

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**VOLTERRA TİPİ FONKSİYONEL İNTEGRO-  
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN PELL-LUCAS POLİNOM  
ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI**

**Alpha Peter LUKONDE**

**Danışman**

**Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR**



**MANİSA-2020**

Alpha Peter  
LUKONDE

VOLTERRA TİPİ FONKSİYONEL İNTEGRO-  
DİFFERANSİYEL DENKLEMLERİN PELL-LUCAS POLİNOM  
ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI

2020

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Ana bilim dalında, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Alpha Peter LUKONDE**



# İÇİNDEKİLER

|  | Sayfa |
|--|-------|
| İÇİNDEKİLER .....  | I     |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....  | III   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....   | IV    |
| TABLO DİZİNİ.....  | V     |
| TEŞEKKÜR.....  | VI    |
| ÖZET .....   | VII   |
| ABSTRACT.....  | IX    |
| 1. GİRİŞ .....   | 1     |
| 2. GENEL BİLGİLER .....  | 3     |
| 2.1. Literatür Özeti.....  | 3     |
| 2.2. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Tanımı ve Rekürans Bağlılıkları .....   | 4     |
| 2.3. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Açık Gösterimleri ve Grafikleri .....   | 6     |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....  | 8     |
| 3.1. Materyal.....   | 8     |
| 3.2. Yöntemler.....  | 8     |
| 3.2.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi.....  | 8     |
| 3.2.1.1. Temel Matris Bağlılıkları .....   | 9     |
| 3.2.1.2. Çözüm Yöntemi.....  | 12    |
| 3.2.1.2. Çözümlerin Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analiz.....   | 15    |
| 3.2.2. Fredholm Tipi İntegral Denklemler.....  | 16    |
| 3.2.2.1. Problemin Tanıtılması.....  | 16    |
| 3.2.2.2. Temel Matris Bağlılıkları ve Çözüm Yöntemi.....   | 16    |
| 3.2.3. Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemleri için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi .....  | 18    |
| 3.2.3.1. Problemin Tanıtılması.....  | 18    |
| 3.2.3.2. Temel Matris Bağlılıkları.....  | 19    |
| 3.2.3.3. Çözüm Yöntemi.....  | 20    |
| 3.2.4. Yüksek Mertebeden Değişken katsayılı Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi..... | 23    |
| 3.2.4.1. Problemin Tanıtılması.....  | 23    |
| 3.2.4.2. Temel Matris Bağlılıkları .....   | 23    |
| 3.2.4.3. Çözüm Yöntemi .....   | 24    |
| 3.2.5. Yüksek Mertebeden Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi .....                   | 28    |
| 3.2.5.1. Problemin Tanıtılması.....  | 28    |
| 3.2.5.2. Temel Matris Bağlılıkları .....   | 28    |
| 3.2.5.3. Çözüm Yöntemi .....   | 30    |
| 3.2.6. Yüksek Mertebeden Fredholm-Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi .....          | 33    |
| 3.2.6.1. Problemin Tanıtılması.....  | 33    |
| 3.2.6.2. Temel Matris Bağlılıkları ve Çözüm Yöntemi .....  | 34    |
| 3.2.7. Yüksek Mertebeden Gecikmeli Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi .....                               | 38    |
| 3.2.7.1. Problemin Tanıtılması.....  | 38    |
| 3.2.7.2. Temel Matris Bağlılıkları .....   | 39    |

|   |     |
|---|-----|
| 3.2.7.3. Çözüm Yöntemi .....  | 40  |
| 3.2.8. Yüksek Mertebeden Oransal Gecikmeli Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi.....   | 42  |
| 3.2.8.1. Problemin Tanıtılması.....   | 42  |
| 3.2.8.2. Temel Matris Bağlıntıları .....  | 43  |
| 3.2.8.3. Çözüm Yöntemi .....  | 45  |
| 3.2.9. Yüksek Mertebeden Oransal Gecikmeli Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi.....   | 49  |
| 3.2.9.1. Problemin Tanıtılması.....   | 49  |
| 3.2.9.2. Temel Matris Bağlıntıları .....  | 49  |
| 3.2.9.3. Çözüm Yöntemi .....  | 51  |
| 3.2.10. Yüksek Mertebeden Değişken Gecikmeli Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi..... | 55  |
| 3.2.10.1. Problemin Tanıtılması.....  | 55  |
| 3.2.10.2. Temel Matris Bağlıntıları .....   | 55  |
| 3.2.10.3. Çözüm Yöntemi .....   | 58  |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA .....  | 62  |
| 4.1. Adi Diferansiyel Denklemler ile İlgili Örnekler.....   | 62  |
| 4.2. Fredholm Tipi İntegral Denklemlerle İlgili Örnekler .....  | 72  |
| 4.3. Sabit Katsayılı Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler için Örnekler..   | 74  |
| 4.4. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler .....   | 86  |
| 4.5. Fredholm Tipi Oransal Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler .....  | 96  |
| 4.6. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler.....   | 105 |
| 4.7. Fredholm-Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler .....   | 112 |
| 4.8. Volterra Tipi Oransal Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler .....  | 121 |
| 4.9. Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler .....  | 132 |
| 4.10. Değişkenli Fredholm Tipi Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler .....  | 134 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....  | 145 |
| KAYNAKLAR.....  | 146 |
| ÖZGEÇMİŞ.....   | 149 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                          |  |
|--------------------------|--|
| <b>A</b>                 | Bilinmeyen Pell-Lucas Katsayılar Matrisi   |
| $C(\alpha, \beta)$       | Gecikmeli Denklemler için Geçiş Matrisi  |
| $D(\alpha_k)$            | Oransal Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemler için Geçiş Matrisi             |
| $E(\alpha_k, \beta(x))$  | Değişkenli Fredholm Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemler için Geçiş Matrisi |
| <b>N</b>                 | Kesme Sınırı   |
| $P_n(x)$                 | Pell Polinomları   |
| $Q_n(x)$                 | Pell-Lucas Polinomları   |
| $R_n(x)$                 | Rezidüel Hata Fonksiyonu   |
| <b>R</b>                 | Mutlak Hata  |
| <b>X</b>                 | Standart Tabana Göre Türev Geçiş Matrisi   |
| $x_i$                    | Sıralama Noktaları   |
| $y_n(x)$                 | Yaklaşık Çözüm   |
| $y(x)$                   | Tam Çözüm  |
| $[W; F]$                 | Temel Denkleme ait Artırılmış Matrisi  |
| $[U; \lambda]$           | Koşullar için Artırılmış Matris  |
| $[\tilde{W}; \tilde{F}]$ | Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris                                     |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|  | Sayfa |
|--|-------|
| Şekil 2.1 Pell Polinomunun Grafiği.....                                      | 7     |
| Şekil 2.2 Pell-Lucas Polinomunun Grafiği .....                               | 8     |
| Şekil 4.1 Örnek 4.13'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....                | 70    |
| Şekil 4.2 Örnek 4.13'ün $N=5$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....                | 71    |
| Şekil 4.3 Örnek 4.13'ün $N=2, 3, 5$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları .....   | 71    |
| Şekil 4.4 Örnek 4.32'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....               | 79    |
| Şekil 4.5 Örnek 4.32'nin $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....               | 80    |
| Şekil 4.6 Örnek 4.32'nin $N=5$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....               | 80    |
| Şekil 4.7 Örnek 4.32'nin $N=2, 3, 5$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları.....   | 81    |
| Şekil 4.8 Örnek 4.42'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....               | 90    |
| Şekil 4.9 Örnek 4.42'nin $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....               | 90    |
| Şekil 4.10 Örnek 4.42'nin $N=5$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....              | 91    |
| Şekil 4.11 Örnek 4.42'nin $N=2, 3, 5$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları.....  | 91    |
| Şekil 4.12 Örnek 4.43'ün $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....               | 94    |
| Şekil 4.13 Örnek 4.43'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....              | 95    |
| Şekil 4.14 Örnek 4.43'ün $N=2, 3$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları .....     | 95    |
| Şekil 4.15 Örnek 4.52'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 101   |
| Şekil 4.16 Örnek 4.52'nin $N=4$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 101   |
| Şekil 4.17 Örnek 4.52'nin $N=6$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 102   |
| Şekil 4.18 Örnek 4.52'nin $N=4, 6$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları.....     | 102   |
| Şekil 4.19 Örnek 4.52'nin $N=2, 4, 6$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları ..... | 104   |
| Şekil 4.20 Örnek 4.53'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....              | 105   |
| Şekil 4.21 Örnek 4.53'ün $N=3$ için Rezidüel Hata Fonksiyonu .....           | 110   |
| Şekil 4.22 Örnek 4.62'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 111   |
| Şekil 4.23 Örnek 4.62'nin $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 111   |
| Şekil 4.24 Örnek 4.62'nin $N=5$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 112   |
| Şekil 4.25 Örnek 4.62'nin $N=2, 3, 5$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları ..... | 116   |
| Şekil 4.26 Örnek 4.72'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 117   |
| Şekil 4.27 Örnek 4.72'nin $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 117   |
| Şekil 4.28 Örnek 4.72'nin $N=5$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 118   |
| Şekil 4.29 Örnek 4.72'nin $N=2, 3, 5$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları.....  | 120   |
| Şekil 4.30 Örnek 4.73'ün $N=2, 3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....           | 120   |
| Şekil 4.31 Örnek 4.73'ün $N=2, 3$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları.....      | 127   |
| Şekil 4.32 Örnek 4.82'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 128   |
| Şekil 4.33 Örnek 4.82'nin $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....             | 128   |
| Şekil 4.34 Örnek 4.82'nin $N=2, 3$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları .....    | 131   |
| Şekil 4.35 Örnek 4.83'ün $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....              | 131   |
| Şekil 4.36 Örnek 4.83'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....              | 132   |
| Şekil 4.37 Örnek 4.83'ün $N=2, 3$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları .....     | 139   |
| Şekil 4.38 Örnek 4.10.2'nin $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....            | 139   |
| Şekil 4.39 Örnek 4.10.2'nin $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....           | 140   |
| Şekil 4.40 Örnek 4.10.2'nin $N=4$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....           | 140   |
| Şekil 4.41 Örnek 4.10.2'nin $N=2, 3$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları .....  | 142   |
| Şekil 4.42 Örnek 4.10.3'ün $N=2$ için Tam ve Nümerik Çözümü.....             | 143   |
| Şekil 4.43 Örnek 4.10.3'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....            | 143   |
| Şekil 4.44 Örnek 4.10.3'ün $N=4$ için Tam ve Nümerik Çözümü .....            | 144   |
| Şekil 4.45 Örnek 4.10.3'ün $N=2, 3, 4$ için Rezidüel Hata Fonksiyonları..... | 146   |

## TABLO DİZİNİ

|  | <b>Sayfa</b> |
|--|--------------|
| Tablo 2.1 Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Karşılaştırılması .....        | 5            |
| Tablo 4.1 Örnek 4.13'ün $N=2, 3, 5$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....     | 70           |
| Tablo 4.2 Örnek 4.32'nin $N=2, 3, 5$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....    | 79           |
| Tablo 4.3 Örnek 4.34'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....           | 85           |
| Tablo 4.4 Örnek 4.42'nin $N=2, 3, 5$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....    | 89           |
| Tablo 4.5 Örnek 4.43'ün $N=2, 3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....        | 93           |
| Tablo 4.6 Örnek 4.43'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....           | 94           |
| Tablo 4.7 Örnek 4.52'nin $N=2, 4, 6$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....    | 100          |
| Tablo 4.8 Örnek 4.53'ün $N=3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....           | 104          |
| Tablo 4.9 Örnek 4.62'nin $N=2, 3, 5$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....    | 110          |
| Tablo 4.10 Örnek 4.72'nin $N=2, 3, 5$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....   | 116          |
| Tablo 4.11 Örnek 4.73'ün $N=2, 3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....       | 119          |
| Tablo 4.12 Örnek 4.82'nin $N=2, 3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....      | 127          |
| Tablo 4.13 Örnek 4.83'ün $N=2, 3$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....       | 130          |
| Tablo 4.14 Örnek 4.10.2'nin $N=2, 3, 4$ için Tam ve Nümerik Çözümleri..... | 138          |
| Tablo 4.15 Örnek 4.10.3'ün $N=2, 3, 4$ için Tam ve Nümerik Çözümleri.....  | 142          |



## TEŞEKKÜR

Bana bu çalıŐmayı veren ve bu sŸre zarfında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR'e, tezimin nŸmerik hesaplamaları safhasında kullanmıŐ olduğum Maple programının kullanımını bana öğreten sayın hocam Doç. Dr. Berra GŸltekin SINIR'a, tezimde uyguladığım özŸm yöntemini öğrendiğim sayın hocam Prof. Dr. Mehmet SEZER'e ve altı yıl boyunca bana matematiği sevdiren ve yetiŐmeme katkısı olan tüm Matematik Bölümü hocalarıma sonsuz teŐekkŸrlerimi sunarım. Öėrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme, çalıŐmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli arkadaşlarıma yürekten teŐekkŸr ederim.

Alpha Peter LUKONDE

Manisa, 2020

**ÖZET**  
**Yüksek Lisans Tezi**

**Volterra Tipi Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Pell-Lucas  
Polinom Çözümleri ve Uygulamaları**

**Alpha Peter LUKONDE**

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi**  
**Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR**

Bu tez çalışmasında, adi, integro-diferansiyel, Volterra tipi integro-diferansiyel, değişken ve oransal gecikmeli integro-diferansiyel ve lineer diferansiyel-fark denklemlerinin çözümlerini bulmak için Pell-Lucas polinomuna dayalı matris-sıralama yöntemi uygulanacaktır. Uygulama alanı olarak, kimya, fizik, mühendislik ve diğer bilim dallarında çok sayıda karmaşık matematiksel problemler ortaya çıkmaktadır. Bu tip problemleri çözmek için analitik yöntemler yetersiz kaldığında nümerik yöntemler uygulanmaktadır. Bu amaçla, birçok araştırmacı farklı sayısal yöntemler yani yaklaşık metotlar geliştirmişlerdir. Bu çalışmada, yer alan matematiksel problemlerin çözümlerini bulmak için Pell-Lucas polinomuna dayalı matris-sıralama yöntemi, nümerik yöntem olarak kullanılacaktır. Bu teknikte, Pell-Lucas polinomlarının katsayıları matris formuna dönüştürülerek istenilen çözüm bulunacaktır. Ayrıca, çözümün doğruluğunu kontrol etmek için rezidüel hata ve mutlak hata analizi kullanılacaktır.

Bu çalışma beş bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, fonksiyonel diferansiyel denklemler ve uygulama alanlarına ilişkin genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, Pell-Lucas polinomları tanıtılmış ve polinomların açık gösterimleri grafikleriyle beraber takdim edilmiştir. Üçüncü bölümde, adi, Fredholm tipi integral, sabit ve değişken katsayılı integro-diferansiyel, Volterra tipi integro-diferansiyel, Fredholm-Volterra tipi integro-diferansiyel, oransal ve değişken gecikmeli integro-diferansiyel denklemlere ilişkin problemler tanıtılmış, temel matris bağıntıları, çözüm yöntemi ve çözümün doğruluğunu kontrol etmek için rezidüel hata ve mutlak hata analizi verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, adı geçen denklemlerle ilgili örnekler

takdim edilmiş, nümerik çözümler grafik ve tablolarla gösterilmiştir. Son olarak beşinci bölümde, sonuç ve öneriler sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Pell-Lucas Polinomları, Matris-Sıralama Yöntemi, Fredholm ve Volterra Tipi Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemler, Adi Diferansiyel Denklemler, Rezidüel Hata Analizi, Değişken ve Oransal Gecikmeli Diferansiyel Denklemler.

**2020, 161 sayfa**



## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

### **Pell-Lucas Polynomial Solutions and Applications of Volterra Type Function Integro-Differential Equations**

**Alpha Peter LUKONDE**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR**

In this thesis, the matrix collocation method based on Pell-Lucas polynomial will be applied to find solutions of ordinary, integro-differential, Volterra type integro-differential, integro-differential with variable and proportional delay and linear differential-difference equations. As a field of application, many complex mathematical problems arise in chemistry, physics, engineering and other disciplines. Numerical methods are applied when analytical methods are insufficient to solve such problems. For this purpose, many researchers have developed different numerical methods, i.e. approximate methods. In this study, the matrix collocation method based on Pell-Lucas polynomial will be used as numerical method to find solutions of mathematical problems. In this technique, the desired solution will be found by converting the coefficients of Pell-Lucas polynomials into matrix form. Also, residual error and absolute error analysis will be used to check the accuracy of the solution.

This study consists of five chapters. In the first section, general information about functional differential equations and application areas is given. In the second part, Pell-Lucas polynomials are introduced and clear representations of polynomials are presented together with their graphics. In the third chapter, problems related to ordinary, Fredholm type integral, fixed and variable coefficient integro-differential, Volterra type integro-differential, Fredholm-Volterra type integro-differential, integro-differential equations with proportional and variable delay are introduced, basic matrix relations, solution method and residual error and absolute error analysis are given to check the accuracy of the solution. In the fourth section, examples of the mentioned equations are presented and numerical solutions are shown with graphs and tables. Finally, in the fifth chapter, the results and suggestions are presented.

**Keywords:** Pell-Lucas Polynomials, Matrix-Collocation Method, Volterra and Fredholm Type Integro-Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Residual Error Analysis, Differential Equations with Variable and Proportional Delays.

**2020, 161 pages**

## 1. GİRİŞ

Bilinmeyen fonksiyon veya fonksiyonlar ile bunların çeşitli mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Fen, mühendislik ve sosyal bilimlerde karşılaşılan birçok problemin matematiksel modelleri diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Örneğin; roket ve uyduların hareketi, bir elektrik devresindeki akım veya elektrik yükü, iletken bir çubuktaki ısı akımı, bir tel veya zarın titreşimi, radyoaktif bir maddenin parçalanması, kimyasal reaksiyonların belirlenmesi, belirli bir geometrik özellikteki eğrilerin bulunması gibi durumlarda diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak bazı durumlarda diferansiyel denklemler tek başına bir problemi tanımlada yeterli olmayabilir. Bu durumda, denkleme sınır ya da başlangıç şartı eklemek gerekebilir. İntegral denklemlerde ise ilave şarta gerek yoktur. Bu tip diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin özel bir sınıfını oluşturmaktadır olup, genel olarak kontrol sistemlerinin modellenmesinde, ekoloji ve biyolojide sıkça kullanılmaktadır. Adi diferansiyel, Fredholm tipi integral denklemler, Volterra tipi integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemler fonksiyonel denklemler sınıfını oluşturmaktadır [1].

Bu denklemler problemin tam tanımını verirler. İntegral denklemler bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır [2].

$u(x)$ , bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu, bir integral denklem olarak adlandırılır. Buna göre, integral denklemin standart formülü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (1.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada,  $\lambda$  bir sabit,  $g(x)$  ve  $h(x)$  integralin sınırları olup,  $K(x,t)$  fonksiyonuna çekirdek fonksiyon denir [3]. Matematiksel fizik, kuantum mekaniği, potansiyel teori ve konformal dönüşümlerde integral işareti altında olan denklemlerle karşılaşılabilir [3]. İntegral denklemlerin uygulama alanı geniş olduğundan, çok sayıda araştırmacı bu konuya ilgi duymaktadır. İntegral denklemler yapılarına göre farklı şekilde adlandırılırlar. Bazı integral denklemlerde, integrallerin sınırları sabitlerdir, bu tür integral denklemlere Fredholm integral denklemler denir.

Diğer yandan, bazı integral denklemlerde ise integrallerin sınırları hem sabit hem de değişkenlerden oluşmaktadır. Bu tip denklemler de Volterra integral denklemler olarak adlandırılır [3].

İlk olarak integral denklemler kelimesi 1888 yılında Du Bois-Reymond tarafından kullanılmıştır [4]. Burada, Reymond

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x\xi) f(\xi) d\xi \quad (1.2)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x\xi) g(\xi) d\xi. \quad (1.3)$$

biçiminde Bocher Fourier'in tersi bir formül vermiştir. Bu iki denklem birinci cins integral denklem olarak sınıflandırılabilir. Bu uğraşlar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Ancak integral denklemler invers (tersi) probleminden ortaya çıkmış olarak kabul edilmektedir. Abel bir mekanik problemi incelerken ilk integral ortaya çıkmıştır [4]. Abel'in incelediği problem aşağıda verilmektedir:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = a(z-y) \quad (1.4)$$

$$g(z) = \int_{y=z}^{y=0} \frac{ds}{\sqrt{2a(z-y)}}, \quad \frac{ds}{dy} = -f(y)$$

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(y)}{\sqrt{2a(z-y)}} dy$$

Abel'in incelediği bu problem de birinci cins integral denklem olarak adlandırılmaktadır.

Doğal dünyanın davranışının çoğu temel ilkeler ya da yasalar altında, bir değişkenin başka bir değişkene göre değişmesi biçimindedir. Örneğin,  $y$  değişkeni,  $t$  değişkenine göre değişmektedir. Bu tür bağıntılar,  $y$  ve  $y$ 'nin türevlerinden oluşmaktadır. Ortaya çıkan bu bağıntı diferansiyel denklem olarak adlandırılmaktadır [5].

İntegro-diferansiyel denklemler ise, hem diferansiyel denklem hem de integral denklem içerir [3]. Bu durumda, integro-diferansiyel denklemleri çözebilmek için, diferansiyel ve integral denklem kavramlarının bilinmesi önemlidir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Literatür Özeti

Fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler; diferansiyel, integral, gecikmeli diferansiyel, gecikmeli integro-diferansiyel, diferansiyel-fark, genelleştirilmiş pantograph ve multi pantograph gibi denklemlerin bir kombinasyonu olarak bilinirler.

Bu tip denklemler, fen ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarda önemli bir rol oynamaktadırlar. Özellikle, ekonomi, biyoloji, astrofizik, kontrol ve elektrodinamik, elastisite, salınım teorisi gibi uygulamalı alanlarda, bu tip denklemler uygulanır [6-16]. Buna ek olarak, bu çalışmada gözönüne alınacak Volterra tipindeki fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinin özellikleri birçok yazar tarafından pek çok kez araştırılmıştır [17,27-28,31,34]. Son zamanlarda, bu bahsedilen fonksiyonel denklemlerin çözümleri için artan bir ilgi vardır. Aynı zamanda, bu tip denklemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor veya mümkün değildir. Dolayısıyla nümerik çözümlere ihtiyaç duyulur. Bu tip denklemlerin bazılarının nümerik çözümleri için; Taylor, Chebyshev, Laguerre, Hermite, Bernstein Bessel, Exponential, Dickson, Lucas, Morgan-Voyce, Stirling, Genochi, Legendre, Gegenbauer and Chelyshkov polinomlarına dayalı matrix sıralama yöntemleri kullanılmıştır [7,16-23,25,27-28,37]. Bu çalışmada kullanılacak olan Pell-Lucas polinomları, Horadam tarafından bulunmuştur ve Horadam polinomlarının özel bir halidir. Bu tip polinomlar, fen, mühendislik ve bilgisayar bilimlerinde uygulama alanı bulmakta olup, matematik alanında da aktif bir şekilde kullanılmaktadır [20,22,25,31-32].

Ayrıca, dinamik sistemlerin modellenmesinde kullanılan yüksek mertebeden karışık gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler, biyoloji, ekonomi, elektrodinamik, potansiyel teori, elektrostatik, astronomi, kimya, mekanik, fizik vb. gibi birçok alanda önemli bir rol oynamaktadır [7,16-17,19-23]. Bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmede ihtiyaç duyulan sayısal yöntemlere örnek olarak, Chebyshev matris sıralama yöntemi [19], one-Leg  $\theta$  yöntemleri [40], Spline fonksiyon yöntemi [41] ve Legendre-Gauss collocation yöntemi [44] gibi sayısal yöntemler verilebilir. Son yıllarda, Sezer ve arkadaşları tarafından doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel, integral, integro-diferansiyel, integro-diferansiyel fark ve pantograf

denklemlerini çözmek için bazı matris ve sıralama yöntemleri sunulmuştur [7,16,17-23,25,27-28,31-49].

Bu tez çalışmasında adi diferansiyel denklemler, Fredholm tipi integral denklemler, Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemler ve gecikmeli diferansiyel denklemler ele alınacaktır. İntegro-diferansiyel denklemler, integral ile diferansiyel denklemlerin ilişkisinden meydana geldiğinden, ilk olarak lineer diferansiyel denklemlerle ilgili problemler araştırılacaktır. Daha sonra, integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemler ile ilgili problemler ele alınacaktır.

Ayrıca, ikinci cins Fredholm integral, gecikmeli diferansiyel ve oransal gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerinin karışık koşullara göre, sonlu Pell-Lucas serisi formundaki yaklaşık çözümleri de araştırılacaktır.

Bu tezin amacı, Pell-Lucas polinomları ve serileri ile bunların türevleri ile integrallerini, matris denklemlere veya cebirsel sistemlere dönüştürecek ve standart sıralama noktalarını kullanarak, lineer diferansiyel, Fredholm tipi integral, Volterra tipi lineer sabit ve değişken katsayılı integro-diferansiyel, Fredholm tipi lineer sabit ve değişken katsayılı integro-diferansiyel, sabit ve değişken gecikmeli diferansiyel, Fredholm-Volterra tipi integro-diferansiyel, Fredholm tipindeki değişken gecikmeli diferansiyel ve oransal gecikmeli diferansiyel denklemlerin başlangıç, sınır veya karışık koşullar altında yaklaşık çözümlerini bulmak, rezidüel (kalan) fonksiyonlarına ve ortalama değer teoremine dayalı hata analizi yaparak, bulunan yaklaşık çözümleri iyileştirmek, hata sınırlarını belirlemektir. Böylece, sunulan çalışmada fonksiyonel Volterra tip integro diferansiyel denklemlerin karışık koşullara göre iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri, Pell-Lucas matris sıralama yöntemi geliştirilerek elde edilecektir.

## 2.2. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Tanımı ve Rekürans Bağlıları

Pell ve Pell-Lucas polinomları sırasıyla  $P_n(x)$  ve  $Q_n(x)$  ile gösterilmektedir. Bu polinomlar aşağıdaki gibi tanımlanır [1,24,26,35]:

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1 \quad (2.1)$$

ve



$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), n \geq 2, Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x \quad (2.2)$$

**Tablo 2.1.** Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Karşılaştırılması

| $n$      | $P_n(x)$               | $Q_n(x)$                   |
|----------|------------------------|----------------------------|
| 0        | 0                      | 2                          |
| 1        | 1                      | $2x$                       |
| 2        | $2x$                   | $(2x)^2 + 2$               |
| 3        | $(2x)^2 + 1$           | $(2x)^3 + 3(2x)$           |
| 4        | $(2x)^3 + 2(2x)$       | $(2x)^4 + 4(2x)^2 + 2$     |
| 5        | $(2x)^4 + 3(2x)^2 + 1$ | $(2x)^5 + 5(2x)^3 + 5(2x)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$               | $\vdots$                   |

Buna göre, (2.1) ve (2.2) bağıntılarından

$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca,  $x=1$  ve  $x=1/2$  durumlarında  $P_n(1) = P_n$ ,  $n$ . Pell sayısı;  $Q_n(1) = Q_n$ ,  $n$ . Pell-Lucas sayısı;  $P_n(1/2) = F_n$ ,  $n$ . Fibonacci sayısı;  $Q_n(1/2) = L_n$ ,  $n$ . Lucas sayısı şeklinde tanımlanmaktadır.

Aynı zamanda, Fibonacci polinomu  $P_n(x/2) = F_n(x)$  ve Lucas polinomu  $Q_n(x/2) = L_n(x)$  biçiminde tanımlıdır. Bu polinomlar aşağıdaki fonksiyonlardan üretilir [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)t^n = (1 - 2xt - t^2)^{-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)t^n = (2x + 2t)(1 - 2xt - t^2)^{-1}.$$

Buradan, herhangi bir  $n \geq 2$  tamsayısı için Pell ve Pell-Lucas polinomlarının açık formülleri (rekürans bağıntıları) sırasıyla,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} (2x)^{n-2k-1}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \quad (2.3)$$

biçiminde elde edilir [1].

### 2.3. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının Açık Gösterimleri ve Grafikleri

Burada, (2.1) ve (2.2) formülleri ile verilen Pell ve Pell-Lucas polinomlarına ait rekürans bağıntıları kullanılarak,  $n=1,2,3,4,5$  için polinomlar tanımlanıp, grafikleri Şekil 2.1 ve Şekil 2.2' de gösterilmiştir. Pell polinomlarının ilk altı tanesi açık formda aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$P_0(x) = 0$$

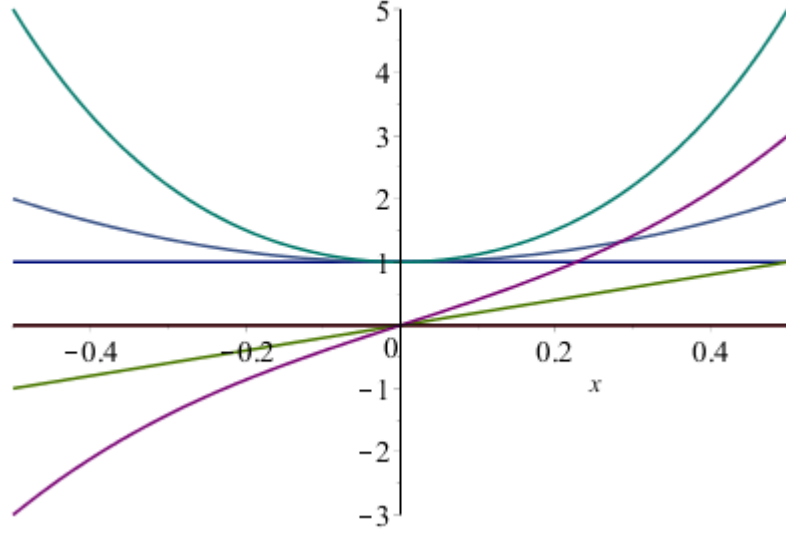
$$P_1(x) = 1$$

$$P_2(x) = 2x$$

$$P_3(x) = (2x)^2 + 1$$

$$P_4(x) = (2x)^3 + 2(2x)$$

$$P_5(x) = (2x)^4 + 3(2x)^2 + 1$$



**Şekil 2.1.** İlk altı Pell polinomunun grafiği

Pell-Lucas polinomlarının ilk dokuz tanesi açık formda aşağıda verilmiştir.

$$Q_0(x) = 2$$

$$Q_1(x) = 2x$$

$$Q_2(x) = (2x)^2 + 2$$

$$Q_3(x) = (2x)^3 + 3(2x)$$

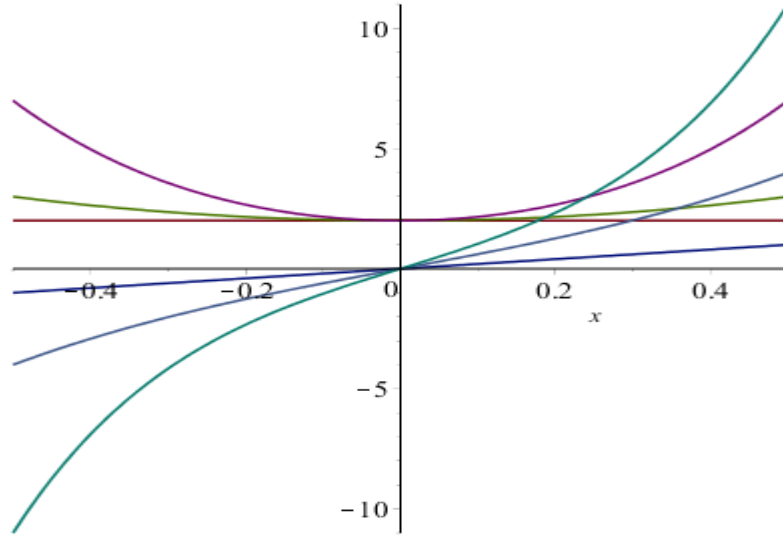
$$Q_4(x) = (2x)^4 + 4(2x)^2 + 2$$

$$Q_5(x) = (2x)^5 + 5(2x)^3 + 5(2x)$$

$$Q_6(x) = (2x)^6 + 6(2x)^4 + 9(2x)^2 + 2$$

$$Q_7(x) = (2x)^7 + 7(2x)^5 + 14(2x)^3 + 7(2x)$$

$$Q_8(x) = (2x)^8 + 8(2x)^6 + 20(2x)^4 + 16(2x)^2 + 2$$



**Şekil 2.2.** İlk altı Pell-Lucas polinomunun grafiği

### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

#### 3.1. Materyal

Bu bölümde, sırasıyla adi diferansiyel denklemler, Fredholm tipi integral denklemler, yüksek mertebeli sabit katsayılı Fredholm integro-diferansiyel denklemler, Fredholm tipi integro-diferansiyel denklemler, yüksek mertebeli Volterra tipi integro-diferansiyel denklemler, Fredholm-Volterra tipi integro-diferansiyel denklemler, yüksek mertebeli oransal ve değişken gecikmeli integro-diferansiyel denklemler için matris sıralama yöntemi verilecektir. Ayrıca kalan fonksiyonlara ve ortalama değer teoremine dayalı rezidüel hata analizi uygulanacak ve böylece çözümlerin doğruluğu ve tutarlılığı gösterilecektir. Bulduğumuz sonuçları, tablo ve grafikler yardımıyla, tam çözüme yakın değerlerin bulunduğu gösterilecektir.

#### 3.2. Yöntemler

##### 3.2.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

Bu kesimde, adi diferansiyel denklemlerin matris-sıralama yöntemi oluşturulacaktır. İlk olarak,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

tipindeki  $m$ . mertebeden lineer diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

karışık koşullara göre, yaklaşık çözümlerini bulmak için, Pell-Lucas polinomlarını ve sıralama noktalarını kullanarak, yöntem hakkında bilgi verelim. Burada,  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyondur,  $P_k(x)$  ve  $f(x)$ ,  $[a, b]$  kapalı aralığında tanımlı sürekli bilinen fonksiyonlar ve  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\lambda_j$  sabitlerdir.  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyonunun çözümü kesilmiş Pell-Lucas polinomu şeklinde aranacaktır. Bu amaçla, önce (3.1) denkleminin, (3.2) ile tanımlanan

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + \dots + a_n Q_n(x) \quad (3.3)$$

kesilmiş Pell-Lucas serisi formunda yaklaşık çözümünün olduğu kabul edilir. Burada,  $Q_n(x)$  polinomları Pell-Lucas polinomlarını ve  $a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  katsayıları da bilinmeyen Pell-Lucas katsayılarını temsil etmektedir.

### 3.2.1.1. Temel Matris Bağlıları

(2.3) ile tanımlanan Pell-Lucas polinomlarının matris bağıntısı

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} \quad (3.4)$$

ile elde edilecektir. Buna göre,  $n$ 'in bazı değerleri için Pell-Lucas polinomlarının matris bağıntısı

$$\begin{aligned} n=0 \text{ için;} & \quad Q_0(x) = 2 \\ n=1 \text{ için;} & \quad Q_1(x) = \sum_{k=0}^0 2^{1-2k} \frac{1}{1-k} \binom{1-k}{k} x^{1-2k} \\ & \quad Q_1(x) = 2^1 \frac{1}{1} \binom{1}{0} x^1 \end{aligned}$$

$$n=2 \text{ için;} \quad Q_2(x) = \sum_{k=0}^1 2^{2-2k} \frac{2}{2-k} \binom{2-k}{k} x^{2-2k}$$

$$Q_2(x) = 2^2 \frac{2}{2} \binom{2}{0} x^2 + 2^0 \frac{2}{1} \binom{1}{1} x^0$$

$$n=3 \text{ için;} \quad Q_3(x) = \sum_{k=0}^1 2^{3-2k} \frac{3}{3-k} \binom{3-k}{k} x^{3-2k}$$

$$Q_3(x) = 2^3 \frac{3}{3} \binom{3}{0} x^3 + 2^1 \frac{3}{2} \binom{2}{1} x^1$$

$$n=4 \text{ için;} \quad Q_4(x) = \sum_{k=0}^2 2^{4-2k} \frac{4}{4-k} \binom{4-k}{k} x^{4-2k}$$

$$Q_4(x) = 2^4 \frac{4}{4} \binom{4}{0} x^4 + 2^2 \frac{4}{3} \binom{3}{1} x^2 + 2^0 \frac{4}{2} \binom{2}{2} x^0$$

$$n=5 \text{ için;} \quad Q_5(x) = \sum_{k=0}^2 2^{5-2k} \frac{5}{5-k} \binom{5-k}{k} x^{5-2k}$$

$$Q_5(x) = 2^5 \frac{5}{5} \binom{5}{0} x^5 + 2^3 \frac{5}{4} \binom{4}{1} x^3 + 2^1 \frac{5}{3} \binom{3}{2} x^1$$

$$n=6 \text{ için} \quad Q_6(x) = \sum_{k=0}^3 2^{6-2k} \frac{6}{6-k} \binom{6-k}{k} x^{6-2k}$$

$$Q_6(x) = 2^6 \frac{6}{6} \binom{6}{0} x^6 + 2^4 \frac{6}{5} \binom{5}{1} x^4 + 2^2 \frac{6}{4} \binom{4}{2} x^2 + 2^0 \frac{6}{3} \binom{3}{3} x^0$$

biçiminde elde edilir. Bu takdirde, (3.4)'den aşağıdaki iki önemli matris bulunabilir:

$N$  tek ise,

$$L^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^0 \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & 2^2 \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & 2^3 \frac{3}{3} \binom{3}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^1 \frac{N}{N+1} \binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-1}{2}} & 0 & 2^3 \frac{N}{2} \binom{\frac{N+3}{2}}{\frac{N-3}{2}} & \dots & 2^N \frac{N}{N} \binom{N}{0} \end{bmatrix}$$

ve  $N$  çift ise,

$$L^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^0 \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & 2^2 \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & 2^3 \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^0 \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \frac{N}{2} \\ \frac{N}{2} \end{pmatrix} & 0 & 2^2 \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \frac{N+2}{2} \\ \frac{N-2}{2} \end{pmatrix} & 0 & \dots & 2^N \frac{N}{N} \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

(3.4)'den elde edilen diğer matrisler ise,

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N], \quad \mathbf{Q}(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad \dots \quad Q_N(x)]$$

biçimindedir. Buradan;

$$\mathbf{Q}^T(x) = L^T \mathbf{X}^T(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \quad (3.5)$$

bulunur. Buna göre,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + \dots + a_N Q_N(x)$$

$$y_N(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad \dots \quad Q_N(x)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}; \mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

$$y_N(x) = \mathbf{Q}(x) \mathbf{A} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.5) bağıntısı, (3.7) de yerine yazılırsa,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.7)$$

bulunur. Bu takdirde,  $y(x)$ 'nin türevleri

$$y'(x) \cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$$y''(x) \cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$$y'''(x) \cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

⋮

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

biçiminde olup, böylece geçiş matrisi

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Buna göre,  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  matrisini  $\mathbf{X}(x)$  matrisi yazmak amacıyla aşağıdaki adımları uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \dots & Nx^{N-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}$$

$$\mathbf{X}''(x) = \mathbf{X}'(x) \mathbf{C} = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^2$$

olup, benzer şekilde devam edilirse

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \quad (3.9)$$

bulunur. Burada,  $\mathbf{C}$  matrisi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

biçiminde tanımlıdır [25-28,32]. (3.9) bağıntısı, (3.8) de yerine yazılırsa

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.10)$$

elde edilir.

### 3.2.1.2. Çözüm Yöntemi

(3.10) matris bağıntısı (3.1) denkleminde yerleştirilirse,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) \quad (3.11)$$

matris denklemini bulunur. Buna göre,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$



ile tanımlı standart sıralama noktaları (3.11) matris denkleminde yerine yazılır, oluşturulan matris denklem sistemi düzenlenirse, (3.1) diferansiyel denklemi için

$$\sum_{k=0}^m P_k X C^k L A = F \quad (3.13)$$

temel matris denklemini elde edilir. Burada,  $P_k$ ,  $F$ ,  $X$  ve  $A$  matrisleri

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

biçimindedir. Böylece, (3.13) matris denklemini aşağıdaki gibi kompakt formda yazılabilir:

$$W A = F \quad (3.14)$$

(3.14) matris denklemini açıldığında,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Burada,

$$W = \sum_{k=0}^m P_k X C^k L = [w_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

biçimindedir. Şimdi (3.2) ile verilen koşullara karşılık gelen matrisi yazalım;

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} X(a) + b_{kj} X(b)) C^k L A}_{U_j} = \lambda_j \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.16)$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} U_j A &= \lambda_j \Leftrightarrow [U_j; \lambda_j] \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \\ \Rightarrow U_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \dots \quad u_{jN}] \\ U &= [U_0 \quad U_1 \quad \dots \quad U_{m-1}]^T \quad \text{ve } \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{m-1}]^T \end{aligned}$$

elde edilir. (3.16) matris bağıntısı açıldığında,

$$[U; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

formunda arttırılmış matris biçiminde yazılabilir. (3.15) ile tanımlanan  $[W; F]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip yerine (3.17) ile tanımlanan  $[U; \lambda]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{W}; \tilde{F}]$  yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözüm elde edilmiş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris açık olarak yazıldığında,

$$[\tilde{W} : \tilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \dots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \dots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca, eğer  $\tilde{W}A = F$  ise  $\tilde{W}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart

$\text{rank}(\tilde{W}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}]$  olmasıdır. Yani,  $\tilde{W}$  matrisinin tersi varsa,

$$A = \tilde{W}^{-1}F \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

olarak bulunur. Sonuç olarak,  $A$  bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü tek olarak elde edilmiş olur.

### 3.2.1.3. Çözümlerin Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analiz

Bu kesimde elde edilen çözümlerin doğruluğu rezidüel hata ile kontrol edilecektir [1,37]. Buna göre, (3.3) sonlu Pell-Lucas serisinin (3.1) denkleminin yaklaşık çözümü olduğunu bilinmektedir. Bundan dolayı,  $y_N(x)$  fonksiyonu ve türevleri (3.1) denkleminde yerine yazıldığında denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Buna göre,  $x_i \in [a, b]$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  ya da  $R_N(x_i) \leq 10^{-k_i}$  ( $k_i$  herhangi bir pozitif tamsayı) için

$$R_N(x_i) = \sum_{k=0}^m P_k(x_i) y_N^{(k)}(x_i) - f(x_i) \cong 0$$

olmalıdır. Eğer  $\max 10^{-k_i} = 10^{-k}$  oluyorsa, bu durumda noktaların her birinin  $R_N(x_i)$  farkı önceden belirlenen  $10^{-k}$  dan daha küçük oluncaya kadar  $N$  kesme sınırı artırılır. Böylece  $N$  büyük seçildiğinde, hata azalır [1,37], yani  $R_N(x) \rightarrow 0$  olur. Burada çözümün hatası, rezidüel  $R_N(x)$  fonksiyonu ile tahmin edilir [1,37]. Buna göre,

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx \quad \text{ve} \quad \int_a^b R_N(x) dx = (b-a) R_N(c) \quad , a \leq c \leq b \quad \text{ise,}$$

bu takdirde

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a) |R_N(c)|$$

$$(b-a) |R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx$$

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a}$$

olur. Ortalama değer teoremi gereği,

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N$$

olduğu açıktır. Bu ise, hata üst sınırı olarak kabul edilir. Bunun yanında, mutlak hata hesabı

$$R = |Tam \text{ çözüm} - Yaklaşık \text{ çözüm}| = |y_N(x) - y(x)|$$

biçiminde göz önüne alınacaktır.

### 3.2.2. Fredholm Tipi İntegral Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.2.1. Problemin Tanıtılması

Bu kısımda, Fredholm tipi integral denklemler için matris sıralama yöntemi oluşturulacaktır.  $f(x)$  ve  $K(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere, Fredholm tipi integral denklemlerinin tanımı

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t) dt \quad (3.19)$$

biçiminde verilir. Burada,  $\lambda$  bilinen bir sabit ve  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyondur. (3.19) ile tanımlı Fredholm integral denklemi için yaklaşık çözüm, (3.3) ile verilen kesilmiş Pell-Lucas serisi formunda bulunacaktır.

#### 3.2.2.2. Temel Matris Bağlılıları ve Çözüm Yöntemi

Öncelikle (3.19) denkleminde tanımlı fonksiyonunun matris formu

$$K(x,t) = X(x) K X^T(t) \quad (3.20)$$

biçimindedir. Burada

$$\mathbf{K} = [k_{pq}] ; k_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde tanımlıdır [18,19]. (3.7) ve (3.20) matris bağıntıları (3.19) denkleminde yerine yerleştirip ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{X}(x)\mathbf{K}\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{L}\mathbf{A}dt$$

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x)\mathbf{K} \underbrace{\int_a^b \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)dt}_{\mathbf{M}}\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x)\mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.21)$$

matris formu elde edilir. Eğer  $\mathbf{M}$  açılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_a^b \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)dt = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^b [t^{i+j}] dt ; i, j = 0, 1, \dots, N \\ &= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^b = \left[ \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{M} = [m_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

bulunur. Buna ek olarak,

$$f(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{F} ; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} ; n = 0, 1, \dots, N \quad (3.22)$$

ifadeleri göz önüne alınır. (3.22) matris bağıntısı alınır, (3.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{F} + \lambda \mathbf{X}(x)\mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{L}\mathbf{A}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
X(x)LA - \lambda X(x)KMLA &= X(x)F \\
X(x)\{I_n - \lambda KM\}LA &= X(x)F \\
X^{-1}(x)X(x)\{I_n - \lambda KM\}LA &= X^{-1}(x)X(x)F
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{I_n - \lambda KM\}}_W LA = F$$

$$WA = F \quad (3.23)$$

temel matris elde edilir. Daha açık yazılmak istenirse,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f_0 \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f_N \end{bmatrix}$$

$$|W| \neq 0 \Rightarrow A = W^{-1}F$$

arttırılmış formunda yazılabilir. Böylece,  $A$  bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü tek olarak bulunmuş olur.

### 3.2.3. Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.3.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde yüksek mertebeden sabit katsayılı Fredholm tipi integro-diferansiyel denklemler için matris-sıralama yöntemi oluşturulacaktır. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt ; a \leq x, t \leq b \quad (3.24)$$

Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.25)$$

karışık koşullara göre,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (3.26)$$

biçiminde tanımlı sonlu Pell-Lucas serisi cinsinden çözümleri aranacaktır. Burada  $P_k$  sabit olup,  $f(x)$  ve  $K(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlardır.  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\lambda_j$  ve  $\lambda$  bilinen sabitler,  $y(x)$  ise bilinmeyen fonksiyondur.

### 3.2.3.2. Temel Matris Bağlıları

Öncelikle, (3.24) denkleminin çözümünün (3.26) ile verilen sonlu Pell-Lucas serisi şeklinde olduğunu varsayalım. Yani,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & \cdots & Q_N(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad a \leq x, t \leq b$$

olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{A} \quad (3.27)$$

matris bağıntısı elde edilir. Bu takdirde, (3.5) ile matris bağıntısı alınır, (3.27) matris bağıntısında yerine yazılırsa

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.28)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^N \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_N \end{bmatrix}^T$$

olduğu açıktır. Ayrıca,  $y(x)$  ve  $y_N(x)$  fonksiyonlarının türevleri

$$\begin{aligned}
y'(x) &\cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \\
y''(x) &\cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \\
y'''(x) &\cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \\
&\vdots \\
y^{(k)}(x) &\cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A}; \quad k = 0, 1, \dots, m
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Açık olarak,

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

verilirse,

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.29)$$

elde edilir.

### 3.2.3.3. Çözüm Yöntemi

Öncelikle (3.23) denkleminde  $K(x, t)$  fonksiyonunun matris formu

$$\mathbf{K}(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{K}\mathbf{X}^T(t) \quad (3.30)$$

formundadır. Burada,

$$\mathbf{K} = [k_{pq}] ; k_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde tanımlıdır [18,19]. Şimdi (3.28),(3.29) ve (3.30) matris bağıntıları (3.24) denkleminde yerine yerleştirilip, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{X}(x)\mathbf{K}\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{L}\mathbf{A} dt$$



$$\sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \underbrace{\int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{M}} \mathbf{L} \mathbf{A}$$

elde edilir. Eğer  $\mathbf{M}$  açılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^b [t^{i+j}] dt \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N \\ &= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^b = \left[ \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{M} = [m_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.31)$$

matris formu elde edilir. Burada,

$$f(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad ; n = 0, 1, \dots, N$$

alınıp, (3.31)'de yerine yerleştirilirse

$$\sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{F} + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A}$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} &= \mathbf{X}(x) \mathbf{F} + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} \\ \sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} &= \mathbf{X}(x) \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X}^{-1}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{X}^{-1}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{F}$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m P_k C^k - \lambda KM \right\}}_W \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.32)$$

biçiminde temel matris bağıntısı elde edilir. Burada,

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

şeklinde tanımlıdır. (3.32) denkleminin kompakt formu

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.33)$$

biçimindedir. (3.33) matrisi açıldığında,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f_0 \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f_N \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

arttırılmış matris elde edilir.

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m P_k X C^k L = [w_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

dır. (3.32) matris bağıntısı sadece sabitler içerdiğinden, sıralama noktalarının uygulanmasına gerek kalmayacaktır. Ayrıca,  $\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{F}$  ise  $\mathbf{W}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart  $\text{rank}(\mathbf{W}) = N + 1 = \text{rank}[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$  olmasıdır. Yani, eğer  $\mathbf{W}$  matrisinin tersi varsa,

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.35)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

bulunur.

### 3.2.4. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.4.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde, yüksek mertebeden değişken katsayılı Fredholm tipi integro-diferansiyel denklemler için matris-sıralama yöntemi oluşturulacaktır. İlk olarak,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt ; a \leq x, t \leq b \quad (3.36)$$

Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.37)$$

karışık koşullara göre,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (3.38)$$

ile tanımlı sonlu Pell-Lucas serisi cinsinden çözümleri aranacaktır. Burada  $P_k(x)$ ,  $f(x)$  ve  $K(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlar olup,  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\lambda_j$  ve  $\lambda$  bilinen sabitler,  $y(x)$  ise bilinmeyen fonksiyondur.

#### 3.2.4.2. Temel Matris Bağlıları

(3.36) denkleminin çözümünü (3.38) ile verilen sonlu Pell-Lucas serisi şeklinde olduğunu varsayalım. Yani,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad \cdots \quad Q_N(x)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} ; a \leq x, t \leq b$$

olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{A} \quad (3.39)$$

matris bağıntısı bulunur.  $\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N]$  ve  $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$  olmak üzere, (3.5) matris bağıntısı, (3.39) matris bağıntısında yerine yazılırsa,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.40)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$y'(x) \cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y''(x) \cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y'''(x) \cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

⋮

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad ; k = 0, 1, \dots, m$$

türevleri alınır, açık olarak

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

verilirse, bu takdirde

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.41)$$

elde edilir.

### 3.2.4.3. Çözüm Yöntemi

(3.23) denkleminde  $K(x, t)$  fonksiyonunun matris formu

$$\mathbf{K}(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{K}\mathbf{X}^T(t) \quad (3.42)$$

biçiminde olmak üzere,

$$\mathbf{K} = [k_{pq}] ; k_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlıdır [18,19]. Burada, (3.40), (3.41) ve (3.42) matris bağıntıları (3.36) denkleminde yerine yerleştirip ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{L} \mathbf{A} dt$$

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \underbrace{\int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{M}} \mathbf{L} \mathbf{A}$$

bulunur. Eğer  $\mathbf{M}$  açılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^b [t^{i+j}] dt ; i, j = 0, 1, \dots, N \\ &= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^b = \left[ \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{M} = [m_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.43)$$

matris formu elde edilir. (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (3.43) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x = x_0 &\Rightarrow \sum_{k=0}^m P_k(x_0) \mathbf{X}(x_0) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_0) + \lambda \mathbf{X}(x_0) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} \\ x = x_1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^m P_k(x_1) \mathbf{X}(x_1) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_1) + \lambda \mathbf{X}(x_1) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} \\ &\vdots \\ x = x_N &\Rightarrow \sum_{k=0}^m P_k(x_N) \mathbf{X}(x_N) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_N) + \lambda \mathbf{X}(x_N) \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.44)$$

biçiminde matris denklem sistemi elde edilir. (3.44) düzenlendiğinde ise,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m P_k X C^k - \lambda X K M \right\}}_W L A = F \quad (3.45)$$

temel matris denklemini bulunur. Burada,

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

şeklinde tanımlıdır. (3.45) denkleminin kompakt formu

$$W A = F \quad (3.46)$$

biçimindedir.

$$W = \sum_{k=0}^m P_k X C^k L = [w_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere, (3.46) matrisini açıldığında elde edilecek arttırılmış matris aşağıdaki gibidir:

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Şimdi (3.37) ile verilen koşullara karşılık gelen matris yazalım

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} X(a) + b_{kj} X(b)) C^k L A}_{v_j} = \lambda_j ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.48)$$

Buna göre,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_j \mathbf{A} &= \lambda_j \Leftrightarrow [\mathbf{U}_j; \lambda_j] \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \\
\Rightarrow \mathbf{U}_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] \\
\mathbf{U} &= [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{m-1}]^T \quad \text{ve } \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T
\end{aligned}$$

olup, (3.48) matris bağıntısı açıldığında, arttırılmış matrisi

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

biçiminde yazabiliriz. (3.47) ile tanımlanan  $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip yerine (3.49) ile tanımlanan  $[\mathbf{U}; \lambda]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$  yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözüm bulunmuş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris, açık olarak yazıldığında aşağıdaki gibidir:

$$[\tilde{\mathbf{W}} : \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \cdots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \cdots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Eğer  $\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \mathbf{F}$  ise  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart

$\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$  dir. Yani, eğer  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisinin tersi varsa,

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.50)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

biçiminde bulunur. Sonuç olarak,  $A$  bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü tek olarak elde edilmiş olur.

### 3.2.5. Yüksek Mertebeden Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.5.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde, yüksek mertebeden Volterra tipi integro-diferansiyel denklemler için Pell-Lucas matris-sıralama yöntemi inşa edilecektir.

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.51)$$

karışık koşullara sahip,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) y(t) dt ; a \leq x, t \leq b \quad (3.52)$$

ile tanımlı Volterra tip integro-diferansiyel denkleminin

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (3.53)$$

biçiminde kesilmiş Pell-Lucas serisi cinsinden yaklaşık çözümleri aranacaktır. Burada  $P_k(x)$ ,  $f(x)$  ve  $K(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlardır.  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\lambda_j$  ve  $\lambda$  bilinen uygun sabitler olup,  $y(x)$  ise bilinmeyen fonksiyondur.  $y(x)$  çözümü için burada bulunması gereken, Pell-Lucas polinomlarının katsayılarıdır.

#### 3.2.5.2. Temel Matris Bağlıntılar

Öncelikle (3.52) denkleminin çözümünü (3.53) ile verilen sonlu Pell-Lucas serisi cinsinden olduğunu varsayalım. Yani,



$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad \cdots \quad Q_N(x)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad a \leq x, t \leq b$$

kabul edelim. Böylece,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{A} \quad (3.54)$$

matris bağıntısı elde edilir. (3.5) matris bağıntısı, (3.54) matris bağıntısında yerine yazılarak,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.55)$$

bulunur. Burada,  $\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$  ve  $\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$  olduğu açıktır.

Ayrıca,  $y(x)$ 'in türevleri ve  $C^0$  ile  $\mathbf{C}$  matrisleri

$$y'(x) \cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y''(x) \cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y'''(x) \cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$\vdots$$

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, m$$

ve

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere,

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.56)$$

elde edilir.

### 3.2.5.3. Çözüm Yöntemi

İlk olarak,

$$\mathbf{K} = [k_{pq}] ; k_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere, (3.42) denklemindeki  $K(x, t)$  fonksiyonunun matris formunu

$$\mathbf{K}(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{X}^T(t) \quad (3.57)$$

biçiminde göz önüne alalım [18,19]. (3.55), (3.56) ve (3.57) matris bağıntıları, (3.52) denkleminde yerine yerleştirip, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \int_a^x \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{L} \mathbf{A} dt$$

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \underbrace{\int_a^x \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{T}(x)} \mathbf{L} \mathbf{A}$$

elde edilir. Eğer  $\mathbf{T}(x)$  açılırsa,

$$\mathbf{T}(x) = \int_a^x \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^x \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^x [t^{i+j}] dt ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^x = \left[ \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{T}(x) = [\varphi_{ij}(x)] ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \lambda \mathbf{X}(x) \mathbf{K} \mathbf{T}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.58)$$

matris formu elde edilir. (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (3.58) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
x = x_0 &\Rightarrow \sum_{k=0}^m P_k(x_0) \mathbf{X}(x_0) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_0) + \lambda \mathbf{X}(x_0) \mathbf{K} \mathbf{T}(x_0) \mathbf{L} \mathbf{A} \\
x = x_1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^m P_k(x_1) \mathbf{X}(x_1) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_1) + \lambda \mathbf{X}(x_1) \mathbf{K} \mathbf{T}(x_1) \mathbf{L} \mathbf{A} \\
&\vdots \\
x = x_N &\Rightarrow \sum_{k=0}^m P_k(x_N) \mathbf{X}(x_N) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_N) + \lambda \mathbf{X}(x_N) \mathbf{K} \mathbf{T}(x_N) \mathbf{L} \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

biçiminde matris denklem sistemi bulunur. Buna göre, (3.59) düzenlendiğinde

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{C}^k - \lambda \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{T}} \right\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{F} \tag{3.60}$$

temel matris denklemleri elde edilir. Burada, matrisler

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2} \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(x_0) \\ \mathbf{T}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

ve  $\mathbf{C}^0$  birim matristir. Ayrıca (3.60) temel matris bağıntısı kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{F} \tag{3.61}$$

formunda yazılabilir. (3.61) matrisini açılırsa aşağıdaki arttırılmış matris elde edilir.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Burada,

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{C}^k \mathbf{L} = [w_{ij}] \quad ; \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

ile verilir. Şimdi (3.51) ile verilen koşullara karşılık gelen matrisi yazalım.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A}}_{\mathbf{U}_j} = \lambda_j \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.63)$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j \mathbf{A} = \lambda_j &\Leftrightarrow [\mathbf{U}_j; \lambda_j] \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ \Rightarrow \mathbf{U}_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] \\ \mathbf{U} &= [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{m-1}]^T \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T \end{aligned}$$

elde edilir. (3.63) matris bağıntısı açıldığında,

$$[\mathbf{U}; \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

arttırılmış matrisi bulunur. (3.62) ile tanımlanan  $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip yerine (3.64) ile tanımlanan  $[\mathbf{U}; \boldsymbol{\lambda}]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$  yeni arttırılmış matris elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözüm bulunmuş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris açık olarak yazıldığında aşağıdaki gibidir:

$$[\tilde{W} : \tilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \cdots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \cdots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Eğer  $\tilde{W}A = F$  ise,  $\tilde{W}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart  $\text{rank}(\tilde{W}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}]$  olmasıdır. Yani ,eğer  $\tilde{W}$  matrisinin tersi varsa,

$$A = \tilde{W}^{-1}F \quad (3.65)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$A = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_N]^T$$

olmak üzere,  $A$  bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü tek olarak elde edilmiş olur.

### 3.2.6. Yüksek Mertebeden Fredholm-Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.6.1. Problemin Tanıtılması

Bu bölümde, Fredholm-Volterra tipindeki yüksek mertebeden integro-diferansiyel denklemler için Pell-Lucas matris-sıralama yöntemi oluşturulacaktır. İlk olarak,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^b K_1(x,t)y(t)dt + \lambda_2 \int_a^x K_2(x,t)y(t)dt; \ a \leq x, t \leq b \quad (3.66)$$

Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj}y^{(k)}(a) + b_{kj}y^{(k)}(b)) = \lambda_j \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.67)$$

karışık koşullara göre,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (3.68)$$

ile tanımlı kesilmiş Pell-Lucas serisi formundaki yaklaşık çözümlerini bulalım. Burada  $P_k(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K_1(x,t)$  ve  $K_2(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlardır.  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\lambda_j$ ,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  bilinen uygun sabitlerdir ve  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyondur.

### 3.2.6.2. Temel Matris Bağlılıları ve Çözüm Yöntemi

Öncelikle (3.57) matris bağıntısını kullanarak, (3.66) denkleminde verilen  $K_1(x,t)$  ve  $K_2(x,t)$  fonksiyonlarının matris formları

$$\mathbf{K}_i(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_i \mathbf{X}^T(t) ; i=1,2 \quad (3.69)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\mathbf{K}_i = [k_{pq}] ; k_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K_i(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N, i=1,2$$

ile tanımlıdır. Buna göre, (3.55) ve (3.56)'dan

$$y(x) \cong \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \text{ ve } y^{(k)}(x) \cong \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.70)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.69) ve (3.70) matris bağıntıları yerine konular ve düzenlenirse, aşağıdaki matris formu bulunur.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} &= f(x) + \lambda_1 \int_a^b \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_1 \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{L} \mathbf{A} dt + \lambda_2 \int_a^x \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_2 \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{L} \mathbf{A} dt \\ \sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} &= f(x) + \lambda_1 \underbrace{\mathbf{X}(x) \mathbf{K}_1 \int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{M}} \mathbf{L} \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_2 \underbrace{\int_a^x \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{T}(x)} \mathbf{L} \mathbf{A} \\ \sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} &= f(x) + \lambda_1 \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_1 \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_2 \mathbf{T}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Şimdi (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (3.71) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_i) + \lambda_1 \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K}_1 \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K}_2 \mathbf{T}(x_i) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.72)$$

biçiminde matris denklem sistemi elde edilir. Buna göre, (3.72) matris bağıntısı düzenlenirse,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X} \mathbf{C}^k - \lambda_1 \mathbf{X} \mathbf{K}_1 \mathbf{M} - \lambda_2 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}}_2 \bar{\mathbf{T}} \right\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.73)$$

olur. Burada,

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{\mathbf{K}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(x_0) \\ \mathbf{T}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere,  $\mathbf{C}^0$  birim matristir. Diğer yandan,  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{M}$  matrisleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(x) &= \int_a^x \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^x \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^x [t^{i+j}] dt \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N \\
&= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^x = \left[ \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{T}(x) = [\varphi_{ij}(x)] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^b [t^{i+j}] dt \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N \\
&= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^b = \left[ \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{M} = [m_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N
\end{aligned}$$

ile tanımlanır. Bu takdirde, (3.73) temel matris bağıntısı, kısaca

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F} \quad (3.74)$$

olarak yazılabilir. (3.74) matrisini açıldığında,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

arttırılmış matrisi ve

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{C}^k \mathbf{L} = [w_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

bulunur. Şimdi (3.67) ile verilen koşullara karşılık gelen matrisi yazalım.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A}}_{\mathbf{U}_j} = \lambda_j \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.76)$$



Buna göre,

$$\begin{aligned}
U_j A &= \lambda_j \Leftrightarrow [U_j; \lambda_j] \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \\
\Rightarrow U_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \dots \quad u_{jN}] \\
U &= [U_0 \quad U_1 \quad \dots \quad U_{m-1}]^T \quad \text{ve } \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{m-1}]^T
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.76) matris bağıntısından

$$[U; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

arttırılmış matrisi bulunur. (3.75) ile tanımlanan  $[W; F]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip yerine (3.77) ile tanımlanan  $[U; \lambda]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{W}; \tilde{F}]$  yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matrisi çözerek, istenilen çözümü bulmuş oluruz. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris açık olarak yazıldığında,

$$[\tilde{W} : \tilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \dots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \dots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca,  $\tilde{W}A = F$  ise  $\tilde{W}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart  $\text{rank}(\tilde{W}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}]$  dır. Yani,  $\tilde{W}$  matrisinin tersi varsa,

$$A = \tilde{W}^{-1}F \quad (3.78)$$

olarak yazılabilir. Böylece,  $A$  bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü olan aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

biçiminde elde edilmiş olur.

### 3.2.7. Yüksek Mertebeden Gecikmeli Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.7.1. Problemin Tanıtılması

Bu kısımda yüksek mertebeden gecikmeli lineer diferansiyel denklemler için Pell-Lucas matris sıralama yöntemi verilecektir. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(\alpha x + \beta) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.79)$$

m. mertebeden gecikmeli lineer diferansiyel denklemin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.80)$$

karışık koşullar altındaki

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x); \quad N \geq m \text{ ve } a \leq x \leq b \quad (3.81)$$

ile tanımlı kesilmiş Pell-Lucas serisi formundaki yaklaşık çözümlerin bulunması amaçlanmaktadır. Burada,  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $P_k(x)$  ile  $f(x)$ ,  $[a, b]$  kapalı aralığında tanımlı sürekli bilinen fonksiyonlar olup,  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\lambda_j$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  uygun sabitlerdir.  $y(x)$ 'in çözümü, kesilmiş Pell-Lucas polinomu şeklinde aranacaktır.

### 3.2.7.2. Temel Matris Bağıntıları

(3.1) denkleminde,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad \text{ve} \quad y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}.$$

olduğu bilinmektedir.  $y(x)$ 'in türevleri ise,

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A}$$

biçimindedir. Burada  $x = \alpha x + \beta$  varsayalım. Bu takdirde,

$$y(\alpha x + \beta) \cong y_N(\alpha x + \beta) = \mathbf{X}(\alpha x + \beta) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.82)$$

$$y^{(k)}(\alpha x + \beta) \cong y_N^{(k)}(\alpha x + \beta) = \mathbf{X}^{(k)}(\alpha x + \beta) \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{X}(\alpha x + \beta) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.83)$$

olur. Buradan,

$$\mathbf{X}(\alpha x + \beta) = \begin{bmatrix} 1 & (\alpha x + \beta) & \cdots & (\alpha x + \beta)^N \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

elde edilir. Burada,  $\mathbf{X}(\alpha x + \beta)$  matrisinin açık olarak yazılabilmesi için, aşağıdaki yol takip edilerek önemli geçiş matrisi elde edilecektir. Buna göre,

$$(\alpha x + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha x)^k \beta^{n-k}$$

olduğundan,

$$n=0 \text{ için; } (\alpha x + \beta)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} (\alpha x)^k \beta^{0-k} = \binom{0}{0} \alpha^0 \beta^0 x^0$$

$$n=1 \text{ için; } (\alpha x + \beta)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} (\alpha x)^k \beta^{1-k} = \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 x^0 + \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 x^1$$

$$n=2 \text{ için; } (\alpha x + \beta)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (\alpha x)^k \beta^{2-k} = \binom{2}{0} \alpha^0 \beta^2 x^0 + \binom{2}{1} \alpha^1 \beta^1 x^1 + \binom{2}{2} \alpha^2 \beta^0 x^2$$

$n = N$  için;

$$(\alpha x + \beta)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (\alpha x)^k \beta^{N-k} = \binom{N}{0} \alpha^0 \beta^N x^0 + \binom{N}{1} \alpha^1 \beta^{N-1} x^1 + \dots + \binom{N}{N} \alpha^N \beta^0 x^N$$

bulunur. Böylece

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\alpha x + \beta)^0 \\ (\alpha x + \beta)^1 \\ (\alpha x + \beta)^2 \\ \vdots \\ (\alpha x + \beta)^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^T(\alpha x + \beta)} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha^0 \beta^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 & \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0} \alpha^0 \beta^2 & \binom{2}{1} \alpha^1 \beta^1 & \binom{2}{2} \alpha^2 \beta^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{N}{0} \alpha^0 \beta^N & \binom{N}{N-1} \alpha^1 \beta^{N-1} & \binom{N}{N-2} \alpha^2 \beta^{N-2} & \dots & \binom{N}{N} \alpha^N \beta^0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^T(x)}$$

$\mathbf{C}^T(\alpha, \beta)$

olmak üzere,

$$\mathbf{X}^T(\alpha x + \beta) = \mathbf{C}^T(\alpha, \beta) \mathbf{X}^T(x) \quad (3.85)$$

elde edilir. Lineer cebirden  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$  ve  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  olup,

$$(\mathbf{X}^T(\alpha x + \beta))^T = (\mathbf{C}^T(\alpha, \beta) \mathbf{X}^T(x))^T \Rightarrow \mathbf{X}(\alpha x + \beta) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\alpha, \beta) \quad (3.86)$$

bulunur. (3.74) matris bağıntısı, (3.71) matris bağıntısında yerine yazıldığında,

$$y^{(k)}(\alpha x + \beta) \cong y_N^{(k)}(\alpha x + \beta) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\alpha, \beta) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.87)$$

elde edilir.

### 3.2.7.3. Çözüm Yöntemi

İlk olarak, (3.87) matris bağıntısını (3.79) denkleminde yerine yazalım. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{C}(\alpha, \beta) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) \quad (3.88)$$

bulunur. Ardından, (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (3.88) denkleminde yerine koyulursa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) X(x_i) C(\alpha, \beta) C^k L A = f(x_i); i = 0, 1, \dots, N \quad (3.89)$$

ile tanımlı matris denklem sistemi elde edilir. Oluşturulan matris denklem sistemi düzenlendiğinde,

$$\sum_{k=0}^m P_k X C(\alpha, \beta) C^k L A = F \quad (3.90)$$

temel matris denklemini elde edilir ve kısaca

$$W A = F \quad (3.91)$$

yazılabilir. (3.91) matrisinden,  $W = \sum_{k=0}^m P_k X C^k L = [w_{ij}]$ ;  $i, j = 0, 1, \dots, N$  olmak üzere,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

arttırılmış matrisi bulunur. (3.80) ile verilen koşullara karşılık gelen matris yazılırsa,

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} X(a) + b_{kj} X(b)) C^k L A}_{U_j} = \lambda_j \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.93)$$

bulunur. Buna göre, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} U_j A &= \lambda_j \Leftrightarrow [U_j; \lambda_j] \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \\ \Rightarrow U_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] \\ U &= [U_0 \quad U_1 \quad \cdots \quad U_{m-1}]^T \quad \text{ve} \quad \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (3.93) matris bağıntısından

$$[U; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

arttırılmış matrisi yazabilir. (3.92) ile tanımlanan  $[W; F]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip, yerine (3.94) ile tanımlanan  $[U; \lambda]$  koşul matrisi yazılarak,  $[\tilde{W}; \tilde{F}]$  yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözüm bulunmuş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris açık formda

$$[\tilde{W} : \tilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \cdots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \cdots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Eğer  $\tilde{W}A = F$  ise  $\tilde{W}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart,

$\text{rank}(\tilde{W}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}]$  olmasıdır. Yani,  $\tilde{W}$  matrisinin tersi varsa,

$$A = \tilde{W}^{-1}F \quad (3.95)$$

olarak yazılabilir. Böylece,  $A$  bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü olan aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi, yani

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

biçiminde bulunur.

### 3.2.8. Yüksek Mertebeden Oransal Gecikmeli Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.8.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde yüksek mertebeden oransal gecikmeli Fredholm tipi integro-diferansiyel denklemler için Pell-Lucas matris-sıralama yöntemi inşa edilecektir. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(\alpha_k x) = f(x) + \int_a^b \sum_{j=0}^{m_1} K_j(x,t) y^{(j)}(\beta_j t) dt ; m_1 \leq m, a \leq x, t \leq b \quad (3.96)$$

oransal gecikmeli Fredholm tipi integro-diferansiyel denkleminin

$$y^{(k)}(a) = \lambda_k ; k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.97)$$

başlangıç koşulları altında,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (3.98)$$

ile tanımlı kesilmiş Pell-Lucas serisi cinsinden yaklaşık çözümleri aranacaktır. Burada  $P_k(x)$ ,  $f(x)$  ve  $K_j(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlardır.  $\alpha_k$  ve  $\beta_j$ ,  $(0,1)$  aralığında tanımlı gecikme sabitleri,  $y(x)$  de bilinmeyen fonksiyondur. Burada bulunması gereken Pell-Lucas polinomlarının katsayılarıdır. Böylece,  $y(x)$ 'in çözümü bulunmuş olacaktır.

#### 3.2.8.2. Temel Matris Bağlıları

(3.96) denkleminin çözümünün (3.98) ile verilen sonlu Pell-Lucas serisi cinsinden tanımlı olduğunu varsayalım. Yani,  $y(x)$ 'in yaklaşık çözümünü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad \cdots \quad Q_N(x)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} ; a \leq x, t \leq b$$

biçiminde kabul edelim. Böylece,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x) \mathbf{A} \quad (3.99)$$

matris bağıntısı elde edilir. (3.5) matris bağıntısı (3.99) matris bağıntısında yerine yazılarak,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.0)$$

bulunur. Burada,  $\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$  ve  $\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$  olduğu açıktır.

Buna göre,  $y(x)$ 'in türevleri

$$y'(x) \cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$$y''(x) \cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$$y'''(x) \cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

⋮

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad ; k = 0, 1, \dots, m$$

ve

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere,

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.1)$$

elde edilir. Şimdi  $x = \alpha_k x$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde,



$$y(\alpha_k x) \cong y_N(\alpha_k x) = \mathbf{X}(\alpha_k x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.2)$$

$$y^{(k)}(\alpha_k x) \cong y_N^{(k)}(\alpha_k x) = \mathbf{X}^{(k)}(\alpha_k x) \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{X}(\alpha_k x) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.3)$$

bulunur. Burada,

$$\mathbf{X}(\alpha_k x) = \begin{bmatrix} 1 & (\alpha_k x) & \cdots & (\alpha_k x)^N \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

biçimindedir.  $\mathbf{X}(\alpha_k x)$  matrisi,  $\mathbf{X}(x)$  cinsinden

$$\mathbf{D}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} \alpha_k^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_k^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_k^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(\alpha_k x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \quad (4.5)$$

biçiminde yazılabilir. (4.5) matris bağıntısı (4.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y^{(k)}(\alpha_k x) \cong y_N^{(k)}(\alpha_k x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} ; k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

bulunur. Benzer şekilde,  $y^{(j)}(\beta_j t)$  için matris bağıntısı

$$y^{(j)}(\beta_j t) \cong y_N^{(j)}(\beta_j t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} ; j = 0, 1, 2, \dots, m_1 \quad (4.7)$$

biçimindedir.

### 3.2.8.3. Çözüm Yöntemi

(3.69)'dan (3.96) denklemindeki  $K_j(x, t)$  fonksiyonunun matris formunun

$$\mathbf{K}_j(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{X}^T(t) \quad (4.8)$$

biçiminde olduğu bilinmektedir. Burada,

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} k_{pq}^j \end{bmatrix} ; k_{pq}^j = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K_j(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde tanımlıdır [18,19]. Şimdi (4.6), (4.7) ve (4.8) matris bağıntıları (3.96) denkleminde yerine yerleştirilip, gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \int_a^b \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} dt$$

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \underbrace{\int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{M}} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.9)$$

elde edilir. Eğer  $\mathbf{M}$  açılırsa,

$$\mathbf{M} = \int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^b [t^{i+j}] dt ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^b = \left[ \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{M} = [m_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

bulunur. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{M} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.10)$$

cebirsel denklemi elde edilir. (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (4.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_i) + \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K}_j \mathbf{M} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.11)$$

şeklinde matris denklem sistemi elde edilir. Oluşturulan matris denklem sistemi düzenlendiğinde

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} - \mathbf{X} \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{K}_j \mathbf{M} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \right\}}_{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (4.12)$$

temel matris denklemini bulunur. Burada kullanacağımız bazı matrisler, yani  $P_k$ ,  $X$  ve  $F$  matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Böylece, (3.94) verilen temel matris denkleminin matrisleri tanımlanmış olur. Burada elde edilen temel matris denklemini tamamen bir cebirsel denklemdir ve  $Ax = b$  biçiminde ifade edilebilir. Buna göre, ilgili matrisler

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece, (4.12) temel matris bağıntısı kısaca

$$WA = F \quad (4.13)$$

olarak yazılabilir. (4.13) matrisinin arttırılmış matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$W = \sum_{k=0}^m P_k X C^k L = [w_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

Şimdi (3.97) ile verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen matrisi yazalım.

$$\underbrace{(X(a))}_{u_j} C^k L A = \lambda_j \quad ; k, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.15)$$

Buna göre,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \lambda_j &\Leftrightarrow [\mathbf{U}_j; \lambda_j] \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \\
\Rightarrow \mathbf{U}_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] \\
\mathbf{U} &= [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{m-1}]^T \quad \text{ve } \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.15) matris bağıntısından

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

arttırılmış matrisi bulunur. (4.14) ile tanımlanan  $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip yerine (4.16) ile tanımlanan  $[\mathbf{U}; \lambda]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$  yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, aranan çözümü bulmuş oluruz. Elde edilen yeni matrisin arttırılmış matrisi ise

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \cdots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \cdots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

formundadır. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{F} \quad (4.17)$$

olup,  $\mathbf{A}$  bilinmeyen katsayılar matrisi elde edilir.

### 3.2.9. Yüksek Mertebeden Oransal Gecikmeli Volterra Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.9.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde, yüksek mertebeden oransal gecikmeli Volterra tipi integro-diferansiyel denklemler için Pell-Lucas matris-sıralama yöntemi inşaa edilecektir.

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(\alpha_k x) = f(x) + \int_a^x \sum_{j=0}^{m_1} K_j(x,t)y^{(j)}(\beta_j t) dt ; m_1 \leq m, a \leq x, t \leq b \quad (4.18)$$

$$y^{(k)}(a) = \lambda_k ; k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.19)$$

oransal gecikmeli Volterra tipi integro-diferansiyel denkleminin

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (4.20)$$

ile tanımlı kesilmiş Pell-Lucas serisi cinsinden yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Burada  $P_k(x)$ ,  $f(x)$  ve  $K_j(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlardır. Burada  $\alpha_k$  ve  $\beta_j$ ,  $(0,1)$  aralığında tanımlı gecikme sabitleri,  $y(x)$  ise bilinmeyen fonksiyondur. Böylece, Pell-Lucas polinomlarının katsayıları bulunarak  $y(x)$ 'nin çözümü elde edilmiş olacaktır.

#### 3.2.9.2. Temel Matris Bağlıları

Öncelikle, (4.18) denkleminin çözümünü (4.20) ile verilen sonlu Pell-Lucas serisi cinsinden olduğunu varsayalım. Yani,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & \dots & Q_N(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} ; a \leq x, t \leq b$$

olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{A} \quad (4.21)$$

matris bağıntısı elde edilir. Şimdi (3.5) matris bağıntısı (4.21) matris bağıntısında yerine yazılarak,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.22)$$

elde edilir. Burada,  $\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \cdots \ x^N]$  ve  $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_N]^T$  olduğu açıktır. Ayrıca,

$$y'(x) \cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y''(x) \cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y'''(x) \cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

⋮

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad ; k = 0, 1, \dots, m$$

ve

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere,

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.23)$$

bulunur. Şimdi  $x = \alpha_k x$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$y(\alpha_k x) \cong y_N(\alpha_k x) = \mathbf{X}(\alpha_k x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.24)$$

$$y^{(k)}(\alpha_k x) \cong y_N^{(k)}(\alpha_k x) = \mathbf{X}^{(k)}(\alpha_k x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(\alpha_k x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.25)$$

olur. Buradan,

$$\mathbf{X}(\alpha_k x) = [1 \ (\alpha_k x) \ \cdots \ (\alpha_k x)^N] \quad (4.26)$$

elde edilir.  $\mathbf{X}(\alpha_k x)$  matrisini  $\mathbf{X}(x)$  cinsinden yazabilmek için,

$$\mathbf{D}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} \alpha_k^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_k^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_k^N \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$\mathbf{X}(\alpha_k x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \quad (4.27)$$

biçiminde göz önüne alınır. (4.27) matris bağıntısı, (4.25) denkleminde yerine koyulursa,

$$y^{(k)}(\alpha_k x) \cong y_N^{(k)}(\alpha_k x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} ; k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.28)$$

bulunur. Benzer şekilde  $y^{(j)}(\beta_j t)$  nin matris bağıntısı

$$y^{(j)}(\beta_j t) \cong y_N^{(j)}(\beta_j t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A}; j = 0, 1, 2, \dots, m_1 \quad (4.29)$$

biçimindedir.

### 3.2.9.3. Çözüm Yöntemi

$$\mathbf{K}_j = [k_{pq}^j] ; k_{pq}^j = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K_j(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere, (4.18) denklemindeki  $K_j(x, t)$  fonksiyonunun matris formunu

$$\mathbf{K}_j(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{X}^T(t) \quad (4.30)$$

biçiminde göz önüne alalım [18,19]. (4.28), (4.29) ve (4.30) matris bağıntıları, (4.18) denkleminde yerine yerleştirip ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_k) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \int_a^x \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} dt$$

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) X(x) D(\alpha_k) C^k LA = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} X(x) K_j \underbrace{\int_a^x X^T(t) X(t) dt}_{T(x)} D(\beta_j) C^j LA \quad (4.31)$$

elde edilir. Eğer  $T(x)$  açılırsa,

$$T(x) = \int_a^x X^T(t) X(t) dt = \int_a^x \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^x [t^{i+j}] dt \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^x = \left[ \frac{x^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow T(x) = [m_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) X(x) D(\alpha_k) C^k LA = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} X(x) K_j T(x) D(\beta_j) C^j LA \quad (4.32)$$

cebirsel denklemi elde edilir. (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (4.32) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) X(x_i) D(\alpha_k) C^k LA = f(x_i) + \sum_{j=0}^{m_1} X(x_i) K_j T(x_i) D(\beta_j) C^j LA \quad (4.33)$$

biçiminde matris denklem sistemi elde edilir. Oluşturulan matris denklem sistemi düzenlendiğinde

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m P_k X D(\alpha_k) C^k L - \bar{X} \sum_{j=0}^{m_1} \bar{K}_j \bar{T} D(\beta_j) C^j L \right\}}_W A = F \quad (4.34)$$

temel matris denklemi bulunur. Burada,



$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{\mathbf{K}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_j \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(x_0) \\ \mathbf{T}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

ve  $\mathbf{C}^0$  birim matristir. Diğer yandan, (4.34) temel matris bağıntısı kısaca

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F} \quad (4.35)$$

olarak yazılabilir. (4.35) matrisinden

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

arttırılmış matrisi ve

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{C}^k \mathbf{L} = [w_{ij}] \quad ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

bulunur. Şimdi (4.20) ile verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen matrisi yazalım.

$$\underbrace{(\mathbf{X}(a))}_{\mathbf{u}_j} \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = \lambda_j \quad ; k, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.37)$$

Buna göre,

$$\begin{aligned}
U_j A &= \lambda_j \Leftrightarrow [U_j; \lambda_j] \quad ; j = 0, 1, \dots, m-1 \\
\Rightarrow U_j &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \dots \quad u_{jN}] \\
U &= [U_0 \quad U_1 \quad \dots \quad U_{m-1}]^T \quad \text{ve } \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{m-1}]^T
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.37) matris bağıntısı açıldığında,

$$[U; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

arttırılmış matrisi yazılabilir. (4.36) ile tanımlanan  $[W; F]$  matrisinin herhangi  $m$  satırı silinip yerine (4.38) ile tanımlanan  $[U; \lambda]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{W}; \tilde{F}]$  yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözümü bulunmuş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matrisi açık olarak yazıldığında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[\tilde{W} : \tilde{F}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \dots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \dots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Eğer  $\tilde{W}A = F$  ise  $\tilde{W}$  matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart,  $\text{rank}(\tilde{W}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{F}]$  olmasıdır. Yani,  $\tilde{W}$  matrisinin tersi varsa,

$$A = \tilde{W}^{-1}F \quad (4.39)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

biçiminde bulunur.

### 3.2.10. Yüksek Mertebeden Değişken Gecikmeli Fredholm Tipi İntegro-Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi

#### 3.2.10.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde yüksek mertebeden değişken gecikmeli Fredholm tipi integro-diferansiyel denklemler için Pell-Lucas matris-sıralama yöntemi inşa edilecektir.  $m_1 \leq m$ ,  $a \leq x, t \leq b$  için

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(\alpha_k x + \beta(x)) = f(x) + \int_a^b \sum_{j=0}^{m_1} K_j(x,t) y^{(j)}(\beta_j t) dt \quad (4.40)$$

değişken katsayılı Fredholm tipi integro-diferansiyel denkleminin

$$y^{(k)}(a) = \lambda_k ; k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.41)$$

başlangıç koşulları altında

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } a \leq x, t \leq b \quad (4.42)$$

ile tanımlı kesilmiş Pell-Lucas serisi cinsinden yaklaşık çözümleri aranacaktır. Burada  $P_k(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $f(x)$  ve  $K_j(x,t)$ ,  $a \leq x, t \leq b$  aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlardır.  $\alpha_k$  ve  $\beta_j$ ,  $(0,1)$  açık aralığında tanımlı gecikme sabitleri olup,  $y(x)$  ise bilinmeyen fonksiyondur. Burada bulunması gereken Pell-Lucas polinomlarının katsayıları olup, böylece  $y(x)$  çözümü bulunmuş olacaktır.

#### 3.2.10.2. Temel Matris Bağlıntılar

(4.40) denkleminin çözümünü (4.42) ile verilen sonlu Pell-Lucas serisi cinsinden olduğunu kabul edelim. Yani,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad \dots \quad Q_N(x)] \mathbf{A} ; a \leq x, t \leq b$$

olsun. Böylece,  $\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$  olmak üzere,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{A} \quad (4.43)$$

matris bağıntısı elde edilir. (3.5) matris bağıntısı (4.43) matris bağıntısında yerine yazılırsa,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.44)$$

bulunur. Burada,  $\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \cdots \ x^N]$  ve  $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_N]^T$  olduğu açıktır.

$y(x)$ 'in türevleri ise,

$$y'(x) \cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y''(x) \cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$y'''(x) \cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x)\mathbf{L}\mathbf{A}$$

⋮

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} \quad ; \ k = 0, 1, \dots, m$$

biçiminde olup,

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere,

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.45)$$

bulunur. Şimdi  $x = \alpha_k x + \beta(x)$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$y(\alpha_k x + \beta(x)) \cong y_N(\alpha_k x + \beta(x)) = \mathbf{X}(\alpha_k x + \beta(x))\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.46)$$

$$y^{(k)}(\alpha_k x + \beta(x)) \cong \mathbf{X}^{(k)}(\alpha_k x + \beta(x))\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{X}(\alpha_k x + \beta(x))\mathbf{C}^k\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.47)$$

olur. Buradan,

$$\mathbf{X}(\alpha_k x + \beta(x)) = \begin{bmatrix} 1 & (\alpha_k x + \beta(x)) & \cdots & (\alpha_k x + \beta(x))^N \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

elde edilir.  $\mathbf{X}(\alpha_k x + \beta(x))$  matrisini  $\mathbf{X}(x)$  cinsinden yazabilmek için,

$$\mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x)) = \begin{bmatrix} 1 & \binom{1}{1}(\alpha_k)^0(\beta(x))^1 & \binom{2}{2}(\alpha_k)^0(\beta(x))^2 & \cdots & \binom{N}{N}(\alpha_k)^0(\beta(x))^N \\ 0 & \binom{1}{0}(\alpha_k)^1(\beta(x))^0 & \binom{2}{1}(\alpha_k)^1(\beta(x))^1 & \cdots & \binom{N}{N-1}(\alpha_k)^1(\beta(x))^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0}(\alpha_k)^2(\beta(x))^0 & \cdots & \binom{N}{N-2}(\alpha_k)^2(\beta(x))^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{0}(\alpha_k)^N(\beta(x))^0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde,

$$\mathbf{X}(\alpha_k x + \beta(x)) = \mathbf{X}(x)\mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x)); \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.49)$$

bulunur. (5.10) matris bağıntısı (5.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y^{(k)}(\alpha_k x + \beta(x)) \cong y_N^{(k)}(\alpha_k x + \beta(x)) = \mathbf{X}(x)\mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x))\mathbf{C}^k \mathbf{L}\mathbf{A} \quad (4.50)$$

elde edilir. (4.29) bağıntısından,  $y^{(j)}(\beta_j t)$  matris bağıntısının

$$y^{(j)}(\beta_j t) \cong y_N^{(j)}(\beta_j t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{D}(\beta_j)\mathbf{C}^j \mathbf{L}\mathbf{A}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, m_j \quad (4.51)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,  $\mathbf{D}(\beta_j)$

$$\mathbf{D}(\beta_j) = \begin{bmatrix} \beta_j^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_j^N \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır.

### 3.2.10.3. Çözüm Yöntemi

$$\mathbf{K}_j = [k_{pq}^j] ; k_{pq}^j = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K(0,0)}{\partial x^p \partial t^q} ; p, q = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere, (4.40) denkleminde  $K_j(x, t)$  fonksiyonunun matris formu

$$\mathbf{K}_j(x, t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{X}^T(t) \quad (4.52)$$

biçiminde yazılır. (4.50), (4.51) ve (4.52) matris bağıntıları (4.40) denkleminde yerine yerleştirip, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \int_a^b \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} dt$$

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \underbrace{\int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt}_{\mathbf{M}} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.53)$$

elde edilir. Eğer  $\mathbf{M}$  açılırsa,

$$\mathbf{M} = \int_a^b \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^N \end{bmatrix} dt = \int_a^b [t^{i+j}] dt ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$= \left[ \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_a^b = \left[ \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right] \Rightarrow \mathbf{M} = [m_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

bulunur. Buna göre,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) + \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_j \mathbf{M} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.54)$$

cebirsel denklemi elde edilir. (3.12) ile tanımlı sıralama noktaları (4.54) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{E}(\alpha_k, \beta(x_i)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_i) + \sum_{j=0}^{m_1} \mathbf{X}(x_i) \mathbf{K}_j \mathbf{M} \mathbf{D}(\beta_j) \mathbf{C}^j \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (4.55)$$

şeklinde matris denklem sistemi elde edilir. Oluşturulan matris denklem sistemi düzenlendiğinde,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m P_k \bar{X} \bar{E}(\alpha_k, B) C^k L - X \sum_{j=0}^{m_1} K_j M D(\beta_j) C^j L \right\}}_W A = F \quad (4.56)$$

temel matris denklemleri bulunur. Bu denklemlerde yer alan matrisler,

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{E}(\alpha_k, B) = \begin{bmatrix} E(\alpha_k, \beta(x_0)) \\ E(\alpha_k, \beta(x_1)) \\ \vdots \\ E(\alpha_k, \beta(x_N)) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca (4.56) temel matris bağıntısı kısaca

$$WA = F \quad (4.57)$$

olarak yazılabilir. (4.57) matrisi açılırsa, aşağıdaki gibi arttırılmış matris elde edilir.

Buna göre,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

ve

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{C}^k \mathbf{L} = [w_{ij}] ; i, j = 0, 1, \dots, N$$

dır. (4.41) ile verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen matris yazılırsa,

$$\underbrace{(\mathbf{X}(a)) \mathbf{C}^k \mathbf{L} \mathbf{A}}_{\mathbf{U}_j} = \lambda_j ; k, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.59)$$

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \lambda_j \Leftrightarrow [\mathbf{U}_j; \lambda_j] ; j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\Rightarrow \mathbf{U}_j = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \dots \quad u_{jN}]$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_1 \quad \dots \quad \mathbf{U}_{m-1}]^T \text{ ve } \lambda = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{m-1}]^T$$

bulunur. (4.59) matris bağıntısından

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

arttırılmış matrisi yazılabilir. (4.58) ile tanımlanan  $[\mathbf{W}; \mathbf{F}]$  matrisinin herhangi  $m$

satırı silinip, yerine (4.60) ile tanımlanan  $[\mathbf{U}; \lambda]$  koşullar matrisi yazılarak,  $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$

yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulunan yeni arttırılmış matris çözülerek,

istenilen çözümü bulunmuş olur. Buna göre, yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m),0} & w_{(N-m),1} & \dots & w_{(N-m),N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1),0} & u_{(m-1),1} & \dots & u_{(m-1),N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

formunda açık bir şekilde yazılabilir.  $\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \mathbf{F}$  ise  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisinin tersinir olmasını

gerektiren şart,  $\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = N + 1 = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}]$  olmasıdır. Yani,  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisinin tersi

varsa,



$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{F} \quad (4.61)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

biçiminde bulunur.



#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Pell-Lucas sıralama yönteminin doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek amacıyla her bir bölüm için birkaç örnek verilmiştir. Ayrıca çözümün doğruluğunu gösterebilmek için, Ortalama Değer Teoremine dayalı rezidüel hata ve klasik mutlak hata analizi yapılmış, elde edilen nümerik sonuçlar tablo ve grafiklerle yorumlanmıştır.

##### 4.1. Adi Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.1.1:** Tam çözüm  $y(x) = x^2 - 1$  olmak üzere,

$$y''(x) + 2xy'(x) - y(x) = 3 + 3x^2$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0) = -1, y'(0) = 0$$

başlangıç koşullarına göre yaklaşık çözümünü,  $0 \leq x \leq 2$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x \leq 2$$

olmalıdır. Ayrıca  $N = 2$  ve  $m = 2$  olup, bu problem için aşağıdaki sıralama noktaları uygulanırsa,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i ; i = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1, 2\}$$

bulunur. Burada,  $P_0(x) = -1$ ,  $P_1(x) = 2x$ ,  $P_2(x) = 1$  ve  $f(x) = 3 + 3x^2$  fonksiyonları  $0 \leq x \leq 2$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Böylece, problemin temel matris denklemi,

$$\sum_{k=0}^2 P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X C^k L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 X C^0 L + P_1 X C^1 L + P_2 X C^2 L$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler, yerine yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & ; & 3 \\ -2 & 2 & 18 & ; & 6 \\ -2 & 4 & 54 & ; & 15 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [-1]$$

$$\Rightarrow [2 \ 0 \ 2] A = [-1]$$

$$\Rightarrow [u_0; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi  $y'(0)=0$  koşulunun matrisini yazalım.

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

olduğundan,

$$y'(x) \cong y_2'(x) = \begin{bmatrix} Q_0'(x) & Q_1'(x) & Q_2'(x) \end{bmatrix} \mathbf{A}; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

$$y_2'(x) = [0 \quad 2 \quad 8x] \mathbf{A} \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow y_2'(0) = [0 \quad 2 \quad 0] \mathbf{A} = [0]$$

$$\Rightarrow [\mathbf{u}_1; \lambda_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

matris bağıntısı bulunur. Böylece yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 & ; & 3 \\ 2 & 0 & 2 & ; & -1 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu yeni arttırılmış matris çözülrse,

$$\mathbf{A} = [-3/4 \quad 0 \quad 1/4]^T$$

bulunur. Böylece, yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = -\frac{3}{4}(2) + 0(2x) + \frac{1}{4}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x^2 - 1$$

biçiminde elde edilmiş olur. Buna göre, tam çözüm ile yaklaşık çözümün aynı olduğu görülür.

**Örnek 4.1.2:** Tam çözüm  $y(x) = x$  olmak üzere,

$$y'(x) + 2y(x) = 1 + 2x$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

başlangıç koşuluna göre çözümünü,  $0 \leq x \leq 2$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x \leq 2$$

olmalıdır. Ayrıca  $N=2$  ve  $m=1$  olup, bu problem için aşağıdaki sıralama noktaları uygulanırsa,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i ; i = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1, 2\}$$

bulunur. Burada,  $P_0(x) = 2$ ,  $P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 1 + 2x$  fonksiyonları  $0 \leq x \leq 2$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Problemin temel matris denklemleri,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^1 P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X C^k L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 X C^0 L + P_1 X C^1 L$$

biçimindedir. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & ; & 1 \\ 8 & 6 & 20 & ; & 3 \\ 4 & 10 & 52 & ; & 5 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] \mathbf{A}; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

biçimindedir. Böylece, koşullar matrisi

$$\begin{aligned} y(0) \cong y_2(0) &= [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)] \mathbf{A} = 0 \\ \Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2] \mathbf{A} &= [0] \\ \Rightarrow [\mathbf{u}_0; \boldsymbol{\lambda}_0] &= [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 0] \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu takdirde, yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & ; & 1 \\ 4 & 6 & 20 & ; & 3 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$\mathbf{A} = [0 \quad 1/2 \quad 0]^T$$

bulunur. Böylece,  $y(x)$  için yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = 0(2) + \frac{1}{2}(2x) + 0(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x$$

olarak elde edilir. Buradan görüldüğü gibi tam çözüm ile yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.1.3:** Tam çözümünü  $y(x) = \sin x$  olan ikinci mertebeden değişken katsayılı

$$y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = -2x \cos x$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

başlangıç koşulları altındaki çözümünü,  $0 \leq x \leq 2$  aralığında  $N=3$  ve  $N=5$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Burada,  $m=2$  dir. Mevcut problem için aşağıdaki sıralama noktalarını uygulanacaktır.

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i; i = 0, 1, \dots, N$$

Böylece,

$$x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0, 1, 2, 3\} \text{ ve } x = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

elde edilir. Burada,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = -2x$ ,  $P_2(x) = 1$  ve  $f(x) = -2x \cos x$  fonksiyonları  $0 \leq x \leq 2$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Problemin temel matris denklemini

$$\sum_{k=0}^2 P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X C^k L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 X C^0 L + P_1 X C^1 L + P_2 X C^2 L$$

biçimindedir. Şimdi buradaki matrisleri aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.047849681 \\ -0.6273001963 \\ 1.664587346 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{16}{9} & \frac{64}{27} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W;F] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & 0 & ; & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{14}{3} & \frac{436}{27} & ; & -1.0478 \\ 2 & -\frac{8}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{1048}{27} & ; & -0.6273 \\ 2 & -4 & -38 & -236 & ; & 1.664587346 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Buna göre,  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x) \quad Q_3(x)]A$$

$$Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2, Q_3(x) = 8x^3 + 6x$$

olacak şekilde,

$$y(0) \cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0) \quad Q_3(0)]A = [0]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2 \quad 0]A = [0]$$

$$\Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

$$y'(0) \cong y_2'(0) = [Q_0'(0) \quad Q_1'(0) \quad Q_2'(0) \quad Q_3'(0)]A = [1]$$

$$\Rightarrow [0 \quad 2 \quad 0 \quad 6]A = [1]$$

$$\Rightarrow [u_1 : \lambda_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad ; \quad 1]$$



bulunur. Yukarıdaki arttırılmış matriste iki satırın silinip yerine, koşulların satır matrisleri koyulduğunda aşağıdaki yeni arttırılmış matris elde edilir:

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & 0 & ; & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & ; & 1 \\ 2 & -4 & -38 & -236 & ; & 1.664587346 \end{bmatrix}$$

Elde edilen arttırılmış matris çözümlerse,

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.549079294812500 \\ 0 \\ -0.016359764937500 \end{bmatrix}$$

çözüm matrisi bulunur. Böylece, yaklaşık çözüm

$$y_3(x) \cong x - 0.1308781195x^3$$

biçiminde elde edilir.  $N = 2$  ve  $N = 5$  için,  $N = 3$ 'teki işlemler tekrarlanırsa,

$$y_2(x) \cong x$$

$$y_5(x) \cong 0.9999999992x - 0.1695833891x^3 + 0.005081156648x^4 + 0.005926199408x^5$$

bulunur.  $N = 2, 3, 5$  için yaklaşık çözümler ve tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.1. de verilmiştir. Şekil 4.1. ve Şekil 4.2. de ise tam çözüm yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 4.3 de rezidüel hata fonksiyonlarına ait grafikler verilmiştir.

Diğer taraftan  $N = 2, 3, 5$  için rezidüel hatalar hesaplanırsa,

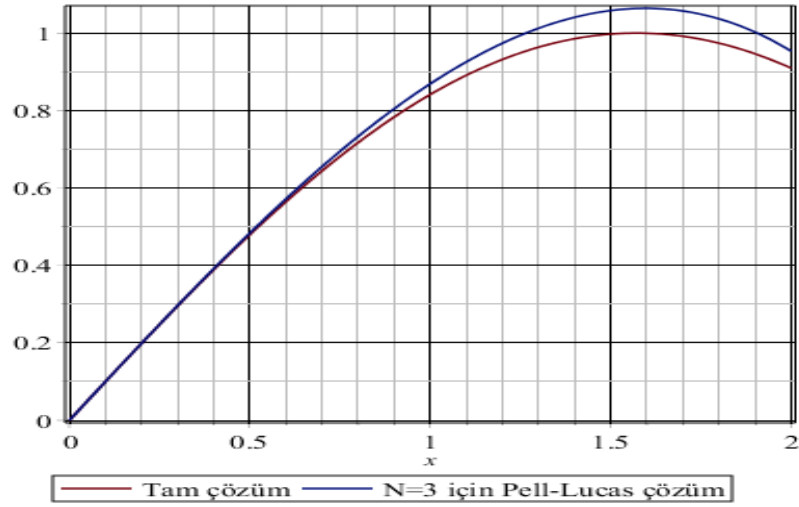
$$\bar{R}_2 = \int_0^2 \frac{|R_2(x)| dx}{|2-0|} = 0.8630399560, \bar{R}_3 = \int_0^2 \frac{|R_3(x)| dx}{|2-0|} = 0.1116972708$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^2 \frac{|R_5(x)| dx}{|2-0|} = 0.001364241489.$$

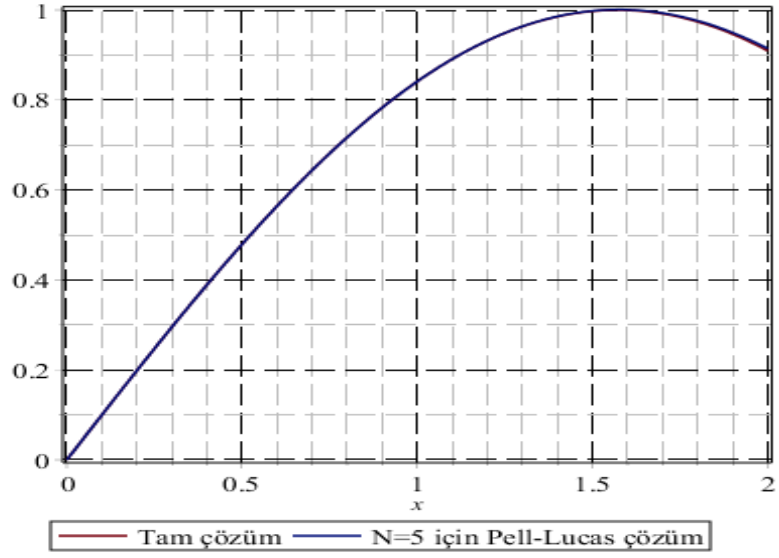
bulunur.

**Tablo 4.1.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırması

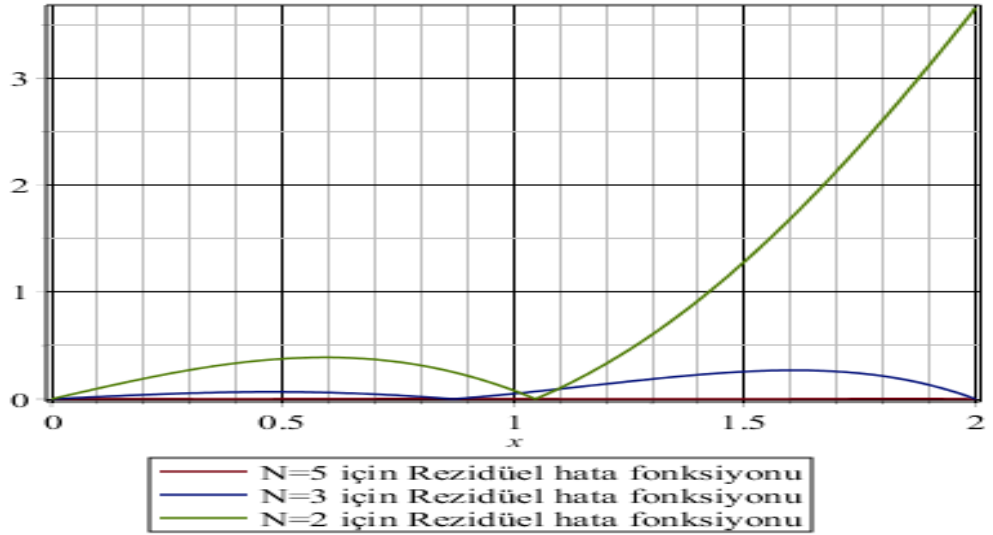
| $x$ | Tam çözüm     | $N = 2$ | $N = 3$       | $N = 5$       |
|-----|---------------|---------|---------------|---------------|
| 0   | 0             | 0       | 0             | 0             |
| 0.1 | 0.09983341665 | 0.1     | 0.09986912188 | 0.09983098391 |
| 0.2 | 0.1986693308  | 0.2     | 0.1989529750  | 0.1986533590  |
| 0.3 | 0.2955202067  | 0.3     | 0.2964662908  | 0.2954768064  |
| 0.4 | 0.3894183423  | 0.4     | 0.3916238004  | 0.3893374247  |
| 0.5 | 0.4794255386  | 0.5     | 0.4836402351  | 0.4793048420  |
| 0.6 | 0.5646424734  | 0.6     | 0.5717303262  | 0.5644893266  |
| 0.7 | 0.6442176872  | 0.7     | 0.6551088050  | 0.6440488989  |
| 0.8 | 0.7173560909  | 0.8     | 0.7329904028  | 0.7172964430  |
| 0.9 | 0.7833269096  | 0.9     | 0.8045898509  | 0.7832068170  |
| 1   | 0.8414709848  | 1       | 0.8691218805  | 0.8414239661  |



**Şekil 4.1.**  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.2.  $N = 5$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.3.  $N = 2,3,5$  için rezidüel hata fonksiyonları

## 4.2. Fredholm İntegral Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.2.1:**  $y(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + 1 + \int_0^1 xty(t) dt$

Fredholm integral denkleminin çözümünü  $0 \leq x \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Verilen denklemin tam çözümü  $y(x) = x^2 + 1$  olup, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) \quad ; \quad 0 \leq x, t \leq 1$$

formundadır. Burada,  $K(x,t) = xt$  ve  $f(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + 1$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Buna göre, problemin temel matris denklemini,

$$\{I - \lambda KM\} LA = F$$

$$\underbrace{\{I - \lambda KM\}}_W LA = F \Rightarrow W = \{I - \lambda KM\} L$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ -1 & 4/3 & -2 & ; & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir. Bu arttırılmış matris çözümlerse,

$$A = [1/4 \quad 0 \quad 1/4]^T$$

bulunur. Böylece,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{4}(2) + 0(2x) + \frac{1}{4}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x^2 + 1$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi tam çözüm ve yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.2.2:** Tam çözümü  $y(x) = \frac{96}{73}x - \frac{36}{73}x^2$  olan,

$$y(x) = x + \int_0^1 (xt - x^2) y(t) dt$$

Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. Verilen denklemin yaklaşık çözümü  $0 \leq x \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulunacak olursa,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) \quad ; \quad 0 \leq x, t \leq 1$$

formunda çözüm önerilir. Burada,  $K(x, t) = xt - x^2$  ve  $f(x) = x$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Problemin temel matris denklemleri,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\{\mathbf{I} - \lambda \mathbf{KM}\} \mathbf{LA} = \mathbf{F}$$

$$\underbrace{\{\mathbf{I} - \lambda \mathbf{KM}\} \mathbf{LA}}_{\mathbf{W}} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{W} = \{\mathbf{I} - \lambda \mathbf{KM}\} \mathbf{L}$$

biçimindedir. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ -1 & 4/3 & -2 & ; & 1 \\ 2 & 1 & 22/3 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir. Bu arttırılmış matrisin çözümünden

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{73} & \frac{48}{73} & -\frac{9}{73} \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece,  $y_2(x)$  yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = \frac{9}{73}(2) + \frac{48}{73}(2x) - \frac{9}{73}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = \frac{96}{73}x - \frac{36}{73}x^2$$

biçiminde elde edilir. Buna göre, tam çözüm ile yaklaşık çözümün aynı olduğu görülür.

### 4.3. Sabit Katsayılı Fredholm-İntegro Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.3.1:** Tam çözümü  $y(x) = x$  olmak üzere,

$$y'(x) - y(x) = 1 - 2x + 3 \int_0^1 xt y(t) dt$$

Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olup, burada  $N = 2$  ve  $m = 1$  dir. Diğer taraftan  $P_0(x) = -1, P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 1 - 2x$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve sürekli,  $\lambda = 3$  ise uygun bir sabittir. Bu takdirde, problemin temel matris denklemi,

$$\sum_{k=0}^1 P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - 3KML \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 C^0 L + P_1 C^1 L - 3KML$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & ; & 1 \\ -3 & -4 & 2 & ; & -2 \\ 0 & 0 & -4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \end{bmatrix} A = [0]$$

$$\Rightarrow [2 \ 0 \ 2] A = [0]$$

$$\Rightarrow [\mathbf{u}_0 : \lambda_0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Yukarıdaki arttırılmış matriste bir satırı silinip yerine koşulun satır matrisi koyulduğunda aşağıdaki yeni arttırılmış matris elde edilir:

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & ; & 1 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece,  $y_2(x)$  yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = 0(2) + \frac{1}{2}(2x) + 0(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x$$

olarak elde edilir. Buradan görüldüğü gibi, tam çözüm ve yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.3.2:**  $y(x) = e^x$  tam çözümüne sahip,

$$y'(x) - y(x) = -3x + 3 \int_0^1 xty(t)dt$$

Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 1$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$



olmalıdır. Burada  $N = 2$  ve  $m = 1$  dir. Bu problem için aşağıdaki sıralama noktaları uygulanırsa,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i; \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olacak şekilde,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1/2, 1\}$$

elde edilir. Burada,  $P_0(x) = -1$ ,  $P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = -3x$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve sürekli olup,  $\lambda = 3$  tür. Problemin temel matris denklemini,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - 3KML \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 C^0 L + P_1 C^1 L - 3KML$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & ; & 0 \\ -3 & -4 & 2 & ; & -3 \\ 0 & 0 & -4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] A; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)]A = [1]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2]A = [1] \Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 1]$$

formundadır. Böylece yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & ; & 0 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ 0 & 0 & -4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yeni arttırılmış matris çözülrse,

$$A = [0.5 \quad 0.5 \quad 0]^T$$

bulunur. Böylece,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) \Rightarrow y_2(x) = 0.5(2) + 0.5(2x) + 0(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) \cong 1 + x$$

elde edilir. Benzer şekilde  $N=3$  ve  $N=5$  için de yaklaşık çözümler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$y_3(x) = 1 + x + \frac{10}{21}x^2 + \frac{10}{63}x^3, \quad y_5(x) = 1 + x + \frac{420}{841}x^2 + \frac{140}{841}x^3 + \frac{35}{841}x^4 + \frac{7}{841}x^5$$

Şimdi rezidüel hataları hesaplayalım.  $N=2,3,5$  için rezidüel hataları aşağıdaki gibi hesaplayalım. Buna göre,

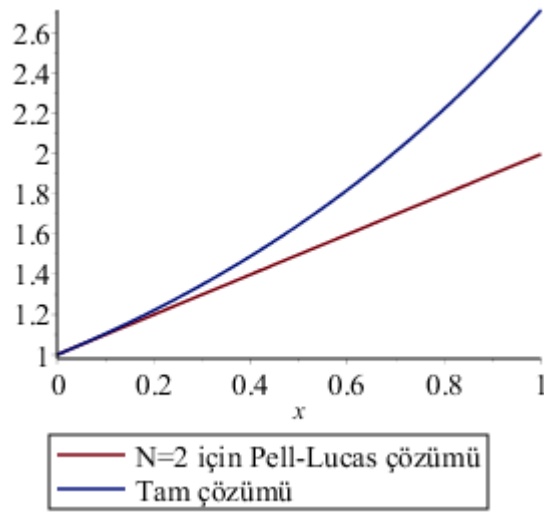
$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)| dx}{|1-0|} = 0.250000000, \quad \bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)| dx}{|1-0|} = 0.03968253968$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^1 \frac{|R_5(x)| dx}{|1-0|} = 0.001387237416$$

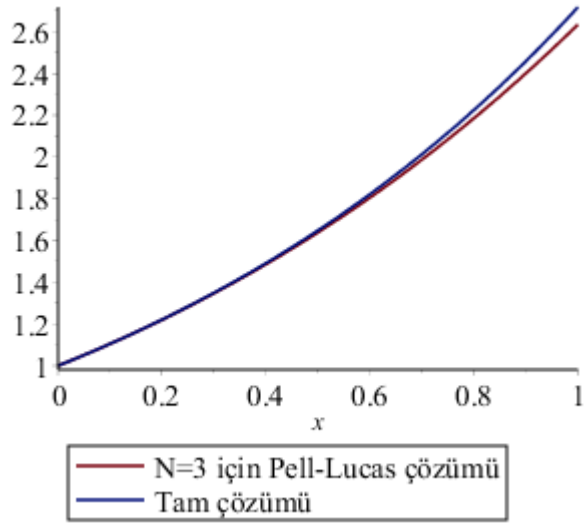
bulunur.  $N=2,3,5$  için yaklaşık ve tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.2. de gösterilmiştir. Şekil 4.4. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6. da tam çözüm ile yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır. Şekil 4.7 de ise rezidüel hata fonksiyonları ve grafikleri gösterilmiştir.

**Tablo 4.2.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırması

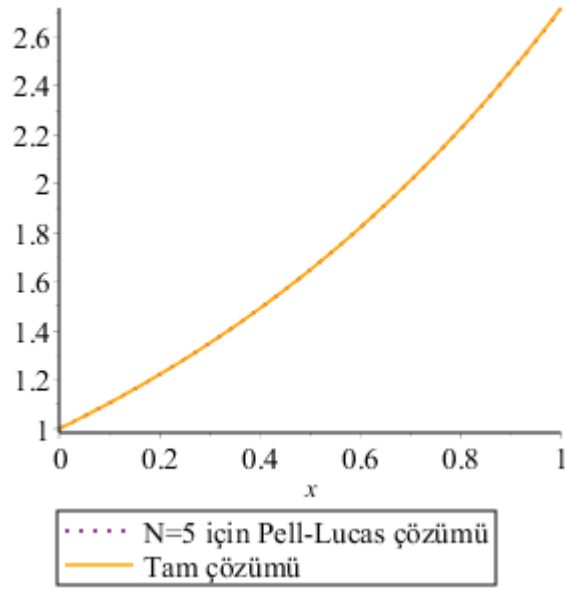
| $x$ | Tam çözüm   | $N = 2$ | $N = 3$     | $N = 5$     |
|-----|-------------|---------|-------------|-------------|
| 0   | 1.000000000 | 1.0     | 1.000000000 | 1.000000000 |
| 0.1 | 1.105170918 | 1.1     | 1.104920635 | 1.105164768 |
| 0.2 | 1.221402758 | 1.2     | 1.220317460 | 1.221377217 |
| 0.3 | 1.349858808 | 1.3     | 1.347142857 | 1.349798466 |
| 0.4 | 1.491824698 | 1.4     | 1.486349206 | 1.491709488 |
| 0.5 | 1.648721271 | 1.5     | 1.638888889 | 1.648521105 |
| 0.6 | 1.822118800 | 1.6     | 1.805714285 | 1.821783971 |
| 0.7 | 2.013752707 | 1.7     | 1.987777777 | 2.013198561 |
| 0.8 | 2.225540928 | 1.8     | 2.186031746 | 2.224625161 |
| 0.9 | 2.459603111 | 1.9     | 2.401428572 | 2.458093852 |
| 1   | 2.718281828 | 2.0     | 2.634920635 | 2.715814507 |



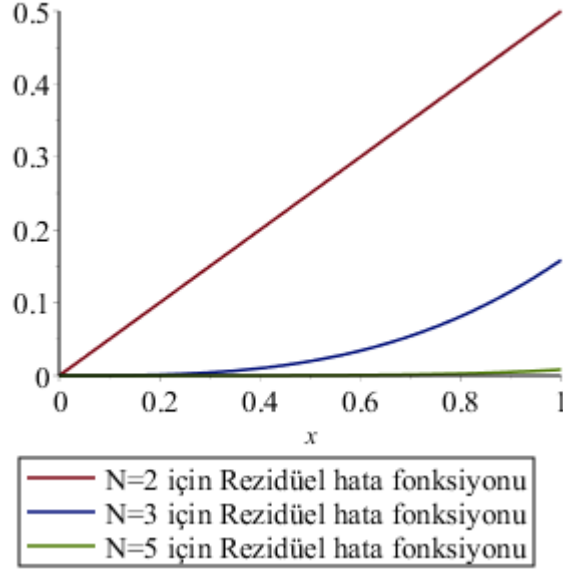
**Şekil 4.4.**  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.5.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün kıyaslanması



Şekil 4.6.  $N = 5$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.7.  $N = 2, 3, 5$  için rezidüel hata fonksiyonları

**Örnek 4.3.3:** Tam çözüm  $y(x) = x$  olmak üzere,

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xt y(t) dt$$

Fredholm integro-diferansiyel denkleminin [46]

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız [46]. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada,  $N = 2$  ve  $m = 1$  olup,  $P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve sürekli ve  $\lambda = 1$  dir. Böylece, problemin temel matris denklemini,

$$\sum_{k=0}^1 P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \text{ ise } \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - KML \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_1 C^1 L - KML$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$P_1$ =birim matris

şeklinde tanımlıdır. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ -1 & -2/3 & 6 & ; & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

biçimindedir. Buna göre, koşullar matrisi

$$\begin{aligned} y(0) \cong y_2(0) &= \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \end{bmatrix} A = [0] \\ \Rightarrow [2 & 0 & 2] A &= [0] \\ \Rightarrow [u_0 : \lambda_0] &= [2 & 0 & 2 & ; & 0] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki arttırılmış matriste bir satır silinip, yerine koşulun satır matrisi koyulursa aşağıdaki yeni arttırılmış matris elde edilir.

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ -1 & -2/3 & 6 & ; & -1/3 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) \\ y_2(x) &= 0(2) + \frac{1}{2}(2x) + 0(4x^2 + 2) \\ y_2(x) &= x \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan tam çözüm ile yaklaşık çözümün aynı olduğu görülür.

**Örnek 4.3.4:** Tam çözümü  $y(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + 5x^3$  olmak üzere,

$$y''(x) = 32x + \int_{-1}^1 (1-xt)y(t)dt$$

ile verilen Fredholm integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 1 \text{ ve } y'(0) = 0$$

koşulları altındaki çözümünü,  $-1 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız [47]. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

biçiminde olmalıdır. Burada  $N = 2$  ve  $m = 1$  olup,  $P_2(x) = 1$  ve  $f(x) = 32x$  fonksiyonları  $-1 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve sürekli olup,  $\lambda = 1$  dir. Böylece, problemin temel matris denklemini,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k C^k L - KML \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_2 C^2 L - KML$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$P_2 =$  birim matris

şeklinde tanımlıdır. Şimdi bu matrisler yerine yazılıp düzenlenirse,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4/3 & ; & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 & ; & 32 \\ 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] A; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)] A = [1]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2] A = [1]$$

$$\Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 1]$$

$$y'(0) \cong y_2'(0) = [Q_0'(0) \quad Q_1'(0) \quad Q_2'(0)] A = [0] \Rightarrow [u_1 : \lambda_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

biçimindedir. Böylece yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4/3 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu yeni arttırılmış matris çözümünden

$$A = [1/8 \quad 0 \quad 3/8]^T$$

bulunur. Böylece,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$



$$\Rightarrow y_2(x) = 0.125(2) + 0(2x) + 0.375(4x^2 + 2) \Rightarrow y_2(x) \cong 1 + \frac{3}{2}x^2$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $N = 3$  için yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$y_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{640}{123}x^3$$

$N = 3$  için Pell-Lucas yaklaşık çözümünün, referans [47] da yer alan çözümlerle ve tam çözümlerle karşılaştırması Tablo 4.3 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.3.** Pell-Lucas yaklaşık çözümü ile diğer yaklaşık çözümlerin [47] karşılaştırması

| $x$ | Tam Çözüm   | Kuvvet Serisi Çözümü      |  | Chebyshev Seri Çözümü     |  | Pell-Lucas Çözümü |
|-----|-------------|---------------------------|--|---------------------------|--|-------------------|
|     |             | Standart Sıralama-Yöntemi | Chebyshev Gauss-Lobatto Sıralama-Yöntemi | Standart Sıralama-Yöntemi | Chebyshev Gauss-Lobatto Sıralama-Yöntemi |                   |
| 0   | 1.000000000 | 1.000000000               | 1.000000000                              | 1.000000000               | 1.000000000                              | 1.000000000       |
| 0.1 | 1.020000000 | 1.019987500               | 1.019987508                              | 1.019855160               | 1.019853296                              | 1.020203252       |
| 0.2 | 1.100000000 | 1.099500000               | 1.099500027                              | 1.097441281               | 1.097438523                              | 1.101626016       |
| 0.3 | 1.270000000 | 1.269562500               | 1.269562557                              | 1.267989324               | 1.267963120                              | 1.275487805       |
| 0.4 | 1.560000000 | 1.559963000               | 1.550000098                              | 1.558530249               | 1.558512781                              | 1.573008130       |
| 0.5 | 2.000000000 | 1.999737500               | 1.995937649                              | 1.944095018               | 1.984063738                              | 2.025406504       |
| 0.6 | 2.620000000 | 2.619800000               | 2.617600207                              | 2.595914590               | 2.606907820                              | 2.663902439       |
| 0.7 | 3.450000000 | 3.449812500               | 3.447812774                              | 3.437419929               | 3.347742003                              | 3.519715447       |
| 0.8 | 4.530000000 | 4.518700000               | 4.509700350                              | 4.509241993               | 4.418242167                              | 4.624065041       |
| 0.9 | 5.860000000 | 5.858787500               | 5.849787937                              | 5.678611744               | 5.759611462                              | 6.008170732       |
| 1.0 | 7.500000000 | 7.497500000               | 7.489800353                              | 7.395160143               | 7.399962085                              | 7.703252033       |

#### 4.4. Volterra-İntegro Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.4.1:**  $y'(x) - xy(x) = 1 - x^2 - \frac{x^3}{6} + \int_0^x (x-t)y(t)dt$

$$y(0) = 0$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 2$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Bu problem için tam çözüm  $y(x) = x$  biçiminde olup, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 2$$

olarak kabul edilir.  $N = 2$  ve  $m = 1$  olmak üzere,  $\lambda = 1$  ve  $K(x, t) = (x - t)$ ,  $P_0(x) = -x$ ,  $P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 1 - x^2 - \frac{x^3}{6}$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 2$  de tanımlı ve süreklidir. Problemin temel matris denklemleri ise

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - \lambda \bar{X} \bar{K} \bar{T} L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 C^0 L + P_1 C^1 L - \bar{X} \bar{K} \bar{T} L$$

biçimindedir. Burada,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2/2 & x^3/3 \\ x^2/2 & x^3/3 & x^4/4 \\ x^3/3 & x^4/4 & x^5/5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/6 \\ -13/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T(0) \\ T(1) \\ T(2) \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(1) & 0 \\ 0 & 0 & X(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı olup, ayrıca  $\bar{K}$  ve  $\bar{T}$  matrisleri

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ -3 & -1/3 & 2/3 & ; & -1/6 \\ -4 & -26/3 & -78/3 & ; & -13/3 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] \mathbf{A} ; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$\begin{aligned} y(0) \cong y_2(0) &= [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)] \mathbf{A} = [0] \\ \Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2] \mathbf{A} &= [0] \Rightarrow [\mathbf{u}_0 : \boldsymbol{\lambda}_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 0] \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Yukarıdaki arttırılmış matriste bir satır silinip, yerine koşulun satır matrisi koyulursa aşağıdaki yeni arttırılmış matris elde edilir:

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ -3 & -1/3 & 2/3 & ; & -1/6 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = 0(2) + \frac{1}{2}(2x) + 0(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x$$

elde edilir. Bu takdirde, tam çözüme eşit yaklaşık çözüm bulunur.

**Örnek 4.4.2:** Tam çözümünü  $y(x) = \ln(x+1)$  ile verilen

$$y'(x) - xy(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 2$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre,  $N=2$  ve  $m=1$  olmak üzere, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 2$$

biçiminde tanımlanır. Burada,  $\lambda = 1$  olup,

$$K(x,t) = (x-t), P_0(x) = -x, P_1(x) = 1 \text{ ve}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - 2\ln(x+1)x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1)x^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 2$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Bu takdirde, problemin temel matris denklemi,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - \lambda \bar{X} \bar{K} \bar{T} L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 C^0 L + P_1 C^1 L - \bar{X} \bar{K} \bar{T} L$$

biçimindedir.  $N=2,3$  ve  $N=5$  için önceki örneklerde yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$y_2(x) \cong x - 0.1775725913x^2$$

$$y_3(x) \cong x - 0.3839538396x^2 + 0.09060915800x^3$$

$$y_5(x) \cong 5 \times 10^{-11} + x - 0.4287820080x^2 + 0.1192404385x^3 + 0.009801392418x^4 - 0.01000879248x^5$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.  $N = 2, 3, 5$  için yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.4 de verilmiştir. Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 da tam çözümün yaklaşık çözümle karşılaştırması gösterilmiştir. Şekil 4.11 de rezidüel hata fonksiyonları ve grafikleri takdim edilmiştir. Bu yaklaşık çözümler için, rezidüel hatalar ise

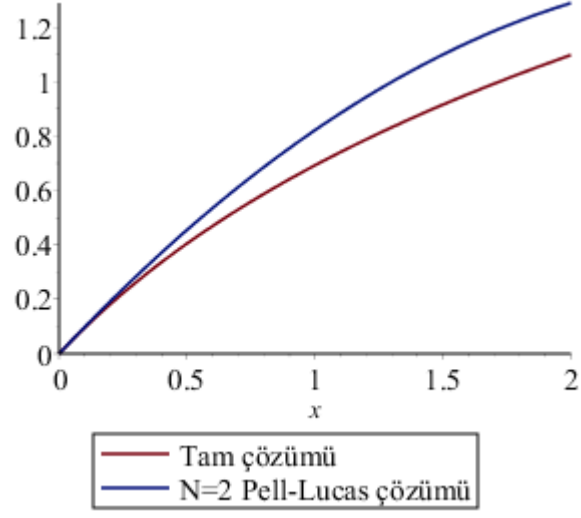
$$\bar{R}_2 = \int_0^2 \frac{|R_2(x)|}{|2-0|} dx = 0.1819457473, \quad \bar{R}_3 = \int_0^2 \frac{|R_3(x)|}{|2-0|} dx = 0.01380034517$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^2 \frac{|R_5(x)|}{|2-0|} dx = 0.01003484508.$$

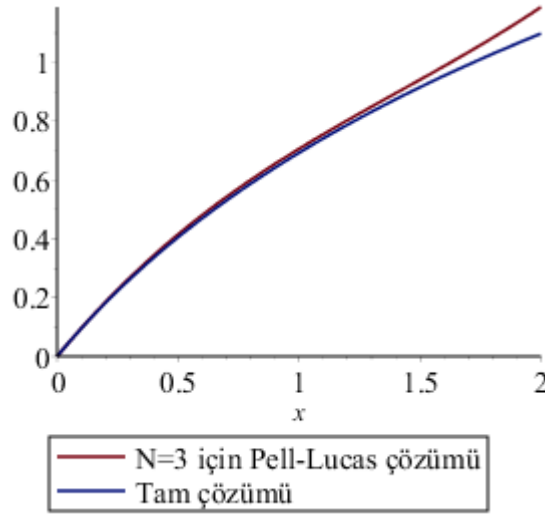
biçiminde hesaplanır.

**Tablo 4.4.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümün kıyaslanması

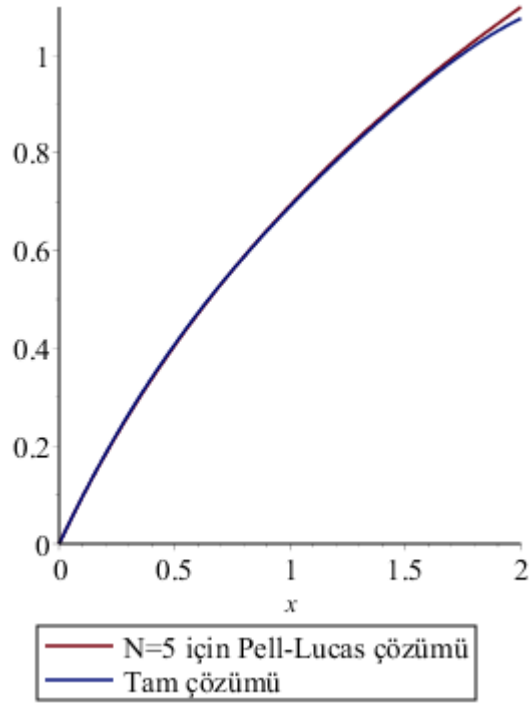
| $x$ | Tam çözüm     | $N = 2$       | $N = 3$       | $N = 5$       |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0   | 0.0000000000  | 0.0000000000  | 0.0000000000  | 0.0000000000  |
| 0.1 | 0.09531017980 | 0.09822427409 | 0.09625107076 | 0.09583230051 |
| 0.2 | 0.1823215568  | 0.1928970963  | 0.1853667197  | 0.1838151227  |
| 0.3 | 0.2623642645  | 0.2840184668  | 0.2678906017  | 0.2646841811  |
| 0.4 | 0.3364722366  | 0.3715883854  | 0.3443663718  | 0.3391746925  |
| 0.5 | 0.4054651081  | 0.4556068522  | 0.4153376848  | 0.4080093651  |
| 0.6 | 0.4700036292  | 0.5360738671  | 0.4813481958  | 0.4718863887  |
| 0.7 | 0.5306282511  | 0.6129894303  | 0.5429415598  | 0.5314674231  |
| 0.8 | 0.5877866649  | 0.6863535416  | 0.6006614316  | 0.5873655887  |
| 0.9 | 0.6418538862  | 0.7561662010  | 0.6550514661  | 0.6401334550  |
| 1   | 0.6931471806  | 0.8224274087  | 0.7066553184  | 0.6902510304  |



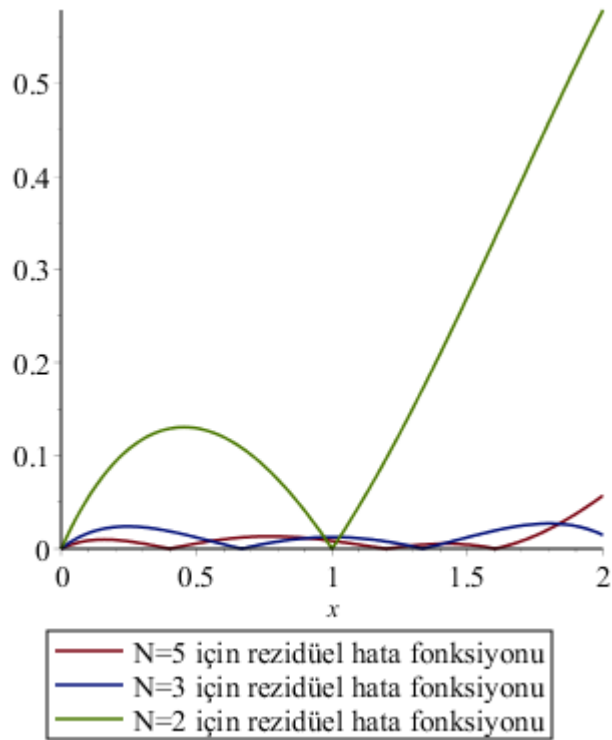
Şekil 4.8.  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.9.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.10.  $N = 5$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.11. Farklı  $N$  değerleri için rezidüel hata fonksiyonları

**Örnek 4.4.3:** Tam çözümünü  $y(x) = 10 - xe^{-x}$  olan,

$$y'(x) + y(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} + 5x^2 + 8 - \int_0^x ty(t) dt; 0 \leq x, t \leq 1$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin [38]

$$y(0) = 10$$

koşulu altındaki çözümünü  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  ve  $N = 3$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre, yaklaşık çözüm  $N = 2, 3$  için

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^3 a_n Q_n(x)$$

ve

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n Q_n(x); N \geq m, 0 \leq x, t \leq 1$$

biçiminde göz önüne alınır. Burada  $N = 2, 3$ ,  $m_1 = 0$  ve  $m = 1$  olup,

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 1, P_2(x) = 1, K(x, t) = t \text{ ve } f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} + 5x^2 + 8$$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.  $\lambda = -1$  ise uygun sabittir.

Böylece, problemin temel matris denklemi,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X C^k L - \bar{X} \bar{K} \bar{T} L \right\}}_W A = F, \quad W = \{P_0 X C^0 L + P_1 X C^1 L\} - \{\bar{X} \bar{K} \bar{T} L\}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa, yaklaşık çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_2(x) \cong 10.000000000 - 1.0000000000x + 0.7161368072x^2$$

$$y_3(x) \cong 9.999999999 - 1.0000000000x + 0.9491362180x^2 - 0.3276837152x^3$$

$N = 2$  ve  $N = 3$  için yaklaşık çözümler ve tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.5, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'de gösterilmiştir. Şekil 4.14'de ise rezidüel hata fonksiyonu



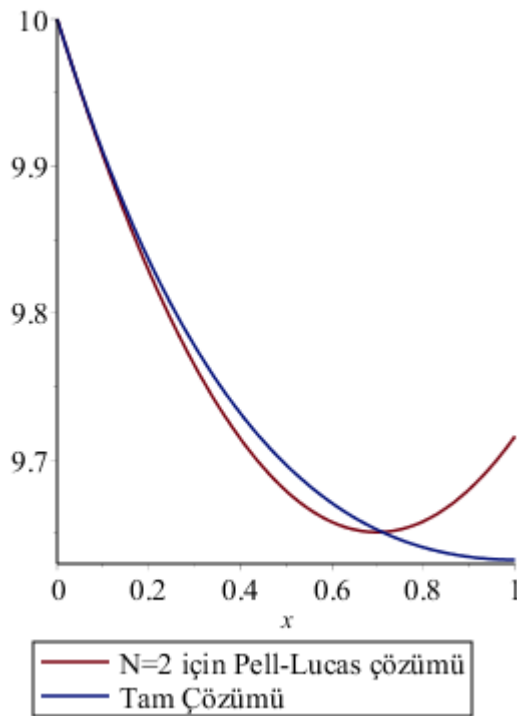
ve grafiği verilmiştir. Ayrıca, aynı örneğin literatürde var olan üç farklı yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümleri ile mevcut çözümün karşılaştırması Tablo 4.6 da gösterilmiştir [38].

**Tablo 4.5.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırması

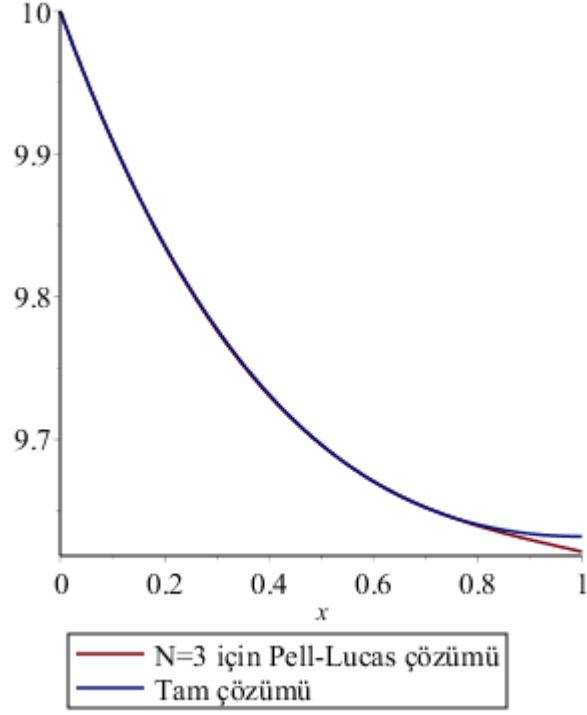
| $x$ | <b>Tam çözüm</b> | $N = 2$     | $N = 3$     |
|-----|------------------|-------------|-------------|
| 0   | 10.00000000      | 10.00000000 | 9.999999999 |
| 0.1 | 9.909516258      | 9.907161368 | 9.909163677 |
| 0.2 | 9.836253849      | 9.828645472 | 9.835343978 |
| 0.3 | 9.777754534      | 9.764452313 | 9.776574799 |
| 0.4 | 9.731871982      | 9.714581889 | 9.730890036 |
| 0.5 | 9.696734670      | 9.679034202 | 9.696323590 |
| 0.6 | 9.670713018      | 9.657809251 | 9.670909356 |
| 0.7 | 9.652390287      | 9.650907036 | 9.652681232 |
| 0.8 | 9.640536829      | 9.658327557 | 9.639673116 |
| 0.9 | 9.634087306      | 9.680070814 | 9.629918908 |
| 1   | 9.632120559      | 9.716136807 | 9.621452502 |

**Tablo 4.6.** Pell-Lucas yaklaşık çözümleri ile diğer sayısal çözümlerin [38] karşılaştırması

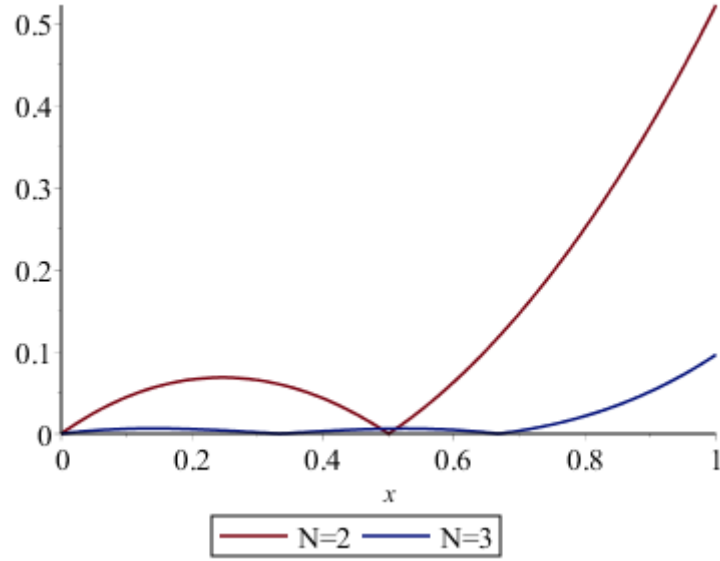
| $x$    | Tam çözüm   | HPM<br>$N = 4$ | Sonlu Fark<br>$N = 14$ | Pell -Lucas<br>$N = 3$ |
|--------|-------------|----------------|------------------------|------------------------|
| 0.0714 | 9.933495516 | 9.933495       | 9.933780913            | 9.933319382            |
| 0.1428 | 9.876160300 | 9.876160       | 9.876458584            | 9.875600433            |
| 0.2142 | 9.827046197 | 9.827049       | 9.827589590            | 9.826127499            |
| 0.2857 | 9.785292202 | 9.785307       | 9.785803615            | 9.784131136            |
| 0.3571 | 9.750116951 | 9.750163       | 9.750832589            | 9.749012329            |
| 0.4286 | 9.720811832 | 9.720923       | 9.721466032            | 9.719954882            |
| 0.5000 | 9.696734670 | 9.696975       | 9.697552931            | 9.696323590            |
| 0.5714 | 9.677303930 | 9.677777       | 9.678042251            | 9.677358058            |
| 0.6428 | 9.661993413 | 9.662846       | 9.662857435            | 9.662342638            |
| 0.7143 | 9.650327386 | 9.651781       | 9.651100634            | 9.650547113            |
| 0.7857 | 9.641876128 | 9.644241       | 9.642739377            | 9.641287992            |
| 0.8571 | 9.636251847 | 9.639963       | 9.637018786            | 9.633831029            |
| 0.9286 | 9.633104936 | 9.638737       | 9.633929509            | 9.627452080            |
| 1.0000 | 9.632120559 | 9.640444       | 9.632846912            | 9.621452502            |



**Şekil 4.12.**  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.13.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.14.  $N = 2, 3$  için rezidüel hata fonksiyonları

$N = 2$  ve  $N = 3$  için rezidüel hata hesaplanırsa,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.1318541649, \quad \bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|}{|1-0|} dx = 0.01480276951$$

elde edilir.

#### 4.5. Fredholm Tipi Oransal Gecikmeli İntegro- Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.5.1:** Tam çözümü  $y(x) = x^2 - 1$  olmak üzere,

$$y''(x) + 2xy\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{129}{64}x + \frac{7}{3} + 3\int_0^1 xty\left(\frac{1}{4}t\right)dt + \int_0^1 (x-t)y'\left(\frac{1}{2}t\right)dt; 0 \leq x, t \leq 1$$

Fredholm tipi oransal gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = -1, y'(0) = 0$$

koşulları altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x); N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N = 2$ ,  $m_1 = 1$  ve  $m = 2$  olup,  $P_0(x) = 2x$ ,  $P_1(x) = 0$ ,  $P_2(x) = 1$  ve

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{129}{64}x + \frac{7}{3}$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.

$\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{4}$  ve  $\beta_1 = \frac{1}{2}$  ise uygun sabitlerdir. Bu takdirde,

problemin temel matris denklemini,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k XD(\alpha_k) C^k L - X \sum_{j=0}^1 K_j MD(\beta_j) C^j L \right\}}_W A = F$$

$$W = \{P_0 XD(\alpha_0) C^0 L + P_2 XD(\alpha_2) C^2 L\} - \{K_0 MD(\beta_0) C^0 L + K_1 MD(\beta_1) C^1 L\}$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$D(\alpha_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, D(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D(\beta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 533/384 \\ 157/192 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D(\beta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 28/3 & ; & 7/3 \\ 3/2 & 5/12 & 965/96 & ; & 533/384 \\ 3 & 5/6 & 589/48 & ; & 157/192 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

biçimindedir. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [-1]$$

$$\Rightarrow [2 \ 0 \ 2]A = [-1]$$

$$\Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \ 0 \ 2 \ ; \ -1]$$

$$y'(x) \cong y_2'(x) = \begin{bmatrix} Q_0'(x) & Q_1'(x) & Q_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

$$y_2'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow y_2'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [u_1 : \lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlıdır. Yukarıdaki arttırılmış matriste bir satır silinip, yerine koşulun satır matrisi koyulduğunda aşağıdaki yeni arttırılmış matris elde edilir.

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 28/3 & ; & 7/3 \\ 2 & 0 & 2 & ; & -1 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yeni arttırılmış matris çözüldükten sonra  $A = [-3/4 \ 0 \ 1/4]^T$  bulunur. Böylece,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = -\frac{3}{4}(2) + 0(2x) + \frac{1}{4}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x^2 - 1$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi, tam çözüm ile yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.5.2:** Tam çözümü  $y(x) = e^x$  olan,

$$y''(x) + y'\left(\frac{1}{2}x\right) + xy\left(\frac{1}{3}x\right) = f(x) + \int_0^1 xty\left(\frac{1}{4}t\right)dt + \int_0^1 (x+t)y'\left(\frac{1}{2}t\right)dt; 0 \leq x, t \leq 1$$

Fredholm tipi oransal gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin  $y(0) = 1, y'(0) = 1$  koşulları altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada,  $N = 2$ ,  $m_1 = 1$  ve  $m = 2$  olup,  $K_0(x, t) = xt$ ,  $K_1(x, t) = (x+t)$ ,

$P_0(x) = x$ ,  $P_1(x) = 1$ ,  $P_2(x) = 1$  ve  $f(x) = e^x + e^{\frac{1}{2}x} + xe^{\frac{1}{3}x} - 1.889137542x - 0.702557458$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.

$\alpha_0 = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{4}$  ve  $\beta_1 = \frac{1}{2}$  ise uygun sabitlerdir. Böylece, problemin

temel matris denklemi,

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X D(\alpha_k) C^k L - X \sum_{j=0}^1 K_j M D(\beta_j) C^j L \right\} A = F$$

$$W = \{ P_0 X D(\alpha_0) C^0 L + P_1 X D(\alpha_1) C^1 L + P_2 X D(\alpha_2) C^2 L \} \\ - \{ K_0 M D(\beta_0) C^0 L + K_1 M D(\beta_1) C^1 L \}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler yapılırsa, aşağıdaki arttırılmış matris elde edilir:

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 20/3 & ; & 1.297442542 \\ 1/2 & 1/12 & 2359/288 & ; & 1.876300665 \\ 1 & -1/2 & 1447/144 & ; & 3.170920524 \end{bmatrix}$$

Koşullar matrisi,

$$[u_0; \lambda_0] = [2 \ 0 \ 2 \ ; \ 1], [u_1; \lambda_1] = [0 \ 2 \ 0 \ ; \ 1]$$

olmak üzere, yukarıdaki matriste yerine koyulursa,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 20/3 & ; & 1.297442542 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

yeni arttırılmış matris elde edilir. Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$A = [0.38038361870 \ 0.5 \ 0.11961638130]^T$$

bulunur. Böylece,  $N = 2$  için yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = 1 + x + 0.4784655252x^2$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde  $N = 4$  ve  $N = 6$  için aşağıdaki yaklaşık çözümler aşağıdaki gibidir:

$$y_4(x) = 1 + 0.9999999999x + 0.4981908201x^2 + 0.1345249276x^3 + 0.07652067414x^4$$

$$y_6(x) = 1 + 0.9924215688x + 0.5082870640x^2 + 0.1924559694x^3 - 0.01877794685x^4 + 0.05848558445x^5 - 0.01347276644x^6$$

$N = 2, 4, 6$  için rezidüel hatalar ise,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.7488675258, \bar{R}_4 = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|}{|1-0|} dx = 0.01281973536$$

$$\bar{R}_6 = \int_0^1 \frac{|R_6(x)|}{|1-0|} dx = 0.01101416789$$

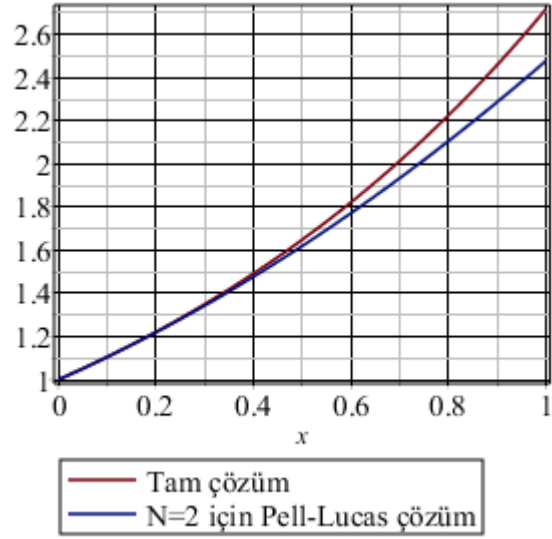
biçiminde hesaplanır. Elde edilen yaklaşık çözümlerle tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.7, Şekil 4.15, Şekil 4.16 ve Şekil 4.17’de verilmiştir. Şekil 4.18 ve Şekil 4.19 da ise rezidüel hata fonksiyonları ve grafikleri gösterilmiştir.

**Tablo 4.7.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

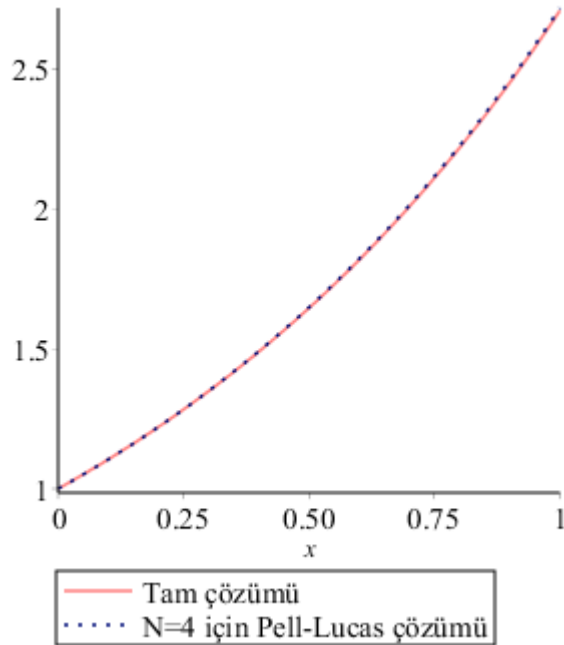
| $x$ | Tam çözüm   | $N = 2$     | $N = 4$     | $N = 6$     |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0   | 1.00000000  | 1.000000000 | 1.000000000 | 1.000000000 |
| 0.1 | 1.619616381 | 1.104784655 | 1.105124085 | 1.104516178 |
| 0.2 | 1.221402758 | 1.219138621 | 1.221126265 | 1.220343253 |
| 0.3 | 1.349858808 | 1.343061897 | 1.349089164 | 1.348648815 |
| 0.4 | 1.491824698 | 1.476554484 | 1.490279055 | 1.490674733 |
| 0.5 | 1.648721271 | 1.619616381 | 1.646145863 | 1.647783087 |
| 0.6 | 1.822118800 | 1.772247589 | 1.818323158 | 1.821492405 |
| 0.7 | 2.013752707 | 1.934448107 | 2.008628166 | 2.013504186 |
| 0.8 | 2.225540928 | 2.106217936 | 2.219061756 | 2.225719736 |
| 0.9 | 2.459603111 | 2.287557075 | 2.451808450 | 2.460247298 |
| 1   | 2.718281828 | 2.478465525 | 2.709236422 | 2.719399473 |



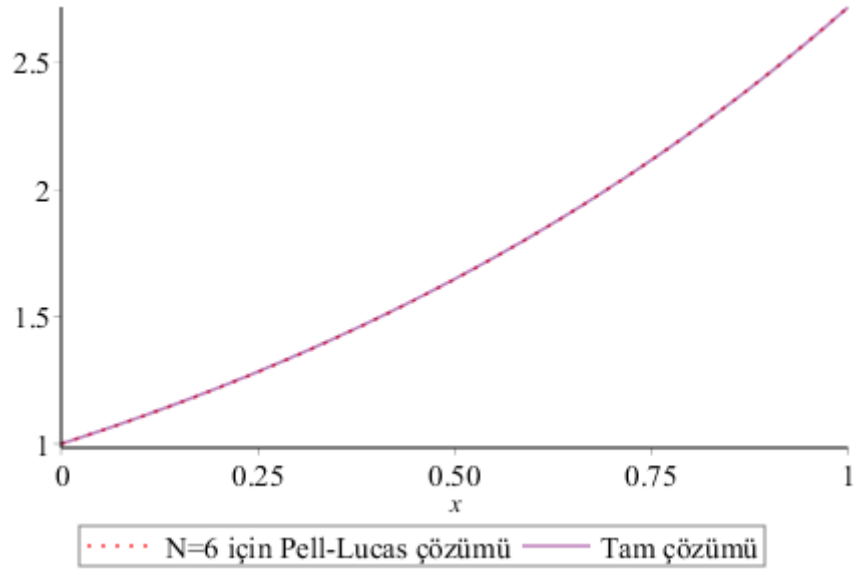
Tabloda görüldüğü gibi,  $N$  büyük seçildiğinde tam çözüme daha çok yaklaşıldığı görülmektedir. Yani buradan anlaşıldığı gibi,  $N$  sonsuza gittiğinde tam ve yaklaşık çözümler birbirine eşittir.  $N = 2, 4$  ve  $6$  için yaklaşık çözümlerin grafikleri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir. Ardından rezidüel hata fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



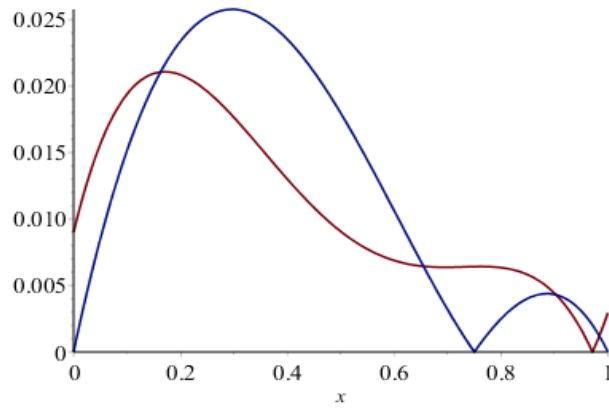
Şekil 4.15.  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



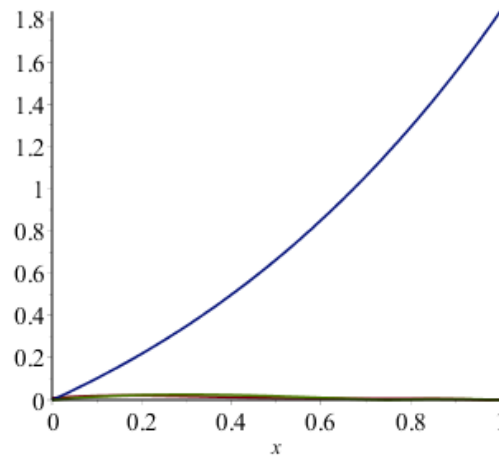
Şekil 4.16.  $N = 4$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.17.  $N = 6$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.18.  $N = 4,6$  için rezidüel hata fonksiyonları



Şekil 4.19.  $N = 2,4,6$  için rezidüel hata fonksiyonları

**Örnek 4.5.3:** Tam çözüm  $y(x) = \sin(x)$  olmak üzere,

$$y'(x) + \sin(x)y\left(\frac{1}{2}x\right) = f(x) + \int_0^1 x^2 t y\left(\frac{1}{2}t\right) dt; \quad 0 \leq x, t \leq 1$$

Fredholm tipi oransal gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N=3$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

biçiminde göz önüne alınır. Burada  $N=3, m_1=0$  ve  $m=1$  olup,

$$P_0(x) = \sin(x), P_1(x) = 1, K(x, t) = x^2 t$$

$$\text{ve } f(x) = \cos(x) + \sin(x) \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \left[ 4 \sin\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \right] x^2$$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.  $\alpha_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 1$  ve  $\beta_0 = \frac{1}{2}$  ise

uygun sabitlerdir. Böylece, problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X D(\alpha_k) C^k L - X \sum_{j=0}^1 K_j M D(\beta_j) C^j L \right\} A = F$$

$$W = \left\{ P_0 X D(\alpha_0) C^0 L + P_1 X D(\alpha_1) C^1 L \right\} - \left\{ X K_0 M D(\beta_0) C^0 L \right\}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$y_3(x) \cong 0.9999999993x - 0.0219236124x^2 - 0.1382358556x^3 .$$

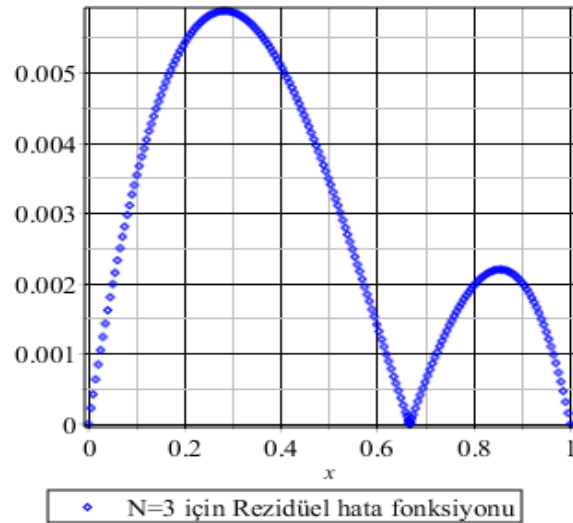
yaklaşık çözümü elde edilir.  $N=3$  için rezidüel hata ise,

$$\bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)| dx}{|1-0|} = 0.002990616922$$

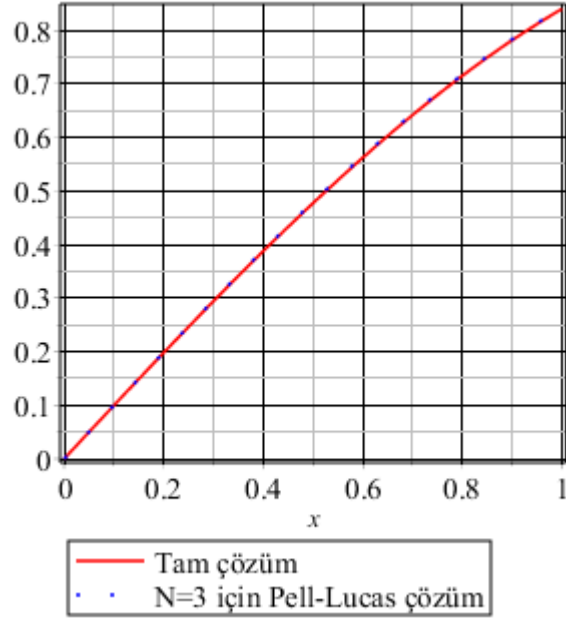
olarak hesaplanır. Elde edilen yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.8’de verilmiştir. Şekil 4.21’de tam çözümün yaklaşık çözümle kıyaslaması ve Şekil 4.20’de ise rezidüel hata fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.

**Tablo 4.8.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırması

| $x$ | Tam çözüm     | $N = 3$       |
|-----|---------------|---------------|
| 0   | 0             | 0             |
| 0.1 | 0.09983341665 | 0.09964252795 |
| 0.2 | 0.1986693308  | 0.1980171686  |
| 0.3 | 0.2955202067  | 0.2942945066  |
| 0.4 | 0.3894183423  | 0.3876451269  |
| 0.5 | 0.4794255386  | 0.4772396146  |
| 0.6 | 0.5646424734  | 0.5622485543  |
| 0.7 | 0.6442176872  | 0.6418425309  |
| 0.8 | 0.7173560909  | 0.7151921294  |
| 0.9 | 0.7833269096  | 0.7814679347  |
| 1   | 0.8414709848  | 0.8398405313  |



**Şekil 4.20.**  $N = 3$  için rezidüel hata fonksiyonu



Şekil 4.21.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün kıyaslaması

#### 4.6. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.6.1:** Tam çözüm  $y(x) = x$  olmak üzere,

$$y'(x) - xy\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x \leq 2$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre, yaklaşık çözümü

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x \leq 2$$

biçiminde göz önüne alalım. Burada  $N = 2$  ve  $m = 1$  olmak üzere, bu problem için standart sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i ; i = 0,1,\dots,N$$

biçiminde uygulanırsa,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1, 2\}$$

elde edilir. Burada,  $P_0(x) = -x$ ,  $P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$  fonksiyonları

$0 \leq x \leq 2$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Ayrıca,  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = -1$  dir. Buna göre, problemin temel matris denklemleri,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X C(\alpha, \beta) C^k L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 X C(\alpha, \beta) C^0 L + P_1 X C(\alpha, \beta) C^1 L$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 2 & 1 & 11 & ; & 3/2 \\ 4 & 2 & 20 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] A ; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)]A = [0]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2]A = [0] \Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 0]$$

ile tanımlanır. Böylece yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 4 & 2 & 20 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse  $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$  bulunur. Böylece,

yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = 0(2) + \frac{1}{2}(2x) + 0(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x$$

olarak elde edilir. Buradan görüldüğü gibi, tam çözüm ile yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.6.2:**  $y(x) = \cos(x)$  tam çözüme sahip,

$$y'(x) + 2xy\left(\frac{1}{3}x+1\right) = 2x \cos\left(\frac{1}{3}x+1\right) - \sin(x)$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin  $y(0)=1$  koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x \leq 1$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile göz önüne alalım. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N=2$  ve  $m=1$  olup, verilen problem için standart sıralama noktaları uygulanırsa,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i ; i = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

elde edilir. Burada,  $P_0(x) = 2x$ ,  $P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{3}x+1\right) - \sin(x)$

fonksiyonları  $0 \leq x \leq 2$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Ayrıca,  $\alpha = 1/3$  ve  $\beta = 1$  dir. Buna göre, problemin temel matris denklemini

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X C(\alpha, \beta) C^k L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 X C(\alpha, \beta) C^0 L + P_1 X C(\alpha, \beta) C^1 L$$

biçimindedir. Denkleminde yer alan matrisler ise,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(7/6) - \sin(1/2) \\ 2 \cos(4/3) - \sin(1) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = \cos\left(\frac{7}{6}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f_2 = 2 \cos\left(\frac{4}{3}\right) - \sin(1)$  olmak

üzere, bu matrisler yerine yazılıp düzenlenirse,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & f_0 \\ 2 & \frac{13}{3} & \frac{103}{9} & ; & f_1 \\ 4 & \frac{22}{3} & \frac{236}{9} & ; & f_2 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] A; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Böylece, koşullar matrisi



$$y(0) \cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)]A = [1]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2]A = [1] \Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 1]$$

formundadır. Böylece yeni arttırılmış matris,  $f_2 = 2 \cos\left(\frac{4}{3}\right) - \sin(1)$  olmak üzere,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ 4 & 22/3 & 236/9 & ; & f_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elde edilen yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$A = \begin{bmatrix} 0.6066948127 \\ 0 \\ -0.1066948127 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece, yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = 0.6066948127(2) + 0(2x) - 0.1066948127(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = 0.9999999996 - 0.4267792508x^2$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde  $N = 3$  ve  $N = 5$  için,

$$y_3(x) = 0.9999999996 - 2 \times 10^{-10}x - 0.7530443388x^2 + 0.2341615462x^3$$

$$y_5(x) = 1.0000000003 - 6.4 \times 10^{-9}x - 0.4992872120x^2 - 0.0030928752x^3$$

$$+ 0.0471400960x^4 - 0.0044510912x^5$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. Diğer yandan,  $N = 2, 3$  ve  $5$  için rezidüel hatalar

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.05228734472, \quad \bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|}{|1-0|} dx = 0.04742285037$$

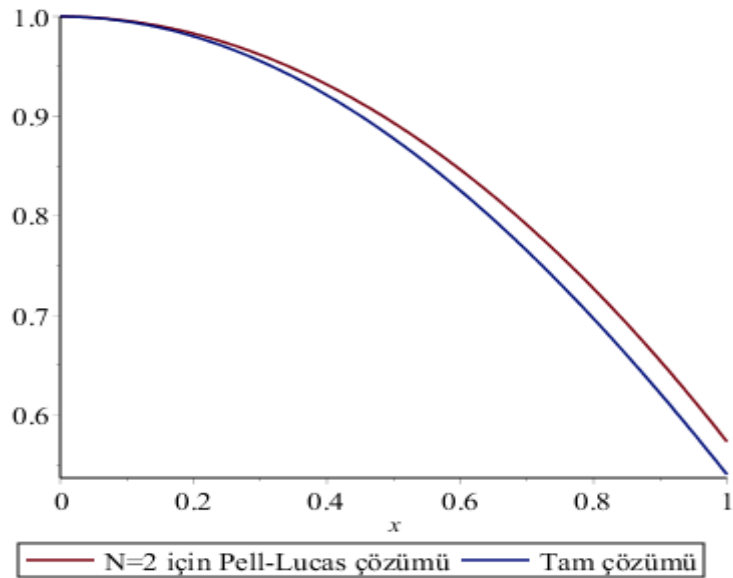
$$\bar{R}_5 = \int_0^1 \frac{|R_5(x)|}{|1-0|} dx = 0.01937550672$$

biçiminde hesaplanır.  $N = 2, 3, 5$  yaklaşık çözümler ve tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.9'da gösterilmiştir. Elde edilen sayısal çözümlerin, tam çözümlerle

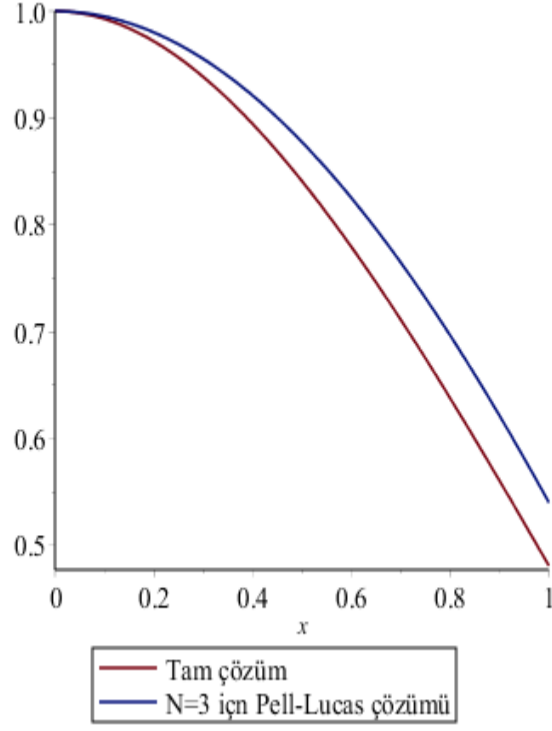
karşılaştırması Şekil 4.22, Şekil 4.23 ve Şekil 4.24’de verilmiştir. Şekil 4.25 rezidüel hata fonksiyonlarını grafiklendirmektedir.

**Tablo 4.9.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

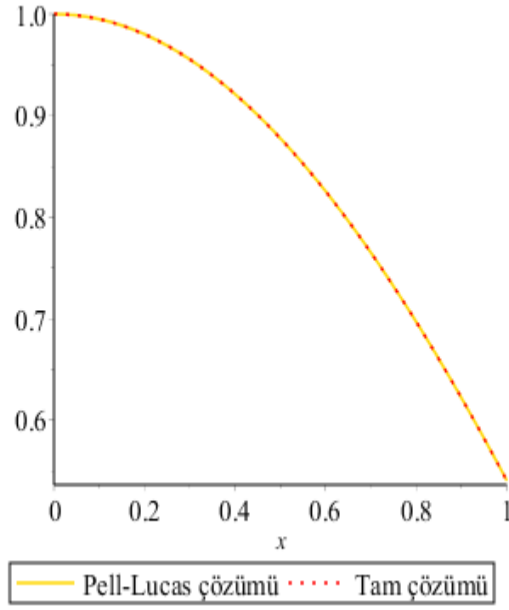
| $x$ | Tam çözüm    | $N = 2$      | $N = 3$      | $N = 5$      |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0   | 1.000000000  | 0.9999999996 | 0.9999999996 | 1.000000003  |
| 0.1 | 0.9950041653 | 0.9957322071 | 0.9927037177 | 0.9950087065 |
| 0.2 | 0.9800665778 | 0.9829288296 | 0.9717515184 | 0.9800777704 |
| 0.3 | 0.9553364891 | 0.9615898670 | 0.9385483707 | 0.9553516629 |
| 0.4 | 0.9210609940 | 0.9317153195 | 0.8944992443 | 0.8083362924 |
| 0.5 | 0.8775825619 | 0.8933051869 | 0.8410091081 | 0.8775987468 |
| 0.6 | 0.8253356149 | 0.8463594693 | 0.7794829315 | 0.8253517814 |
| 0.7 | 0.7648421873 | 0.7908781667 | 0.7113256838 | 0.7648586505 |
| 0.8 | 0.6967067093 | 0.7268612791 | 0.6379423343 | 0.6967226798 |
| 0.9 | 0.6216099683 | 0.6543088065 | 0.5607378522 | 0.6216229417 |
| 1   | 0.5403023059 | 0.5732207488 | 0.4811172068 | 0.5403089142 |



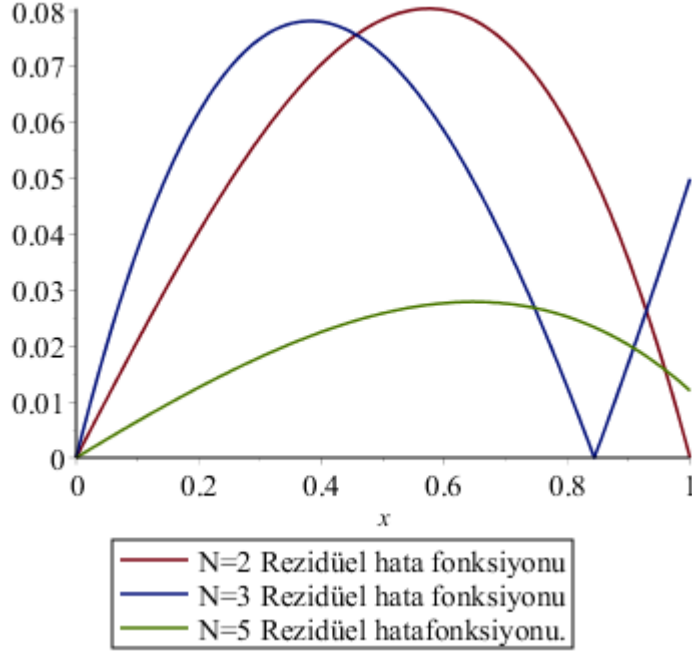
**Şekil 4.22.**  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.23.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.24.  $N = 5$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.25.  $N = 2, 3, 5$  için rezidüel hata fonksiyonları

#### 4.7. Fredholm-Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.7.1:** Tam çözüm  $y(x) = x$  olmak üzere,

$$y'(x) - xy(x) = f(x) + \int_0^1 xty(t)dt + \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

Fredholm-Volterra diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 2$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 2$$

olmalıdır. Burada  $N = 2$  ve  $m = 1$  olup, verilen problem için aşağıdaki sıralama noktaları uygulanırsa,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i ; i = 0,1,\dots,N$$

olmak üzere,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \{0,1,2\}$$

bulunur. Burada,  $P_0(x) = -x$ ,  $P_1(x) = 1$ ,  $K_1(x,t) = xt$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$  ve

$K_2(x,t) = (x-t)$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 2$  aralığında tanımlı ve sürekli olup,  $\lambda_1 = 1$

ve  $\lambda_2 = 1$  uygun sabitlerdir. Böylece, problemin temel matris denklemi,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - \lambda_1 X K_1 M L - \lambda_2 \bar{X} \bar{K}_2 \bar{T} L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_0 C^0 L + P_1 C^1 L - X K_1 M L - \bar{X} \bar{K}_2 \bar{T} L$$

biçimindedir. Burada, matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2/2 & x^3/3 \\ x^2/2 & x^3/3 & x^4/4 \\ x^3/3 & x^4/4 & x^5/5 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T(0) \\ T(1) \\ T(2) \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(1) & 0 \\ 0 & 0 & X(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca,

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ -4 & -1 & -4/3 & ; & -1/2 \\ -6 & -10 & 52/3 & ; & -5 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir. Buna göre,  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Böylece koşullar matrisi,

$$\begin{aligned} y(0) \cong y_2(0) &= \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [0] \\ \Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2] \mathbf{A} &= [0] \Rightarrow [\mathbf{u}_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 0] \end{aligned}$$

ile verilir. Yeni arttırılmış matris ise

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 1 \\ -4 & -1 & -4/3 & ; & -1/2 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde. Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece, yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = 0(2) + \frac{1}{2}(2x) + 0(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi tam çözüm ile yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.7.2:** Tam çözüm  $y(x) = e^x$  olmak üzere,

$$y'(x) - xy(x) = f(x) + \int_0^1 xty(t) dt + \int_0^x (x-t)y(t) dt$$

Fredholm–Volterra integro-diferansiyel denkleminin  $y(0) = 0$  koşuluna göre çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N=2$  ve  $m=1$  olup,  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, K_1(x, t) = xt, K_2(x, t) = (x-t), P_0(x) = -x, P_1(x) = 1$  ve  $f(x) = 1 - xe^x$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  'de tanımlı ve süreklidir. Problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \underbrace{\sum_{k=0}^1 P_k C^k L - \lambda_1 X K_1 M L - \lambda_2 \bar{X} \bar{K}_2 \bar{T} L}_W \right\} A = F \Rightarrow W = P_0 C^0 L + P_1 C^1 L - X K_1 M L - \bar{X} \bar{K}_2 \bar{T} L$$

biçimindedir. Farklı  $N$  değerleri için önceki örnekte yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$y_2(x) \cong 1 + x + 1.172577258x^2$$

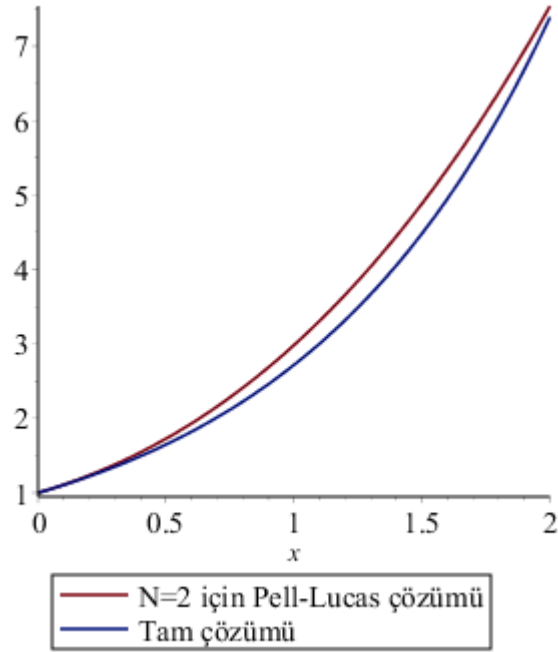
$$y_3(x) \cong 1 + x + 0.8346034280x^2 + 0.1499457602x^3$$

$$y_5(x) \cong 1 + 0.9999999998x + 1.397829034x^2 - 1.062711104x^3 + 0.8442338558x^4 - 0.1875474998x^5$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. Elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.10, Şekil 4.26, Şekil 4.27 ve Şekil 4.28'de sunulmuştur. Şekil 4.29'de ise rezidüel hata fonksiyonlarına ilişkin grafikler verilmiştir.

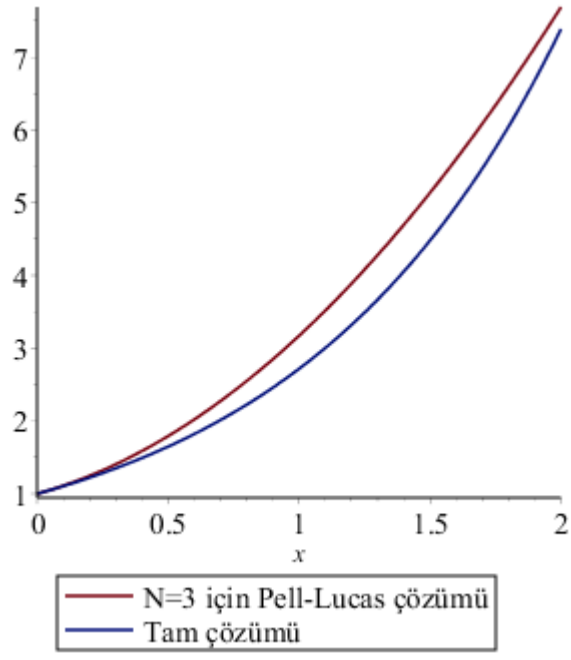
**Tablo 4.10.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

| $x$ | Tam çözüm   | $N=2$       | $N=3$       | $N=5$       |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0   | 1.000000000 | 1.000000000 | 1.000000000 | 1.000000000 |
| 0.1 | 1.105170918 | 1.111725773 | 1.108495980 | 1.112998127 |
| 0.2 | 1.221402758 | 1.246903090 | 1.234583703 | 1.248702231 |
| 0.3 | 1.349858808 | 1.405531953 | 1.379162845 | 1.403493967 |
| 0.4 | 1.491824698 | 1.587612361 | 1.543133077 | 1.575331035 |
| 0.5 | 1.648721271 | 1.793144314 | 1.727394077 | 1.763522127 |
| 0.6 | 1.822118800 | 2.022127813 | 1.932845518 | 1.968501868 |
| 0.7 | 2.013752707 | 2.274562856 | 2.160387076 | 2.191605759 |
| 0.8 | 2.225540928 | 2.550449445 | 2.410918423 | 2.434845119 |
| 0.9 | 2.459603111 | 2.849787579 | 2.685339236 | 2.700682033 |
| 1   | 2.718281828 | 3.172577258 | 2.984549188 | 2.991804286 |

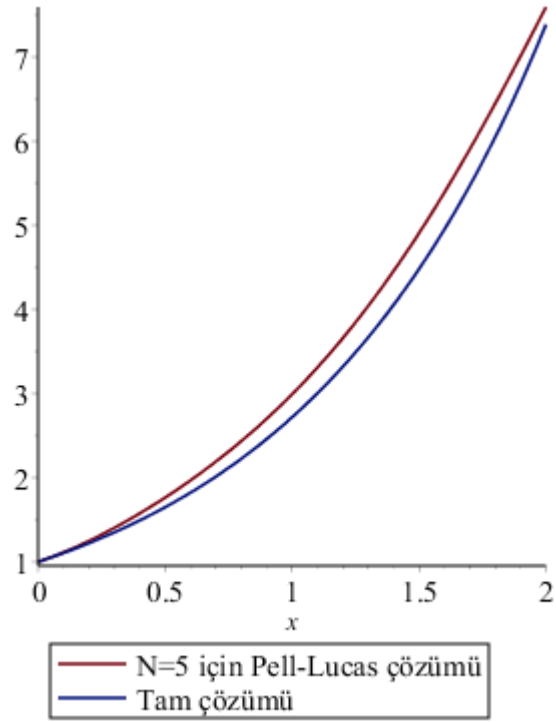


**Şekil 4.26.**  $N=2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

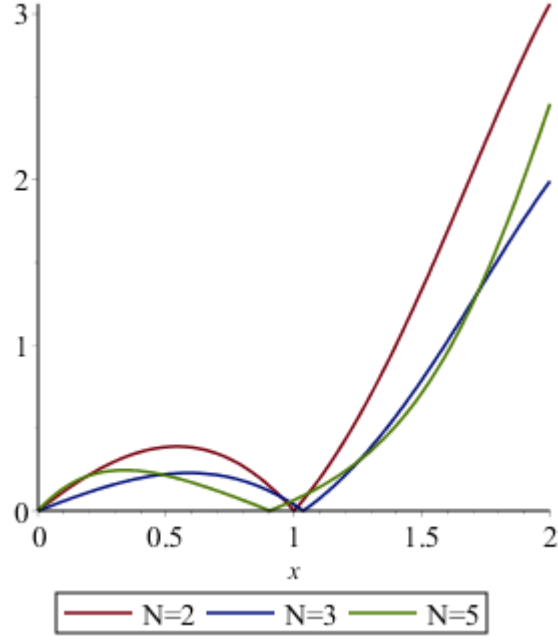




Şekil 4.27.  $N=3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.28.  $N=5$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



**Şekil 4.29.** Farklı  $N$  değerleri için rezidüel hata fonksiyonları

Rezidüel hatalar hesaplanacak olursa,

$$\bar{R}_2 = \int_0^2 \frac{|R_2(x)|}{|2-0|} dx = 0.8329546992, \quad \bar{R}_3 = \int_0^2 \frac{|R_3(x)|}{|2-0|} dx = 0.5067858492$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^2 \frac{|R_5(x)|}{|2-0|} dx = 0.525427953$$

değerleri elde edilir.

**Örnek 4.7.3 [48]:** Tam çözümü  $y(x) = xe^x$  olan,

$$y'(x) = 2e^x - 2 + \int_0^x y(t) dt + \int_0^1 y(t) dt$$

Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x); N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Ayrıca  $N=2$  ve  $m=1$  dir. Burada,  $\lambda_1=1, \lambda_2=1, K_1(x,t)=1, K_2(x,t)=1, P_1(x)=1$  ve  $f(x)=2e^x-2$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Bu takdirde, problemin temel matris denklemi,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k C^k L - \lambda_1 X K_1 M L - \lambda_2 \bar{X} \bar{K}_2 \bar{T} L \right\}}_W A = F \Rightarrow W = P_1 C^1 L - X K_1 M L - \bar{X} \bar{K}_2 \bar{T} L$$

biçimindedir.  $N=2$  ve 3 için önceki örnekte yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$y_2(x) \cong 0.9885276502x + 1.482791476x^2$$

$$y_3(x) \cong 2.210^{-9} + 0.9906232506x + 0.8970388664x^2 + 0.7851946808x^3$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. Bulunan yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.11 ve Şekil 4.30'da takdim edilmiştir. Rezidüel hata fonksiyonları Şekil 4.31 ile verilmiştir.

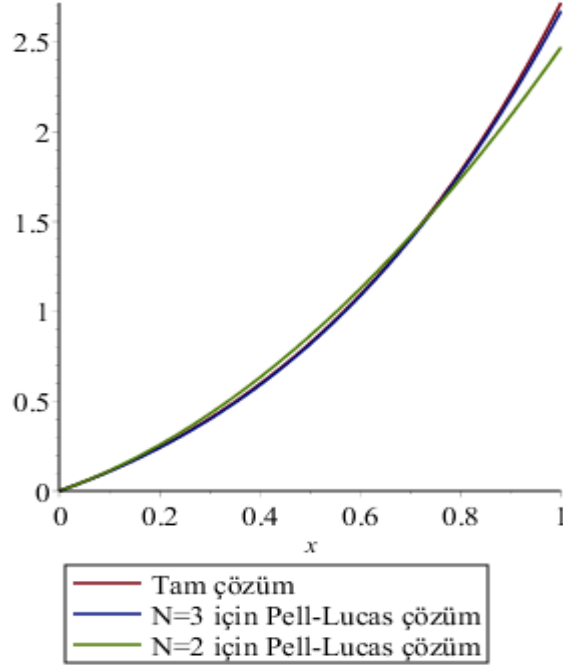
**Tablo 4.11.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

| $x$ | Tam çözüm    | $N=2$        | $N=3$                       |
|-----|--------------|--------------|-----------------------------|
| 0   | 0.0000000000 | 0.0000000000 | $2.200000000 \cdot 10^{-9}$ |
| 0.1 | 0.1105170918 | 0.1136806798 | 0.1088179106                |
| 0.2 | 0.2442805516 | 0.2570171890 | 0.2402877644                |
| 0.3 | 0.4049576424 | 0.4300095279 | 0.3991207318                |
| 0.4 | 0.5967298792 | 0.6326576963 | 0.5900279806                |
| 0.5 | 0.8243606355 | 0.8649616941 | 0.8177206792                |
| 0.6 | 1.093271280  | 1.126921522  | 1.086909996                 |
| 0.7 | 1.409626895  | 1.418537178  | 1.402307098                 |
| 0.8 | 1.780432742  | 1.739808665  | 1.768623154                 |
| 0.9 | 2.213642800  | 2.090735981  | 2.190569332                 |
| 1   | 2.718281828  | 2.471319126  | 2.672856800                 |

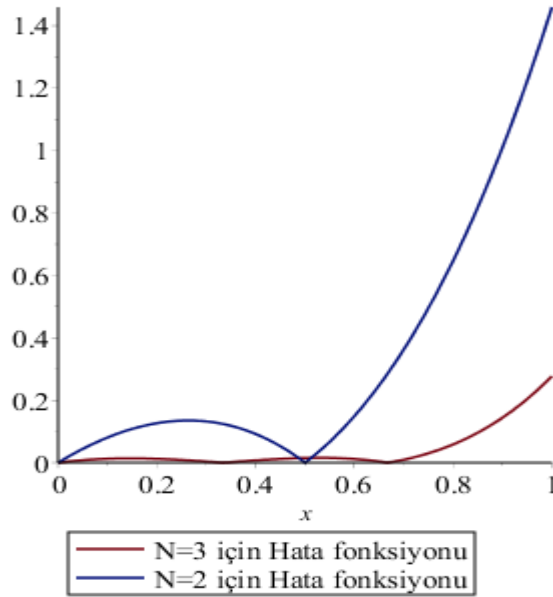
Elde edilen yaklaşık çözümler için rezidüel hatalar hesaplanırsa,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)| dx}{|1-0|} = 0.3319499780, \quad \bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)| dx}{|1-0|} = 0.04014166742$$

bulunur.



Şekil 4.30.  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.31:  $N = 2,3$  için hata fonksiyonları

#### 4.8. Volterra Tipi Oransal Gecikmeli İntegro- Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.8.1:** Tam çözümü  $y(x) = x^2 + 1$  olan,

$$y''(x) + 2xy\left(\frac{1}{2}x\right) = f(x) + \int_0^x xty\left(\frac{1}{2}t\right)dt + \int_0^x (x+t)y'\left(\frac{1}{2}t\right)dt; 0 \leq x, t \leq 1$$

Volterra tipi oransal gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

koşulları altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x); N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada,  $N = 2$ ,  $m_1 = 1$  ve  $m = 2$  olup,  $K_0(x, t) = xt$ ,  $K_1(x, t) = (x + t)$ ,  $P_0(x) = 2x$ ,  $P_1(x) = 0$ ,  $P_2(x) = 1$   $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{16}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.

$\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{2}$  ve  $\beta_1 = \frac{1}{2}$  ise uygun sabitlerdir. Böylece, problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X D(\alpha_k) C^k L - \bar{X} \sum_{j=0}^1 \bar{K}_j \bar{T} D(\beta_j) C^j L \right\} A = F$$

$$W = \{P_0 X D(\alpha_0) C^0 L + P_2 X D(\alpha_2) C^2 L\} - \{\bar{X} \bar{K}_0 \bar{T} D(\beta_0) C^0 L + \bar{X} \bar{K}_1 \bar{T} D(\beta_1) C^1 L\}$$

biçiminde yazılır. Burada, matrisler

$$D(\alpha_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, D(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D(\beta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
K_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
F &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4445/1536 \\ 149/48 \end{bmatrix}, D(\beta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & X(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2/2 & x^3/3 \\ x^2/2 & x^3/3 & x^4/4 \\ x^3/3 & x^4/4 & x^5/5 \end{bmatrix}, \quad \bar{T} = \begin{bmatrix} T(0) \\ T(1) \\ T(2) \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 2 & 8/3 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yerleştirilip, gerekli işlemler yapılırsa

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & ; & 2 \\ 15/8 & -37/48 & 3725/384 & ; & 4445/1536 \\ 3 & -4/3 & 113/12 & ; & 149/48 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_0(x) & \mathcal{Q}_1(x) & \mathcal{Q}_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{Q}_0(x) = 2, \quad \mathcal{Q}_1(x) = 2x, \quad \mathcal{Q}_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_0(0) & \mathcal{Q}_1(0) & \mathcal{Q}_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [1]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2] \mathbf{A} = [1]$$

$$\Rightarrow [\mathbf{u}_0 : \boldsymbol{\lambda}_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 1]$$

$$y'(x) \cong y_2'(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_0'(x) & \mathcal{Q}_1'(x) & \mathcal{Q}_2'(x) \end{bmatrix} \mathbf{A}; \quad \mathcal{Q}_0(x) = 2, \quad \mathcal{Q}_1(x) = 2x, \quad \mathcal{Q}_2(x) = 4x^2 + 2$$

$$y_2'(x) = [0 \quad 2 \quad 8x] \mathbf{A} \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow y_2'(0) = [0 \quad 2 \quad 0] \mathbf{A} = [0]$$

$$\Rightarrow [\mathbf{u}_1 : \boldsymbol{\lambda}_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

olarak elde edilir. Bu matriste iki satır silinip, yerine koşulların satır matrisleri koyulursa, yeni arttırılmış matris elde edilir:

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & ; & 2 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yeni arttırılmış matris çözüldürse,  $\mathbf{A} = [1/4 \quad 0 \quad 1/4]^T$  bulunur. Böylece, yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = a_0 \mathcal{Q}_0(x) + a_1 \mathcal{Q}_1(x) + a_2 \mathcal{Q}_2(x)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{4}(2) + 0(2x) + \frac{1}{4}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x^2 + 1$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak, tam çözüm ile yaklaşık çözümün aynı olduğu görülür.

**Örnek 4.8.2:** Tam çözüm  $y(x) = \pi \cos(x)$  olmak üzere,

$$y'(x) + x^2 y\left(\frac{1}{2}x\right) = f(x) + \int_0^x xty\left(\frac{1}{3}t\right) dt$$

Volterra tipi oransal gecikmeli integro- diferansiyel denkleminin

$$y(0) = \pi$$

koşulu altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x \leq 1$$

olarak kabul edilir. Burada  $N=2$  ve  $m=1, m_1=0$  dir. Bu problem için aşağıdaki sıralama noktaları uygulanırsa,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i ; i = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere,

$$x = \{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1/2, 1\}$$

bulunur. Burada,  $P_0(x) = x^2, P_1(x) = 1$  ve

$$f(x) = -\pi \sin(x) + x^2 \pi \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 3x^2 \pi \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - 9x\pi \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 9x\pi$$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Ayrıca,  $\lambda = 1, \alpha_0 = \frac{1}{2},$

$\alpha_1 = 1$  ve  $\beta_0 = \frac{1}{3}$  de uygun sabitlerdir. Bu takdirde, problemin temel matris denklemini,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X D(\alpha_k) C^k L - \bar{X} \sum_{j=0}^0 \bar{K}_j \bar{T} D(\beta_j) C^j L \right\} A = F$$

$$W = \{P_0 X D(\alpha_0) C^0 L + P_1 X D(\alpha_1) C^1 L\} - \{\bar{X} \bar{K}_0 \bar{T} D(\beta_0) C^0 L\}$$

biçimindedir. Burada, matrisler



$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.94016581 \\ -1.41398382 \end{bmatrix}, T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2/2 & x^3/3 \\ x^2/2 & x^3/3 & x^4/4 \\ x^3/3 & x^4/4 & x^5/5 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{T} = \begin{bmatrix} T(0) \\ T(1/2) \\ T(1) \end{bmatrix}$$

$$D(\alpha_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, D(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D(\beta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/8 & 1/24 \\ 1/8 & 1/24 & 1/64 \\ 1/24 & 1/64 & 1/160 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yazılıp ve düzenlenirse,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 3/8 & 19/9 & 1277/288 & ; & -0.94016581 \\ 1 & 25/9 & 89/9 & ; & -1.41398382 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] A; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$\begin{aligned}
y(0) &\cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)]A = [\pi] \\
&\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2]A = [\pi] \\
&\Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad \pi]
\end{aligned}$$

ile verilir. Böylece yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 3/8 & 19/9 & 1277/288 & ; & -0.94016581 \\ 2 & 0 & 2 & ; & \pi \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,

$$A = [0.2316233989 + (1277/2338)\pi \quad 0 \quad -0.2316233989 - (54/1169)\pi]^T$$

bulunur. Böylece, yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) \\
y_2(x) &= (0.2316233989 + (1277/2338)\pi)(2) + 0(2x) \\
&\quad + (-0.2316233989 - (54/1169)\pi)(4x^2 + 2) \\
y_2(x) &\cong 3.141592655 - 1.506976070x^2
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde  $N=3$  için aşağıdaki yaklaşık çözüm elde edilir:

$$y_3(x) = 3.141592653 + 1 \times 10^{-10}x - 1.626890986x^2 + 0.1703203794x^3$$

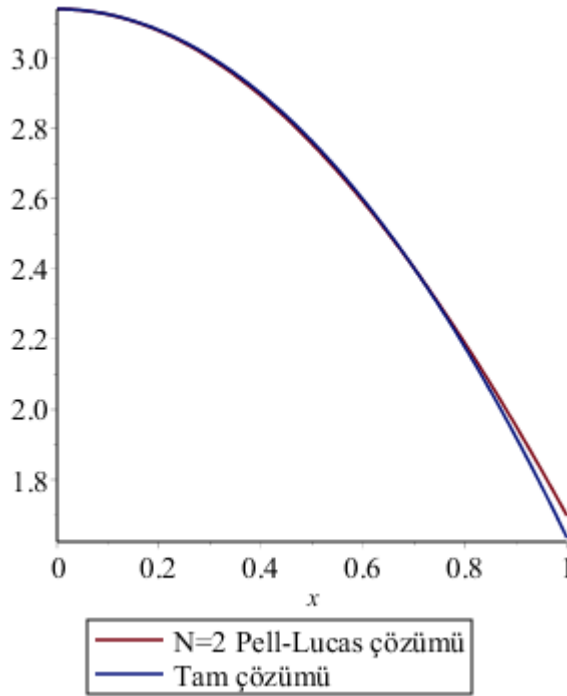
$N=2,3$  için rezidüel hatalar hesaplanırsa,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.07687689356, \quad \bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|}{|1-0|} dx = 0.01565897384.$$

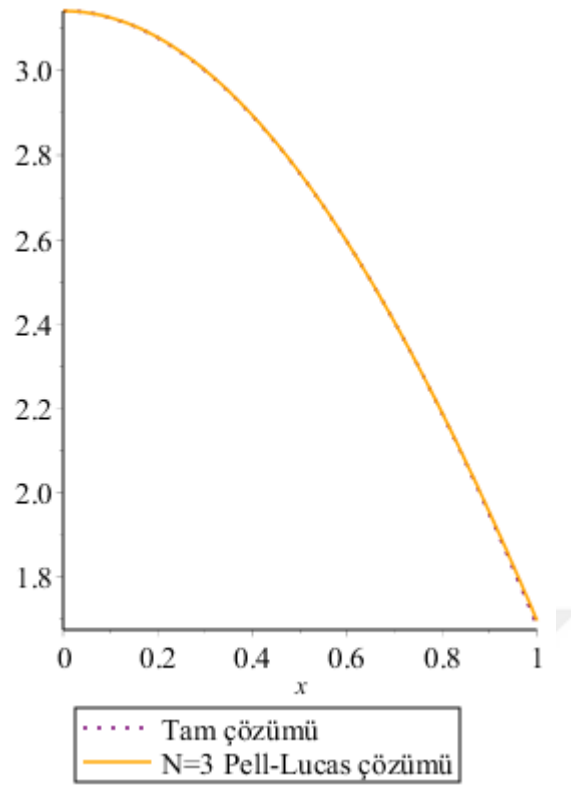
bulunur. Ayrıca, Tablo 4.12, Şekil 4.32 ve Şekil 4.33 de tam çözüm yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 4.34 de rezidüel hata fonksiyonları grafiklerle gösterilmiştir.

**Tablo 4.12.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

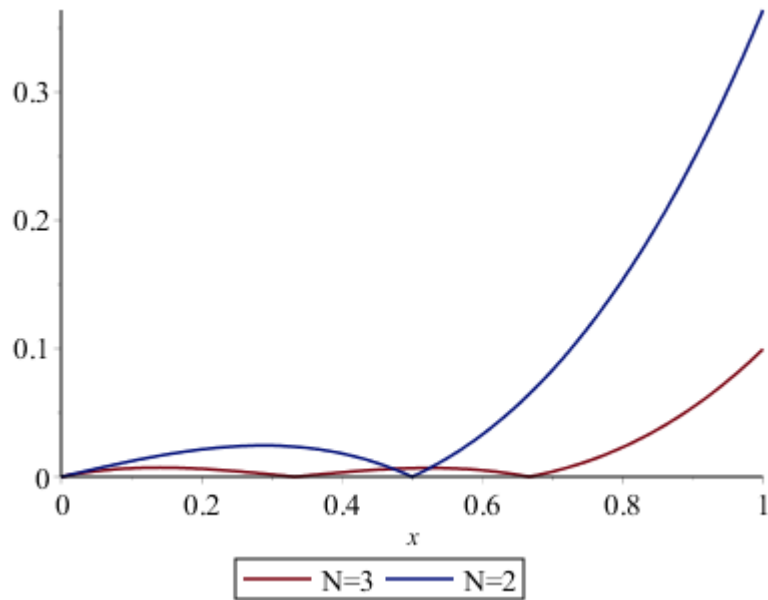
| $x$ | Tam çözüm   | $N = 2$     | $N = 3$     |
|-----|-------------|-------------|-------------|
| 0   | 3.141592654 | 3.141592655 | 3.141592653 |
| 0.1 | 3.125897776 | 3.126522894 | 3.125494063 |
| 0.2 | 3.078969961 | 3.081313612 | 3.077879577 |
| 0.3 | 3.001278096 | 3.005964809 | 2.999771114 |
| 0.4 | 2.893598453 | 2.900476484 | 2.892190599 |
| 0.5 | 2.757006930 | 2.764848638 | 2.756159953 |
| 0.6 | 2.592868305 | 2.599081270 | 2.592701100 |
| 0.7 | 2.402822597 | 2.403174381 | 2.402835960 |
| 0.8 | 2.188768680 | 2.177127970 | 2.187586456 |
| 0.9 | 1.952845310 | 1.920942038 | 1.947974511 |
| 1   | 1.697409755 | 1.634616585 | 1.685022046 |



**Şekil 4.32.**  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.33.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.34.  $N = 2, 3$  için rezidüel hata fonksiyonları

**Örnek 4.8.3:** Tam çözüm  $y(x) = e^{-x}$  olmak üzere,

$$y''(x) - 2y'\left(\frac{1}{2}x\right) + xy\left(\frac{1}{4}x\right) = f(x) + \int_0^x x^2 t y\left(\frac{1}{2}t\right) dt ; 0 \leq x, t \leq 1$$

Volterra tipi oransal gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 1, y'(x) = -1$$

koşullarına göre çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  ve  $N = 3$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^3 a_n Q_n(x)$$

ve

$$y(x) \cong y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n Q_n(x) ; N \geq m, 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N = 2, 3, m_1 = 0$  ve  $m = 1$  olup,  $P_0(x) = x, P_1(x) = -2, P_2(x) = 1,$

$$K(x, t) = x^2 t \text{ ve } f(x) = e^{-x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + xe^{-\frac{1}{4}x} + 2x^3 e^{-\frac{1}{2}x} + 4x^2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4x^2$$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  de tanımlı ve süreklidir.  $\lambda = 1, \alpha_0 = \frac{1}{4}, \alpha_1 = \frac{1}{2},$

$\alpha_2 = 1$  ve  $\beta_0 = \frac{1}{2}$  aralığında uygun sabitlerdir. Buna göre, problemin temel matris

denklemini,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X D(\alpha_k) C^k L - \bar{X} \sum_{j=0}^0 \bar{K}_j \bar{T} D(\beta_j) C^j L \right\}}_W A = F$$

$$W = \{P_0 X D(\alpha_0) C^0 L + P_1 X D(\alpha_1) C^1 L + P_2 X D(\alpha_2) C^2 L\} - \{\bar{X} \bar{K}_0 \bar{T} D(\beta_0) C^0 L\}$$

biçimindedir. Gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki yaklaşık çözümler elde edilir:

$$y_2(x) \cong 1 - x + \frac{1}{2} x^2$$

ve

$$y_3(x) \cong 1 - 0.9999999999x + 0.5000000000x^2 - 0.1402778727x^3$$

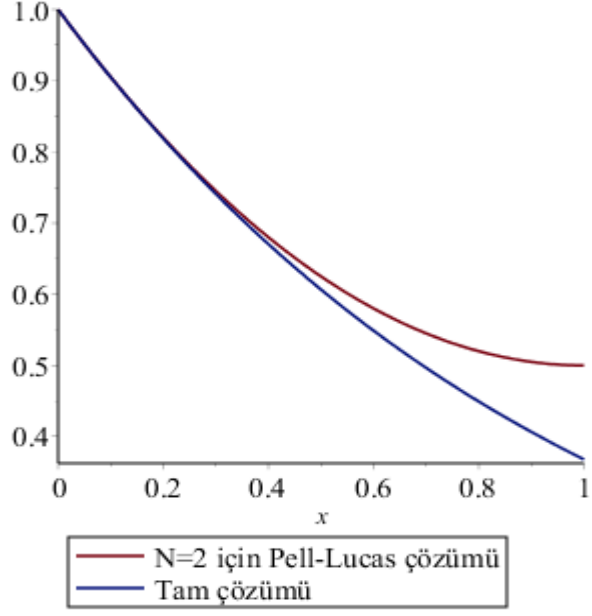
$N = 2$  ve  $N = 3$  için rezidüel hata hesaplanırsa,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.29402076, \bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|}{|1-0|} dx = 0.06215512986$$

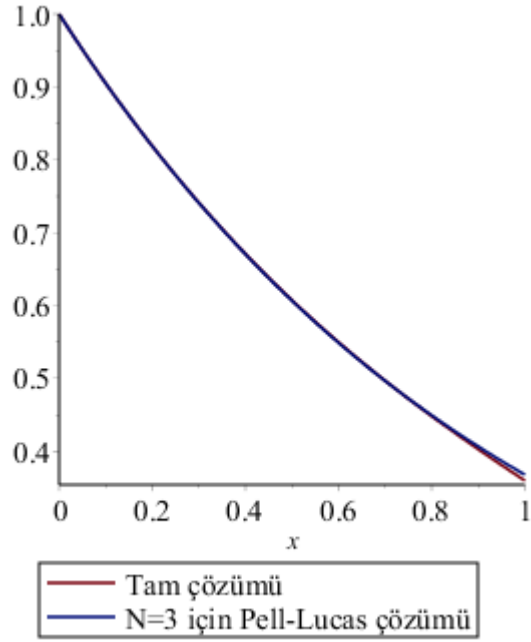
bulunur.  $N = 2$  ve  $N = 3$  için yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.13 de gösterilmiştir. Şekil 4.35 ve Şekil 4.36'da tam çözüm ile yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır. Şekil 4.37'de ise rezidüel hata fonksiyonuna ilişkin grafik verilmiştir.

**Tablo 4.13.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

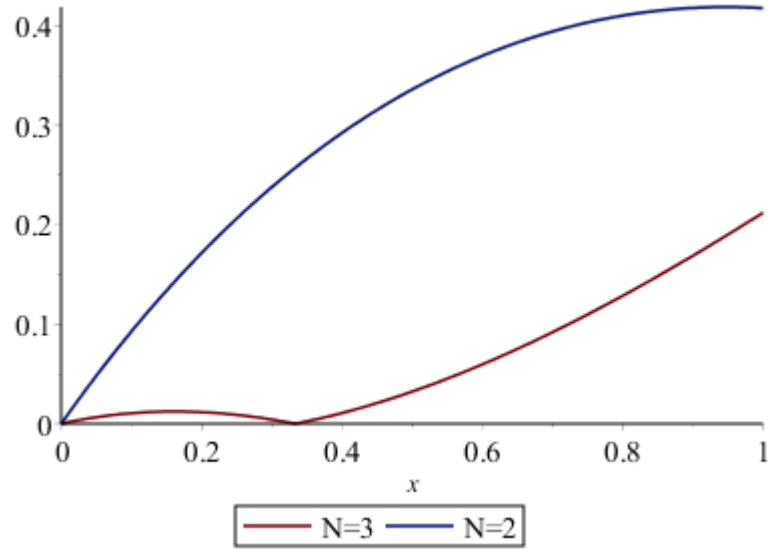
| $x$ | <b>Tam çözüm</b> | $N = 2$      | $N = 3$      |
|-----|------------------|--------------|--------------|
| 0   | 1.000000000      | 1.000000000  | 1.000000000  |
| 0.1 | 0.9048374180     | 0.9050000000 | 0.9048597221 |
| 0.2 | 0.8187307531     | 0.8200000000 | 0.8188777770 |
| 0.3 | 0.7408182207     | 0.7450000000 | 0.7412124974 |
| 0.4 | 0.6703200460     | 0.6800000000 | 0.6710222161 |
| 0.5 | 0.6065306597     | 0.6250000000 | 0.6074652659 |
| 0.6 | 0.5488116361     | 0.5800000000 | 0.5496999796 |
| 0.7 | 0.4965853038     | 0.5450000000 | 0.4968846898 |
| 0.8 | 0.4493289641     | 0.5200000000 | 0.4481777293 |
| 0.9 | 0.4065696597     | 0.5050000000 | 0.4027374309 |
| 1   | 0.3678794412     | 0.500000000  | 0.3597221274 |



Şekil 4.35.  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.36.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.37. Farklı  $N$  için rezidüel hata fonksiyonları

#### 4.9. Fredholm Tipi İntegro- Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.9.1:** Tam çözümü  $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$  olan,

$$y''(x) + x^2 y'(x) + y(x) = 1 + x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \int_0^1 xty(t) dt; 0 \leq x, t \leq 1$$

Fredholm tipi oransal gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0, y'(0) = 1/3$$

koşulları altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulacağız. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N = 2$  ve  $m = 1$  olup,  $K(x, t) = xt$ ,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x^2$ ,



$P_2(x)=1$  ve  $f(x)=1+x^3+\frac{5}{6}x^2$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  de tanımlı ise süreklidir.

$\lambda = 1$  de uygun sabittir. Buna göre, problemin temel matris denklemi,

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X C^k L - X K M \right\}}_W A = F$$

$$W = \{P_0 X C^0 L + P_1 X C^1 L + P_2 X C^2 L\} - \{X K M L\}$$

biçimindedir. Burada,

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 17/6 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yerleştirilip gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & ; & 1 \\ 1 & 1 & 31/3 & ; & 4/3 \\ 0 & 3 & 56/3 & ; & 17/6 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan,

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)] A; \quad Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$y(0) \cong y_2(0) = [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)]A = [0]$$

$$\Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2]A = [0]$$

$$\Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 0]$$

$$y'(x) \cong y_2'(x) = [Q_0'(x) \quad Q_1'(x) \quad Q_2'(x)]A; Q_0(x) = 2, Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

$$y_2'(x) = [0 \quad 2 \quad 8x]A \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow y_2'(0) = [0 \quad 2 \quad 0]A = [1/3]$$

$$\Rightarrow [u_1 : \lambda_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 1/3]$$

biçiminde elde edilir. Yukarıdaki arttırılmış matriste bir satır silip, yerine koşulun satır matrisi koyulduğunda yeni arttırılmış bulunur. Böylece,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & ; & 1 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 1/3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu yeni arttırılmış matris çözümlerse,  $A = [-1/8 \quad 1/6 \quad 1/8]^T$  olmak üzere,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{8}(2) + \frac{1}{6}(2x) + \frac{1}{8}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2$$

bulunur. Bu ise tam çözüm ile yaklaşık çözümün aynı olduğunu gösterir.

#### 4.10. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Fredholm Tipi Gecikmeli İntegro-Diferansiyel Denklemlerle İlgili Örnekler

**Örnek 4.10.1:** Tam çözümü  $y(x) = x^2$  olmak üzere,

$$y''(x) + 2y' \left( \frac{x}{2} - \sin(x) \right) - 2xy(x) = f(x) + 3 \int_0^1 x^2 t^2 y \left( \frac{1}{2}t \right) dt$$

değişken katsayılı Fredholm tipi gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0 \text{ ve } y'(0) = 0$$

koşulları altındaki çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Buna göre, yaklaşık çözüm

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

biçiminde kabul edilir. Burada  $N = 2$  ve  $m = 1, m_1 = 0$  olup,  $P_0(x) = -2x, P_1(x) = 2,$

$P_2(x) = 1, \beta(x) = -\sin(x)$  ve  $f(x) = 2 + 2x - 4\sin(x) - 2x^3 - \frac{3}{20}x^2$  fonksiyonları

$0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir. Ayrıca  $\lambda = 3, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_0 = \frac{1}{2}$  uygun

sabitlerdir. Buna göre, problemin temel matris denklemini,

$$\sum_{k=0}^2 P_k(x) y^{(k)}(\alpha_k x + \beta(x)) = f(x) + \int_a^b \sum_{j=0}^0 K_j(x, t) y^{(j)}(\beta_j t) dt$$

$$\underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k \bar{X} E(\alpha_k, B) C^k L - 3 X K_0 M D(\beta_0) L \right\}}_W A = F$$

ile tanımlanır. Burada, matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_2 = C^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.794797846 \\ -1.515883939 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D(\beta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, E(\alpha_1, B) = \begin{bmatrix} E(\alpha_1, \beta(0)) \\ E(\alpha_1, \beta(1/2)) \\ E(\alpha_1, \beta(1)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(\alpha_1, \beta(0)) = E(1/2, -\sin(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$E(\alpha_1, \beta(1/2)) = E(1/2, -\sin(1/2)) = \begin{bmatrix} 1 & -\sin(1/2) & \sin^2(1/2) \\ 0 & 1/2 & -\sin(1/2) \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$E(\alpha_1, \beta(1)) = E(1/2, -\sin(1)) = \begin{bmatrix} 1 & -\sin(1) & \sin^2(1) \\ 0 & 1/2 & -\sin(1) \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu matrisler yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & ; & 2 \\ -\frac{5}{2} & \frac{45}{16} & \frac{167}{20} - 16\sin\left(\frac{1}{2}\right) & ; & 0.794797846 \\ -6 & -\frac{3}{4} & \frac{7}{5} - 16\sin(1) & ; & -1.515883939 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matris elde edilir.  $y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x)$  olduğundan

$$y_2(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x)]A; \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x, \quad Q_2(x) = 4x^2 + 2$$

bulunur. Buna göre, koşullar matrisi

$$\begin{aligned} y(0) \cong y_2(0) &= [Q_0(0) \quad Q_1(0) \quad Q_2(0)]A = [0] \\ \Rightarrow [2 \quad 0 \quad 2]A &= [0] \Rightarrow [u_0 : \lambda_0] = [2 \quad 0 \quad 2 \quad ; \quad 0] \\ y'(0) \cong y_2'(0) &= [Q_0'(0) \quad Q_1'(0) \quad Q_2'(0)]A = [0] \\ \Rightarrow [0 \quad 2 \quad 0]A &= [0] \Rightarrow [u_1 : \lambda_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0] \end{aligned}$$

biçimindedir. Yukarıdaki arttırılmış matriste iki satır silinip, yerine koşullara ait satır matrisleri koyulursa,

$$[\tilde{W}; \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & ; & 2 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şekilde yeni arttırılmış matris elde edilir. Bu yeni arttırılmış matrisin çözümünden,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece,

$$y_2(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x)$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{4}(2) + 0(2x) + \frac{1}{4}(4x^2 + 2)$$

$$y_2(x) = x^2$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi, tam çözüm ile yaklaşık çözüm aynıdır.

**Örnek 4.10.2:** Tam çözüm  $y(x) = \sin(x)$  olmak üzere,

$$y'(x) - 2y\left(\frac{1}{4}x - \cos(x)\right) = f(x) + \int_0^1 xy(t) dt$$

değişken katsayılı Fredholm tipi gecikmeli integro-diferansiyel denklemin  $y(0) = 0$  koşuluna göre çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N = 2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Daha sonra,  $N = 3$  ve  $N = 4$  için de çözümler hesaplanacaktır. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N = 2, m_1 = 0$  ve  $m = 1$  olup,  $P_0(x) = -2, P_1(x) = 1, K_0(x, t) = x,$

$$\beta(x) = -\cos(x) \text{ ve } f(x) = \cos(x) - 2\sin\left(\frac{1}{4}x - \cos(x)\right) - 2x + 2x \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.  $\alpha_0 = 1/4, \beta_0 = 1/2$  ise uygun sabitlerdir. Önceki örnekte yapılan benzer işlemler uygulanırsa,

$$y_2(x) \cong 0.8789814686x - 0.1725432460x^2$$

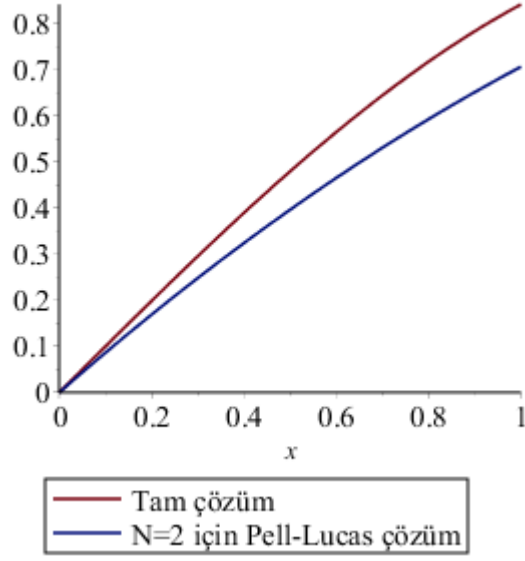
$$y_3(x) \cong 0.9321657260x - 0.00852647644x^2 - 0.1419331226x^3$$

$$y_4(x) \cong -1.400000000 \times 10^{-12} + 0.9826814840x - 0.006198959880x^2 - 0.1384996973x^3 - 0.002724421459x^4$$

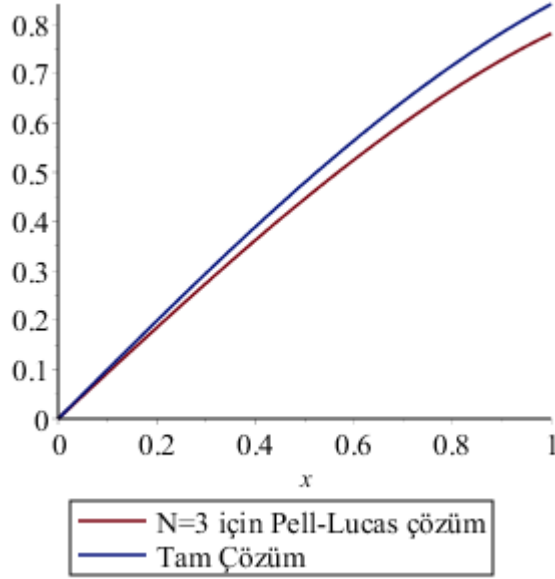
yaklaşık çözümleri elde edilir.  $N = 2, 3, 4$  için yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.14 de verilmiştir. Şekil 4.38, Şekil 4.39 ve Şekil 4.40'da tam çözüm yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 4.41'de ise rezidüel hata fonksiyonları ve grafikleri gösterilmiştir.

**Tablo 4.14.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

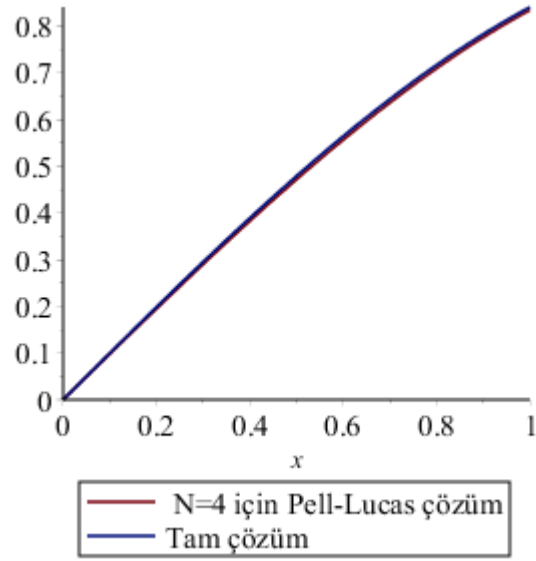
| $x$ | Tam çözüm     | $N = 2$      | $N = 3$       | $N = 4$       |
|-----|---------------|--------------|---------------|---------------|
| 0   | 0.0000000000  | 0.0000000000 | 0.0000000000  | 0.0000000000  |
| 0.1 | 0.09983341665 | 0.0861727144 | 0.09298937472 | 0.09806738666 |
| 0.2 | 0.1986693308  | 0.1688945639 | 0.1849566211  | 0.1951759817  |
| 0.3 | 0.2955202067  | 0.2481655485 | 0.2750501406  | 0.2904849792  |
| 0.4 | 0.3894183423  | 0.3239856680 | 0.3624183344  | 0.3831470342  |
| 0.5 | 0.4794255386  | 0.3963549228 | 0.4462096036  | 0.4723082635  |
| 0.6 | 0.5646424734  | 0.4652733126 | 0.5255723496  | 0.5571082452  |
| 0.7 | 0.6442176872  | 0.5307408375 | 0.5996549736  | 0.6366800187  |
| 0.8 | 0.7173560909  | 0.5927574975 | 0.6676058771  | 0.7101500849  |
| 0.9 | 0.7833269096  | 0.6513232924 | 0.7285734611  | 0.7766384059  |
| 1   | 0.8414709848  | 0.7064382226 | 0.7817061270  | 0.8352584053  |



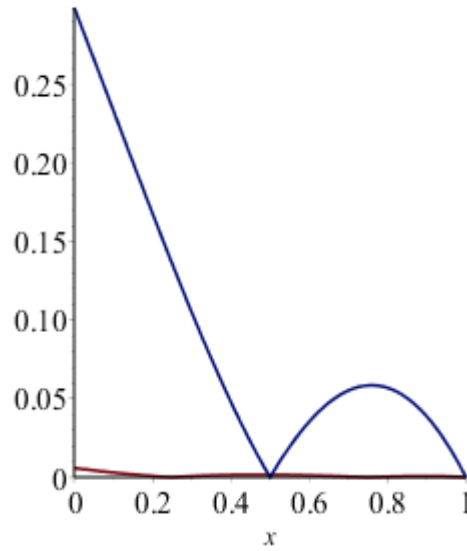
Şekil 4.38.  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.39.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



**Şekil 4.40.**  $N = 4$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



**Şekil 4.41.**  $N = 2, 4$  için rezidüel hata fonksiyonları

Şimdi rezidüel hataları hesaplayalım. Buna göre,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.08962738856, \quad \bar{R}_4 = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|}{|1-0|} dx = 0.0009202557305$$

elde edilir.

**Örnek 4.10. 3:** Tam çözümünü  $y(x) = e^{-x}$  olan



$$y'(x) + y\left(\frac{1}{3}x - x^2\right) = f(x) + \int_0^1 y(t) dt$$

değişken katsayılı Fredholm tipi gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin  $y(0)=1$  koşuluna göre çözümünü,  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N=2$  için Pell-Lucas sıralama yöntemi ile bulalım. Daha sonra  $N=3$  ve  $N=4$  için çözümleri bulunacaktır. Buna göre,

$$y(x) \cong y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n Q_n(x) ; N \geq m \text{ ve } 0 \leq x, t \leq 1$$

olmalıdır. Burada  $N=2$ ,  $m_1=0$  ve  $m=1$  olup,  $P_0(x)=1$ ,  $P_1(x)=1$ ,  $K_0(x,t)=1$ ,

$\beta(x)=-x^2$  ve  $f(x)=-e^{-x} + e^{-\frac{1}{3}x+x^2} - 1 + e^{-1}$  fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında tanımlı ve süreklidir.  $\alpha_0 = 1/3$ ,  $\beta_0 = 1$  uygun sabitlerdir. Benzer işlemler uygulanırsa,

$$y_2(x) \cong 0.9999999999 - 1.001453406x + 0.3941815678x^2$$

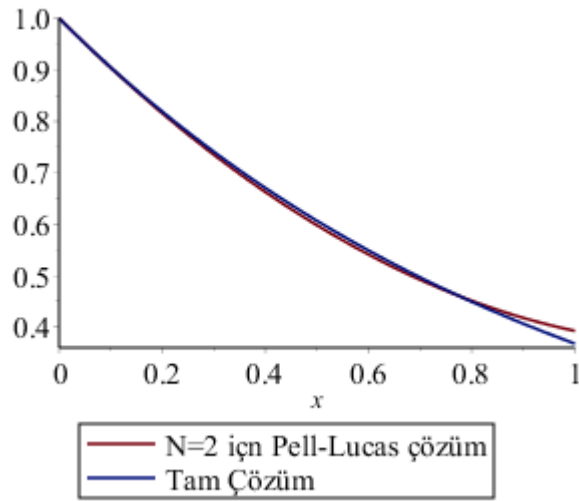
$$y_3(x) \cong 1.0000000000 - 1.025587729x + 0.4665710040x^2 - 0.08273593952x^3$$

$$y_4(x) \cong 1.0000000000 - 0.9991418403x + 0.5005511576x^2 - 0.1679662708x^3 + 0.03845410318x^4$$

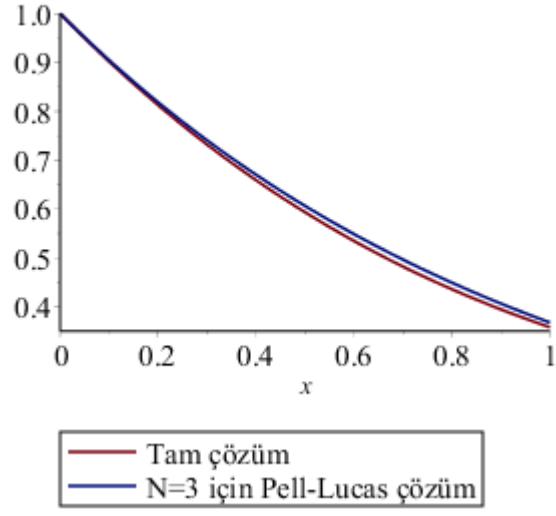
yaklaşık çözümleri elde edilir.  $N=2,3,4$  için yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırması Tablo 4.15 de gösterilmiştir. Şekil 4.42, Şekil 4.43 ve Şekil 4.44'de tam çözüm yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Şekil 4.45 de residüel hata fonksiyonları grafiklerle gösterilmiştir.

**Tablo 4.15.** Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırması

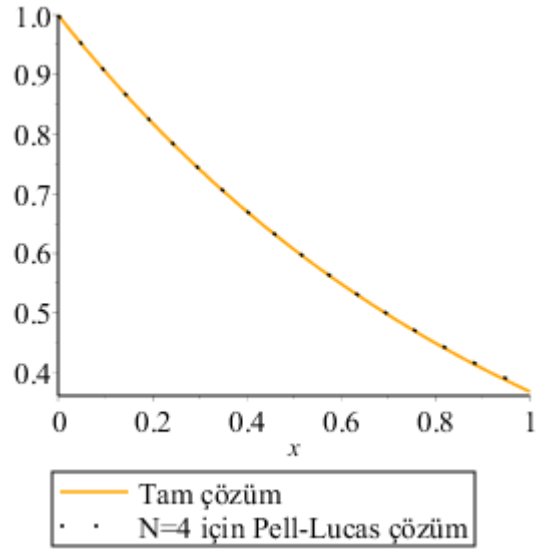
| $x$ | Tam çözüm    | $N = 2$      | $N = 3$      | $N = 4$      |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0   | 1.0000000000 | 0.9999999999 | 1.0000000000 | 1.0000000000 |
| 0.1 | 0.9048374180 | 0.9037964750 | 0.9020242012 | 0.9049272067 |
| 0.2 | 0.8187307531 | 0.8154765814 | 0.8128834069 | 0.8189114746 |
| 0.3 | 0.7408182207 | 0.7350403192 | 0.7320812013 | 0.7410834410 |
| 0.4 | 0.6703200460 | 0.6624876884 | 0.6591211689 | 0.6706660328 |
| 0.5 | 0.6065306597 | 0.5978186888 | 0.5935068941 | 0.6069744668 |
| 0.6 | 0.5488116361 | 0.5410333207 | 0.5347419611 | 0.5494162498 |
| 0.7 | 0.4965853038 | 0.4921315839 | 0.4823299544 | 0.4974911783 |
| 0.8 | 0.4493289641 | 0.4511134785 | 0.4357744584 | 0.4507913387 |
| 0.9 | 0.4065696597 | 0.4179790044 | 0.3945790572 | 0.4090011071 |
| 1   | 0.3678794412 | 0.3927281617 | 0.3582473355 | 0.3718971497 |



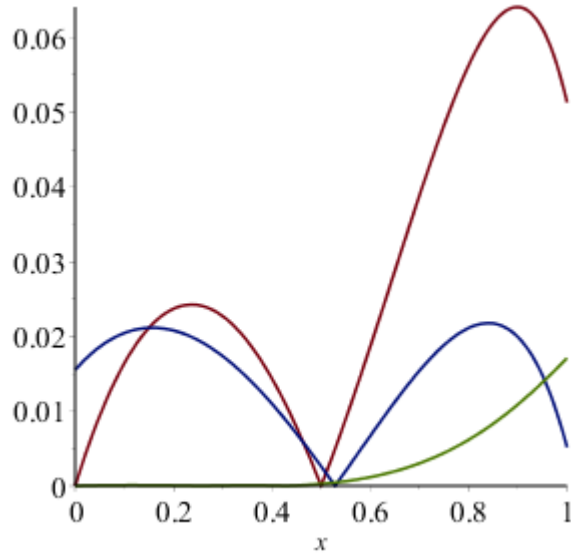
**Şekil 4.42.**  $N = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.43.  $N = 3$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 4.44.  $N = 4$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



**Şekil 4.45.**  $N = 2, 3, 4$  için rezidüel hata fonksiyonları

Şimdi rezidüel hataları hesaplayalım. Buna göre,

$$\bar{R}_2 = \int_0^1 \frac{|R_2(x)|}{|1-0|} dx = 0.02875456794, \quad \bar{R}_4 = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|}{|1-0|} dx = 0.002965808802$$

elde edilir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemler, Fredholm tipi integral denklemler, yüksek mertebeli sabit katsayılı ve değişken katsayılı Fredholm integro-diferansiyel denklemler, yüksek mertebeli Volterra integro-diferansiyel denklemler, Fredholm-Volterra tipi integro-diferansiyel denklemler, yüksek mertebeli oransal ve değişken gecikmeli integro-diferansiyel denklemler birçok matematikçi, fizikçi ve mühendis tarafından ilgiyle araştırılmaktadır. Bu tip denklemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça zor veya mümkün değildir. Bu sebepten dolayı yaklaşık çözümlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bundan dolayı, bu çalışmada karışık koşullar altında kalan (rezidüel) hata tahminli yüksek mertebeden lineer fonksiyonel Volterra tipindeki integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için, kesilmiş Pell-Lucas serisi ve sıralama noktalarına dayalı Pell-Lucas matris-sıralama yöntemi adı verilen bir polinom yaklaşım metodu geliştirilmiştir.

Buna ek olarak, yöntemin doğruluğunu göstermek için kalan fonksiyona ve Ortalama Değer Teoremine dayalı bir hata tahmini kullanılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar ve hata tahminlerine bakılacak olursa, bahsedilen yöntemin geçerli ve kullanışlı olduğu anlaşılmıştır. Ayrıca, problemin tam çözümünün bilinmediği durumlarda bile, çözümün hata üst sınırı kalan fonksiyon aracılığıyla yaklaşık olarak tahmin edilebilmektedir. Diğer yandan, bu çalışmada problemlerin elde edilen yaklaşık çözümlerinin sayısal değerleri ile tam çözümlerinin karşılaştırmalarından, önerilen yöntemin oldukça pratik ve bilgisayar programlamaya uyumlu olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, bu çalışmada verilen matris-sıralama yönteminin uygulanabilirliği görülmüş, bilgisayarla elde edilen sonuçların doğruluğu kontrol edilmiştir; dolayısıyla, bu yöntemin diferansiyel-fark, gecikmeli integro-diferansiyel, lineer olmayan ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini araştırmak için öngörülebilir bir yöntem olacağı düşünülmektedir; ancak bir takım düzenlemeler yapmak gerekmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Şahin, M. Fredholm Tipindeki Fonksiyonel İntegro Diferansiyel denklemlerin Pell-Lucas Polinom Çözümleri ve Uygulamaları. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Manisa, 2017, 62 s. (Yüksek Lisans Tezi)
- [2] Öztunç, Ö. Parabolik Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri. Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Aydın, 2009, 47 s. (Yüksek Lisans Tezi)
- [3] Wazwaz, A. M. Applications of Integral Equations. Linear and Nonlinear Integral Equations. Higher Education Press, Beijing, China, 2011, 639.
- [4] Groetsch, C. W. Integral equations of the first kind, inverse problems and regularization: a crash course. Journal of Physics: Conference Series, 2007, doi.org/10.1088/1742-6596/73/1/012001.
- [5] James R. B., William E. B. Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications, John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, New Jersey, USA, 2011, 691 s.
- [6] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. Diferansiyel Denklemler I: Teori ve Problem Çözümleri. Dora Basım-Yayın Dağıtım, Bursa, Türkiye, 2010, 275 s.
- [7] Gülsu, M., Sezer, M. A Taylor collocation method for solving high-order linear Pantograph equations with linear functional argument. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2011, 27, 1628–1638.
- [8] Evans, D. J., Raslan, K. R. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. International Journal of Computer Mathematics. 2005, 82, 49–54.
- [9] El-Safty, A., Salim, M. S., El-Khatib, M. A. Convergence of the spline function for delay dynamic system. International Journal of Computer Mathematics. 2003,80, 509–518.
- [10] Biazar, J., Ghanbari, B. The homotopy perturbation method for solving neutral functional–differential equations with proportional delays. Journal of King Saud University-Science. 2012, 24, 33-37.
- [11] Bellen, A., Zennaro, M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. 1st ed: The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2003, 395.
- [12] Chen, X., Wang, L. The variational iteration method for solving a neutral functional–differential equation with proportional delays. Computers and Mathematics with Applications. 2010, 59, 2696–2702.
- [13] Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics. The Decomposition Method. 1st ed: Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994, 352.
- [14] Adomian, G. A review of the decomposition method in applied mathematics. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1988,135, 501–544.
- [15] Wang, X., Wildman, R. A., Weile, D. S., Monk, P. A finite difference delay modeling approach to the discretization of the time domain integral equations of electromagnetics. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2008, 56, 2442-2452.
- [16] Oğuz, C., Sezer, M. Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations. Applied Mathematics and computational. 2015, 259, 943-954.
- [17] Yüzbaşı, Ş. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. Applied Mathematics and Computation. 2014, 232, 1183–1199.

- [18] Gürbüz, B., Sezer, M., Güler, C. Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments. *Journal of Applied Mathematics*. 2014, Article ID 682398, 12 pages.
- [19] Gülsu, M., Öztürk, Y., Sezer, M. A new Chebyshev polynomial approximation for solving delay differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2012, 18, 1043-1065.
- [20] Erdem, K., Yalçınbaş, S., Sezer, M. A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2013, 19, 1619-1631.
- [21] Şahin, N., Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro-differential-difference equations. *International Journal Computer Mathematics*. 2011, 88, 3093-3111.
- [22] Çelik, İ. Collocation method and residual correction using Chebyshev series. *Applied Mathematics and Computation*. 2006, 174, 910-920.
- [23] Sezer, M., Daşcıoğlu A. Taylor polynomial solutions of general linear differential-difference equations with variable coefficients. *Applied Mathematics and Computation*. 2006, 174, 1526-1538.
- [24] Horadam, A.F., Mahon, Bro J. M. Pell and Pell-Lucas polynomials. *Fibonacci Quarterly*. 1985, 23, 7-20.
- [25] Yalçınbaş, S., Sezer, M., Sorkun, H. H. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2009, 210, 334-349.
- [26] Filipponi, P., Horadam, A. F. Second derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials. *The Fibonacci Quarterly*. 1993, 31, 194-204.
- [27] Yalçınbaş, S., Sezer, M. The approximate solution of high-order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials. *Applied Mathematics and Computation*. 2002, 112, 291-308.
- [28] Sezer, M. Taylor polynomial solution of Volterra integral equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 1994, 25, 625-633.
- [29] Sezer, M., Kaynak, M. Chebyshev polynomial solutions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education for Science and Technology*. 1996, 27, 607-618.
- [30] Nas, S., Yalçınbaş, S., Sezer, M. A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations. *International Journal of Mathematical Education for Science and Technology*. 2000, 31, 213-225.
- [31] Yalçınbaş, S., Sezer, M. The approximate solution of high-order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials. *Applied Mathematics and Computation*. 2000, 112, 291-308.
- [32] Akyüz, A., Sezer, M. A Chebyshev collocation method for the solution of linear integro-differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 1999, 72, 491-507.
- [33] Karamete, A., Sezer, M. A Taylor collocation method for the solution of linear integro-differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 2002, 79, 987-1000.
- [34] Maleknejad, K., Mahmoudi, Y. Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2003, 145, 641-653.
- [35] Filipponi, P., Horadam, A. F. Addendum to Second Derivative Sequences of Fibonacci and Lucas polynomial. *The Fibonacci Quarterly*. 1994, 32, 110.

- [36] Aart, B., Xiwang, C., Wun-Seng, C., Xiang-Dong, H. On the roots of certain Dickson polynomials . *Journal of Number Theory*. 2018, 188, 229-246.
- [37] Türkyılmaz, B., Gürbüz, B., Sezer, M. Morgan-Voyce Polynomial approach for solution of high-order linear differential-difference equations with residual error estimation. *Düzce University Journal of Science and Technology*. 2016, 4, 252-263.
- [38] Behrouz, R. Numerical solutions of the linear Volterra integro- differential equations: Homotopy perturbation method and finite difference. *World Applied Sciences Journal* 9 (Special Issue of Applied Math). 2010, 07-12.
- [39] Yılmaz, B., Cetin, Y. Numerical solutions of the Fredholm integral equations of the second type. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2017, 3, 284-292.
- [40] Wang, W.S., Li, S.F. On the one-leg Q-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation* 2007, 193(1), 285-301.
- [41] El-Khatib, M. A. Convergenue of the spline function for functional differential equation of neutral type. *International Journal of Computer Mathethematics* 2003, 80(11), 1437-1447.
- [42] Rashed, M. T. Numerical solution of functional differential, integral and integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation* 2004, 156, 485-492.
- [43] Cheng, X., Chen, Z., Zhang, Q. An approximate solution for a neutral functional differential equation with proportional delays. *Applied Mathematics and Computation* 2015, 260, 27-34.
- [44] Bhrawy, A. H., Assas, L. M. Tohidi, E. Alghamdi, M. A. A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional differential equations with proportional delays. *Advances in Difference Equations*. 2013, doi.org/10.1186/1687-1847-2013-63
- [45] İsmail, T. İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Isparta, 2006, 77 s. (Yüksek Lisans Tezi)
- [46] Vahidi, A. R., Babolian, E., Cordshooli, A.Gh., Azimzadeh, Z. Numerical solution of Fredholm integro-differential equation by Admonian's decomposition method delays. *International Journal of Mathematical Analysis*. 2009, 3, 1769-1773.
- [47] Gegele, O. A., Evans, O P., Akoh, D. Numerical solution of higher order Fredholm integro-differential equations. *American Journal of Engineering Research*. 2014, 3, 243-247.
- [48] Shahooth, M. K., Ahmad, R. R., Din U-KS., Swidan, W., Al-Husseini, O. K., Shahooth, W. K. Approximation solution to solving Volterra-Fredholm integro-differential equations of second kind by using Bernstein polynomials method. *Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2016, 5, 2168-9679.
- [49] Gümgüm, S., Savaşaneril, B.N., Ömür, K.K., Sezer, M.: A numerical technique based on Lucas polynomials together with standard and Chebyshev-Lobatto collocation points for solving functional integro-differential equations involving variable delays. *Sakarya University Journal of Science* 2018, 22(6), 1659-1668.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Alpha Peter LUKONDE

Doğum Yeri ve Yılı : Samfya, 1993

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : [181286001@ogr.cbu.edu.tr](mailto:181286001@ogr.cbu.edu.tr), peterlukonde6.pal@gmail.com

### Eğitim Durumu

Lise : Samfya Lisesi, 2009

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü (devam ediyor)

### Yayınları

#### **Hakemli Kongre/Sempozyum Bildiri Kitaplarında Yer Alan Yayınlar**

- [1] Lukonde A. P., Dönmez Demir D., Sezer M. Bernoulli series approach for a class of Fredholm-type integro- differential equations with proportional delays. Katip Çelebi University, International Students Science Conference, 3-4 May 2019, İzmir.
- [2] Dönmez Demir D., Sınır B. G., Lukonde A. P. Comparison of the solutions of a cracked beam and a stepped beam. Gelişim University, International Conference on Computational Methods in Applied Sciences, 12-16 July 2019, İstanbul.
- [3] Dönmez Demir D., Sınır B. G., Lukonde A. P. Comparison of two hinged-hinged beams with different-type supports. Gelişim University, International Conference on Computational Methods in Applied Sciences, 12-16 July 2019, İstanbul.
- [4] Dönmez Demir D., Sınır B. G., Lukonde A. P. The dynamical behavior of the beam carrying concentrated mass. Karadeniz Technical University, International Civil Engineering & Architecture Conference, 17-20 April 2019, Trabzon.
- [5] Dönmez Demir D., Sınır B. G., Lukonde A. P. A mathematical approximation for the solution of cracked beam model. Karadeniz Technical University, International Civil Engineering & Architecture Conference, 17-20 April 2019, Trabzon.