

T. C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR KATI PROBLEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN ÇOKLU ÖLÇEK METODU VE NÜMERİK METOTLARIN
KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Qadir Hassan Hamad MANGURİ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Hakkı DURU

VAN-2018

T. C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR KATI PROBLEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜ İÇİN ÇOKLU ÖLÇEK METODU VE NÜMERİK METOTLARIN
KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Qadir Hassan Hamad MANGURİ

VAN-2018

ACCEPTANCE and APPROVAL PAGE

This thesis entitled “Singüler pertürbe özellikli sınır katı problemlerin çözümü için çoklu ölçek ve nümerik metotların karşılaştırılması” presented by Qadir Hassan Hamad MANGURİ under supervision of .Doç. Dr. Hakkı DURU in the department of Department of Mathematic has been accepted as a M. Sc. thesis according to Legislations of Graduate Higher Education on 11/05/2018 with unanimity / majority of votes members of jury.

Chair: Prof. Dr.Hasan BULUT

Signature:

Member: Assoc. Dr. Sebaheddin ŞEVGIN

Signature:

Member: Assoc. Dr. Hakkı DURU

Signature:

This thesis has been approved by the committee of The Institute of Natural and Applied Science on 18/05/2018 with decision number 2.218/25-T



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Qadir Hassan Hamad MANGURİ

ÖZET

SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR KATI PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN ÇOKLU ÖLÇEK VE NÜMERİK METOTLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

MANGURİ, Qadir Hassan Hamad
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hakkı DURU
Mayıs 2018, 60 sayfa

Bu araştırmada, ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli sınır katı problemlerin çözümü için çoklu ölçek yöntemi sunulmuştur. Orijinal ikinci mertebeye singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler kısmi diferansiyel denklemlere dönüştürülür. Bu problemler çoklu ölçekleme yöntemi ile yaklaşık olarak çözülmüş ve önerilen yöntemin yakınsaması sonlu fark yöntemi ile test edilmiştir.

Bu tezde test için sunulan nümerik metot, üstel uyumlu sonlu fark şemasıdır. Üstel uyumlu sonlu fark şemaları kurulurken kalan terimi integral biçiminde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları kullanılmaktadır. Baz fonksiyonları metot hatasını yok edecek şekilde seçilmektedir. Bazı örneklerle, iki metot bilgisayar programı Matlab kodlarıyla karşılaştırılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Çoklu ölçekleme yöntemi, Düzgün yakınsama, Fark şeması, Singüler pertürbasyon, Sınır katı.



ABSTRACT

COMPARISON OF MULTIPLE-SCALES AND NUMERICAL METHODS FOR THE SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY LAYER PROBLEMS

MANGURI, Qadir Hassan Hamad
M. Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hakkı DURU
May 2018, 60 pages

In this study, a multiple scale method is presented for solving of singularly perturbed with boundary layers problems. The original second-order singularly perturbed differential equations are transformed into partial differential equations. These problems are approximately solved by the multiple scale method and the convergence of the proposed method is tested by the finite difference method.

In this thesis, the numerical method presented for the test is the exponential fitted finite difference scheme. When exponential fitted finite difference schemes are constructed, interpolation quadrature rules are used that contain the base function, which is the remaining term in integral form. The base functions are chosen to eliminate the method error. In some examples, two methods are compared with the computer program Matlab codes.

Keywords: Boundary layers, Difference scheme, Multiple-scales method, Singular perturbation, Uniform convergence.



ÖN SÖZ

Bu tez çalışması boyunca değerli bilgilerinden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve benim için göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam Sayın Doç. Dr. Hakkı DURU'ya teşekkür ederim. Ayrıca, bölüm başkanı Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a, kardeşlerime ve eşime bana her zaman yardımlarından dolayı ve çalışmalarımnda bana yardımcı olan dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

2018

Qadir Hassan Hamad MANGURİ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞİ.....	1
2. ÖNBİLGİLER	5
2.1. Bazı Tanımlar.....	5
2.2. Kuadratür Kuralları	7
3. İKİNCİ MERTEBEDEN SINIR KATMAN PROBLEMLERİNDE ÇOKLU ÖLÇEKLER YÖNTEMİ	9
3.1. İkinci Derece Sınır Katman Problemi	9
3.2. Sayısal Örnek	13
4. İKİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....	29
4.1. Asimptotik Değerlendirmeler	29
4.2. Fark Şemasının Kurulması.....	30
4.3. Fark Şemasının Hata Analizi	36
4.4. Algoritma ve Sayısal Sonuçlar.....	37
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	44
KAYNAKLAR.....	49
EKLER	52
1. Çoklu Ölçek Metodu için Matlab Programı	52
2. FarkŞemaları için Matlab Programı	54
ÖZGEÇMİŞ.....	59



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün karşılaştırılması.....	18
Çizelge 3.2. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	18
Çizelge 3.3. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	19
Çizelge 3.4. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	19
Çizelge 3.5. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	26
Çizelge 3.6. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	26
Çizelge 3.7. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	27
Çizelge 3.8. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması.....	27
Çizelge 4.1. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.3$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması	38
Çizelge 4.2. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.4$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması	39
Çizelge 4.3. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.6$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması	39
Çizelge 4.4. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.8$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması	40
Çizelge 4.5. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.3$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması.....	41
Çizelge 4.6. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.4$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması.....	42

Çizelge 4.7. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.6$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması.....	42
Çizelge 4.8. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.8$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün Karşılaştırılması	43
Çizelge 5.1. Örnek 3.1 ve 4.1’de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	45
Çizelge 5.2. Örnek 3.1 ve 4.1’de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	45
Çizelge 5.3. Örnek 3.1 ve 4.1’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	46
Çizelge 5.4. Örnek 3.1 ve 4.1’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	46
Çizelge 5.5. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	47
Çizelge 5.6. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	47
Çizelge 5.7. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	48
Çizelge 5.8. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun Karşılaştırılması.....	48

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekiller	Sayfa
Şekil 3.1. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için Çoklu Ölçek Metodu ile kesin çözüm karşılaştırma grafiği.....	20
Şekil 3.2. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için Çoklu Ölçek Metodu ile kesin çözüm karşılaştırma grafiği	28
Şekil 4.1. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için fark şemasıyla kesin çözüm karşılaştırma grafiği.....	40
Şekil 4.2. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için fark şemasıyla kesin çözüm karşılaştırma grafiği.....	43





SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Bu tezde kullanılan bazı kısaltmalar ve semboller aşağıdaki listede gösterilmiştir.

Sembol	Açıklama
$\ \cdot\ $	Norm
ε	Pertürbasyon parametresi
u_x	Birinci Mertebeden İleri Fark Türevi
$u_{\bar{x}}$	Birinci Mertebeden Geri Fark Türevi
u_x°	Birinci Mertebeden Merkezi Fark Türevi
$u_{\bar{x}x}$	İkinci Mertebeden Fark Türevi
h	Şebeke Adımı Büyüklüğü
ω_h	Şebeke
R_i	Kesme terimi
$\varphi_i(x)$	Baz Foksiyonu

Kısaltmalar	İfadeler
ADD	Adi Diferansiyel Denklem
GAM	Genelleştirilmiş Yaklaşım Metodu
MVIM	Modifiye Varyasyon İterasyon Metodu
WKB	Wentzel, Kramers ve Brillouin



1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞİ

Bu tezde, aşağıda sınır değerleri verilen singüler pertürbe özellikli

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, \quad (1.1)$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B. \quad (1.2)$$

lineer ikinci mertebe diferansiyel denklemini incelenmektedir. Burada, $0 < \varepsilon < 1$ pertürbasyon parametresidir, $a(x) \geq \alpha > 0$, ve $b(x)$ yeterince düzgün (smooth) fonksiyonlardır. (1.1) - (1.2) probleminin çözümü olan u fonksiyonu genel olarak $x = 0$ veya $x = l$ yakınında bir sınır katına sahiptir.

En yüksek mertebeden türevli terimlerin katsayısının küçük parametreye sahip olduğu diferansiyel denklemler, bir çok bilim dalında, fizikte ve bir çok mühendislik probleminde ortaya çıkan matematiksel modellerdir. Bu tür denklemlerin çözümleri tanım bölgesinin bazı noktalarında hızlı bir şekilde değişir. Bu tür diferansiyel denklemlere singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklem denmektedir. Çözümün türevi, sınır katı denen bu alt bölgelerde hızlı büyüdüğünden klasik fark şemaları kararlı olmaz; bu sebeple kesin çözüme yaklaşmaz. Bundan dolayı singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemlerle ilgili problemlere ilgi son zamanlarda artmış, sayısal çözümleriyle ilgili pek çok araştırmalar yapılmış ve bir çok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Daha fazla bilgi için, Bognar (2011), Bush (1992), Nayfeh (1981), Murray (1984), Kumar ve ark., (2009), Noor ve Mohyud-Din (2009) ve Sari (2008) kaynaklarına bakılabilir.

Sınır katı problemlerinin analizi ve singüler pertürbasyon özellikli problem kavramı altında genelleştirilmiş olan çoklu ölçek fenomenleri, uygulamalı matematikte ve teorik fizikte önemli rol oynamaktadır (Chen ve ark., 1996; Awoke ve Reddy, 2007). Regüler pertürbasyon teorisi, rezonans etkileri veya serbestlik derecesinin iptalinden dolayı çeşitli problemlere sıklıkla uygulanamaz. Böyle singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümü için düzgün olarak yaklaşan asimptotik açılımı elde etmek amacıyla, sınır katı açılımları, çoklu ölçek metodu, asimptotik eşleme (matching), ortalama (averaging) ve WKB açılımları gibi çeşitli yöntemler geliştirilmiştir (Schlichting, 1979; Basem, 2011).

Fiziksel bir sistem genellikle sistemin özelliklerinin değiştiği çoklu zaman veya mekan ölçekler içerir. Bazı durumlarda, sistemin uzun zaman aralığındaki davranışı, çoklu ölçek teorisine uygulamak için tanımlanması gereken yavaş değişen zaman ölçeğine dayanabilir. Hızlı veya yavaş değişen ölçeklerin seçimi, kolay bir iş değildir. Küçük parametreye göre kuvvet seri açılımı genellikle daha yüksek mertebede rezonans terimlerin ortaya çıkmasıyla durdurulur. Bu terimler karşı terimlerin sunumuyla telafi edilmesi gerekir.

Sınır katları da singüler pertürbe özellikli sistemlerin ortak bir özelliğidir. Bu gibi durumlarda, yüksek dereceden türevler, serbestlik derecesinin iptaline ve nihayetinde sistemin hızla değiştiği küçük bölgelere yol açan pertürbe olmamış denklemlerde görülmez. Sınır katı teorisi, en büyük türevinin küçük bir ε parametresiyle çarpıldığı diferansiyel denklemin çözümüne asimptotik bir yaklaşım elde etmek için pertürbasyon yöntemleri topluluğudur. Bu denklemlerin çözümleri genelde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken hızlı değişim bölgelerine sahiptir. Bu bölgelerin kalınlığı $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğu zaman 0'a yaklaşırsa buna sınır katı denir ve sınır katı teorisi yaklaşık çözümleri bulmak için kullanılır. Bu hızlı değişiklikler yavaş ölçekler tarafından ele alınamaz, ancak bunlar hızlı, gerdirilmiş veya büyütölmüş ölçeklerle ele alınabilir. Sınır katı teorisinde, diferansiyel denklemin çözümü, iki bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak ele alınır; yani, $y(x, \varepsilon)$. Ancak bu analizin temel hedefi, x 'in bir fonksiyonu olarak çözüme genel bir yaklaşım elde etmektir. Bu, bu halde dış değişken olan $\xi = x/\varepsilon$ gerilmiş ölçek, ki bu durumda $x = x_0$ iç değişkeniyle aynıdır, sunumuyla elde edilir. Singüler pertürbasyon probleminin çözümünün düzgün seri açılımı, tek bir ölçek, yani x ve ε 'nin tek bir kombinasyonu, örneğin x veya $\frac{x}{\varepsilon}$, veya $\frac{x}{\varepsilon^2}$, veya $\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ gibi çoklu ölçek yönteminin uygulanması için ideal bir problem haline getirilmesiyle ifade edilemez (Guo ve Tsal, 2005).

Birden fazla ölçeğin eklenmesinin arkasındaki fikir, seri açılımların mertebesini yükseltmek, yaklaşım hatasını en aza indirmek ve seküler terimlerin ortaya çıkmasını önlemektir. Bağımsız bir değişkene ve küçük bir parametreye bağlı olan bir $y(x, \varepsilon)$ fonksiyonun açılımı kullanılan ölçeğe bağlıdır. Çoğu durumda, çoklu sınır katları, iç ve dış çözümlerin ve onların asimptotik eşleşmesinin düzgün geçerli bir çözüm elde etmek amacıyla farklı bölünmüş bölgelerde yapılmak zorunda kalındığı bir tarafta mevcuttur.

Yine, çoklu ölçek yöntemi, herhangi bir eşleştirme gerekmeden çözümü üretmeyi başarabilmektedir.

Kevorkian ve Cole (1996), sınır katı ikinci mertebeden diferansiyel denklemleri interpolasyon pertürbasyon yöntemiyle çözmünü vermişlerdir. Yaklaşık sınır katı çözümü, Holmes (1995) tarafından küçük bükülme sertliğine sahip ekstenel olarak hareket eden bir kiriş için ifade edilmiştir. Probleme çoklu ölçek yöntemi uygulanır ve iki iç çözüm ve bir dış çözüm içeren bileşik açılım bulunur.

Nayfeh, (1985) tarafından, Newtonian akışkanlarının sınır katı akışlarını düzenleyen sınır değer problemine üstel seri çözümünün varlığı modifiye edilmiştir.

Roos ve ark. (1996), Falkner-Skan sınır katı problemi ile bağlantılı sıcaklık alanını araştırmak için genelleştirilmiş yakınlaştırma yöntemini (GAM) kullandı. Murdock (1991), sınırsız bir alanda sınır katı denklemi için modifiye edilmiş varyasyon iterasyon yöntemini (MVIM) uygulamış ve Pade yaklaşımları, çalışmayı daha özlü hale getirmek ve çözüm davranışını en iyi şekilde anlamak için bir çalışma olmuştur.

Klasik yöntemler dış çözümü ve iç çözümü ayrı olarak bulur ve fiziksel çözümleri kullanarak iki çözümü eşleştirir. Nihai çözüm, iç ve dış çözümleri içeren bir birleşik açılımdır. Öte yandan, çoklu ölçek yöntemini kullanarak, bileşik seri açılımı, bir seri açılımı kullanılarak bir defada düzenlenebilir (Johnson, 2005; Holmes, 1995). Bu makalede, ikinci ve üçüncü dereceden sınır tabakası problemlerinin çözümü için çoklu ölçek yöntemi uygulanmaktadır. Çoklu ölçek yönteminin, ikinci dereceden pertürbasyon özellikli sınır katı problemleri için kesin çözüm ve üçüncü derece singüler pertürbe özellikli sınır katı problemleri için yaklaşık çözüm sağladığı gösterilmiştir. Önerilen metod, ikinci mertebeye pertürbe özellikli sınır katı problemler için tam çözüm verirken (Kevorkian ve Cole, 1996; Pakdemirli ve Ozkaya, 1998; Soujanya ve ark., 2012; Yiwu, 1996) yaklaşık çözüm elde etmişlerdir. Orijinal ikinci ve üçüncü mertebeye diferansiyel denklemler kısmi diferansiyel denklemlere dönüştürülür. Bu problemler çok ölçekli yöntemle zayıf bir şekilde çözülmüş ve önerilen yöntemin düzgünlüğünü doğrulamak için standart test örnekleri üzerinde sayısal simülasyonlar tamamlanmıştır.

Tek değişkenli, pertürbe özellikli ikinci mertebeden, genelde doğrusal olmayan, adi diferansiyel denklemlerde sınır değer problemlerinin sayısal çözümü, yerleşmiş bir araştırma alanıdır. Singüler pertürbe olmuş iki nokta sınır değer problemlerinin çözümü için birçok sayısal yöntem önerilmiştir. Standart merkezi fark şemasının mertebeye

sahip olduğu bilinir, fakat sınır katından dolayı kaba Şebeke üzerinde uygulandığında sayısal çözümdede fiziksel olmayan bir salınım verir. Bu fiziksel olmayan salınım olaylarını ihmal etmek için teorik olarak karşılaştırıldığında yeterince küçük adım büyüklüğünün kullanılması istenir. Ancak, çok küçük olduğu zaman reel uygulamadan daha ince Şebeke kullanmak pratik değildir. Adaptif yöntemler muhtemel bir yaklaşımdı göstermektedir. Adaptif yöntemler, singüler pertürbe özellikli adi diferansiyel denklemlerin yerel çözümlerinin, sınır katı, başlangıç katı veya diğer tipler içerisinde, otomatik olarak hesaplanmış Őebekelere odaklanmak için çaba gösteriyorlar. Gecikmeli yenilenmiş işe alım denklemleri için üstel katsayılı Őemalar Bender ve Orszag (1978), O'Malley (1974), Nayfeh (1985), Doolan ve ark. (1980) ve Roos ve ark. (1996) tarafından sunulmuştur. Bu tür problemlerin analizi için bu kaynaklara bakılabilir. Singüler pertürbe özellikli birinci mertebeli lineer diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemine üstel katsayılı fark Şemasıyla nümerik yaklaşım Erdoğan (2009) tarafından sunulmuştur.

Bu tezde, singüler pertürbe özellikli tek sınır katlı sınır değer problemleri için üstel katsayılı fark Şeması sunulmaktadır. Bu fark Şemaları kurulurken ağırlık fonksiyonu içeren, kalan terimi integral biçiminde olan interpolasyon kuadratür kuralları kullanılmaktadır. Ağırlık fonksiyonları yöntemden doğan hatayı sıfırlayacak biçimde seçilmektedir. Burada incelenen diferansiyel denklem lineer denklemlere dönüştürülür. Bu tür lineer denklemler üçlü bant matrisleriyle gösterilirler. Samarskii'ye (2002) göre kovma algoritmasıyla bu lineer sistemler çözülecektir.

Gerek çoklu ölçek metodu gerek üstel katsayılı fark Őemalarıyla elde edilen yaklaşık çözümler kesin çözümdü bilinen örnekler üzerinde test edilmektedir. Bunun için Matlab kodları kullanılmıştır. Böylece incelenen problem için bilgisayar desteği sağlanmaktadır.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. Bazı Tanımlar

Bu bölümde, bu tezde kullanılacak bazı tanımları ve ispatsız olarak teoremleri verelim.

Tanım 2.1: g herhangi bir fonksiyon olsun. Buna göre, (Kwak, 2014 ve Stahel, 2017)

- $g_{x,i} = \frac{g(x_{i+1})-g(x_i)}{h}$ ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denir.
- $g_{\bar{x},i} = \frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{h}$ ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir.
- $g_{x^\circ,i} = \frac{g(x_{i+1})-g(x_{i-1})}{2h}$ ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi denir.
- $g_{\bar{x}x,i} = \frac{g(x_{i+1})-2g(x_i)+g(x_{i-1}))}{h^2}$ ifadesine ikinci mertebeden fark türevi denir.

Tanım 2.2:

- $\omega_h = \{x_i | x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ve } h = l/N\}$ kümesine $[0, l]$ aralığındaki düzgün şebeke denir (Amirali ve Duru, 2010).
- $\|g\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h} |g(x_i)|$ ifadesine düzgün şebeke normu denir (Amirali ve Duru, 2010).

Tanım 2.3:

- $\|f\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |f(x)|$ ifadesine $[0, l]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için maksimum norm denir (Amirali ve Duru, 2010).
- $C^{(n)}[0, l]$ kümesi $[0, l]$ aralığında x 'e göre n . dereceden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesidir (Amirali ve Duru, 2010).

Tanım 2.4: $[a, b]$ aralığında tanımlanan

$$\bar{\omega} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine $[a, b]$ 'de tanımlanan düzgün olmayan şebeke, x_i noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir. Eğer düğümler eşit aralıklı iseler buna düzgün şebeke diyoruz:

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = \frac{b-a}{N} \right\}.$$

h sabitine şebeke adımı denir. $\bar{\omega}$ şebekesinde tanımlanmış $f(x)$ ($x \in \bar{\omega}$) fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir ve çoğu zaman $f(x_i)$ değerini kısaca f_i şeklinde göstereceğiz.

Her bir diferansiyel denkleme aranan fonksiyon değerleri dışında türev değerleri de katılır. Türevlerin yaklaşımı için çoğu zaman fark türevleri denilen aşağıdaki ifadeler kullanılır (düzgün şebeke örneğinde) (Amirali ve Duru, 2010).

Tanım 2.5: Pratikte kullanılan her bir algoritmanın belli bir anlamda yakınsaklık özelliğine sahip olması gerekir. Bunu fark problemi örneğinde açıklamaya çalışalım.
Lineer

$$Lu = f(x), x \in G \quad (2.1)$$

denkleminin

$$\ell u = \mu(x), x \in \Gamma \quad (2.2)$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şart olabilir) sağlayan çözümünün bulunması istensin, burada $f(x)$, $\mu(x)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), ℓ –belirli bir lineer diferansiyel operatördür. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ şebekesinin kurulduğunu varsayalım, burada ω_h -iç şebeke, γ_h -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir (şebeke adımı). Çok boyutlu hal için h bir vektör olabilir. (2.1)-(2.2) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, x \in \omega_h \quad (2.3)$$

$$\ell_h y = \chi_h, x \in \gamma_h \quad (2.4)$$

fark probleminin söz konusu olduğunu varsayalım, burada $L_h, \ell_h - \bar{\omega}_h$ da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h, χ_h belli şebeke fonksiyonlarıdır. Böylece (2.3)-(2.4) problemi h parametresine bağlı olan fark problemleri ailesi gibi düşünülebilir. $z = y - u$ ($x \in \bar{\omega}_h$) farkına fark probleminin hatası denir. $y = z + u$ ifadesini (3)-(4)'de yerine yazarsak

$$L_h y = \psi_h, x \in \omega_h \quad (2.5)$$

$$\ell_h y = v_h, x \in \gamma_h \quad (2.6)$$

biçiminde fark problemini elde ederiz, burada $\psi_h = L_h u$ ($x \in \omega_h$), $v_h = \ell_h u$ ($x \in \gamma_h$) olur. ψ_h ve v_h ifadelerine yaklaşım hataları veya kesme hataları denir. (2.3) fark denkleminin (2.1) diferansiyel denkleme yaklaşım hatası ve (2.4) fark şartının (2.2) şartına yaklaşım hatası). Daha önce söylediğimiz gibi z hatası belli bir

anlamda (belli bir normda) sifira yakınsama özelliğine sahip olmalıdır. Şebeke fonksiyonları uzaylarında değişik normlar söz konusu olabilir. Örneğin bir boyutlu düzgün şebeke halinde çoğu zaman aşağıdaki normlar kullanılmaktadır (Amirali ve Duru, 2010).

Tanım 2.6: C normunun fark benzerleri (Amirali ve Duru, 2010).

$$\|y\|_c = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)| \equiv \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|.$$

Tanım 2.7: L_2 normunun fark benzerleri (Amirali ve Duru, 2010).

$$\|y\| = \left(\sum_{i=0}^n h y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ veya } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tanım 2.8: Eğer $h \rightarrow 0$ olduğunda $\|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$ ise ($\|\cdot\|_1 \cdot \bar{\omega}_h$ şebekesindeki herhangi norm), bu durumda $L_h y = \varphi_h$ $x \in \omega_h$, $\ell_h y = \chi_h$ $x \in \gamma_h$. fark probleminin çözümü $Lu = f(x)$, $x \in G$, $\ell u = \mu(x)$, $x \in \Gamma$. probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|y - u\| \leq C h^k, k > 0$$

ise (C , h 'a bağlı olmayan sabittir) bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme h 'ın k 'inci derecesiyle yakınsar ($O(h^k)$ hızıyla yakınsar) veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir (Amirali ve Duru, 2010).

2.2 Kuadratür Kuralları

Aşağıdaki kuadratür kurallarını fark şemalarının kurulmasında kullanacağız

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \left[\int_a^b p(x) dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma) f(a) \}, \quad (2.7)$$

$$f(a; b) \int_a^b (x - x^{(\sigma)}) p(x) dx + R(f).$$

Burada σ -reel parametre, $p(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonudur.

$$R = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, f \in C^n, n = 1 \text{ veya } 2,$$

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, s = 0, 1;$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, f(a; b) = [f(b) - f(a)] / (b - a),$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s / s, \lambda > 0; T_s(\lambda) = 0, \lambda < 0.$$

olur. Bir diğer formül,

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f(a; b) \int_a^b p(x) dx + \bar{R}(f), \quad (2.8)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, f \in C^n, n = 1 \text{ veya } 2.$$

(2.7), (2.8) formüllerinde aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonu kullanılmaktadır. Ayrıca

$$K_0(a, \xi) = K_0(b, \xi) = 0,$$

$$K_1(a, \xi) = K_1(b, \xi) = K_1(x, \xi) = 0,$$

$$K_1(x, \xi) = K_1(\xi, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) = -K_0(x, \xi), \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, \xi) = -K_0(\xi, x)$$

olduğu görülebilir.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x) dx + R^*(f), (2.2.3)$$

$$R^*(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}^*(x, \xi) d\xi + (n-1) f(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x) dx, n = 1 \text{ veya } 2,$$

$$K_s^*(x, \xi) = T_s(x - \xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) + (b-a)^{-1}(b - \xi)^s \left(\frac{a+b}{2} - x\right), s = 0, 1.$$

(Amirali ve Duru, 2010). Fark şeması işlemleri için (Samarskii, 2002) notasyonları kullanılacaktır.

3. İKİNCİ MERTEBEDEN SINIR KATMAN PROBLEMLERİNDE ÇOKLU ÖLÇEKLER YÖNTEMİ

Bu kısımda, genel ikinci ve üçüncü derece sınır katı problemleri için kullanılan çoklu ölçekler yöntemi sunulmaktadır.

3.1 İkinci Derece Sınır Katman Problemi

Çoklu ölçekler yöntemini açıklamak için, aşağıda verilen ikinci mertebeden singüler pe-rturbe özellikli denklem

$$\varepsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.1)$$

ve aşağıda verilen sınır koşullarını göz önüne alalım:

$$y(0) = \alpha, y(1) = \beta. \quad (3.2)$$

Burada α ve β sabitleri, ε ise pertürbasyon parametresini ifade etmektedir. Denklem (3.1) için, eğer $a(x) > 0$ ise sınır katı noktası $x = 0$; eğer $a(x) < 0$ ise, sınır katı noktası $x = l$ olduğu bilinmektedir. Burada yapılmak istenen, problem (3.1)'in sınır koşulları olarak belirtilen (3.2) kullanılarak, çoklu ölçekler yöntemi ile yaklaşık olarak çözülmesidir. Problem (3.1)'de verilen sınır katının varlığı nedeniyle iki ölçeği değerlendirmeye almaktayız: dış katman olarak $x = x_0$ ve iç -ya da sınır- katman olarak $\xi = x/\varepsilon$.

Ardından, zincir kuralını kullanarak, aşağıda görüldüğü şekilde türevleri elde ederiz:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial \xi} \times \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_0} \times \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \quad (3.4)$$

İki ölçeğin var olması için, problemin çözümüne dair aşağıda verilen çoklu ölçek açılımı alalım

$$y = y_0(\xi, x_0) + \varepsilon y_1(\xi, x_0) + \varepsilon^2 y_2(\xi, x_0) + \dots \quad (3.5)$$

(3.3), (3.4) ve (3.5)'yi orijinal denklem olan (3.1)'deki yerlerine yazdığımızda aşağıda verilen denklemi

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\ + a(x) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + b(x)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0,$$

veya

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_0 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_0 + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_1 + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_1 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_1 \right. \\ \left. + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_2 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_2 + \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_2 + \dots \right) + \left(a(x) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} y_0 + a(x) \frac{\partial}{\partial x_0} y_0 \right. \\ \left. + a(x) \frac{\partial}{\partial \xi} y_1 + a(x) \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} y_1 + a(x) \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} y_2 + a(x) \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_0} y_2 + \dots \right) \\ + (b(x)y_0 + \varepsilon b(x)y_1 + \varepsilon^2 b(x)y_2 + \dots) = 0. \quad (3.6)$$

elde ederiz. (3.1) orijinal adi diferansiyel denklemi, bir (3.6) kısmi diferansiyel denkleme dönüşür. ε 'nin her bir kuvvetinin katsayılarını ayırdığımızda, aşağıda verilen bir dizi denklem elde edilmektedir:

$$O(1/\varepsilon): \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0, \quad (3.7)$$

$$O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} - a \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - b y_0, \quad (3.8)$$

$$O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial y_2}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} - a \frac{\partial y_1}{\partial x_0} - b y_1. \quad (3.9)$$

Denklem (3.7)'nin genel çözümü

$$(D_\xi^2 + a D_\xi) y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = D_\xi^2 + a D_\xi = D_\xi (D_\xi + a), \quad (3.10)$$

bu sebeple

$$L_1 = D_\xi, L_2 = D_\xi + a, \quad (3.11)$$

alınır. Denklem (3.11) 'de $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ değerleri,

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = a, \quad (3.12)$$

alınır denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_0 &= e^{-\frac{c_1\xi}{a_1}} f(b_1\xi - x_0) + e^{-\frac{c_2\xi}{a_2}} g(b_2\xi - x_0), \\ &= e^{-\frac{0}{1}\xi} f(0 \times \xi - x_0) + e^{-\frac{a}{1}\xi} g(0 \times \xi - x_0), \\ &= f(-x_0) + e^{-a\xi} g(-x_0), \\ &= A(x_0) + B(x_0)e^{-a\xi}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada A ve B bu yakınsama seviyesinde belirsizdir; yaklaşımın sonraki düzeyinde çözülebilirlik şartlarının konmasıyla belirlenirler. Bulduğumuz y_0 fonksiyonunu (3.8) denklemde yerine koyarak, verilen kısmi diferansiyel denklemdeki ilgili türevleri

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_0} = A'(x_0) + B'(x_0)e^{-a\xi}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} = 0 + B'(x_0)(-ae^{-a\xi}) = -aB'(x_0)e^{-a\xi}, \quad (3.15)$$

biçiminde yazalım. (3.14) ve (3.15) ifadelerini (3.8) denkleminin sağ tarafında yerine yazarak

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} - a \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - by_0 &= 2aB'e^{-a\xi} - aA' - aB'e^{-a\xi} - bA - bBe^{-a\xi} \\ &= (aB' - bB)e^{-a\xi} - (aA' + bA), \end{aligned} \quad (3.16)$$

kısmi diferansiyel denklemini elde ederiz. (3.16) denklemin in özel çözümü

$$y_{1p} = w\xi e^{-a\xi} + (Z\xi + X). \quad (3.17)$$

olur. (3.17) çözümünün kısmi diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial y_{1p}}{\partial \xi} = w e^{-\alpha \xi} - \alpha w \xi e^{-\alpha \xi} + Z, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 y_{1p}}{\partial \xi^2} = -\alpha w e^{-\alpha \xi} - \alpha w e^{-\alpha \xi} + \alpha^2 w \xi e^{-\alpha \xi} = -2\alpha w e^{-\alpha \xi} + \alpha^2 w \xi e^{-\alpha \xi}, \quad (3.19)$$

alırız. (3.18) ve (3.19) ifadelerini (3.8) denkleminin sol tarafında yerine yazarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_{1p}}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial y_{1p}}{\partial \xi} &= -2\alpha w e^{-\alpha \xi} + \alpha^2 w \xi e^{-\alpha \xi} + a w e^{-\alpha \xi} - \alpha^2 w \xi e^{-\alpha \xi} + \alpha Z \\ &= -\alpha w e^{-\alpha \xi} + \alpha Z, \end{aligned} \quad (3.20)$$

bulunur. (3.16) ve (3.20) denklemlerinde sağ taraflarını birbirine eşitleyerek w ve z değerleri

$$-\alpha w = \alpha B' - bB \Rightarrow w = \frac{-(\alpha B' - bB)}{a}, \quad (3.21)$$

ve

$$-\alpha Z = -(\alpha A' - bA) \Rightarrow Z = \frac{-(\alpha A' - bA)}{a}, \quad (3.22)$$

biçiminde yazılır. Denklem (3.17) 'deki (3.21) ve (3.22) ifadeleri yerine

$$y_{1p} = -\frac{(\alpha B' - bB)}{a} \xi e^{-\alpha \xi} - \frac{(\alpha A' + bA)}{a} \xi, \quad (3.23)$$

elde edilir. $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq \xi \leq \varepsilon^{-1}$, şartlarını sağlayan bir çözüm arıyoruz, ancak bunlardan ikincisi $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ olmaktadır, dolayısıyla her iki durum için de doğru olan sonucu elde edebilmek için (3.23) 'deki ξ ve $\xi \exp(-\alpha \xi)$ katsayılarını birbirinden bağımsız olarak yok etmek zorundayız. Sonuç olarak

$$aB' - bB = 0, \quad aA' + bA = 0, \quad (3.24)$$

bulunur. Denklem (3.24) çözüldüğünde, A , B değerleri bulunur. Daha sonra (3.13) denkleminde bu değerler yerine konduğunda ve yaklaşık çözümü bulmak için (3.2) 'deki sınır koşulları uyguladığında, a ve b değerleri bulunur. Bu yöntem, ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli sınır katı problemi için özel bir örnek üzerinde ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

$$y_1 = y_{1h} + y_{1p} = A(x_0) + B(x_0)e^{-a\xi} - \left(\frac{aB' - bB}{a}\right)\xi e^{-a\xi} - \left(\frac{aA' + bA}{a}\right)\xi. \quad (3.25)$$

Aynı yöntemle, açılımın ikinci katsayısı y_2 için de bir çözüm üretilebilir (Gupta ve Kumar, 2016).

3.2. Sayısal Örnek

Çoklu Ölçekler yönteminin uygulanabilirliğini ve düzgünlüğünü göstermek için üç tane lineer singüler pertürbe özellikli problemi düşünüyoruz: biri soluç sınır katına ve ikisi de sağuç sınır katına sahiptir. Bu örnekler, literatürde geniş ölçüde tartışıldığı ve karşılaştırmak için kesin çözümleri mevcut olduğu için seçilmiştir.

Örnek 3.1. (Gupta ve Kumar, 2016) Aşağıdaki Singüler pertürbe özellikli homojen problemi,

$$\varepsilon y''(x) + (1 + \varepsilon)y'(x) + y(x) = 0; \quad x \in [0,1], \quad (3.26)$$

ile

$$y(0) = 0 \text{ ve } y(1) = 1, \quad (3.27)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. Daha sonra, zincir kuralını kullanarak,

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial \xi} \times \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_0} \times \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \quad (3.29)$$

türevleri elde ederiz. İki ölçeğin var olması için, problemin çözümüne dair aşağıda verilen çoklu ölçek açılımını alalım

$$y = y_0(\xi, x_0) + \varepsilon y_1(\xi, x_0) + \varepsilon^2 y_2(\xi, x_0) + \dots \quad (3.30)$$

(3.28), (3.29) türevleri ve (3.30) asimptotik açılımı (3.26) orijinal denklemde yerlerine yazıldığında

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) + (1 + \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0,$$

veya

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_0 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_0 + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_1 + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_1 \right. \\ & + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_2 + \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_2 + \dots \left. \right) + \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} y_0 + \frac{\partial}{\partial x_0} y_0 + \frac{\partial}{\partial \xi} y_0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} y_0 \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} y_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} y_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} y_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_0} y_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} y_2 + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x_0} y_2 + \dots \left. \right) \\ & + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

denklemini elde edilir. ε 'nin her bir kuvvetinin katsayıları, (3.31) denkleminin sıfırına eşitlendiğinde aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$O(1/\varepsilon): \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0, \quad (3.32)$$

$$O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial y_0}{\partial \xi} - \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - y_0, \quad (3.33)$$

$$O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} - \frac{\partial y_1}{\partial \xi} - \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - y_1, \quad (3.34)$$

(3.32) denkleminin genel çözümü için

$$(D_\xi^2 + D_\xi) y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = D_\xi^2 + D_\xi = D_\xi (D_\xi + 1). \quad (3.35)$$

Bu sebeple

$$L_1 = D_\xi, L_2 = D_\xi + 1, \quad (3.36)$$

alınır. Denklem (3.36) 'de $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ değerleri,

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 1, \quad (3.37)$$

alınır ve denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_0 &= e^{-\frac{c_1}{a_1}\xi} f(b_1\xi - x_0) + e^{-\frac{c_2}{a_2}\xi} g(b_2\xi - x_0), \\ &= e^{-\frac{0}{1}\xi} f(0 \times \xi - x_0) + e^{-\frac{1}{1}\xi} g(0 \times \xi - x_0), \\ &= f(-x_0) + e^{-\xi} g(-x_0), \\ &= A(x_0) + B(x_0)e^{-\xi}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

elde edilir. Burada A ve B bu yakınsama seviyesinde belirsizdir; yaklaşımın sonraki düzeyinde çözülebilirlik şartlarının konmasıyla belirlenirler. Bulduğumuz y_0 fonksiyonunu (3.38) denklemde yerine koyarak, verilen kısmi diferansiyel denklemdeki ilgili türevleri

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_0} = A'(x_0) + B'(x_0)e^{-\xi}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} = 0 + B'(x_0)(-e^{-\xi}) = -B'(x_0)e^{-\xi}, \quad (3.40)$$

biçiminde yazalım. (3.39) ve (3.40) ifadelerini (3.33) denkleminin sağ tarafında yerine yazarak

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial y_0}{\partial \xi} - \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - y_0 &= 2 B' e^{-\xi} + B e^{-\xi} - (A' + B' e^{-\xi}) - (A + B e^{-\xi}), \\ &= -B' e^{-\xi} + B e^{-\xi} - A' - A - B e^{-\xi}, \\ &= -B' e^{-\xi} - (A' + A), \end{aligned} \quad (3.41)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde ederiz. (3.41) denkleminin özel çözümü

$$y_{1p} = w\xi e^{-\xi} + (Z\xi + X). \quad (3.42)$$

olur. (3.42) çözümünün kısmi diferansiyel türevleri

$$\frac{\partial y_{1p}}{\partial \xi} = w e^{-\xi} - w \xi e^{-\xi} + Z, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 y_{1p}}{\partial \xi^2} = -w e^{-\xi} + w \xi e^{-\xi} - w e^{-\xi} = -2w e^{-\xi} + w \xi e^{-\xi}, \quad (3.44)$$

olur. (3.43) ve (3.44) kısmi türevleri, denklem (3.33)'de yerlerine konduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{\partial^2 y_{1p}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_{1p}}{\partial \xi} = -2w e^{-\xi} + w \xi e^{-\xi} + w e^{-\xi} - w \xi e^{-\xi} + Z = w e^{-\xi} + Z. \quad (3.45)$$

Denklem (3.41) ve (3.45)'in birbirine eşit olmalarından yola çıkılarak w ve z aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$w = -B', \quad (3.46)$$

ve

$$Z = -(A' + A). \quad (3.47)$$

Bu şekilde, denklem (3.42)'deki iki eşitlik olan (3.46) ve (3.47) yerine, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$y_{1p} = -B' \xi e^{-\xi} - (A' + A) \xi. \quad (3.48)$$

Bu durum $\xi \rightarrow \infty$ nedeniyle ϵy_1 'in, y_0 'ın olası değerlerinden çok daha büyük olduğu anlamına gelir. Bu nedenle düzgün açılım için (3.48)'teki ξ ve $\xi \exp(-\xi)$ ifadelerinin katsayılarının birbirinden bağımsız olarak kaldırılması gerekir. Bu durumda elde edilen eşitlik ise:

$$-B' = 0 \Rightarrow B' = 0 \Rightarrow \int \frac{dB}{dx_0} = \int 0 \Rightarrow B = \text{Sabit} \Rightarrow B = b, \quad (3.49)$$

$$A' + A = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dx_0} + A = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dx_0} = -A \Rightarrow \frac{dA}{A} = -dx_0 \Rightarrow \ln(A) = -x_0 + c$$

$$e^{\ln A} = e^{-x_0 + c} \Rightarrow A = e^{-x_0} \cdot e^c \Rightarrow A = a e^{-x_0}. \quad (3.50)$$

Burada a ve b keyfi sabitlerdir.

(3.49) ve (3.50)'den elde edilen A ve B değerlerinin (3.38) denkleminde yerlerine konması ile:

$$y_0 = A(x_0) + B(x_0)e^{-\xi} = ae^{-x_0} + be^{-\xi}, \quad (3.51)$$

elde edilir, veya eşitlik, orijinal değişken üzerinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$y_0 = ae^{-x} + be^{-x/\varepsilon}. \quad (3.52)$$

(3.30)'teki y_0 'a bu değer yerleştirilmesi ile aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$y = ae^{-x} + be^{-x/\varepsilon} + \dots \quad (3.53)$$

(3.27)'de belirtilen sınır koşullarının (3.53)'e uygulanmasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$y_0(0) = ae^0 + be^{0/\varepsilon} = a + b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b, \quad (3.54)$$

$$y_0(1) = ae^{-1} + be^{-1/\varepsilon} \Rightarrow -ae^{-1} + be^{-1/\varepsilon} = 1. \quad (3.55)$$

a ve b 'nin (3.2.29) ve (3.2.30)'da yerlerine yazılmasıyla,

$$-be^{-1} + be^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 1 \Rightarrow b \left(-e^{-1} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1}}, \quad (3.56)$$

bulunur. a 'yı elde etmek için, (3.54)'da, (3.56)'in yerine konması ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$a = -\frac{1}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1}}. \quad (3.57)$$

Bu değerleri (3.52)'ye yerleştirdiğimizde, nihai çözüm olarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$y = \frac{e^{-x}}{(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1})} + \frac{e^{-x/\varepsilon}}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1}}, \quad (3.58)$$

veya

$$y = \frac{(e^{-x/\varepsilon} - e^{-x})}{(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1})}, \quad (3.59)$$

(3.59), (3.26) denkleminin (Kevorkian ve Cole, 1981) tarafından verilen kesin çözümüdür.

Çizelge 3.1. Örnek 3.1'de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması

x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata
0.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.00
0.05	0.315309999568504	0.315309999568504	0.00
0.10	0.566836301738874	0.566836301738874	0.00
0.15	0.765120856317024	0.765120856317024	0.00
0.20	0.919050653880210	0.919050653880210	0.00
0.25	1.036113576158106	1.036113576158106	0.00
0.30	1.122614881703092	1.122614881703092	0.00
0.35	1.183860374295398	1.183860374295398	0.00
0.40	1.224311372928354	1.224311372928354	0.00
0.45	1.247715816185846	1.247715816185846	0.00
0.50	1.257219168471022	1.257219168471022	0.00
0.55	1.255458232345169	1.255458232345169	0.00
0.60	1.244640494505780	1.244640494505780	0.00
0.65	1.226611229397957	1.226611229397957	0.00
0.70	1.202910242876234	1.202910242876234	0.00
0.75	1.174819849202657	1.174819849202657	0.00
0.80	1.143405429929741	1.143405429929741	0.00
0.85	1.109549716058139	1.109549716058139	0.00
0.90	1.073981759509110	1.073981759509110	0.00
0.95	1.037301411527703	1.037301411527703	0.00
1.00	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.00

Çizelge 3.2. Örnek 3.1'de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması

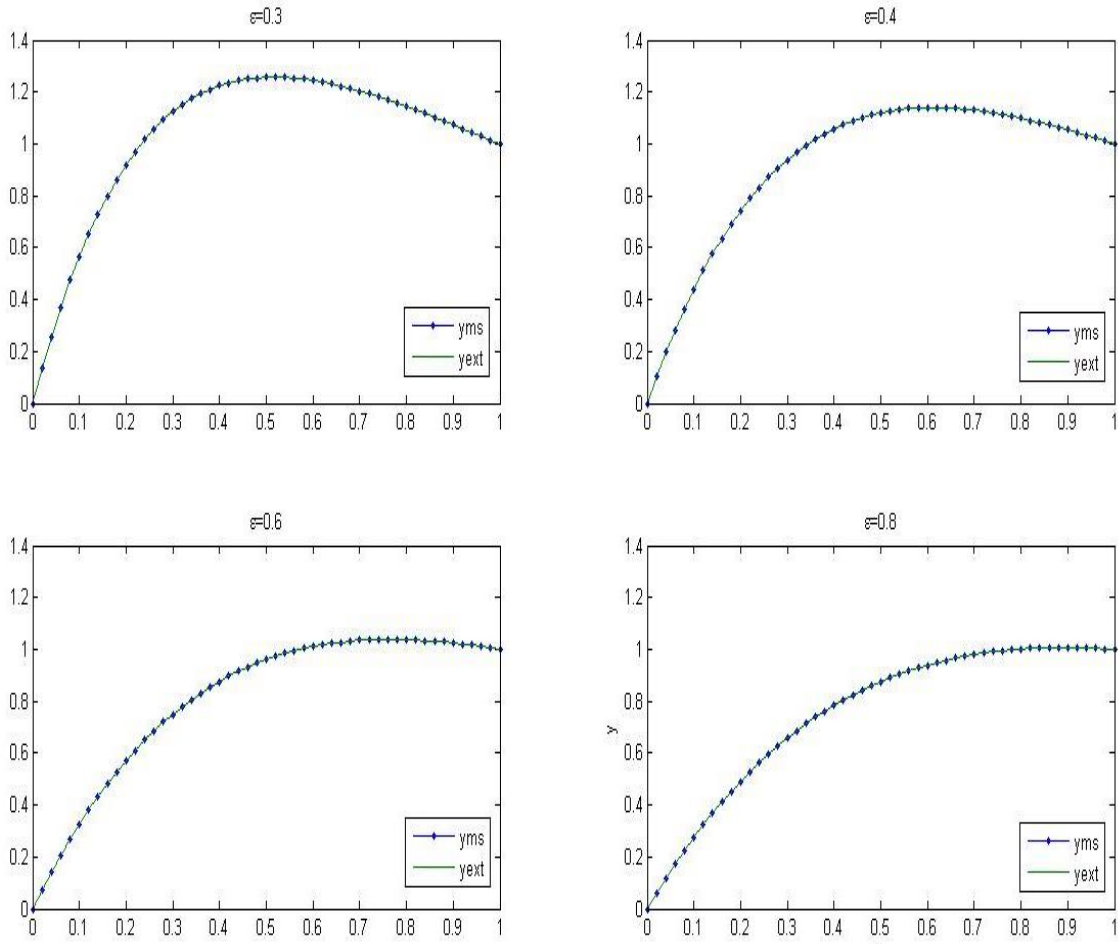
x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata
0.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.00
0.05	0.240496355714420	0.240496355714421	0.00
0.10	0.441004499041607	0.441004499041607	0.00
0.15	0.606795205981784	0.606795205981783	0.00
0.20	0.742492021446665	0.742492021446665	0.00
0.25	0.852148671547035	0.852148671547035	0.00
0.30	0.939317313338046	0.939317313338046	0.00
0.35	1.007108701885704	1.007108701885704	0.00
0.40	1.058245227472834	1.058245227472834	0.00
0.45	1.095107663653600	1.095107663653600	0.00
0.50	1.119776367936914	1.119776367936914	0.00
0.55	1.134067589581707	1.134067589581707	0.00
0.60	1.139565461954068	1.139565461954067	0.00
0.65	1.137650188921130	1.137650188921130	0.00
0.70	1.129522874774805	1.129522874774805	0.00
0.75	1.116227394250386	1.116227394250386	0.00
0.80	1.098669652501638	1.098669652501638	0.00
0.85	1.077634543683517	1.077634543683517	0.00
0.90	1.053800880430463	1.053800880430463	0.00
0.95	1.027754534432469	1.027754534432469	0.00
1.00	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.00

Çizelge 3.3. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması

x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata
0.00	0.000000000000000	0.000000000000000	0.00
0.05	0.174214196531496	0.174214196531496	0.00
0.10	0.326002468374447	0.326002468374447	0.00
0.15	0.457572273958051	0.457572273958051	0.00
0.20	0.570934363505485	0.570934363505485	0.00
0.25	0.667919492586275	0.667919492586275	0.00
0.30	0.750193751256938	0.750193751256938	0.00
0.35	0.819272621825724	0.819272621825724	0.00
0.40	0.876533869125140	0.876533869125140	0.00
0.45	0.923229358761068	0.923229358761068	0.00
0.50	0.960495891070583	0.960495891070583	0.00
0.55	0.989365131407459	0.989365131407459	0.00
0.60	1.010772710834875	1.010772710834875	0.00
0.65	1.025566565292623	1.025566565292623	0.00
0.70	1.034514575779138	1.034514575779138	0.00
0.75	1.038311567007589	1.038311567007589	0.00
0.80	1.037585717324481	1.037585717324481	0.00
0.85	1.032904428385560	1.032904428385560	0.00
0.90	1.024779699137040	1.024779699137040	0.00
0.95	1.013673045022344	1.013673045022344	0.00
1.00	1.000000000000000	1.000000000000000	0.00

Çizelge 3.4. Örnek 3.1’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması

x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata
0.00	0.000000000000000	0.000000000000000	0.00
0.05	0.145209380480257	0.145209380480257	0.00
0.10	0.274539024292546	0.274539024292546	0.00
0.15	0.389296426580840	0.389296426580840	0.00
0.20	0.490693020467747	0.490693020467747	0.00
0.25	0.579850818693391	0.579850818693391	0.00
0.30	0.657808612790998	0.657808612790998	0.00
0.35	0.725527758560753	0.725527758560753	0.00
0.40	0.783897574765624	0.783897574765624	0.00
0.45	0.833740380250961	0.833740380250961	0.00
0.50	0.875816193076598	0.875816193076598	0.00
0.55	0.910827113738878	0.910827113738878	0.00
0.60	0.939421413144551	0.939421413144551	0.00
0.65	0.962197344672255	0.962197344672255	0.00
0.70	0.979706698415359	0.979706698415359	0.00
0.75	0.992458114536402	0.992458114536402	0.00
0.80	1.000920171573846	1.000920171573846	0.00
0.85	1.005524264521275	1.005524264521275	0.00
0.90	1.006667286543483	1.006667286543483	0.00
0.95	1.004714127298946	1.004714127298946	0.00
1.00	1.000000000000000	1.000000000000000	0.00



Şekil 3.1. Örnek 3.1’de $\varepsilon=0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için Çoklu Ölçek Metodu ile kesin çözüm karşılaştırma grafiği.

Örnek 3.2. (Gupta ve Kumar, 2016) Singüler pertürbe özellikli

$$\varepsilon y''(x) - y'(x) - (1 + \varepsilon)y(x) = 0; \quad x \in [0,1], \quad (3.60)$$

ile verilen homojen diferansiyel denklemi,

$$y(0) = 1 + \exp(-(1 + \varepsilon)/\varepsilon) \text{ ve } y(1) = 1 + 1/e. \quad (3.61)$$

sınır şartlarıyla verilsin. Bu eşitliğin $x = 1$ 'de bir sınır katı mevcuttur, zira y' katsayısı negatiftir, yani sınır katı mevcut aralığın sağ kenarında yer alacaktır. $x = 1$ yakınındaki çözümü elde etmek için, iç ölçek olarak $\xi = (x - 1)/\varepsilon$ ölçeği, dış ölçek olarak ise $x = x_0$ ölçekleri iki ölçek olarak sunulsun.

Türev operatörleri bu ölçeklere göre

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad (3.62)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}. \quad (3.63)$$

biçiminde tanımlanır. Ele alınan problemin çözümü için iki ölçekli

$$y = y_0(\xi, x_0) + \varepsilon y_1(\xi, x_0) + \varepsilon^2 y_2(\xi, x_0) + \dots \quad (3.64)$$

asimptotik açılım alınsın. (3.62), (3.63) türevleri ve (3.64) asimptotik açılımı (3.60) orijinal denklemde yerlerine yazıldığında

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\ - \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + (1 + \varepsilon)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0,$$

veya

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_0 + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_1 - 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_1 \right. \\ \left. + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} y_2 - 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} y_2 + \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} y_2 + \dots \right) - \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} y_0 + \frac{\partial}{\partial x_0} y_0 \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} y_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} y_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} y_2 + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_0} y_2 + \dots \right) \\ \left. + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \dots) = 0. \quad (3.65)$$

denklemini elde edilir. ε 'nin her bir kuvvetinin katsayıları, (3.65) denkleminin sıfırına eşitlendiğinde aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$O(1/\varepsilon): \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0, \quad (3.66)$$

$$O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial y_0}{\partial x_0} + y_0, \quad (3.67)$$

$$O(\varepsilon): \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_0} + y_1 + y_0, \quad (3.68)$$

(3.66) denkleminin genel çözümü için

$$(D_\xi^2 + D_\xi) y_0 = 0 \Rightarrow L = D_\xi^2 + D_\xi = D_\xi (D_\xi + 1) \quad (3.69)$$

olur. Bu sebeple

$$L_1 = D_\xi, L_2 = D_\xi + 1, \quad (3.70)$$

alınır. Denklem (3.70) 'de $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ değerleri,

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 1, \quad (3.71)$$

alınır denklemden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_0 &= e^{-\frac{c_1 \xi}{a_1}} f(b_1 \xi - x_0) + e^{-\frac{c_2 \xi}{a_2}} g(b_2 \xi - x_0), \\ &= e^{-\frac{0 \xi}{1}} f(0 \times \xi - x_0) + e^{-\frac{1 \xi}{1}} g(0 \times \xi - x_0), \\ &= f(-x_0) + e^{-\xi} g(-x_0), \\ &= A(x_0) + B(x_0) e^{-\xi}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

elde edilir. Burada A ve B keyfi fonksiyonlardır. Bu fonksiyonları belirleyebilmek için bulunan y_0 fonksiyonunu ve

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_0} = A'(x_0) + B'(x_0) e^{-\xi}, \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} = 0 + B'(x_0) (-e^{-\xi}) = -B'(x_0) e^{-\xi}, \quad (3.74)$$

türevlerini sonraki (3.67) probleminde yerine yazarak

$$2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial y_0}{\partial x_0} + y_0 = -2 B' e^{-\xi} + A' + B' e^{-\xi} + A + B' e^{-\xi},$$

$$= (B - B')e^{-\xi} + (A' + A), \quad (3.75)$$

sonucunu elde ederiz. (3.75) denkleminin özel çözümü

$$y_{1p} = w\xi e^{-\xi} + (Z\xi + X), \quad (3.76)$$

olur. (3.76) çözümünün kısmi türevleri

$$\frac{\partial y_{1p}}{\partial \xi} = w e^{-\xi} - w\xi e^{-\xi} + Z, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial^2 y_{1p}}{\partial \xi^2} = -w e^{-\xi} + w\xi e^{-\xi} - w e^{-\xi} = -2w e^{-\xi} + w\xi e^{-\xi}, \quad (3.78)$$

biçiminde olur. (3.77) ve (3.78) kısmi türevleri, denklem (3.67)'de yerlerine konduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{\partial^2 y_{1p}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_{1p}}{\partial \xi} = -2w e^{-\xi} + w\xi e^{-\xi} + w e^{-\xi} - w\xi e^{-\xi} + Z = -w e^{-\xi} + Z. \quad (3.79)$$

Denklem (3.75) ve (3.79)'in birbirine eşit olmalarından yola çıkılarak w ve Z aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$w = B' - B, \quad (3.80)$$

ve

$$Z = A' + A. \quad (3.81)$$

Bu şekilde, denklem (3.76)'deki iki eşitlik olan (3.80) ve (3.81) yerine, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$y_{1p} = (B' - B)\xi e^{-\xi} + (A' + A)\xi. \quad (3.82)$$

Bu durum $\xi \rightarrow \infty$ iken ϵy_1 değerinin, y_0 fonksiyonunun mümkün değerlerinden çok daha büyük olduğu anlamına gelir. Bu nedenle düzgün açılım için (3.82)'teki ξ ve $\xi \exp(-\xi)$ ifadelerinin katsayılarının birbirinden bağımsız olarak kaldırılması gerekir. Bu durumda elde edilen eşitlik ise

$$A' + A = 0,$$

buradan

$$\frac{dA}{dx_0} + A = 0,$$

ve

$$A = ae^{-x_0}, \quad (3.83)$$

bulunur. Ayrıca

$$B' = B,$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$B = be^{x_0}, \quad (3.84)$$

olur. Burada a ve b keyfi sabitlerdir. (3.83) ve (3.84)'den elde edilen A ve B değerlerinin (3.72) denkleminde yerlerine konması ile:

$$y_0 = A(x_0) + B(x_0)e^{-\xi} = ae^{-x_0} + (be^{x_0})e^{-\xi}, \quad (3.85)$$

elde edilir veya eşitlik, orijinal değişkene göre aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$y_0 = ae^{-x} + (be^x)e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}}. \quad (3.86)$$

(3.64) asimptotik açılımında y_0 fonksiyonunun yerine yazılmasıyla

$$y = ae^{-x} + be^x e^{(x-1)/\varepsilon} + \dots \quad (3.87)$$

açılımına ulaşılır. (3.61)'de belirtilen sınır koşullarının (3.87)'e uygulanmasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$y(0) = ae^0 + be^0 e^{(0-1)/\varepsilon} + \dots = a + be^{-1/\varepsilon} + \dots = 1 + e^{-(1+\varepsilon)/\varepsilon},$$

yani

$$a + be^{-1/\varepsilon} = 1 + \exp\left(-\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad (3.88)$$

olur. Diğer sınır şartından

$$y(1) = ae^{-1} + be^1 e^{\frac{(1-1)}{\varepsilon}} + \dots = ae^{-1} + be + \dots = 1 + 1/e,$$

yani

$$1 + \frac{1}{e} = ae^{-1} + be \Rightarrow a + be^2 = e + 1, \quad (3.89)$$

bulunur. (3.88), (3.89)'deki iki eşitliğin çözülmesi ile:

$$a = 1, \quad (3.90)$$

ve

$$b = 1/e. \quad (3.91)$$

Bu değerleri (3.87)'ye yerleştirdiğimizde, nihai çözüm olarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$y = e^{-x} + \frac{1}{e} e^x e^{(x-1)/\varepsilon}, \quad (3.92)$$

veya

$$y = e^{-x} + e^{(1+\varepsilon)(x-1)/\varepsilon}. \quad (3.93)$$

(3.93) denklemi, (3.60) denkleminin; Kevorkian ve Cole (1981), Pakdemirli ve Ozkaya (1998), Soujanya ve ark. (2012) ve Yiwu, (1996) tarafından verilen kesin çözümdür. Bahsi geçen bu çalışmalarda araştırmacılar ikinci dereceden singüler perturbe özellikli sınır değer problemlerinin çözümü için farklı sayısal yöntemler uygulamışlardır, ancak bu problemler için çoklu ölçek yöntemiyle elde edilen çözüm kesin çözümdür.

Çizelge 3.5. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün karşılaştırılması

x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata
0.00	1.013123728736941	1.013100000000000	0.000023728736941
0.05	0.967528177671798	0.967498708240189	0.000029469431609
0.10	0.925079329481764	0.925042730508903	0.000036598972861
0.15	0.885847014649571	0.885801561285140	0.000045453364431
0.20	0.849951680239213	0.849895230339759	0.000056449899454
0.25	0.817574990903127	0.817504884076311	0.000070106826816
0.30	0.788973074802914	0.788886007027530	0.000087067775384
0.35	0.764493050415720	0.764384918328522	0.000108132087198
0.40	0.744593624249973	0.744459331760816	0.000134292489158
0.45	0.729870740806133	0.729703958927493	0.000166781878640
0.50	0.721089503705321	0.720882372277367	0.000207131427954
0.55	0.719223881967000	0.718966639220989	0.000257242746011
0.60	0.725506081850623	0.725186604352549	0.000319477498075
0.65	0.741487919753643	0.741091151046425	0.000396768707218
0.70	0.769117096825422	0.768624337842470	0.000492758982952
0.75	0.810831977847757	0.810220005656244	0.000611972191513
0.80	0.869679348625904	0.868919321967553	0.000760026658351
0.85	0.949460708709743	0.948516808759035	0.000943899950708
0.90	1.054914000742109	1.053741743023045	0.001172257719064
0.95	1.191939347472572	1.190483485377362	0.001455862095209
1.00	1.367879441171442	1.366071362277358	0.001808078894085

Çizelge 3.6. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün karşılaştırılması

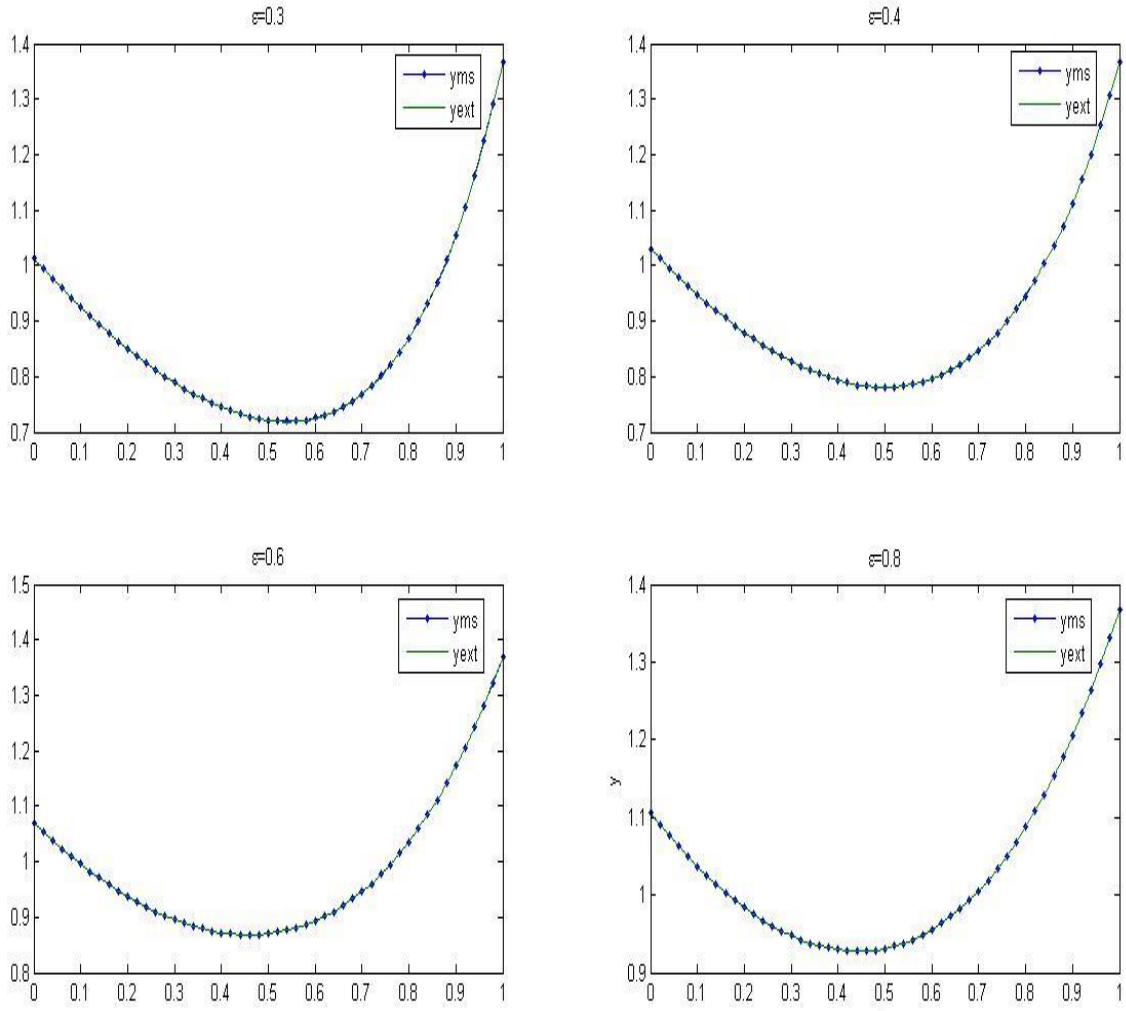
x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata (1.0e-04 *)
0.00	1.03019738342231	1.030200000000000	0.02616577681413
0.05	0.987201943254144	0.987205060242407	0.031169882634963
0.10	0.947689544903000	0.947693258003476	0.037131004761992
0.15	0.911755410429212	0.911759833646106	0.044232168940894
0.20	0.879540815703200	0.879546084843590	0.052691403903404
0.25	0.851240540105656	0.851246816949211	0.062768435548088
0.30	0.827111807181088	0.827119284447225	0.074772661369238
0.35	0.807484998154000	0.807493905418996	0.089072649962496
0.40	0.792776474288621	0.792787085034348	0.106107457271687
0.45	0.783503908478001	0.783516548488704	0.126400107031133
0.50	0.780304603163079	0.780319660528007	0.150573649279062
0.55	0.783957363061639	0.783975300090642	0.179370290024350
0.60	0.795408600035633	0.795429967453569	0.213674179363466
0.65	0.815803477084549	0.815828930940324	0.254538557755701
0.70	0.846523052902565	0.846553374711956	0.303218093908875
0.75	0.889228572419523	0.889264693160241	0.361207407176822
0.80	0.945914267908631	0.945957296604352	0.430286957212589
0.85	1.018970296315542	1.019021554086526	0.512577709836926
0.90	1.111257749459313	1.111318810085069	0.610606257560598
0.95	1.226198044223708	1.226270782463125	0.727382394161147
1.00	1.367879441171442	1.367966090323950	0.866491525073343

Çizelge 3.7. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün karşılaştırılması

x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata (1.0e-03 *)
0.00	1.069483451222802	1.0694834512228023	0.016548777198588
0.05	1.030623356777792	1.030623356777792	0.018909142724510
0.10	0.995555371325372	0.9955553713253721	0.021606169101740
0.15	0.964365105036586	0.9643651050365860	0.024687874540574
0.20	0.937172582091785	0.9371725820917851	0.028209126127776
0.25	0.914136066308017	0.9141360663080174	0.032232616687278
0.30	0.895456485230973	0.8954564852309732	0.036829980971764
0.35	0.881382535475310	0.8813825354753103	0.042083071056020
0.40	0.872216564030295	0.8722165640302950	0.048085413643650
0.45	0.868321333876736	0.8683213338767361	0.054943875227420
0.50	0.870127797828360	0.870127797828360	0.062780564754172
0.55	0.878144022292689	0.878144022292689	0.071735007670104
0.60	0.892965422959439	0.892965422959439	0.081966630048114
0.65	0.915286497629614	0.915286497629614	0.093657597032171
0.70	0.945914267908631	0.945914267908631	0.107016056127618
0.75	0.985783671773607	0.985783671773607	0.122279843088102
0.80	1.035975183627254	1.035975183627254	0.139720716374026
0.85	1.097734977984366	1.097734977984366	0.159649195575540
0.90	1.172497998105248	1.172497998105248	0.182420089942958
0.95	1.261914342497449	1.2619143424974490	0.208438815459289
1.00	1.367879441171442	1.3678794411714421	0.238168612917811

Çizelge 3.8. Örnek 3.2’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metoduyla kesin çözümün Karşılaştırılması

x	Çoklu Ölçek Çözümü	Kesin Çözüm	Hata (1.0e-05 *)
0.00	1.105399224561864	1.105400000000000	0.077543813570280
0.05	1.069178772608017	1.069179640379321	0.086777130436921
0.10	1.036831261223790	1.036832232322582	0.097109879226842
0.15	1.008418624419855	1.008419711149572	0.108672971710355
0.20	0.984029641299568	0.984030857428646	0.121612907721946
0.25	0.963782182978709	0.963783543915020	0.136093631109002
0.30	0.947825773362870	0.947827296348940	0.152298606925783
0.35	0.936344498895602	0.936346203227060	0.170433145774140
0.40	0.929560306681531	0.929562213951582	0.190727005100477
0.45	0.927736735185428	0.927738869558429	0.213437300056185
0.50	0.931183127070983	0.931185515588594	0.238851761069636
0.55	0.940259379739498	0.940262052663291	0.267292379330097
0.60	0.955381295834626	0.955384287029488	0.299119486191213
0.65	0.977026603479189	0.977029950842375	0.334736318508000
0.70	1.005741724398959	1.005745470340233	0.374594127428019
0.75	1.042149377471938	1.042153569450894	0.419197895618062
0.80	1.086957115738995	1.086961806866346	0.469112735146382
0.85	1.140966906655229	1.140972156365701	0.524971047211054
0.90	1.205085878499976	1.205091753305323	0.587480534619544
0.95	1.280338370563017	1.280344944894695	0.657433167794430
1.00	1.367879441171442	1.367886798323631	0.735715218858069



Şekil 3.2. Örnek 3.2’de $\epsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için Çoklu Ölçek Metodu ile kesin çözüm karşılaştırma grafiği.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu kesimde

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, x \in (0, l), \quad (4.1)$$

singüler pertürbe özellikli lineer ve

$$u(0) = A, \quad u(l) = B, \quad (4.2)$$

koşullarıyla verilen problem için sonlu fark şemaları kurulacaktır. Burada $\varepsilon > 0$ küçük parameter ve $a(x) \geq \alpha > 0$ ve $b(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında tanımlı yeterince düzgün fonksiyonlardır.

4.1. Asimptotik Değerlendirmeler

Fark şemasının kurulmasından önce kesin çözüm için asimptotik değerlendirmelerle çözümün kararlılığı incelenecektir. Bunun için aşağıdaki lemmayı sunalım.

Lemma 4.1. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü için,

$$|u(x)| \leq |A| + |B|, 0 \leq x \leq l, \quad (4.3)$$

$$|u'(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} \|b\|_{C[0,l]} (\alpha^{-1} |A| + |B|), 0 \leq x \leq l, \quad (4.4)$$

değerlendirmeleri doğrudur. Burada C keyfi sabittir ve ε 'a bağlı değildir (Amirali ve Duru, 2010).

İspat. $\Psi(x) = |A| + |B| \pm u(x)$,

fonksiyonu için, $L\Psi(x) \geq 0$, $\Psi(0) \geq 0$, $\Psi(l) \geq 0$ şartları sağlanır. Buradan maksimum prensibine göre, $\Psi(x) \geq 0$ olur. Dolayısıyla (4.3) eşitsizliği doğrudur. Şimdi (4.4) ün ispatına bakalım. (4.1) den

$$u'(x) = u'(0) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta\right) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x [b(s)u(s)] \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^x a(\eta) d\eta\right) ds,$$

bağıntısını yazabiliriz. Burada (4.1.3)'ü dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\leq u'(0) e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} \max_{[0,l]} |b(s)u(s)| \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right), \\ &\leq u'(0) e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} \{ \|b\|_{C[0,l]} (|A| + |B|) \} \end{aligned}$$

olur. Burada $|u'(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon}$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$g'(x) = g(\alpha_0; \alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(x, \xi) g''(\xi) d\xi, \quad g \in C^2, \quad \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1,$$

eşitliğinden faydalanacağız. Burada

$$g(x) = u(x), \quad x = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \varepsilon,$$

değerlerini kabul edelim. Buradan

$$u'(x) = u(0; \varepsilon) - \int_0^x u''(\xi) d\xi,$$

yazarız. Gerekli düzeltmeleri yaparak

$$u'(x) = u(0; \varepsilon) - u'(x) + u'(0),$$

ve

$$|u'(0)| = \left| \frac{u(\varepsilon) - A}{\varepsilon} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

değerlendirmesini elde ederiz. Benzer biçimde

$$g(x) = u(x), \quad x = l, \quad \alpha_0 = l - \varepsilon, \quad \alpha_1 = l,$$

olarak

$$|u'(l)| = \left| \frac{B - u(l - \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

sonucuna ulaşırız. $|u'|$ değerlendirmesi için elde ettiğimiz son eşitsizlikte $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ için elde ettiğimiz değerlendirmeleri göz önüne alırsak (4.4) ispatlanmış olur.

Not.1. (4.1)-(4.2) probleminin çözümü için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

$$|u(x)| \leq C_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.5)$$

$$|u'(x)| \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{ax}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.6)$$

4.2. Fark Şemasının Kurulması

$$[0,1] \text{ aralığında, } \omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; h = 1/N\},$$

$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, 1\}$ düzgün sebesini ele alalım. Fark semasının kurulması süreci için başlangıç olarak aşağıdaki özdeslikten hareket edeceğiz. (4.1) denklemi φ_i baz fonksiyonuyla çarpılıp $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aralığında integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$(Lu, \varphi_i) = \varepsilon(u'', \varphi_i) + (a(x)u', \varphi_i) + (b(x)u, \varphi_i) = 0. \quad (4.7)$$

Burada (\cdot, \cdot) ile iç çarpım gösterilmektedir ve $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(x-x_{i-1})} - 1}{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1} & , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \varphi_i^{(2)}(x) = \frac{1 - e^{\frac{a_i}{\varepsilon}(x_{i+1}-x)}}{1 - e^{\frac{a_i}{\varepsilon}h}} & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

olup $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$\varepsilon \varphi_i^{(1)''} + a_i \varphi_i^{(1)'} = 0, x_{i-1} < x < x_i, \quad (4.8)$$

$$\varphi_i^{(1)}(x_{i-1}) = 0, \varphi_i^{(1)}(x_i) = 1, \quad (4.9)$$

ve

$$\varepsilon \varphi_i^{(2)''} + a_i \varphi_i^{(2)'} = 0, x_i < x < x_{i+1}, \quad (4.10)$$

$$\varphi_i^{(2)}(x_{i+1}) = 0, \varphi_i^{(2)}(x_i) = 1, \quad (4.11)$$

(4.7) ifadesi açık biçimde aşağıda yazılmıştır:

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu \varphi_i dx = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varepsilon u'' \varphi_i + a(x) u' \varphi_i + b(x) u \varphi_i] dx = 0. \quad (4.12)$$

(4.12) ifadesinin sağdaki ilk terimine kısmi integrasyonu uygulayalım:

$$\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'' \varphi_i dx = \varepsilon h^{-1} \left[u' \varphi_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'' \varphi_i dx \right] = -\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u' \varphi_i' dx. \quad (4.13)$$

Verilen kuralı (4.13) eşitliğine uygulayarak, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u' \varphi_i' dx \\
& = \varepsilon h^{-1} \left[u_{\bar{x}_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)'}(x) dx \right. \\
& \quad - \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)''} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(\xi) K_1(x, \xi) d\xi, + u_{x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)'}(x) dx \\
& \quad \left. - \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)''} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(\xi) K_1(x, \xi) d\xi \right], \\
& = \varepsilon h^{-1} \left[u_{\bar{x}_i} - u_{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)''} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(\xi) K_1(x, \xi) d\xi \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)''} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(\xi) K_1(x, \xi) d\xi \right]. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

(4.12) ifadesinde sağ taraftaki ikinci terimde gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned}
h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) u' \varphi_i dx & = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u' \varphi_i dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x_i) u' \varphi_i dx, \\
& = a_i h^{-1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u' \varphi_i^{(1)} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u' \varphi_i^{(2)} dx + \right] + R_{a,i}^*, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Yine (2.8) kuralını (4.11) denkleminde uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) u' \varphi_i dx & = a_i h^{-1} \left[u_{\bar{x}_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)} dx + u_{x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)} dx \right] \\
& \quad + \bar{R} + R_{a,i}^*, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\chi_i^{(1)} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)} dx, \tag{4.17}$$

$$\chi_i^{(2)} = h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)} dx, \tag{4.18}$$

ve

$$\bar{R} = R_{1,i}^* + R_{2,i}^* . \quad (4.19)$$

Ayrıca, $R_{1,i}^*$ ve $R_{2,i}^*$ kalan terimleri

$$R_{1,i}^* = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)'} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(\xi) K_1(x, \xi) d\xi ,$$

$$R_{2,i}^* = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)'} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(\xi) K_1(x, \xi) d\xi ,$$

olarak tanımlanır. (4.17), (4.18) ve (4.19)'de verilen üç eşitliği, (4.16) denklemindeki yerlerine yazdığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) u' \varphi_i dx \\ &= a_i \left[u_{\bar{x},i} \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)} dx \right) + u_{x,i} \left(h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)} dx \right) \right] + \bar{R} + R_{a,i}^* , \\ &= a_i \left[u_{\bar{x},i} \chi_i^{(1)} + u_{x,i} \chi_i^{(2)} \right] + \bar{R} + R_{a,i}^* , \\ &= a_i \left[\left(u_{x,i}^0 - \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} \right) \chi_i^{(1)} + \left(u_{x,i}^0 + \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} \right) \chi_i^{(2)} \right] + \bar{R} + R_{a,i}^* , \\ &= a_i \left[u_{x,i}^0 \chi_i^{(1)} + u_{x,i}^0 \chi_i^{(2)} - \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} \chi_i^{(1)} + \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} \chi_i^{(2)} \right] + \bar{R} + R_{a,i}^* , \\ &= a_i \left[u_{x,i}^0 (\chi_i^{(1)} + \chi_i^{(2)}) + \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} (\chi_i^{(2)} - \chi_i^{(1)}) \right] + \bar{R} + R_{a,i}^* , \\ &= a_i u_{x,i}^0 + \frac{a_i h}{2} u_{\bar{x}x,i} (\chi_i^{(2)} - \chi_i^{(1)}) + \bar{R} + R_{a,i}^* . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Benzer şekilde, (4.12) ifadesinin üçüncü terimi olan

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x)u(x)\varphi_i(x)dx,$$

ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x)u(x)\varphi_i(x)dx &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (b(x) - b(x_i) + b(x_i))u(x)\varphi_i(x)dx \\ &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x) - b(x_i)]u(x)\varphi_i(x)dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x_i)u(x)\varphi_i(x)dx, \\ &= h^{-1}b_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i(x)dx + R_{b,i}^*, \\ &= h^{-1}b_i \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(\xi) K_0^*(x, \xi)d\xi \right] + R_{b,i}^*, \\ &= b_i u_i + R_{1,i} + R_{b,i}^*. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Burada

$$\begin{aligned} R_{b,i}^* &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x) - b(x_i)]u(x)\varphi_i(x)dx, \\ R_{1,i} &= h^{-1}b_i \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x) \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(\xi) K_0^*(x, \xi)d\xi \right], \end{aligned}$$

yazılır. Böylece son elde edilen ifadeleri birleştirir ve (4.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\varepsilon \left(\frac{a_i h}{2\varepsilon} (\chi_i^{(2)} - \chi_i^{(1)}) + 1 \right) u_{\bar{x}x_i} + a_i u_{x_i} + b_i u_i + R_i = 0, i = 1, 2, \dots, N - 1. \tag{4.22}$$

Burada:

$$\theta_i = \frac{a_i h}{2\varepsilon} (\chi_i^{(2)} - \chi_i^{(1)}) + 1. \tag{4.23}$$

ve

$$R_i = R_{1,i} + R_{a,i}^* + R_{b,i}^*, \quad (4.24)$$

yazılır. θ_i ifadesini açık biçimde hesaplayalım, bunun için

$$\chi_i^{(1)} + \chi_i^{(2)} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx, \quad (4.25)$$

burada

$$\begin{aligned} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx &= \frac{h^{-1}}{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(x-x_{i-1})} - 1 \right) dx, \\ &= h^{-1} \left(\frac{1}{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1} \left[-\frac{\varepsilon}{a_i} \left(e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1 \right) - h \right] \right), \\ &= -\frac{\varepsilon h^{-1}}{a_i} - \frac{1}{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

ve

$$\begin{aligned} h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx &= \frac{h^{-1}}{1 - e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(x_{i+1}-x)} \right) dx, \\ &= \left(\frac{h^{-1}}{1 - e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h}} \left[h + \frac{\varepsilon}{a_i} \left(1 - e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} \right) \right] \right), \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h}} + \frac{\varepsilon h^{-1}}{a_i}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

(4.26) ve (4.27)'de verilen iki denklemi (4.25) eşitliğinde yerlerine koyduğumuzda sonuç 1 etmektedir, dolayısıyla:

$$\begin{aligned} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx, \\ &= -\frac{\varepsilon h^{-1}}{a_i} - \frac{1}{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1} + \frac{1}{1 - e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h}} + \frac{\varepsilon h^{-1}}{a_i} = \frac{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1}{e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}h} - 1} = 1, \end{aligned} \quad (4.28)$$

olur.

(4.23) ifadesine dayanarak, (4.1)-(4.2) probleminin yaklaşık çözümü için aşağıdaki fark şemasını sunalım (Amirali ve Duru, 2002).

$$\ell y \equiv -\varepsilon \theta_i y_{\bar{x}x_i} + a_i y_{x_i} + b_i y_i = 0, i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.29)$$

$$y(0) = A, \quad y(N) = B. \quad (4.30)$$

4.3. Fark Şemasının Hata Analizi

y ve u sırayla (4.29)-(4.30) fark probleminin çözümü ve (1.1)-(1.2) probleminin çözümleri olsun. $z_i = y_i - u_i$ yaklaşık çözümle tam çözüm farkı olup hata fonksiyonudur. O halde z_i için aşağıdaki problemi yazabiliriz:

$$\ell z_i = R_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.31)$$

$$z_0 = z_N = 0. \quad (4.32)$$

Burada

$$R_i = R_{1,i} + R_{a,i}^* + R_{b,i}^*,$$

olup yukarıda tanımlanmıştır.

Lemma 4.2. $a(x), b(x) \in C^1[0, l]$ ise, yaklaşım hataları için aşağıdaki değerlendirmeler sağlanır

$$h \sum_{i=1}^{N-1} |R_i| \leq Ch. \quad (4.33)$$

(Amirali ve Duru, 2010).

İspat. Önce (4.33)'dan başlayalım. R_i ifadesini

$$\begin{aligned} R_i &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (a(x) - a(x_i)) u'(x) \varphi_i(x) dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (b(x) - b(x_i)) u(x) \varphi_i(x) dx \\ &\quad + h^{-1} b_i \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(\xi) K_0^*(x, \xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

açık biçimde yazalım. Buradan $|u| \leq C_0$ eşitsizliğini ve $|\varphi_i(x)| \leq 1$ olduğunu dikkate alırsak,

$$|R_i| \leq Ch \left(1 + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx \right), \quad (4.35)$$

olduğu görülür.

TEOREM 4.1. Lemma 4.2 nin şartları altında

$$\ell y_i \equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_{x_i^\circ} + b_i y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

ve

$$y_0 = A, \quad y_N = B,$$

fark probleminin çözümü $C(w_h)$ normunda

$$Lu = \varepsilon u'' + a(x)u' - b(x)u = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B,$$

probleminin çözümüne ε 'a göre $O(h)$ hızıyla düzgün yakınsaktır:

$$\|y - u\|_{C(w_h)} \leq Ch.$$

(Amirali ve Duru, 2010).

4.4. Algoritma ve Sayısal Sonuçlar

Bu kesimde teorik sonuçları bir nümerik örnekler üzerinde realize edeceğiz. Bunun için (4.29)-(4.30) fark problemini açık biçimde yazalım.

$$\varepsilon \theta_i \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right) + a_i \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) + b_i y_i = 0,$$

$$\left(\frac{\varepsilon \theta_i}{h^2} - \frac{a_i}{2h} \right) y_{i-1} - \left(\frac{2\varepsilon \theta_i}{h^2} - b_i \right) y_i + \left(\frac{\varepsilon \theta_i}{h^2} + \frac{a_i}{2h} \right) y_{i+1} = 0. \quad (4.36)$$

ifadesini aşağıdaki şekilde düzenleyelim:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.37)$$

Burada

$$A_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{h^2} - \frac{a_i}{2h}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon \theta_i}{h^2} - b_i, \quad B_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{h^2} + \frac{a_i}{2h},$$

(4.37) lineer denklem sistemi ise aşağıda verilen kovma algoritması ile çözülecektir:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}.$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}.$$

Bu algoritmanın yakınsaması için

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i > A_i + B_i$$

şartlarının gerçekleşmesi gerekmektedir (Samarskii, 2002).

Örnek 4.1. Sunulan fark şemasını

$$\varepsilon y''(x) + (1 + \varepsilon)y'(x) + y(x) = 0; \quad x \in [0,1],$$

lineer diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0 \text{ ve } y(1) = 1.$$

sınır şartlarıyla verilen probleme uygulayarak test edeceğiz.

Bu problemin kesin çözümü

$$y = \frac{(e^{-x/\varepsilon} - e^{-x})}{(e^{-1/\varepsilon} - e^{-1})},$$

olacaktır. Bunun için Matlab kodları ekte sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar Tablo 1'de verilmektedir. Söz konusu tabloda hata değerleri

$$E = \max_{\bar{w}_h} |y - u|$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Çizelge 4.1. Örnek 4.1'de $\varepsilon = 0.3$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
-----	---------------	-------------	------

0.00	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.05	0.31825120	0.31531000	0.00294120
0.10	0.57166634	0.56683630	0.00483004
0.15	0.77105288	0.76512086	0.00593203
0.20	0.92550574	0.91905065	0.00645508
0.25	1.04267461	1.03611358	0.00656104
0.30	1.12898982	1.12261488	0.00637494
0.35	1.18985297	1.18386037	0.00599259
0.40	1.22979802	1.22431137	0.00548664
0.45	1.25262729	1.24771582	0.00491147
0.50	1.26152632	1.25721917	0.00430715
0.55	1.25916080	1.25545823	0.00370256
0.60	1.24775846	1.24464049	0.00311797
0.65	1.22917820	1.22661123	0.00256697
0.70	1.20496837	1.20291024	0.00205812
0.75	1.17641606	1.17481985	0.00159621
0.80	1.14458862	1.14340543	0.00118319
0.85	1.11036872	1.10954972	0.00081900
0.90	1.07448391	1.07398176	0.00050215
0.95	1.03753159	1.03730141	0.00023018
1.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000

Çizelge 4.2. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.4$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
0.00	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.05	0.24188529	0.24049636	0.00138894
0.10	0.44336159	0.44100450	0.00235709
0.15	0.60978614	0.60679521	0.00299094
0.20	0.74585401	0.74249202	0.00336199
0.25	0.85567783	0.85214867	0.00352916
0.30	0.94285805	0.93931731	0.00354073
0.35	1.01054482	1.00710870	0.00343611
0.40	1.06149247	1.05824523	0.00324724
0.45	1.09810750	1.09510766	0.00299984
0.50	1.12249081	1.11977637	0.00271444
0.55	1.13647488	1.13406759	0.00240729
0.60	1.14165652	1.13956546	0.00209106
0.65	1.13942571	1.13765019	0.00177552
0.70	1.13099090	1.12952287	0.00146803
0.75	1.11740138	1.11622739	0.00117399
0.80	1.09956688	1.09866965	0.00089723
0.85	1.07827483	1.07763454	0.00064029
0.90	1.05420560	1.05380088	0.00040472
0.95	1.02794579	1.02775453	0.00019125
1.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000

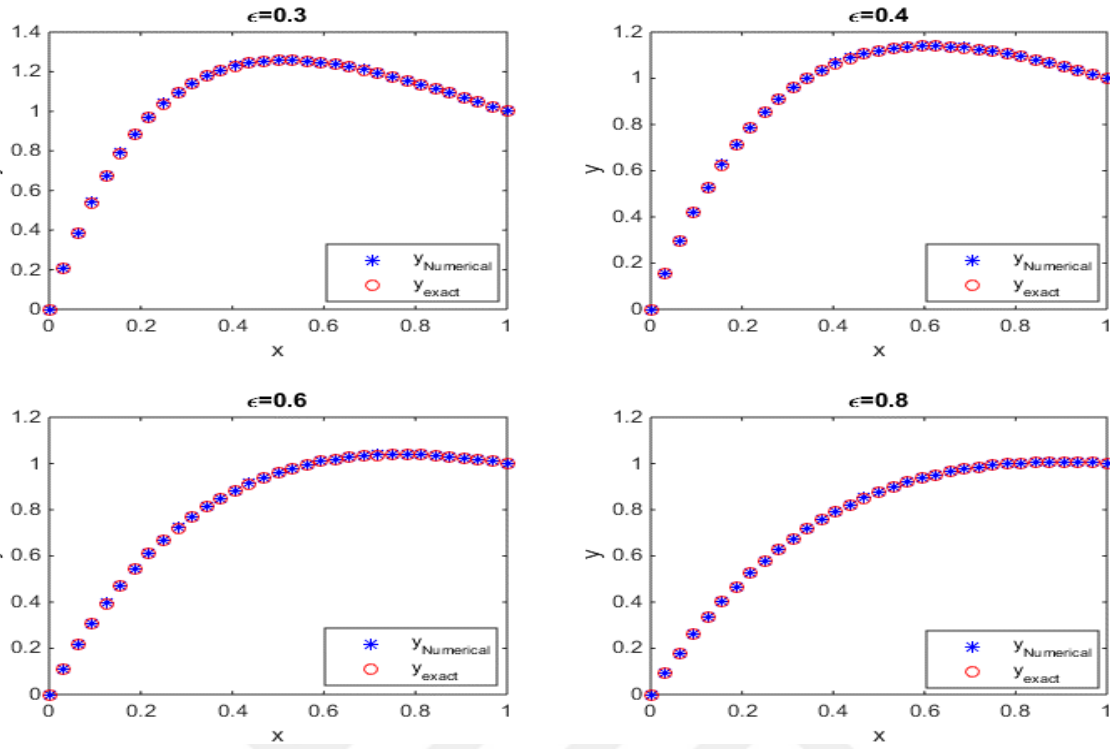
Çizelge 4.3. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.6$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
-----	---------------	-------------	------

0.00	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.05	0.17472625	0.17421420	0.00051205
0.10	0.32689788	0.32600247	0.00089541
0.15	0.45874288	0.45757227	0.00117061
0.20	0.57228989	0.57093436	0.00135553
0.25	0.66938518	0.66791949	0.00146568
0.30	0.75170825	0.75019375	0.00151450
0.35	0.82078619	0.81927262	0.00151357
0.40	0.87800673	0.87653387	0.00147286
0.45	0.92463027	0.92322936	0.00140092
0.50	0.96180091	0.96049589	0.00130502
0.55	0.99055650	0.98936513	0.00119137
0.60	1.01183790	1.01077271	0.00106519
0.65	1.02649745	1.02556657	0.00093088
0.70	1.03530666	1.03451458	0.00079209
0.75	1.03896341	1.03831157	0.00065184
0.80	1.03809833	1.03758572	0.00051262
0.85	1.03328083	1.03290443	0.00037640
0.90	1.02502449	1.02477970	0.00024479
0.95	1.01379206	1.01367305	0.00011901
1.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000

Çizelge 4.4. Örnek 4.1’de $\varepsilon = 0.8$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
0.00	0.00000000	-0.00000000	0.00000000
0.05	0.14548035	0.14520938	0.00027097
0.10	0.27501941	0.27453902	0.00048039
0.15	0.38993315	0.38929643	0.00063673
0.20	0.49144053	0.49069302	0.00074751
0.25	0.58067024	0.57985082	0.00081943
0.30	0.65866703	0.65780861	0.00085842
0.35	0.72639750	0.72552776	0.00086974
0.40	0.78475561	0.78389757	0.00085803
0.45	0.83456777	0.83374038	0.00082739
0.50	0.87659759	0.87581619	0.00078139
0.55	0.91155031	0.91082711	0.00072319
0.60	0.94007694	0.93942141	0.00065553
0.65	0.96277813	0.96219734	0.00058078
0.70	0.98020772	0.97970670	0.00050102
0.75	0.99287613	0.99245811	0.00041801
0.80	1.00125345	1.00092017	0.00033328
0.85	1.00577238	1.00552426	0.00024811
0.90	1.00683088	1.00666729	0.00016360
0.95	1.00479477	1.00471413	0.00008064
1.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000



Şekil 4.1. Örnek 4.1’de $\epsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için fark şemasıyla kesin çözüm karşılaştırma grafiği.

Örnek 4.2: Sunulan fark şemasını

$$\epsilon y''(x) - y'(x) - (1 + \epsilon)y(x) = 0; \quad x \in [0,1],$$

lineer diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 1 + \exp(-(1 + \epsilon)/\epsilon) \text{ veya } (1) = 1 + 1/e,$$

sınır şartlarıyla verilen probleme uygulayarak test edeceğiz. Bunun için Matlab kodları ekte sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar Tablo 2’de verilmektedir. Söz konusu tabloda hata değerleri

$$E = \max_{\bar{w}_h} |y - u|$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Çizelge 4.5. Örnek 4.2’de $\epsilon = 0.3$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
-----	---------------	-------------	------

0.00	1.01312373	1.01310000	0.00002373
0.05	0.96696143	0.96749871	0.00053728
0.10	0.92393266	0.92504273	0.00111007
0.15	0.88410062	0.88580156	0.00170094
0.20	0.84757939	0.84989523	0.00231584
0.25	0.81454489	0.81750488	0.00295999
0.30	0.78524860	0.78888601	0.00363741
0.35	0.76003482	0.76438492	0.00435010
0.40	0.73936235	0.74445933	0.00509698
0.45	0.72383153	0.72970396	0.00587243
0.50	0.71421814	0.72088237	0.00666424
0.55	0.71151584	0.71896664	0.00745080
0.60	0.71698920	0.72518660	0.00819740
0.65	0.73223997	0.74109115	0.00885119
0.70	0.75928991	0.76862434	0.00933443
0.75	0.80068440	0.81022001	0.00953560
0.80	0.85962174	0.86891932	0.00929758
0.85	0.94011477	0.94851681	0.00840204
0.90	1.04719280	1.05374174	0.00654895
0.95	1.18715379	1.19048349	0.00332969
1.00	1.36787944	1.36607136	0.00180808

Çizelge 4.6. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.4$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
-----	---------------	-------------	------

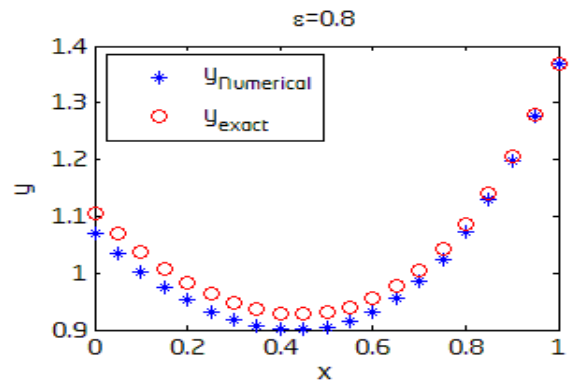
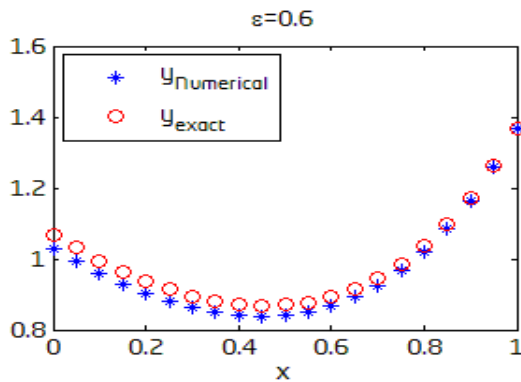
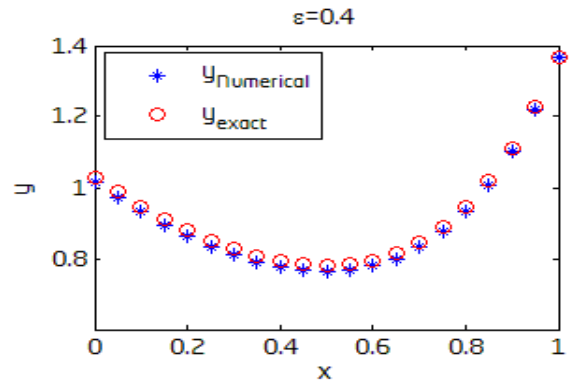
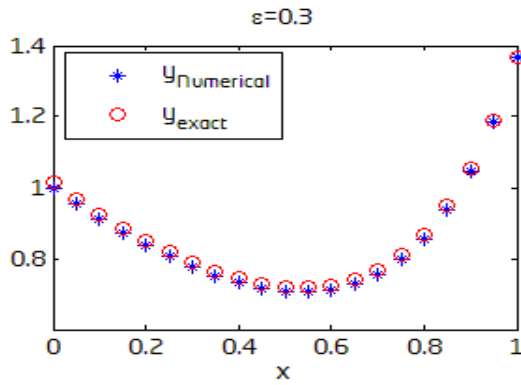
0.00	1.03019738	1.01310000	0.00002373
0.05	0.98317627	0.96749871	0.00344459
0.10	0.93932533	0.92504273	0.00745705
0.15	0.89870460	0.88580156	0.01218064
0.20	0.86142483	0.84989523	0.01775889
0.25	0.82765833	0.81750488	0.02436419
0.30	0.79765264	0.78888601	0.03220349
0.35	0.77174766	0.76438492	0.04152522
0.40	0.75039715	0.74445933	0.05262753
0.45	0.73419565	0.72970396	0.06586830
0.50	0.72391214	0.72088237	0.08167694
0.55	0.72053222	0.71896664	0.10056880
0.60	0.72531077	0.72518660	0.12316222
0.65	0.73983782	0.74109115	0.15019915
0.70	0.76612089	0.76862434	0.18256982
0.75	0.80668790	0.81022001	0.22134230
0.80	0.86471566	0.86891932	0.26779807
0.85	0.94419051	0.94851681	0.32347452
0.90	1.05010894	1.05374174	0.39021612
0.95	1.18872821	1.19048349	0.47023562
1.00	1.36787944	1.36607136	0.56618758

Çizelge 4.7. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.6$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
0.00	1.06948345	1.01310000	0.00002373
0.05	1.02048623	0.96749871	0.01019707
0.10	0.97474348	0.92504273	0.02143848
0.15	0.93230800	0.88580156	0.03392213
0.20	0.89328284	0.84989523	0.04784709
0.25	0.85783204	0.81750488	0.06344099
0.30	0.82619405	0.78888601	0.08096426
0.35	0.79869862	0.76438492	0.10071496
0.40	0.77578796	0.74445933	0.12303432
0.45	0.75804324	0.72970396	0.14831310
0.50	0.74621782	0.72088237	0.17699890
0.55	0.74127870	0.71896664	0.20960446
0.60	0.74445849	0.72518660	0.24671735
0.65	0.75732029	0.74109115	0.28901087
0.70	0.78183882	0.76862434	0.33725669
0.75	0.82050182	0.81022001	0.39233931
0.80	0.87643667	0.86891932	0.45527264
0.85	0.95356871	0.94851681	0.52721898
0.90	1.05681891	1.05374174	0.60951086
0.95	1.19235091	1.19048349	0.70367597
1.00	1.36787944	1.36607136	0.81146590

Çizelge 4.8. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.8$ için fark şemasıyla ve kesin çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm	Kesin Çözüm	Hata
0.00	1.10539922	1.01310000	0.00002373
0.05	1.05459542	0.96749871	0.01505042
0.10	1.00712317	0.92504273	0.03126399
0.15	0.96302861	0.88580156	0.04883807
0.20	0.92240780	0.84989523	0.06796634
0.25	0.88541719	0.81750488	0.08886512
0.30	0.85228694	0.78888601	0.11177613
0.35	0.82333750	0.76438492	0.13696969
0.40	0.79900052	0.74445933	0.16474822
0.45	0.77984499	0.72970396	0.19545026
0.50	0.76660992	0.72088237	0.22945493
0.55	0.76024536	0.71896664	0.26718690
0.60	0.76196355	0.72518660	0.30912206
0.65	0.77330296	0.74109115	0.35579381
0.70	0.79620833	0.76862434	0.40780012
0.75	0.83313065	0.81022001	0.46581151
0.80	0.88715214	0.86891932	0.53057995
0.85	0.96214236	0.94851681	0.60294888
0.90	1.06295325	1.05374174	0.68386443
0.95	1.19566282	1.19048349	0.77438805
1.00	1.36787944	1.36607136	0.87571066



Şekil 4.2. Örnek 4.2’de $\varepsilon = 0.3, 0.4, 0.6$ ve 0.8 için fark şemasıyla kesin çözüm karşılaştırma grafiği.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, homojen konveksiyon reaksiyon difüzyon denklemi içeren singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi araştırılmıştır. Bu tür denklemler için iki ölçekli çoklu ölçek metodu tanıtılmış ve $O(\varepsilon^2)$ yaklaşım oranına sahip çoklu ölçek yaklaşık çözümü elde edilmiştir. Ayrıca üstel katsayılı fark şeması, ağırlık fonksiyonu içeren ve kalan terimi integral biçiminde olan interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak elde edilmiştir. Burada seçilen baz fonksiyonları metot hatasını sıfırlayacak biçimde seçilmektedir. Kurulan fark şemasının kesin çözüme yaklaşım oranı $O(h)$ bulunmuştur. $\frac{h}{\varepsilon} \cong 1$ oranı bu metod için en uygun sonuçların elde edildiği orandır. Sonlu fark şemasında düzgün şebeke noktalarının kullanılması hesaplama maliyetini düşürmektedir. Her iki metod için nümerik örnekler pertürbasyon parametresi olan ε 'un farklı değerleri için MATLAB R2014a kodlarıyla hesaplanmış, elde edilen sonuçlar tablolarda verilmektedir. Çoklu ölçek metodu ε 'un küçük değerlerinde çok iyi sonuç vermektedir, fakat metodun zorluğu adi diferansiyel denklemlere asimptotik açılım uygulandığında kısmi diferansiyel denklemlerinden yaklaşım elde edilmesi olup, bu denklemlerin çözüm zorluğudur. Homojen olmayan problemlerde ise kısmi türevli denklemlerin çözümü daha da zorlaşacaktır. Sonlu fark şemaları homojen olmayan denklemler için de kolayca kurulabilir. Adaptif şebekede ve parçalı düzgün şebekelerde fark şemaları kurulabilir. Bu çalışmanın kapsamı dışında tutulmuştur. İlerde yapılacak çalışmalarda homojen olmayan problem, adaptif ve parçalı düzgün şebekelerde fark şemaları kurulabilir; ayrıca çoklu ölçek yaklaşık çözümleri sunulabilir.

Aşağıdaki tablolarda ele alınan örnekler üzerinde her iki metodla elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. ε 'un küçük değerleri için her iki metotla elde edilen sonuçlar birbirine yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.1. Örnek 3.1 ve 4.1'de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	0.00000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.05	0.31825120	0.315309999568504	0.002941200431496
0.10	0.57166634	0.566836301738874	0.004830038261126
0.15	0.77105288	0.765120856317024	0.005932023682976
0.20	0.92550574	0.919050653880210	0.006455086119790
0.25	1.04267461	1.036113576158106	0.006561033841894
0.30	1.12898982	1.122614881703092	0.006374938296908
0.35	1.18985297	1.183860374295398	0.005992595704602
0.40	1.22979802	1.224311372928354	0.005486647071646
0.45	1.25262729	1.247715816185846	0.004911473814154
0.50	1.26152632	1.257219168471022	0.004307151528978
0.55	1.25916080	1.255458232345169	0.003702567654831
0.60	1.24775846	1.244640494505780	0.003117965494220
0.65	1.22917820	1.226611229397957	0.002566970602043
0.70	1.20496837	1.202910242876234	0.002058127123766
0.75	1.17641606	1.174819849202657	0.001596210797343
0.80	1.14458862	1.143405429929741	0.001183190070259
0.85	1.11036872	1.109549716058139	0.000819003941861
0.90	1.07448391	1.073981759509110	0.000502150490890
0.95	1.03753159	1.037301411527703	0.000230178472297
1.00	1.00000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000

Çizelge 5.2. Örnek 3.1 ve 4.1'de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	0.00000000	0.0000000000000000	0.001388934285580
0.05	0.24188529	0.240496355714420	0.002357090958393
0.10	0.44336159	0.441004499041607	0.002990934018216
0.15	0.60978614	0.606795205981784	0.003361988553335
0.20	0.74585401	0.742492021446665	0.003529158452965
0.25	0.85567783	0.852148671547035	0.003540736661954
0.30	0.94285805	0.939317313338046	0.003436118114296
0.35	1.01054482	1.007108701885704	0.003247242527166
0.40	1.06149247	1.058245227472834	0.002999836346400
0.45	1.09810750	1.095107663653600	0.002714442063086
0.50	1.12249081	1.119776367936914	0.002407290418293
0.55	1.13647488	1.134067589581707	0.002091058045932
0.60	1.14165652	1.139565461954068	0.001775521078870
0.65	1.13942571	1.137650188921130	0.001468025225195
0.70	1.13099090	1.129522874774805	0.001173985749614
0.75	1.11740138	1.116227394250386	0.000897227498362
0.80	1.09956688	1.098669652501638	0.000640286316483
0.85	1.07827483	1.077634543683517	0.000404719569537
0.90	1.05420560	1.053800880430463	0.000191255567531
0.95	1.02794579	1.027754534432469	0.0000000000000000
1.00	1.00000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000

Çizelge 5.3. Örnek 3.1 ve 4.1'de $\epsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	0.00000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.05	0.17472625	0.174214196531496	0.000512053468504
0.10	0.32689788	0.326002468374447	0.000895411625553
0.15	0.45874288	0.457572273958051	0.001170606041949
0.20	0.57228989	0.570934363505485	0.001355526494515
0.25	0.66938518	0.667919492586275	0.001465687413725
0.30	0.75170825	0.750193751256938	0.001514498743062
0.35	0.82078619	0.819272621825724	0.001513568174276
0.40	0.87800673	0.876533869125140	0.001472860874860
0.45	0.92463027	0.923229358761068	0.001400911238932
0.50	0.96180091	0.960495891070583	0.001305018929417
0.55	0.99055650	0.989365131407459	0.001191368592541
0.60	1.01183790	1.010772710834875	0.001065189165125
0.65	1.02649745	1.025566565292623	0.000930884707377
0.70	1.03530666	1.034514575779138	0.000792084220862
0.75	1.03896341	1.038311567007589	0.000651842992411
0.80	1.03809833	1.037585717324481	0.000512612675519
0.85	1.03328083	1.032904428385560	0.000376401614440
0.90	1.02502449	1.024779699137040	0.000244790862960
0.95	1.01379206	1.013673045022344	0.000119014977656
1.00	1.00000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000

Çizelge 5.4. Örnek 3.1 ve 4.1'de $\epsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı (1.0e-03 *)
0.00	0.00000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.05	0.14548035	0.145209380480257	0.270969519743008
0.10	0.27501941	0.274539024292546	0.480385707454012
0.15	0.38993315	0.389296426580840	0.636723419159990
0.20	0.49144053	0.490693020467747	0.747509532252999
0.25	0.58067024	0.579850818693391	0.819421306609058
0.30	0.65866703	0.657808612790998	0.858417209002038
0.35	0.72639750	0.725527758560753	0.869741439247007
0.40	0.78475561	0.783897574765624	0.858035234375998
0.45	0.83456777	0.833740380250961	0.827389749039065
0.50	0.87659759	0.875816193076598	0.781396923402067
0.55	0.91155031	0.910827113738878	0.723196261121939
0.60	0.94007694	0.939421413144551	0.655526855449007
0.65	0.96277813	0.962197344672255	0.5807853277449701
0.70	0.98020772	0.979706698415359	0.501021584641048
0.75	0.99287613	0.992458114536402	0.418015463597987
0.80	1.00125345	1.000920171573846	0.333278426154049
0.85	1.00577238	1.005524264521275	0.248115478725053
0.90	1.00683088	1.006667286543483	0.163593456517175
0.95	1.00479477	1.004714127298946	0.080642701054012
1.00	1.00000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000

Çizelge 5.5. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.3$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	1.01312373	1.013123728736941	0.000000001263059
0.05	0.96696143	0.967528177671798	0.000566747671798
0.10	0.92393266	0.925079329481764	0.001146669481764
0.15	0.88410062	0.885847014649571	0.001746394649571
0.20	0.84757939	0.849951680239213	0.002372290239213
0.25	0.81454489	0.817574990903127	0.003030100903127
0.30	0.78524860	0.788973074802914	0.003724474802914
0.35	0.76003482	0.764493050415720	0.004458230415720
0.40	0.73936235	0.744593624249973	0.005231274249973
0.45	0.72383153	0.729870740806133	0.006039210806133
0.50	0.71421814	0.721089503705321	0.006871363705321
0.55	0.71151584	0.719223881967000	0.007708041967000
0.60	0.71698920	0.725506081850623	0.008516881850623
0.65	0.73223997	0.741487919753643	0.009247949753643
0.70	0.75928991	0.769117096825422	0.009827186825422
0.75	0.80068440	0.810831977847757	0.010147577847757
0.80	0.85962174	0.869679348625904	0.010057608625904
0.85	0.94011477	0.949460708709743	0.009345938709743
0.90	1.04719280	1.054914000742109	0.007721200742109
0.95	1.18715379	1.191939347472572	0.004785557472572
1.00	1.36787944	1.367879441171442	0.000000001171442

Çizelge 5.6. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.4$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	1.03019738	1.030197383422319	0.000000003422319
0.05	0.98317627	0.987201943254144	0.004025673254144
0.10	0.93932533	0.947689544903000	0.008364214903000
0.15	0.89870460	0.911755410429212	0.013050810429212
0.20	0.86142483	0.879540815703200	0.018115985703200
0.25	0.82765833	0.851240540105656	0.023582210105656
0.30	0.79765264	0.827111807181088	0.029459167181088
0.35	0.77174766	0.807484998154000	0.035737338154000
0.40	0.75039715	0.792776474288621	0.042379324288621
0.45	0.73419565	0.783503908478001	0.049308258478001
0.50	0.72391214	0.780304603163079	0.056392463163079
0.55	0.72053222	0.783957363061639	0.063425143061639
0.60	0.72531077	0.795408600035633	0.070097830035633
0.65	0.73983782	0.815803477084549	0.075965657084549
0.70	0.76612089	0.846523052902565	0.080402162902565
0.75	0.80668790	0.889228572419523	0.082540672419523
0.80	0.86471566	0.945914267908631	0.081198607908631
0.85	0.94419051	1.018970296315542	0.074779786315542
0.90	1.05010894	1.111257749459313	0.061148809459313
0.95	1.18872821	1.226198044223708	0.037469834223708
1.00	1.36787944	1.367879441171442	0.000000001171442

Çizelge 5.7. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.6$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	1.06948345	1.069483451222802	0.000000001222802
0.05	1.02048623	1.030623356777792	0.010137126777792
0.10	0.97474348	0.995555371325372	0.020811891325372
0.15	0.93230800	0.964365105036586	0.032057105036586
0.20	0.89328284	0.937172582091785	0.043889742091785
0.25	0.85783204	0.914136066308017	0.056304026308017
0.30	0.82619405	0.895456485230973	0.069262435230973
0.35	0.79869862	0.881382535475310	0.082683915475310
0.40	0.77578796	0.872216564030295	0.096428604030295
0.45	0.75804324	0.868321333876736	0.110278093876736
0.50	0.74621782	0.870127797828360	0.123909977828360
0.55	0.74127870	0.878144022292689	0.136865322292689
0.60	0.74445849	0.892965422959439	0.148506932959439
0.65	0.75732029	0.915286497629614	0.157966207629614
0.70	0.78183882	0.945914267908631	0.164075447908631
0.75	0.82050182	0.985783671773607	0.165281851773607
0.80	0.87643667	1.035975183627254	0.159538513627254
0.85	0.95356871	1.097734977984366	0.144166267984366
0.90	1.05681891	1.172497998105248	0.115679088105248
0.95	1.19235091	1.261914342497449	0.069563432497449
1.00	1.36787944	1.367879441171442	0.000000001171442

Çizelge 5.8. Örnek 3.2 ve 4.2’de $\varepsilon = 0.8$ için çoklu ölçek metodu ve nümerik metodun karşılaştırılması

x	Nümerik çözüm	Çoklu ölçek metodu	İki metot arasındaki farkı
0.00	1.10539922	1.105399224561864	0.000000004561864
0.05	1.05459542	1.069178772608017	0.014583352608017
0.10	1.00712317	1.036831261223790	0.029708091223790
0.15	0.96302861	1.008418624419855	0.045390014419855
0.20	0.92240780	0.984029641299568	0.061621841299568
0.25	0.88541719	0.963782182978709	0.078364992978709
0.30	0.85228694	0.947825773362870	0.095538833362870
0.35	0.82333750	0.936344498895602	0.113006998895602
0.40	0.79900052	0.929560306681531	0.130559786681531
0.45	0.77984499	0.927736735185428	0.147891745185428
0.50	0.76660992	0.931183127070983	0.164573207070983
0.55	0.76024536	0.940259379739498	0.180014019739498
0.60	0.76196355	0.955381295834626	0.193417745834626
0.65	0.77330296	0.977026603479189	0.203723643479189
0.70	0.79620833	1.005741724398959	0.209533394398959
0.75	0.83313065	1.042149377471938	0.209018727471938
0.80	0.88715214	1.086957115738995	0.199804975738995
0.85	0.96214236	1.140966906655229	0.178824546655229
0.90	1.06295325	1.205085878499976	0.142132628499976
0.95	1.19566282	1.280338370563017	0.084675550563017
1.00	1.36787944	1.367879441171442	0.000000001171442



KAYNAKLAR

- Amirali, G. M., Duru, H., 2010. *Nümerik Analiz*, Pegema Yay, Ankara.
- Amiraliyev, G. M., Mamedov, Ya. C., 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo-parabolic equations, *Turkish Journal of Mathematic, TÜBİTAK*, **19**: 207-222.
- Awoke, A., Reddy, Y. N., 2007. An exponentially fitted special second-order finite difference method for solving singular perturbation problems. *Applied Mathematics and Computation*, **190**: 1767-1782.
- Basem, S. A., 2011. Numerical treatment of singularly perturbed two point boundary value problems exhibiting boundary layers, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**: 3504-3511.
- Bender, C. M., Orszag, S. A., 1978. *Advanced Mathematical Methods For Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.
- Bogn ar, G., 2011. Analytic solutions to the boundary layer problem over a stretching wall, *Computers and Mathematics with Applications*, **61**: 2256-2261.
- Bush, A. W., 1992. *Perturbation Methods for Engineers and Scientists*, CRC Press.
- Chen, Y., Goldenfeld, N., Oono, Y., 1996. Renormalization group and singular perturbations: multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory. *Physical Review E*, **54**(1): 376-394.
- Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. *Uniform Numerical Methods for Problems With Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin.
- Erdogan, F., Amiraliyev, G. M., 2009. A finite difference scheme for a class of singularly perturbed initial value problems for delay differential equations. *Numerical Algorithm*, **52**(4): 663-675.
- Guo, J., TSAI, J., 2005. The structure of solutions for a third Order Differential Equation in Boundary Layer Theory, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **22**: 311-351.
- Gupta, P., Kumar, M., 2016. Multiple-Scales Method and Numerical Simulation of Singularly Perturbed boundary layer Problems, *Applied Mathematical Sciences*, **10**(3): 1119-1127.
- Holmes, M. H., 1995. *Introduction to Perturbation Methods*, Springer Verlag, New York.
- Johnson, S., 2005. *Singular Perturbation Theory*, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, Springer.
- Kadalbajoo, M. K., Gupta, V., 2010. A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems, *Applied Mathematics and Computation*, **217**: 3641-3716.
- Kevorkian, J., Cole, J. D., 1981. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer Verlag, New York.
- Kevorkian, J., Cole, J. D., 1996. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer Verlag, New York.
- Khan, R. A., 2012. A study of the GAM approach to solve laminar aoundary layer equations in the presence of a wedge, *Applied Mathematical Sciences*, **6**(120): 5947-5958.

- Knut-Andreas, Lie., 2005. *Introduction to Finite Differences*, Applied Mathematics, Springer.
- Kumar, M., Mishra, H. K., Singh, P., 2009. Numerical treatment of singularly perturbed two point boundary value problems using initial-value method, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **29**(1-2): 229-246.
- Kwak, D. Y., 2014. *Numerical Analysis of Finite Difference Method*, SIAM J. of scientific Computing, V.
- Kwak, D.Y., 2007. *Numerical of Partial Differential Equations*, SIAM Journal on numerical analysis.
- LeVeque, R. J., 1998. *Finite Difference Methods for Differential Equations*, (University of Washington, USA).
- Malley, R. E. O., 1974. *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York.
- Marsden, J. E., Sirovich, L., Golubitsky., M., Jager, W., Holmes, P., 1998. *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York.
- Murdock, J. A., 1991. *Perturbation Theory and Methods*, Wiley, New York.
- Murray, J. D., 1984. *Asymptotic Analysis*, Springer Verlag, New York.
- Natesan, S., Bawa, R. K., 2007. Second-order numerical scheme for singularly perturbed reaction-diffusion robin problems, *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematic*, **2**(3-4): 177-192.
- Nayfeh, A. H., 1981. *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York.
- Nayfeh, A. H., 1985. *Problems in Perturbation*, Wiley, New York.
- Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T., 2009. Modified variational iteration method for a boundary layer problem in unbounded domain, *International Journal of Nonlinear Science*, **7**(4): 426-430.
- Pakdemirli, M., Ozkaya, E., 1998. Approximate boundary layer solution of a moving beam problem, *Mathematical and Computational Applications*, **3**(2): 93-100.
- Rao, S. C. S., Kumar, M., 2008. Exponential B-spline collocation method for self – adjoint singularly perturbed boundary value problems. *Applied Numerical Mathematics*, **58**:1572–1581.
- Rashidinia, J., Ghasemi, M., Mahmoodi, Z., 2007. Parametric spline method for a class of singular two-point boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, **188**(1): 58–63.
- Reddy, Y. N., Pramod Chakravarthy, P., 2004. An initial-value approach for solving singularly perturbed two-point boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, **155**(1): 95-110.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L., 1996. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, Springer verlag, Berlin.
- Samarski, A. A., 2002. *Theory of Difference Schemes 2 Nded*, "Nauka", Moskow, German transl of 1 sted, Geest portig, Leipzig.
- Sari, M., 2008. differential quadrature method for singularly perturbed two-point boundary value problems, *Journal of Applied Sciences*, **8**(6): 1091-1096, ISSN 1812-5654.
- Schlichting, H., 1979. *Boundary-Layer Theory*, Mcgraw-Hill, New York.
- Soujanyaal, GBSL., Reddy, Y. N., Phaneendra, K., 2012. Numerical Solution of Singular Perturbation Problems Via Deviating Argument and Exponential

- Fitting, *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2**(2): 49-54.
- Smith, G. D., 1993. *Numerical Solution of Equation: Finite Difference Methods* (third edition), (Oxford University, London).
- Stahel, A., 2017. *Numerical Methods*, Lecture Notes used at HTA Biel.
- Torsten Lin, B., 2010. *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Volker, J., 2013. *Numerical Methods for Scalar Convection-Dominated Problems*, Springer-verlag, Berlin heidelberg.
- Yiwu, Y., 1996. Interpolation perturbation method for solving the boundary layer type problems, *Applied Mathematics and Mechanics*, **17**(1): 91-98.





EKLER

1.Çoklu Ölçek Metodu için Matlab Programı

Örnek 3.3.1

```
clc
clearall;
closeall;
x=0:0.05:1;
formatlong
eps=input('epsilon          :');
yms=-( (exp(-x)) ./ (exp(-1/eps)-exp(-1)))
+ ((exp(-x/eps)) ./ (exp(-1/eps)-exp(-1)));
yext=(exp(-x/eps)-exp(-x)) ./ (exp(-1/eps)-exp(-1));
plot(x,yms,'.-',x,yext)
title('\epsilon=epsilonun değeri');
legend('yms','yext');
err=abs(yms-yext);
disp(' ----- ')
disp('  x      yms          yext      hata      ')
disp(' ----- ')
disp([x(1:21)' yms(1:21)' yext(1:21)' hata(1:21)']);
disp(' ----- ')
xlabel('x');
ylabel('y');
holdoff
```

Örnek 3.3.2

```
clc
clearall;
closeall;
x=0:0.05:1;
```

```

format long
eps=input('epsilon          :');

c1=0.0131;
c2=1.0000;
yms=exp(-x)+exp((1+eps)*(x-1)/eps);
yext=c1*exp(((1+sqrt(1+4*eps*(1+eps)))/(2*eps))*x)
      +c2*exp(((1-sqrt(1+4*eps*(1+eps)))/(2*eps))*x);
plot(x,yms,'.-',x,yext)
title('\epsilon=epsilonun değeri');
legend('yms','yext');
hata=abs(yms-yext);
disp(' ----- ')
disp('  x      yms          yext          hata      ')
disp(' ----- ')
disp([x(1:21)' yms(1:21)' yext(1:21)' hata(1:21)']);
disp(' ----- ')
xlabel('x');
ylabel('y');

```

2.Fark Şemaları için Matlab Programı

Örnek4.2.1

```

%%*****
%   Ey'+a(x)y'+b(x)y=0,   0<x<1;y(0)=0,y(1)=1          *
%%*****
%   epsilon=0.3,0.4,0.6,0.8          *
%%*****
clc, clear all
eps=input('epsilon          :');
x0=input('uzay alt sinir   :');
x1=input('uzay ust sinir   :');
y0=input('zaman alt sinir  :');

```

```

y1=input('zaman alt sinir   :');
n=input('uzay adim sayisi   :');
h=(x1-x0)/n;
x=x0:h:x1;
U=@(x) (exp(-x/eps)-(exp(-x)))/(exp(-1/eps)-exp(-1));
a=1+eps;
b=1;
f=0;

L1= -eps/(a*h)-1/(exp(-a*h/eps)-1);
L2=eps/(a*h)+1/(1-exp(a*h/eps));
teta=((a*h)/(2*eps))*(L2-L1)+1;
w(1)=y0;
w(n+1)=y1;
alfa(2)=0;beta(2)=y0;
for i=2:n
    A=eps*teta/(h^2)-a/(2*h);
    C=2*eps*teta/(h^2)-b;
    B=eps*teta/(h^2)+a/(2*h);
    F=0;
    alfa(i+1)=B/(C-alfa(i)*A);
    beta(i+1)=(F+A*beta(i))/(C-alfa(i)*A);
end
for i=n:-1:2
w(i)=alfa(i+1)*w(i+1)+beta(i+1);
end

for i=1:n+1
plot(x(i),w(i),'b*')
holdon
plot(x(i),U(x(i)),'ro')
holdon
end

```



```

holdoff
title('\epsilon=epsilonun değeri');
legend('y_{Numerik}','y_{Kesin}');
xlabel('x');
ylabel('y');
r=abs(w(1)-U((1)));
for i=2:n+1
    r=max(r,abs(w(i)-U(x(i))));
end
fprintf('x          w(x)          Kesin Çözüm          Hata \n');
for i=1:n+1
fprintf('%4.2f          %12.8f          %12.8f          %12.8f\n',...
    x(i),w(i),U(x(i)),abs(w(i)-U(x(i))));
end

```

Örnek 4.2.2

```

%%*****
%   Ey'+a(x)y'+b(x)y=0,  0<x<1;          *
%   y(0)= 1+exp(-(1+eps)/(eps));,y(1)= 1+1/exp(1);*
%%*****
%   epsilon=0.3,0.4,0.6,0.8          *
%%*****

clc, clear all
eps=input('epsilon          :');
x0=input('uzay alt sinir    :');
x1=input('uzay ust sinir    :');
y0=input('zaman alt sinir   :');
y1=input('zaman alt sinir   :');
n=input('uzay adim sayisi   :');
h=(x1-x0)/n;
x=x0:h:x1;
eps=0.3;
c1=0.0131;

```

```

c2=1.0000;
U=@(x)
c1*exp(((1+sqrt(1+4*eps*(1+eps)))/(2*eps))*x)+c2*exp(((1-
sqrt(1+4*eps*(1+eps)))/(2*eps))*x);
a=-1;
b=-(1+eps);
f=0;

L1= eps/a-h/((exp(a*h)/eps)-1);
L2=-eps/a+h/(1-exp((-a*h)/eps));
teta=((a*h)/(2*eps))*(L2-L1)+1;
w(1)=y0;
w(n+1)=y1;
alfa(2)=0;beta(2)=y0;
for i=2:n
    A=eps*teta-(h*a)/2;
    C=2*eps*teta-b*h^2;
    B=eps*teta+(h*a)/2;
    F=0;
    alfa(i+1)=B/(C-alfa(i)*A);
    beta(i+1)=(F+A*beta(i))/(C-alfa(i)*A);
end
for i=n:-1:2
w(i)=alfa(i+1)*w(i+1)+beta(i+1);
end

for i=1:n+1
subplot(2,2,1)
plot(x(i),w(i),'b*')
holdon
plot(x(i),U(x(i)),'ro')
holdon
end

```

```
holdoff
title('\epsilon=epsilonun değeri');
legend('y_{Numerik}', 'y_{Kesin}');
xlabel('x');
ylabel('y');
r=abs(w(1)-U((1)));
for i=2:n+1
    r=max(r,abs(w(i)-U(x(i))));
end
fprintf('x          w(x)          Kesin Çözüm          Hata\n');
for i=1:n+1
    fprintf('%4.2f      %12.8f      %12.8f      %12.8f\n',...
        x(i),w(i),U(x(i)),abs(w(i)-U(x(i))));
end
holdoff
```

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Süleymaniye (Irak) Qaladza şehrinde doğdu. 2003 yılında Salahadin Üniversitesi Eğitim Kolejinde Matematik Bölümünü kazandı. 2007'de Lisans öğrenimini başarıyla bitirdi. 2007 yılında Ranya Eğitim Müdürlüğü tarafından öğretmen olarak atandı. Eylül 2014'te Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi'nde Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır. Halen öğretmenlik görevini sürdürmektedir.



UNIVERSITY OF VAN YUZUNCU YIL
THE INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
THESIS ORIGINALITY REPORT

Date: 11 /05./2018

Thesis Title: "**Singüler pertürbe özellikli sınır katı problemlerin çözümü için çoklu ölçek ve nümerik metotların karşılaştırılması**" The title of the mentioned thesis, above having total ~~5860~~ pages with cover page, introduction, main parts and conclusion, has been checked for originality by TURNITIN computer program on the date of 26/03/2018 and its detected similar rate was 10 % according to the following specified filtering

Originality report rules:

- Excluding the Cover page,
- Excluding the Thanks,
- Excluding the Contents,
- Excluding the Symbols and Abbreviations,
- Excluding the Materials and Methods
- Excluding the Bibliography,
- Excluding the Citations,
- Excluding the publications obtained from the thesis,
- Excluding the text parts less than 7 words (Limit match size to 7 words)

I read the Thesis Originality Report Guidelines of Van Yuzuncu Yil University for Obtaining and Using Similarity Rate for the thesis, and I declare the accuracy of the information I have given above and my thesis does not contain any plagiarism; otherwise I accept legal responsibility for any dispute arising in situations which are likely to be detected.

Sincerely yours,

Date and signature
11/05/2018

Name and Surname: Qadir Hassan Hamad MANGURI
Student ID#:149102178
Science: Mathematic
Program: Mathematic
Statute: M. Sc.

APPROVAL OF SUPERVISOR
SUITABLE

Doç. Dr. Hakki DURU
(Title, Name-Surname, Signature)

APPROVAL OF THE INSTITUTE
SUITABLE

(Title, Name-Surname, Signature)