

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK VE
POTANSİYELİN İNŞAASI**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet AÇIL
DANIŞMAN: Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU

VAN-2018

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK VE
POTANSİYELİN İNŞAASI**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet AÇIL

VAN-2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı' nda Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU danışmanlığında, Mehmet AÇIL tarafından sunulan “TERS STURM-LİOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK VE POTANSİYELİN İNŞAASI” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 02/03/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

İmza:

Üye: Prof. Dr. Hasan BULUT

İmza:

Üye:.. Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hakkı DURU

İmza:

Üye: Doç. Dr. Havva KAVURMACI

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/03/2018 tarih ve 2018/13-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atfı yapıldığını bildiririm.

Mehmet AÇIL

ÖZET

TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK VE POTANSİYELİN İNŞAASI

AÇIL, Mehmet
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU
Mart 2018, 137 sayfa

Bu çalışmada, fiziksel olarak büyük öneme sahip olan Ters Sturm-Liouville Problemi göz önüne alınmıştır. Ters Sturm-Liouville Problemlerinde amaç deneysel olarak elde edilebilen veri yardımı ile q potansiyel fonksiyonunu inşa etmektir. Bu nedenle yapılan çalışmalar genel olarak bu fonksiyonun varlık-teklik incelemesi ve bunu sağlayan veri yardımı ile inşasını içermektedir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde öncelikle problemin fiziksel olarak önemini vurgulayan birkaç örnek verilmiştir. Daha sonra ise sonraki bölümler de ihtiyaç duyulacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmanın tamamında ihtiyaç duyulacak bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra teklik ile ilgili olarak Levinson (1949) ve Hochstadt (1973) tarafından yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu bölümde birçok teklik çalışmasında görülebilecek simetrik potansiyeller için simetriklik kavramı genelleştirilmiştir. Bu genelleştirmedeki ölçüyü veren simetriklik derecesine bağlı olarak, teklik için gerekli olan verinin değişimi incelenmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise potansiyelin inşası problemi göz önüne alınmıştır. Daha sonra nodal nokta olarak adlandırılan öz fonksiyonların sıfırları yardımıyla potansiyelin inşası problemi ile ilgili bilgi verilmiştir. Gerçek hayat problemlerinde verilerin ancak küçük bir kısmı elde edilebilmektedir. Bu nedenle bu bölüm kısmi veri ile potansiyelin inşasına dayanır. Burada bir optimizasyon metodu olan en dik iniş yöntemi ile potansiyelin inşasına çalışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Nodal noktalar, Spektrum, Ters Sturm-Liouville problemi



ABSTRACT

EXISTENCE-UNIQUENESS AND RECONSTRUCTION POTENTIAL IN THE INVERSE STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

AÇİL, Mehmet
Ph.D. Thesis, Mathematics
Supervisor: Prof. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU
March 2018, 137 pages

In this study, firstly the Inverse Sturm-Liouville Problem which has physically great importance is considered. For the Inverse Sturm-Liouville Problems, the purpose is to reconstruct potential function q by helping data which can be obtained experimentally. So generally, studies on this problems include investigation of existence-uniqueness of potential function and reconstruction potential by using data considered.

In the introduction of the first chapter of this work, firstly a few examples which imply the physical importance of problem were given. Then some definitions and theorems which will be needed for next chapters were given.

In the second chapter, some definitions and theorems which will be used in all study were given. Also, the work about the uniqueness of potential done by Levinson (1949) and a generalization of this work done by Hochstad (1973) were considered. In this chapter, by generalizing the notion of symmetric for symmetric potentials which can be seen in many works about uniqueness, the change of data needed depending on the degree of symmetric for uniqueness was discussed.

At the third chapter, reconstruction of potential was considered. Then, the information about the reconstruction problem using zeros of eigenfunction called nodal points was given. These works contain a full set of data whereas a piece of data can be obtained in real life problems. Thus this chapter depends on the reconstruction of potential by using partial data. In this work, The problem was tried to solve by using the method of steepest descent which is an optimization method.

Keywords: Nodal Points, Spectrum, The Inverse Sturm-Liouville Problems



ÖN SÖZ

Yurt içi doktora burs desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkürü borç bilirim. Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım danışmanım Sayın Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU' na şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Doç. Dr. Ali KONURALP hocama ve hesaplamalarımız için teknik desteğinden dolayı Prof. Dr. Eray ÇELİK ve ekibine teşekkür ederim.

2018

Mehmet AÇIL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
SİMGELER.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	4
2. TERS STURM-LİOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK.....	17
2.1. Spektrum ve Öz Fonksiyonların Özellikleri.....	24
2.2. Teklik Teoremleri.....	41
2.3. Simetrik Potansiyeller Üzerine.....	62
2.4. Potansiyelin Varlığı.....	68
3. TERS STURM-LİOUVILLE İNŞAA PROBLEMİ.....	79
3.1. Nodal Veri ile Potansiyelin İnşası.....	79
3.2. Kısmi Veri ile Potansiyelin İnşası	90
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	125
KAYNAKLAR.....	127
EKLER.....	131
ÖZGEÇMİŞ.....	137



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. İkinci dereceden simetrik f fonksiyonu	65
Şekil 3.1. $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ için “Minimize” komutu yaklaşımları.....	99
Şekil 3.2. $Q^1(x)$ için Algoritma-1 yaklaşımları ve $G(q)$ değişimi.....	106
Şekil 3.3. $Q^2(x)$ ve $Q^3(x)$ için Algoritma-1 yaklaşımları	109
Şekil 3.4. $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ için Algoritma-2 yaklaşımları	112
Şekil 3.5. $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ için Algoritma-3 yaklaşımları	123

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar kümesi
$C(a,b)$	(a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
H	Hamiltonyen operatörü
l_p	Mutlak değerlerinin p . kuvvetlerinin toplamı yakınsak
L	Sturm-Liouville operatörü
$L_1(a,b)$	(a,b) aralığında integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$L_2(a,b)$	(a,b) aralığında karesi integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$\nabla G(q)$	$G(q)$ fonksiyonunun gradiyenti
λ_n, α_n	n . öz değer ile n . normlaştırıcı sabit
R^+	Pozitif reel sayılar
$\rho(\lambda)$	Spektral fonksiyon
T	Kinetik enerji
V, q	Potansiyel enerji fonksiyonları olan dizilerin uzayı
W_p^l	Sobolev uzayları
O, o	Landau sembolleri



1. GİRİŞ

$$(p(x)y'(x))' + [r(x) + \lambda\rho(x)]y(x) = 0$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \quad (1.1)$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

Sturm-Liouville sınır değer problemi verilsin. Burada $p(x)$, $p'(x)$, $r(x)$ ve $\rho(x)$ katsayı fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

Bilindiği üzere bu formdaki sınır değer problemleri gerçek fiziksel problemler ile yakından alakalı problemler olup elektronik, jeofizik, sismoloji, meteoroloji, tıp ve çeşitli fiziksel problemlerin çözümünde karşımıza çıkmaktadır. Her probleme has özel sınır şartları veya özel katsayı değerleri ile birbirinden farklı problemlerin çözümünde, bu matematiksel model kullanılmaktadır. Bunlara titreşen sicim problemi ve kuantum mekaniğinde atomların hareketlerinin incelenmesi problemi örnek olarak gösterilebilir.

Titreşen sicim örneği için l uzunluklu, $0 \leq x \leq l$ için $\rho = \rho(x)$ kütle yoğunluklu uçları sabitlenmiş bir sicim göz önüne alınsın. Sicime bir kuvvet uygulandığında titreşim meydana gelir. $0 \leq x \leq l$, $t > 0$ için $v(x, t)$, x ve t 'ye göre yer değiştirme olsun. Bu durumda $v(x, t)$,

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0$$

sınır değer problemini sağlar. $\omega > 0$ olmak üzere,

$$v(x, t) = w(x)[a \cos \omega t + b \sin \omega t]$$

şeklinde ω frekans ayrışımı yapılırsa,

$$w''(x) + \omega^2 \rho(x)w(x) = 0 \quad , \quad w(0) = w(\ell) = 0$$

problemi elde edilir. Bunun için ters problem, $\omega > 0$ frekanslarından ρ kütle yoğunluğunu belirleme problemidir (Kirsch, 2011).

Bir diğer problem ise kuantum mekaniğinde ortaya çıkan, atomların potansiyelinin belirlenmesi problemidir. Bilindiği üzere kuantum mekaniğinde sistemleri analiz eden denklem,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \nabla^2 \Psi + V \Psi$$

Schrödinger denklemidir. Burada \hbar planck sabiti, \tilde{m} parçacık kütlesi, V potansiyel enerji ve $\Psi = \Psi(x, t)$ ise dalga fonksiyonudur. V potansiyel fonksiyonun zamandan bağımsız olduğu varsayımıyla küresel koordinatlarda bu denklem, Associated Legendre fonksiyonları olarak adlandırılan P_l^m fonksiyonları cinsinden,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

çözümüne sahip,

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} = -l(l+1) \sin^2\theta Y$$

açısal denklem ile bazı düzenlemeler ile elde edilen,

$$-\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \frac{l(l-1)}{r^2} \right] u = Eu$$

radial denkleme yol açar. Yukarıda verilen l ve m sabitleri sırasıyla yan kuantum sayılarını ve manyetik kuantum sayılarını temsil etmektedir. Ayrıca $m \geq 0$ için $\varepsilon = (-1)^m$ ve $m \leq 0$ için $\varepsilon = 1$ alınır. Görüldüğü üzere radial denklem bir boyutlu Schrödinger denklemi formatındadır. Bu diferansiyel denklem hidrojen atomu için çözülürse, baş kuantum sayısı n cinsinden,

$$E_n = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} = - \frac{13.6}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

enerji değerlerine ve buna karşılık

$$\psi_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{2}{na} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na} \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

çözümlerine ulaşılır. Burada L_{n-l-1}^{2l+1} birleştirilmiş Laguerre polinomudur. Atom numarası hidrojen atomundan büyük (Z) olan atomlar için ise Schrödinger denklemi, Hamiltonyen

$$H = \sum_{j=1}^Z \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_j^2 - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Ze^2}{r_j} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq k}^Z \frac{e^2}{|r_j - r_k|}$$

olmak üzere,

$$H\psi = E\psi$$

biçimindedir (Griffiths, 2005).

Gerek klasik mekanikte (özel görelilik dahil) gerekse kuantum mekaniğinde göz önüne alınan sistemin kinetik enerjisi sırasıyla $\frac{1}{2}mv^2$ fonksiyonu ve $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ operatörü ile standart olarak verilmektedir. Dolayısıyla hem klasik mekanikte hem de kuantum mekaniğinde kinetik enerji belirlidir. Ancak bu sistemlerin potansiyel enerjisi için böyle bir durum yoktur. Bu nedenle potansiyel enerjinin belirlenmesi problemi ortaya çıkmaktadır. Çünkü yukarıdan da görüldüğü üzere kimi zaman bu mümkün olsa da genel olarak kolay olmayan bir matematiksel problemdir. Yine de göz önüne alınan sistem ile alakalı deneyler sonucunda potansiyel enerji bilinmese de bazı kısmi veriler bulunabilmektedir. Bunun yanında matematiksel olarak bu veriler bazı kısıtlamalar altında asimptotik formüller denilen yaklaşımlarla formülize edilebilmektedir. Bu nedenle elde edilen bu veriler yardımıyla diğer tüm verinin elde edilmesini sağlayan potansiyel enerjii elde etme problemi önem kazanmaktadır. Bu problem genel olarak Ters Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılmaktadır. Burada her ne kadar

problemin, potansiyel fonksiyon denilen fonksiyonun araştırılması olduğu ifade edilse de amaç, verilen veri yardımı ile (1.1) problemindeki katsayıları ve sınır şartlarındaki sabitleri elde etmektir.

Bu çalışmada göz önüne alınacak olan problem, iki nokta ayırık sınır şartlı normal forma sahip Sturm-Liouville problemi için ters problemdir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1. (Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme olsun. $X \times X$ kümesinden negatif olmayan reel sayıların \mathbb{R}^+ kümesinde tanımlı d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir.

1. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
3. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$.

Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir (Garling, 2013).

Tanım 1.2. (Lineer Uzay) E kümesi,

- (a) $\forall x, y \in E$ için $x + y \in E$;
- (b) $\forall x, y \in E$ için $x + y = y + x$;
- (c) $\forall x, y, z \in E$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- (d) $\forall x \in E$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde E kümesinin bir tek sıfır elemanı vardır;
- (e) $\forall x \in E$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde, E kümesinin bir tek $(-x)$ elemanı vardır;

şartlarını sağlıyorsa E 'ye bir toplamsal abel grup denir.

E kümesi,

- (a) $\forall x \in E$ ve herhangi bir λ (kompleks veya reel) skaleri için $\lambda x \in E$;

(b) $\forall x, y \in E$ ve herhangi bir λ skaleri için $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

(c) $\forall x \in E$ ve herhangi bir λ, μ skalerleri için $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

(d) $\forall x \in E$ için $1 \cdot x = x$.

şartlarını sağlıyorsa, E üzerinde bir skaler çarpım tanımlıdır denir.

Eğer E toplamsal Abel grup ve E üzerinde bir skaler çarpım tanımlı ise E ' ye lineer veya vektör uzay denir (Sen, 2012).

Tanım 1.3. (Normlu uzay) Reel veya kompleks bir E vektör uzayı üzerinde bir $x \rightarrow \|x\|$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu fonksiyona bir *norm* denir. Bu şartlar E içindeki x, y vektörleri ve α skaleri için,

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

3. $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

şeklindedir. Bu durumda $(E, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* denir (Garling, 2013).

Tanım 1.4. (Hilbert Uzayı) Bir lineer E vektör uzayı üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow K$ (\mathbb{R} veya \mathbb{C}) dönüşümü tanımlansın. $\forall x, y, z \in E$ ve α skaleri için

- (a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

- (b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

- (c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

şartları sağlansın. Bu durumda $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow K$ dönüşümüne E üzerinde bir iç çarpım, üzerinde tanımlı iç çarpımla birlikte lineer E uzayına ise iç çarpım uzayı denir. Bir tam iç çarpım uzayına ise bir Hilbert uzayı denir. E üzerinde bir iç çarpım,

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \geq 0$$

ile verilen bir norm tanımlar. Bu nedenle iç çarpım uzayları, normlu lineer uzaylardır (Sen, 2012).

Tanım 1.5. ($L_2[a, b]$ Uzayı) $[a, b]$ aralığında tanımlı ölçülebilir ve karesi integrallenebilir yani,

$$\int_a^b |f(x)|^2 < \infty$$

özelliğindeki kompleks değerli fonksiyonların oluşturduğu uzaya, $L_2[a, b]$ uzayı denir.

Bu uzay üzerinde iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

ile tanımlanır. Bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu,

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

metriği kullanılarak gösterilebilir (Sen, 2012).

Tanım 1.6. (ℓ_2 Uzayı) Bu uzay,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

özelliğindeki kompleks sayıların sonsuz dizilerinin oluşturduğu uzaydır. Bu uzay

$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in \ell_2$ ve $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots) \in \ell_2$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}$$

ile tanımlı iç çarpımı ile birlikte bir Hilbert uzayıdır (Sen, 2012).

Tanım 1.7. ($C[a, b]$ Uzayı) $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli tüm reel veya kompleks değerli fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C[a, b]$ uzayı denir (Yılmaz, 2012).

Tanım 1.8. (Mutlak Süreklilik) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon $[a, b]$ üzerinde hemen hemen her yerde f' türevine sahip, integrallenebilir ve bu aralıktaki tüm x değerleri için $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ ise fonksiyon mutlak süreklidir denir. Tersine $g, [a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir ise $f(x) = \int_a^x g(t) dt$, mutlak süreklidir ve hemen hemen her yerde $f' = g$ sağlanır (Pöschel ve Trubowitz, 1987).

Tanım 1.9. (Sobolev Uzayı) $W_p^l(\Omega)$ Sobolev uzayları, Ω üzerinde tanımlı $l-1$ mertebeye kadar mutlak sürekli türevlere sahip ve l mertebeye kadar türevleri $L^p(\Omega)$ kümesine ait olan fonksiyonlar uzayıdır (Marchenko, 1986). Özel olarak $W_2^1(\Omega) = H^1$ kullanımı mevcuttur.

Tanım 1.10. (Lineer Operatörler) H bir Hilbert uzayı ve $T: H \rightarrow H$, bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ ve tüm λ skalerleri için

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \text{ ve } T(x + y) = T(x) + T(y)$$

oluyorsa bu dönüşüme bir *lineer operatör* denir. Lineer operatörler genellikle L ile gösterilir.

Eğer $\forall x \in H$ için

$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$

olacak şekilde bir $C < \infty$ sabiti varsa operatöre *sınırlı operatör* aksi takdirde *sınırsız operatör* denir. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan en küçük $C \geq 0$ sayısına T operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir. H Hilbert uzayındaki tüm sınırlı lineer operatörler $B(H)$ ile gösterilir.

Eğer $\forall x, y \in H$ için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

ise $T : H \rightarrow H$ operatörüne self-adjoint operatör denir. Self-adjoint operatörler kapalıdır yani $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in H\}$ ile tanımlı grafiği kapalıdır.

Bir $T \in B(H)$ operatörü için eğer $R(T) = \{Tx : x \in H\}$ kümesi sonlu boyutlu ise operatöre sonlu ranka sahiptir denir. T operatörünün rankına boyut denir.

Bir $T \in B(H)$ operatörü için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$$

olacak şekilde sonlu boyutlu T_n operatörlerinin bir dizisi mevcut ise $T \in B(H)$ operatörüne kompakttır denir (Chadan ve ark., 1997).

Tanım 1.11. (Öz Değer – Öz Fonksiyon) H bir Hilbert uzayı ve $T, D(T) \subset H$ üzerinde tanımlı bir lineer operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere eğer $Ty = \lambda y$ olacak şekilde bir $y \in D(T)$ mevcut ise, yani $\lambda I - T$ birebir λ sayısına T operatörünün bir öz değeri, $y \in D(T)$ elemanına ise λ öz değerine karşılık gelen öz fonksiyon denir (Weidmann, 1980).

Tanım 1.12. (Spektrum) $T : D(T) \subset H \rightarrow H$, bir H Hilbert uzayında sınırlı veya sınırsız bir lineer operatör olsun. $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ olmak üzere,

(a) $R_\lambda(T)$ mevcut;

(b) $R_\lambda(T)$ sınırlı;

(c) $R_\lambda(T)$, H uzayında yoğun olan bir küme üzerinde tanımlı

olacak şekilde bir λ kompleks sayısına, T operatörünün bir *regüler değeri* denir. T operatörünün tüm regüler değerlerinin kümesine, T operatörünün *resolvent kümesi* denir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. Rezolvent kümesinin tümleyeni olan $\rho(T) = \mathbb{C} / \sigma(T)$ kümesine de T operatörünün *spektrumu* denir.

$\rho(T)$ spektrumu aşağıdaki gibi üç ayrık kümeye ayrılır:

1. $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekilde λ değerlerinin kümesine $\rho_p(T)$ *nokta* veya *ayrık spektrum* denir. Bu durumda $\lambda \in \rho_p(T)$ elemanı T operatörünün bir öz değeridir.
2. $R_\lambda(T)$, (a) ve (c) özelliğini sağlayacak ancak (b) özelliğini sağlamayacak şekilde λ değerlerinin kümesine $\rho_c(T)$ *sürekli spektrum* denir.
3. $R_\lambda(T)$, (a) özelliğini sağlayacak, (c) özelliğini sağlamayacak şekilde λ değerlerinin kümesine $\rho_r(T)$ *rezidual spektrum* denir.

Yanlış anlamalardan kaçınmak için bu tanımlardaki kümelerin boş küme olabileceği hatırlatılmalıdır. Örnek olarak sonlu boyutlu durumda $\rho_c(T) = \rho_r(T) = \emptyset$ olur (Kreyszig, 1978).

Tanım 1.13. (Regüler Sturm-Liouville Problemi) Aşağıdaki

$$(p(t)y'(t))' + [\xi \rho(t) - g(t)]y(t) = 0 \quad (1.1.2)$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \quad (1.1.3)$$

problemi göz önüne alınsın. Burada $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$ olup bu probleme *Sturm-Liouville sınır değer problemi* denir. Eğer bu problem için

1. $i=1,2$ olmak üzere a_i, b_i sayıları reel sayılardır;

2. p, g ve ρ katsayıları, uç noktaları da içeren her yerde reel ve süreklidir;
3. Uç noktalar dahil her yerde $p, \rho > 0$ sağlanır;

şartları sağlanıyorsa bu probleme *regüler Sturm-Liouville problemi* denir. Problem regüler değil ise *singüler Sturm-Liouville problemi* olarak adlandırılır (Njue, 2003).

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\rho(t)}{p(t)}}, \quad f(t) = [p(t)\rho(t)]^{1/2}, \quad \mu = \int_a^b \sigma(s) ds,$$

olmak üzere,

$$x(t) = \frac{1}{\mu} \int_a^t \sigma(s) ds \quad \text{ve} \quad u(x) = f(t(x))y(t(x))$$

monoton $x: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ ve $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dönüşümleri göz önüne alınsın. Bu dönüşümlere *Liouville dönüşümü* denir. Bu dönüşümler vasıtasıyla (1.2)-(1.3) sınır değer problemi normal formda Sturm-Liouville Problemi olarak adlandırılan

$$u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0$$

$$u'(0) - hu(0) = 0, \quad u'(1) - Hu(1) = 0$$

sınır değer problemine dönüşür. Burada

$$\lambda = \mu^2 \xi, \quad q(x) = \mu^2 \left[\frac{g(t)}{\rho(t)} + \frac{f(t)}{\rho(t)} \left(\frac{p(t)f'(t)}{f^2(t)} \right) \right]_{t=t(x)}$$

ve

$$h = \frac{a_1 f'(a) - a_2 f(a)}{a_1 \sigma(a) f(a)}, \quad H = \frac{b_2 f(b) - b_1 f'(b)}{b_1 \sigma(b) f(b)}$$

şeklindedir (Kirsch, 2011).

Yukarıda verilen $-u'' + q(x)u = \lambda u$ denkleminde görülen

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

operatörüne *Sturm-Liouville operatörü* denir.

Tanım 1.14. (Nodal Nokta Kümesi) (1.1.2)-(1.1.3) öz değer probleminin nodal nokta verisi, $(0,1)$ aralığında $y_n(x)$ öz fonksiyonunun köklerinin $\{x_n^j\}_{n \geq 2}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ kümesidir. Yani $\{x_n^j\} = \{n.\text{özfonksiyon } y_n(x) \text{ 'in } j. \text{ kökü} : j = 1, 2, \dots, n-1\}$ (Njue, 2003).

Lemma 1.1. (Riemann-Lebesgue Lemması) (a, b) sonlu bir aralık ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

olur (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 1.15. (Analitik Fonksiyon) Bir $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bir $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesindeki her z noktasında $f'(z)$ mevcut ise bu fonksiyona \mathfrak{R} bölgesinde *analitik bir fonksiyon* denir. Eğer bir f fonksiyonu bir $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ise bu bölgede f'' , f''' , ... yüksek mertebeden türevleri de mevcuttur (Murray, 1999).

Bu fonksiyonlar için holomorfik fonksiyonlar ismi de kullanılır. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara *tam (entire)* fonksiyonlar denir.

Bu sonuç kompleks değişkenli fonksiyonlara has olup klasik analitik fonksiyon tanımı ile yani yakınsak bir kuvvet serisi ile verilebilen fonksiyon ile bağlantıyı sağlar.

Teorem 1.2. (Maksimum Modül Teoremi) Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı bir C eğrisi üzerinde ve içinde, analitik ve bir sabite eşit değilse, bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini C eğrisi üzerinde alır (Murray, 1999).

Teorem 1.3. (Liouville Teoremi) Bir $f(z)$ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde analitik ve sınırlı olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu sabittir (Murray, 1999).

Teorem 1.4. (Rouche Teoremi) $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları $U \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesi üzerinde holomorfik fonksiyonlar, $\overline{D}(P, r) \subseteq U$ ve her bir $\xi \in \partial D(P, r)$ için

$$|f(\xi) - g(\xi)| < |f(\xi)| + |g(\xi)|$$

olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} d\xi .$$

Yani $D(P, r)$ yuvarında f fonksiyonunun katlı kökler dahil sıfırlarının sayısı, yine bu yuvarda g fonksiyonunun katlı kökler dahil, sıfırlarının sayısına eşittir (Krantz, 1999).

Teorem 1.5. (Laurent Teoremi) Sırasıyla r_1 ve $r_1 > r_2$ olmak üzere r_2 yarıçaplı a eşmerkezli C_1 ve C_2 çemberlerinin oluşturduğu halka biçimindeki \mathfrak{R} bölgesi göz önüne alınsın. Eğer $f(z)$ fonksiyonu \mathfrak{R} bölgesinin içerisinde ve sınırında analitik ise

bu durumda bölgede içinde $n = 0, 1, \dots$ için $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$ ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw \text{ olmak üzere, } \forall z \text{ için}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

açılımı yapılabilir (Murray, 1999).

Bu açılıma Laurent seri açılımı denir. Açılımdaki ilk seriye analitik kısım değerine ise

esas (temel) kısım denir. Eğer temel kısım $\sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ biçiminde ise bu takdirde $f(z)$

fonksiyonu $z = a$ noktasında k . mertebeden bir kutup noktasına sahiptir denir. Özel olarak $k = 1$ ise bu takdirde bu singüler noktaya basit kutup denir. Ayrıca a_{-1}

katsayısına $f(z)$ fonksiyonunun, $z = a$ noktasındaki rezidüsü denir ve $\text{Re } z(f(z), a)$

ile gösterilir. Eğer $z = a$, k . mertebeden bir kutup noktası ise bu durumda

$$a_{-1} = \operatorname{Re} z(f(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-a)^k f(z) \right\}$$

ile verilir. Buradan özel olarak $k=1$ için $\operatorname{Re} z(f(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$ olduğu kolaylıkla görülebilir (Murray, 1999).

Teorem 1.6. (Rezidü Teoremi) $U \subseteq \mathbb{C}$ kümesinin \mathbb{C} 'de basit bağlantılı açık bir küme ve P_1, P_2, \dots, P_n noktalarının U kümesinde ayrık noktalar olduğu varsayalım. $f: U - \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ bir holomorfik fonksiyon ve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, U kümesinde parçalı bir C^1 eğrisi olsun. Bu takdirde,

$$\oint_{\gamma} f = \sum_{j=1}^n \left\{ \operatorname{Re} z_f(P_j) \oint_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - P_j} \right\}$$

Eğer $P_j \notin \gamma([a, b])$ ve γ , pozitif yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri ise,

$$\oint_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} z_f(P_j)$$

şeklindedir (Krantz, 1999).

Teorem 1.7. C_1 ve C_2 biri diğ erinin içinde kalan pozitif yönlendirilmiş basit kapalı eğriler olmak üzere f fonksiyonu bu eğriler ile sınırlanmış bölgede ve üzerlerinde analitik olsun. Bu durumda

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

olur (Murray, 1999).

Tanım 1.16. (Büyük O Notasyonu) 1892 yılında Alman matematikçi Bachmann, “*Analytische Zahlentheorie*” adlı kitabında fonksiyonların asimptotik davranışlarını karakterize etmek için yeni bir notasyon geliştirmiştir. Bachmann’ ın bu keşfi daha sonraki yıllarda “*Big Oh*” notasyonu olarak adlandırılmıştır. Bu gösterim bir başka

Alman matematikçi Landau tarafından yaygın kullanıma sunulmuştur. Bundan dolayı bu sembole Landau sembolü de denir.

$\forall n \geq 0$ tam sayısı için $f(n)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cg(n)$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı ve $C > 0$ sabiti varsa, $f(n) = O(g(n))$ yazılır. Büyük O notasyonunun bazı matematiksel özellikleri aşağıdaki şekildedir.

a. $f_1(n) = O(g_1(n))$ ve $f_2(n) = O(g_2(n))$ olsun.

i) $f_1(n) + f_2(n) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$;

ii) $O(f_1(n)) \cdot O(f_2(n)) = O(f_1(n), f_2(n))$;

iii) $O(kf_1(n)) = O(f_1(n))$, $k \neq 0$;

iv) $O(k + f_1(n)) = O(f_1(n))$;

v) $f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$.

b. $f_1(n)$ ve $f_2(n)$ fonksiyonları $\forall n \geq 0$ tam sayısı için pozitif fonksiyonlar olmak

üzere, $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ ve $L \geq 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = L$ olsun. Bu durumda

$f(n) = O(f_1(n))$ şeklindedir.

c. $f(n) = O(g(n))$ ve $g(n) = O(h(n))$ ise $f(n) = O(h(n))$ şeklindedir.

d. $f(n)$ ve $g(n)$ sonlu bir aralık üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ve $n \geq n_0$

için $f(n) = O(g(n))$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{n_0}^n f(y) dy = O\left(\int_{n_0}^n |g(y)| dy\right) , \quad n \geq n_0 .$$

e. $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere, $f_i(n) = O(g_i(n))$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^k f_i(n) = O\left(\sum_{i=1}^k |g_i(n)|\right).$$

f. Verilen bir h fonksiyonu için

i) $\frac{1}{1 + O(h(n))} = 1 + O(h(n))$;

$$ii) \quad \log[1+O(h(n))] = O(h(n));$$

$$iii) \quad \exp[O(h(n))] = 1+O(h(n))$$

şeklindedir (Yılmaz, 2012).

Tanım 1.17. (Küçük o Notasyonu) $f(n) \in o(g(n))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

olmasıdır. Bu asimptotik olarak ihmal edilebilir anlamına gelir. Sezgisel olarak bunun anlamı $n \rightarrow n_0$ iken $g(n)$ fonksiyonunun $f(n)$ fonksiyonundan çok daha hızlı büyümesidir. Küçük o notasyonu için

$$a. \quad o(f) + o(f) \in o(f)$$

$$b. \quad o(f)o(g) \in o(fg)$$

$$c. \quad o(o(f)) \in o(f)$$

$$d. \quad o(f) \in O(f)$$

özellikleri mevcuttur (Yılmaz, 2012).

Tanım 1.18. (Birinci Mertebe Sistemlerin Çözümü) I herhangi bir aralık, $n, m \in \mathbb{N}$ ve $M_{n,m}(\mathbb{C})$ kompleks değerli $n \times m$ ' lik bir matris olmak üzere, $P: I \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{C})$, $F: I \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{C})$ olsun. I üzerinde

$$Y' = PY + F$$

denkleminin bir çözümü, I üzerinde hemen hemen her yerde denklemi sağlayan ve I aralığının tüm kompakt alt aralıkları üzerinde mutlak sürekli olan bir $Y: I \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{C})$ fonksiyonudur. Eğer bir matrisin bileşenlerinin her biri mutlak sürekli ise bu matris mutlak süreklidir (Zettl, 2005).

Teorem 1.8. (Varlık ve Teklik) I herhangi bir aralık, $n, m \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$P \in M_{n,n}(L_{loc}(I, \mathbb{C})) \quad , \quad F \in M_{n,m}(L_{loc}(I, \mathbb{C}))$$

ise her

$$Y' = PY + F \quad , \quad Y(u) = C \quad ; \quad (u, C) \in I \times M_{n,m}(\mathbb{C})$$

başlangıç değer problemi, I aralığının tamamında tanımlı bir tek çözüme sahiptir (Zettl, 2005).

Teorem 1.9. (Stolz-Cesáro Teoremi) (y_n) artan pozitif reel bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ olsun. Bu durumda bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L$$

ise bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$$

limiti mevcut ve L değerine eşittir (Gelcu ve Andreescu, 2007).

Teorem 1.10. (Weierstrass Temsil Teoremi) f , kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir P polinomu mevcuttur (Jeffreys ve Jeffreys, 1988).

2. TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK

Bu bölümde öncelikle kısaca problemin tarihsel gelişiminden söz edilecektir. Sonrasında ters problemin doğasını daha iyi anlayabilmek için ilgili operatörün spektrumunun ve öz fonksiyonlarının özelliklerine bakılacaktır. Daha sonra ise öncelikle potansiyel fonksiyonunun varlık ve tekliği ile alakalı olarak literatürde önem arz eden birkaç çalışma verilerek problemin çözümü için izlenen yollar ele alınacaktır. Bu çalışmalarda genel olarak gerekli düzgünlük şartlarını sağlayan potansiyel fonksiyon göz önüne alınırken özel olarak tanımlı olduğu aralığın orta noktasına göre simetrik olan potansiyel fonksiyonu durumu da verilecektir. Bu çalışmalar ışığında potansiyelin simetrikliği üzerine bir genelleştirme yapılarak potansiyelin tekliği için gerekli olan verinin değişimi incelenecektir. Bölümün son kısmında ise iki sayı dizisi verildiğinde hangi şartlar altında potansiyel fonksiyonun mevcut olduğu verilecektir.

Ters Sturm-Liouville probleminin, modern anlamda ilk kez Ambartsumyan tarafından 1929 yılında yapılan çalışma ile ortaya çıktığı kabul edilmektedir. Bu çalışmada Ambartsumyan,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad ; \quad y'(0) = y'(1) = 0$$

Sturm-Liouville sınır değer problemini ele almış ve bu problemin öz değerleri $\lambda_n = n^2 \pi^2$ olduğunda $q(x) = 0$ olacağını göstermiştir (Chadan ve ark., 1997). Bu çalışma doğal olarak Sturm-Liouville problemlerinde $q(x)$ ile verilen potansiyelin, öz değerlerin kümesinden belirlenip belirlenemeyeceği sorusunu ortaya çıkarmıştır. Bu probleme, Ters Sturm-Liouville problemi denir.

Borg 1946 yılında, $H \neq H'$, $q \in L_2$ ve $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere potansiyel fonksiyonunun,

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y = 0$$

$$y'(0) - hy'(0) = y'(1) - Hy'(1) = 0$$

ve

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y = 0$$

$$y'(0) - hy'(1) = y'(1) - H'y'(1) = 0$$

sınır değer problemlerinin sırasıyla $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ spektrumları ile tek şekilde belirli olduğunu göstermiştir. Borg, ayrıca $h = H$ ve q potansiyel fonksiyonu orta noktaya göre simetrik ise $\{\lambda_n\}$ spektrumunun potansiyel fonksiyonunu belirlemede yeterli olduğunu göstermiştir (Chadan ve ark., 1997).

Levinson (1949), Borg' un ele aldığı problemi göz önüne alarak ispatı basitleştirmiştir. Levinson burada kompleks analiz tekniklerini kullanmıştır.

Marchenko 1950 yılında, Borg' un ele aldığı problem için iki spektrumun potansiyel fonksiyonun yanı sıra h , H ve H' sabitlerini de belirlemek için yeterli olduğunu göstermiştir (Chadan ve ark., 1997).

Gelfand ve Levitan (1951), $\{\lambda_n\}$ öz değerlerin kümesinin ve

$$\rho_n(q) = \frac{\|y(\cdot, q, \lambda_n)\|^2}{\|y(0, q, \lambda_n)\|^2}$$

olmak üzere $\{\rho_n\}$ normlama sabitlerinin kümesinin, q potansiyel fonksiyonunu tek şekilde belirlemek için yeterli olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışma, spektrum dışında farklı verilerin de kullanılabilceğini göstermesi bakımından önem arz etmektedir.

Marchenko (1952), aynı problem için $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun Sturm-Liouville formundaki diferansiyel operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şartı ifade etmiştir. Burada $\varphi(x, \lambda)$, (1.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 0 \quad , \quad \varphi'(0, \lambda) = h,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n)$ bu problemin öz fonksiyonları ve

$$a_n = \int_0^\pi \varphi_n^2(x, \lambda_n) dx$$

normlaştırıcı sabitleri olmak üzere, $\rho(\lambda)$ fonksiyonu

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{a_n}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Levitan ve Gasymov (1964) tarafından yapılan bir çalışmada, Gelfand ve Levitan (1951) tarafından yapılan çalışmanın yeni araçlarla yeniden düzenlenmesi yanında hem iki spektrum için hem de bir spektrum ile normlaştırıcı sabitlerin kümesi kullanılarak varlık ve teklik ele alınmıştır.

Hochstadt (1973) tarafından bir tam spektrum ve bir kısmi spektrum durumu incelenmiştir. Burada kısmi spektrumdan kasıt sonlu sayıda elemanı bilinmeyen spektrumdur. Hochstadt bu durumda q potansiyel fonksiyonun, gerçek potansiyelden özel sınır şartlarına sahip çözümlerin çarpımlarının bilinmeyenler sayısı üzerinden toplamı kadar farklılaşacağını göstermiştir. Bu ise potansiyelin belirliliğinin iki spektrum gerektirdiğini gösteren bir diğer çalışma olarak gösterilebilir.

Hald (1978), Ters Sturm- Liouville problemini sonlu sayıda lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgemeye çalışarak problemin çözümü için bir algoritma sundu.

Hochstadt ve Liebermann (1978), eğer potansiyel fonksiyonu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında belirli ise tek bir spektrumun aralığın geri kalanında potansiyeli belirlemek için yeterli olduğunu gösterdiler. Bu tarz problemlere literatürde yarı- ters problemler denir.

McLaughlin (1986), titreşen bir sicim problemini göz önüne almış, serbest ucuna verilen etki ve karşılık gelen tepki ile spektrum ve normlaştırıcı sabitleri arasındaki ilişkisini veren bir formülasyona yer vermiştir. Ayrıca dördüncü mertebeden bir ters öz değer problemini araştırmıştır.

McLaughlin ve Rundell (1987), sonlu limit noktasına sahip $\{H_j\}$ dizisinin elemanları ile belirli sınır şartlarına sahip Sturm- Liouville problemlerini göz önüne almış ve bu şartlarla oluşan N -inci öz değerlerin oluşturduğu $\{\lambda_N(H_j)\}_{j=1}^{\infty}$ kümesi kullanılarak potansiyelin tek şekilde belirlenebileceğini gösterdiler.

Guseinov ve Nabiev (1995) çalışmalarında

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x)$$

$$y(0) + \omega y(\pi) = 0, \quad \bar{\omega} y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

problemini göz önüne almıştır. Bu problem (q, ω, α) ile gösterilmek üzere reel sayıların iki dizisinin, $|\omega| = 1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $(q, \omega, \alpha_1), (q, \omega, \alpha_2)$ sınır değer problemlerinin spektrumu olması için gerek ve yeter şartı vermiştir.

Browne ve Sleeman (1997), $ad - bc > 0$, $c \neq 0$ olmak üzere,

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x)$$

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha y'(0) = 0$$

$$(a\lambda + b)y(1) - (c\lambda + d)y'(1) = 0$$

öz parametre bağımlı sınır koşulları ile birlikte Ters Sturm-Liouville problemini göz önüne almıştır. Öz değerlerin ve uygun olarak tanımlanmış normlama sabitlerinin q potansiyelini belirlediğini göstermişlerdir. Aynı zamanda $ad - bc = 0$, $c = 0$ durumunu da tartışmışlardır.

Guseinov ve Nabiev (2000), $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ ve $p(x) \neq 0$, $\omega \neq 0$ olmak üzere,

$$-y''(x) + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y(x) = 0$$

$$\beta y(0) + y'(0) + \omega y(\pi) = 0$$

$$-\bar{\omega} y(0) + \gamma y'(\pi) + y'(\pi) = 0$$

problemini inceleyerek problem için spektral veri ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Binding, Browne ve Watson (2002), tanımsız ağırlıklı (tek işaretli olmayan) Ters Sturm-Liouville problemini göz önüne almış ve bu durum için Hochstadt ile Gelfand-Levitan'ın teoremlerinin benzerlerini ispatlamışlardır. Ayrıca uygun simetri koşulları altında yarım spektrumun potansiyel fonksiyonu tek şekilde belirlediğini göstermişlerdir.

Hryniv ve Mykytyuk (2003), $W_2^{-1}(0,1)$ uzayından alınan singüler reel değerli potansiyellere (yani $q = \sigma'$, $\sigma \in L_2(0,1)$) sahip Sturm-Liouville operatörleri için ters spektral problemi göz önüne almışlardır. Öz değerlerin kümesi ve karşılık gelen normlaştırıcı sabitler ile potansiyel incelenmiş, bir yapılandırma algoritması verilmiş ve bu yapılandırma algoritmasının kararlılığı incelenmiştir.

Volkmer ve Zettl (2007) çalışmalarında sonlu spektrumlu Ters Sturm-Liouville problemini göz önüne almışlardır. Yazarlar çalışmalarında $J = (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma = \{\lambda_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ reel dizisi verildiğinde, bu diziyi spektrum olarak kabul eden,

$$-(py')' + qy = \lambda wy$$

$$\cos \alpha y(a) - \sin \alpha (py')(a) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\cos \beta y(b) - \sin \beta (py')(b) = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

biçiminde bir regüler self adjoint Sturm-Liouville probleminin mevcut olduğunu göstermişlerdir. Burada $\frac{1}{p}, q, w \in L^1(J, \mathbb{R})$ şeklindedir. Aynı yıl Makin (2007), $(0, \pi)$ aralığı üzerinde $B_i(u)$ ($i = 1, 2$) kompleks katsayılı lineer bağımsız formlar ve q , $L_2(0, \pi)$ sınıfından keyfi kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$B_i(u) = a_{i1}u'(0) + a_{i2}u'(\pi) + a_{i3}u(0) + a_{i4}u(\pi) = 0$$

iki-nokta sınır koşuluna sahip

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0$$

problemini göz önüne almıştır. Bu çalışmada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$A(ij)$, A 'nin i . ve j . kolonlarından oluşan matris ve $A_{ij} = \det A(ij)$ olmak üzere,

$$I. A_{14} \neq A_{23} \quad \text{ve} \quad A_{34} = 0;$$

$$II. A_{14} \neq A_{23} \quad \text{ve} \quad A_{34} \neq 0.$$

durumları için ters problem analiz edilmiştir. Yine bu yıl Rafler ve Böckmann (2007), süreksiz potansiyelli Ters Sturm-Liouville problemini incelemişlerdir. Yazarlar bu çalışmada Rundel-Sacks algoritmasını genelleştirerek ters problemi çözmek için bir metot vermişlerdir. Burada göz önüne alınan süreksizlik sıçramalı süreksizlik biçiminde olup aynı zamanda metodun yakınsaklık özellikleri de araştırılmıştır. Bunun yanı sıra çalışma nümerik örneklerle de desteklenmiştir.

Kammanee ve Böckmann (2009) yaptıkları çalışmada Ters Sturm- Liouville problemi için öz değerlerin bilgisinden simetrik ve non-simetrik potansiyelleri yapılandırmak için yeni bir metot önerip öz değerlerin asimptotik formları için yeni bir yaklaşım vermişlerdir.

Wang (2011), öz parametre bağımlı sınır koşulları için Sturm-Liouville problemini göz önüne almış ve iki spektrum parçası ile $(0, \pi)$ aralığının bazı noktalarında öz fonksiyonların değerlerinin bir kümesinin, q potansiyel fonksiyonunu ve $\frac{a_1\lambda + b_1}{c_1\lambda + d_1}$, $\frac{a_2\lambda + b_2}{c_2\lambda + d_2}$ katsayılarını tek şekilde belirleyeceğini göstermiştir.

Shahriari ve arkadaşları (2012), iç noktalarda sonlu sayıda süreksizliğe sahip Sturm-Liouville operatörü için genel süreksizlik şartlarını kullanarak çeşitli teklik sonuçları elde etmişlerdir. Bu çalışmada Robin ve öz parametre bağımlı sınır koşullarını ele almışlardır.

Wang ve arkadaşları (2013), Robin şartlı Ters Sturm-Liouville problemi için $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere, q potansiyeli $[0, \alpha]$ üzerinde belirli ise kısmi bilgi ile potansiyelin $[0,1]$ aralığının tamamında tek şekilde belirli olacağını göstermişlerdir. Buradaki kısmi bilgi, öz değerlerin ikililerinin bir alt kümesi ve öz değerlere karşılık gelen ağırlık sayılarıdır. Yine aynı yıl Güldü (2013), (a, b) aralığında, aralığın iç noktalarında iki süreksiz noktaya ve öz parametre bağımlı sınır koşullarına sahip Ters Sturm-Liouville problemini göz önüne almıştır. Bu çalışmada, süreksizlik şartları ile birlikte kurulmuş probleme karşılık yeni bir öz değer problemi oluşturulacak simetrik bir operatör kurulmuş ve daha sonra ise bu operatörün asimptotik davranışları

vasıtasıyla öz değer ve öz fonksiyonlar araştırılmıştır. Son olarak spektral veri (öz değer ve normlaştırıcı sabitler) ve Weyl fonksiyonu kullanılarak bazı teklik teoremleri çalışılmıştır.

Guo ve Wei (2014) çalışmalarında $[0,1]$ aralığının bir iç alt aralığında belirli potansiyelli ters Sturm-Liouville problemini göz önüne almışlar ve bilinen öz değerler ile öz fonksiyonların aralığın bazı iç noktalarındaki bilgisi vasıtasıyla, potansiyelin ve sınır koşulların tek şekilde belirli olduklarını göstermişlerdir. Ayrıca q potansiyel fonksiyonunun C^{2k} sınıfından olduğu durumu incelemişlerdir.

Sadovnichy ve arkadaşları (2016) çalışmalarında,

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

$$a_{11}y(0) + y'(0) + a_{13}y(\pi) = 0$$

$$a_{13}y(0) + a_{23}y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

ve

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$

$$a_{11}y(0) + y'(0) = 0,$$

$$y(\pi) = 0.$$

problemlerini göz önüne almış ve bu problemler için varlık ve teklik teoremlerini ispatlamışlardır. Burada kullanılan veri, iki spektrum ve iki öz değerdir.

Sonraki kısımlara geçmeden önce ele alınacak problemlerin çalışıldıkları sonlu aralıkların problem açısından önemli olmadığı gösterilmesi amacıyla, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-u''(x) + (\lambda - q(x))u(x) = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a) + hu(a) = 0, \quad u(b) + Hu(b) = 0$$

problemi ve (a,b) ile (c,d) aralıkları arasında bir homeomorfizma olduğu görülen

$$y(x) = (a-b)^{-1} [(c-d)x + ad - bc] \text{ dönüşümü verilsin.}$$

Bu durumda türev alma ile $\tilde{u}(y) = u\left((c-d)^{-1}\{(a-b)y + bc - ad\}\right)$, $\tilde{\lambda} = \left(\frac{c-d}{a-b}\right)^2 \lambda$

ve $\tilde{q}(y) = \left(\frac{c-d}{a-b}\right)^2 q\left((c-d)^{-1}\{(a-b)y + bc - ad\}\right)$ olmak üzere y değişkeni cinsinden,

$$-\tilde{u}''(y) + (\tilde{\lambda} - \tilde{q}(y))\tilde{u}(y) = 0, \quad c \leq y \leq d$$

$$\tilde{u}(c) + h\tilde{u}'(c) = 0, \quad \tilde{u}(d) + H\tilde{u}'(d) = 0$$

denk problemi elde edilir.

2.1. Spektrum ve Öz Fonksiyonların Özellikleri

Şimdi (1.1.2)-(1.1.3) probleminin bir özel hali olan aşağıdaki

$$L[y] = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \quad (2.1.1)$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (2.1.2)$$

sınır değer probleminin aşık olmaya çözümleri göz önüne alınsın. Bu problem $L = L(q(x), h, H)$ ile gösterilecektir. Burada λ , bir spektral parametre, $q(x) \in L_2(0, \pi)$ ve h ile H ise reel sabitlerdir. Bu kısımda L 'nin en basit spektral özellikleri verilecek ve öz değerler ile öz fonksiyonların asimptotik davranışları incelenecektir. $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$, (2.1.1)'in

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (2.1.3a)$$

$$\psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H \quad (2.1.3b)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Daha sonra gösterileceği üzere bu çözümler, λ parametresinin tam (her yerde analitik) fonksiyonlarıdır. Burada dikkat edilirse,

$$U(\varphi) := \varphi'(0, \lambda) - h\varphi(0, \lambda) = 0 \quad , \quad V(\psi) := \psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) = 0 \quad (2.1.4)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(\psi, \varphi) &= \frac{d}{dx} \{ \psi\varphi' - \varphi\psi' \} = \psi\varphi'' - \varphi\psi'' \\ &= \{q(x) - \lambda\} \psi(x)\varphi(x) - \{q(x) - \lambda\} \varphi(x)\psi(x) = 0 \end{aligned}$$

yani $W(\varphi, \psi)$ Wronskiyanı x değişkeninden bağımsızdır (Titchmarsh, 1962).

$$\begin{aligned} W(\psi, \varphi) &= \psi(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\psi'(x, \lambda) \\ &= \psi(\pi, \lambda)\varphi'(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda)\psi'(\pi, \lambda) = \omega(\lambda) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

ile tanımlanan $\omega(\lambda)$ fonksiyonuna L 'nin karakteristik fonksiyonu denir. (2.1.5) eşitliğinden $\omega(\lambda)$ fonksiyonunda λ parametresinin bir tam fonksiyonu olduğu görülür. Aynı zamanda $x = \pi$ ve $x = 0$ noktalarında,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \psi(\pi, \lambda)\varphi'(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda)\psi'(\pi, \lambda) \\ &= \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = V(\varphi) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \psi(0, \lambda)\varphi'(0, \lambda) - \varphi(0, \lambda)\psi'(0, \lambda) \\ &= h\psi(0, \lambda) - \psi'(0, \lambda) = -U(\psi) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

olduğu görülür (Freiling ve Yurko, 2001).

Teorem 2.1.1. $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun $\{\lambda_n\}$ sıfırları, $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer probleminin öz değerleri ile çakışır. Ayrıca $\varphi(x, \lambda_n)$ ile $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları öz fonksiyonlar olup

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n) \quad , \quad \beta_n \neq 0$$

olacak şekilde bir $\{\beta_n\}$ dizisi mevcuttur (Freiling ve Yurko, 2001).

İspat: λ_{n_0} , $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun bir sıfırı olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\lambda_{n_0}) = \psi(x, \lambda_{n_0})\varphi'(x, \lambda_{n_0}) - \varphi(x, \lambda_{n_0})\psi'(x, \lambda_{n_0}) \\ &= \begin{vmatrix} \varphi(x, \lambda_{n_0}) & \psi(x, \lambda_{n_0}) \\ \varphi'(x, \lambda_{n_0}) & \psi'(x, \lambda_{n_0}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

olur. Yani her n için $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n)$, $\beta_n \neq 0$ olacak şekilde bir $\{\beta_n\}$ dizisi mevcuttur. Aynı zamanda (2.1.6) ve (2.1.7) eşitliklerinden $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonlarının, (2.1.2) sınır koşullarını sağlayacağı görülür. Böylece her n için λ_n bir öz değer ve bu öz değerlere karşılık gelen $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları da birer öz fonksiyondur.

Şimdi λ_{n_0} değerinin $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer probleminin bir öz değeri ve y_{n_0} , bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. y_{n_0} , öz fonksiyon olduğundan $U(y_{n_0}) = V(y_{n_0}) = 0$ olacağı açıktır. Ayrıca $y_{n_0}(0) \neq 0$ olur; çünkü aksi durumda $y'_{n_0}(0) = h y_{n_0}(0) = 0$ olup Teorem 1.8 den $y_{n_0}(x) = 0$ tek çözümü mevcut olur. Genellikle bir şey kaybetmeksizin $y_{n_0}(0) = 1$ varsayılabilir. Bu durumda $y'_{n_0}(0) = h$ ve sonuç olarak $y_{n_0}(x) = \varphi(x, \lambda_{n_0})$ olur. Aynı zamanda y_{n_0} bir öz fonksiyon olduğundan $V(y_{n_0}) = 0$ olup (2.1.6) kullanılarak,

$$\omega(\lambda_{n_0}) = V(\varphi(x, \lambda_{n_0})) = V(y_{n_0}) = 0$$

elde edilir. Bu ise öz değerin, karakteristik fonksiyonun bir sıfırı olduğunu gösterir.

Lemma 2.1.2. (2.1.2) sınır şartları ile birlikte (2.1.1) ile tanımlı operatör, self-adjoint bir operatördür (Chadan ve ark., 1997).

İspat: İki kez türevlenebilir, (2.1.2) sınır koşullarını sağlayan u ve v fonksiyonlarına iki defa kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \langle L[u], v \rangle &= \int_0^\pi (-u'' + qu)v \, dx = u'(0)v(0) - u'(\pi)v(\pi) + \int_0^\pi (u'v' + quv) \, dx \\ &= u'(0)v(0) - u'(\pi)v(\pi) + u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0) + \int_0^\pi (v'' + qv)u \, dx \\ &= hu(0)v(0) + Hu(\pi)v(\pi) - Hu(\pi)v(\pi) - hu(0)v(0) + \int_0^\pi (v'' + qv)u \, dx \\ &= \int_0^\pi (v'' + qv)u \, dx = \langle u, L[v] \rangle \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3. $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer probleminin öz değerleri reel ve basit, ayrıca farklı öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogondur (Freiling ve Yurko, 2001).

İspat: $\lambda_n \neq \lambda_k$ farklı öz değerler, $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\varphi(x, \lambda_k)$ ise bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar olsun. Bunlar $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemini sağlayacağından (2.1.8) eşitliğinden

$$\int_0^\pi \varphi(x, \lambda_k) L[\varphi(x, \lambda_n)] \, dx = \int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n) L[\varphi(x, \lambda_k)] \, dx$$

buradan,

$$(\lambda_n - \lambda_k) \int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_k) dx = 0$$

elde edilir ki,

$\lambda_n \neq \lambda_k$ olduğundan ortogonalite görülür.

Öz değerlerden en az birinin kompleks olduğu varsayalım. Bu öz değer λ_n , buna karşılık öz fonksiyon ise $\varphi(x, \lambda_n)$ ile gösterilsin. Yukarıda verilen eşitlikte $\lambda_k = \bar{\lambda}_n$ olarak alınırsa, $\lambda_n \neq \lambda_k$ ve $q(x)$, h ile H reel olduğundan karşılık gelen öz fonksiyon $\varphi(x, \bar{\lambda}_n) = \overline{\varphi(x, \lambda_n)}$ olacaktır. Dolayısıyla

$$(\lambda_n - \lambda_k) \int_0^\pi |\varphi(x, \lambda_n)|^2 dx = 0$$

ve buradan,

$$\alpha_n = \int_0^\pi |\varphi(x, \lambda_n)|^2 dx = 0$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir çünkü öz fonksiyon sıfır olmadıkça bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, diğer bir deyişle öz değerler reeldir.

Yukarıda verilen $\{\alpha_n\}$ değerlerine *ağırlık sayıları* denir (Freiling ve Yurko, 2001).

Öz değerlerin basitliği için

$$\dot{\omega}(\lambda_n) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{\omega(\lambda) - \omega(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{\omega(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \neq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (2.1.7) ifadesinden ve $\varphi(0, \lambda_n) = 1$, $\varphi'(0, \lambda_n) = h$; $\psi(\pi, \lambda) = 1$, $\psi'(\pi, \lambda) = -H$ olmasından,

$$\begin{aligned}
-\omega(\lambda) &= U(\psi) = \psi'(0, \lambda) - h\psi(0, \lambda) \\
&= \psi'(0, \lambda) - h\psi(0, \lambda) + \varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n) \\
&= (\varphi'(\pi, \lambda_n)\psi(\pi, \lambda) - \psi'(\pi, \lambda)\varphi(\pi, \lambda_n)) - (\varphi'(0, \lambda_n)\psi(0, \lambda) - \psi'(0, \lambda)\varphi(0, \lambda_n)) \\
&= [\varphi'(x, \lambda_n)\psi(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n)] \Big|_0^\pi = \int_0^\pi (\varphi''\psi - \psi''\varphi) dx \\
&= \int_0^\pi [(-\psi''\varphi + q\psi\varphi) - (-\varphi''\psi + q\psi\kappa)] dx = (\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi \psi(x, \lambda)\varphi(x, \lambda_n) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.1. kullanılarak,

$$\dot{\omega}(\lambda_n) = -\beta_n \int_0^\pi |\varphi(x, \lambda_n)|^2 dx = -\beta_n \alpha_n \neq 0 \quad (2.1.9)$$

olduğu görülür.

Lemma 2.1.4. $f \in L_2[\mathbb{C}]$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ olsun.

$$-y'' + f(x) = \lambda y \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel denkleminin $y(0) = a$, $y'(\pi) = b$ başlangıç koşullarını sağlayan tek çözümü

$$y(x) = a \cos \sqrt{\lambda} x + b \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-t)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt$$

şeklindedir (Pöschel ve Trubowitz, 1987).

Özel olarak (2.1.1) denklemini ve (2.1.3a) başlangıç koşulu göz önüne alındığında

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + h \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t) \varphi(t, \lambda) dt \quad (2.1.10)$$

elde edilir.

φ fonksiyonu için bir seri temsili de inşa edilebilir. Bunun için φ fonksiyonunun q potansiyel fonksiyonunun bir kuvvet serisi olduğu varsayalım:

$$\varphi(x, \lambda, q) = \sum_{n \geq 0} C_n(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q).$$

Burada

$$C_n(x, \lambda, q) = C_n(x, \lambda, q_1, q_1, \dots, q_n) \Big|_{q_1=q_2=\dots=q_n=q},$$

$C_n(x, \lambda, q_1, q_1, \dots, q_n)$, sınırlı ve her bir x ile λ için $L_2(0, \pi) \times \dots \times L_2(0, \pi)$ üzerinde multi-lineer simetriktir. Dolayısıyla C_1 , q potansiyeline göre lineer, C_2 kuadratik, ... şeklinde devam eder. Burada potansiyelden bağımsız olmasından dolayı $q=0$ için

(2.1.3a) koşulları kullanılarak $C_0(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + h \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = c_\lambda(x) + h s_\lambda(x)$ olduğu

kolaylıkla görülebilir. Yukarıda olduğu gibi bundan sonra da ihtiyaç duyuldukça

$c_\lambda(x) = \cos \sqrt{\lambda} x$, $s_\lambda(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$ notasyonları kullanılacaktır.

Bu durumda diferansiyel denklem ve başlangıç koşulları kullanılarak,

$$-C_n'' = \lambda C_n - q C_{n-1} \quad ; \quad C_n(0, \lambda, q) = C_n'(0, \lambda, q) = 0, \quad n \geq 1$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Lemma 2.1.4. ten

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) C_{n-1}(t, \lambda, q) dt, \quad n \geq 1 \quad (2.1.11)$$

çözümü elde edilir. $C_0(x, \lambda) = c_\lambda(x) + h s_\lambda(x)$ olduğu bilindiğinden,

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) &= \int_0^x s_\lambda(x-t_1) q(t_1) C_0(t_1, \lambda, q) dt_1 \\ &= \int_0^x s_\lambda(x-t_1) q(t_1) c_\lambda(t_1) dt_1 + h \int_0^x s_\lambda(x-t_1) q(t_1) s_\lambda(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(x, \lambda, q) &= \int_0^x s_\lambda(x-t_2)q(t_2)C_1(t_2, \lambda, q)dt_2 \\
&= \int_0^x s_\lambda(x-t_2)q(t_2) \left(\int_0^{t_2} s_\lambda(t_2-t_1)q(t_1)c_\lambda(t_1)dt + h \int_0^{t_2} s_\lambda(t_2-t_1)q(t_1)s_\lambda(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\
&= \int_0^x s_\lambda(x-t_2)q(t_2) \left(\int_0^{t_2} s_\lambda(t_2-t_1)q(t_1)c_\lambda(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\
&\quad + h \int_0^x s_\lambda(x-t_2)q(t_2) \left(\int_0^{t_2} s_\lambda(t_2-t_1)q(t_1)s_\lambda(t_1)dt_1 \right) dt_2 \\
&= \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^2 [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)] dt_1 dt_2 \\
&\quad + h \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 = x} s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^2 [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)] dt_1 dt_2 \\
&= \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 = x} (c_\lambda(t_1) + h s_\lambda(t_1)) \prod_{i=1}^2 [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)] dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

ve böyle devam edilerek $n \geq 1$ için

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} (c_\lambda(t_1) + h s_\lambda(t_1)) \prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)] dt_1 dt_2 \cdots dt_n \quad (2.1.12)$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıda verilen C_n , $n \geq 0$ tamsayıları için,

$$\varphi(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) \quad (2.1.13)$$

yazılabilir (Pöschel ve Trubowitz, 1987).

$$\cos \sqrt{\lambda} x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \lambda^n$$

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \lambda^n$$

olduğundan $c_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$ fonksiyonları analitik, dolayısıyla $C_0(x, \lambda)$ ve $C_n(x, \lambda, q)$ ifadelerindeki integralin içinde bulunan ilk iki terim analitiktir. Ayrıca bu serinin düzgün yakınsaklığından φ fonksiyonunun da (1/2 mertebeden) tam olduğu görülür.

Lemma 2.1.5. $\lambda = \rho^2$ ve $\tau = |\operatorname{Im} \rho|$ olmak üzere,

$$\left| \cos(\sqrt{\lambda} x) \right| \leq \exp(\tau x) \quad , \quad \left| \sin(\sqrt{\lambda} x) \right| \leq \exp(\tau x) \quad (2.1.14)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: Burada sadece $\cos(\sqrt{\lambda} x)$ için hesaplama yapacağız. $\sin(\sqrt{\lambda} x)$ için de işlemler benzerdir. $\lambda = 0$ için sağlandığı açıktır. a ve b reel sayıları için $\rho = a + ib$ olsun. Bu durumda $\sqrt{\lambda} = \pm \rho$ olup $\sqrt{\lambda} = \rho$ için

$$\begin{aligned} \left| \cos(\sqrt{\lambda} x) \right| &= \frac{1}{2} \left| \exp(i\sqrt{\lambda} x) + \exp(-i\sqrt{\lambda} x) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \exp((a+ib)ix) + \exp(-i(a+ib)x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(e^{-bx} |e^{aix}| + e^{bx} |e^{-aix}| \right) = \frac{1}{2} (e^{-bx} + e^{bx}) \\ &\leq e^{|b|x} = e^{|\operatorname{Im} \rho|x} = e^{\tau x} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sqrt{\lambda} = -\rho$ olsun. Bu durumda, benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left| \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| &\leq \frac{1}{2} \left(e^{bx} |e^{-aix}| + e^{-bx} |e^{aix}| \right) = \frac{1}{2} (e^{-bx} + e^{bx}) \\ &\leq e^{|b|x} = e^{|\operatorname{Im} \rho|x} = e^{\tau x} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.6. (2.1.13) kuvvet serisi, $[0, \pi] \times \mathbb{R} \times L_2(0, \pi)$ kümesinin sınırlı alt kümeleri üzerinde

$$-\varphi'' + q\varphi = \lambda\varphi \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan tek çözümüne düzgün yakınsar. Ayrıca bu seri, (2.1.10) integral denklemini ve $|\rho| \rightarrow \infty$ iken,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= O(\exp(\tau x)) \\ \varphi'(x, \lambda) &= O(|\rho| \exp(\tau x)) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

asimptotik formüllerini sağlar. Burada $\lambda = \rho^2$ ve $\tau = |\operatorname{Im} \rho|$ şeklindedir (Pöschel ve Trubowitz, 1987; Freiling ve Yurko, 2001).

İspat: Lemma 2.1.5. ten $|\rho| \geq 1$ için

$$|c_\lambda(x)| \leq \exp(\tau x) \quad \text{ve} \quad |s_\lambda(x)| \leq \frac{1}{|\rho|} \exp(\tau x) \leq \exp(\tau x)$$

olduğu görülür. Bu durumda,

$$|C_0(x, \lambda)| \leq |c_\lambda(x)| + |hs_\lambda(x)| \leq (1 + |h|) \exp(\tau x)$$

ve $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
|C_n(x, \lambda, q)| &\leq \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} |c_\lambda(t_1) + h s_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^n |s_\lambda(t_{i+1} - t_i)| |q(t_i)| dt_1 dt_2 \dots dt_n \\
&\leq \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} (1 + |h|) \exp(\tau t_1) \prod_{i=1}^n \exp(\tau(t_{i+1} - t_i)) |q(t_i)| dt_1 dt_2 \dots dt_n \\
&= (1 + |h|) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \exp(\tau(t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_{n+1} - t_n))) \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 dt_2 \dots dt_n \\
&= (1 + |h|) \exp(\tau x) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 dt_2 \dots dt_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Son satırdaki integralin değeri, t_1, \dots, t_n değişkenlerinin sıralarının değiştirilmesi sıralama altında değişmez. Üstelik integralin permüte edilmiş bölgelerinin tamamının birleşimi, $[0, x]^n$ olur. Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 dt_2 \dots dt_n &= \frac{1}{n!} \int_{[0, x]^n} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^x |q(t)| dt \right]^n \\
&\leq \frac{1}{n!} \left[\left(\int_0^x 1^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^x |q(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right]^n = \frac{1}{n!} (\|q\| \sqrt{x})^n
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq (1 + |h|) \exp(\tau x) \frac{1}{n!} (\|q\| \sqrt{x})^n$$

tahmini elde edilir. Bu, φ için serinin, $[0, \pi] \times \mathbb{R} \times L_2(0, \pi)$ kümesinin sınırlı alt kümeleri üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsadığını gösterir. Yukarıdaki terimler toplanarak,

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &\leq (1+|h|)\exp(\tau x) + \sum_{n \geq 1} (1+|h|)\exp(\tau x) \frac{1}{n!} (\|q\|\sqrt{x})^n \\ &= (1+|h|)\exp(\tau x) \left[1 + \exp(\|q\|\sqrt{x}) \right]\end{aligned}$$

yani

$$\varphi(x, \lambda) = O(\exp(\tau x))$$

olduğu görülür. $\varphi'(x, \lambda)$ için benzer yol izlenebileceği gibi aşağıdaki gibi bir değerlendirme de yapılabilir:

$$y(x, \lambda) = \cos \rho x + h \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) y(t, \lambda) dt$$

integral denklemi bir tek çözüme sahiptir. Ayrıca bu çözüm, $\varphi(x, \lambda)$ için başlangıç değer problemini sağlar. Dolayısıyla teklik teoreminden $\lambda = \rho^2$ için $y(x, \lambda) \equiv \varphi(x, \lambda)$ olur. Buradan türev alınarak,

$$\varphi'(x, \lambda) = -\rho \sin \rho x + h \cos \rho x + \int_0^x \cos \rho(x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt$$

elde edilir. $|\rho| \geq 1, x \in [0, \pi]$ için Lemma 2.1.5. ve φ için elde edilen tahmin kullanılarak,

$$\begin{aligned}|\varphi'(x, \lambda)| &\leq |\rho| \exp(\tau x) + h \exp(\tau x) + \int_0^x \exp(\tau(x-t)) |q(t)| M \exp(\tau x) dt \\ &= \exp(\tau x) \left[|\rho| + \left(h + M \int_0^x |q(t)| dt \right) \right] = \exp(\tau x) [|\rho| + O(1)]\end{aligned}$$

dolayısıyla,

$$\varphi'(x, \lambda) = O(|\rho| \exp(\tau x))$$

elde edilir. Burada $M \geq (1 + |h|) \max_{x \in [0, \pi]} [1 + \exp(\|q\| \sqrt{x})]$ şeklindedir.

φ için elde edilen serinin düzgün yakınsaklığı toplam ile integrasyonun değişimine imkan verdiğiinden (2.1.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) \\ &= c_\lambda(x) + h s_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) C_{n-1}(t, \lambda, q) dt \\ &= c_\lambda(x) + h s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) \left(\sum_{n \geq 1} C_{n-1}(t, \lambda, q) \right) dt \\ &= c_\lambda(x) + h s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

integral temsili elde edilir.

Burada $\tilde{\psi}(\pi - x) = \psi(x)$ şeklinde bir $\tilde{\psi}$ fonksiyonu tanımlandığında bu fonksiyon diferansiyel denklem ile birlikte $\tilde{\psi}(0) = 1$, $\tilde{\psi}'(0) = H$ başlangıç şartlarını sağlayacağından ψ ve ψ' fonksiyonları için

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(\pi - x) = O(\exp(\tau(\pi - x))) \quad (2.1.15)$$

$$\psi'(x) = -\tilde{\psi}'(\pi - x) = O(|\rho| \exp(\tau(\pi - x)))$$

asimptotik formülleri elde edilebilir.

Lemma 2.1.7. $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\delta > 0$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük $\rho^* = \rho^*(\delta)$ değerleri için,

$$|\sin \rho x| \geq C_\delta \exp(\tau \pi); \quad \rho \in G_\delta \quad (2.1.16)$$

$$|\omega(\lambda)| \geq C_\delta |\rho| \exp(\tau \pi); \quad \rho \in G_\delta, |\rho| \geq \rho^*$$

olacak şekilde C_δ sabiti vardır (Freiling ve Yurko, 2001).

Teorem 2.1.8. *i)* $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer probleminin öz fonksiyonlarının $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ sistemi $L_2(0, \pi)$ içinde tamdır.

ii) $x \in [0, \pi]$ için $f(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x, \lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt \quad (2.1.17)$$

şeklinde yazılabilir ve bu serisi, $[0, \pi]$ üzerinde düzgün yakınsar.

iii) $f(x) \in L_2(0, \pi)$ için (2.1.17) serisi $L_2(0, \pi)$ de yakınsar ve

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |a_n|^2 \quad (\text{Parseval eşitliği}) \quad (2.1.18)$$

eşitliği sağlanır (Freiling ve Yurko, 2001).

İspat: Bilindiği üzere bir Hilbert uzayında bir vektör sisteminin tamlığı için gerek ve yeter şart, bu sistemin tüm vektörlerine dik olan tek vektörün sıfır vektörü olmasıdır (Marchenko, 1986).

$$G(x, t, \lambda) = -\frac{1}{\omega(\lambda)} \begin{cases} \varphi(x, \lambda) \psi(t, \lambda) & , \quad x \leq t \\ \varphi(t, \lambda) \psi(x, \lambda) & , \quad t \leq x \end{cases}$$

olsun ve

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda) &= \int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) f(t) dt \\ &= -\frac{1}{\omega(\lambda)} \left(\psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(t, \lambda) f(t) dt + \varphi(x, \lambda) \int_x^{\pi} \psi(t, \lambda) f(t) dt \right) \end{aligned}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $G(x, t, \lambda)$ fonksiyonuna $L = L(q(x), h, H)$ için Green fonksiyonu denir. $Y(x, \lambda)$,

$$LY - \lambda Y + f(x) = 0 ; \quad U(Y) = V(Y) = 0 \quad (2.1.19)$$

sınır değer probleminin çözümüdür. $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırları basit olduğundan

$$\operatorname{Re} z \frac{1}{\omega(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\omega(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\omega(\lambda) - \omega(\lambda_n)} = \frac{1}{\omega'(\lambda)}$$

olup Teorem 2.1.1. ve (2.1.9) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z Y(x, \lambda) &= -\frac{1}{\dot{\omega}(\lambda_n)} \left(\psi(x, \lambda_n) \int_0^x \varphi(t, \lambda_n) f(t) dt + \right. \\ &\quad \left. \varphi(x, \lambda_n) \int_x^\pi \psi(t, \lambda_n) f(t) dt \right) \\ &= -\frac{\beta_n}{\dot{\omega}(\lambda_n)} \varphi(x, \lambda_n) \int_0^\pi \varphi(t, \lambda_n) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x, \lambda_n) \int_0^\pi \varphi(t, \lambda_n) f(t) dt \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu $n \geq 0$ için $\int_0^\pi f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt = 0$ olacak şekilde $L_2(0, \pi)$

içinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir sabit $x \in [0, \pi]$ için $Y(x, \lambda)$, λ parametresine göre analitiktir. Ayrıca (2.1.14), (2.1.15) ve (2.1.16) dan sabit bir $\delta > 0$ ve yeterince büyük bir $\rho^* > 0$ için

$$|Y(x, \lambda)| \leq \frac{C_\delta}{|\rho|} ; \quad \rho \in G_\delta, |\rho| \geq \rho^*$$

elde edilir. Maksimum modül teoremine göre $Y(x, \lambda)$ fonksiyonu maksimum değerini sınırlarda alır. Diğer taraftan Liouville Teoremine göre $Y(x, \lambda)$ sabit olmalıdır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikten yeterince büyük ρ^* değerleri için $Y(x, \lambda) \equiv 0$

sonucuna ulaşılır. bu sonuç, (2.1.19) probleminde yerine yazıldığında $(0, \pi)$ üzerinde hemen hemen her yerde $f(x) = 0$ olduğu görülür. Bu ise tamlığı gösterir.

Şimdi $f \in AC[0, \pi]$, mutlak sürekli keyfi bir fonksiyon olsun. $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$, (2.1.1) in çözümleri olduklarından $Y(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi dönüştürülebilir.

$$Y(x, \lambda) = -\frac{1}{\lambda \omega(\lambda)} \left[\psi(x, \lambda) \int_0^x (-\varphi''(t, \lambda) + q(t)\varphi(t, \lambda)) f(t) dt \right. \\ \left. + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi (-\psi''(t, \lambda) + q(t)\psi(t, \lambda)) f(t) dt \right]$$

İkinci mertebeden türevi içeren terimler için kısmi integrasyon ve (2.1.5) kullanılarak, $g(t) := f'(t)$ için

$$Z_1(x, \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \left(\psi(x, \lambda) \int_0^x g(t) \varphi'(t, \lambda) dt + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi g(t) \psi'(t, \lambda) dt \right)$$

ve

$$Z_2(x, \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} (hf(0)\psi(x, \lambda) + Hf(\pi)\varphi(x, \lambda) \\ + \psi(x, \lambda) \int_0^x q(t)\varphi(t, \lambda)f(t) dt + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi q(t)\psi(t, \lambda)f(t) dt)$$

olmak üzere,

$$Y(x, \lambda) = \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} (Z_1(x, \lambda) + Z_2(x, \lambda)) \quad (2.1.21)$$

elde edilir. (2.1.14), (2.1.15) ve (2.1.16) dan sabit bir $\delta > 0$ ve yeterince büyük bir $\rho^* > 0$ için,

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_2(x, \lambda)| \leq \frac{C}{|\rho|}; \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^* \quad (2.1.22)$$

bulunur. Bunun yanında

$$\lim_{\substack{|\rho| \rightarrow \infty \\ \rho \in G_\delta}} \max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda)| = 0 \quad (2.1.23)$$

olduğu gösterilecektir. Önce $g(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ üzerinde mutlak sürekli olduğu kabul edilsin. Bu durumda bir kez daha kısmi integrasyon ile

$$Z_1(x, \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \left[\psi(x, \lambda) g(t) \varphi(t, \lambda) \Big|_0^x + \varphi(x, \lambda) g(t) \psi(t, \lambda) \Big|_0^x - \psi(x, \lambda) \int_0^x g'(t) \varphi(t, \lambda) dt - \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi g'(t) \psi(t, \lambda) dt \right]$$

elde edilir. $Z_2(x, \lambda)$ fonksiyonuna benzer olarak (2.1.14), (2.1.15) ve (2.1.16) kullanılarak,

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda)| \leq \frac{C}{|\rho|}; \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*$$

sonucuna varılır. Şimdi $g(t) \in L(0, \pi)$ olsun. Sabit bir $\varepsilon > 0$ için

$$C^+ = \max_{0 \leq x \leq \pi} \sup_{\rho \in G_\delta} \frac{1}{|\omega(\lambda)|} \left(\left| \psi(x, \lambda) \right| \int_0^x |\varphi'(t, \lambda)| dt + \left| \varphi(x, \lambda) \right| \int_0^x |\psi'(t, \lambda)| dt \right)$$

olmak üzere,

$$\int_0^\pi |g(t) - g_\varepsilon(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2C^+}$$

olacak şekilde $g_\varepsilon(t)$ mutlak sürekli fonksiyonu seçilsin. Bu durumda, $\rho \in G_\delta$, $|\rho| \geq \rho^*$ için

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda)| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda; g_\varepsilon)| + \max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda; g - g_\varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C(\varepsilon)}{|\rho|}$$

bulunur. Dolayısıyla $|\rho| > \rho^0$ için $\max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\rho^0 > 0$ mevcuttur. $\varepsilon > 0$ değerinin keyfiliğinden $\lim_{\rho \in G_\delta} \max_{0 \leq x \leq \pi} |Z_1(x, \lambda)| = 0$ olduğu görülür.

$\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = (N + 1/2)^2\}$ olsun. Saatin tersi yönünde olmak üzere,

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} Y(x, \lambda) d\lambda$$

çevre integralini göz önüne alalım. (2.1.21)-(2.1.23) eşitliklerinden

$$I_N(x) = f(x) + \varepsilon_N(x), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \pi} |\varepsilon_N(x)| = 0 \quad (2.1.24)$$

olduğu görülür. Ayrıca Rezidü Teoremi yardımıyla (2.1.20) kullanılarak,

$$I_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi(x, \lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadenin (2.1.24) ile karşılaştırılmasıyla (2.1.17) açılımına ulaşırlar.

Son olarak $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ öz fonksiyonları, $L_2(0, \pi)$ içinde tam ve ortogonal olduklarından $L_2(0, \pi)$ içinde bir ortogonal baz oluştururlar. Böylece (2.1.18) eşitliği geçerlidir.

2.2. Teklik Teoremleri

Daha önce de belirtildiği üzere Ters Sturm-Liouville probleminin, modern anlamda ilk kez Ambartsumyan (1929) tarafından yapılan çalışma ile ortaya çıktığı kabul edilmektedir. Daha sonrasında sırasıyla Borg (1946), Levinson (1949), Marchenko (1950), Gelfand ve Levitan (1951) ters problem ile ilgili olarak temel teklik teoremlerini vermişlerdir. Ters Sturm-Liouville problemi fiziksel öneminden dolayı, günümüze kadar birçok araştırmacının çalışmalarında yer almıştır. Bunlardan biri

Hochstadt (1973) tarafından yapılan, veri olarak alınan iki spektrumdan birinin sonlu elemanının bilinmediği durumu içeren çalışmasıdır.

Bu kısımda öncelikle teklik teoremlerinden iki spektrum için teklifi içeren Levinson yaklaşımı verilecektir. Regüler Ters Sturm-Liouville problemi için spektral fonksiyon, normlaştırıcı sabitler ve bir spektrum cinsinden, normlaştırıcı sabitler ise iki spektrum cinsinden ifade edilebileceğinden sadece iki spektrum durumu ele alınmıştır. Diğer verilerin birbiri cinsinden ifadeleri için Levitan ve Gasymov (1964) tarafından yapılan çalışma incelenebilir.

Daha sonra genel bir durum ifade edildiğinden, Hochstadt (1973) tarafından yapılan çalışma verilerek kısım sonlandırılacaktır.

2.2.1. Levinson yaklaşımı

Levinson (1949) çalışmasında $q \in L_1(0, \pi)$ olmak üzere,

$$y''[x] + (\lambda + q(x))y[x] = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.2.1)$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \quad , \quad y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \quad (2.2.2)$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \quad , \quad y(\pi)\cos\gamma + y'(\pi)\sin\gamma = 0 \quad (2.2.3)$$

problemini göz önüne almıştır. Burada $\sin\alpha, \sin\beta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -h$ ve

$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = H$ alındığında (2.1.1)-(2.1.2) ile verilen problemin elde edileceği açıktır.

$\sin\alpha = 0, \sin\beta = 0$ durumları ise sırasıyla $h, H = \pm\infty$ durumlarını verir.

$$y = u(x, \lambda),$$

$$u(0, \lambda) = \sin\alpha \quad , \quad u'(0, \lambda) = -\cos\alpha \quad , \quad (2.2.4)$$

$$y = v(x, \lambda) \text{ ise}$$

$$v(\pi, \lambda) = \sin\beta \quad , \quad v'(\pi, \lambda) = -\cos\beta \quad (2.2.5)$$

başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde (2.2.1) diferansiyel denkleminin çözümleri olsunlar. Bu durumda $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ fonksiyonlarının ve türevlerinin, λ parametresinin birer tam fonksiyonu olduğu Lemma 2.1.4' den bilinmektedir. $u(x, \lambda)$ fonksiyonunun $x = \pi$ değerinde (2.2.2) sınır koşulunu sağlaması için $u(\pi, \lambda) \cos \beta + u'(\pi, \lambda) \sin \beta = 0$ olmalıdır. Yani

$$\omega(\lambda) = -u(\pi, \lambda) \cos \beta - u'(\pi, \lambda) \sin \beta \quad (2.2.6)$$

olmak üzere tam olan $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları, karakteristik değerlerdir. $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının reel ve basit olduğu Teorem 2.1.3' den bilinmektedir.

Lemma 2.2.1. $\lambda = \rho^2$ ve $|\operatorname{Im} \rho| = \tau$ olmak üzere, büyük $|\lambda|$ değerleri için $0 \leq x \leq \pi$ üzerinde düzgün olarak $\sin \alpha \neq 0$ için

$$u(x, \lambda) = \sin \alpha \cos \rho x + O\left(\frac{e^{\tau x}}{|\rho|}\right) \quad (2.2.7)$$

$$u'(x, \lambda) = -\rho \sin \alpha \sin \rho x + O(e^{\tau x}) \quad (2.2.8)$$

$\sin \alpha = 0$ için

$$u(x, \lambda) = -\cos \alpha \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{e^{\tau x}}{|\rho|^2}\right) \quad (2.2.9)$$

$$u'(x, \lambda) = -\cos \alpha \cos \rho x + O\left(\frac{e^{\tau x}}{|\rho|}\right) \quad (2.2.10)$$

asimptotik formülleri sağlanır (Levinson, 1949).

Tanım 1.15' e bakıldığında $\sin \alpha \neq 0$ için verilen formüllerin (2.1.14) ile verilen asimptotik formüllere denk olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu formüllerden de $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun $1/2$ mertebeden tam bir fonksiyon olduğu görülür. (2.2.2) sınır

koşulları için (2.1.1) probleminin karakteristik değerleri $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ ile gösterilirse, Hadamard Faktörizasyon Teoremi'nden olası bir C çarpanı dışında $\omega(\lambda)$ fonksiyonu

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right)$$

ile verilir. Eğer $\lambda_k = 0$ olacak şekilde k değerleri mevcut ise bunların sayısı kadar λ çarpanı alınır. Olası bir C çarpanı Lemma 2.2.1. yardımıyla tek şekilde belirlenir. Dolayısıyla $\omega(\lambda)$ fonksiyonu (2.2.2) ve bir spektrum ile tek şekilde belirlidir (Levinson, 1949).

Teorem 2.2.2. $\sin(\gamma - \beta) \neq 0$ için yani (2.2.2) ve (2.2.3) sınır şartlarının özdeş olmadığı durumda bu sınır koşullarının her biri için (2.2.1) denkleminin spektrumları verilirse bu takdirde $q(x)$ potansiyel fonksiyonu bu iki spektrum ile tek şekilde belirlidir (Levinson, 1949).

İspat: $q_1(x)$ ile $q_2(x)$, (2.2.1)- (2.2.2) ve (2.2.1)- (2.2.3) için aynı spektrumlara sahip iki fonksiyon olsun. $q_1(x)$ için (2.2.4) ve (2.2.5) şartlarını sağlayan çözümler $u_1(x, \lambda)$ ve $v_1(x, \lambda)$ olsun. Benzer şekilde $q_2(x)$ için ise çözümler sırasıyla $u_2(x, \lambda)$ ve $v_2(x, \lambda)$ olsun. Teorem 2.1.1' den $\lambda = \lambda_n$ için $C_n \neq 0$ olmak üzere,

$$u_1(x, \lambda_n) = C_n v_1(x, \lambda_n),$$

dolayısıyla da

$$\begin{aligned} -u_1(\pi, \lambda_n) \cos \gamma - u_1'(\pi, \lambda_n) \sin \gamma &= -C_n v_1(\pi, \lambda_n) \cos \gamma - C_n v_1'(\pi, \lambda_n) \sin \gamma \\ &= C_n [\cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma] = C_n \sin(\gamma - \beta) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak

$$g(\lambda) = -u_1(\pi, \lambda) \cos \gamma - u_1'(\pi, \lambda) \sin \gamma,$$

fonksiyonu, (2.2.3) ile bağlantılı tam fonksiyon olup $\omega(\lambda)$ fonksiyonuna benzer olarak (2.2.3) sınır şartıyla belirlenen spektrumdan tek şekilde belirlenir. Dolayısıyla,

$$C_n = \frac{g(\lambda_n)}{\sin(\gamma - \beta)}$$

ve böylece C_n tek şekilde belirli olur. $q_2(x)$ için de aynı spektrumlar olduğundan $u_2(x, \lambda_n) = C_n v_2(x, \lambda_n)$ eşitliği elde edilir. (2.2.3) için verilen spektrumun tek kullanıldığı yer bu kısımdır.

Şimdi $0 \leq x \leq \pi$ üzerinde $f(0) = f(\pi) = 0$ olacak şekilde sürekli türevelere sahip bir f fonksiyonu verilsin. $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ ve

$$H(x, \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} v_2(x, \lambda) \int_0^x u_1(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

olsun. N yeterince büyük olmak üzere, λ düzleminde $\lambda_N^{1/2}$ ile $\lambda_{N+1}^{1/2}$ arasından geçecek şekilde $\lambda = 0$ merkezli kapalı bir Γ çemberi üzerinden $H(x, \lambda)$ fonksiyonunun çevre integrali göz önüne alınsın. Bu durumda R , ρ düzleminde yarıçapı Γ 'nin yarıçapının karekökü olan bir çember olmak üzere,

$$\int_{\Gamma} H(x, \lambda) d\lambda = \int_R H(x, \rho^2) \rho d\rho$$

elde edilir. Büyük $|\lambda|$ değerleri için,

$$v_2(x, \lambda) = \sin \beta \cos \rho(\pi - x) + O\left(\frac{e^{\tau(\pi-x)}}{|\rho|}\right)$$

elde edilir. u_1 için (2.2.7) sağlanır ve $\omega(\lambda)$ için,

$$\omega(\lambda) = \rho \sin \alpha \sin \beta \sin \rho \pi + O(e^{\tau \pi})$$

elde edilir. Küçük $\delta = \min\left(\frac{1}{2}x, |\lambda_N|^{-1/4}\right)$ için,

$$\begin{aligned}
\int_0^x u_1(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi &= \sin \alpha \int_0^x \cos \rho \xi f(\xi) d\xi + O\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \int_0^x |f(\xi)| e^{\tau \xi} d\xi \\
&= \frac{\sin \alpha \sin \rho x}{\rho} f(x) + O\left(\frac{e^{\tau(x-\delta)}}{|\rho|}\right) \int_0^{x-\delta} (|f(\xi)| + |f'(\xi)|) d\xi + \\
&O\left(\frac{e^{\tau x}}{|\rho|}\right) \int_{x-\delta}^x (|f(\xi)| + |f'(\xi)|) d\xi \\
&= \frac{\sin \alpha \sin \rho x}{\rho} f(x) + O\left(\frac{e^{\tau x}}{|\rho|}\right) (xe^{-\delta \tau} + \delta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $O\left(\frac{e^{\tau \xi}}{|\rho|}\right) f(\xi) \leq O\left(\frac{1}{|\rho|}\right) f(\xi) e^{\tau \xi}$ eşitsizliği ve $\frac{\sin \rho x}{\rho}$ fonksiyonunu asimptotik karşılığı kullanılmıştır. İntegral dışına çıkarılırken üstel ifadeyi en büyük yapan değer alınmış dikkat edilmelidir. Böylece $N \rightarrow \infty$ iken $0 \leq x \leq \pi$ üzerinde düzgün olarak,

$$\int_{\Gamma} H(x, \lambda) d\lambda - f(x) \int_R \frac{\cos \rho(\pi - x) \sin \rho x}{\rho \sin \rho \pi} d\rho \rightarrow 0$$

olur. Buradan ve $\sin \rho x \cos \rho(\pi - x) = \frac{1}{2} [\sin \rho \pi + \sin \rho(\pi - 2x)]$ olmasından $(0, \pi)$ açık aralığının içindeki herhangi bir kapalı aralıkta düzgün olarak, $[0, \pi]$ kapalı aralığında sınırlı olarak

$$\int_{\Gamma} H(x, \lambda) d\lambda - \pi i f(x) \rightarrow 0.$$

olur. Bu ifadenin sol tarafı rezidüler kullanılarak hesaplanıp sağ tarafına eşitlenirse,

$$f(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_2(x, \lambda_n) \int_0^x u_1(\xi, \lambda_n) f(\xi) d\xi}{\omega'(\lambda_n)}$$

veya

$$f(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_2(x, \lambda_n) \int_0^x u_1(\xi, \lambda_n) f(\xi) d\xi}{C_n \omega'(\lambda_n)}.$$

Aynı şekilde $u_2(x, \lambda) \int_x^{\pi} v_1(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi$ kullanılarak

$$f(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_2(x, \lambda_n) \int_x^{\pi} u_1(\xi, \lambda_n) f(\xi) d\xi}{C_n \omega'(\lambda_n)}$$

elde edilir. Bunlar toplanarak

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_2(x, \lambda_n) \int_0^{\pi} u_1(\xi, \lambda_n) f(\xi) d\xi}{C_n \omega'(\lambda_n)}$$

sonucuna ulaşılır. $\sin \alpha = 0$ veya $\sin \beta = 0$ durumları da benzer yolla ele alınır. Bu türetme, u_1 ve v_1 yerine u_2 ve v_2 alınsa da geçerli olacağından ayrıca

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_2(x, \lambda_n) \int_0^{\pi} u_2(\xi, \lambda_n) f(\xi) d\xi}{C_n \omega'(\lambda_n)}$$

Sturm-Liouville açılımına sahip olunur. Son iki ifadenin birbirinden çıkarılması ile $(0, \pi)$ aralığının içindeki herhangi bir kapalı aralık üzerinden düzgün olarak,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_2(x, \lambda_n)}{C_n \omega'(\lambda_n)} \int_0^{\pi} [u_1(\xi, \lambda_n) - u_2(\xi, \lambda_n)] f(\xi) d\xi$$

bulunur. Bu seri $[0, \pi]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlı şekilde yakınsak olduğundan her iki tarafını $u_2(x, \lambda_1)$ ile çarpılıp integralenmesi ile ortogonalite özelliğinden

$$\int_0^{\pi} [u_1(\xi, \lambda_1) - u_2(\xi, \lambda_1)] f(\xi) d\xi = 0$$

elde edilir. Bu ifade başta ifade edilen kısıtlamaları sağlayan tüm $f(x)$ fonksiyonları için geçerli olduğundan özel olarak $f(x) = \sin nx$ içinde sağlanacağından $\{\sin nx\}$ kümesinin elemanlarının tamlığından,

$$u_1(x, \lambda_1) = u_2(x, \lambda_1)$$

olduğu görülür. u_1 ve u_2 , (2.2.1) denklemini sağladığından taraf tarafa çıkarılarak hemen hemen her yerde

$$u_1(x, \lambda_1)[P_1(x) - P_2(x)] = 0,$$

dolayısıyla da hemen hemen her yerde $P_1(x) = P_2(x)$ olup bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.3. $\alpha + \beta = \pi$ ve $0 < x < \pi$ için hemen hemen her yerde $q(\pi - x) = q(x)$ ise bu takdirde potansiyel fonksiyonu, (2.2.1) in bir spektrumu ile tek şekilde belirlidir (Levinson, 1949).

İspat: Buradaki ispat önceki teoremin ispatı ile aynıdır. Sadece (2.2.3) şartları için verilen spektruma ihtiyaç olmadığı bir diğer deyişle C_n sabitlerinin, (2.2.2) şartları için verilen spektrumla belirlenebileceği gösterilecektir. Daha önce ifade edildiği üzere $u_1(x, \lambda_n) = C_n v_1(x, \lambda_n)$ olup buradan

$$u_1(\pi, \lambda_n) \sin \beta - u_1'(\pi, \lambda_n) \cos \beta = C_n.$$

Ayrıca $\alpha + \beta = \pi$ ve potansiyelin simetrikliğinden $u_1(x, \lambda_n) = v_1(\pi - x, \lambda_n)$. Dolayısıyla

$$v_1(0, \lambda_n) \sin \beta + v_1'(0, \lambda_n) \cos \beta = C_n \quad (2.2.11)$$

bulunur. Yine $u_1(x, \lambda_n) = C_n v_1(x, \lambda_n)$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} 1 &= u_1(0, \lambda_n) \sin \alpha - u_1'(0, \lambda_n) \cos \alpha = C_n [v_1(0, \lambda_n) \sin \alpha - v_1'(0, \lambda_n) \cos \alpha] \\ &= C_n [v_1(0, \lambda_n) \sin \beta + v_1'(0, \lambda_n) \cos \beta] \end{aligned}$$

olup (2.2.11) kullanılarak $C_n^2 = 1$, bir diğ̈er deyişle $C_n = \pm 1$ bulunur. $[C_n \omega'(\lambda_n)]^{-1/2}$, $u_1(x, \lambda_n)$ için normlaştırıcı çarpan olduğundan $\text{sign } C_n = \text{sign } \omega'(\lambda_n)$. Dolayısıyla $C_n = \pm 1$ olması, $C_n = \text{sign } \omega'(\lambda_n)$ ile tamamen belirlenir. Geriye kalan kısım önceki teoremin ispatı ile aynıdır. Böylece ispat tamamlanır.

2.2.2. Hochstadt yaklaşımı

Hochstad 1973 yılında yaptığı çalışmasında,

$$Lu = -u'' + qu \quad (2.2.12)$$

operatörünü ve

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0 \quad (2.2.13)$$

$$u(1) \cos \beta + u'(1) \sin \beta = 0 \quad (2.2.14)$$

ayrılabilir sınır koşullarını göz önüne almıştır. Bu operatörün, q potansiyel fonksiyonu uygun regülerite koşullarını sağlamak üzere, $L_2[0,1]$ Hilbert uzayında tanımlı bir self-adjoint operatör olduğu Lemma 2.1.2 den bilinmektedir. Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.3' den bu koşullar altında L operatörü, $\{\lambda_i\}$ basit öz değerlerden oluşan ayırık bir spektruma sahiptir. $\sin(\beta - \gamma) \neq 0$ olmak üzere, eğer (2.2.14) yerine,

$$u(1) \cos \gamma + u'(1) \sin \gamma = 0 \quad (2.2.15)$$

koşulu alınırsa ikinci bir $\{\lambda_i'\}$ spektrumu elde edilir. L operatörünün, bir diğ̈er deyişle q potansiyel fonksiyonunun bu iki spektrumla tek şekilde belirli olduğu bilinmektedir. Bu çalışmanın amacı, potansiyel fonksiyonunun bir tam spektrum ve bir kısmi spektrum ile ne ölçüde belirli olduğunu göstermektir.

Teorem 2.2.4. q potansiyel fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde toplanabilir olmak üzere (2.2.12)-(2.2.15) operatörünün spektrumları $\{\lambda_i\}$ ve $\{\lambda_i'\}$ olsun. \tilde{q} , $[0,1]$ üzerinde toplanabilir olmak üzere, ikinci bir

$$\tilde{L}u = -u'' + \tilde{q}u \quad (2.2.16)$$

operatörü göz önüne alınsın. Bu operatörün (2.2.13) ve (2.2.14) sınır şartları için sonlu sayıda i indisleri dışında $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ olacak şekilde $\{\tilde{\lambda}_i\}$ spektrumuna, (2.2.13) ve (2.2.15) sınır şartları için ise L operatörü ile aynı $\{\lambda_i'\}$ spektruma sahip olduğu varsayılınsın. Bu şartlar altında \tilde{y}_n ve w_n , $\tilde{L}u_n = \lambda_n u$ denkleminin uygun çözümleri olmak üzere hemen hemen her yerde

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)' \quad (2.2.17)$$

Burada Λ_0 , $\tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i$ durumunu ifade eden sonlu indis kümesini gösterir. Ayrıca Λ notasyonu ise geriye kalan sonsuz indis kümesini gösterecektir. Yani $i \in \Lambda$ için $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$. Eğer $\Lambda_0 = \emptyset$ ise hemen hemen her yerde $q = \tilde{q}$ (Hochstadt, 1973)

İspat:

$$w'' + (\lambda - q)w = 0 \quad ; \quad w(0) = \sin \alpha, \quad w'(0) = -\cos \alpha \quad (2.2.18)$$

denkleminin bir çözümü w olsun. Asimptotik formüllerden yeterince büyük $|\lambda|$ değerleri için $\tau = |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|$ olmak üzere, $0 \leq x \leq 1$ için $\sin \alpha \neq 0$ olduğunda,

$$w = \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (2.2.19)$$

$$w' = -\sqrt{\lambda} \sin \alpha \sin \sqrt{\lambda} x + O(e^{\tau x}) \quad (2.2.20)$$

ve $\alpha = 0$ olduğunda

$$w = -\frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\lambda}\right) \quad (2.2.21)$$

$$w' = -\cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (2.2.22)$$

asimptotik formülleri sağlar. Şimdi (2.2.14) ve (2.2.15) sınır koşulları kullanılarak,

$$\omega(\lambda) = w(1) \cos \beta + w'(1) \sin \beta \quad (2.2.23)$$

$$\nu(\lambda) = w(1) \cos \gamma + w'(1) \sin \gamma \quad (2.2.24)$$

fonksiyonları tanımlansın. Bunlar λ 'nın $1/2$ mertebeden tam fonksiyonları olan karakteristik fonksiyonlarıdır. Mertebesi 1 den küçük tam fonksiyonlar bir sabit çarpanı dışında sıfırları ile belirlenebildiğinden a ve b sabitler olmak üzere,

$$\omega(\lambda) = a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) \quad (2.2.25)$$

ve benzer şekilde,

$$\nu(\lambda) = b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right). \quad (2.2.26)$$

Aynı problem \tilde{L} operatörü için göz önüne alındığında $\omega(\lambda)$ ve $\nu(\lambda)$ fonksiyonlarına karşılık

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i}\right) \quad (2.2.27)$$

ve

$$\tilde{\nu}(\lambda) = \tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i}\right) \quad (2.2.28)$$

biçiminde $\tilde{\omega}(\lambda)$ ve $\tilde{\nu}(\lambda)$ fonksiyonları elde edilir. Hipotezden $\nu(\lambda)/\tilde{\nu}(\lambda)$ bir sabit $\omega(\lambda)/\tilde{\omega}(\lambda)$ ise bir rasyonel fonksiyondur.

$\{w_n\}$, L operatörünün $\{\tilde{w}_n\}$ ise \tilde{L} operatörünün (2.2.13)-(2.2.14) sınır şartları için öz fonksiyonları olsun.

$$H = \{f \in L_2[0,1] : (f, w_i) = 0, i \in \Lambda_0\} \quad (2.2.29)$$

$$\tilde{H} = \{f \in L_2[0,1] : (f, \tilde{w}_i) = 0, i \in \Lambda_0\} \quad (2.2.30)$$

şeklinde $L_2[0,1]$ uzayının alt uzayları olan iki Hilbert uzayı tanımlansın. $i \in \Lambda$ için $\lambda_i = \lambda'_i$ olduğundan L operatörünün H uzayına kısıtlanmış spektrumu ile \tilde{L} operatörünün \tilde{H} uzayına kısıtlanmış spektrumunun çakıştığı açıktır.

H üzerinde

$$T w_n = \tilde{w}_n \quad (2.2.31)$$

biçiminde bir T operatörü tanımlansın. Şimdi T operatörünün sınırlı ve terslenebilir olduğu gösterilecektir. $\alpha, \beta \neq 0$ olduğu varsayalım. Asimptotik sonuçlar, büyük pozitif λ değerleri için

$$\omega(\lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \alpha \sin \beta \sin \sqrt{\lambda} + O(1) \quad (2.2.32)$$

ve buradan büyük n tamsayıları için

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2.33)$$

olduğunu gösterir. Böylece öz fonksiyonlar için asimptotik formüller

$$w_n = \sin \alpha \cos n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2.34)$$

ve

$$\|w_n\|^2 = \int_0^1 w_n^2 dx = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2.35)$$

halini alır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n\|}{\|\tilde{w}_n\|} = 1 \quad (2.2.36)$$

elde edilir. (2.2.32) den $\|Tw_n\|/\|w_n\|$ oranı düzgün sınırlı dolayısıyla da T sınırlı ve terslenebilirdir. Aynı sonuç $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ durumları için de sağlanır.

$f \in H$ olsun. Bu durumda

$$f = \sum_{\Lambda} f_n w_n, \quad (2.2.37)$$

$$f_n = \frac{(f, w_n)}{\|w_n\|^2}$$

ve tüm n değerleri için $\lambda \neq \lambda_n$ olmak üzere,

$$(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n w_n}{\lambda - \lambda_n}. \quad (2.2.38)$$

olacaktır. Yukarıda $(\lambda - L)^{-1}$ operatörünün bir kompakt dolayısıyla sınırlı bir operatör olması ve $(\lambda - L)^{-1} w_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1} w_n$ eşitliği kullanılmıştır. T operatörü kullanılarak,

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{w}_n}{\lambda - \lambda_n} \quad (2.2.39)$$

elde edilir. Bir $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \tilde{w}_n$ fonksiyonunun \tilde{L} operatörünün aralığında kalması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\lambda}_n g_n|^2 < \infty \quad (2.2.40)$$

olmasıdır. Dolayısıyla $\lambda_n = O(n^2)$ olduğundan (2.2.33)' den

$$\sum_{\Lambda} \left| \frac{\lambda_n f_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 \leq \frac{1}{\min_n |\lambda / \lambda_n - 1|^2} \sum_{\Lambda} |f_n|^2 < \infty \quad (2.2.41)$$

elde edilir. Bu sonuç (2.2.39) eşitliğinin sağ tarafının \tilde{L} sınırsız operatörünün aralığında olduğunu gösterir. Buna göre $(\lambda - \tilde{L})\tilde{w}_n = (\lambda - \lambda_n)\tilde{w}_n$ olmasından,

$$(\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1}f = \sum_{\Lambda} f_n \tilde{w}_n = Tf \quad (2.2.42)$$

bulunur. Bu eşitlik keyfi bir $f \in H$ için geçerli olduğundan,

$$(\lambda - \tilde{L})T(\lambda - L)^{-1} = T \quad (2.2.43)$$

operatör özdeşliği elde edilir.

Şimdi T operatörü için farklı bir gösterim araştırılacaktır. Bunu yapmak için (2.2.13) ve (2.2.14) sınır şartlarıyla birlikte L operatörünün Green fonksiyonu kullanılacaktır. v ,

$$v'' + (\lambda - q)v = 0 \quad (2.2.44)$$

$$v(1) = -\sin \beta, \quad v'(1) = \cos \beta$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Green fonksiyonu

$$(\lambda - L) \int_0^1 G(x, y) f(y) dy = f(x)$$

eşitliğini sağlayacak olan $G(x, y)$ fonksiyonudur. Standart hesaplama ile w, v ile ω sırasıyla (2.2.18), (2.2.44) ve (2.2.23) denklemlerini sağlamak üzere,

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{w(x)v(y)}{\omega(\lambda)} & , \quad x < y \\ \frac{w(y)v(x)}{\omega(\lambda)} & , \quad y < x \end{cases} \quad (2.2.45)$$

olduğu görülebilir. Daha uygun bir notasyon ile

$$x_{<} = \min(x, y) \quad (2.2.46)$$

$$x_{>} = \max(x, y)$$

olmak üzere, Green fonksiyonu

$$G(x, y) = \frac{w(x_{<})v(x_{>})}{\omega(\lambda)} \quad (2.2.47)$$

şeklini alır. Asimptotik sonuçlardan $G(x, y)$ fonksiyonunun hem payı hem de paydası, $1/2$. dereceden tam fonksiyonlardır. Bu durumda $G(x, y)$ fonksiyonunun kutup noktaları dışında sınırlı olacak şekilde büyük λ değerleri için,

$$G(x, y) = O\left(\frac{\exp(-\tau|x-y|)}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (2.2.48)$$

ifadesine sahip olunur. $\{C_n\}$, pozitif λ - eksenini λ_n ile λ_{n+1} arasında kesen orijin merkezli çemberlerin bir dizisi olsun. (2.2.48) formülü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{G(x, y)}{\lambda - \mu} d\mu = 0 \quad (2.2.49)$$

olduğunu gösterir. Ayrıca Rezidü Teoremi kullanılarak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{G}{\lambda - \mu} d\mu = -G + \sum_{k=0}^n \frac{w_k(x_{<})v(x_{>})}{\omega'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \quad (2.2.50)$$

elde edilir. Son iki eşitlikten $G(x, y)$ fonksiyonunun λ parametresinin bir fonksiyonu olarak Mittag-Leffler açılımının

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{w_k(x_{<})v(x_{>})}{\omega'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \quad (2.2.51)$$

olduğu görülür. Teorem 2.1.1. den w_n ve v_n fonksiyonlarının her ikisinin λ_n basit öz değerine karşılık gelen öz fonksiyonlar oldukları dolayısıyla lineer bağımlı oldukları bilinmektedir. Burada k_n sabitleri, lineer bağımlılık katsayıları olsun. Özel olarak $x = 1$ için

$$k_n = \begin{cases} \frac{-\sin \beta}{w_n(1)}, & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{w_n'(1)}, & \beta = 0 \end{cases} \quad (2.2.52)$$

olup buradan,

$$(\lambda - L)^{-1} f = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy = \sum_{\lambda} \frac{k_n w_n(x) \int_0^1 w_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (2.2.53)$$

elde edilir. (2.2.53), (2.2.37) ve (2.2.38) eşitlikleri karşılaştırılarak,

$$\|w_n\|^2 = \frac{\omega'(\lambda_n)}{k_n} \quad (2.2.54)$$

olduğu görülür. (2.2.47) eşitliğinin doğrudan kullanılması

$$\begin{aligned} (\lambda - L)^{-1} f &= \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \\ &= \frac{v(x) \int_0^x w(y) f(y) dy + w(x) \int_x^1 v(y) f(y) dy}{\omega(\lambda)} \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

sonucunu verir. Burada amaç

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{v}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{w}_n(x) \int_x^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (2.2.56)$$

olduğunu göstermektir. Burada \tilde{w}_n ve \tilde{v}_n , q yerine \tilde{q} alındığında sırasıyla w_n ve v_n fonksiyonlarına karşılık gelen fonksiyonlardır. Bunu ispatlamak için (2.2.39) ile yukarıdaki eşitliğin sağ taraflarının çakıştığı gösterilmelidir. $k_n w_n(x) = v_n(x)$ ve $\tilde{k}_n \tilde{w}_n(x) = \tilde{v}_n(x)$ kullanılırsa (2.2.56) eşitliğinin sağ tarafı

$$\sum_{\Lambda} \frac{\tilde{k}_n \tilde{w}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + k_n \tilde{w}_n(x) \int_x^1 w_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (2.2.57)$$

halini alır. Şimdiye kadar ikinci spektrum kullanılmadı. Bu spektrum sadece $k_n = \tilde{k}_n$ olduğunu göstermek için kullanılacaktır. Şimdi (2.2.23) ve (2.2.24) eşitliklerine dönüşün ve $\lambda = \lambda_n$ alalım. $\omega(\lambda_n) = 0$ olduğundan,

$$w(1) \cos \beta + w'(1) \sin \beta = 0 \quad (2.2.58)$$

$$w(1) \cos \gamma + w'(1) \sin \gamma = v(\lambda) \quad (2.2.59)$$

denklemleri elde edilir. Bunlar çözülerek,

$$w_n(1) = \frac{\sin \beta v(\lambda_n)}{\sin(\beta - \gamma)}, \quad (2.2.60)$$

(2.2.52) kullanılarak $k_n = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{v(\lambda_n)}$ ve benzer şekilde $\tilde{k}_n = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\tilde{v}(\lambda_n)}$ bulunur.

Bununla birlikte (2.2.26) ve (2.2.28) formüllerinden aynı sıfırlara sahip tam fonksiyonlar olduklarından $v(\lambda)$ ve $\tilde{v}(\lambda)$ en fazla bir sabit çarpanı ile farklılaşır.

Asimptotik formüllerin kullanımı $v(\lambda)$ ve $\tilde{v}(\lambda)$ fonksiyonlarının aynı asimptotik

forma sahip olduğunu, bu nedenle özdeş olmaları gerektiğini gösterir. Bu durumda $n \in \Lambda$ için $k_n = \tilde{k}_n$ elde edilir. Dolayısıyla (2.2.57), (2.2.54) karşılığı yazılarak,

$$\sum_{\Lambda} \frac{k_n \tilde{w}_n(x) \int_0^1 w_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{w}_n(x) \int_0^1 w_n(y) f(y) dy}{\|w_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)} \quad (2.2.61)$$

haline gelir. (2.2.61) eşitliği, (2.2.37) ve (2.2.39) ile karşılaştırılarak (2.2.56) eşitliğinin doğruluğu görülür. (2.2.42)'de (2.2.56) yazılarak,

$$(\lambda - \tilde{L}) \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{v}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{w}_n(x) \int_0^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} = Tf \quad (2.2.62)$$

elde edilir. Şimdi

$$g(x) = \frac{\tilde{v}(x) \int_0^x w(y) f(y) dy + \tilde{w}(x) \int_0^1 v(y) f(y) dy}{\omega(\lambda)} \quad (2.2.63)$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu verilsin. g için Mittag-Leffler açılımı

$$g(x) = \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_0^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (2.2.64)$$

$$+ \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{v}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{w}_n(x) \int_0^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.64)'deki ikinci toplam (2.2.56)'nın sağ tarafıdır. İlk terimde $\tilde{u}_n(x)$, λ_n için hesaplanmış $\tilde{v}_n(x)$ fonksiyonunu temsil eder. Burada $n \in \Lambda_0$ için λ_n , (2.2.13)-(2.2.14) sınır şartları ile birlikte \tilde{L} operatörünün bir öz değeri değildir. Basitçe $\tilde{u}_n'' + (\lambda_n - \tilde{q})\tilde{u}_n = 0$ denkleminin herhangi özel bir özel sınır koşulunu sağlamayan

çözümüdür. Benzer şekilde $\tilde{z}_n(x)$, $\lambda = \lambda_n$ de $\tilde{w}(x)$ fonksiyonunu temsil eder. (2.2.62), (2.2.63) ve (2.2.64) birleştirilerek,

$$(\lambda - \tilde{L})^{-1} Tf = g(x) - \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (2.2.65)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafının dolayısıyla da sağ tarafının $(\lambda - \tilde{L})$ operatörünün tanım kümesinde olduğu açıktır. Diğer bir ifade ile sağ taraf birinci mertebeden mutlak sürekli türeve sahip olmalıdır. (2.2.65)' in türevi

$$\left\{ \frac{\tilde{v}'(x) \int_0^x w(y) f(y) dy + \tilde{w}'(x) \int_x^1 v(y) f(y) dy}{\omega(\lambda)} - \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n'(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n'(x) \int_x^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\} \quad (2.2.66)$$

$$+ \left\{ \frac{\tilde{v}(x)w(x) - \tilde{w}(x)v(x)}{\omega(\lambda)} - \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x)w_n(x) - \tilde{z}_n(x)v_n(x)}{\omega'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\} f(x)$$

şeklindedir. Rezidü hesaplaması ile ikinci parantezin sıfır olacağı görülür. İlk parantez için türev alınarak (2.2.65) eşitliğinden

$$Tf = \left\{ \frac{\tilde{v}'(x)w(x) - \tilde{w}'(x)v(x)}{\omega(\lambda)} - \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n'(x)w_n(x) - \tilde{z}_n'(x)v_n(x)}{\omega'(\lambda)(\lambda - \lambda_n)} \right\} f(x) \quad (2.2.67)$$

$$- \sum_{\lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy + \tilde{z}_n(x) \int_x^1 v_n(y) f(y) dy}{\omega'(\lambda_n)}$$

elde edilir. T operatörü λ parametresinden bağımsız olmalıdır. Dolayısıyla $\lambda \rightarrow \infty$ iken (2.2.67)' de parantez içerisindeki ifadenin “bir” olduğu görülür. Bunun yanında

$n \in \Lambda_0$ için $v_n = k_n w_n$ ve $\int_0^1 w_n(y) f(y) dy = 0$ olmasından,

$$Tf = f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{\omega'(\lambda_n)} \int_0^x w_n(y) f(y) dy \quad (2.2.68)$$

bulunur.

$$\frac{1}{2} \tilde{y}_n(x) = \frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{\omega'(\lambda_n)}$$

tanımlanarak,

$$Tf = f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{y}_n(x) \int_0^x w_n(y) f(y) dy \quad (2.2.69)$$

elde edilir. (2.2.43) formülü vasıtasıyla L' nin tanım kümesinde olan her $f \in H$ için

$$\tilde{L}Tf = TLf$$

sonucuna varılır. Bu durumda doğrudan bir hesaplama ile

$$(q - \tilde{q})f = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)' f$$

olduğu görülür. Bu ifade H' in yoğun bir alt kümesinde sağlanacağından sonuç olarak hemen hemen her yerde

$$(q - \tilde{q}) = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)'$$

elde edilir. Eğer Λ_0 boş ise bu durumda (2.2.69)' dan görüleceği üzere T özdeş operatör olacağından $L = \tilde{L}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.5. q potansiyel fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde toplanabilir ve hemen hemen her yerde $q(x) = q(1-x)$ olmak üzere,

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad (2.2.70)$$

$$u(1)\cos\alpha - u'(1)\sin\alpha = 0$$

sınır koşulları için $\{\lambda_i\}$ spektrumuna sahip $Lu = -u'' + qu$ operatörü göz önüne alınsın. \tilde{q} , q potansiyel fonksiyonu ile aynı şartları sağlamak üzere bir diğer operatör $\tilde{L}u = -u'' + \tilde{q}u$ olsun. $\{\lambda'_i\}$, \tilde{L} operatörünün (2.2.18) şartları için spektrumu olmak üzere Λ_0 ve Λ sırasıyla $\lambda_i \neq \lambda'_i$ ve $\lambda_i = \lambda'_i$ olduğu durumları veren sonlu ve sonsuz indis kümeleri olsun. Bu durumda $q - \tilde{q}$ Teorem 2.2.4' de verildiği gibidir. Eğer $\Lambda_0 = \emptyset$ ise hemen her yerde $q = \tilde{q}$ olur (Hochstadt, 1973).

İspat: Buradaki ispatın birçok adımı bazı modifikasyonlarla birlikte benzerdir. (2.2.44) te $\beta = -\alpha$ olduğundan $v(1-x) = w(x)$ olduğu görülür. Teorem 2.2.4' de ikinci spektrum sadece $k_n = \tilde{k}_n$ eşitliğinin gösterildiği adımda kullanıldı. Burada bunu göstermek için,

$$v_n(x) = k_n w_n(x) = w_n(1-x) \quad (2.2.71)$$

yazılır. Burada $x=0$ ve $x=1$ yazılarak,

$$k_n w_n(1) = \sin\alpha \quad , \quad k_n \sin\alpha = w_n(1) \quad ,$$

ve bunlar kullanılarak $\sin\alpha \neq 0$ ise $k_n = \pm 1$ bulunur. Eğer $\alpha = 0$ ise (2.2.71) türevlendikten sonra $x=0$ ve $x=1$ yazılarak aynı sonuç bulunur. $\|w_n\|^2 > 0$ olduğundan (2.2.54)' den $k_n = \text{sgn } \omega'(\lambda_n)$ elde edilir. $n \in \Lambda$ için $\text{sgn } \omega'(\lambda_n) = \text{sgn } \tilde{\omega}'(\lambda_n)$ olduğundan $k_n = \tilde{k}_n$ bulunur. İspatın geri kalanı bu noktadan sonra Teorem 2.2.4 gibidir. Sonuç olarak hemen hemen her yerde $q(x) = \tilde{q}(x)$ olduğu görülür.

2.3. Simetrik Potansiyeller Üzerine

Kısım 2.2' den görüleceği üzere potansiyel fonksiyonunun formu ile ilgili kısıtlama yapmaksızın teklik için gerekli olan veri, sınır koşullarından birinin değişimi ile elde edilen iki spektrumdur. Eğer potansiyel fonksiyonu, aralığın orta noktasına göre simetrik ise bu durumda tekliği garanti eden veri sadece bir spektrumdur. Benzer durum literatürde yarı ters problem olarak bilinen problemler için de geçerlidir. Bu kısımda simetriklik tanımı genelleştirilerek potansiyel fonksiyonun tekliği için gerekli olan verinin değişimi incelenecektir. Bunun için önce gerekli olacak tanım ve teoremler verilecek daha sonra ise ana teoremlere geçilecektir. Burada kullanılacak veri yine spektrumdur. L operatörü (2.2.12) şeklinde olmak üzere

$$L[y] = \lambda y ; y'(0) - hy(0) = 0 , y'(a) - Hy(a) = 0 \quad (2.3.1)$$

problemi göz önüne alınacaktır.

Teorem 2.3.1. $\phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun, $L[y] = \lambda y$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$, $y'(0) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ve $q(x)$ potansiyelinin lokal integrallenebilir m ' inci mertebe türevlere sahip olduğu varsayılınsın. Bu durumda,

$$\phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \quad (2.3.2)$$

$$K(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \quad (2.3.3)$$

olacak şekilde her bir değişkenine göre lokal integrallenebilir $m+1$ ' inci mertebe türevlere sahip $K(x, t)$ fonksiyonu mevcuttur (Levitan ve Gasymov 1964).

Lemma 2.3.2. (a, b) aralığı için $f(x) \in L(a, b)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \sqrt{\lambda} x dx = 0$$

eşitliği sağlanır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Lemma 2.3.3. $q(x) \in L(0, a)$ olmak üzere $\{\mu_n\}$ dizisi (2.3.1) sınır değer probleminin spektrumu ise bu takdirde,

$$\sqrt{\mu_n} = \frac{n\pi}{a} + \frac{aa_0}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3.4)$$

asimptotik formülü sağlanır. Burada $m \neq n$ için $\mu_m \neq \mu_n$ ve $a_0 = \frac{K(a, a) + H}{a\pi}$ şeklindedir (Eskitaşçıoğlu ve Açıl, 2017).

İspat: Teorem 2.3.1. ve (2.3.1) probleminde $y'(a) - Hy(a) = 0$ sınır şartı kullanılarak,

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} a + \int_0^a \left(\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} \cos \sqrt{\mu} t \right) dt + K(a, a) \cos \sqrt{\mu} a \\ & + H \left[\cos \sqrt{\mu} a + \int_0^a K(a, t) \cos \sqrt{\mu} t dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

elde edilir. μ_n sayıları (2.3.5) eşitliğinin kökleri ve $n \rightarrow \infty$ iken $\mu_n \rightarrow \infty$ olduğundan μ_n için ilk yaklaşım

$$\sin \sqrt{\mu_n} a + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) = 0$$

dolayısıyla,

$$\sqrt{\mu_n} = \frac{n\pi}{a} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olarak bulunur. Şimdi (2.3.5) te $\sqrt{\mu_n} = \frac{n\pi}{a} + \frac{aa_0}{n} + \frac{\gamma_n}{n}$ yazılsın. Bu durumda

$$(-1)^n a \left[\frac{aa_0 + \gamma_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] - \frac{(-1)^n [K(a, a) + H]}{n\pi \left(1 + \frac{a^2 a_0 + \gamma_n a}{\pi n^2}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \int_0^a \left[HK(a, t) + \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \Big|_{x=a} \right] \cos \sqrt{\mu_n} t dt = 0$$

elde edilir. $\left[HK(a, t) + \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \Big|_{x=a} \right] \in L(0, a)$ olduğundan Lemma 2.3.2. kullanılarak

$n \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^a \left[HK(a, t) + \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \Big|_{x=a} \right] \cos \sqrt{\mu_n} t dt \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Bu nedenle $a_0 = \frac{K(a, a) + H}{a\pi}$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\gamma_n \rightarrow 0$. Bu ise ispatı

tamamlar. \square

Bu Lemmanın daha özel hali Levitan ve Gasymov (1964) tarafından yapılan çalışmanın Ek-II kısmında görülebilir.

Yorum: (2.3.4) asimptotik formülü (2.3.1) sınır değer problemi tarafından kabul edilecek şekilde (2.3.4)' de a dan farklı bir \tilde{a} değeri bulunamaz (Eskitaşçioğlu ve Açıl, 2017).

Tanım 2.3.1. Bir $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Eğer $\forall x \in [0, 1]$ ve

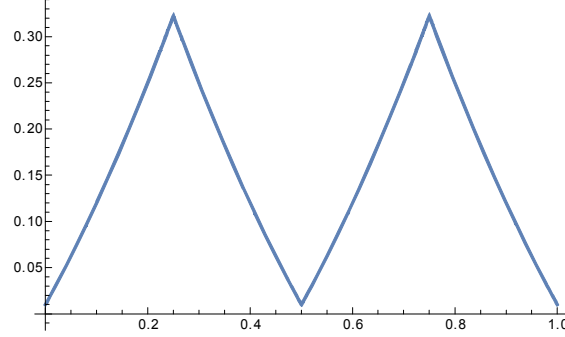
$n = 1, 2, \dots, k$ için $f(x) = f\left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right)$ oluyorsa bu fonksiyon, k . dereceden simetrik

fonksiyon olarak adlandırılacaktır (Eskitaşçioğlu ve Açıl, 2017).

Örnek. Aşağıda verilen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 0.01 & , \quad 0 \leq x < 0.25 \\ x^2 - 2x + 0.76 & , \quad 0.25 \leq x < 0.5 \\ x^2 - 0.24 & , \quad 0.5 \leq x < 0.75 \\ x^2 - 3x + 2.01 & , \quad 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu, 2. dereceden simetrik bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun grafiği



Şekil 2.1. ikinci dereceden simetrik f fonksiyonunun grafiği

şeklindedir.

Teorem 2.3.4. $q(x) \in L(0,1)$ fonksiyonu ikinci dereceden simetrik bir fonksiyon ve $h = H$ olsun. Bu takdirde $a = 1$ olmak üzere, (2.3.1) Sturm-Liouville problemi için q potansiyel fonksiyonu, öz değerlerinin sonlu sayıda adedi hariç yarı spektrum ile tek şekilde belirlidir (Eskitaşçıoğlu ve Açıl, 2017).

İspat:

$$-y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0 \quad (2.3.6)$$

$$y'(0) - \frac{h}{2}y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{H}{2}y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

sınır değer problemi verilsin. Simetrik potansiyel hakkındaki teoriden $x \in [0,1]$ için q potansiyel fonksiyonu orta noktaya göre simetrik olduğunda bir spektrumun potansiyel fonksiyonunu tek olarak belirlediği bilinmektedir. Üstelik $x \in [0,1/2]$ için $q(x) = q(1/2 - x)$ olduğundan aynı durum (2.3.6) için de geçerlidir. Burada gösterilmesi gereken (2.3.6) nın spektrumunun sonlu sayıda eleman dışında, $a = 1$ için (2.3.1) in spektrumunun yarısını temsil ettiği. Lemma 2.3.3. ten (2.3.6) ve (2.3.1) in spektrumları sırasıyla

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_n} = 2n\pi + \frac{\tilde{a}_0}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{a_0}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik formları sağlar. Buradan ve \tilde{K} ile K sırasıyla problemlerin çözümlerinde yer alan çekirdekler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{\tilde{K}(1/2, 1/2) + H/2}{\pi/2} = \frac{1}{\pi} [2\tilde{K}(1/2, 1/2) + H] = \frac{1}{\pi} \left[2 \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) dx \right) + H \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[H + \left(h + \int_0^1 q(x) dx \right) \right] = \frac{1}{\pi} [H + K(1,1)] = a_0 \end{aligned}$$

olmasından büyük n değerleri için

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_n} - \sqrt{\lambda_{2n}} = o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Bu sonuç ispatı tamamlar.

Sonuç 2.3.1. $q(x) \in L(0,1)$ fonksiyonu k . dereceden simetrik bir fonksiyon ve $h = H$ olsun. Bu takdirde $a = 1$ olmak üzere (2.3.1) Sturm-Liouville problemi için q potansiyel fonksiyonu, öz değerlerinin sonlu sayıda adedi hariç $\frac{1}{2^{k-1}}$ spektrum ile tek şekilde belirlidir (Eskitaşçıoğlu ve Açıl, 2017).

Bu sonucun ispatı Teorem 2.3.4 kullanılarak tümevarım ile kolaylıkla ispatlanabilir. Bu sonuç ayrıca q potansiyelinin sonsuz dereceden simetriklik durumunun ne olacağı sorusunu da doğrulamaktadır. Bu durum ile ilgili teorem aşağıdadır.

Teorem 2.3.5. $q(x) \in C(0,1)$ fonksiyonu sonsuz dereceden simetrik bir fonksiyon ve $h = -H$ olsun. Bu durumda $a = 1$ olmak üzere, (2.3.1) Sturm-Liouville Problemi için q potansiyel fonksiyonu sadece bir öz değer ile belirlidir (Eskitaşçıoğlu ve Açıl, 2017).

İspat: $q(x) \in C(0,1)$ olduğundan Teorem 1.10. den $[0,1]$ üzerinde potansiyel fonksiyonunu temsil eden, m . dereceden bir $P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$ polinomu mevcuttur. Bu durumda $\forall k$ için $P(x) = P\left(\frac{1}{2^{k-1}} - x\right)$ olduğu görülür. $k = 1, 2, \dots, n$ için bu eşitlik yazılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{n} \left\{ nc_0 + c_1 \left[(1-x) + \left(\frac{1}{2} - x\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right) \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. + c_m \left[(1-x)^m + \left(\frac{1}{2} - x\right)^m + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right)^m \right] \right\} \\ &= c_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m c_k \left[(1-x)^k + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right)^k \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki toplamın genel terimi için Teorem 1.9. kullanılarak,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)^k + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right)^k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{(2^k)^{n-1}} \right) \right. \\ &\quad \left. - x \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{(2^{k-1})^{n-1}} \right) + \dots + (-1)^k x^k n \right\} = (-1)^k x^k \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise P polinomunun tek dereceli terimlerinin katsayılarının sıfır olması gerektiğini gösterir. Dolayısıyla genellikle bir şey kaybetmeksizin $m = 2k$ alınarak P polinomu $P(x) = c_0 + c_2x^2 + \dots + c_{2k}x^{2k}$ olarak elde edilir. Ayrıca $x = 0$ da

$P(0) = P\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ olacağından $n = 2, 3, \dots, k+1$ değerleri kullanılarak,

$$\begin{pmatrix} 2^{-2} & 2^{-4} & \cdot & \cdot & \cdot & 2^{-2k} \\ 2^{-4} & 2^{-8} & \cdot & \cdot & \cdot & 2^{-4k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2^{-2k} & 2^{-4k} & \cdot & \cdot & \cdot & 2^{-2k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. A ile göstereceğimiz katsayılar matrisi için LU ayrışımı kullanılarak $M = (2^2 - 1)(2^4 - 1) \dots (2^{2(k-1)} - 1)$ olmak üzere,

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2^{-2k} & 2^{-4k} & 2^{-6k} & \cdot & \cdot & \cdot & 2^{-2k^2} \\ 0 & 3 \cdot 2^{-4k+2} & 2^{-6k+2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 45 \cdot 2^{-6k+6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & M \cdot 2^{-k^2-k} \end{vmatrix}$$

olup bunun hesaplamasının genelleştirilmesi ile

$$Det(A) = (2^2 - 1)^{k-1} (2^4 - 1)^{k-2} \dots (2^{2(k-1)} - 1)^{k-1} 2^{\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}} \neq 0$$

elde edilir. Bu ise $c_2 = c_4 = \dots = c_{2k} = 0$ dolayısıyla $q(x) = c_0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $h = -H$ ve (2.3.1) kullanılarak q potansiyelinin tek bir öz değer ile tek şekilde belirli olacağı görülür.

2.4. Potansiyelin Varlığı

Bu bölüm de son olarak $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ gibi iki sayı dizisi verildiğinde bunları spektrum kabul eden Sturm-Liouville Probleminin bir diğer deyişle potansiyel fonksiyonun yapısı ile birlikte varlığı ele alınacaktır. Bu konu ile

alakalı olarak spektrum ile normlaştırıcı sabitler ve iki spektrum vasıtasıyla potansiyelin varlığı ile ilgili teoremler verilecektir.

$\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ sayıları

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.4.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır değer probleminin karakteristik değerlerini yani sırasıyla spektrum ile normlaştırıcı sabitlerini temsil etsin.

Teorem 2.4.1. $\forall n$ için $\alpha_n > 0$ ve a_0, a_1, b_0 sabitler olmak üzere,

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2.4.2)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (2.4.3)$$

ise bu durumda (2.4.1) için karakteristik değerler olarak $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ dizilerine karşılık mutlak sürekli bir $q(x)$ fonksiyonu mevcuttur (Levitan ve Gasymov, 1964).

Şimdi $h_1 \neq h_2$ olmak üzere,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.4.4)$$

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) - Hy(\pi) = 0 \quad (2.4.5)$$

$$y'(0) - h_2 y(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) - Hy(\pi) = 0 \quad (2.4.6)$$

için (2.4.4)-(2.4.5) ve (2.4.4)-(2.4.6) problemleri verilsin.

Teorem 2.4.2. $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere aşağıda verilen koşulları sağlayan $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ şeklinde iki sayı dizisi verilsin.

- i) λ_n ve μ_n sayıları geçişli yani $\forall n$ için $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$ veya $\mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1}$.

ii) λ_n ve μ_n , $a_0 \neq \tilde{a}_0$ olmak üzere,

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \sqrt{\mu_n} = n + \frac{\tilde{a}_0}{n} + \frac{\tilde{a}_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2.4.7)$$

asimptotiklerini sağlasın. Burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[h_1 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right], \quad \tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \left[h_2 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right].$$

Bu takdirde $\{\lambda_n\}$, (2.4.4)-(2.4.5) probleminin $\{\mu_n\}$ ise (2.4.4)-(2.4.6) probleminin spektrumu olacak şekilde mutlak sürekli bir $q(x)$ fonksiyonu ve h_1, h_2, H sayıları vardır (Levitan ve Gasymov, 1964).

Teoremin ispatına geçmeden önce gerekli bir lemma verilecektir.

Lemma 2.4.3. $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $|\mu_k - \lambda_k| \leq a$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right|^p \leq \begin{cases} C \frac{\ln n}{n}, & p = 1 \\ C \frac{a^p}{n^p}, & p \geq 2 \end{cases} \quad (2.4.8)$$

eşitsizliği vardır (Levitan ve Gasymov, 1964).

İspat. $k \neq n$ olmak üzere, yeterince büyük n değerleri için $\left| \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right| < \frac{C}{n} < 1$ olacak

şekilde C sabitleri mevcuttur. Hipotezden

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right|^p \leq a^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k - \lambda_n|^p}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\lambda_n = O(n^2)$ olmasından mutlak değer ve $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$ geçişlilik özelliği göz önüne alınarak sağ taraftaki toplam ile

$$\int_0^{n-1} \frac{dx}{(\mu_n - x^2)^p} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \mu_n)^p}$$

integrallerin toplamının aynı mertebeden olduğu kolaylıkla görülebilir. İntegraller ayrı ayrı göz önüne alınırsa,

$$\int_0^{n-1} \frac{dx}{(\mu_n - x^2)^p} \leq \frac{C}{n^p} \int_0^{n-1} \frac{dx}{(\sqrt{\mu_n} - x)^p} = \begin{cases} O\left(\frac{\ln n}{n}\right), & p=1 \\ O\left(\frac{1}{n^p}\right), & p>1 \end{cases},$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \mu_n)^p} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\mu_n}}{x + \sqrt{\mu_n}} \right| \Bigg|_{x=n+1}^{\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad p=1,$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - \mu_n)^p} \leq \frac{C}{n^p} \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{(x - \sqrt{\mu_n})^p} = \frac{C}{n^p}, \quad p>1$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.2. nin ispatı. Yukarıdaki özelliklere sahip $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ şeklinde iki sayı dizisi verilsin. Teorem 2.3.1' den de görüleceği üzere λ_n sayıları (2.4.2) asimptotik formülünü sağlar. Buradan α_n sayılarının (2.4.3) eşitliğini sağladığının ve hepsinin pozitif olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bu iki adımda gösterilecektir.

$$1. \text{ Adım: (2.4.3) eşitliği için } \alpha_n = \frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right) \text{ formülünden}$$

faizlanılacaktır. Bu formülde çarpımdan sonraki “ ’ ” işareti $k=n$ durumunun atlandığını göstermektedir. Formülde $h_2 - h_1 = \pi(\tilde{a}_0 - a_0)$ olduğu hipotezden bilinmektedir. Aşağıda verilen

$$\Psi(\lambda_n) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right) \quad (2.4.8)$$

sonsuz çarpımını göz önüne alınsın. Buradan

$$\ln \Psi(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right),$$

λ_n ve μ_n sayılarının geçişli olmasından, dolayısıyla da Taylor açılımı kullanılarak,

$$\ln \Psi(\lambda_n) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right)^p \right]$$

elde edilir. $\ln \Psi(\lambda_n)$ fonksiyonunun parantez içindeki ilk iki terimi dışındaki terimler ele alınırsa Lemma 2.4.3 kullanılarak,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right)^p \right] \right| \leq \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right|^p$$

$$\leq C \sum_{p=3}^{\infty} \frac{a^p}{n^p} = \frac{Ca^3}{n^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{n^p} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
(2.4.9)

olduğu görülür. Son eşitlikte iki serinin eşitliği ikinci seri açılarak kolaylıkla görülebilir. Böylece,

$$\ln \Psi(\lambda_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
(2.4.10)

elde edilir. Şimdi sağ taraftaki her bir toplam ayrı ayrı göz önüne alınacaktır. Önce ilk toplam göz önüne alınsın. (2.4.7) formülleri yeniden düzenlenirse $c_0 = a_0^2 + 2a_1$, $\tilde{c}_0 = \tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_1$ olmak üzere,

$$\lambda_n = n^2 + 2a_0 + \frac{c_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \mu_n = n^2 + 2\tilde{a}_0 + \frac{\tilde{c}_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
(2.4.11)

elde edilir. Bu asimptotik formüller kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} &= \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda_n} + \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k - \mu_k - 2(a_0 - \tilde{a}_0)] \left[\frac{1}{\mu_k - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} \right] \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(a_0 - \tilde{a}_0)}{\mu_k - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k - \mu_k - 2(a_0 - \tilde{a}_0)] \\
&= S_0 + S_1 + 2(a_0 - \tilde{a}_0)S_2 + S_3
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

bulunur.

$$S_0 = \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda_n} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{\lambda_n \left(1 - \frac{\mu_0}{\lambda_n}\right)} = \frac{\mu_0 - \lambda_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

S_1 terimine $\frac{\tilde{c}_0 - c_0}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \lambda_k}$ terimi eklenip ve çıkarılarak,

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k [\lambda_k - \mu_k - 2(a_0 - \tilde{a}_0)] - (\tilde{c}_0 - c_0)}{\lambda_n (\mu_k - \lambda_k)} + \frac{\tilde{c}_0 - c_0}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \lambda_k}$$

elde edilir. (2.4.11) ile verilen asimptotik formüllerin faydalanarak

$$\mu_k [\lambda_k - \mu_k - 2(a_0 - \tilde{a}_0)] - (\tilde{c}_0 - c_0) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

ve bu kullanılarak,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k [\lambda_k - \mu_k - 2(a_0 - \tilde{a}_0)] - (\tilde{c}_0 - c_0)}{\lambda_n (\mu_k - \lambda_k)} \right| \leq \frac{C}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k |\mu_k - \lambda_k|} \leq \frac{C}{n^3}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$S_1 = \frac{\tilde{c}_0 - c_0}{n^2} S_2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

bulunur. S_2 ' ye geçmeden önce kısalığından dolayı S_3 verilecektir. Bunun için görüleceği üzere $k = n$ terimi eklenip çıkarılacaktır. Buna göre

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} [\mu_k - \lambda_k - 2(\tilde{a}_0 - a_0)] \text{ olmak üzere,}$$

$$S_3 = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} [\mu_k - \lambda_k - 2(\tilde{a}_0 - a_0)] - \frac{1}{\lambda_n} [\mu_n - \lambda_n - 2(\tilde{a}_0 - a_0)] = \frac{A}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

elde edilir. Böylelikle (2.4.12)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} = \frac{A + \mu_0 - \lambda_0}{n^2} + \left[2(a_0 - \tilde{a}_0) + \frac{\tilde{c}_0 - c_0}{n^2} \right] S_2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (2.4.13)$$

haline gelir. Son olarak S_2 hesaplanacaktır. Taylor açılımından kolaylıkla görülebilecek

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \text{ özdeşliği kullanılarak,}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k - \lambda_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2\tilde{a}_0 + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - \lambda_n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n) \left[1 + \frac{2\tilde{a}_0}{k^2 - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{(k^2 - \lambda_n)k^2}\right) \right]} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda_n} - 2\tilde{a}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^2} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda_n} \frac{\left[\frac{2\tilde{a}_0}{k^2 - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{k^2(k^2 - \lambda_n)}\right) \right]^2}{1 + \frac{2\tilde{a}_0}{k^2 - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{(k^2 - \lambda_n)k^2}\right)} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2 - \lambda_n)^2} \leq \frac{C}{n^3}$ kestirimini ve Lemma 2.4.3. kullanılarak,

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda_n} - 2\tilde{a}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2.4.14)$$

olduğu görülür.

Şimdi (2.4.10) un ikinci terimi göz önüne alınsın. (2.4.11) asimptotik formüllerinin kullanımı ile

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda_n} \right)^2 = -2(a_0 - \tilde{a}_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (2.4.15)$$

olduğunu görmek kolaydır. Sonuç olarak (2.4.10) eşitliği (2.4.13), (2.4.14) ve (2.4.15) sonuçlarının yazılması ile

$$\begin{aligned} \ln \Psi(\lambda_n) &= \frac{A + \mu_0 - \lambda_0}{n^2} + \left[2(a_0 - \tilde{a}_0) + \frac{\tilde{c}_0 - c_0}{n^2} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda_n} \\ &\quad - \left[4\tilde{a}_0(a_0 - \tilde{a}_0) + 2(a_0 - \tilde{a}_0)^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

halini alır. Buradan görüldüğü üzere son olarak $p = 1, 2$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^p}$ toplamının

asimptotik davranışı hesaplanmalıdır. $p = 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)} - \frac{1}{(n^2 - \lambda_n)} = - \left[\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n}} \cot(\pi\sqrt{\lambda_n}) - \frac{1}{2\lambda_n} \right] - \frac{1}{(n^2 - \lambda_n)} \\ &= \frac{1}{2\lambda_n} - \left[\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n}} \cot(\pi\sqrt{\lambda_n}) + \frac{1}{(n^2 - \lambda_n)} \right] \end{aligned}$$

bulunur. (2.4.7) ile verilen asimptotik formüllerden $\varepsilon = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ olmak üzere

$\sqrt{\lambda_n} = n + \varepsilon$ yazılabileceği görülebilir. Bunu yukarıda kullanarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \lambda_n} = \frac{3}{4n^2} + \frac{\pi^2 a_0}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2.4.17)$$

ve benzer işlemler ile

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \lambda_n)^2} = \frac{\pi^2}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2.4.18)$$

sonuçları elde edilir. (2.4.16), (2.4.17) ve (2.4.18) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \ln \Psi(\lambda_n) &= \frac{A + \mu_0 - \lambda_0}{n^2} + 2(a_0 - \tilde{a}_0) \left(\frac{3}{4n^2} + \frac{\pi^2 a_0}{6n^2} \right) + 2(a_0^2 - \tilde{a}_0^2) \frac{\pi^2}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left[A + \mu_0 - \lambda_0 + \frac{\pi^2}{6} (a_0 - \tilde{a}_0)^2 + \frac{3}{2} (a_0 - \tilde{a}_0) \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

buradan ise

$$\Psi(\lambda_n) = 1 + \frac{1}{n^2} \left[A + \mu_0 - \lambda_0 + \frac{\pi^2}{6} (a_0 - \tilde{a}_0)^2 + \frac{3}{2} (a_0 - \tilde{a}_0) \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

bulunur. $\alpha_n = \frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n} \Psi_n(\lambda_n)$ ve

$$\begin{aligned} \frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n} &= \frac{h_2 - h_1}{2(a_0 - \tilde{a}_0) + \frac{\tilde{c}_0 - c_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{h_2 - h_1}{2(a_0 - \tilde{a}_0)} \left[1 - \frac{\tilde{c}_0 - c_0}{2(a_0 - \tilde{a}_0)n^2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4n^2} \left[\frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} + \frac{\tilde{a}_1 - a_1}{\tilde{a}_0 - a_0} \right] \end{aligned}$$

olmasından,

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4n^2} \left[\frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} + \frac{\tilde{a}_1 - a_1}{\tilde{a}_0 - a_0} + \frac{2(A + \mu_0 - \lambda_0)}{\pi} + \frac{\pi}{3} (a_0 - \tilde{a}_0)^2 + \frac{3}{\pi} (a_0 - \tilde{a}_0) \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

yada

$$b_0 = -\frac{\pi^2}{4} \left[\left(\frac{\tilde{a}_0 - a_0}{2} \right) \left(1 - \frac{6}{\pi} + \frac{2\pi}{3} (\tilde{a}_0 - a_0) \right) + \frac{\tilde{a}_1 - a_1}{\tilde{a}_0 - a_0} + \frac{2(A + \mu_0 - \lambda_0)}{\pi} \right]$$

olmak üzere,

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (2.4.19)$$

asimptotik formülü elde edilir. Yani α_n sayıları (2.4.3) eşitliğini sağlar.

2. Adım: İspatın tamamlanması için Teorem 2.4.1 den görüleceği üzere geriye $\forall n$ için $\alpha_n > 0$ olduğunu göstermek kalmıştır. Bunun için

$$m(\lambda) = -\frac{1}{h_2 - h_1} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}$$

fonksiyonu verilsin. Hipotezden bu fonksiyonun kutup ve sıfırlarının geçişmeli olduğu bilinmektedir. Ayrıca kutupların basit olmasından,

$$\begin{aligned} \text{Res}(m(\lambda), \lambda_n) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) m(\lambda) = -\frac{1}{h_2 - h_1} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda} \\ &= \frac{1}{h_2 - h_1} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_k - \lambda)(\mu_n - \lambda)}{\lambda_k - \lambda} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{h_2 - h_1} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n} \\ &= \left(\frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \right)^{-1} = \frac{1}{\alpha_n} \end{aligned}$$

elde edilir. Çarpım içerisindeki ifadenin, geçişlilikten dolayı hem $k < n$ hem de $k > n$ için işaret değiştirmedeği kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla geriye $\frac{h_2 - h_1}{\mu_n - \lambda_n}$ katsayısını

kontrol etmek gerekir ki burada yine geçişlilikten dolayı $\forall n$ için $\mu_n - \lambda_n < 0$ ya da $\mu_n - \lambda_n > 0$ olduğu görülür. Bu nedenle tüm n değerleri için α_n sayılarının tek işaretli olduğu sonucu elde edilir. Ayrıca (2.4.19) asimptotik formülüne bakılırsa yeterince

büyük n değerleri için α_n sayılarının pozitif olduğu görülür. Bu iki sonuçtan dolayı $\forall n$ için $\alpha_n > 0$ şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Bu veri yardımı ile potansiyelin tek şekilde belirli olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Ancak bunun ile ilgili olarak Levinson (1949) tarafından yapılan çalışma verildiğinden burada tekrara yeniden girilmemiştir.



3. TERS STURM-LIOUVILLE İNŞAA PROBLEMİ

1980' lerin ortalarında Ters Sturm-Liouville Probleminde potansiyel için varlık-teklik problemleri, potansiyelin inşasına doğru kaymaya başlamıştır. Bu alanda yapılan çalışmaları, klasik teklik verisi ile potansiyelin inşası ve nodal noktalar vasıtasıyla potansiyelin inşası şeklinde iki başlıkta incelemek mümkündür.

Bu bölümün ilk kısmında ters problem için nodal nokta verisi kullanılarak teklik ve potansiyelin inşası kısaca verilecektir. Son kısmında ise gerçek hayatta ortaya çıkan ilgili problemlerle daha uygun olan kısmi veri yardımı ile potansiyelin inşası işlenecektir. Öncelikle kısaca geçmişten günümüze geliştirilen yaklaşımlar özetlenecektir. Sonra ilk olarak Alman matematikçi Norbert Röhl (2005) tarafından çalışılan amaç fonksiyonu kullanılarak problem için bir algoritma oluşturulacaktır. Bu algoritma yardımıyla hem iki spektrum hem de farklı tip veriler kullanılarak potansiyel fonksiyonu inşaa edilecektir.

3.1. Nodal Nokta Verisi ile Potansiyelin İnşası

Nodal veri ile ilgili problem ilk kez McLaughlin (1988) tarafından $q \in L^2(0,1)$ olmak üzere,

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$$

problemi için yapılan çalışma ile ortaya çıkmıştır. Ayrıca aynı yıl Shen (1988), McLaughlin' den bağımsız olarak String operatörü için ters nodal problemi çözdü.

Hald ve McLaughlin (1989) çalışmalarında daha önce verdiği metodu kullanarak,

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad , \quad y'(1) + Hy(1) = 0$$

sınır şartları için teklik teoremini elde ettiler. Sonra teklik sonuçları ile bağlantılı olarak bazı sınırlar ve algoritmalar oluşturarak çeşitli sayısal sonuçlar verdiler. Yazarlar aynı problemi, dikdörtgensel zar ile ilgili 1995 yılındaki çalışmalarında Dirichlet koşulu için ele almış ve nodal uzunlukların bir alt kümesi vasıtasıyla potansiyel fonksiyonun tek şekilde belirli olacağını göstermişlerdir.

Xue-Feng Yang (1997), $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ ve $q \in L_1[0,1]$ olmak üzere,

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y = 0$$

$$y(0)\cos(\alpha) + y'(0)\sin(\alpha) = 0$$

$$y(1)\cos(\beta) + y'(1)\sin(\beta) = 0$$

problemini göz önüne alarak Hald ve McLaughlin tarafından verilen bir sayısal çözüm gereksinimini ortadan kaldırarak nodal noktalardan bir tam çözüm elde etti.

Law ve Yang (1998) çalışmalarında q potansiyel fonksiyonunun integral ortalaması ile birlikte nodal noktaları kullanarak, potansiyel fonksiyonu ve sınır şartlarının yanı sıra potansiyelin türevlerini de yapılandırmışlardır.

Law ve arkadaşları (1999) çalışmalarında sadece nodal noktaları kullanarak q potansiyel fonksiyonunun düzgünlüğü üzerine çalışmışlar ve $q \in L_1(0,1)$ için basit ve doğrudan bir yapılandırma formülü vermişlerdir.

Shen ve Shieh (2000), potansiyel fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı simetrik bir matris değerli fonksiyon olmak üzere, vektöryel Sturm-Liouville Problemini göz önüne alarak, asimptotik çözüm, öz değerler için asimptotik yaklaşım ve nodal noktalar üzerine çalışmışlardır.

Xue-Feng Yang (2001) çalışmasında $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ ve $q \in L_1[0,1]$ olmak üzere,

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y = 0$$

$$y(0)\cos(\alpha) + y'(0)\sin(\alpha) = 0$$

$$y(1)\cos(\beta) + y'(1)\sin(\beta) = 0$$

formunda iki Sturm-Liouville Problemi için öz değerlerin farkı için belirli koşullar altında bir tahmin geliştirmişlerdir. Bu tahmini kullanarak $b \in (1/2, 1]$ olmak üzere $(0, b)$ deki nodal noktaların yoğun bir alt kümesinin, potansiyel fonksiyonunu ve sınır verilerini tek şekilde belirleyeceğini göstermişlerdir.

Chen ve arkadaşları (2002) çalışmalarında Law ve arkadaşları tarafından verilen yapılandırma formülünün yakınsaklığının L_1 de olduğunu göstermiştir.

Cheng ve Law (2006), Hill denklemi için periyodik öz fonksiyonların nodal kümesini kullanarak yapılandırma, teklik ve kararlılık problemlerini çalışmışlardır.

Koyunbakan ve Yılmaz (2008) çalışmalarında $p(x), q(x) \in L_2[0, \pi]$ olmak üzere,

$$-y''(x) + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y(x) = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -h$$

$$y'(\pi, \lambda) + Hy(\pi, \lambda) = 0$$

difüzyon operatörüne karşılık ters nodal problemi göz önüne almışlardır. Çalışmalarında sadece nodal veriyi kullanarak potansiyel fonksiyonu ve türevleri için yapılandırma formüllerini vermişlerdir. Elde edilen sonuçlar için Law ve Yang'ın çalışmalarını göz önüne almışlardır. Aynı problem Dirichlet koşulları için Buterin ve Shieh (2009) tarafından göz önüne alınmıştır.

Chuan-Fu Yang (2010), $q(x), \mu(x) \in L_2[0, \pi]$ olmak üzere

$$-y''(x) + q(x)y = \lambda y$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad h \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$y(\pi) = \int_0^\pi y(x)\mu(x)dx$$

problemini göz önüne almış ve nodal noktaların yoğun bir alt kümesinin sınır parametresini ve potansiyel fonksiyonunu tek şekilde belirlediğini göstermiştir.

Chuan-Fu Yang (2012), $\int_0^1 q(x)dx = 0$ olmak üzere,

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad 0 < x < 1$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(1) - Hy(1) = 0$$

$$y\left(\frac{1}{2} + 0\right) = a_1 y\left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

$$y'\left(\frac{1}{2} + 0\right) = a_1^{-1} y'\left(\frac{1}{2} - 0\right) + a_2 y\left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

sürekli Sturm-Liouville problemi için ters nodal problemi göz önüne almış ve nodal noktalardan $q(x)$ potansiyel fonksiyonu, h, H, a_1 ve a_2 katsayıları için yapılandırma formülleri elde etmeye çalışmıştır. Yazar 2014 yılında ise $a \in (0, \pi)$ olmak üzere, $q \in L_1(a, \pi)$, $x \in [0, a]$ için $q(x) \equiv 0$ olmak üzere

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi)$$

$$y(0)\cos(\alpha) + y'(0)\sin(\alpha) = 0$$

$$y(\pi)\cos(\beta) + y'(\pi)\sin(\beta) = 0, \quad \alpha, \beta \in [0, \pi)$$

şeklindeki gecikmeli Sturm-Liouville operatörü için ters nodal problemini göz önüne alarak q, a, α ve β için yapılandırma formülleri verdiler. Ayrıca teklik ve kararlılık üzerine çalışmışlardır.

Wang ve Yurko (2016) çalışmalarında

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

$$y'(0, \lambda) - hy(0, \lambda) = 0$$

$$y'(1, \lambda) + Hy(1, \lambda) = 0$$

$$y\left(\frac{1}{2}^+, \lambda\right) - ay\left(\frac{1}{2}^-, \lambda\right) = 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}^+, \lambda\right) - a^{-1}y'\left(\frac{1}{2}^-, \lambda\right) - by\left(\frac{1}{2}^-, \lambda\right) = 0$$

süreksiz Sturm-Liouville operatörleri için ters nodal problemi göz önüne alarak $[0,1]$ aralığının $[a_0, b_0]$, $a_0 < \frac{1}{2} < b_0$ alt aralığında çift-yoğun nodal alt kümelerin q potansiyel fonksiyonunu ve $h, H, \frac{b}{a}$ sabitlerini tek şekilde belirlediğini göstermişlerdir.

Nodal nokta verisi ilk olarak McLaughlin tarafından 1988 yılında yapılan çalışmada ele alınmıştır. McLaughlin bu çalışmasında Dirichlet sınır koşulları ile birlikte Sturm-Liouville problemini göz önüne alarak uygun nodal nokta verisi ve potansiyelin integral ortalamasını kullanarak potansiyelin tekliğini göstermiştir.

Bölümün bu kısmında potansiyelin inşasına geçmeden önce hem konunun iyi anlaşılması hem de konunun tarihi gelişimi içerisindeki önemi nedeni ile bu çalışma kısaca verilecektir. Bunun için

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3.1.2)$$

problemi verilsin. Burada $q \in L_2(0,1)$ şeklindedir. (3.1.1) denkleminin

$$y_1(0, q, \lambda) = y_2'(0, q, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, q, \lambda) = y_2(0, q, \lambda) = 0 \quad (3.1.3)$$

başlangıç koşullarını sağlayan $y_1(x, q, \lambda)$ ve $y_2(x, q, \lambda)$ çözümlerine temel çözümler denir. Bunun nedeni herhangi bir çözümün bu çözümlerin lineer birleşimi olarak yazılabilesidir. Bu konu ile ilgili ayrıntılar için Pöschel ve Trubowitz (1987) yazarlı kaynağa bakılabilir. Bu çözümler aynı zamanda,

$$y_1(x, q, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{\exp|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \sqrt{x}}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$$

$$y_2(x, q, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{\exp|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \sqrt{x}}{|\lambda|}\right)$$

asimptotik formları sağlar. Nodal noktaların verisinin, $y_n(x)$ öz fonksiyonlarının köklerinin $\{x_n^j\}_{n \geq 2}$, $j=1,2,\dots,n-1$ kümesi olduğu bilinmektedir. Ayrıca önceki bölümden (3.1.1)-(3.1.2) problemi için λ_n öz değerlerinin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n)^2 < \infty, \quad c_0 = \int_0^1 q(t) dt$$

olmak üzere,

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + c_0 + \alpha_n$$

formunda olduğu bilinmektedir.

(3.1.3) şartları göz önüne alınarak (3.1.1)-(3.1.2) probleminin aşikâr çözüm dışındaki çözümleri için $y_1(x, q, \lambda)$ çözümünün katsayısının sıfır olması gerektiği dolayısıyla öz fonksiyonların sadece $y_2(x, q, \lambda)$ çözümü ile belirlendiği kolaylıkla görülür.

Lemma 3.1.1. $q \in L_2(0,1)$ için (3.1.1)-(3.1.2) problemi verilsin. $y_2(x, q, \lambda_n)$, $\lambda = \lambda_n$, $n=1,2,3,\dots$ öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar olsun. Bu durumda $x_n^j(0) = \frac{j}{n}$ olmak üzere $x_n^j(q) = x_n^j(0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ eşitliği sağlanır (McLaughlin, 1988).

Lemma 3.1.2. $k=0,1,\dots$ ve $m=0,1,2,\dots,2^k-1$ olmak üzere $\frac{(m+1)}{(2^{k+1}-m)}$ biçimindeki

sayıların kümesi $[0,1]$ aralığında yoğundur (McLaughlin, 1988).

İspat: $k=0,1,2,\dots$ olmak üzere her bir

$$0, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}-1}, \frac{3}{2^{k+1}-2}, \dots, \frac{2^k}{2^k+1}, 1$$

dizisindeki ardışık sayılar arasındaki maksimum farkın $k \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiği gösterilecektir. Bu farklar

$$1 - \frac{2^k}{2^k+1} = \frac{1}{2^k+1}, \quad \frac{1}{2^{k+1}} - 0 = \frac{1}{2^{k+1}}$$

ve $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 2$ için,

$$\frac{m+2}{2^{k+1}-(m+1)} - \frac{m+1}{2^{k+1}-m} = \frac{2^{k+1}+1}{[2^{k+1}-(m+1)][2^{k+1}-m]} < \frac{1}{2^k+1}$$

şeklindedir. Buradan $\frac{2}{2^k+1}$, k . dizideki ardışık sayılar arasındaki farklar için üst sınır olur ve $k \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider. Bu da ispatı tamamlar.

Yorum: $q = 0$ için öz değerlerin $\lambda_n = n^2 \pi^2$ ve öz fonksiyonların $\sin(n\pi x)$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $k = 0, 1, \dots$ ve $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ olmak üzere $(2^{k+1} - m)^2 \pi^2$ ile belirli küme, $q = 0$ için (3.1.1)-(3.1.2) probleminin tüm öz değerlerini verir. Bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise $\sin((2^{k+1} - m)\pi x)$ olacağından $\frac{m+1}{2^{k+1}-m}$, öz fonksiyonun bir sıfırıdır. Bu nedenle Lemma 3.1.2, verilen sayıların kümesi, $\lambda = \lambda_1 = \pi^2$ 'ye karşılık gelen öz fonksiyon hariç her bir öz fonksiyondan bir nodal noktanın seçimini temsil eder. Böylece $q = 0$ için yukarıda verilen notasyondan

$$x_{2^{k+1}-m}^{m+1} = \frac{m+1}{2^{k+1}-m}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $q = 0$ için $\{\sin n\pi x\}_{n=2}^{\infty}$ öz fonksiyonlarının sıfırlarından birer adet seçilerek $(0, 1)$ aralığında yoğun olan sıfırların bir kümesi inşa edilmiştir (McLaughlin, 1988).

Aşağıdaki lemma ile aynı şey keyfi bir q potansiyeli için verilmiştir.

Lemma 3.1.3. $q \in L_2(0,1)$ olsun. Her bir $n \geq 2$ tam sayısı için $n = 2^{k+1} - m$ olacak şekilde $k = 0,1,2,\dots$ ve $m = 0,1,2,\dots,2^k - 1$ bulunsun. Ayrıca sabit bir n için $j(n) = m + 1$ olarak tanımlansın. Bu takdirde $\{x_n^{j(n)}\}_{n=2}^{\infty}$ kümesi $(0,1)$ aralığında yoğundur (McLaughlin, 1988).

Teorem 3.1.4.

$$y''(x) + [\lambda - q_i(x)]y(x) = 0 \quad , \quad i = 1,2 \quad (3.1.4)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3.1.5)$$

öz değer problemleri verilsin. $\int_0^1 q_1(x) dx = \int_0^1 q_2(x) dx$ koşulu ile birlikte $q_1, q_2 \in L_2(0,1)$ olsun. Her bir $n \geq 2$ için $j(n)$, Lemma 3.1.3' de verildiği gibi olmak üzere, $x_n^{j(n)}(q_1) = x_n^{j(n)}(q_2)$ olduğu varsayılınsın. Bu durumda hemen hemen her yerde $q_1 = q_2$ olur (McLaughlin, 1988).

İspat: $x \in [0,1]$ keyfi bir nokta olsun. $\{x_n^{j(n)}\}_{n \geq 2}$ kümesi $(0,1)$ aralığında yoğun olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{j(n_k)} = x$ olacak şekilde bir $x_{n_k}^{j(n_k)} = x_k$ alt dizisi mevcuttur. $y_2 = y_2(t, q_1, \lambda_{n_k}(q_1))$ ve $\bar{y}_2 = y_2(t, q_2, \lambda_{n_k}(q_2))$, (3.1.4)-(3.1.5) in sırasıyla q_1 ve q_2 için çözümleri olsun. Bu durumda (3.1.4) sırasıyla q_1 ve q_2 için \bar{y}_2 ve y_2 ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılarak,

$$[y_2' \bar{y}_2 - \bar{y}_2' y_2]' = [q_1 - q_2 + \lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2)] y_2 \bar{y}_2$$

ve bu eşitlik 0 dan x_k ya integre edilerek,

$$[y_2' \bar{y}_2 - \bar{y}_2' y_2]_0^{x_k} = 0 = \int_0^{x_k} [q_1 - q_2 + \lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2)] y_2(t) \bar{y}_2(t) dt$$

elde edilir.

$$J_k = n_k^2 \pi^2 \int_0^{x_k} [q_1 - q_2 + \lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2)] y_2(t, q_1, \lambda_{n_k}(q_1)) y_2(t, q_2, \lambda_{n_k}(q_2)) dt \quad (3.1.6)$$

tanımlansın. Yukarıdan görüleceği üzere $k=1,2,\dots$ için $J_k = 0$ olur. $\lambda_n = n^2 \pi^2 + c_0 + \alpha_n$

ve hipotezden $\int_0^1 [q_1(x) - q_2(x)] dx = 0$ olmasından

$$\lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2) = \alpha_{n_k}(q_1) - \alpha_{n_k}(q_2) = \beta_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k)^2 < \infty \text{ elde edilir. Buradan } k \rightarrow \infty$$

iken $\lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2) \rightarrow 0$ olduğu görülür.

$q \equiv 0$ için $\lambda = \lambda_{n_k}$ öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar $\sin(n_k \pi x)$ şeklindedir.

$$\text{Böylece } [y_2(x, 0, \lambda_{n_k}(0))]^2 = \sin^2(n_k \pi x) = \left[\frac{1 - \cos(2n_k \pi x)}{2} \right] \text{ olup,}$$

$$\left| (n_k \pi)^2 [y_2(x, q_1, \lambda_{n_k}(q_1)) y_2(x, q_2, \lambda_{n_k}(q_2))] - \left[\frac{1 - \cos(2n_k \pi x)}{2} \right] \right| \leq \frac{m}{n_k}$$

olacak şekilde bir m sabitinin mevcut olduğu görülebilir ki bu

$$(n_k \pi)^2 [y_2(x, q_1, \lambda_{n_k}(q_1)) y_2(x, q_2, \lambda_{n_k}(q_2))] \approx \left[\frac{1 - \cos(2n_k \pi x)}{2} \right]$$

olduğunu gösterir. Bu durumda (3.1.6),

$$J_k = \int_0^{x_k} (q_1 - q_2) \left(\frac{1 - \cos(2n_k \pi t)}{2} \right) dt$$

halini alır. Son olarak $k \rightarrow \infty$ iken $\int_0^{x_k} (q_1 - q_2) \cos(2n_k \pi t) dt \rightarrow 0$ ve $J_k \rightarrow 0$ olduğu

bilindiğinden limit alınarak,

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k = \int_0^x (q_1(t) - q_2(t)) dt$$

elde edilir. Buradaki sonuç keyfi seçilen sabit x için sağlandığından

$$\int_0^x (q_1(t) - q_2(t)) dt = 0 \quad , \quad x \in [0,1]$$

ve böylece $[0,1]$ üzerinde neredeyse her yerde $q_1 - q_2 = 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar. \square

McLaughlin' in verdiği bu teorem görüldüğü üzere Dirichlet sınır koşulları için geçerli olup $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ için

$$-u'' + q(x)u = \lambda y$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad (3.1.7)$$

$$u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0$$

şeklindeki daha genel sınır şartları için daha genel teorem, 1997 yılında Yang tarafından ispatlanmıştır. Yang, nodal noktalar ile sadece potansiyeli değil, aynı zamanda sınır koşullarını da belirleyecek şekilde tam formüller vermiştir.

Teorem 3.1.5. $q - \int_0^1 q(y) dy \in L_1[0,1]$ potansiyeli ile α, β değerleri, $(0,1)$ içindeki nodal noktaların herhangi bir yoğun alt kümesi ile tek şekilde belirlidir (Yang X, 1997).

(3.1.7) problemi göz önüne alınsın. Bu öz değer probleminin $n \geq 2$ için n inci öz fonksiyonunun, $(0,1)$ aralığında,

$$0 < x_n^1(q, \alpha, \beta) < x_n^2(q, \alpha, \beta) < \dots < x_n^{n-1}(q, \alpha, \beta) < 1$$

şeklinde tam olarak $n-1$ adet kökü olduğu bilinmektedir. Burada

$$X(q, \alpha, \beta) = \{x_n^j(q, \alpha, \beta) \mid j = 1, 2, \dots, n-1; n = 2, 3, \dots\}$$
 ve buna bağlı olarak nodal uzay,

$$NS[0,1] = \{X(q, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in [0, \pi), q \in L_1[0,1]\}$$
 olarak tanımlansın (Yang, 1997).

Yang' ın çalışmasında ifade ettiği dört sorudan biri şöyledir: Eğer $X \in NS[0,1]$ bilirse

$$X(q, \alpha, \beta) = X$$
 olacak şekilde $q \in L_1[0,1]$ ve $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ için açık bir formül mevcut

mudur?

Bu soruya aşağıdaki teorem ile cevap verilebilir.

Teorem 3.1.6. $X = \{x_n^j \mid j = 1, 2, \dots, n-1; n = 2, 3, \dots\} \in NS[0, 1]$ olduğu varsayalım. Bu durumda,

i) $[0, 1]$ aralığındaki tüm x değerleri için aşağıda verilen

$$\lim_{j/n \rightarrow x, j/n \neq x} \left[nx_n^j - \left(j - \frac{1}{2} \right) \right] n \quad (3.1.8)$$

$$\lim_{j/n \rightarrow x, j/n \neq x} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) x_n^j - \left(j - \frac{1}{2} \right) \right] \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad (3.1.9)$$

$$\lim_{j/n \rightarrow x, j/n \neq x} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) x_n^j - j \right] \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad (3.1.10)$$

$$\lim_{j/n \rightarrow x, j/n \neq x} [nx_n^j - j] n \quad (3.1.11)$$

limitlerden bir ve yalnız bir tanesi mevcuttur. Bu limit $(1/\pi^2)g(x)$ ile gösterilsin. Bu durumda $g(x)$ mutlak sürekli ve neredeyse her yerde $dg(x)/dx$ mevcuttur.

ii) Eğer

$$\alpha = \begin{cases} -\cot^{-1}(g(0)) & , (3.1.8) \text{ ve } (3.1.9) \text{ durumu} \\ 0 & , (3.1.10) \text{ ve } (3.1.11) \text{ durumu} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} -\cot^{-1}(g(1)) & , (3.1.8) \text{ ve } (3.1.10) \text{ durumu} \\ 0 & , (3.1.9) \text{ ve } (3.1.11) \text{ durumu} \end{cases}$$

$$q(x) = 2 \left(\frac{d}{dx} g(x) + g(0) - g(1) \right)$$

alınırsa bu takdirde $X(q, \alpha, \beta) = X$ ve $\int_0^1 q(y) dy = 0$ olur (Yang, 1997).

Yukarıda $\int_0^1 q(y) dy \neq 0$ durumunda $q(x) = 2 \left(\frac{d}{dx} g(x) + g(0) - g(1) \right) + \int_0^1 q(s) ds$ alınır.

3.2. Kısmi Veri Vasıtasıyla Potansiyelin İnşası

Önceki kısımda ifade edilen formüllerden görüleceği üzere inşaa probleminin çözümü için verinin bir tam kümesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun tamamının deneysel olarak gözlemlenebilirliği zor olduğundan kısmi veriyle potansiyelin ve eğer mümkünse sınır şartlarının inşası önem taşımaktadır. Aslında Hald ve McLaughlin (1989), bazı özel durumlar için nodal noktaların sonlu bir alt kümesini kullanarak potansiyelin varlığı ve düzgünlüğü gibi bazı varsayımlarla birlikte adım fonksiyonları vasıtasıyla q potansiyel fonksiyonuna yaklaşmışlardır. Bunun yanında kısmi veri olarak daha çok diğer veriler ile alakalı ve potansiyel üzerine kısıtlamalar esnetilerek yapılan çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalar daha önce de ifade edilen teklik teoremlerinde ele alınan iki spektrum, bir spektrum ve bir normalizasyon katsayıları kümesi, spektral fonksiyon vb. verilerdir.

Ters Sturm-Liouville Problemi için teklik üzerine çok sayıda çalışma bulunmasına rağmen deneysel olarak elde edilebilen veriden potansiyelin inşası ile alakalı çok sayıda çalışma olmadığı görülmektedir. Yapılan çalışmalarda genel olarak daha önce yapılan çalışmaların etkinliğini arttırmak üzerinedir. Bunlar

1. Matris Metotları
2. Dönüştürülmüş problem için Cauchy verisi elde etme
3. Optimizasyon metotları

ve birkaç bağımsız çalışma olarak sıralanabilir. Burada göz önüne alınan problem yukarıda verilen normal form Sturm-Liouville problemidir. Problem ile ilgili tarihsel gelişim kısaca aşağıdaki gibidir:

Hald 1978 yılında Dirichlet sınır şartları ve simetrik q potansiyel fonksiyonu için ters problemi göz önüne alarak Rayleigh-Ritz metodunu kullanıp potansiyelin, sonlu terimden oluşan Fourier açılımı için problemi, bir matrisin öz değer problemine indirgemıştır. Burada amaç açılımdaki katsayıları belirlemektir. Daha sonra matrisin boyutu arttırılarak çözümün, ters problemin çözümüne yakınsadığı gösterilmiştir.

Metodun sınır koşulları için bir genelleştirmesi ve ayrıntı için Yen (1978) tarafından aynı yıl yapılan tez çalışmasına da bakılabilir.

Paine 1984 yılında benzer örneği $q \in C^2[0, \pi]$ için ele alarak N sayıda öz değerden perisimetrik tridiagonal matrisi elde etme algoritması kullanmıştır. Burada bir düzeltme terimi kullanılarak elde edilen sonuçlardan ortaya çıkan hatalar N sayısının artmasına göre analiz edilerek bir grafik sunulmuştur.

Sacks 1988 yılında Dirichlet sınır koşullu Sturm-Liouville problemi için $\omega(x, t)$ fonksiyonu, ilgili Goursat probleminin çözümü olmak üzere (λ_n, ρ_n) karakteristik değerlerini kullanarak

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) + 2g(2x) - 2F(q_n)(2x)$$

iterasyon formülünü oluşturmuştur. Burada $F(q)(t) = w_{xt}(0, t)$ ve

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2k\pi \sin k\pi t - \frac{1}{\lambda_k^{1/2} \rho_k} \sin(\lambda_k^{1/2} t) \right)$$

biçimindedir. Daha sonra ise q_n fonksiyonlarının q potansiyeline yakınsaması ele alınarak çeşitli nümerik örnekler verilmiştir.

Lowe ve arkadaşları 1992 yılında önce Dirichlet daha sonra genel ayrılabilir sınır koşullarını göz önüne alarak Sturm-Liouville problemi için

$$q^N = q_N + \sum_{k=1}^{N-1} q_k \phi_k(x)$$

formunda bir potansiyel önererek $\vec{q} = (q_1, \dots, q_N)$ vektörünü araştırmışlardır. Yazarlar genel ayrılabilir sınır şartı için

$$\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{k=2N} = \{\sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \dots, \sin 2N\pi x, \cos 2N\pi x\}$$

trigonometrik fonksiyonları göz önüne almışlardır. Böylece Fourier katsayılarını belirlemek için Newton metodundan faydalanmışlardır. Metot ile ilgili olarak bir yakınsaklık teoremi verdikten sonra algoritma ile çeşitli örnekleri incelemişlerdir.

Rundell ve Sacks aynı yıl inverse problemi çözmek için ilgili hiperbolik kısmi diferansiyel denklemi göz önüne almış ve bu denklem için Cauchy verisini belirlemek için spektrumları kullanmışlardır. Daha sonra ise bu problemin çözümü için sırasıyla ardışık yaklaşımlar metodunu ve Quasi-Newton metodunu kullanmışlardır. Son olarak bu yaklaşım, diğer teklik verileri için modifiye edilerek smooth, sürekli non-smooth ve süreksiz potansiyeller üzerinde yaklaşımın etkinliğine bakılmıştır.

Neher 1994 yılında simetrik potansiyelli Dirichlet problemi için öz değerler ve simetrik baz fonksiyonları verildiğinde q potansiyel fonksiyonunun araştırılmasını ele almıştır. Yazarın çalışması, potansiyel fonksiyonunun

$$q(x) = q(x; a) := \hat{q}(x) + \sum_{j=1}^n a_j q_j(x)$$

formunda yazılıp a_j sabitlerinin belirlenmesine dayanmaktadır. Bu nedenle verilen öz değerler v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$f(a) = (f_i(a)) = (\lambda_i(q(x; a)) - v_i)$$

için $f(a) = 0$ kök bulma probleminin çözümünde Newton metodu kullanılmıştır.

Fabiano ve ark. 1995 yılında simetrik ve genel potansiyelli Dirichlet problemini göz önüne almış, çalıştıkları aralığın parçalanışı üzerinden problemi bir matris denkleme çevirmişlerdir. Bu denklemde katsayılar matrisini belirlemek için simetrik ve genel potansiyel için sırasıyla öz değerlerin sonlu bir kümesini ve bu küme ile

birlikte uç hız değerlerini yani $\ln \left(\frac{|y_i'(\pi)|}{|y_i'(0)|} \right)$ değerlerini kullanmışlardır.

Andrew 2004 yılında Fabiano ve arkadaşlarının çalışmasında Newton metodu yerine Numerov metodunu kullanmıştır. Yazar 2005 yılında durumu genelleştirmiş, 2011 yılında ise sonlu fark metodunu yine problemin çözümü için kullanmıştır.

Brown ve arkadaşları 2003 yılında ters problemin çözümü için öz değerlerin ve uygun başlangıç değer problemlerin çözümleri arasındaki lineer bağımlılık katsayılarının sonlu bir sayısını kullanmışlardır. Bu sabitler ikinci bir spektrumdan elde edilebilen sabitlerdir. Bu çalışmanın doğrudan optimizasyon mantığı üzerine kurulu ilk çalışma olduğu görülmektedir. Kullanılan amaç fonksiyonu,

$$G[q] = \sum_{n=0}^N \left\{ \omega_n \int_0^1 \left[\left(u'_{q,n}(x, \lambda_n) - C_n v'_{q,n}(x, \lambda_n) \right)^2 + \left(u_{q,n}(x, \lambda_n) - C_n v_{q,n}(x, \lambda_n) \right)^2 \right] dx \right\}$$

biçiminde olup $u_{q,n}$, $v_{q,n}$ fonksiyonları q potansiyelleri için uygun başlangıç şartlarına sahip çözümler, $\{\lambda_n, C_n\}$ ise verilen verilerdir. Kullanılan metot en dik iniş yöntemidir.

Röhrl 2005 yılında, Brown ve arkadaşları gibi bir amaç fonksiyonu belirleyip Polak-Ribiere eşlenik gradiyent yöntemini kullanmıştır. Yazar Q test potansiyeli için iki spektrumdan sonlu eleman olarak,

$$G(q) = \sum_{(i,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}} \omega_{i,n} (\lambda_{i,q,n} - \lambda_{i,Q,n})^2 \quad (3.2.1)$$

amaç fonksiyonunu kullanmıştır. Burada $\omega_{i,n}$ pozitif ağırlık fonksiyonlarıdır. Böylece elde edilen sonuçlar grafikler kullanılarak gösterilmiştir. Yazar 2006 yılında ise çalışmasını aynı zamanda sınır katsayılarının belirlenmesi problemine genelleştirmiştir.

Rafler ve Böckmann (2007), Rundell-Sacks algoritmasında modifikasyon yaparak genel referans potansiyelini göz önüne almışlardır. Sundukları yaklaşımın yakınsaklığını çalışarak L_2 ve L_∞ içinde nümerik örnekler vermişlerdir.

Bu çalışmalar yanında ters problemin çözümünde Sınır Değer Metodu (BVM) için Kamanee ve Böckmann (2009), Ghelardoni ve Magherini (2010), Sonlu fark metodu için Gao ve arkadaşlarının (2015) çalışmalarına bakılabilir.

3.2.1. İki spektrum verisi

Burada Röhrl (2005) tarafından verilen amaç fonksiyonu için iki spektrumun öz değerlerinin kısmi verisi yardımıyla En Dik İniş Metodu kullanılarak potansiyelin inşası ele alınacaktır. Röhrl çalışmasında Polak-Ribiere eşlenik gradiyent metodunu kullanmıştır. Bu amaç fonksiyonunun tüm kritik noktalarının global minimumda olduğu belirtilmiştir. Röhrl'ün çalışmasında herhangi bir hesaplama algoritma verilmemesine karşın aşağıda da verilen asimptotik formülasyonlarda oluşacak hatayı düşürmek için büyük öz değerlerin kullanılmasının uygun olacağı açıktır. Bu çalışmada, problem için verilen verinin elde edilmesi ile ilgili olarak bir bilgi verilmeyecek olsa da göz önüne

alınan sisteme müdahale ile kısmi bir verinin deneysel olarak elde edildiği bilinmektedir. Bu verilerin ilk öz değerler olması ve az sayıda olması olağandır. Burada Röhr, Brown ve arkadaşları tarafından çalışılan potansiyeller üzerinden Mathematica programı yardımıyla oluşturulan algoritmaların sonuçları verilecektir. Bunun için kullanılacak amaç fonksiyonu ve ilgili teori bu çalışmalarda mevcuttur. Yine de ihtiyaç duyuldukça ilgili teoremler ispatsız olarak verilecektir.

İyi bilindiği üzere (3.1.7) problemi için sınır koşullarının değişmesi ile elde edilen iki spektrum, q potansiyel fonksiyonunu tek şekilde belirler (Bkz. 2.2.1 Levinson yaklaşımı). Bu çalışmada öncelikle ele alınacak kısmi veri bu teklik çalışmasına dayanmaktadır. Yani iki spektrumun sonlu sayıda elemanı kullanılacaktır.

\mathbb{N}_0 , doğal sayılar kümesinin ilk elemanlarından oluşan sonlu bir alt kümesi olmak üzere ele alınacak amaç fonksiyonu, $(i, j) \in I = \mathbb{N}_0 \times \{1, 2\}$ için $\{\mu_{i,j,Q}\}$ ve $\{\lambda_{i,j,q}\}$ sırasıyla hedef potansiyel ve iterasyon potansiyelleri için spektrum çiftleri olmak üzere,

$$G(q) = \sum_{(i,j) \in I} \omega_{i,j} (\lambda_{i,j,q} - \mu_{i,j,Q})^2$$

şeklindedir. Buradan ve $\lambda_{i,j,q}[h] = \int_0^1 h g_{i,j}^2(x, q) dx$ (Pöschel ve Trubowitz, 1987)

olmasından,

$$\nabla G(q) = 2 \sum_{(i,j) \in I} \int \omega_{i,j} (\lambda_{i,j,q} - \mu_{i,j,Q}) g_{i,j}^2 h dx$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Eğer $i\omega_{i,j}$ toplanabilirse bu durumda $\|g_{i,j}^2\|_{H^1} = O(i)$ ve

$\lambda_{i,j,q} - \mu_{i,j,Q} = O(1)$ olduğundan,

$$\nabla G(q) = 2 \sum_{(i,j) \in I} (i+1) \omega_{i,j} (\lambda_{i,j,q} - \mu_{i,j,Q}) \frac{g_{i,j}^2}{i+1}$$

H^1 içindedir (Röhr, 2005).

Teorem 3.2.1. Öz fonksiyonların karelerinin $\{g_{i,j}^2 \mid (i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \{1,2\}\}$ kümesi H^1 içinde lineer bağımsızdır (Röhrl, 2005).

Bu tarzda bir amaç fonksiyonunun ilk defa Brown ve arkadaşları tarafından ele alındığı görülmektedir. Röhrl ise problemi, bu çalışmadan farklı olarak doğrudan öz değerlerin iki kümesini göz önüne alarak hem basitleştirmiş hem de daha sonraki çalışmasında (Röhrl, 2006) görüleceği üzere sınır koşullarının da belirlenmesi problemine genelleştirmiştir. Yine de hesaplama olarak Röhrl ün algoritması daha hacimlidir. Çünkü çalışmasında sınır değer problemlerinin çözümüne ihtiyaç duymaktadır. Halbuki diğer çalışma başlangıç değer problemlerinin çözümüne dayanmaktadır. Yukarıda verilen $G(q)$ Röhrl tarafından verilen amaç fonksiyonudur. Bu çalışmada pozitif ağırlıklar $\omega_{i,j} = 1$ olarak alınmıştır. Çalışmanın mantığı $G(q)$ fonksiyonunu adım adım minimize edecek şekilde q potansiyel fonksiyonları yardımıyla hedef potansiyele olabildiğince yaklaşmaktır. Bu nedenle öncelikle $G(q) = 0$ olacak şekilde bir q potansiyel fonksiyonunun varlığı önem arz etmektedir. Her ne kadar özel durumlarda farklılaşma söz konusu olsa da varlık problemi ikinci bölümde verilen ile aynıdır. Yani $\{\lambda_{i,j,q}\}$ kümesinin elemanlarının (3.2.1) formülasyonu ile birlikte geçişli olması gereklidir. Aynı zamanda

$$i) \sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma \neq 0$$

ya da

$$i) \alpha = \beta = 0, \sin \gamma \neq 0$$

seçimini almak $G(q) = 0$ olacak şekilde bir q potansiyel fonksiyonunun varlığı için yeterlidir. Kısmi veri ele alınacak olsa da $\omega_{i,j}$ ağırlıklarının toplanabilir olması durumunda tam veri için bile $G(q)$ ile verilen serinin yakınsak olacağı (3.2.1) asimptotiklerinden görülebilir. Üstelik $G(q) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $q = Q$ olmasıdır (Röhrl, 2005).

Teorem 3.2.2. Eğer I sonlu ise $G(q)$, bir q potansiyeli için lokal minimuma sahip değildir; yani $\forall h \in H^1[0,1]$ için

$$\dot{G}[h](q) = 0 \Leftrightarrow G(q) = 0$$

olur ve bu sonuç algoritmanın, $G(q) = 0$ olacak şekilde minimizasyonu gerçekleştireceğini gösterir (Röhrl, 2005).

Buradan görüleceği üzere minimizasyon sürecinin sonucu, bizi $G(q) \rightarrow 0$ dolayısıyla da $\lambda_{i,j,q} \rightarrow \mu_{i,j,Q}$ olacak şekilde bir q potansiyeline yaklaştırır.

Kullanılacak olan algoritma bir optimizasyon metodu olan en dik iniş yöntemine dayanmaktadır. Bu metot aşağıda özetlenmektedir (Polak, 1997):

Adım 1. Bir q_0 başlangıç potansiyelini seç.

Adım 2. $G[q_i]$ değeri yeterince küçük ise dur, değilse sonraki adıma geç.

Adım 3. $\nabla G[q_i]$ gradiyentini hesapla.

Adım 4. $G[q_i - h_i \nabla G[q_i]]$ fonksiyonunu h parametresine göre minimize et.

Adım 5. $q_{i+1} = q_i - h_i \nabla G[q_i]$ olacak şekilde yeni başlangıç potansiyeli için aynı adımları yeterince küçük $G[q_{i+1}]$ elde edene kadar sürdür.

Şimdi (1.1) Sturm-Liouville problemi verilsin. α ve β ile belirli sınır şartlarına göre $\{\lambda_{i,q}\}_{i \geq 1}$ değerlerinin asimptotik formları için üç durum mevcuttur (Röhrl, 2005):

$$\lambda_{i,q} = \begin{cases} \pi^2 (i-1)^2 - \frac{2 \sin(\beta-a)}{\sin \alpha \sin \beta} + \int_0^1 q dt + a_n, & \sin \alpha \sin \beta \neq 0 \\ \pi^2 \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{\sin(\beta-a)} + \int_0^1 q dt + a_n, & \sin \alpha \sin \beta = 0 \wedge \sin(\beta-a) \neq 0 \\ \pi^2 i^2 + \int_0^1 q dt + a_n, & \sin \alpha = \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (3.2.2).$$

Burada $a_n \in l^2$ şeklindedir. Bu öz değer asimptotik formüllerine karşılık olarak gelen normlaştırılmış öz fonksiyonların karesini hesaplamak oldukça kolaydır. Bunun için Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin $y(0) = \sin \alpha$, $y'(0) = -\cos \alpha$ başlangıç değer problemi göz önüne alınarak öz fonksiyonlar için asimptotik formülasyonlar hesaplanır. Bunun için Hoschstad (1973) tarafından yapılan çalışmaya bakılabilir. Örneğin $\alpha = \beta = 0$ ve $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için $\alpha = 0$ olduğundan yeterince büyük

$|\lambda|$ değerleri için

$$w = -\frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

ile verilir (Hoschstad, 1973). Bu sonuç kullanılarak,

$$g^2 = \frac{w^2}{\|w\|^2} = \frac{\frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}x}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right)}{\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \left(\sin^2 \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) dx} = \frac{1 - \cos 2\sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}{1 - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

fonksiyonu elde edilir. Böylece (3.2.2) asimptotiklerinden $\beta = 0$ ve $\gamma = \frac{\pi}{2}$ için sırasıyla

$$g_{i,1}^2 = \frac{1 - \cos(2i+2)\pi x + O\left(\frac{1}{i}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{i}\right)} = \left(1 - \cos(2i+2)\pi x + O\left(\frac{1}{i}\right)\right) \left(1 - O\left(\frac{1}{i}\right) + \dots\right)$$

yani

$$g_{i,1}^2 = 1 - \cos(2i+2)\pi x + O\left(\frac{1}{i}\right) \quad (3.2.3.a)$$

ve benzer şekilde,

$$g_{i,2}^2 = 1 - \cos(2i+1)\pi x + O\left(\frac{1}{i}\right) \quad (3.2.3.b)$$

formülleri elde edilir. Burada verilen α ve β değerleri Röhrl tarafından yapılmış makalede çalışılmış değerlerdir. Yazar tarafından incelenmiş diğer değerler ise $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ ve $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = -\frac{\pi}{4}$ şeklinde olup bunlara karşılık gelen normlaştırılmış öz fonksiyonların karesi ise her $\{\alpha, \beta\}$ ikilisi için

$$g_{i,\{3,4\}}^2 = 1 + \cos(2i\pi x) + O\left(\frac{1}{i}\right) \quad (3.2.3.c)$$

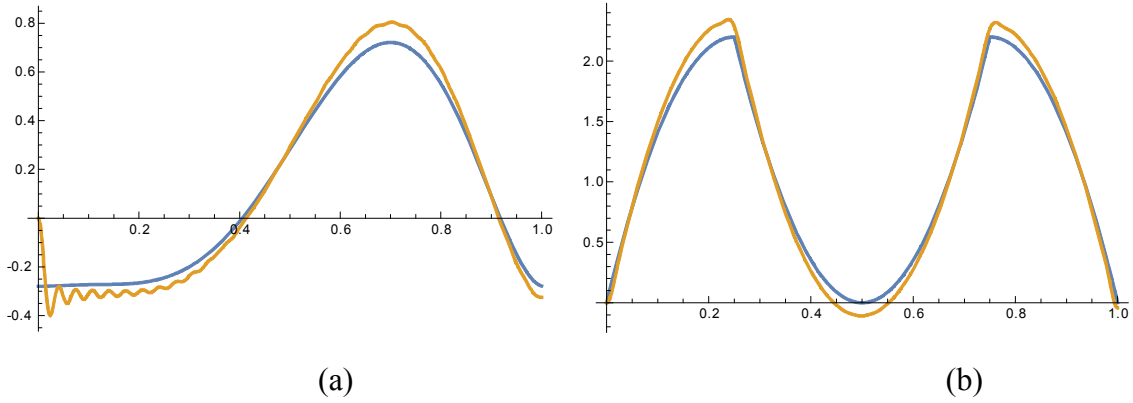
olarak verilmiştir. Bu formülasyonlardan görüleceği üzere asimptotik formüller için aynı $g_{i,j}^2$ formuna yol açan sınır şartları için kullanılan veri miktarı sabit kalsa da $g_{i,j}^2$ fonksiyonların adedi yarıya düşecektir. Dolayısıyla verinin etkisi azalacaktır. Bu etkinin azalmasının nedenlerinden bir diğeri ise sürekli olarak değişen katsayılarla sahip aynı $g_{i,j}^2$ fonksiyonlarının benzerleri ile bir mücadeleye girişmesidir. Göz önüne alınacak fonksiyonlar Brown ve ark. (2003) tarafından çalışılan fonksiyonlar olup bunlar

$$Q^1(x) = 75.16x^6 - 176.44x^5 + 129.35x^4 - 30.67x^3 + 2.6x^2 + 0.001x$$

$$Q^2(x) = \begin{cases} -35.2x^2 + 17.6x & , \quad 0 \leq x < 0.25 \\ 35.2x^2 - 35.2x + 8.8 & , \quad 0.25 \leq x < 0.75 \\ -32.5x^2 + 52.8x - 17.6 & , \quad 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$Q^2(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 0.1 \\ 7x - 0.7 & , \quad 0.1 \leq x < 0.3 \\ 3.5 - 7x & , \quad 0.3 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & , \quad 0.5 \leq x < 0.7 \\ 4 & , \quad 0.7 \leq x < 0.9 \\ 2 & , \quad 0.9 \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $q = 0$ veya $q = \text{sabit}$ alınacaktır. İlk algoritma içerisinde “Minimize” komutu kullanılmıştır. Bu komut, $G(q)$ değerini bir dereceye kadar küçültüp $G(q)$ değerini sabitleyerek test potansiyeline yaklaşımı sağlamaktadır. Bu komutun kullanımı sonucu elde edilen grafikler şekil 3.1' de verilmiştir.



Şekil 3.1. $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ için “Minimize” komutu yaklaşımları

Yukarıdaki grafikten de görüleceği üzere $Q^1(x)$ test potansiyeli orijinden başlamasına rağmen kendisine öteleme verilmiştir. Buradaki amaç başlangıç potansiyeli sıfır dışında bir sabit olduğunda ortaya çıkacak sonucu vermektir. Görüldüğü üzere bu durumda başlangıç potansiyelinde salınımlar ortaya çıkmaktadır. Bunun nedeninin, karşılık gelen öz fonksiyonlar için çözümün (Pöschel ve Trubowitz, 1987)

$$y(x) = -\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^x \frac{\sin[\sqrt{\lambda_n}(x-t)]}{\sqrt{\lambda_n}} q(t)y(t) dt$$

formunda olmasıdır. Yani $\forall n$ için $q_n(0) = q_0(0)$ olur. Bu ise, $q_0(0) = Q(0)$ şeklinde uygun bir başlangıç potansiyeli kullanılmadığında başlangıç noktası civarında salınımlar ortaya çıkarır. Bu durum hem bir hesaplayıcı durumunda hem de asimptotik formüllerde ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak burada verilen “Minimize” komutu her ne kadar kötü olmayan bir yaklaşım verse de, minimum $G(q)$ değerlerinin komut tarafından belirlenmesi ve birkaç iterasyondan sonra sabitleyerek ilerlemesi büyük bir sorun teşkil etmektedir. Çünkü bu haliyle gereğinden fazla düzensiz sıçramalara neden olmakta ve bu sıçramalar neticesinde iyi bir yaklaşım elde edilememektedir. Bu komutlar için hassasiyet artırıldığında ise bu, oldukça büyük bir zamana mal olmaktadır. Röhr farklı bir optimizasyon metodu kullansa da bu iki grafik için üç ve dört iterasyonda çok daha iyi yaklaşımlar elde etmiştir. İkinci bölümden teklik için iki spektrumun tamamının

gerektiği ve sonlu sayıda bilinmeyen öz değerin ne kadar farklılaşmaya yol açacağı düşünüldüğünde, sonsuz sayıda öz değer bilinmeden bu kadar az iterasyon ile bu kadar iyi sonuç alınması muazzam bir olaydır. Kendisi hesaplamasında asimptotik formülleri kullanmıştır. Büyük öz değerler kullanıldığı sürece bu formüllerin kullanılmasının hiçbir sakıncası yoktur ki kendisi de çalışmalarında yeterince büyük öz değerler ile çalışmanın önemini ifade etmiştir.

Metot algoritmasının oluşturulmasında kullanılan bilgisayar programı Mathematica olup öncelikle “Eigen” paketi yüklenmiştir. Aksi durumda öz değer hesaplayıcısı olarak kullandığımız “EigenNDSolve” komutu çalışmamaktadır. Bu paket ve ilgili örnekler (Squire, 2013) kaynağında görülebilir. Bunun yanında algoritmadan da görüleceği üzere Adım 4. E kadar öz değerler için asimptotik formüllerin kullanılmasına gerek yoktur. Yani öz değerler bir öz değer hesaplayıcısı ile daha iyi olarak hesaplanabilir. Ancak Adım 4’ de h parametresinin elde edilmesinde “Minimize” ya da “FindMinimum” gibi bir hesaplayıcı kullandığımız sürece bu formüllere ihtiyaç duyarız. Çünkü sabit dışında alınan potansiyeller için tam çözüme ulaşmak neredeyse imkansızdır. Dolayısıyla çözümü bir parametre cinsinden ifade edemeyiz. Bu nedenle h parametresi için kullanılacak yaklaşım aşağıdaki gibi elde edilecektir:

Genel gösterim için $\lambda_{i,q}(\alpha, \beta) = F_{i,\alpha,\beta} + \int_0^1 q ds + a_i$ formülasyonu kullanılsın.

Burada $F_{i,\alpha,\beta}$ fonksiyonunun karşılığının ne olduğu (3.2.2) formüllerinden kolaylıkla görülebilir. Bu durumda Q test potansiyeli ve q_n yaklaşık potansiyelleri için,

$$\begin{aligned} \lambda_{i,q_{n+1}}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j) &= \lambda_{i,q_n - h\nabla G(q_n)}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j) \\ &= F_{i,\alpha,\beta_j} + \int_0^1 q ds - h \int_0^1 \nabla G(q) ds + a_{i,j,q_{n+1}} - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j) \\ &= \left[\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j) \right] - h \int_0^1 \nabla G(q) ds + (a_{i,j,q_{n+1}} - a_{i,j,q_n}) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $A_{i,j,n} = a_{i,j,q_{n+1}} - a_{i,j,q_n} \in l^2$ terimi ihmal edilerek,

$$G(q_n - h\nabla G[q_n]) = \sum_{\substack{i=m \\ j=1,2}}^k \left\{ \omega_i(\alpha, \beta_j) \left([\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j)] - h \int_0^1 \nabla G[q_n(s)] ds \right)^2 \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla h parametresine göre türev alınarak,

$$\frac{d}{dh} G[q_{n+1}] = -2 \int_0^1 \nabla G[q_n] ds \left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^k \left\{ \omega_i(\alpha, \beta_j) \left([\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j)] - h \int_0^1 \nabla G[q_n] ds \right) \right\} \right]$$

ve bu sonuç sıfıra eşitlenirse,

$$h = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^k \left\{ \omega_i(\alpha, \beta_j) \left([\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j)] \right) \right\}}{\sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^k \left\{ \omega_i(\alpha, \beta_j) \int_0^1 \nabla G[q_n] ds \right\}}$$

bulunur. Diğer taraftan $\int_0^1 g_{i,q}^2(\alpha, \beta_i) ds = 1$ olup $\omega_i(\alpha, \beta_j) = 1$ alınıp

$$h = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^k (\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j))}{2k \int_0^1 \nabla G[q_n] ds}$$

$$= \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^k (\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j)) \int_0^1 g_{i,q}^2(\alpha, \beta_j) ds}{2k \int_0^1 \nabla G[q_n] ds}$$

$$= \frac{\int_0^1 \sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^k \left\{ (\lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,Q}(\alpha, \beta_j)) g_{i,q}^2(\alpha, \beta_j) \right\} ds}{2k \int_0^1 \nabla G[q_n] ds} = \frac{(1/2) \int_0^1 \nabla G[q_n] ds}{2k \int_0^1 \nabla G[q_n] ds} = \frac{1}{4k}$$

bulunur. Eğer toplam bir m değerinden başlatılıyorsa bu durumda $h = \frac{1}{4(k-m+1)}$

olacağı açıktır.

Şimdi doğal olarak “bu ihmal, h değerlerinde nasıl bir etkiye sahiptir?” sorusu ortaya çıkmaktadır.

$$A_{i,j,n} = a_{i,j,q_{n+1}} - a_{i,j,q_n} = \lambda_{i,q_{n+1}}(\alpha, \beta_j) - \lambda_{i,q_n}(\alpha, \beta_j) + h \int_0^1 \nabla G(q) ds$$

olduğundan h parametresine göre türev alınırsa, toplam içerisinde

$$\begin{aligned} \frac{dA_{i,j,n}}{dh} &= \frac{d(\lambda_{i,j,q_{n+1}} - \lambda_{i,j,q_n})}{dh} + \int_0^1 \nabla G[q_n] = \frac{d\lambda_{i,j,q_{n+1}}}{dq_{n+1}} \frac{dq_{n+1}}{dh} - \frac{d\lambda_{i,j,q_n}}{dq_n} \frac{dq_n}{dh} + \int_0^1 \nabla G[q_n] \\ &= g_{i,j,q_n}^2 \nabla G[q_{n-1}] - g_{i,j,q_{n+1}}^2 \nabla G[q_n] + \int_0^1 \nabla G[q_n] \end{aligned}$$

çarpanının geleceği görülür. Tüm $\{i,n\}$ ikilileri için $j=1,2$ olduğunda farklı

$g_{i,j,q_n}^2 \nabla G[q_{n-1}] - g_{i,j,q_{n+1}}^2 \nabla G[q_n]$ ifadeleri aynı $-\int_0^1 \nabla G[q_n] dx$ sabitine eşit

olamayacağından bu çarpan, h parametresinin hesaplanmasına etki etmez. Aslında bunu sıfır yapan değerler, aranan potansiyelin tamamen kendisine iterasyonun $(n-1)$ inci adımında ulaşıldığını gösterir. Böyle bir şey uygulamada imkansız görülse de, olması sonraki adımda minimizasyon parametresine ihtiyaç duyulmayacağını gösterir. Dolayısıyla bu durumu hesaba katmaya gerek yoktur. Diğer taraftan toplamın içindeki diğer çarpan içerisinde $A_{i,j,n}$ lerin kendisi kalır. Bu ise $\omega_i(\alpha, \beta_j) = 1$ olmak üzere,

parametrenin belirlenen değerine her n değeri için $\left(\sum_{j=1,2}^k A_{i,j,n} \right) / \left(2k \int_0^1 \nabla G[q_n] ds \right)$

teriminin eklenmesi anlamına gelir. Yapılan örneklerde bu değer, $G(q_n)$ değerlerinin küçülmesinde 10^{-18} değerlerine kadar küçülmeyi engelleyici bir etki oluşturmadığı görülmüştür. Dolayısıyla hem iterasyonla elde edilen q_n fonksiyonlarının öz değerlerinin daha iyi hesaplanmasında hem de algoritmanın çok daha hızlı çalışmasında

görülmüştür ki bu ihmal fazlasıyla kazançlı bir sonuç doğurmuştur. Bu ihmalin, göz önüne alınan test fonksiyonu düzgün olmasa bile düzgün fonksiyonlar ile yaklaşılmasından dolayı küçük etkisinin değişmeyeceği ancak sınır koşulları için bu etkinin engelleyici olmasa da değişeceği vurgulanmalıdır. Bunu farklı sınır koşulları için verilmiş örnekler üzerinde iterasyon sayısının artışı ile görmek mümkündür. Burada unutulmaması gereken, yapılan ihmalin öz değerler ve öz fonksiyonlar ile alakasının olmadığıdır. İhmal sadece $G(q_n - h\nabla G(q_n))$ ifadesinin küçültülmesinde, h parametresini elde etmek için kullanılmıştır. Dolayısıyla bu ihmalin tek etkisi, iterasyon sayısını arttırma yönünde olabilir.

Aşağıda Mathematica programı ile birlikte bir algoritma sunulmuştur. Bu algoritmada bir test potansiyeli içermektedir. Orijinal algoritma böyle bir test potansiyeline sahip değildir.

```
Get["Eigen"];
```

```
Timing[Parallelize[  $\mu_0 = \{\text{ilk spektrumun ilk k elemanı}\}$ ;
```

```
 $\mu_1 = \{\text{ikinci spektrumun ilk k elemanı}\}$ ;
```

```
 $\alpha = \alpha$  değeri;  $\beta_1 = \beta_1$  değeri;  $\beta_2 = \beta_2$  değeri
```

```
k= spektrumlardan alınacak ardışık eleman sayısı
```

```
t= ilk elemanın sırası
```

```
 $H_{F,0} := \text{EigenNDSolve}[\{-\xi''[x] + F \times \xi[x] == \omega \xi[x], \xi[0] \text{Cos}[\alpha] + \xi'[0] \text{Sin}[\alpha] == 0,$ 
```

```
 $\xi[1] \text{Cos}[\beta_1] + \xi'[1] \text{Sin}[\beta_1] == 0\}, \xi, \{x, 0, 1\}, \omega, \text{Npoly} \rightarrow 80];$ 
```

```
 $\lambda_{i,0,F} := \text{Part}[H_{F,0}, 1, i];$ 
```

$H_{F_{-,1}} := \text{EigenNDSolve}\left[\{-\xi''[x] + F \times \xi[x] == \omega \xi[x], \xi[0] \cos[\alpha] + \xi'[0] \sin[\alpha] == 0,\right.$

$\left. \xi[1] \cos[\beta_2] + \xi'[1] \sin[\beta_2] == 0\right], \xi, \{x, 0, 1\}, \omega, \text{Npoly} \rightarrow 80];$

$\lambda_{i_{-,1},F_{-}} := \text{Part}[H_{F_{-,1}}, 1, i];$

$q_0 = 0;$

$\text{For}[n=0, n < 10000, n++,$

$G[F_{-}] := \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{i,0,F} - \mu_0[[i]])^2 + (\lambda_{i,1,F} - \mu_1[[i]])^2 \right);$

$\text{Print}[" ", n, "G[q]", G[q_n], ". "];$

$g_0 := \text{Table}\left[\text{NDSolve}\left[\left\{y_i''[x] + (\lambda_{i,0,q_n} - q_n) \times y_i[x] == 0,\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left. y_i[0] == \sin[\alpha], y_i'[0] == -\cos[\alpha]\right\}, y_i, \{x, 0, 1\}\right], \{i, k\}];$

$h_0[x_{-}] := \text{Table}\left[(y_i[x])^2 /. g_0[[i]], \{i, k\}\right];$

$\tau_{0,i_{-}} := \frac{1}{\text{NIntegrate}\left[(h_0[x][[i]])[[1]], \{x, 0, 1\}\right]};$

$g_1 := \text{Table}\left[\text{NDSolve}\left[\left\{y_i''[x] + (\lambda_{i,1,q_n} - q_n) \times y_i[x] == 0,\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left. y_{i,1}[0] == \sin[\alpha], y_{i,1}'[0] == -\cos[\alpha]\right\}, y_i, \{x, 0, 1\}\right], \{i, k\}];$

$h_1[x_{-}] := \text{Table}\left[(y_i[x])^2 /. g_1[[i]], \{i, k\}\right];$

$\tau_{1,i_{-}} := \frac{1}{\text{NIntegrate}\left[(h_1[x][[i]])[[1]], \{x, 0, 1\}\right]};$

$$\nabla G[F_-, x_-] := 2 \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{i,0,F} - \mu_0[[i]]) \times \tau_{0,i} \times (h_0[x][[i]])[[1]] + \right.$$

$$\left. (\lambda_{i,1,F} - \mu_1[[i]]) \times \tau_{1,i} \times (h_1[x][[i]])[[1]] \right];$$

$$q_{n+1} = q_n - \frac{1}{4(k-t+1)} \times \nabla G[q_n, x];$$

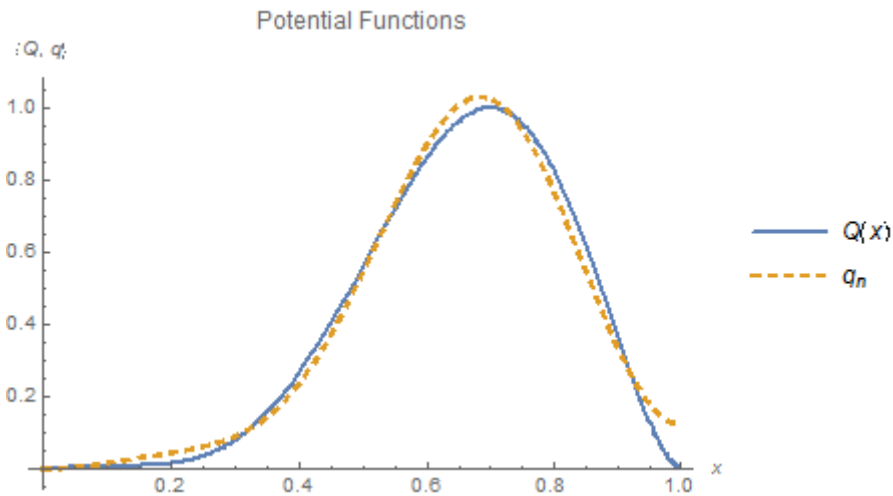
If $[G[q_n] > 10^{-6}, n, n=10000]$

Print $[Plot[q_n, \{x, 0, 1\}, PlotLegends \rightarrow "Expressions",$

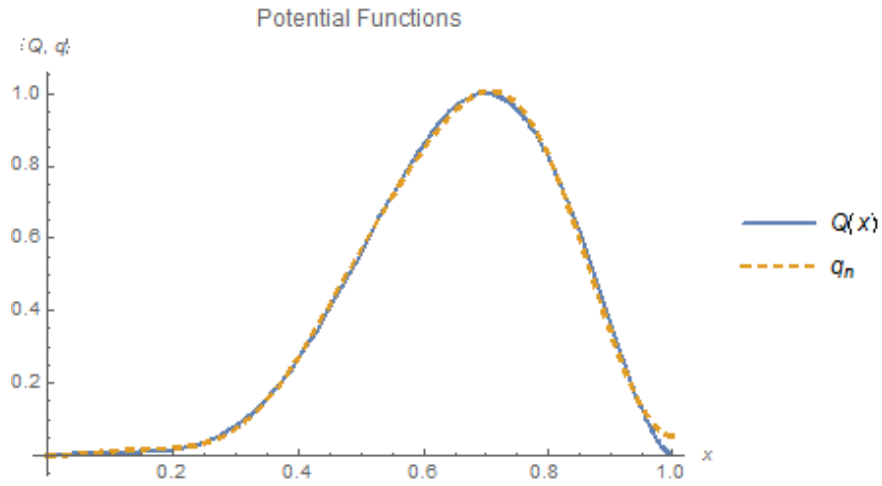
AxisLabel $\rightarrow \{x, q\}, PlotLabel \rightarrow "Potential Function",$

PlotStyle $\rightarrow \{LightBlack, Lighter\}]]]; Method \rightarrow "FinestGrained"]]$

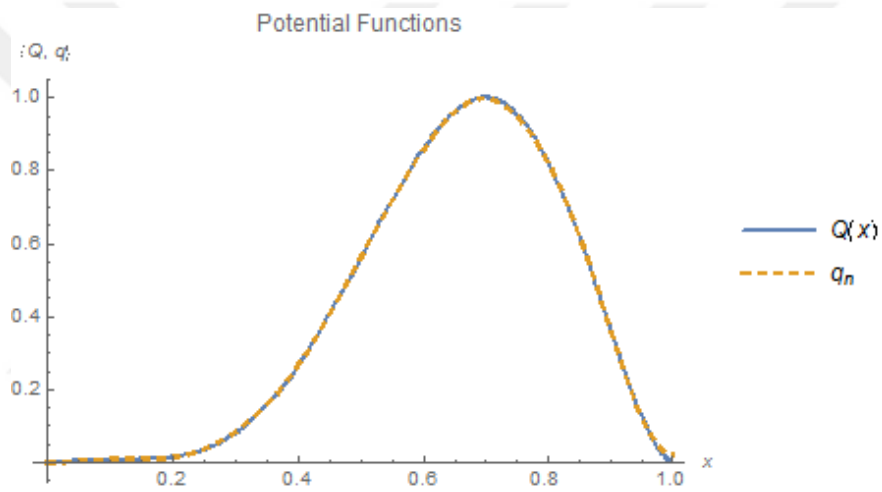
Burada öncelikle düzgün $Q^1(x)$ test potansiyeli, farklı sayıda veri çiftleri ve noise etkisi ile birlikte göz önüne alınacak, daha sonra sadece farklı sayıda veri çiftleri için diğer $Q^2(x)$ ve $Q^3(x)$ potansiyelleri incelenecektir. Burada yer almasa da bunlar dışında incelenmiş farklı fonksiyonlar içinde karşılaştırmalı olarak kısaca yorumlara yer verilecektir.



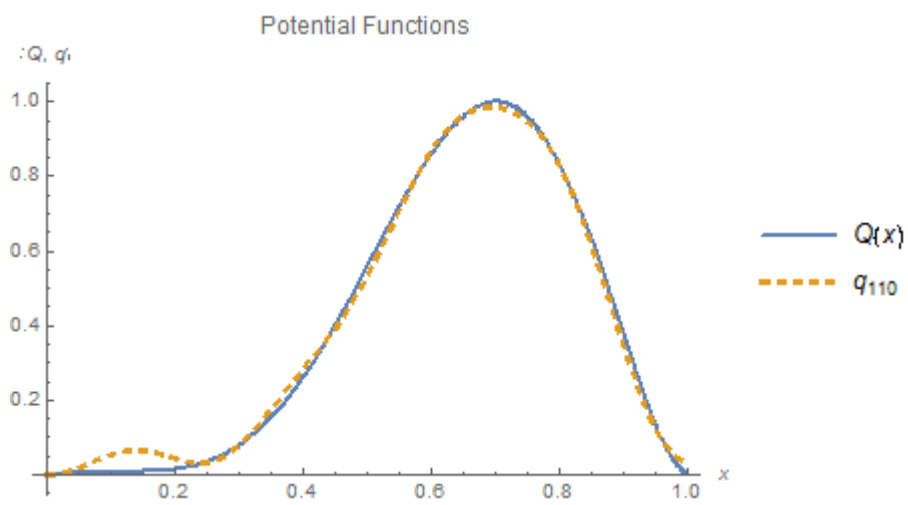
(a)



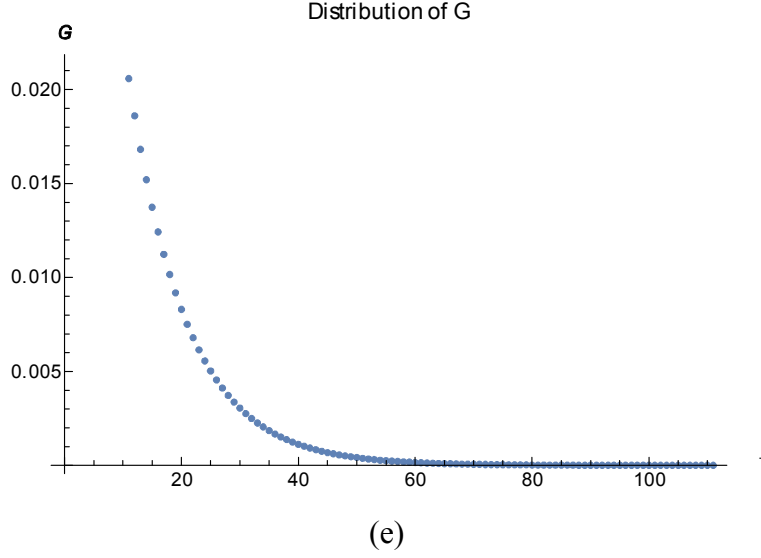
(b)



(c)



(d)



Şekil 3.2. $Q^1(x)$ için Algoritma-1 yaklaşımları ve $G(q)$ değişimi

Şekil 1. de $Q^1(x)$ test potansiyeli için sırasıyla (a)' da iki, (b)' de üç ve (c)' de beş veri çifti kullanılmıştır. (3.1.7) problemi için spektrumların elde edilmesinde $\alpha = \beta_1 = 0$ ve $\alpha = 0$, $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ile belirli sınır koşulları ele alınmıştır. Bu sonuçların elde edilme süreleri 1585.27, 4483.42 ve 18761.1 saniye yapılan iterasyon sayıları ise sırasıyla 41, 64 ve 110 şeklindedir. Ayrıca verilen sürelerin ve iterasyon sayılarının $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için bir ölçüt olarak alınacağı unutulmamalıdır. $\alpha \neq k\pi$ için artışlar gözlemlenmektedir. Farklı test fonksiyonları için yapılan hesaplamada, istenen eğriye ulaşmak seçilen eğriye göre değişmekle birlikte kayda değer bir fark görülmemiştir. Yani bazılarında daha iyi bazılarında daha kötü yaklaşım olsa da ortaya çıkan fark büyük değildir. Üstelik bu fark daha çok 2 çift veri için gözlenmiştir. Veri çifti sayısı (örneğin 5 çift veri) arttıkça elde edilen sonuçlar hemen hemen aynı olmuştur. Her bir grafik için hassasiyet 10^{-6} olarak alınmıştır. Bu değer uygunluğu için 2 çift veri durumu referans alınmıştır. Bu nedenle daha fazla veri için bu hassasiyet esnetilebilir. Örneğin 3 ve 5 çift veri için sırasıyla 2.31438×10^{-6} ve 3.21442×10^{-6} hassasiyette elde edilen grafikler ile yukarıda verilen 10^{-6} hassasiyetli grafikler arasındaki farklılık göz ile görülemeyecek düzeydedir. (d) ile verilen grafik, 5 veri çifti için $(-0.01, 0.01)$ aralığında rastgele noise terimleri kullanılmıştır. Görüldüğü üzere deneysel ortamın düzensizliği bile elde edilen sonuçlar için ciddi bozulmalara neden olamamaktadır. Ayrıca uniform noise için ise elde edilen

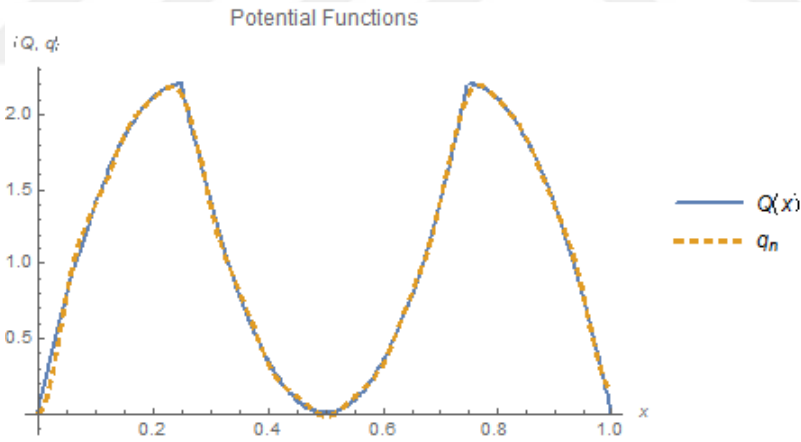
sonuçların kayda değer bir etkiye sebep olmadığı görülmüştür. Bunun için yine smooth test potansiyeli ile birlikte 5 çift veri kullanılmıştır. (e) grafiği ise $G(q_n)$ değerlerinin, iterasyon sayısına göre değişimini göstermektedir. Yukarıda verilen algoritmada $\text{If}[G[q_n]>10^{-6}, n, n=10000]$; komutu yerine,

$\text{If}[G[q_n]>10^{-6}, n, \{\text{Print}[\text{ListPlot}[\text{Table}[G[q_i], \{i, 1, n\}],$

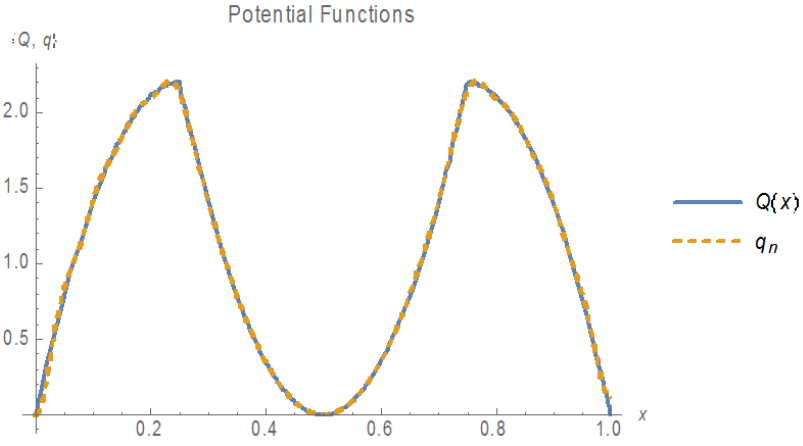
$\text{AxesLabel} \rightarrow \{Z^+, G\}, \text{PlotLabel} \rightarrow \text{"Distribution of G"}]\}, n=10000]$

komutunun alınması ile $G[q_n]$ için verilen grafikler, hesaplamının sonunda elde edilebilir.

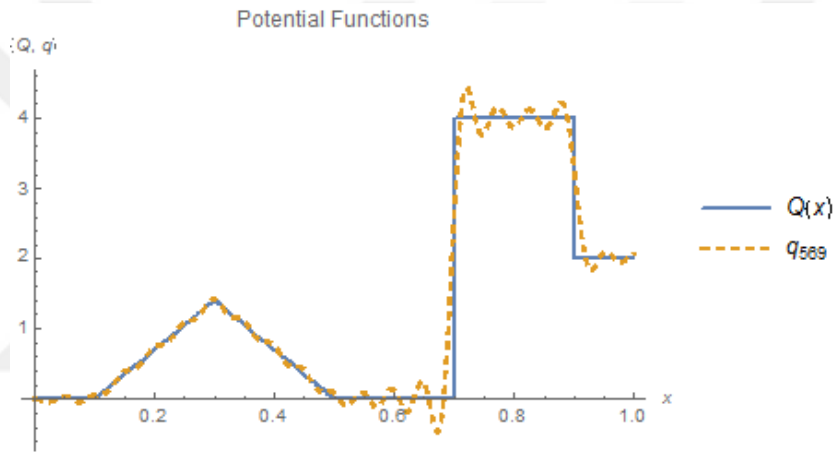
Aşağıda verilen grafikler ise sırasıyla $Q^2(x)$ ve $Q^3(x)$ potansiyelleri için belirli sayıda çift kullanılarak elde edilmiş sonuçlardır.



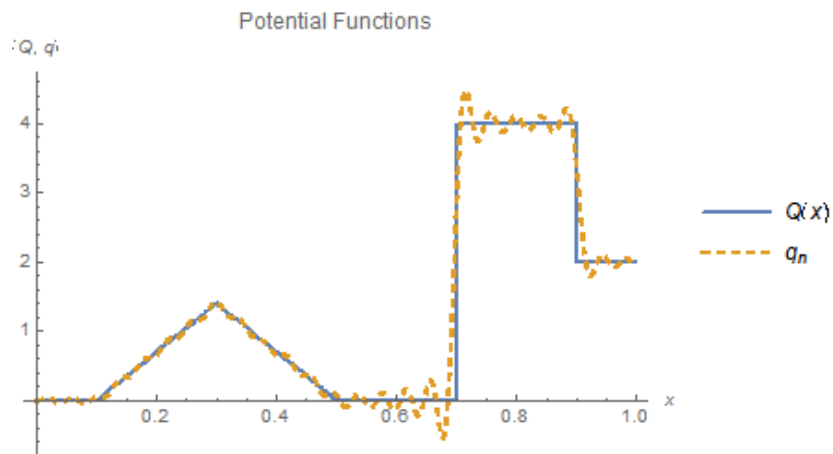
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 3.3. $Q^2(x)$ ve $Q^3(x)$ için Algoritma-1 yaklaşımları

Şekil 3.3' de Q^2 test potansiyeli için (a) ve (b) grafiklerinde olmak üzere sırasıyla 10 ve 15 çift veri kullanılmıştır. Q^3 için ise (c) ve (d) grafiklerinde sırasıyla 20 ve 25 çift veri kullanılmıştır.

3.2.2. McLaughlin-Rundell verisi

Bu kısımda McLaughlin ve Rundell tarafından 1987 yılında verilen teklik teoreminde kullanılan veri kullanılacaktır. Daha sonra bu teoremden modifikasyon yapılarak gerçek problemlerde ortaya çıkan az sayıdaki veri yardımıyla potansiyel fonksiyonu elde edilecektir. Burada fiziksel problem için sınır şartlarına yeterince müdahale edildiği varsayılmaktadır.

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad x \in (0,1) \\ y(0) &= 0, \quad y'(1) + \beta_k y(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

problemi verilsin. Burada $q(x) \in L_2(0,1)$ ve $k=1,2,\dots$ için β_k bir reel sayıdır.

Teorem 3.2.3. $q_1(x), q_2(x) \in L_2(0,1)$ ve j pozitif bir tam sayı, $\beta_k, k=1,2,\dots$ için $-\infty < \beta_k < \infty$ olacak şekilde farklı reel sayılar ve $\lambda_j(q_1, \beta_k) = \lambda_j(q_2, \beta_k)$ olsun. Bu durumda hemen hemen her yerde $q_1 = q_2$ olur (McLaughlin-Rundell, 1987).

Bu teorem verilen şartlar ile birlikte veri olarak sonsuz spektrumun j . elemanlarının kümesinin, (3.2.4) problemi için potansiyelin tekliğini garanti ettiği söyler. Bu teorem ile önceki teklik verisini birleştirmek mümkündür.

Teorem 3.2.4. $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ kümesi Teorem 3.2.3' de tarif edildiği gibi olsun. $n=1,2,\dots,n_0$ için $\{k\} = \bigcup_n \{k_n\}$ olacak şekilde $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ kümesi üzerinde ayrık bir ayrışım verilsin.

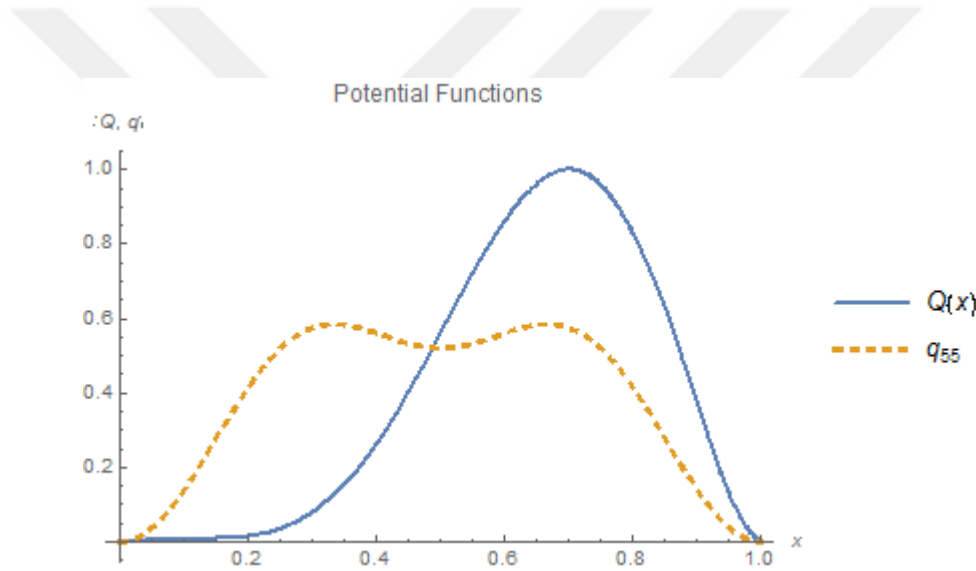
Yani $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_n \{\beta_{k_n}\}$ olacak şekilde ayrık $\{\beta_{k_n}\}$ kümeleri verilsin. $q_1, q_2 \in L_2(0,1)$

olmak üzere (3.2.4) problemi ve her bir n için $\lambda_{k_n, j_n}(q_1) = \lambda_{k_n, j_n}(q_2)$ olduğu varsayalım.

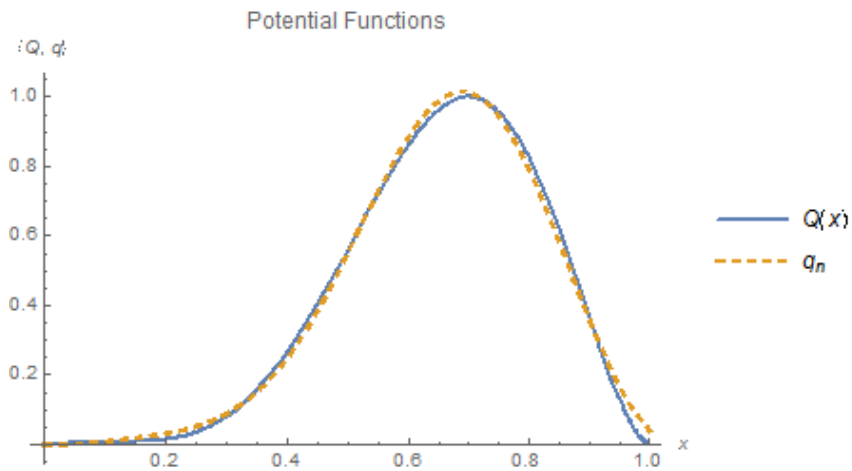
Bu takdirde hemen hemen her yerde $q_1 = q_2$ olur.

İspat: Burada $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_n \{\beta_{k_n}\}$ olduğundan $\{\lambda_{k_n, j_n}\}$ kümesi sınırlı sonsuz bir küme dolayısıyla en az bir yığılma noktasına sahiptir. Buradan sonrası Teorem 3.2.3 için verilen ispat ile benzerdir (Bkz. McLaughlin ve Rundell, 1987).

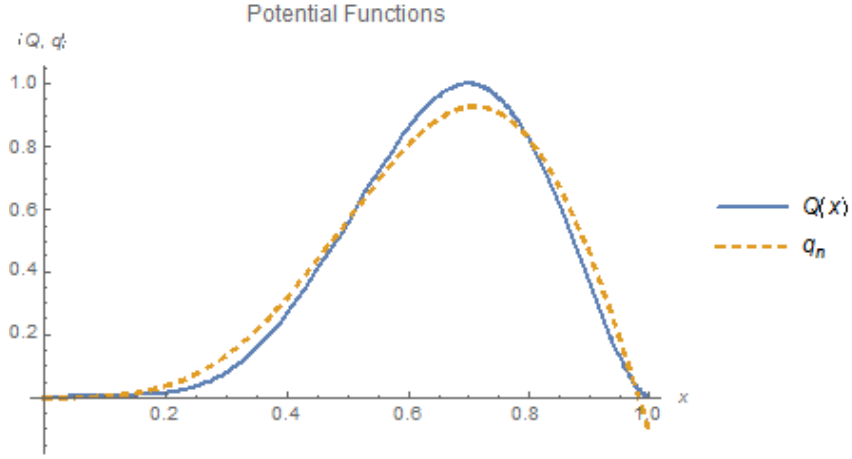
Sonuç 3.2.1. Her bir n için $\{k\} = \{k_n\}$ alınırsa bu takdirde iki spektrum ile birlikte McLaughlin-Rundell verisinin kullanılabilmesine olanak sağlayan bir genişletme elde edilir. Sonuç olarak inşaa verisi olarak β_k değerlerinin değişimi ile elde edilen k spektrumdan n çift veri kullanılabilir. Böylece az sayıda çift veriden sınır şartlarına müdahale ile daha etkili sonuç almak mümkün olacaktır.



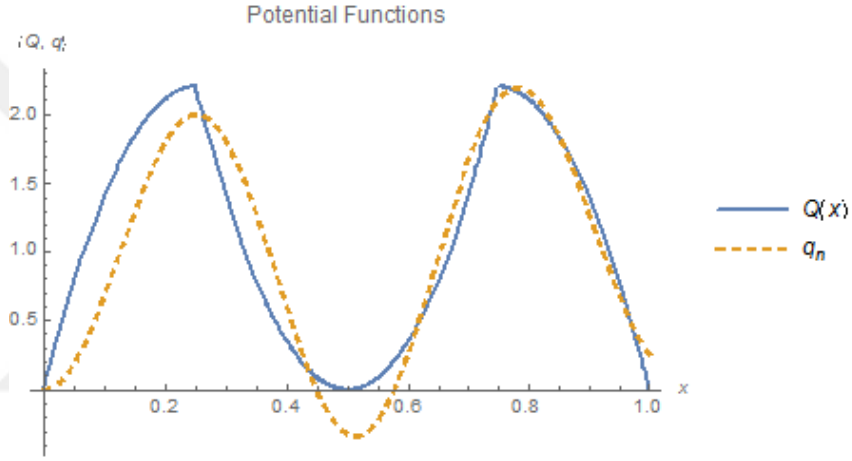
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 3.4. $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ için Algoritma-2 yaklaşımları

Yukarıda verilen problemde $\beta_k = \tan\left(\frac{\pi}{k^2}\right)$ ve $G(q) \cong 5 \times 10^{-5}$ olmak üzere (a) grafiği için bir spektrumdan iki eleman (b) grafiği için ise ilk 5 spektrumdan ikişer eleman kullanılmıştır. (c) grafiğinde ise sadece McLaughlin-Rundell verisi olarak beş spektrumun ilk elemanları kullanılmıştır. Amaç sadece yardımcı veri olarak değil aynı zamanda tek veri olarak bu verinin etkinliğini görmektir. Görüldüğü üzere tek veri olarak da düzgün potansiyeller için kötü olmayan bir sonuç alınmıştır. Ancak pratikte ilk öz değerlerin elde edildiği düşünüldüğünde bunu genelleştirmek doğru değildir. Çünkü tek başına bu veri kullanılarak $Q^2(x)$ için alınan sonuç hiç iyi olmamıştır. Yine de yardımcı veri olarak faydalı olduğu rahatlıkla söylenebilir. Bu doğrultuda en kötü

senaryolardan biri olarak bir çift veriye sahip olunduğu varsayıldığında $Q^2(x)$ ve $G(q) \cong 9 \times 10^{-4}$ için 10 spektrumdan alınan sonuç (d) grafiğinde verilmiştir. $G(q)$ için daha iyi yaklaşımlar elde edilmesine rağmen grafikte gözle görülür değişimler olmamıştır.

Burada β_k için özel bir seçim yoktur. Amaç sadece k artarken β_k nın bir limit noktasına sahip olmasıdır. Ayrıca yeni verinin işlem hacminden dolayı hesaplama hızında fark edilir derecede artış olduğu gözlemlenmiştir. Röhrl, iki spektrum durumu için teoriyi verdiği için burada ayrıca tek minimumun global minimum olduğu gösterilmemiştir. Burada İlgili algoritma-2 ektedir.

3.2.3. Bir spektrum ve sınır hızları verisi

Bu kısımda Pöschel ve Trubowitz (1987) tarafından ele alınan teklik verisi kullanılmıştır. Bu veri, öncelikle doğrudan yazarların göz önüne aldığı gibi Dirichlet sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville problemi için ele alınmıştır. Kullanılan veri bir $\{\lambda_n\}$ spektrumu ve $\kappa_n = \log \left[\frac{g'_n(1,q)}{g'_n(0,q)} \right]$ formundaki uç hızlar verisidir. Algoritmanın kendisine bakıldığında anahtar noktanın, ele alınacak verinin q potansiyel fonksiyonuna göre değişimini belirlemek olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu veri ile Dirichlet koşulu için gerekli olan hesaplamalar doğrudan ifade edilen kaynaktan bulunabilir. Ayrıca daha genel sınır koşulları için gerekli olacak hesaplamalarda yine bu kaynaktan faydalanılarak kolaylıkla yapılabilir. Dirichlet problemi için gerekli olan yeni veri ve potansiyele göre değişimi aşağıdaki gibidir.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2.5)$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \quad (3.2.6)$$

Dirichlet koşullu Sturm-Liouville problemi verilsin. Burada genel ayrılabilir sınır şartları için $\alpha = \beta = 0$ alındığı kolaylıkla görülebilir ki bu $y'(1) = -1$ olacağını işaret eder. $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ ve $\{\kappa_n\}_{n \geq 1}$ kümeleri (3.2.5)-(3.2.6) probleminin sırasıyla spektrumu ve sınır hızlarının kümesi olsun. (3.2.5) ile birlikte

$$y_1(0, \lambda, q) = y_2'(0, \lambda, q) = 1, \quad y_2(0, \lambda, q) = y_1'(0, \lambda, q) = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümlere temel çözümler denir. Diğer bir ifade ile (3.2.5) denkleminin $y(0) = a$, $y'(0) = b$ başlangıç koşullarına sahip herhangi bir çözümü,

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $g_n = g(\lambda_n, x) = \frac{y_2(\lambda_n, x)}{\|y_2(\lambda_n, x)\|_{L^2}}$ ve buradan

$$\kappa_n = \log \left[\frac{g_n'(1, q)}{g_n'(0, q)} \right] = \log |y_2'(1, \lambda_n)| = \log [(-1)^n y_2'(1, \lambda_n)]$$

halini alır (Pöschel ve Trubowitz, 1987). Buradan $y_2(\lambda_n, 1) = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.5. Her bir $n \geq 1$ için κ_n , L_2 üzerinde kompakt, reel analitik bir fonksiyon olup ve

$$\kappa_n(q) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \sin(2n\pi x) \cdot q(x) dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial q}(x) = y_1(x, \lambda_n) y_2(x, \lambda_n) - [a_n] g_n^2(x) = \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülleri sağlanır (Pöschel ve Trubowitz, 1987). Burada $g_n^2(x)$, daha önce kullanıldığı üzere birimleştirilmiş öz fonksiyonların karesi ve

$$[a_n] = \int_0^1 y_1(t, \lambda_n) y_2(t, \lambda_n) dt \text{ şeklindedir.}$$

Teklik teoremi aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.2.6. $\kappa(q) = (\kappa_1(q), \kappa_2(q), \dots)$ ve $\lambda(q) = (\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots)$ olmak üzere $\kappa \times \lambda$, L_2 üzerinde bire birdir (Pöschel ve Trubowitz, 1987).

$y_1, y_2, \lambda_n, \kappa_n$ ve $\frac{\partial \kappa}{\partial q}$ ile $\frac{\partial \lambda_n}{\partial q}$ verileri kullanılarak verilen algoritma kolaylıkla modifiye

edilebilir. Bu durumda yeni amaç fonksiyonu ve gradiyenti $I \subset \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$G(q) = \sum_{i \in I} \omega_n \left((\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q})^2 + (\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q})^2 \right),$$

$$\nabla G[q] = 2 \sum_{i \in I} \omega_n \left\{ (\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q}) g_i^2(x) + (\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q}) \frac{\partial \kappa_i}{\partial q}(x) \right\}$$

biçiminde olacaktır. Burada $y_{1n}(x)$ ve $y_{2n}(x)$ çözümlerinden $\nabla G(q) \in H^1$ olduğunu görmek kolaydır.

$G(q)$ fonksiyonu incelendiğinde $\forall q \neq Q \in L^2[0,1]$ için $0 = G(Q) < G(q)$ olduğu açıktır. Diğer bir ifade ile $Q \in L_2[0,1]$, $G(q)$ için bir global minimumdur. Ayrıca $G(q)$ 'nin hiçbir lokal minimuma sahip olmadığı Teorem 3.2.9 da verilmiştir. Böylece fonksiyonelin minimizasyonunda lokal minimum tuzağına düşülmeyecektir.

Şimdi $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonları için

$$[f, g] = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

wronskiyanı ve

$$\Gamma(f, g) = \int_0^1 [f, g] dx$$

ile tanımlı $\Gamma : H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineer formu göz önüne alınsın. Bu dönüşüm

$$|\Gamma(f, g)| \leq \|f\|_{H^1} \|g\|_{H^1}$$

ile sınırlıdır (Röhr, 2005). Ayrıca $[f, g] = -[g, f]$ olmasından Γ antisimetrik bir dönüşümdür.

Wronskiyan ile ilgili

i. f, g, F, G türevlenebilir fonksiyonları için

$$[fg, FG] = fF[g, G] + gG[f, F]$$

ii. λ_1 ve λ_2 parametrelerine karşılık Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin keyfi iki çözümü f_1 ve f_2 olmak üzere,

$$f_1 f_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [f_1, f_2]'$$

özellikleri sağlanır (Röhr, 2005).

Aynı q potansiyeli için $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$, (3.2.5) diferansiyel denklemini sağladığından,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [y_1, y_2] &= \frac{d}{dx} (y_1 y_2' - y_1' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1 y_2 (q - \lambda) - y_1 y_2 (q - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

olup buradan,

$$[y_1, y_2] = \text{sabit} = y_1(0) y_2'(0) - y_1'(0) y_2(0) = 1 \quad (3.2.7)$$

olarak bulunur.

Lemma 2.3.7. $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, (3.2.5)-(3.2.6) probleminin spektrumu, y_{1n} ve y_{2n} , λ_n öz değerine karşılık temel çözümleri olsun. g_n ise aynı öz değer için birleştirilmiş öz fonksiyon olsun. Bu durumda

i. $\Gamma(g_n^2, g_m^2) = 0$

ii. $\Gamma(y_{1n} y_{2n}, y_{1m} y_{2m}) = 0$

iii. $\Gamma(y_{1n} y_{2n}, g_m^2) = \begin{cases} 1 & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases}$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

- i. Röhrl (2005) tarafından yapılan çalışmada i şikkı için daha genel bir ispat verilmiştir.
- ii. $m = n$ için $\Gamma(y_{1n}y_{2n}, y_{1m}y_{2m}) = 0$ olduğu açıktır. $m \neq n$ için,

$$\begin{aligned}\Gamma(y_{1n}y_{2n}, y_{1m}y_{2m}) &= \int_0^1 [y_{1n}y_{2n}, y_{1m}y_{2m}] dx = \int_0^1 (y_{1n}y_{1m} [y_{2n}, y_{2m}] + y_{2n}y_{2m} [y_{1n}, y_{1m}]) dx \\ &= \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} \int_0^1 \left([y_{1n}, y_{1m}]' [y_{2n}, y_{2m}] + [y_{2n}y_{2m}]' [y_{1n}, y_{1m}] \right) dx \\ &= \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} \int_0^1 \frac{d}{dx} ([y_{1n}, y_{1m}] [y_{2n}, y_{2m}]) dx = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_m} [y_{1n}, y_{1m}] [y_{2n}, y_{2m}] \Big|_0^1\end{aligned}$$

ve

$$[y_{2n}, y_{2m}] \Big|_0^1 = \left\{ (y_{2n}(1)y_{2m}'(1) - y_{2n}'(1)y_{2m}(1)) - (y_{2n}(0)y_{2m}'(0) - y_{2n}'(0)y_{2m}(0)) \right\} = 0$$

olmasından sonucun sıfır olduğu görülür.

- iii. $m \neq n$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(y_{1n}y_{2n}, g_m^2) &= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2} \int_0^1 [y_{1n}y_{2n}, y_{2m}y_{2m}] dx \\ &= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2} \int_0^1 (y_{1n}y_{2m} [y_{2n}, y_{2m}] + y_{2n}y_{2m} [y_{1n}, y_{2m}]) dx \\ &= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2 (\lambda_n - \lambda_m)} \int_0^1 \frac{d}{dx} ([y_{1n}, y_{2m}] [y_{2n}, y_{2m}]) dx = \frac{[y_{1n}, y_{2m}] [y_{2n}, y_{2m}] \Big|_0^1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2 (\lambda_n - \lambda_m)} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(y_{1n}y_{2n}, g_n^2) &= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2} \int_0^1 [y_{1n}y_{2n}, y_{2m}y_{2m}] dx \\
&= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2} \int_0^1 (y_{1n}y_{2m} [y_{2n}, y_{2m}] + y_{2n}y_{2m} [y_{1n}, y_{2m}]) dx \\
&= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^1 \frac{d}{dx} ([y_{1n}y_{2m}] [y_{2n}, y_{2m}]) dx = \frac{[y_{1n}y_{2m}] [y_{2n}, y_{2m}]_0^1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)} = 0
\end{aligned}$$

$m = n$ için $[y_{2n}, y_{2m}] = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned}
\Gamma(y_{1n}y_{2n}, g_n^2) &= \frac{1}{\|y_{2n}\|_{L_2}^2} \int_0^1 (y_{2n}y_{2n} [y_{1n}, y_{2n}]) dx \\
&= \int_0^1 g_n^2 [y_{1n}, y_{2n}] dx = \int_0^1 g_n^2 dx = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.2.7) kullanılmıştır.

Sonuç 3.2.1. κ_n , λ_n öz değerine karşılık gelen uç verisi olmak üzere, $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma\left[\frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}\right] = 0$$

ve $m \neq n$ için

$$\Gamma\left[\frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, g_m^2\right] = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\Gamma\left[\frac{\partial\kappa_n}{\partial q}, \frac{\partial\kappa_m}{\partial q}\right] &= \Gamma\left[y_{1n}y_{2n} + [a_n]g_n^2, y_{1m}y_{2m} + [a_m]g_m^2\right] \\ &= \Gamma\left[y_{1n}y_{2n}, y_{1m}y_{2m}\right] + [a_m]\Gamma\left[y_{1n}y_{2n}, g_m^2\right] + [a_n]\Gamma\left[g_n^2, y_{1m}y_{2m}\right] + [a_n][a_m]\Gamma\left[g_n^2, g_m^2\right]\end{aligned}$$

olup $m = n$ ve $m \neq n$ için Lemma 2.3.7' den sırasıyla

$$\Gamma\left[\frac{\partial\kappa_n}{\partial q}, \frac{\partial\kappa_n}{\partial q}\right] = 0 + [a_n] - [a_n] + 0 = 0 \quad , \quad \Gamma\left[\frac{\partial\kappa_n}{\partial q}, \frac{\partial\kappa_m}{\partial q}\right] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

bulunur. Ayrıca $m \neq n$ için yine Lemma 2.3.7' den

$$\Gamma\left[\frac{\partial\kappa_n}{\partial q}, g_m^2\right] = \Gamma\left[y_{1n}y_{2n}, g_m^2\right] + [a_n]\Gamma\left[g_n^2, g_m^2\right] = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.8. $n \in \mathbb{N}$ için $g^2(x, \lambda_n)$ ve $h_n = \frac{\partial\kappa_n}{\partial q}$ fonksiyonlarının kümesi H^1 de lineer bağımsızdır.

İspat. Aksi iddia edilsin. Yani $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $k \neq n$ olmak üzere,

$$g_n^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k g_k^2 + b_k h_k$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}1 = \Gamma\left(y_{1n}y_{2n}, g_n^2\right) &= \Gamma\left(y_{1n}y_{2n}, \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k g_k^2\right) + \Gamma\left(y_{1n}y_{2n}, \sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k h_k\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (a_k + [a_k]b_k)\Gamma\left(y_{1n}y_{2n}, g_k^2\right) + \sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k \Gamma\left(y_{1n}y_{2n}, y_{1k}y_{2k}\right) = 0\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $k \neq n$ için bu fonksiyonlar lineer bağımsızdır. Aynı işlemler benzer şekilde $h_n = \frac{\partial\kappa_n}{\partial q}$ içinde yapılabilir. Ayrıca y_{1n} ve y_{2n} lineer bağımsız

çözümler olduğundan,

$$\begin{aligned} [h_n, g_n^2] &= [y_{1n}y_{2n}, g_n^2] + [a_n][g_n^2, g_n^2] = \frac{1}{\|y_{2n}\|^2} [y_{1n}y_{2n}, y_{2n}y_{2n}] \\ &= \frac{1}{\|y_{2n}\|^2} \{y_{1n}y_{2n}[y_{2n}, y_{2n}] + y_{2n}y_{2n}[y_{1n}, y_{2n}]\} = g_n^2 [y_{1n}, y_{2n}] \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.9. I sonlu veya $n\omega_n$ toplanabilirse $G(q)$ lokal minimuma sahip değildir.

Diğer bir ifade ile $\forall h \in H^1$ için,

$$\nabla G(q) = 0 \Leftrightarrow G(q) = 0.$$

İspat. $G(q) = 0$ ise $\nabla G(q) = 0$ olduğu açıktır. $\nabla G(q) = 0$ ise Teorem 2.3.9' dan $\forall n \in I$ için $\lambda_{n,q} - \lambda_{n,Q} = 0$ ve $\kappa_{n,q} - \kappa_{n,Q} = 0$ olacağından $G(q) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Kısım 3.2.1' de verilen metot için h parametresini bulmak için yapılan işlemler benzerdir ancak bu parametreye yaklaşılrken yapılan ihmal, Teorem 3.2.5' den de görüleceği üzere daha küçük olur. Bu sadece parametrenin belirlenmesinde değil aynı zamanda işlem hacmi artan algoritmanın hızını arttırmada da avantaj sunar. Bu bilgiler doğrultusunda,

$$\begin{aligned} G(q - h\nabla G(q)) &\cong \sum_{i=1}^k \left\{ \left(\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q} - h \int_0^1 \nabla G(q) dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q} - h \int_0^1 \frac{\nabla G(q) \sin(2i\pi x)}{2i\pi} dx \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

olacağından, $\frac{dG(q - h\nabla G(q))}{dh} = 0$ için

$$0 = \sum_{i=t}^k \left\{ (\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q}) \int_0^1 \nabla G(q) dx + (\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q}) \int_0^1 \frac{\nabla G(q) \sin(2i\pi x)}{2i\pi} dx \right. \\ \left. - h \left[\left(\int_0^1 \nabla G(q) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 \frac{\nabla G(q) \sin(2i\pi x)}{2i\pi} dx \right)^2 \right] \right\}$$

ve sonuç olarak,

$$h \cong \frac{\sum_{i=t}^k \left[(\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q}) \int_0^1 \nabla G(q) dx + (\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q}) \int_0^1 \frac{\nabla G(q) \sin(2i\pi x)}{2i\pi} dx \right]}{\sum_{i=t}^k \left[\left(\int_0^1 \nabla G(q) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 \frac{\nabla G(q) \sin(2i\pi x)}{2i\pi} dx \right)^2 \right]} \quad (3.2.7)$$

elde edilir.

Burada Dirichlet problemi için çalışıldığından ve $L_2[0,1]$ üzerinde $\|g_n\|^2 = 1$ olacağından,

$$\int_0^1 \frac{\partial \kappa_{i,q}}{\partial q(x)} dx = \int_0^1 y_1(x, \lambda_n) y_2(x, \lambda_n) dx - \left(\int_0^1 y_1(t, \lambda_n) y_2(t, \lambda_n) dt \right) \int_0^1 g_n^2(x) dx = 0 ,$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \nabla G(q) dx = 2 \sum_{i=t}^k (\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q}) \quad (3.2.8)$$

olur. Ayrıca m, n tamsayıları için,

$$\int_0^1 \sin(2m\pi x) \sin(2n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{1}{2} & , m = n \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sin(2m\pi x) (1 - \cos(2n\pi x)) dx = 0$$

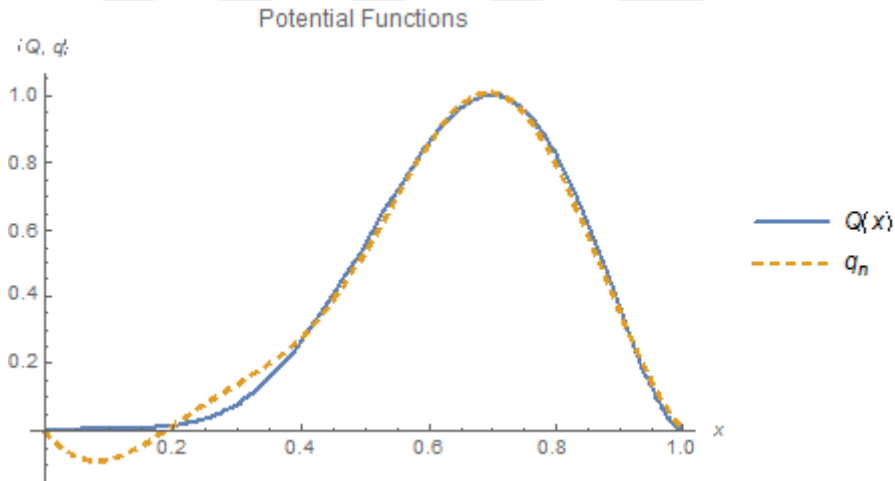
olduğundan asimptotik formüller kullanılarak,

$$\int_0^1 \frac{\nabla G(q) \sin(2i\pi x)}{2i\pi} dx = \frac{\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q}}{4i^2 \pi^2} \quad (3.2.9)$$

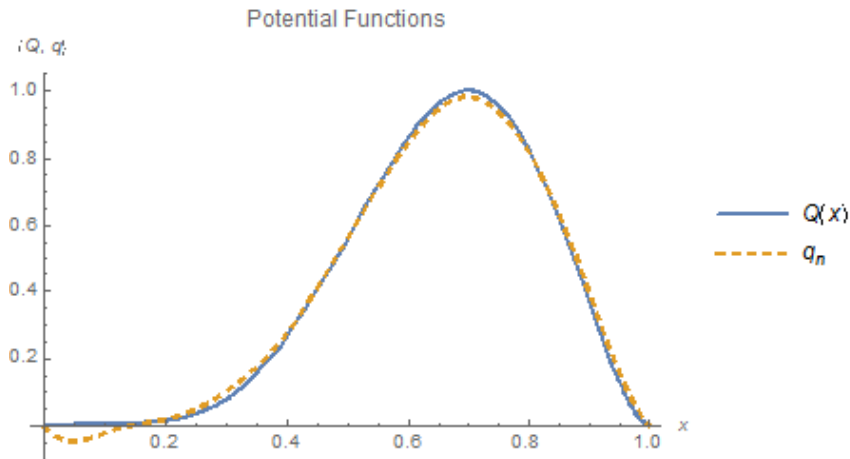
elde edilir. (3.2.8.) ve (3.2.9), (3.2.7) eşitliğinde yerine yazılarak daha kullanışlı

$$h \cong \frac{2 \left(\sum_{i=t}^k (\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q}) \right)^2 + \sum_{i=t}^k \frac{(\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q})^2}{4i^2 \pi^2}}{4 \left(\sum_{i=t}^k (\lambda_{i,q} - \lambda_{i,Q}) \right)^2 (k-t+1) + \sum_{i=t}^k \frac{(\kappa_{i,q} - \kappa_{i,Q})^4}{16i^4 \pi^4}}$$

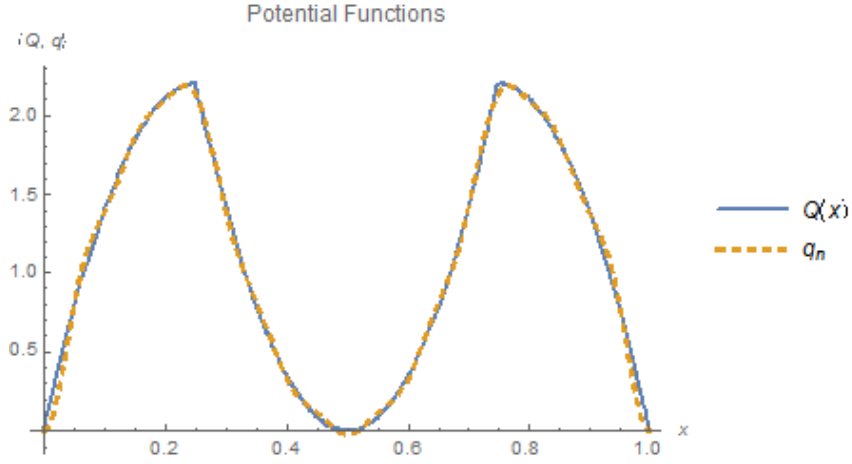
formülü bulunur. Daha önce de belirtildiği üzere h parametresi burada amaç değil araçtır. Dolayısıyla bu parametrenin hesaplanmasında yapılan ihmaller yaklaşımın kalitesinde bir etkiye sahip değildir.



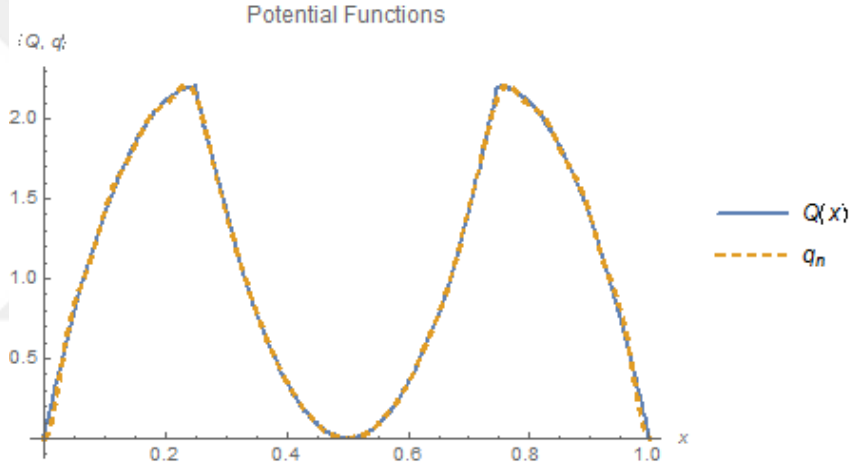
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 3.5. $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ için Algoritma-3 yaklaşımları

Şekil 3.5-(a)' da görüleceği üzere, iki çift veri için elde edilen grafik orijin civarında yeterince iyi olmasa da tamamı için ilk veriye göre daha iyi bir sonuç elde edildiği söylenebilir. Bunun nedeni yaklaşık potansiyellerin, Dirichlet problemi için kendisini her bir iterasyonda orijinal grafik için $(x, y) = (1, 0)$ noktasında sabitlemesidir.

Çünkü bu problem için $\frac{\partial \lambda_n}{\partial q}(1) = g_n^2(1) = \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}(1) = 0$ eşitlikleri geçerlidir. (b) grafiğine

bakıldığında ise beş çift veri için elde edilen sonucun iki çift veri için elde edilen sonuca nazaran büyük bir iyileşme elde edildiği görülmektedir. İlk veri ile karşılaştırıldığında

iki veri için elde edilen sonucun yanıltıcı olduğu görülse de, kullanılan verilerin grafiklere yansması düzgün potansiyeller için büyük farklılaşma göstermemiştir. (c) ve (d) grafiklerinde sırasıyla on ve on beş çift veri kullanılmıştır. İlk veriye nazaran elde edilen sonuçlar $(x, y) = (1, 0)$ noktası dışında dikkat çekici bir farklılık göstermez. Düzgün potansiyelerde olduğu gibi veri çifti sayısının artması farklılaşmayı iyice azaltacaktır. Düzgün ve düzgün olmayan sürekli $Q^1(x)$ ve $Q^2(x)$ test potansiyelleri için yeterince iyi sonuçlar elde edilmesine rağmen süreksiz $Q^3(x)$ test potansiyeli için ilk veriye paralel sonuçlar elde edilememiştir. İlk veride göz önüne alınan veri çifti sayısı için alınan sonuçlarda $(1, 0)$ civarında düzenli yaklaşımlar gözlemlenirken orjin civarında bozulmalar görülmektedir. İlk veri ile karşılaştırıldığında, $G(q_n)$ fonksiyonundeki küçülmeler çok az olduğundan iyi bir yaklaşım için oldukça büyük zamana ihtiyaç vardır. Ancak daha az sayıdaki veri yardımıyla elde edilen sonuçlar orjin civarındaki bozulmanın, belirli bir hassasiyetten sonra düzelmeye geçtiğini göstermiştir. Bu nedenle algoritmadaki h parametresini yardımcı parametre yapan üst optimizasyon metotlarının kullanılmasının uygun olacağı düşünülmektedir.

Burada ele alınan problem, Dirichlet problemi olsa da problemi genelleştirmek Pöschel ve Trubowitz (1987) tarafından yayınlanan “Inverse Spectral Theory” isimli kitap sayesinde oldukça kolaydır. Elbette problemin genelleştirilmesinin, hesaplama hacminde oldukça büyük bir artışa neden olacağı unutulmamalıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle teklik çalışmalarında karşılaşılan simetrik potansiyel durumu genelleştirilerek teklik için gerekli olan verinin değişimi incelenmiştir. Daha sonra literatürde ele alınan bir çalışma için geliştirme yapılarak bu metot farklı tip teklik verilerine uygulanmıştır. Elde edilen bulgular bir biri ile karşılaştırılarak ele alınan verilerin ilk değerler olması durumunda etkinlikleri ölçülmüştür. Ters Sturm-Liouville Problemi, birçok uygulamada karşılaşılan bir problem olduğundan gerek teklik konusunda gerekse ilgili diferansiyel denklemdeki katsayı fonksiyonlarının ve sınır şartlarının yeniden inşası konusunda büyük ilgi çekmektedir. Bu nedenle hem teklik hem de inşaa konusunda normal formdaki problem için elde edilen sonuçların diğer tip problemlere genelleştirmeleri yapılmaktadır. Dolayısıyla burada elde edilen sonuçlarında diğer tip problemlere uygulaması yapılabilir. Ayrıca bu inşaa sürecinde sadece potansiyel fonksiyonu değil uygun veriler yardımıyla aynı zamanda sınır katsayılarının inşası da ele alınabilir. İki spektrum verisi için bu problem Röhrl (2006) tarafından ele alınmıştır. Ancak diğer veriler için görüldüğü kadarıyla ortaya konulmuş çalışmalar mevcut değildir. Bu doğrultuda ihtiyaç duyulan veriler ve kullanılacak olan araçlar için Isaacson ve Trubowitz (1983), Pöschel ve Trubowitz (1987), Yang (1997) ve diğer ilgili çalışmalara bakılabilir. Yapılacak bu çalışmalarda biçimsel olarak Röhrl (2005) tarafından verilen amaç fonksiyoneli ele alınabileceği gibi kullanılacak veriye bağlı olarak Brown ve arkadaşlarının (2003) yaptığı gibi farklı tipte amaç fonksiyonları da kullanılabilir. Eğer Röhrl' ün kullandığı tipte bir amaç fonksiyonu kullanılacak ise, iyi bir hesaplayıcının yanında amaç fonksiyonunun gradiyentine ve amaç fonksiyonunun sadece global minimuma sahip olduğu gösterilmelidir. Bunun için belirtilen kaynaklar dışında ayrıca Polak(1997) kaynağına da bakılabilir. Son olarak zamansal olarak bir maliyeti olsa da burada kullanılan h parametresi elde edildikten sonra her bir iterasyonda daha iyi yaklaşımı sağlayacak diğer üst optimizasyon algoritmaları da kullanılabilir. bu algoritmalar Polak (1997) kaynağında kademeli olarak verilmiştir.



KAYNAKLAR

- Andrew A. L., 2004. Numerical solution of inverse Sturm-Liouville problems, *Anziam J.*, **45(C)**: C326-C337.
- Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., 2002. Inverse spectral problems for left-definite Sturm-Liouville equations with indefinite weight, *J. Math. Anal. Appl.*, **271**: 383-408.
- Brown B. M., Samko V. S., Knowles I. W. and Marletta M., 2003. Inverse spectral problem for the Sturm-Liouville equation, *Inverse Problems*, **19**: 235-252.
- Browne, P. J. and Sleeman, B. D., 1997. A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems, *Inverse Problems*, **13**: 1453-1462.
- Buterin, S. A. and Shieh, C. T., 2009. Inverse nodal problem for differential pencils, *Appl. Math. Lett.*, **22**: 1240-1247.
- Chadan, K., Colton, D., Paivarinta, L. and Rundell, W., 1997. *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*, SIAM, Philadelphia, USA.
- Chen, Y. T., Cheng, Y. H., Law, C. K. and Tsay, J., 2002. L_1 convergence of the reconstruction formula for the potential function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130** (8): 2319–2324.
- Cheng, Y. H. and Law, C. K., 2006. The inverse nodal Problem for Hill's equation, *Inverse Problems*, **22**: 891-901.
- Eskitascioglu, E. İ. and Acil, M., 2017. An Inverse Sturm-Liouville Problem with A generalizerd Symmetric Potential, *EJDE*, **41**: 1-7.
- Fabiano R. H., Knobel R. and Lowe B. D., 1995. A finite-difference algorithm for an Sturm-Liouville problem, *IMA J. Num. Anal.*, **15**: 75-88.
- Freiling, G. and Yurko, V.A., 2001. *Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications*, Nova Science Publishers.
- Gao Q., Huang Z. and Cheng X., 2015. A finite difference method for an inverse Sturm-Liouville problem in impedance form, *Numer. Algor.*, **70**: 669-690.
- Garling, D. J. H., 2013. *A Course in Mathematical Analysis Volume-II*, ISBN 978-1-107-03203-3, Cambridge University Press., London, UK.
- Gelcu, R. and Andreescu, T., 2007. *Putnam and Beyond*, ISBN. 13: 978-0-387-25765-5, Springer, NewYork, USA.
- Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M., 1951. On the determination of a differential equation from its spectral function, *Izv. Math.*, **15** (4): 309-360; 1955. translated in *American Mathematical Society Translate*, 1, 253.
- Ghelardoni P. and Magherini C., 2010. BVMS for computing Sturm-Liouville symmetric potentials, *App. Math. Comp.*, **217**: 3032-3045.
- Griffiths, G. J., 2005. *Introduction to Quantum Mechanics*, ISBN 0-13-124405-1, Prentice Hall Inc., London, UK.
- Guo, Y. and Wei, G., 2014. Inverse Sturm-Liouville problems with the potential known on an interior subinterval, *Appl. Anal.*, **95** (5): 1025-1031.
- Guseinov, I. M. and Nabiev, I. M., 1995. Solution of a class of inverse boundary-value Sturm-Liouville problems, *Sb. Math.*, **186** (5): 661-674.
- Guseinov, I. M. and Nabiev, I. M., 2000. A class of Inverse problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, *Differ. Equ.*, **36** (3): 471-473.

- Güldü, Y., 2013. Inverse eigenvalue problems for a discontinuous Sturm-Liouville operator with two discontinuities, *Bound. Value Probl.*, **2013** (209): 1-13.
- Hald, O. H., 1978. The inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials, *Acta Math.*, **141**: 262-291.
- Hald, O. H. and McLaughlin, J. R., 1989. Solutions of inverse nodal problems, *Inverse problems*, **5**: 307-347.
- Hoschtadt, H., 1973. The inverse Sturm-Liouville Problem, *Commun. Pure Appl. Math.*, **26**: 715-729.
- Hoschtadt, H. and Lieberman, B., 1978. An Inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data, *SIAM J. Appl. Math.*, **34** (4): 676-680.
- Hryniv, R. O. and Mykytyuk, Y. V., 2003. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials, *Inverse Problems*, **19**: 665-684.
- Isaacson, E. L. and Trubowitz, E., 1983. The Inverse Sturm-Liouville Problem. I, *Commun. Pure Appl. Math.*, **36**: 767-783.
- Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S., 1988. *Methods of Mathematical Physics* (3rd Edition), ISBN 978-0-521-66402-8, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Kammanee, A. and Böckmann, C., 2009. Boundary value method for inverse Sturm-Liouville problems, *Appl. Math. Comput.*, **214**: 342-352.
- Kirsh, A., 2011. *Introductory Functional Analysis with Applications*, ISBN 0-471-50731-8, John Wiley and Sons, New York, USA.
- Koyunbakan, H. and Yılmaz, E., 2008. Reconstruction of the potential function and its derivatives for the Diffusion operator, *Verlag der Zeitschrift für Naturforsch.*, **63a**: 127-130.
- Krantz, S. G., 1999. *Handbook of Complex Variables*, ISBN 978-1-4612-7206-9 Birkhäuser, Boston, USA.
- Kreyszig, E., 1978. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, ISBN 978-1-4419-8473-9, Springer, New York, USA.
- Law, C. K., Shen, C. L. and Yang, C. F., 1999. The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems*, **15**: 253-263 (Erratum 2001, 17, 361-364).
- Law, C. K. and Yang, C. F., 1998. Reconstruction the potential function and its derivatives using nodal data, *Inverse Problems*, **14**: 299-312.
- Levinson, N., 1949. The Inverse Sturm-Liouville Problem, *Mat. Tideskr. B.*, **25**: 25-30.
- Levitan, B. M. and Gasymov, M. G., 1964. The determination of a differential equation by two its spectra, *Uspekhi Mat. Nauk*, **19** (2): 3-63.
- Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S., 1975. *Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators*. Translations of Mathematical Monographs Volume 39, AMS, Providence, Rhode Island, USA.
- Lowe B. D., Pilant M. And Rundell W., 1992. The recovery of potentials from finite spectral data, *SIAM J. Math. Anal.*, **Vol. 23, No.2**: 482-504.
- Makin, A. S., 2007. Inverse problems of spectral analysis for the Sturm-Liouville operator with regular boundary conditions: I, *Differ. Equ.*, **43** (10): 1364-1375.
- Marchenko, V. A., 1952. Some questions of the theory of one dimensional linear differential operators of second order I, *Trudy Mosk. Mat. Obshch.* **1**: 327-420.
- Marchenko, V. A., 1986. *Sturm-Liouville operators and Applications*, Translated from the Russian by A. Iacob, ISBN 3-7643-1794-9, Birkhäuser Verlag Basel, Germany.

- McLaughlin, J. R., 1986. Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, *SIAM Review*, **28**: 53-72.
- McLaughlin, J. R., 1988. Inverse spectral theory using nodal points as data—a uniqueness result, *J. Differential Equations*, **73** (2): 354-362.
- McLaughlin, J. R. and Rundell, W., 1987. A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem, *J. Math. Phys.*, **28**: 1471-1472.
- Murray R. S., 1999. *Complex Variables With an Introduction to Conformal Mapping and Its Applications*, ISBN 07-060230-1, McGraw-Hill, New York, USA.
- Neher M., 1994. Enclosing solutions of an inverse Sturm-Liouville problem with finite data, *Computing*, **53**: 379-395.
- Njue, J. N., 2003. *Nodal Point Data for Inverse Sturm-Liouville Problems*, (Master of Science). Iowa State University, USA.
- Paine J., 1984. A Numerical method for the Inverse Sturm-Liouville problem, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **Vol. 5, No.1**: 149-156.
- Polak E., 1997. *OPTIMIZATION Algorithms and Consistent Approximations*, Springer, ISSN:0-387-94971-2. *App. Math. Sci.*, Vol.174, Springer-Verlag, New York, USA.
- Pöschel, J. and Trubowitz, E., 1987. *Inverse Spectral Theory*, volume 130 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Inc, Boston, USA.
- Rafler, M. and Böckmann, C., 2007. Reconstruction method for inverse Sturm-Liouville problems with discontinuous potentials, *Inverse Problems*, **23**: 933-946.
- Röhr N., 2005. A least-squares Functional for solving inverse Sturm-Liouville problems, *Inverse Problems*, **21**: 2009-2017.
- Röhr N., Recovering boundary conditions in inverse Sturm-Liouville problems, *Recent Advances in Differential Equations and Mathematical Physics*, **Vol. 412 of Contemp. Math.**: 2009-2017. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- Rundell, W. and Sacks, P. E., 1992. The reconstruction techniques for classical inverse Sturm-Liouville problems, *Math. Comp.*, **58** (197): 161-183.
- Sacks P. E., 1988. An iterative method for the inverse Dirichlet problem, *Inverse Problems*, **4**: 1055-1069.
- Sadovnichy, V. A., Sultanaev, Y. T. and Akhtyamov, A. M., 2016. On the solvability of inverse Sturm-Liouville problems with self-adjoint boundary conditions, *Dokl. Math.*, **93** (1): 82-84.
- Sen, R., 2012. *A First Course in Functional Analysis*, ISBN 978 085728 320 7, Anthem Press, New York, USA.
- Shahriari, M., Akbarfam, A. J. and Teschl, G., 2012. Uniqueness for inverse Sturm-Liouville problems with a finite number of transmission conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, **395**: 19-29.
- Shen, C. L., 1988. On the nodal sets of the eigenfunctions of the string equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **19**: 1419-1424.
- Shen, C. L. and Shieh, C. T., 2000. An inverse nodal problem for vectorial Sturm-Liouville equations, *Inverse Problems*, **16**: 349-356.
- Squire, J., 2013. Eigenvalue Differential Equation Solver, *URL*, <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/8762/#downloads>
- Titchmarsh, E. C., 1962. *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations Part One*. Second Edition, Oxford University Press, London, England.

- Volkmer, H. and Zettl, A. 2007. Inverse spectral theory for Sturm-Liouville problems with finite spectrum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135** (4): 1129-1132.
- Wang, Y. P., 2011. An interior inverse problem for Sturm-Liouville operators with eigenparameter dependent boundary conditions, *Tamkang J. Math.*, **42** (3): 395-403.
- Wang, Y. P., Shieh, C. T. and Ma, Y. T., 2013. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with partial information, *Appl. Math. Lett.*, **26**: 1175-1181.
- Wang, Y. P. and Yurko, V. A., 2016. On the inverse nodal problems for discontinuous Sturm-Liouville operators, *Journal of Differential Equations*, **260** (5): 4086-4109.
- Weidmann, J., 1980. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Translated by Joseph Szücs, ISBN. 0-387-90427-1, Springer-Verlag, New York, USA.
- Yang, C. F., 2010a. Inverse Nodal Problem for a Class of Nonlocal Sturm-Liouville operator, *Math. Model. Anal.*, **15** (3): 383-392.
- Yang, C. F., 2012. Inverse nodal problems for discontinuous Sturm-Liouville operator, *J. Differential Equations*, **254**: 1992-2014.
- Yang, C. F., 2014. Inverse nodal problems for the Sturm-Liouville operator with a constant delay, *J. Differential Equations*, **257**: 1288-1306.
- Yang, X. F., 1997. A Solution of the inverse nodal problem, *Inverse Problems*, **13**: 203-213.
- Yang, X. F., 2001. A new inverse nodal problem, *J. Differential Equations*, **169** (2): 633-653.
- Yen A. C., 1978. *Numerical solution of the inverse Sturm-Liouville problem*, Ph. D., University of California, Berkeley.
- Yılmaz, E., 2012. *Diferansiyel Operatörler İçin Ters Nodal Problem* (Doktora tezi). Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Zettl, A., 2005. *Sturm-Liouville Theory*, ISBN. 0-8218-3905-5, Mathematical Surveys and Monographs Volume 121, AMS, Rhode Island, USA

EKLER

EK-1.

Algoritma-2. Bu algoritma McLaughlin-Rundel verisi içinde j_0 ve j_1 inci şekilde iki öz değerin kullanıldığı durumu içerir. Sadece bir eleman kullanımı, bir diğer deyişle sadece McLaughlin-Rundel verisi için ilgili kısmın kaldırılması yeterlidir.

Get["Eigen"];

Parallelize[$\mu_{j_0} = \{k \text{ spektrumun } j_0. \text{ elemanları}\}$];

$\mu_{j_1} = \{k \text{ spektrumun } j_1. \text{ elemanları}\}$;

k= kullanılacak spektrum sayısı

For[n=1, n < k+1, n++, $\alpha=0$; $\beta_{n_-} := \frac{\pi}{n^2}$;

$H_{n_-, F_-} := \text{EigenNDSolve}[\{-\xi''[x] + F \times \xi[x] == \omega \xi[x], \xi[0] \text{Cos}[\alpha] + \xi'[0] \text{Sin}[\alpha] == 0,$

$\xi[1] \text{Cos}[\beta_n] + \xi'[1] \text{Sin}[\beta_n] == 0\}, \xi, \{x, 0, 1\}, \omega, \text{Npoly} \rightarrow 80]$;

$\lambda_{i_-, n_-, F_-} := \text{Part}[H_{n_-, F_-}, 1, i]$];

$q_0 = 0$;

For [n=0, n<10000, n++,

$$g_0 = \text{Table} \left[\text{NDSolve} \left[\left\{ y_i''[x] + (\lambda_{j_0, i, q_n} - q_n) \times y_i[x] == 0, \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. y_i[0] == \text{Sin}[\alpha], y_i'[0] == -\text{Cos}[\alpha] \right\}, y_i, \{x, 0, 1\} \right], \{i, k\}];$$

$$h_0[x_] = \text{Table} \left[(y_i[x])^2 /. g_0[[i]], \{i, k\} \right];$$

$$\tau_{0, i} := \frac{1}{\text{NIntegrate} \left[(h_0[x][[i]])[[1]], \{x, 0, 1\} \right]};$$

$$g_1 = \text{Table} \left[\text{NDSolve} \left[\left\{ y_i''[x] + (\lambda_{j_1, i, q_n} - q_n) \times y_i[x] == 0, \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. y_i[0] == \text{Sin}[\alpha], y_i'[0] == -\text{Cos}[\alpha] \right\}, y_i, \{x, 0, 1\} \right], \{i, k\}];$$

$$h_1[x_] = \text{Table} \left[(y_i[x])^2 /. g_1[[i]], \{i, k\} \right];$$

$$\tau_{1, i} := \frac{1}{\text{NIntegrate} \left[(h_1[x][[i]])[[1]], \{x, 0, 1\} \right]};$$

$$G[F_-] := \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{j_0, i, F} - \mu_{j_0}[[i]])^2 + (\lambda_{j_1, i, F} - \mu_{j_1}[[i]])^2 \right);$$

$$\nabla G[F_-, x_-] := 2 \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{j_0, i, F} - \mu_{j_0}[[i]]) \times \tau_{0, i} \times (h_0[x][[i]])[[1]] + \right.$$

$$\left. (\lambda_{j_1, i, F} - \mu_{j_1}[[i]]) \times \tau_{1, i} \times (h_1[x][[i]])[[1]] \right);$$


```
Print[" ", n, "G[q]", G[qn], ". "];
```

$$q_{n+1} = q_n - \frac{1}{4k} \nabla G[q_n, x];$$

```
If[G[qn] > 10-5, n, {Print[ListPlot[Table[G[qi], {i, 1, n}],
```

```
  AxesLabel → {Z+, G}, PlotLabel → "G nin dağılımı" ]], n=10000}];
```

```
Print[Plot[qn, {x, 0, 1}, PlotLegends → "Expressions",
```

```
  AxesLabel → {x, q}, PlotLabel → "Potential Function",
```

```
  PlotStyle → {LightBlack, Lighter} ]], Method → "FinestGrained"]
```

Algoritma-3. Bu algoritma, Dirichlet sınır koşulları için veri olarak bir spektrum ve sınır hızlarının kümesinin alındığı problem için oluşturulmuştur.

```
Get["Eigen'"];
```

```
Parallelize[ μ={ bir spektrumun ilk k elemanı };
```

```
κ={ ilk k hız değerleri }; α=0; β=0;
```

```
k= kullanılacak spektrum sayısı
```

```
HF := EigenNDSolve[{-ξ''[x] + F × ξ[x] == ωξ[x], ξ[0] Cos[α] + ξ'[0] Sin[α] == 0,
```

```
  ξ[1] Cos[β] + ξ'[1] Sin[β] == 0}, ξ, {x, 0, 1}, ω, Npoly → 80];
```

```
λi, F := Part[HF, 1, i];
```

$$\mathbf{g}_{1,F_} := \text{Table}\left[\text{NDSolve}\left[\left\{y_{i,1}''[x] + (\lambda_{i,F} - F) \times y_{i,1}[x] == 0,\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. y_{i,1}[0] == \text{Sin}[\alpha], y_{i,1}'[0] == \text{Cos}[\alpha] \right\}, y_{i,1}, \{x, 0, 1\}\right], \{i, k\}\right];$$

$$\mathbf{h}_{1,F_}[x_]:= \text{Table}\left[\left(y_{i,1}[x]\right)^2 / . \mathbf{g}_{1,F_}[[i]], \{i, k\}\right];$$

$$\kappa_{1,F_} := \text{Log}\left[(-1)^i \left(D\left[\left(\mathbf{h}_{1,F_}[[i]]\right)[[1]], x\right] / . x \rightarrow 1\right)\right];$$

$$\mathbf{g}_{2,F_} := \text{Table}\left[\text{NDSolve}\left[\left\{y_{i,2}''[x] + (\lambda_{i,F} - F) \times y_{i,2}[x] == 0,\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. y_{i,2}[0] == \text{Sin}[\alpha], y_{i,2}'[0] == \text{Cos}[\alpha] \right\}, y_{i,2}, \{x, 0, 1\}\right], \{i, k\}\right];$$

$$\mathbf{h}_{2,F_}[x_]:= \text{Table}\left[\left(y_{i,2}[x]\right)^2 / . \mathbf{g}_{2,F_}[[i]], \{i, k\}\right];$$

$$\mathbf{g}_{3,F_} := \text{Table}\left[\text{NDSolve}\left[\left\{y_{i,3}''[x] + (\lambda_{i,F} - F) \times y_{i,3}[x] == 0,\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. y_{i,3}[0] == \text{Sin}[\alpha], y_{i,3}'[0] == -\text{Cos}[\alpha] \right\}, y_{i,3}, \{x, 0, 1\}\right], \{i, k\}\right];$$

$$\mathbf{h}_{3,F_}[x_]:= \text{Table}\left[\left(y_{i,3}[x]\right)^2 / . \mathbf{g}_{3,F_}[[i]], \{i, k\}\right];$$

$$\tau_{3,i,F_} := \frac{1}{\text{NIntegrate}\left[\left(\mathbf{h}_{3,F_}[x][[i]]\right)[[1]], \{x, 0, 1\}\right]};$$

$$\mathbf{f}_{1,F_} := \left(\left(\mathbf{h}_{1,F_}[x][[i]]\right)[[1]]\right) \times \left(\left(\mathbf{h}_{2,F_}[x][[i]]\right)[[1]]\right) -$$

$$\left(\text{NIntegrate}\left[\left(\left(\mathbf{h}_{1,F_}[x][[i]]\right)[[1]]\right) \times \left(\left(\mathbf{h}_{2,F_}[x][[i]]\right)[[1]]\right), \{x, 0, 1\}\right]\right) \times$$

$$\tau_{3,i,F_} \times \left(\left(\mathbf{h}_{3,F_}[x][[i]]\right)[[1]]\right);$$

$$G[F_-] := \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{i,F} - \mu[[i]])^2 + (\kappa_{i,F} - \kappa[[i]])^2 \right);$$

$$\nabla G[F_-, x_-] := 2 \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{i,F} - \mu[[i]]) \times \tau_{3,i,F} \times (h_{3,F}[x][[i]])[[1]] + \right. \\ \left. (\kappa_{i,F} - \kappa[[i]]) \times f_{i,F}[x] \right);$$

$q_0 = 0;$

For $[n=0, n < 10000, n++]$,

Print $[" ", n, "G[q]", G[q_n], ". "];$

$$\varepsilon = \frac{\text{NIntegrate} \left[(\nabla G[q_n, x]) \times \sum_{i=1}^k \left((\lambda_{i,q_n} - \mu[[i]]) + \frac{\kappa_{i,q_n} - \kappa[[i]]}{2i \times \pi} \times \text{Sin}[2i \times \pi \times x] \right), \{x, 0, 1\} \right]}{\sum_{i=1}^k \left(\left(\text{NIntegrate}[\nabla G[q_n, x]] \right)^2 + \left(\text{NIntegrate} \left[\nabla G[q_n, x] \times \frac{\text{Sin}[2i \times \pi \times x]}{2i \times \pi} \right] \right)^2 \right)}$$

$q_{n+1} = q_n - \varepsilon \times \nabla G[q_n, x];$

If $[G[q_n] > 10^{-6}, n, n = 10000]$

Print $[\text{Plot}[q_n, \{x, 0, 1\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \text{"Expressions"}]$,

$\text{AxesLabel} \rightarrow \{x, q\}, \text{PlotLabel} \rightarrow \text{"Potential Function"}]$,

$\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{LightBlack}, \text{Lighter}\}]]]; \text{Method} \rightarrow \text{"FinestGrained"}]$

Gerek algoritma-1 de gerekse burada verilen algoritmalarda bazı benzer formülasyonlar tek bir formülasyonda kolaylıkla yazılabilir. Burada bunun tercih edilmemesinin nedeni yapılan işlemlerin daha kolay görülmesinin istenmesindedir.



ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında İzmir’ de doğdu. İlköğrenimini Açık İlköğretim Okulu’nda, liseyi Açık Öğretim Lisesi’nde tamamladı. 2007 yılında Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde okumaya hak kazandı ve 2011 yılında birincilik ile mezun oldu. Aynı yıl Manisa Celal Bayar Üniversitesi’nde Yüksek Lisans eğitimine başladı ve 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılından itibaren Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi olarak eğitime devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.



T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 14/03/2018

Tez Başlığı: TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNDE VARLIK-TEKLİK VE POTANSİYELİN İNŞAASI

Yukarıda başlığı belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 44 sayfalık kısmına ilişkin, 14/03/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10 (On) dir.

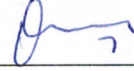
Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

14.03.2018



Adı Soyadı: Mehmet AÇIL

Öğrenci No: 139102063

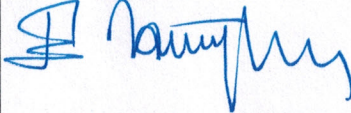
Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Statüsü: Y. Lisans

Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR



Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

