x_0,F(x_0))),T(T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\preceq \alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\quad\cdot[\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0)))\\ &\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0)))]\\ &\preceq \alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\quad\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\quad+\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\quad\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0))))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0)))\\ &-\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0)))) \preceq \alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\qquad\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0)))\\ &(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0)))) \preceq \alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\\ &\qquad\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0))) &\preceq \frac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))))}\\ &\quad\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0)))).\end{aligned}$$

$\alpha(t)\in[0,\frac{1}{2})$ olduğundan $\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}<1$ elde ederiz. Bu takdirde

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0))) \prec \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0)))$$

sahip oluruz. Buradan $\{\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0)))\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin monoton artan olduğu elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki ifadeyi gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^n(x_0,F(x_0))) &\preceq \frac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0))))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0))))}\\ &\quad\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0))))\end{aligned}$$

$\alpha(t)$ artan olduğundan $\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}$ de artandır. Üstelik

$\{\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0)))\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin monoton azalan olmasından dolayı bu takdirde $\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0)))\prec\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))$.

$$\frac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0))))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0))))}\prec\frac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}.$$

Bu takdirde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^{n}(x_0,F(x_0)))\preceq&\frac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}\\&\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-2}(x_0,F(x_0)),T^{n-1}(x_0,F(x_0)))).\end{aligned}$$

Bu bağıntıyı tekrarlayarak

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(x_0,F(x_0)),T^{2}(x_0,F(x_0)))\preceq&\frac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}\\&\cdot(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $h=\dfrac{\alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}{(1-\alpha)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}$ alalım. Bu takdirde

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0,F(x_0)),T^{n}(x_0,F(x_0)))\preceq(h)^n(\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0))) \tag{4.10}$$

sahip olabiliriz. $m>n$ olsun. Bu takdirde (4.10)'dan

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n}(x_0,F(x_0)),T^{m}(x_0,F(x_0)))\preceq&\,\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n}(x_0,F(x_0)),T^{n+1}(x_0,F(x_0)))\\&+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0,F(x_0)),T^{n+2}(x_0,F(x_0)))\\&+\cdots+\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{m-1}(x_0,F(x_0)),T^{m}(x_0,F(x_0)))\\\preceq&\,(h)^n\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))\\&+(h)^{n+1}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))\\&+\cdots+(h)^{m-1}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))\\=&\,[(h)^n+(h)^{n+1}+\cdots+(h)^{m-1}]\\&\cdot\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))\\&\frac{(h)^n}{1-h}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))\end{aligned} \tag{4.11}$$

sahip oluruz. $h=\dfrac{\alpha\cdot\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}{(1-\alpha)\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0,F(x_0)),T(x_0,F(x_0)))}\in[0,\frac{1}{2})$ olduğundan

$\{T^n(x_0, F(x_0))\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin (F, E) de bir esnek Cauchy dizisi olduğu elde edilir.

(F, E) tam esnek dikdörtgensel metrik uzay olduğundan $T^n(x_0, F(x_0)) \to (\tilde{x}, F(\tilde{x}))$ olacak şekilde $(\tilde{x}, F(\tilde{x}))$ esnek noktası mevcuttur. Esnek dikdörtgensel metriğin dikdörtgensel özelliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \preceq\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), T^n(x_0, F(x_0)) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^n(x_0, F(x_0)), T^{n+1}(x_0, F(x_0))) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0, F(x_0)), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\ \preceq\ & \lambda[\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0, F(x_0)), T^n(x_0, F(x_0)))] \\ & + h^n \tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0, F(x_0)), T(x_0, F(x_0))) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0, F(x_0)), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \preceq\ & \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\ & + \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0, F(x_0)), T^n(x_0, F(x_0))) \\ & + h^n \tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0, F(x_0)), T(x_0, F(x_0))) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0, F(x_0)), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \preceq\ & \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0, F(x_0)), T^n(x_0, F(x_0))) \\ & + h^n \tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0, F(x_0)), T(x_0, F(x_0))) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0, F(x_0)), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{x}, F(\tilde{x})), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \preceq\ & \frac{\lambda}{(1-\lambda)}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n-1}(x_0, F(x_0)), T^n(x_0, F(x_0))) \\ & + \frac{h^n}{(1-\lambda)}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0, F(x_0)), T(x_0, F(x_0))) \\ & + \frac{1}{(1-\lambda)}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0, F(x_0)), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\ \preceq\ & h^n \tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0, F(x_0)), T(x_0, F(x_0))) \\ & + \frac{h^n}{(1-\lambda)}\tilde{\mathfrak{D}}_R((x_0, F(x_0)), T(x_0, F(x_0))) \\ & + \frac{1}{(1-\lambda)}\tilde{\mathfrak{D}}_R(T^{n+1}(x_0, F(x_0)), (\tilde{x}, F(\tilde{x}))).\end{aligned}$$

$n \to \infty$ alarak $(F'_n, E) \to (a, F(a)) \in (F, E)$ olmak üzere (F'_n, E), (F, E) de bir esnek dizi iken $\tilde{\mathfrak{D}}_R((x, F(x)), (F'_n, E)) \to \tilde{\mathfrak{D}}_R((x, F(x)), (a, F(a)))$ ve

$\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_n', E),(y, F(y))) \to \tilde{\mathfrak{D}}_R((a, F(a)),(y, F(y)))$ olması durumunu kullanarak $(\tilde{x}, F(\tilde{x})) = T(\tilde{x}, F(\tilde{x}))$ elde ederiz. Şimdi T 'nin bir tek esnek sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $(\tilde{y}, F(\tilde{y})) = T(\tilde{y}, F(\tilde{y}))$ olacak şekilde başka bir $(\tilde{y}, F(\tilde{y})) \in (F, E)$ noktasının olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\tilde{\pi}: E \times E \to E$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((\tilde{y}, F(\tilde{y})),(\tilde{x}, F(\tilde{x}))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(T(\tilde{y}, F(\tilde{y})), T(\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\
&\preceq \lambda \tilde{\mathfrak{D}}_R((\tilde{y}, F(\tilde{y})), T(\tilde{y}, F(\tilde{y}))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((\tilde{x}, F(\tilde{x})), T(\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\
&\preceq \lambda \tilde{\mathfrak{D}}_R((\tilde{y}, F(\tilde{y})),(\tilde{y}, F(\tilde{y}))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_R((\tilde{x}, F(\tilde{x})),(\tilde{x}, F(\tilde{x}))) \\
&= (\tilde{\pi}(\tilde{x}, \tilde{x}), 0).
\end{aligned}$$

Böylece $(\tilde{x}, F(\tilde{x})) = (\tilde{y}, F(\tilde{y}))$. ■

Tanım 4.1.10. (F, E) esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun. f ve g, (F, E) 'den (F, E) 'ye esnek dönüşümler olsun. Bu takdirde (F, E) 'deki tüm $(x, F(x))$ 'ler için $f(g(x, F(x))) = g(f(x, F(x)))$ ise f 'in g ile değiştiği söylenir.

Tanım 4.1.11. $f:(F, E) \to (F, E)$ ve $g:(F, E) \to (F, E)$, $((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_R)$ 'de esnek dönüşümler olsun. Bir $(x, F(x)) \in (F, E)$ elemanı f ve g nin ortak noktası (coincidence point)'dır ancak ve ancak $g((x, F(x))) = f((x, F(x))) = (x, F(x))$ 'dir. Eğer f ve g tüm ortak noktalarda değişiyorsa f ve g 'nin zayıf uyumlu (weak compatible) olduğu söylenir.

Teorem 4.1.12. g ve f ,(F, E) , X üzerinde esnek küme ve $0 < \lambda < 1$ olmak üzere tüm $(x, F(x)),(y, F(y)) \in (F, E)$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(x, F(x)), g(y, F(y))) \preceq \lambda \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \qquad (4.12)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_R)$ tam esnek dikdörtgensel metrik uzaydan kendisine değişmeli dönüşümler olsun. $g((F, E)) \subset f((F, E))$ ve f esnek sürekli ise, bu takdirde g ve f bir tek ortak esnek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $(F_0,E)\in(F,E)$ keyfi olsun. Bu takdirde $g((F_0,E))$ ve $f((F_0,E))$ iyi tanımlıdır. $g((F_0,E))\in f((F,E))$ olduğundan $f((F_1,E))=g((F_0,E))$ olacak şekilde $(F_1,E)\in(F,E)$ mevcuttur. Genel olarak (F_n,E) seçilirse, bu takdirde (F,E) 'deki bir $f((F_{n+1},E))$ noktasını $f((F_{n+1},E))=g((F_n,E))$ olacak şekilde seçeriz.

Şimdi $\{f((F_n,E))\}$ esnek dizisinin esnek Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

(4.12)'den

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{m+k},E),f(F_{n+k},E)) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_{m+k-1},E),g(F_{n+k-1},E))\\ &\preceq \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{m+k-1},E),f(F_{n+k-1},E))\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Böylece tüm $k\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{m+k},E),f(F_{n+k},E)) \preceq \lambda^k\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m,E),f(F_n,E)) \tag{4.13}$$

Şimdi aşağıdaki iki duruma sahip oluruz.

Durum 1:

Bir n için, $f((F_n,E))=f((F_{n+1},E))$ ise, bu takdirde $g((F_n,E))=f((F_n,E))=(w,F(w))$ 'dir. $(w,F(w))$ 'nin g ve f 'in bir tek ortak esnek sabit noktada olduğunu göstereceğiz. Gerçekten ilk olarak

$$g((w,F(w)))=g(f(F_n,E))=f(g(F_n,E))=f((w,F(w)))$$

olduğunu elde ederiz.

$\tilde{\mathfrak{D}}_R((w,F(w)),g((w,F(w))))$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((w,F(w)),g(w,F(w))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_n,E),g((w,F(w))))\\ &\preceq \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_n,E),f((w,F(w))))\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz, bu ise bir çelişkidir.

(4.12) bağıntısı $g((F_n,E))=f((F_n,E))=(w,F(w))$ 'nin g ve f 'in bir tek ortak esnek sabit noktası olmasını gerektirdiğinden Durum 1'in ispatı tamamlanır.

Durum 2:

Tüm $n \geq 0$ için $f((F_n, E)) \neq f((F_{n+1}, E))$ ise bu takdirde tüm $n \geq 0, k \geq 1$ için $f((F_n, E)) \neq f((F_{n+k}, E))$. Yani bir $n \geq 0$ ve $k \geq 1$ için $f((F_n, E))) = f((F_{n+k}, E))$ ise

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+1}, E), f(F_{n+k+1}, E)) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_n, E), g(F_{n+k}, E)) \\ &\preceq \lambda \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_n, E), f(F_{n+k}, E)) \\ &= (\tilde{\varphi}(f(F_{n+1}), f(F_{n+k+1})), 0) \end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Böylece $f((F_{n+1}, E)) = f((F_{n+k+1}, E)).$ Bu takdirde (4.13) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+1}, E), f(F_n, E)) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+k+1}, E), f(F_{n+k}, E)) \\ &\preceq \lambda^k \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+1}, E), f(F_n, E)) \\ &\prec \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+1}, E), f(F_n, E)) \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Bu ise bir çelişkidir. Şu halde tüm farklı $(F_n, E), (F_m, E) \in \mathbb{N}$ için $f((F_n, E)) \neq f((F_m, E))$ olduğunu kabul edelim. Tüm $k \in \mathbb{N}$, tüm $n, m \in \mathbb{N}$ ve $(F_{n+k}, E), (F_{m+k}, E) \in (F, E) \setminus \{f((F_n, E)), f((F_m, E))\}$ için $f((F_{m+k}, E)) \neq f((F_{n+k}, E))$ olduğuna dikkat edelim. $((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_R)$ bir esnek dikdörtgensel metrik uzay olduğundan esnek dikdörtgensel metrik uzayın dikdörtgensel özelliğinden $n_0 \in \mathbb{N}$ iken $n_0 < m, n$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m, E), f(F_n, E)) &= \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m, E), f(F_{m+n_0}, E)) \\ &+ \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{m+n_0}, E), f(F_{n+n_0}, E)) \\ &+ \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+n_0}, E), f(F_n, E)) \end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m, E), f(F_n, E)) &= \lambda^m \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_0, E), f(F_{n_0}, E)) \\ &+ \lambda^{n_0} \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m, E), f(F_n, E)) \\ &+ \lambda^n \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_0, E), f(F_{n_0}, E)). \end{aligned}$$

$$(1-\lambda^{n_0})\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m, E), f(F_n, E)) = (\lambda^m + \lambda^n)\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_0, E), f(F_{n_0}, E))$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_m, E), f(F_n, E)) \preceq \frac{\lambda^m + \lambda^n}{1-\lambda^{n_0}} \tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_0, E), g(F_{n_0}, E)) \tag{4.14}$$

Şu halde $\{f(F_n,E)\}$, (F,E)'de bir esnek Cauchy dizisidir. $f((F,E))$'nin tamlığından

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f((F_n,E)) &= \lim_{n\to\infty} g((F_{n-1},E)) \\ &= (a,F(a))\end{aligned} \tag{4.15}$$

olacak şekilde $(a,F(a))\in(F,E)$ mevcuttur. Şimdi f esnek sürekli olduğundan (4.12) g'nin esnek sürekli olmasını gerektirir. g ve f değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} f((a,F(a))) &= f(\lim_{n\to\infty} g(F_n,E)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(g(F_n,E)) \\ &= \lim_{n\to\infty} g(f(F_n,E)) \\ &= g(\lim_{n\to\infty} f(F_n,E)) \\ &= g(a,F(a)) \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. $(b,F(b)) = f((a,F(a))) = g((a,F(a)))$ olsun.

$$g(a,F(a)) = g(b,F(b)) \tag{4.17}$$

ise (4.12)'den

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((a,F(a))),g(b,F(b))) &\preceq \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((a,F(a))),f(b,F(b))) \\ &= \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((a,F(a))),g(b,F(b))) \\ &\prec \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((a,F(a))),g(b,F(b)))\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $g(a,F(a)) = g(b,F(b))$ eşitliğine sahip oluruz. Buradan $g(b,F(b)) = f(b,F(b)) = (b,F(b))$ olduğunu ve $(b,F(b))$'nin g ve f için ortak esnek sabit noktası olduğunu elde ederiz. (4.12) bağıntısı $(b,F(b))$'nin bir tek esnek sabit nokta olmasını gerektirir. ■

Lemma 4.1.13. $((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun ve $f,g:(F,E)\to(F,E)$, $f((F,E))\tilde{\subseteq} g((F,E))$ olacak şekilde iki dönüşüm olsun. Yani $f(E)\subset g(E)$ ve her $e\in E$ için $F(f(e))\subset F(g(e))$. Eğer tüm $n\in\mathbb{N}$ için $(F'_n,E)\neq(F'_{n+1},E)$, $(F_0,E)\in(F,E)$ ve $(F'_n,E) = f((F_n,E)) = g((F_{n+1},E))$ Jungck tipinde esnek dizi $0<\lambda<1$olmak üzere tüm $n\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E)) \preceq \lambda\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E)) \tag{4.18}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu takdirde $n \neq m$ iken $(F'_n, E) = (F'_m, E)$.

İspat: Bir $n > m$ için $(F'_n, E) = (F'_m, E)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $(F_{n+1}, E) = (F_{m+1}, E)$ ve ayrıca $(F'_{n+1}, E) = (F'_{m+1}, E)$ seçelim. Bu takdirde (4.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1}, E), (F'_n, E)) &\prec \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n, E), (F'_{n-1}, E)) \\ &\prec \cdots \prec \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{m+1}, E), (F'_m, E)) \\ &= \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1}, E), (F'_n, E)). \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Fakat bu bir çelişkidir.

$n \neq m$ olmasının $(F'_n, E) \neq (F'_m, E)$ olmasını gerektirdiğini elde ederiz. ■

Uyarı 4.1.14. ψ ,

$$\psi(t, F(t)) = 0 \Leftrightarrow (t, F(t)) = (0, \{0\})$$

olmak üzere $\psi_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\psi_2 : F([0, \infty)) \to \mathbb{R}$ ve $\psi(F([0, \infty))) = (\psi_1, \psi_2)(([0, \infty), F([0, \infty)))$ olacak şekilde tüm $\psi : ((F, [0, \infty))) \to ((F, [0, \infty)))$ parametrik skaler değerli esnek sürekli fonksiyonların kümesini göstersin.

Teorem 4.1.15. $((F, E), \tilde{\mathfrak{D}}_R)$ bir esnek dikdörtgensel metrik uzay olsun ve $f, g : (F, E) \to (F, E)$, $f((F, E)) \tilde{\subset} g((F, E))$ olacak şekilde iki esnek dönüşüm olsun, yani $f(E) \subset g(E)$ ve her $e \in E$ için $F(f(e)) \subset F(g(e))$, (F, E) 'nin tam olan iki esnek kümesinden biridir. Bir $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $L \geq 0$ için ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları azalmayan (non-decreasing)'dır.

Tüm $(x, F(x)), (y, F(y)) \in (F, E)$ için

$$\begin{aligned} M((x, F(x)), (y, F(y))) = \max\{ &\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((x, F(x))), g(y, F(y))), \\ &\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((x, F(x))), f(x, F(x))), \\ &\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((y, F(y))), f(y, F(y)))\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

olmak üzere

$$(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((x,F(x))), f(y,F(y)))) \preceq (\psi_1,\psi_2)(M((x,F(x)),(y,F(y))) - (\phi_1,\phi_2)(M((x,F(x)),(y,F(y))) + L(\psi_1,\psi_2)(N((x,F(x)),(y,F(y))). \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} N((x,F(x)),(y,F(y))) = \min\{ & \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((x,F(x))), f(x,F(x))) \\ & + \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((y,F(y))), f(y,F(y))), \\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((x,F(x))), f(y,F(y))), \\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((y,F(y))), f(x,F(x)))\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Bu takdirde f ve g bir tek ortak esnek noktaya sahiptir. Üstelik f ve g zayıf uyumlu ise bu takdirde bir tek ortak esnek sabit noktaya sahiptir.

İspat: İlk olarak (4.19), (4.20), (4.21) bağıntısının (eğer varsa) f ve g'nin ortak esnek noktalarının tek olmasını gerektirdiği açıktır. f ve g'nin ortak esnek noktaya sahip olduğunu ispatlamak için $(x_0, F(x_0)) \in (F,E)$ keyfi noktasını alalım ve $f(E) \subset g(E)$ ve $F(f(x_0)) \subset F(g(x_0))$ olduğunu kullanarak (F,E)'de

$$(F_n', E) = f((F_n, E)) = g((F_{n+1}, E)), \text{ for } n = 0,1,2\ldots \tag{4.22}$$

olacak şekilde $\{(F_n, E)\}$ ve $\{(F_n', E)\}$ esnek dizilerini seçelim. Bir $k \in \mathbb{N}$ için $(F_k', E) = (F_{k+1}', E)$ ise bu takdirde $g(F_{k+1}', E) = (F_k', E) = (F_{k+1}', E) = f((F_{k+1}', E))$ ve f ve g ortak esnek noktaya sahiptir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $(F_n', E) \neq (F_{n+1}', E)$ olduğunu kabul edelim. (4.20)'de $(x, F(x)) = (F_{n+1}, E), (y, F(y)) = (F_n, E)$ alarak $\tilde{\pi}: E \times E \to E$ bir parametrik fonksiyon olmak üzere

$$M((F_{n+1}, E),(F_n, E)) = \max\{\tilde{\mathfrak{D}}_R((F_n', E),(F_{n-1}', E)), \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_n', E),(F_{n+1}', E))\}, \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} N((x,F(x)),(y,F(y))) = \min\{ & \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_n', E),(F_{n+1}', E)) + \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_{n-1}', E),(F_n', E)), \\ & \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_n', E),(F_n', E)), \tilde{\mathfrak{D}}_R((F_{n-1}', E),(F_{n+1}', E))\} \\ = (\tilde{\pi}(x,y), 0) & \end{aligned} \tag{4.24}$$

iken

$$
\begin{aligned}
(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F_n,E))) &\preceq (\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_{n+1},E),f(F_n,E))) \\
&\preceq (\psi_1,\psi_2)(M((F_{n+1},E),(F_n,E))) \\
&\quad -(\phi_1,\phi_2)(M((F_{n+1},E),(F_n,E))) \\
&\quad +L(\psi_1,\psi_2)(N((F_{n+1},E),(F_n,E)))
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

olduğunu elde ederiz.

Ayrıca (4.23), (4.24), (4.25) 'den

$$
\begin{aligned}
(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F_n,E))) \preceq (\psi_1,\psi_2)\max\Big\{&\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E)), \\
&\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))\Big\} \\
-(\phi_1,\phi_2)\max\Big\{&\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E)), \\
&\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))\Big\}
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

olduğunu elde ederiz.

$\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E)) \prec \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))$ ise bu takdirde (4.26)'dan

$$
\begin{aligned}
(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))) &\preceq (\psi_1,\psi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E)) \\
&\quad -(\phi_1,\phi_2)\max\Big\{\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))\Big\} \\
&\prec (\psi_1,\psi_2)\max\Big\{\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))\Big\}
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

olduğunu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))) &\preceq (\psi_1,\psi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E)) \\
&\quad -(\phi_1,\phi_2)\max\Big\{\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E))\Big\} \\
&\prec (\psi_1,\psi_2)\max\Big\{\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E))\Big\}
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

veya $\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E)) \prec \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E))$ eşitsizliklerine sahip oluruz. Çünkü (ψ_1,ψ_2) azalmayandır (non-decreasing).

Böylece $n \to \infty$ iken $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E)) = (u,F(u)) \succeq (\tilde{\varphi}(F'_{n+1},F'_n),0)$.

(4.27)'dan

$$
\begin{aligned}
(\psi_1,\psi_2)(u,F(u)) &\preceq (\psi_1,\psi_2)(u,F(u)) - (\phi_1,\phi_2)(u,F(u)) \\
&\preceq (\psi_1,\psi_2)(u,F(u))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $(u,F(u))=\tilde{0}$. Şimdi $n\neq m$ iken $(F'_n,E)\neq(F'_m,E)$ olduğunu kolayca elde ederiz. Gerçekten bir $n>m$ için $(F'_n,E)=(F'_m,E)$ ise, bu takdirde $(F_{n+1},E)=(F_{m+1},E)$ seçeriz. (Böylece $(F'_{n+1},E)=(F'_{m+1},E).$) Bu takdirde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E)) &\prec \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_n,E),(F'_{n-1},E))\\ &\prec \cdots \prec \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{m+1},E),(F'_m,E))\\ &= \tilde{\mathfrak{D}}_R((F'_{n+1},E),(F'_n,E))\end{aligned} \tag{4.29}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. İspatın diğer kısmı $\{(F'_n,E)\}$'nin bir esnek Cauchy dizi olduğunu göstermektir. Şimdi (F'_n,E)'nin bir esnek Cauchy dizi olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Bu takdirde $n(i)$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)}(u)))\succeq(\tilde{\varphi}(u,u),\epsilon) \tag{4.30}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı olmak üzere $\{(F'_n,E)\}$'nin $\{(F'_{n(i)},E)\}$ ve $\{(F'_{m(i)},E)\}$, $n(i)>m(i)>i$ için (4.30) sağlanacak şekilde yani

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)-1}(u)))\succeq(\tilde{\varphi}(u,u),\epsilon)$$

olacak şekilde bir $\epsilon>0$ sayısı mevcuttur. (4.30)'da esnek dikdörtgensel metriğin dikdörtgensel özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}(u,u),\epsilon) &\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)}(u)))\\ &\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)-2}(u)))+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-2}(u)),(u,F'_{n(i)-1}(u)))\\ &\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{n(i)}(u))),\\ &\preceq (\tilde{\varphi}(u,u),\epsilon)+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-2}(u)),(u,F'_{n(i)-1}(u)))\\ &\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{n(i)}(u)))\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. $n\to\infty$ ve (4.30) kullanılarak

$(\tilde{\varphi}(u,u),\epsilon)\preceq\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)}(u)))\preceq\epsilon$ olduğunu elde ederiz. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)}(u)))=(\tilde{\pi}(u,u),\epsilon).$$

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)}(u)),(u,F'_{m(i)}(u))) \;&\preceq\; \tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)}(u)),(u,F'_{n(i)-1}(u)))\\
&\preceq\; \tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)-2}(u)))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-2}(u)),(u,F'_{n(i)-1}(u)))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{m(i)-1}(u)))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)-1}(u)),(u,F'_{m(i)}(u)))
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{m(i)-1}(u))) \;&\preceq\; \tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{n(i)}(u)))\\
&\preceq\; \tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{n(i)-2}(u)))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-2}(u)),(u,F'_{n(i)-1}(u)))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)}(u)),(u,F'_{m(i)}(u)))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{m(i)}(u)),(u,F'_{m(i)-1}(u))).
\end{aligned}
$$

$n\to\infty$ iken

$$
(\tilde{\varphi}(u,u),\epsilon)\preceq\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{m(i)-1}(u)))\preceq(\tilde{\pi}(u,u),\epsilon)
$$

olduğunu elde ederiz.

$$
\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F'_{m(i)-1}(u)))=(\tilde{\pi}(u,u),\epsilon).
$$

Şimdi (4.25)'i kullanarak

$$
\begin{aligned}
(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R((u,F'_{n(i)}(u)),(u,F'_{m(i)}(u)))&\preceq(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(f(u,F_{n(i)-1}(u)),f(u,F_{m(i)-1}(u))))\\
&\preceq(\psi_1,\psi_2)(M((u,F_{n(i)-1}(u)),(u,F_{m(i)-1}(u))))\\
&\quad-(\phi_1,\phi_2)(M((u,F_{n(i)-1}(u)),(u,F_{m(i)-1}(u))))\\
&\quad+L(\psi_1,\psi_2)(N(((u,F_{n(i)-1}(u)),(u,F_{m(i)-1}(u)))).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(((u,F_{n(i)-1}(u)),(u,F_{m(i)-1}(u))))&=\min\Big\{\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u,F_{n(i)-1}(u)),f(u,F_{m(i)-1}(u))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u,F_{m(i)}(u)),f(u,F_{m(i)-1}(u)))),\\
&\quad\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u,F_{n(i)-1}(u)),f(u,F_{m(i)-1}(u)))),\\
&\quad\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u,F_{m(i)-1}(u)),f(u,F_{n(i)-1}(u))))\Big\}\\
&=\min\Big\{\tilde{\mathfrak{D}}_R(((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F_{n(i)}(u))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((u,F'_{m(i)-1}(u)),(u,F'_{m(i)}(u)))),\\
&\quad\tilde{\mathfrak{D}}_R(((u,F'_{n(i)-1}(u)),(u,F_{m(i)}(u)))),\\
&\quad\tilde{\mathfrak{D}}_R(((u,F'_{m(i)-1}(u)),(u,F'_{n(i)}(u))))\Big\}.
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ iken $N(((u, F_{n(i)-1}(u)), (u, F_{m(i)-1}(u)))) \to (\tilde{\pi}(u,u), 0)$.

$$
\begin{aligned}
M(((u, F_{n(i)-1}(u)), (u, F_{m(i)-1}(u)))) &= \max\{\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u, F_{n(i)-1}(u)), f(u, F_{m(i)-1}(u)))),\\
&\quad \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u, F_{n(i)-1}(u)), f(u, F_{n(i)-1}(u)))),\\
&\quad \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((u, F_{n(i)-1}(u)), f(u, F_{m(i)-1}(u))))\}\\
&= \max\{\tilde{\mathfrak{D}}_R(((u, F'_{n(i)-1}(u)), (u, F'_{m(i)}(u)))),\\
&\quad \tilde{\mathfrak{D}}_R(((u, F'_{n(i)-1}(u)), (u, F'_{n(i)}(u)))),\\
&\quad \tilde{\mathfrak{D}}_R(((u, F'_{n(i)-1}(u)), (u, F'_{m(i)}(u))))\}\\
&= \max\{(\tilde{\pi}(u,u), \epsilon), \tilde{0}, (\tilde{\pi}(u,u), \epsilon)\}\\
&= (\tilde{\pi}(u,u), \epsilon).
\end{aligned}
$$

Şu halde

$$(\psi_1, \psi_2)(\tilde{\pi}(u,u), \epsilon) \preceq (\psi_1, \psi_2)(\tilde{\pi}(u,u), \epsilon) - (\phi_1, \phi_2)(\tilde{\pi}(u,u), \epsilon)$$

$$(\phi_1, \phi_2)(\tilde{\pi}(u,u), \epsilon) = (\tilde{\pi}(u,u), \mathrm{o}) \Rightarrow \epsilon = 0$$

eşitliğine sahip oluruz.

Bu ise $\epsilon > 0$ kabulümüz ile çelişir. Bundan dolayı $\{(F'_n, E)\}$ bir esnek Cauchy dizisidir. $g((F, E))$ alt uzayının tam olduğunu kabul edelim. Bu takdirde bir $(z, F(z)) \in (F, E)$ için (F'_n, E), $g((z, F(z)))$'ye yakınsar. $f((z, F(z))) = g((z, F(z)))$ olduğunu ispatlamak için $f((z, F(z))) \neq g((z, F(z)))$ olduğunu kabul edelim. (4.25)'den $n \to \infty$ için

$$
\begin{aligned}
M(((F_n, E), (z, F(z)))) = \max\{&\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_n, E), g(z, F(z))),\\
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_n, E), f(F_n, E)),\\
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(z, F(z)), f(z, F(z)))\}\\
\to \tilde{\mathfrak{D}}_R(&g(z, F(z)), f(z, F(z)))
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

ve $n \to \infty$ için

$$
\begin{aligned}
N(((F_n, E), (z, F(z)))) = \min\{&\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(F_n, E), f(F_n, E)),\\
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(v, F(v)), f(v, F(v))),\\
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(z, F(z)), f(F_n, E))\}\\
\to (\tilde{\pi}(&(F_n, z)), 0)
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

olmak üzere

$$(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_n,E)),f(z,F(z)))) \preceq (\psi_1,\psi_2)(M((F_n,E),(z,F(z)))) - (\phi_1,\phi_2)(M((F_n,E),(z,F(z)))) + L(\psi_1,\psi_2)(N((F_n,E),(z,F(z)))) \tag{4.33}$$

elde ederiz. (4.33)'den ve $n\to\infty$ için üst limit alarak

$$(\psi_1,\psi_2)(\lim_{n\to\infty} sup\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_n,E)),f(z,F(z)))) \preceq (\psi_1,\psi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((z,F(z))),f(z,F(z))) - (\phi_1,\phi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(z,F(z)),f((z,F(z)))) \prec (\psi_1,\psi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((z,F(z))),f(z,F(z)))$$

(4.34)

elde ederiz ve (ψ_1,ψ_2) fonksiyonunun azalmayan (non-decreasing) özelliğini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} sup\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_n,E)),f(z,F(z))) \prec \tilde{\mathfrak{D}}_R(g((z,F(z))),f(z,F(z))) \tag{4.35}$$

Diğer taraftan Teorem 3.1.6'dan (F_n',E) yeteri kadar büyük n'ler için $f((z,F(z)))$ ve $g((z,F(z)))$'den farklıdır. Böylece

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((z,F(z)),g(z,F(z))) \preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(z,F(z)),f((F_n,E))) + \tilde{\mathfrak{D}}_R(f(F_n,E),f((F_{n+1},E))) + \tilde{\mathfrak{D}}_R(g(((F_{n+1},E)),g(z,F(z))) \tag{4.36}$$

olduğunu elde etmek için esnek dikdörtgensel eşitsizliğini uygulayabiliriz. Böylece

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((z,F(z)))) \prec \lim_{n\to\infty} sup\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_n,E)),f(z,F(z))) \tag{4.37}$$

elde edilir. Çünkü $n\to\infty$ için $\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_n,E)),f((F_{n+1},E)))\to(\tilde{\pi}(F_n,F_{n+1}),0)$ $\tilde{\mathfrak{D}}_R(f((F_{n+1},E)),g((F_{n+1},E)))\to(\tilde{\pi}(F_{n+1},F_{n+1}),0)$. (4.34), (4.35) ve (4.37)'den,

$$(\psi_1,\psi_2)(\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((z,F(z))),f(z,F(z)))) \preceq (\psi_1,\psi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R(g((z,F(z))),f(z,F(z))) - (\phi_1,\phi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(z,F(z)),f((z,F(z)))) \tag{4.38}$$

veya $(\phi_1,\phi_2)\tilde{\mathfrak{D}}_R(g(z,F(z)),f((z,F(z))))=(\tilde{\pi}(z,z),0)$ halini alıp,

$f((z,F(z)))=g((z,F(z)))$ elde edilir. Bu ise $f((z,F(z)))\neq g((z,F(z)))$ kabulümüz ile çelişir. Bu durumda f ve g zayıf uyumlu dönüşümler ise esnektir. Dikdörtgensel esnek metrik uzaylar için Jungck'un sonucu f ve g 'nin bir tek ortak esnek noktaya sahip olmasını gerektirir. ■

Teorem 4.1.16. $((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ 'nin bir dikdörtgensel esnek metrik uzay olduğunu kabul edelim. $\varphi,\theta:(F,[0,\infty))\to(F,[0,\infty))$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$, $\varphi(t)<t$, $\theta(t)<t$ ve her bir $t>0$ $\lim\limits_{r\to t^+}\varphi(r)<t$, $\lim\limits_{r\to t^+}\theta(r)<t$ olacak şekilde esnek parametrik skaler değerli dönüşümler olsun. Ayrıca $T:(F,E)\times(F,E)\to(F,E)$ esnek sürekli dönüşümünün aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

$(x,F(x))\preceq(u,F(u)),\ \ (y,F(y))\succeq(v,F(v))$ olmak üzere her

$(x,F(x)),(y,F(y)),(u,F(u)),(v,F(v))\in(F,E)$ için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((T((x,F(x)),(y,F(y)))),(T((u,F(u)),(v,F(v)))))$$

$$\preceq(\varphi_1,\varphi_2)(\rho_s(((x,F(x)),(y,F(y)))),(((u,F(u)),(v,F(v))))))$$

$$-(\theta_1,\theta_2)(\rho_s(((x,F(x)),(y,F(y)))),(((u,F(u)),(v,F(v)))))) \tag{4.39}$$

$(x_0,F(x_0))\prec T((x_0,F(x_0)),(y_0,F(y_0))),\ \ (y_0,F(y_0))\succeq T((y_0,F(y_0)),(x_0,F(x_0)))$ olmak üzere $((x_0,F(x_0)),(y_0,F(y_0)))\in(F,E)\times(F,E)$ vardır. Bu takdirde T bir tek ikili (coupled) esnek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $(x_0,F(x_0)),(y_0,F(y_0))\in(F,E)$ 'nin $(x_0,F(x_0))\prec T((x_0,F(x_0)),(y_0,F(y_0)))$, $(y_0,F(y_0))\succeq T((y_0,F(y_0)),(x_0,F(x_0)))$ olmak üzere iki esnek nokta olduğunu kabul edelim. $(x_1,F(x_1))=T((x_0,F(x_0)),(y_0,F(y_0)))$ ve $(y_1,F(y_1))\succeq T((y_0,F(y_0)),(x_0,F(x_0)))$ olsun. Bu takdirde $x_0\prec x_1, y_0\succeq y_1; F(x_0)\subset F(x_1)$ ve $F(y_0)\supseteq F(y_1)$ 'dır. Tekrar $(x_2,F(x_2))=T((x_1,F(x_1)),(y_1,F(y_1)))$, $(y_2,F(y_2))=T((y_1,F(y_1)),(x_1,F(x_1)))$ olsun. $x_1<x_2, y_1\geq y_2; F(x_1)\subset F(x_2)$ ve $F(y_1)\supseteq F(y_2)$ elde edilerek mixed monoton özelliği T tarafından sağlanır. Bu metodu devam ettirirsek

$(x_{n+1},F(x_{n+1}))=T((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))$,

$(y_{n+1},F(y_{n+1}))\succeq T((y_n,F(y_n)),(x_n,F(x_n)))$,

$$(x_0,F(x_0))\prec(x_1,F(x_1))\prec\cdots\prec(x_n,F(x_n))\prec(x_{n+1},F(x_{n+1}))\prec\cdots \tag{4.40}$$

ve

$$(y_0,F(y_0))\succeq(y_1,F(y_1))\succeq\cdots\succeq(y_n,F(y_n))\succeq(y_{n+1},F(y_{n+1}))\succeq\cdots \tag{4.41}$$

olmak üzere (F,E) 'de iki esnek $\{(x_n,F(x_n))\}$ ve $\{(y_n,F(y_n))\}$ dizisi elde ederiz. Bu

$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots$,

$F(x_0)\subset F(x_1)\subset\cdots\subset F(x_n)\subset F(x_{n+1})\subset\cdots$, ve

$y_0\geq y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n\geq y_{n+1}\geq\cdots$,

$F(y_0)\supseteq F(y_1)\supseteq F(y_2)\supseteq\cdots\supseteq F(y_n)\supseteq F(y_{n+1})\supseteq\cdots$

anlamına gelir.

$$\begin{aligned}\delta_n &= \rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(y_{n+1},F(y_{n+1})))))\\ &= \frac{\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_n,F(x_n)),(x_{n+1},F(x_{n+1}))))+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_n,F(y_n)),(y_{n+1},F(y_{n+1}))))}{2}\end{aligned} \tag{4.42}$$

olarak gösterelim. $\delta_n<\delta_{n+1}$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi (4.39) eşitliğinde $((((x,F(x)),(y,F(y)))))=((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))))$ alınırsa, her $n\geq 0$ için $((((u,F(u)),(v,F(v)))))=((((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$ olur. $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ 'nin özellikleri göz önüne alınarak

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((T((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(T((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$

$$=\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(x_n,F(x_n))))$$

$$\preceq(\varphi_1,\varphi_2)(\rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$

$$-(\theta_1,\theta_2)(\rho_s(((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(y_{n+1},F(y_{n+1})))))$$

$$\preceq\varphi((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$

$\prec(\rho_s(((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$ (4.43) elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{D}}_R((((y_{n+1},F(y_{n+1})),(y_n,F(y_n)))))\prec(\rho_s(((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),\\ (((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edebiliriz.

$$\frac{\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(x_n,F(x_n))))+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n+1},F(y_{n+1})),(y_n,F(y_n))))}{2}$$

$$\prec(\rho_s(((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yani $\delta_n<\delta_{n+1}$'dir. Şu halde $\{\delta_n\}$ monoton artan ve alttan sınırlıdır. Böylece $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\delta$ olacak şekilde bir $\delta_n\geq 0$ vardır. $\delta=0$'ın aksini kabul edersek $\delta>0$ alalım. Aynı zamanda (4.39)'dan

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R((T((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(T((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$

$$=\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(x_n,F(x_n))))$$

$$\preceq(\varphi_1,\varphi_2)(\rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$

$$-(\theta_1,\theta_2)(\rho_s(((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(y_{n+1},F(y_{n+1})))))$$

$$\preceq(\varphi_1,\varphi_2)(\rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))\qquad(4.45)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n+1},F(y_{n+1})),(y_n,F(y_n))))$$

$$\preceq(\varphi_1,\varphi_2)(\rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))$$
(4.46)

eşitsizliğini elde edebiliriz. Şu halde

$$\frac{\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(x_n,F(x_n))))+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n+1},F(y_{n+1})),(y_n,F(y_n))))}{2}$$

$$\prec\rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n-1},F(x_{n-1})),(y_{n-1},F(y_{n-1})))))\qquad(4.47)$$

eşitsizliğine sahip oluruz. (4.47) de $n\to\infty$ için limit alarak $\delta=\lim_{n\to\infty}\delta_n<\lim_{n\to\infty}\delta_{n-1}=\delta$ elde ederiz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\delta=0$'dır. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\rho_s((((x_n,F(x_n)),(y_n,F(y_n)))),(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(y_{n+1},F(y_{n+1})))))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n+1},F(x_{n+1})),(x_n,F(x_n))))+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n+1},F(y_{n+1})),(y_n,F(y_n))))}{2}=0.$$

Şu halde $\tilde{\pi}:E\times E\to E$ olmak üzere

$\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_n,F(x_n)),(x_{n+1},F(x_{n+1}))))=(\tilde{\pi}(x_n,x_{n+1}),0)$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_n,F(y_n)),(y_{n+1},F(y_{n+1}))))=(\tilde{\pi}(y_n,y_{n+1}),0). \tag{4.48}$$

Şimdi $\{(x_n,F(x_n))\}$, $\{(y_n,F(y_n))\}$'nin dikdörtgensel esnek metrik uzaylarda esnek Cauchy dizileri olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. $\{(x_n,F(x_n))\}$ ve $\{(y_n,F(y_n))\}$ den en az biri esnek dikdörtgensel metrik uzayda esnek Cauchy dizisi olmasın. Bu takdirde $n(i)>m(i)>i,$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))\geq\epsilon$$

(4.49)

iken $n(i)$ en küçük indeks olmak üzere $\{(x_n,F(x_n))\}$ iki $\{(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))\}$ ve $\{(x_{m(i)},F(x_{m(i)}))\}$ alt dizisini elde ettiğimizde bir $\epsilon>0$ vardır. Bu

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))\\&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))\prec\epsilon\end{aligned} \tag{4.50}$$

anlamına gelir. Esnek dikdörtgensel metrik uzayın üçüncü özelliğinden

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))\\&\quad\preceq\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1}))))\\&\qquad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))\\&\qquad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))\end{aligned} \tag{4.51}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde esnek dikdörtgensel metrik uzayın 4. özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))\\
&\quad\preceq \tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1}))))\\
&\quad\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))\\
&\quad\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))
\end{aligned}\tag{4.52}$$

özelliğini elde edebiliriz. (4.51) ve (4.52) toplayarak (4.48), (4.49) ve (4.50) den

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))\\
&\;+[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))]\\
&\;+[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))]
\end{aligned}\tag{4.53}$$

(4.53) de $i\to\infty$ için limit alarak ve (4.48), (4.49) eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\epsilon &\preceq \lim_{n\to\infty}[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))\\
&\qquad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))]\\
&\preceq \lim_{n\to\infty}[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))\\
&\qquad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))]
\end{aligned}\tag{4.54}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde esnek dikdörtgensel metrik uzayın üçüncü özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))\\
&\preceq[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{m(i)},F(x_{m(i)}))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{m(i)},F(y_{m(i)}))))]\\
&\;+[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))]\\
&\;+[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{n(i)},F(x_{n(i)})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))\\
&\quad+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{n(i)},F(y_{n(i)})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))]
\end{aligned}\tag{4.55}$$

elde edilir. (4.55) de $i\to\infty$ için limit alarak ve (4.48), (4.49), (4.54) ‘den

$$\lim_{i\to\infty}[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))$$
$$+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))]$$

$$\lim_{i\to\infty}[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))$$
$$+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))] \tag{4.56}$$

elde ederiz. $((x,F(x)),(y,F(y)))=((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})))$ ve $((u,F(u)),(v,F(v))))=((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1})))$ olmak üzere (4.39) eşitsizliğini uygulayarak

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))$$

$$=\tilde{\mathfrak{D}}_R(T((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1}))),T((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))$$

$$\preceq(\varphi_1,\varphi_2)(\rho_s((((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})))),$$
$$(((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1})))))$$

$$\preceq\rho_s((((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})))),$$
$$(((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))). \tag{4.57}$$

Benzer şekilde

$$\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))$$
$$\preceq\rho_s((((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})))),$$
$$(((x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))) \tag{4.58}$$

elde ederiz. (4.57) ve (4.58) ’yi toplamadan önce $i\to\infty$ için limit aldıktan sonra

$$\lim_{i\to\infty}[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)},F(x_{m(i)})),(x_{n(i)},F(x_{n(i)}))))$$
$$+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)},F(y_{m(i)})),(y_{n(i)},F(y_{n(i)}))))]$$
$$\prec\lim_{i\to\infty}[\tilde{\mathfrak{D}}_R(((x_{m(i)-1},F(x_{m(i)-1})),(x_{n(i)-1},F(x_{n(i)-1}))))$$
$$+\tilde{\mathfrak{D}}_R(((y_{m(i)-1},F(y_{m(i)-1})),(y_{n(i)-1},F(y_{n(i)-1}))))]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(4.56) ’dan bu bir çelişkidir. Bu takdirde $\{(x_n,F(x_n))\}$, $\{(y_n,F(y_n))\}$ dikdörtgensel metrik uzayda esnek Cauchy dizileridir. $((F,E),\tilde{\mathfrak{D}}_R)$ tam olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, F(x_n)) = (x, F(x)) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}(y_n, F(y_n)) = (y, F(y)) \tag{4.59}$$

olmak üzere $(x, F(x)), (y, F(y)) \in (F, E)$ mevcuttur.

T nin esnek sürekliliğinden ve (F, E) 'nin esnek Hausdorff olmasından

$$(x, F(x)) = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}, F(x_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} T((x_n, F(x_n)), (y_n, F(y_n))) = T((x, F(x)), (y, F(y)))$$

ve

$$(y, F(y)) = \lim_{n\to\infty}(y_{n+1}, F(y_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} T((y_n, F(y_n)), (x_n, F(x_n))) = T((y, F(y)), (x, F(x)))$$

elde edilir. ∎

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında esnek küme yapısı ve dikdörtgensel metrik kullanılarak, esnek dikdörtgensel metrik denilen ve $\mathfrak{D}_R$ ile gösterilen yeni bir metrik tanımlanmıştır. Böylece bu metrik uzayda bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamaya yönelik altyapı oluşturması açısından esnek dikdörtgensel metriğin kullanılmasıyla esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi ve esnek büzülebilirlik gibi kavramlar ifade edilmiştir.

Literatürde yer alan Banach, Caristi, Kannan gibi bazı sabit nokta teoremleri esnek dikdörtgensel metrik uzaylarda ispat edilmiştir. Bu teoremleri ispatlamaya yönelik bazı yardımcı tanım, teorem ve lemmalar da verilmiştir. Çalışmada son olarak iki esnek dönüşüm için ortak esnek nokta kavramı kullanılarak bu iki dönüşümün zayıf uyumlu olması durumu tanımlanarak değişmeli dönüşümler için ortak esnek sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca Jungck tipi esnek diziler ve azalmayan (non-decreasing) fonksiyonların kullanılmasıyla zayıf uyumlu (weak compatible) dönüşümler için ortak esnek sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların dışında literatürde yer alan Suzuki, Meir Keeler, Chatterja gibi sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilebilir. Ayrıca ortak sabit nokta teoremleri için kullanılan fonksiyonlara esnek sürekli olmaları veya esnek sürekli olmamaları gibi özellikler yüklenerek yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Molodtsov, D. Soft set theory-first result. Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.

[2] Maji, P. K., Biswas R., Roy A. R. Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.

[3] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 2002, 44, 1077-1083.

[4] Shabir, M., Naz, M. On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.

[5] Aygünoğlu, A., Aygün, H. Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications. 2012, 21, 113-119.

[6] Varol, B.P., Aygün, H. On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform. 5(1), 15-24 (2013).

[7] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S. Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2012, 3, 171-185.

[8] Aras, Ç. G., Sönmez, A., Çakallı, H. On soft mappings. ArXiv, Computers & Mathematics with Applications. 2013, 1-12.

[9] Aras, Ç. G., Poşul, H. On some new operations in probabilistic soft set theory. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.

[10] Zorlutuna, İ., Çakır, H. On continuity of soft mappings. Applied Mathematics and Information Science. 2015, 9(1), 403-409.

[11] Brouwer, L. E. J. Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen. 1910, 71, 97-115.

[12] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. Fund Math. 1922, 3, 133-181.

[13] Kannan, R. Some results on fixed point. Bull. Cal. Math. Soc. 1968, 60, 71-76.

[14] Kannan, R. Some results on fixed point II. Amer. Math. Monthly. 1969, 76, 405-408.

[15] Caristi, J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. Transactions of the American Mathematical Society. 1976, 215, 241-251.

[16] Chatterjea, S.K. Fixed point theorems. Comptes rendus de I'Academie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727-730.

[17] Reich, S. Fixed point of contractive functions. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1972, 5, 26-42.

[18] Hardy, G. E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin. 1973, 16, 201-206.

[19] Ćirić, L. B. Fixed points for generalized multivalued contractions. Mathematicki Vesnik. 1972, 9(24), 265-272.

[20] Jungck, G. Commuting mappings and fixed points. Amer. Math. Monthly. 1976, 83, 261-263.

[21] Jungck, G. Compatible mappings and fixed points. Internat. J. Math. Math. Sci. 1986, 9(4), 771-779.

[22] Branciari, A. A Fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric space. Publ. Math. Debrecen. 2000, 57, 31-37.

[23] George, R., Rajagopalan R. Common fixed point results for $\psi-\varphi$ contractions in rectangular metric spaces. Bull. Math. Anal. Appl. 2013, 5(1), 44-52.

[24] Ding, H.S., Imdad, M., Radenović, S., Vujaković, J. On some fixed point results in b-metric, rectangular and b-rectangular metric spaces. Arab Journal Mathematical Science. 2016, 22, 151-164.

[25] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. Fixed point theorems in partially ordered rectangular metric spaces. British Journal of Mathematics and Computer Science. 2016, 15(2), 1-9.

[26] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. A survey on Kannan mappings in universalized metric space. British Journal of Mathematics and Computer Science. 2016, 15(6), 1-6.

[27] Das, S., Samanta, S. K. Soft real sets, soft real numbers and their properties, J. Fuzzy Math. 2012, 20, 551-576.

[28] Das, S., Samanta, S.K. Soft metric. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics. 2013, 6(1), 77-94.

[29] Hosseinzadeh, H. Fixed point theorems on soft metric spaces. Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2017, 19(2), 1625-1647.

[30] Majumdar, P., Samanta, S. K. On soft mappings, Comput. Math. Appl. 2010, 60, 2666–2672.

[31] Wardowski, D. On a soft mapping and its fixed points, Fixed Point Theory Appl. 2013, 182.

[32] Güler, A.C., Yıldırım, E.D., Ozbakır, O.B. A fixed point theorem on soft G-metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. 2016, 9, 885–894.

[33] Yazar, M. I., Aras, Ç.G., Bayramov, S. Fixed point theorems of soft contractive mappings. Filomat. 2016, 30(2), 269-279.

[34] Abbas, M., Murtaza, G., Romaguera S. On the fixed point theory of soft metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2016, 17.

[35] Altıntaş, İ., Şimşek, D., Taşköprü, K. Topology of Soft Cone Metric Spaces.]AIP Conference Proceding. 2017, 1880(1), 030006. https://doi.org/10.1063/1.50006056

[36] Şimşek, D., Altıntaş, İ., Ersoy, S., Abdullayev, F., İmaşkızı, M., Taşköprü, K., Kesik, D., Ablayeva, E., Oğul, B., Cemşitov, N. An introduction to soft cone metric spaces and some fixed point theorems. Manas Journal of Engineering(MJEN). 2018, 6(1), 59-89.

[37] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Soft fixed point theorems for rectangular soft metric spaces, 2. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Abstract Book pp. 102 (2018).

[38] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Soft Fixed Point Theorems for Kannan Type Mappings by Using Rectangular Soft Metric, International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-6 July 2018, İstanbul /Turkey, Abstract Book, pp. 334 (2018)

[39] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Jungck type fixed point results in rectangular soft metric spaces. In: The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2018), Antalya/Turkey, Abstract Booklet of MICOPAM 2018, pp. 51–52 (2018).

[40] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Aspects on fixed point theorems in rectangular soft metric spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. 2019. Proceeding Book, pp. 359-366 (2019)

[41] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Some Kannan type fixed point results in rectangular soft metric space and an application of fixed point for thermal science problem. Therm. Sci. 2019, 23(Suppl. 1), S215–S225.

[42] Öztunç, S., Aslan, S. Jungck type fixed point results for weakly compatible mappings in a rectangular soft metric space, Journal of Inequalities and Applications. 2019,145. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2096-5

[43] Kurepa, D. Tableaux ramifies d'ensembles, Espaces pseudo-distancies. Comptes Rendus Mathematique. 1934, 198, 1563-1565.

[44] Granas, A., Dugundji, J. Fixed Point Theory. Springer. 2002, 690.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sedat ASLAN

Doğum Yeri ve Yılı : Konak, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ssedataslan@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Balçova Salih Dede Anadolu Lisesi, 2010

Lisans : Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015

Yayınları

[1] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Some Kannan type fixed point results in rectangular soft metric space and an application of fixed point for thermal science problem. Thermal Science. 2019, 23(1), S215–S225.

[2] Öztunç, S., Aslan, S. Jungck type fixed point results for weakly compatible mappings in a rectangular soft metric space, Journal of Inequalities and Applications 2019, 145, 1-14.

[3] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Categorical Structures of Soft Groups, International Students Science Conference, 5-6 May 2017, İzmir/Turkey. Abstract Book, pp. 69

[4] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Soft Fixed Point Theorems for Rectangular Soft Metric Spaces, 2. International Students Science Conference, 4-5 May 2018, İzmir/Turkey. Abstract Book, pp. 102

[5] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Soft Fixed Point Theorems for Kannan Type Mappings by Using Rectangular Soft Metric, International Conference on Mathematics:An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-6 July 2018, İstanbul /Turkey, Abstract Book, pp. 334

[6] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Jungck Type Fixed Point Results in Rectangular Soft Metric Spaces, The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2018), Antalya/Turkey, Abstract Booklet of MICOPAM 2018, 51-52.

[7] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Remarks on Rectangular Soft Metric Spaces, 3. International Students Science Conference, 3-4 May 2019, İzmir/Turkey Proceeding Book, 353-358.

[8] Öztunç, S., Mutlu, A., Aslan, S. Aspects on Fixed Point Theorems in Rectangular Soft Metric Spaces, 3. International Students Science Conference, 3-4 May 2019, İzmir/Turkey, Proceeding Book, 359-366.