T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI TÜRDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Sultan ERDUR
DANIŞMAN: Prof. Dr. CEMİL TUNÇ

VAN-2018

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI TÜRDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Sultan ERDUR

VAN-2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı' nda Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Sultan Erdur tarafından sunulan ***"Bazı Türden Diferansiyel Denklemlerde Periyodik Çözümlerin Varlığı"*** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 13/04/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM	İmza:
Üye: Prof. Dr. Cemil TUNÇ	İmza:
Üye: Doç. Dr. Hakkı DURU	İmza:
Üye: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman EDİZ	İmza:
Üye: Dr. Öğr. Üyesi Erdal KORKMAZ	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun …./..../….. tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sultan ERDUR

ÖZET

BAZI TÜRDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

ERDUR, Sultan
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Nisan 2018, 83 sayfa

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, periyodik çözümler ile ilgili literatürde yapılmış olan bazı çalışmalar özetlendi. İkinci bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntem belirtildi. Üçüncü bölümde, bu tez çalışmasında ele alınan diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığını incelemek için kullanılacak yöntem, temel bilgi niteliğinde olan bazı tanımlar, lemmalar, teoremler vb. verildi.

Çalışmanın dördüncü bölümünde Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli iki ayrı diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı, beşinci bölümünde ise üçüncü mertebeden lineer olmayan çoklu gecikmeli iki farklı diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar elde edildi. Altıncı bölümde, Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla dördüncü mertebeden lineer olmayan çoklu gecikmeli bir diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı, kararlılığı ve sınırlılığı için yeter şartlar elde edildi.

Son bölümde ise bu tezde yaptığımız çalışmalara ilişkin tartışma ve sonuç kısmı bulunmaktadır.

Anahtar kelimeler: Diferansiyel denklem, Kararlılık, Lyapunov metodu, Periyodik çözüm, Sınırlılık.

ABSTRACT

ON THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR VARIOUS KINDS OF DIFFERANTIAL EQUATIONS

ERDUR, Sultan
Ph.D. Thesis, Mathematic Section
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

April 2018, 83 pages

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, some works on the existence of periodic solutions of differantial equations can be found in the literature are summarized. In the second chapter, the material and method to be used in the thesis are stated. In the third chapter, the method used to examine the existence of periodic solutions of the differential equations discussed in the thesis, some basic definitions, lemmas and theorems are given.

In the fourth chapter of the thesis, with the help of the second method of Lyapunov, the existence of periodic solutions of two nonlinear differential equations of second order with constant and variable delays, respectively, are investigated. In the fifth chapter, sufficient conditions for the existence of periodic solutions of two nonlinear differential equations of third order with multiple delays are obtained. In the sixth chapter of the thesis, by means of the Lyapunov's second method, sufficient conditions for the existence, stability and boundedness of the solutions of a nonlinear differential equation of fourth order with multiple time lags are obtained.

In the last chapter, which is the final chapter of the thesis, a short conclusion related to the subject of the thesis is given.

Keywords: Boundedness, Differential equation, Lyapunov method, Periodic solution, Stability.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada Lyapunov metodundan faydalanılarak ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden gecikmeli bazı türden diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı incelenecektir. Buna ilaveten tezin bir bölümünde çözümlerin kararlılık ve sınırlılık durumları da ele alınacaktır. Literatürde tez konusu ile ilgili yapılan bazı çalışmaların ışığında ele aldığımız problemleri çözmek suretiyle ilgili literatüre katkı sağlanması amaçlanmaktadır.

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca tez süresi boyunca göstermiş oldukları manevi desteklerinden ve yardımlarından dolayı aileme, değerli hocalarıma ve mesai arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a da teşekkürlerimi sunarım.

2018
Sultan ERDUR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Re$	Reel Sayılar
β	Beta
φ	Phi
μ	Mü
γ	Gama
ψ	Psi
Ω	Omega
C	Sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
V	Lyapunov fonksiyonu

Kısaltmalar	**Açıklama**
CIP	Sürekli, artan pozitif tanımlı fonkiyonlar sınıfı
CI	Sürekli ve artan fonksiyonlar sınıfı
C_α	$\|\varphi\| \leq \alpha$ bölgesindeki $\varphi \in C$ elamanlarının kümesidir

1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bilindiği gibi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmamaktadır. Ancak diferansiyel denklemleri çözmeksizin, çözümlerin varlığı, kararlılığı, düzgün kararlılığı, asimptotik kararlılığı, sınırlılığı vb. niteliksel davranışları hakkında bazı hükümlere ulaşılabilir. Öte yandan bazı denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları fizik, matematik, biyoloji, mühendislik vb. pek çok alanda büyük bir öneme sahiptir. wDolayısıyla, çözümlerin niteliksel davranışlarının incelenmesi kayda değerdir.

Bu bağlamda, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarını inceleme konusunda literatürde çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Özel olarak periyodik çözümlerin varlığının incelenmesi konusu birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Periyodik çözümlerin varlığını incelemek için Lyapunov yöntemi, örtüşen derece teorisi, sabit nokta teoremleri vb. gibi bazı yöntemler kullanılmaktadır.

İlgili Matematik literatürüne ilişkin incelemelerde ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden belli formdaki gecikmeli ve gecikmesiz bazı diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili çalışmalardan bir kısmı aşağıdaki gibi özetlenebilir.

İlk olarak ikinci mertebeden bazı diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili yapılmış çalışmaları özetleyelim.

Kiguradze (1968), ikinci mertebeden lineer olmayan

$$u'' = f(t,u,u')$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını inceledi.

Saburov (1971), ikinci mertebeden

$$y'' + f(t)y = 0$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını ve sınırlılığını araştırdı.

Schmitt (1971), ikinci mertebeden

$$x'' + f(t,x,x') = 0$$

adi diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili bazı souçlar elde etti.

Lezina (1984), ikinci mertebden

$$x_i'' + \lambda_i^2 x_i + \varphi_i(x_1,...,x_n) = 0,\ i = 1,...,n$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili bazı souçlar elde etti.

Metzen (1988), ikinci mertebeden

$$-x''(t) + cx'(t) = g(t, x(t-\tau)) + f(t)$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin 2π - periyodik çözümlerinin varlığını araştırdı.

Li ve Li (2012), ikinci mertebeden değişken ve çoklu gecikmeli

$$u''(t) + a(t)u(t) = f(t, u(t), u(t-\tau_1(t)),...,u(t-\tau_n(t)))$$

fonksiyonel diferansiyel denkleminin ω-periyodik çözümlerinin varlığını sabit nokta teorisiyle inceledi.

Meng ve Zhang (2013), ikinci mertebeden gecikmeli otonom olmayan

$$x''(t) + \lambda x(t) = -f(t, x(t), x(t-\tau))$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını sabit nokta teoremi yardımıyla inceledi.

Wu ve ark. (2013), ikinci mertebeden

$$-u'' + Au(t) = f(t, u(t-r))$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin bellirli koşullar altında periyodik çözümlerinin varlığını araştırdı.

Guo ve ark. (2014), ikinci mertebeden gecikmeli

$$x''(t) = -f(t, x(t-\tau))$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını inceledi.

Ma (2014), ikinci mertebeden

$$x'' + a(t)x = f(t, x) + c(t)$$

diferansiyel denkleminin $T-$periyodik çözümlerinin varlığını sabit nokta teoremiyle ele aldı.

Ma ve Lu (2014), ikinci mertebeden

$$u''(t) - \rho^2 u(t) + \lambda g(t) f(u(t-\tau(t))) = 0$$

diferansiyel denkleminin $T-$pozitif periyodik çözümlerin varlığını global çatallanma (bifurcation) teoremi yardımıyla inceledi.

Li ve Li (2014), ikinci mertebeden lineer olmayan

$$u''(t) + b(t)u'(t) + a(t)u(t) = c(t) f(t, u)$$

diferansiyel denkleminin pozitif periyodik çözümlerinin varlığını sabit nokta teoremiyle inceledi.

Ma ve ark. (2014), ikinci mertebeden

$$u'' + a(t)u = f(t,u) + c(t)$$

diferansiyel denkleminin pozitif periyodik çözümlerin varlığını Schauder sabit nokta teoremi aracılığıyla ele aldı.

Wei (2014), ikinci mertebeden

$$x'' = f(t,x,x')$$

adi diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını ve tekliğini Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla gösterdi.

Zhang ve Ma (2014), ikinci mertebeden

$$u'' = f(t,u) + c(t)$$

diferansiyel denklemini $T-$ periyodik sınır şartları ile göz önüne alarak, sabit nokta teoremi yardımıyla, bir pozitif periyoduk çözümün varlığını araştırdı.

Zhou (2015), ikinci mertebeden yarı lineer

$$-x'' + f(t,x,x')x' + e(t)g(x) = h(t)$$

differansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını Leray Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla inceledi.

Liao (2017), ikinci mertebeden

$$x'' + a(t)x = f(t,u)$$

diferansiyel denkleminin pozitif periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar oluşturdu.

Li ve Guo (2017), ikinci mertebeden lineer olmayan

$$u''(t) = f(t,u(t),u'(t))$$

adi differansiyel denkleminin $2\pi-$periyodik çözümlerin varlığını Leray-Schauder sabit nokta teoremiyle inceledi.

Llibre ve Makhlouf (2017), ikinci mertebeden

$$x'' + x^n = \mu f(t)$$

ve

$$x'' - x^n = \mu f(t)$$

diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlık ve tekliğini inceledi.

Lomtatidze (2017), ikinci mertebeden lineer olmayan

$$u'' = f(t,u)$$

adi diferansiyel denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, sınırsızlığını ve periyodik çözümlerinin varlığını bellirli koşullar altında inceledi.

Belirtelim ki ikinci mertebeden gerek lineer, lineer olmayan gerekse gecikmeli ve gecikmesiz değişik formda diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı ile alakalı yukarıda verilen çalışmalar dışında çok sayıda kayda değer bilimsel çalışmalar mevcuttur. Periyodik çözümlerin araştırılmasında gerek Lyapunov yöntemi gerek sabit nokta teorisi, derece teorisi vb. yöntem ya da teorilerin kullanıldığı görülmektedir. Ancak burada yapılmış bu çalışmaların ve uygulanan yöntemlerin daha fazla ayrıntısına girilmeyecektir.

Şimdi ise tez konumuzla ilgili olan üçüncü mertebeden bazı diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığıyla alakalı yapılmış bulunan bazı çalışmaları özetleyelim.

Ezeilo (1960), üçüncü mertebeden

$$x''' + ax'' + bx' + h(x) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını ve tekliğini sabit nokta teoremi ve Leray Schauder tekniği yardımı ile inceledi.

Reissig (1972), üçüncü mertebeden

$$x''' + \phi(x')x'' + \phi(x)x' + f(x) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin sırasıyla $\phi(x) = k^2$ ve $\phi(x') = a$ özel durumları için periyodik çözümlerinin varlığını Leray-Schauder sabit nokta tekniği kullanarak ele aldı ve yeter şartlar oluşturdu.

Ezeilo (1973), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + g(x')x'' + bx' + h(x, x', x'') = p(t)$$

diferansiyel denklemini göz önüne aldı ve bu diferansiyel denklemin periyodik çözümlerin varlığını Schauder sabit nokta tekniği yardımıyla inceledi.

Ezeilo (1975), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + \psi(x')x'' + \phi(x)x' + \theta(x) = p(x) + q(t, x, x')$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını araştırdı.

Mehri ve Khalessizadeh (1977), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + cx' + f(t,x) = e(t)$$

diferansiyel denkleminin $w-$periyodik çözümlerinin varlığını Schauder tekniği yardımıyla inceledi.

Ezeilo (1978), üçüncü mertebeden

$$x''' + \mu\psi(x')x'' + \mu\psi(x)x' + (1-\mu)c_1 x + \mu f(x) = \mu p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını inceledi.

Ezeilo (1978),

$$x''' + \psi(x')x'' + \varphi(x)x' + f(x) = p(t)$$

denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını Leray-Schauder tekniği yardımıyla inceledi.

Chukwu (1978), üçüncü mertebeden gecikmeli lineer olmayan

$$\begin{aligned} x'''(t) + f(x,x',x'') + g(x(t-h), x'(t-h)) \\ +i(x(t-h)) = p(t,x,x',x(t-h),x''(t)) \end{aligned}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alarak periyodik çözümlerin varlığını ve sınırlılığını inceledi.

Tejumola (1979), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(x')x'' + g(x)x' + h(x) = p(t,x,x',x'')$$

denkleminin periyodik çözümlerin varlığını ve sınırlılığını Leray-Schauder sabit nokta tekniği yardımıyla inceledi.

Tejumola (1979), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(x')x'' + g(x)x' + h(x) = p(t,x,x',x'')$$

ve

$$x''' + Ax'' + g(t,x)x' + h(x) = p(t,x)$$

denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığını Leray-Schauder tekniği aracılığıyla ele aldı.

Mehri (1980) ve Mehri (1981), sırasıyla üçüncü mertebeden

$$x''' + cx' + f(t,x) = e(t)$$

ve

$$x''' + f(x,x',x'') = 0$$

diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümlerin varlığını ele aldı.

Mehri (1990), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + \psi(x')x'' + (k^2 + \varphi(x))x' + f(t,x) = e(t)$$

denkleminin Leray-Schauder tekniğiyle en az bir periyodik çözümünün varlığını gösterdi.

Xiang (1992), üçüncü mertebeden

$$x''' + \phi(x')x'' + g(x)x' + f(x) + p(t,x) = 0$$

lineer olmayan diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını inceledi.

Tejumola (1992), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + g(t, x(t-r)) = p(t)$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını inceledi.

Mehri ve Shadman (1997), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + \psi(x')x'' + \phi(x)x' + f(t,x) = p(t),$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını Leray-Schauder metoduyla inceledi.

Huang (1999), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(x'') + g(x') + h(x) = p(t)$$

lineer olmayan diferansiyel denklemini ele aldı ve Schauder derece teorisi yardımıyla periyodik çözümlerin varlığını inceledi.

Zhang ve ark. (2000), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) + g(x(t-r)) = p(t)$$

fonksiyonel diferansiyel denklemini ele aldı ve periyodik çözümlerin varlığını derece teorisi yardımıyla inceledi.

Mehri ve Niksirat (2001), üçüncü mertebeden yarı lineer

$$x''' + k^2 x' = \varepsilon f(x, x', x'')$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını inceledi.

Zhang ve ark. (2002), üçüncü mertebeden

$$\begin{aligned} &ax'''(t) + dx''(t) + bx'(t) + cx(t) \\ &\qquad + g(x(t-\tau), x'(t-\tau)) = p(t) \end{aligned}$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığını derece teorisi yardımıyla araştırdı.

Zhang ve Wang (2002), üçüncü mertebeden değişken katsayılı

$$a(t)x'''(t) + bx''^{2k-1}(t) + cx'^{2k-1}(t)$$

$$+\sum_{i=1}^{2k-1} c_i x^{(i)}(t) + g(x(t-\tau)) = p(t)$$

fonksiyonel diferansiyel denkleminin 2π-periyodik çözümlerinin varlığı için derece teorisi yardımıyla yeter şartlar oluşturdu.

Zhang ve ark. (2003),

$$ax'''(t) + dx''(t) + bx'(t) + cx(t) + g(x(t-r), x'(t-r)) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin 2π- periyodik çözümünün varlığını bazı eşitsizlikler yardımıyla ispatladı.

Mehri ve Shadman (2004), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + \psi(x')x'' + (k^2 + \phi(x))x' + f(t, x) = e(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını çalıştı.

Zhang ve Wang (2004), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + ax''^{2k-1}(t) + bx'^{2k-1}(t) + x^{2k-1}(t)$$

$$+g(t, x(t-\tau_1), x'(t-\tau_2)) = p(t)$$

fonksiyonel diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı için derece teorisi yardımıyla yeter şartlar oluşturdu.

Liu ve ark. (2006), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + \sum_{i=1}^{2}\left[a_i x^{(i)}(t) + b_i x^{(i)}(t-\tau_i)\right]$$

$$+\sum_{i=0}^{m} c_i x(t-\sigma_i) + \sum_{i=0}^{n} g_i(x(t-\delta_i)) = p(t)$$

fonksiyonel diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını derece teorisi yardımıyla araştırdı.

Wang ve Lu (2009), üçüncü mertebeden

$$x'''(t) + \sum_{i=1}^{2}\left[a_i x^{(i)} + b_i x^{(i)}(t-\tau_i)\right] + g_1(x(t)) + g_2(x(t-\tau)) = p(t)$$

diferansiyel denklemi için 2π-periyodlu tek çözümün varlığını gösterdi.

Tunç (2009), üçüncü mertebeden lineer olmayan

$$x''' + c_2(t)x'' + c_1(t)x' + f(t, x) = p(t, x, x', x'')$$

diferansiyel denklemi için periyodik çözümlerin varlığını Leray Schauder tekniği yardımıyla inceledi.

Abou El- Ela (2012), üçüncü mertebeden

$$x'''(t)+\psi(x'(t))x''(t)+f(x(t))x'(t)$$
$$+g_1(t,x(t-\tau_1(t)))+g_2(t,x(t-\tau_2(t)))=p(t)$$

diferansiyel denkleminin T-periyodik çözümünün varlığını örtüşen derece teorisi yardımıyla ele aldı.

Ademola (2013),

$$x'''+f(t,x,x',x'',x''')+\sum_{i=1}^{n}g_i[t,x(t-\tau_i(t)),x'(t-\tau_i(t))]+\sum_{i=1}[t,x(t-\tau_i(t))]$$
$$-p(t,x,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))),x',x'(t-\tau_1(t)),...,x'(t-\tau_n(t)),x'')=0$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığını ve tekliğini, sıfır çözümün düzgün asimptotik kararlılığını ve çözümlerin düzgün sınırlığını Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla inceledi.

Cheng (2014), üçüncü mertebeden

$$x'''+f(t,x')x''+h(t,x)x'=g(t,x)$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi için pozitif periyodik çözümlerin varlığını çalıştı.

Ademola ve ark. (2015), üçüncü mertebeden

$$x'''+\lambda\phi(t)g_1(x,x'',x''')=p(t,x,x',x'')$$

adi diferansiyel denklem sisteminin bazı özel durumları için periyodik çözümlerinin varlığını, kararlılığını ve sınırlılığını ele aldı.

Ademola ve ark. (2015), üçüncü mertebeden, çoklu gecikmeli lineer olmayan

$$x'''+\sum_{i=1}^{n}f_i(t,x,x(t-\tau_i(t)),x',x'(t-\tau_i(t)),x'',x''(t-\tau_i(t)))+\sum_{i=1}^{n}g_i(x'(t-\tau_i(t)))$$
$$+\sum_{i=1}^{n}h_i(x(t-\tau_i(t)))=\sum_{i=1}^{n}p_i(t,x,x(t-\tau_i(t)),x',x'(t-\tau_i(t)),x'',x''(t-\tau_i(t)))$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılığını, sınırlılığını ve periyodik çözümlerinin varlığını Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla inceledi.

Remili ve Beldjerd (2016), üçüncü mertebeden

$$(g(t)(g(x(t))x'(t))')'+a(t)(h(x(t))x'(t))'$$
$$+b(t)\varphi(x(t))x'(t)+c(t)f(x(t-r))=e(t)$$

gecikmeli homojen olmayan diferansiyel denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, düzgün sınırlılığını, periyodik çözümlerinin varlığını ve sıfır çözümün düzgün asimtotik kararlılığını ele aldı.

Ayrıca üçüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığıyla illgili yapılmış bulunan bazı çalışmalar için Mehri ve Niksirat (2003; 2005), Tejumola (2000) ve Ezeilo (1978; 1979; 1983) gibi kaynaklara bakılabilir. Yukarıda verilen literatür bilgilerine ilave olarak üçüncü mertebeden adi, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili farklı metotların kullanımıyla elde edilen çok sayıda çalışma mevcuttur. İlgili çalışmaların daha fazla ayrıntısına girilmeyecektir.

Şimdi ise bu tez konusuna ilişkin dördüncü mertebeden bazı diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığıyla ilgili birkaç çalışmayı özetleyelim.

Tejmula (1975a,b), dördüncü mertebeden lineer olmayan

$$x^{(4)} + a_1 x''' + g(x')x'' + a_3 x' + h(x, x', x'', x''') = p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını Lyapunov yöntemi yardımıyla araştırdı.

Ezeilo (1978), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + a_1 x''' + g(x')x'' + \gamma(x)x' + h(t, x, x', x'', x''') = p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını çalıştı.

Kurasin (1978),

$$x^{(4)} + Q(t)x = 0$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını araştırdı.

Ezeilo ve Tejumola (1979), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + a_1 x''' + f(x, x', x'', x''')x'' + g(x)x' + h(x)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı için sabit nokta metodu aracılığıyla yeter sonuçlar elde etti.

Feng (1995), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + ax''' + f(x, x', x'') + cx' + g(x) = p(t, x, x', x'', x''')$$

denklemi için periyodik çözümlerin varlığını araştırdı.

Mehri ve Shadman (1997), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + f_3(x'')x''' + f_2(x')x'' + f_1(x)x' + g(t, x, x', x'', x''') = p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını Leray-Schauder tekniği yardımıyla ele aldı.

Zhang ve ark. (2002), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)}(t)+ax'''(t)+bx''(t)+cx'(t)+ex(t)+h(x(t-\tau))=p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını derece teorisi yardımıyla araştırdı.

Afuwape ve Adesina (2005), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)}+ax'''+f(x')x''+g(x')+h(x)=p(t)$$

ve

$$x^{(4)}+ax'''+f(x')x''+g_1(x)x'+h(x)=p(t)$$

diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar oluşturdu.

Tunç (2005), sırasıyla dördüncü ve beşinci mertebeden

$$X^{(4)}+\Phi(X'')X'''+\Psi(X')X''+F(X)+G(X)=0$$

ve

$$\begin{aligned}X^{(5)}+AX^{(4)}+\Phi(X,X',X'',X''',X^{(4)})X'''+\Psi(X')X''\\+\Omega\left(X,X',X'',X''',X^{(4)}\right)X'+\Theta(X)=0\end{aligned}$$

vektör diferansiyel denklemlerinin aşikar olmayan bir periyodik çözümünün var olmadığını gösterdi.

Bereanu (2009), dördüncü mertebeden lineer olmayan

$$u^{(4)}-pu''-g(t,u)=e(t)$$

diferansiyel denkleminin $T-$periyodik çözümlerinin varlığını garantileyen yeter şartları derece teorisi yardımıyla elde etti.

Fan ve ark. (2009), dördüncü mertebeden lineer olmayan

$$u^{(4)}(t)+au'''(t)-pu''(t)+f(u(t))u'(t)-g(t,u(t))=e(t)$$

diferansiyel denkleminin en az bir $T-$periyodik çözümünün varlığını derece teorisi yardımıyla ele aldı.

Zhao ve ark. (2010), dördüncü mertebeden

$$u^{(4)}(t)+a(u''(t))u'''(t)-P(u'(t))u''(t)+f(u(t))u'(t)-g(t,u(t))=e(t)$$

diferansiyel denkleminin en az bir $T-$periyodik çözümünün varlığı için derece teorisi yardımıyla yeter şartlar oluşturdu.

Ogundare (2010), dördüncü mertebeden

$$x^{(4)} + ax''' + f(x, x')x'' + g(x') + h(x) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin global kararlı bir periyodik çözümünün varlığını garantileyen yeter şartları uygun bir Lyapunov fonksiyonu yardımıyla elde etti.

Llibre ve Makhlouf (2012), dördüncü mertebeden

$$u^{(4)} + qu'' + pu = \varepsilon f(t, u, u', u'', u''')$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar oluşturdu.

Jiang ve Shao (2012), dördüncü mertebeden

$$u^{(4)}(t) + au'''(t) - pu''(t) + qu'(t) - g(t, u(t)) = e(t)$$

diferansiyel denkleminin tek bir $T-$periyodik çözümünün varlığı için yeter şartlar elde etti.

Llibre ve Teixeira (2012), dördüncü mertebeden

$$u^{(4)} + qu'' - u = \varepsilon f(u, u', u'', u''')$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartları oluşturdu.

Ardjouni ve ark. (2014), dördüncü mertebeden lineer olmayan değişken gecikmeli

$$\frac{d^4}{dt^4}\big(x(t) - g(t, x(t-\tau(t)))\big) = a(t)x(t) - f(t, x(t-\tau(t)))$$

neutral diferansiyel denkleminin pozitif periyodik çözümün varlığını Krasnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla inceledi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümüne bakıldığında ilgili literatürde ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden gecikmeli veya gecikmesiz gerek lineer gerekse lineer olmayan adi veya fonksiyonel diferansiyel denklemler ile ilgili kayda değer birçok çalışmanın olduğu görülmektedir.

Bu tezde materyal olarak tezin kaynaklar kısmında geçen ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili belirtilen çalışmalar ve tez konusundaki temel bilgileri içeren kitaplar düşünülmektedir.

Bu tez "1. Giriş ve Literatür Bildirişleri" ve "2. Materyal ve Yöntem" bölümleriyle beraber sekiz bölümden oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, bu tez çalışmasında ele alınan diferansiyel denklemlerin periyodik çözümlerinin varlığını incelemek için kullanılacak yöntemle ilgili bazı temel tanım, lemma ve teoremler verilmektedir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli iki farklı diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar, beşinci bölümünde üçüncü mertebeden lineer olmayan çoklu gecikmeli iki farklı diferansiyel denklem ele alınacak olup, ilkinde periyodik çözümlerin varlığı için yeter şartlar, ikinci denklem için ise periyodik çözümlerin varlığı, kararlılık durumu ve sınırlılığı için yeter şartlar Lyapunov yöntemi yardımıyla elde edilecektir. Altıncı bölümde dördüncü mertebeden lineer olmayan çoklu gecikmeli bir diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı, kararlılık durumu ve sınırlılığı için yeter şartlar Lyapunov yöntemi kullanarak elde edilecektir.

Son bölümde ise tezimizde yaptığımız çalışmalar ile literatürde yer alan bazı çalışmaların karşılaştırılması yapılacaktır.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili, daha sonraki bölümlerde kullanılabilecek ve temel bilgi niteliğinde olan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Şimdi

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \tag{3.1}$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $x \in \Re^n$, $I = [0, \infty)$ ve D, $\Re^n$ 'de açık bağlantılı bir bölge olmak üzere, $F(t, x)$ fonksiyonunun $I \times D$ bölgesinde (t, x)'e göre sürekli olduğu varsayılmaktadır. C, (3.1) denkleminin D bölgesinde kalan çözümlerinin bir sınıfı olsun ve $x_0(t)$, C'nin bir elemanı olsun. $x = y + x_0(t)$ dönüşümü yapıldığında, (3.1) sistemi,

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y + x_0(t)) - F(t, x_0(t)) \tag{3.2}$$

sistemine dönüşür.

(3.2) diferansiyel denklem sisteminin sağ tarafını $G(t, y) = F(t, y + x_0(t)) - F(t, x_0(t))$ olarak alalım. $G(t, 0) \equiv 0$ olduğu açıktır ve (3.2) diferansiyel denklem sisteminin $y(t) \equiv 0$ çözümü (3.1) denkleminin $x_0(t)$ çözümüne karşılık gelir. Açıkça görüldüğü üzere sıfırdan farklı herhangi bir çözüm uygun bir dönüşüm yardımıyla sıfır çözümüne indirgenebilir. Bu nedenle, yapılan araştırmalarda çoğu kez sıfırdan farklı herhangi bir çözümün niteliksel davranışlarını incelemek yerine sıfır çözümünün niteliksel davranışları incelenmektedir ve bu durum genelliği bozmaz. Bundan dolayı, $F(t, 0) \equiv 0$ olduğu varsayılabilir ve D bölgesi $\|x\| < H$, $H > 0$ olarak alınabilir (Yoshizawa, 1966).

Tanım 3.1. D, $\Re^n$ 'nin açık bir alt cümlesi ve (a, b), $\Re$ 'de açık bir aralık olmak üzere $F : (a, b) \times D \to \Re^n$ bir fonksiyon olsun. Buna göre $(t_0, x_0) \in (a, b) \times D$ noktasının bir N komşuluğu var ve $(t, x_1), (t, x_2) \in N$ için,

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir K pozitif sabiti varsa F fonksiyonu (t_0, x_0) noktasında x'e göre yerel Lipschitz şartını sağlıyor denir (Burton, 1985).

(3.1) diferansiyel denklem sistemindeki F fonksiyonunun sürekliliği ve Lipschitz şartını sağlaması bu denklem için çözümlerin varlığı ve tekliğini garanti eder. Bu şartlar yeter şartlardır.

Teorem 3.1. (Gronwal eşitsizliği)

$f(t)$ pozitif, sürekli ve monoton azalmayan bir fonksiyon**,** $u(t)$ ve $v(t)$**,** $[t_0, t_0 + a]$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds,\ t \in [t_0, t_0 + a]$$

ise

$$u(t) \leq f(t)\exp(\int_{t_0}^{t} v(s)ds),\ t \in [t_0, t_0 + a]$$

eşitliği sağlanır (Ahmad ve Rao, 1999).

(3.1) diferansiyel denklem sisteminde $F(t,0) = 0$ olsun. Belirtelim ki diferansiyel denklem sistemi yerine kısaca denklem ya da diferansiyel denklem kavramları kullanılacaktır.

Tanım 3.2. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t_0 \in I$ için, $\exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ var öyle ki $\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ olduğunda $\forall t \geq t_0$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ olur ise (3.1) denkleminin sıfır çözümüne kararlıdır denir. Eğer δ, t_0' dan bağımsız ise yani, yalnızca ε'a bağlı ise, bu taktirde sıfır çözümüne düzgün kararlıdır denir (Yoshizawa, 1966).

Tanım 3.3. (3.1) denkleminin sıfır çözümü kararlı ve $\exists \delta_0(t_0) > 0$ vardır, öyle ki $\|x_0\| < \delta_0(t_0)$ iken $t \to \infty$ için $\|x(t; x_0, t_0)\| \to 0$ ise sıfır çözümüne asimptotik kararlı denir (Yoshizawa, 1966).

Aşağıdaki tanımlar için Tanım 3.10'a kadar (3.1) sisteminde $F(t,0) = 0$ olması gerekmez.

Tanım 3.4. Bir $\beta > 0$ sayısı var öyle ki $\forall t \geq t_0$ için $\|x(t;x_0,t_0)\| < \beta$ ise (3.1) denkleminin $x(t;x_0,t_0)$ çözümüne sınırlıdır denir. Burada β her bir çözüme bağlı olabilir (Yoshizawa, 1966).

Tanım 3.5. Her $\alpha > 0$ ve her $t_0 \in I$ için bir $\beta(t_0,\alpha) > 0$ vardır öyle ki $\|x_0\| \leq \alpha$ iken her $t \geq t_0$ için $\|x(t;t_0,x_0)\| < \beta(t_0,\alpha)$ ise, (3.1) denklemin çözümlerine eş sınırlıdır denir (Yoshizawa, 1975).

Tanım 3.6. Tanım 3.5'deki β, t_0'dan bağımsız ise (3.1) denkleminin çözümleri düzgün sınırlıdır (Yoshizawa, 1975).

Tanım 3.7. Eğer $B > 0$ ve $T > 0$ reel sayıları var öyle ki (3.1) denkleminin her $x(t,t_0,x_0)$ çözümü $\forall t \geq t_0 + T$ için $\|x(t,t_0,x_0)\| < B$ eşitsizliğini sağlıyor ise, bu takdirde (3.1) denkleminin çözümleri B sınırı için mutlak sınırlıdır denir. Burada, T her bir çözüme bağlı olabilirken B çözümlerden bağımsızdır (Yoshizawa, 1975).

Tanım 3.8. Bir $B > 0$ sayısı var ve herhangi $\alpha > 0$, $t_0 \in I$ ' ya karşılık gelen $T(t_0,\alpha) > 0$ sayısı var öyle ki $\|x_0\| \leq \alpha$ iken her $t \geq t_0 + T(t_0,\alpha)$ için $\|x(t;t_0,x_0)\| < B$ sağlanıyor ise (3.1) denkleminin çözümleri B sınırı için eş mutlak sınırlıdır denir (Yoshizawa, 1975).

Tanım 3.9. Tanım 3.7'deki T, t_0'dan bağımsız ise (3.1) denkleminin çözümleri B sınırı için mutlak düzgün sınırlıdır (Yoshizawa, 1975).

Tanım 3.10. D, $\Re^n$'de sıfır vektörünü içeren bir bölge, $F(t,0) = 0$ ve $V : [t_0,\infty) \times D \to [0,\infty)$ fonksiyonu birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Eğer $(t,x) \in [t_0,\infty) \times D$ için

$$V'(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x_1}(t,x)F_1(t,x) + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,x)F_n(t,x) \leq 0$$

ise V'ye (3.1) denklemi için bir Lyapunov fonksiyonu adı verilir (Burton, 1985).

Şimdi ise (3.1) diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlığı ve sınırlılığı ile ilgili bazı teoremler verilecektir.

Teorem 3.2. (3.1) diferansiyel denklem sistemi için $0 \leq t < \infty$, $\|x\| < H$ bölgesinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $V(t,x)$ Lyapunov fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim;

(i) $V(t,0) \equiv 0,$

(ii) $a(\|x\|) \leq V(t,x)$, burada $a(r) \in CIP$'dir. (CIP; sürekli, artan ve pozitif tanımlı fonksiyonlar sınıfıdır)

(iii) $V'(t,x) \leq 0.$

Bu taktirde (3.1) sisteminin $x(t) = 0$ çözümü kararlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.3. Teorem 3.2 deki (ii) şartı $a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|)$ ile değiştirilirse, (3.1) denkleminin $x(t) = 0$ çözümü düzgün kararlıdır. Burada $a(r) \in CIP$ ve $b(r) \in CIP$ ‘dir, (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.4. Teorem 3.2 deki şartlar altında eğer $V'(t,x) \leq -c(\|x\|)$ ve $F(t,x)$ sınırlı ise, bu taktirde (3.1) diferansiyel denklem sisteminin $x(t) = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. Burada, $c(r)$, $[0,H]$ üzerinde sürekli ve pozitif tanımlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.5. Teorem 3.3 deki şartlar altında eğer $V'(t,x) \leq -c(\|x\|)$ ise, bu taktirde (3.1) denkleminin $x(t) = 0$ çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. Burada, $c(r)$, $[0,H]$ üzerinde sürekli ve pozitif tanımlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.6. $V(t,x)$ fonksiyonu, $I \times \Re^n$ üzerinde tanımlı bir Lyapunov fonksiyonu olsun öyle ki,

(i) $a(\|x\|) \leq V(t,x)$**,** $a(r) \in CI$ **, (**CI sembolü sürekli artan fonksiyonlar sınıfını temsil etmektedir) ve $r \to \infty$ için $a(r) \to \infty$**,**

(ii) $V'(t,x) \leq 0$

şartları sağlanırsa, (3.1) denkleminin çözümleri eş sınırlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.7. $V(t,x)$ fonksiyonunun $0 \leq t < \infty$, $\|x\| \geq R$**,** (R yeterince büyük) üzerinde tanımlı bir Lyapunov fonksiyonu olduğunu ve bu fonksiyonun aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim;

(i) $a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|)$**,** $a(r), b(r) \in CI$ ve $r \to \infty$ iken $a(r) \to \infty$**,**

(ii) $V'(t,x) \leq 0.$

Bu taktirde (3.1) denkleminin çözümleri düzgün sınırlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.8. Teorem 3.7 deki koşullar altında, $V'(t,x) \le -c(\|x\|)$ ($c(r)$, pozitif ve sürekli) ise, bu taktirde (3.1) denkleminin çözümleri düzgün mutlak sınırlıdır (Yoshizawa, 1966).

Tanım 3.11. Eğer bir f fonksiyonunun tanım kümesi her x elemanı için $f(x) = f(x+P)$ olacak şekilde bir $P > 0$ pozitif sayısı varsa bu f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. $f(x) = f(x+P)$ koşulunu sağlayan en küçük P pozitif sayısı varsa bu sayıya fonksiyonun periyodu denir (Lippman ve Rasmussen, 2012).

Şimdi (3.1) diferansiyel denklem sistemindeki F fonksiyonunun periyodik olduğunu, yani

$$F(t+\omega, x) = F(t,x), \;\; \omega > 0, \;\; \omega \in \Re$$

sağlandığını varsayalım.

Burada, ω, $F(t,x)$ fonksiyonunun esas periyodudur. Yukarıdaki sistemin çözümünün tek olduğunu kabul edelim (Yoshizawa, 1975).

Teorem 3.9. (3.1) denklemi bir skaler denklem ve $t \to \infty$ için sınırlı olan bir çözüme sahip ise, o zaman (3.1) denklemi $\omega-$periyodik bir çözüme sahiptir (Yoshizawa, 1975).

İspat: $\phi(t)$, (3.1) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. Burada, $\phi(t)$‘nin I üzerinde tanımlı olduğunu kabul edebiliriz. $\phi_k(t) = \phi(t+k\omega)$ olsun. Burada, $k > 0$ bir tamsayıdır. O zaman $\phi_k(t)$ de (3.1) sisteminin bir çözümüdür. $\phi(0) = \phi_1(0)$ ise $\phi(t)$ ω periyotlu bir periyodik çözümdür. $\phi(0) < \phi_1(0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her k tamsayısı için çözümün tekliğinden dolayı $\phi_k(0) < \phi_{k+1}(0)$ olduğunu görebiliriz. Benzer şeklide, $\phi(0) > \phi_1(0)$ ise her k tamsayısı için çözümün tekliğinden dolayı $\phi_k(0) > \phi_{k+1}(0)$ olur. Bu yüzden, $\{\phi_k(t)\}$ dizisi monotondur, $[0,\omega]$ üzerinde eş sürekli ve düzgün sınırlıdır. Bu ise $\{\phi_k(t)\}$ dizisinin $[0,\omega]$’da bir $\psi(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterir. Açıktır ki $\psi(t)$, (3.1) denkleminin $[0,\omega]$ üzerinde bir çözümü olup, $\phi_k(0) \to \psi(0)$ iken $\phi_k(\omega) = \phi_{k+1}(0) \to \psi(\omega)$ olur. Böylece, $\psi(0) = \psi(\omega)$ olduğundan ω periyotlu bir periyodik çözümün varlığını gösterir (Yoshizawa, 1975).

Teorem 3.10. (3.1) sisteminde $n=2$ alındığında, tüm çözümler $t\to\infty$ için mevcut ve çözümlerden biri sınırlı ise, ω periyotlu bir periyodik çözüm vardır (Yoshizawa, 1975).

Teorem 3.11. (3.1) denkleminin çözümleri B sınırı için mutlak sınırlı olsun. O zaman, $\omega-$periyotlu bir $x(t)$ periyodik çözümü vardır öyle ki her t için $|x(t)|\le B$' dir (Yoshizawa, 1975).

Teorem 3.12.

$$x'=A(t)x+b(t)$$

lineer sistemini ele alalım.

Burada, $A(t)$, $n\times n$ tipinde $\Re$'de tanımlı sürekli bir matris ve $b(t)$, $\Re$'de tanımlı sürekli bir $n-$vektördür. Ayrıca, $A(t+\omega)=A(t),\ b(t+\omega)=b(t)$'dir. O zaman, ($t\to\infty$) için sınırlı olan bir çözümün varlığı $\omega-$periyodik bir çözümün varlığını sağlar (Yoshizawa, 1975).

Şimdi

$$x'(t)=F(t,x_t) \tag{3.3}$$

fonksiyonel diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $x'(t)$, $x(u)$'nun $u=t$ noktasında türevi olsun. Ayrıca, x_t, $x_t(\theta)=x(t+\theta),\ -h\le\theta\le 0$ şeklinde tanımlanan C'nin bir elemanı ve $F(t,\varphi)\in\Re^n$, $[0,c]\times C_H$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. C_H, $\|\varphi\|\le H$ bölgesinde tanımlı $\varphi\in C$ elemanlarından oluşan kümedir. F, t'den bağımsız ve lineer olduğunda, F yerine L aldığımızda ve $L(\varphi)$, C'de sürekli ise,

$$\forall\,\varphi\in C \quad \text{için,} \quad L(\varphi)=\int_{-h}^{0}[d\eta(\theta)]\varphi(\theta)$$

yazılır.

Burada, $\eta(\theta)$ elemanları sınırlı fonksiyonlardan oluşan bir matristir (Yoshizawa, 1966).

Tanım 3.12. $A>0$ sayısı ve $x(t_0,\varphi):[t_0-h,\,t_0+A)\to\Re^n$ fonksiyonu için

(i) $t_0\le t<t_0+A$ için $x_t(t_0,\varphi)\in C_H$

(ii) $x_{t_0}(t_0,\varphi)=\varphi,$

(iii) $t_0\le t<t_0+A$ için $x(t_0,\varphi)$, (3.3) denklemini sağlar

şartları sağlanıyorsa, $x(t_0,\varphi)$ fonksiyonuna, $t_0 \geq 0,\ t = t_0$'da $\varphi \in C_H$ başlangıç koşuluyla (3.3)'ün bir çözümü denir (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.13. (3.3) denklemindeki $F(t,\varphi)$, $\forall \varphi \in C_{H_1}$, $H_1 < H$ ve $t_0, 0 \leq t_0 < c$ için t ve φ' ye göre sürekli ise (3.3) denkleminin $t = t_0$'da φ başlangıç koşullu bir çözümü vardır ve bu çözüm $t > t_0$ için sürekli bir türeve sahiptir (Yoshizawa, 1966).

Şimdi, (3.3) denkleminde $F(t,\varphi)$, $I \times C_H$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon ve $F(t,0) \equiv 0$ olsun. Ayrıca her $\alpha > 0$ için bir $L(t,\alpha) > 0$ var öyle ki $\varphi \in C_\alpha$ ise $|F(t,\varphi)| \leq L(t,\alpha)$ olur. Burada, C_α, $\|\varphi\| \leq \alpha$ bölgesindeki $\varphi \in C$ elamanlarının kümesidir ve $L(t,\alpha)$, t'de sürekli bir fonksiyondur. Bu durum, $F(t,\varphi) \in \bar{C}_0(\varphi)$ ise (yani her $\alpha > 0$ için bir $K(\alpha) > 0$ var öyle ki $\varphi,\psi \in C_\alpha$ için $|F(t,\varphi) - F(t,\psi)| \leq K(\alpha)\|\varphi - \psi\|$) sağlanır.

Tanım 3.13. Sürekli ve pozitif tanımlı bir $W : \Re^n \to [0,\infty)$ fonksiyonuna bir wedge denir (Burton, 1985).

Teorem 3.14. $V(t,\varphi)$, $t \in I,\ \|\varphi\| \leq H_1,\ 0 < H_1 < H$ üzerinde tanımlı bir Lyapunov fonksiyoneli olduğunu kabul edelim. Öyle ki,

(i) $a(\|\varphi\|) \leq V(t,\varphi) \leq b(\|\varphi\|)$, burada $a(r), b(r) \in CIP$'tir,

(ii) $V'(t,\varphi) \leq -c(\|\varphi\|)$, burada $c(r)$ sürekli ve $r > 0$ için pozitiftir,

şartları sağlanırsa (3.3) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.15.

Kabul edelim ki $|F(t,\varphi)| \leq L,\ L > 0$ olsun ve $0 \leq t < \infty,\ \|\varphi\| < H$ bölgesinde tanımlı sürekli bir $V(t,\varphi)$ Lyapunov fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde mevcut olsun;

(i) $a(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi) \leq b_1(|\varphi(0)|) + b_2(\|\varphi\|_2)$, burada $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\tau}^{0} \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(\theta) \right] d\theta \right)^{1/2}$, $a(r)$, $r \neq 0$ için sürekli ve pozitif, $b_1(r)$ ve $b_2(r)$ $r \geq 0$ için sürekli ve monoton fonksiyonlardır ve $b_1(0) = b_2(0) = 0$ ' dır.

(ii) $V'(t,\varphi) \leq -c(|\varphi(0)|)$,

burada $c(r)$, $r \neq 0$ için artan sürekli ve pozitif bir fonksiyondur. Bu taktirde (3.3) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. Burada $F(t,\varphi) \in R^n$ fonksiyonu $[0,\infty) \times C_H$ üzerinde tanımlı ve sürekli olup her $t \geq 0$ için $F(t,0) \equiv 0$ 'dır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.16. $V(t,\varphi)$, $t \in I$, $\varphi \in S$ üzerinde tanımlı bir Lyapunov fonksiyoneli olsun. Öyle ki,

(i) $a(\|\varphi\|) \leq V(t,\varphi) \leq b(\|\varphi\|)$, burada $a(r), b(r) \in CI$,($r > H$) olup pozitiftir,

(ii) $V'(t,\varphi) \leq -c(\|\varphi\|)$, burada $r > H$ için $c(r) \in CI$ 'dır,

şartları sağlanırsa (3.3) denkleminin çözümleri düzgün sınırlı ve düzgün mutlak sınırlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.17. $V(t,\varphi)$, $t \in I$, $\varphi \in S^*$ (burada S^* , $\varphi \in C$ 'nin $|\varphi(0)| \geq H$ koşulunu sağlayan kümesidir) üzerinde tanımlı bir Lyapunov fonksiyoneli olsun. Öyle ki,

(i) $a(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi) \leq b_1(|\varphi(0)|) + b_2(\|\varphi\|)$, burada $a(r), b_1(r), b_2(r) \in CI$, ,($r > H$) olup pozitiftirler ve $r \to \infty$ iken $a(r) - b_2(r) \to \infty$ 'dur.

(ii) $V'(t,\varphi) \leq 0$

şartları sağlanırsa (3.3) denkleminin çözümleri düzgün sınırlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.18. Her $K \subseteq C$ kompakt kümesi için bir $L(K) > 0$ vardır öyle ki,

$$|f(t,\phi) - f(t,\psi)| \leq L(K)\|\phi - \psi\|, \ \phi, \psi \in K$$

ve

$$f(t+\omega,\phi) = f(t,\phi)$$

olacak şekilde bir $\omega > 0$ var olduğunu kabul edelim. (3.3)'ün çözümleri β sınırı ile düzgün sınırlı ve düzgün mutlak sınırlı ise (3.3)'ün β ile sınırlı bir periyodik çözümü vardır (Chukwu, 1978).

Teorem 3.19. $F(t,\varphi)\in\overline{C_0}(\varphi)$ ve $F(t,\varphi)$, t' ye göre $\omega-$periyodik bir fonksiyon ($\omega\geq h$) yani, $F(t+\omega,\varphi)=F(t,\varphi)$ olduğunu kabul edelim. Şayet, (3.3) denkleminin çözümleri B sınırı için düzgün sınırlı ve düzgün mutlak sınırlı ise (3.3) denkleminin B ile sınırlı olan $\omega-$ periyotlu bir periyodik çözümü vardır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.20. $F(t,\varphi)\in\overline{C_0}(\varphi)$ ve $F(t,\varphi)$, t' ye göre $\omega-$periyodik bir fonksiyon ($\omega\geq h$) ve her $\alpha>0$ için bir $L(\alpha)>0$ vardır öyle ki $\varphi\in C_\alpha$, $|F(t,\varphi)|\leq L(\alpha)$ eşitsizliğini sağlar. Üstelik $t\in I,\varphi\in S^*$'da tanımlı bir $V(t,\varphi)$ sürekli Lyapunov fonksiyoneli var olduğunu kabul edelim. Öyle ki,

(i) $a(|\varphi(0)|)\leq V(t,\varphi)\leq b(\|\varphi\|)$ burada $a(r),b(r)\in CI$,($r\geq H$) olup pozitiftir ve $r\to\infty$ iken $a(r)\to\infty$ 'dur.

(ii) $V'(t,\varphi)\leq -c(|\varphi(0)|)$, burada $c(r)$, $r\geq H$ için sürekli ve pozitif bir fonksiyon

şartlarını sağlasın.

Kabul edelim ki $H_1>0$, $H_1>H$ vardır öyle ki

$$hL(\gamma^*)<H_1-H$$

olsun. Burada, $\gamma^*>0$ aşağıdaki şekilde tanımlanan bir sabittir.

$V(t,\varphi)$' nin yukarıdaki koşulları altında**,** $\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\gamma>0$ vardır öyle ki $b(H_1)\leq a(\alpha)$, $b(\alpha)\leq a(\beta)$ ve $b(\beta)\leq a(\gamma)$ sağlanır. γ^* ise $b(\gamma)\leq a(\gamma^*)$ ile tanımlıdır.

Yukardaki koşullar altında (3.3) denkleminin $\omega-$ periyotlu bir periyodik çözümü vardır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.21.

$$x''=f(t,x,x')$$

sistemini göz önüne alalım.

Kabul edelim ki α(t) ve $\beta(t)$, I üzerinde tanımlı sürekli türevlenebilir, türevleri ve kendisi I 'da sınırlı fonksiyonlar olsun. Farzedelim ki $\alpha(t)\leq\beta(t)$, $a''(t)\geq f(t,\alpha(t),\alpha'(t))$ ve $\beta''(t)\leq f(t,\beta(t),\beta'(t))$ olsun. Ayrıca D, $0\leq t<\infty$, $\alpha(t)\leq x\leq\beta(t)$ aralığında tanımlı bir bölge olsun. $D_1=\{(t,x,y);\ (t,x)\in D, y\geq K\}$ ve $D_2=\{(t,x,y);\ (t,x)\in D, y\leq -K\}$ ($K>0$, burada yeterince büyük sayıdır) tanımlanan bölgeler olsun.

Ayrıca, $D_i,\ i=1,2$ üzerinde tanımlı $V_i(t,x,y)$ Lyapunov fonksiyonları vardır, öyle ki,

(i) $V_i(t,x,y) \le b(|y|),\ \ i=1,2$, burada $b(\mathrm{r})>0$ süreklidir,

(ii) Her t,x için, $|y|\to\infty$ için $V_i(t,x,y)\to\infty$ düzgün yakınsar,

(iii) D_1 ve D_2 bölgelerinin içinde,

$$V_1'(t,x,y)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V_1(t+h,x+hy,y+hf(t,x,y))-V_1(t,x,y)\}\ge 0,$$

$$V_2'(t,x,y)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V_2(t+h,x+hy,y+hf(t,x,y))-V_2(t,x,y)\}\le 0.$$

şartları sağlandığında yukarıdaki denklem bir çözüme sahiptir öyle ki $|x(t)|+|x'(t)|$, her $t\ge 0$ için sınırlıdır (Yoshizawa, 1975).

Aşağıdaki örnek Yoshizava (1975) kitabından alınmıştır.

Örnek 3.1.

$$x'+f(x,x')+g(t,x)=p(t)$$

denklemini göz önüne alalım.

(a) $f(x,y)$ ve $g(t,x)$ yerel bir Lipschitz şartını sağlar ve $p(t)$, $\Re$ ’de süreklidir.

(b) $g(t,x)$ ve $p(t)$, t ’de $\omega-$ periyodik fonksiyonlardır.

(c) $f(x,y)y\ge 0$,

(d) Her t,x için $\int_0^x g(t,u)du=G(t,x)>-c$ ’dir. Burada, c sıfırdan büyük bir sabittir ve $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|\Big/\sqrt{G(t,x)+c}$ sınırlıdır.

(e) $a<b$ olacak şekilde a,b sabitleri vardır öyle ki,

$$\begin{cases}0\le f(a,0)+g(t,a)-p(t)\\ 0\ge f(b,0)+g(t,b)-p(t)\end{cases}$$

şartlarının sağlandığını ve ayrıca, $-\infty<u<\infty$ için bir $\lambda(u)>0$ sürekli fonksiyonu var olduğunu kabul edelim öyle ki $|f(x,y)|\le\lambda(y)$, $\int^{-\infty}\frac{u}{\lambda(u)+m}du=\infty$ ve

$\int\limits^{\infty} \frac{u}{\lambda(u)+m} du = \infty$ olup, burada her $t \in \Re$ ve $x \in [a,b]$ için $|g(t,x)| + |p(t)| \leq m$ dir. O zaman verilen denklem $\omega-$ periyodik bir çözüme sahiptir.

Keyfi bir $T > 0$ için, $0 \leq t \leq T$, $|x| < \infty, |y| < \infty$ aralığında

$$x' = y,$$
$$y' = -f(x,y) - g(t,x) + p(t)$$

sistemini göz önüne alalım.

$0 \leq t \leq T$, $x^2 + y^2 \geq K^2$ tanım kümesinde,

$$W(t,x,y) = \exp\left\{ \sqrt{2(G(t,x)+c)+y^2} - \int_0^t |p(s)| ds - kt \right\}$$

fonksiyonu göz önüne alalım. Burada, $\left| \frac{\partial G}{\partial t} \right| \Big/ \sqrt{G(t,x)+c} \leq k$ 'dır. O zaman, $W'(t,x,y) \leq 0$ 'dır.

$W(t,x,y)$ fonksiyonunu kullanarak, $|x(t)|$ 'nin sınırlılığı aracılığıyla $|y(t)|$ 'nin sınırlılığını gösterebiliriz. Bu yüzden verilen denklemin tüm çözümleri $t = T$ 'ye sürdürülebilirdir. T keyfi bir sabit olduğundan, (gelecekte) $t \to \infty$ 'da tüm çözümler vardır.

$\alpha(t) = a$ ve $\beta(t) = b$ olsun. $V_1(t,x,y)$ ve $V_2(t,x,y)$ Lyapunov fonksiyonlarını,

$$V_1(t,x,y) = \exp\left\{ x + \int_K^y \frac{u}{\lambda(u)+m} du \right\}$$
$$V_2(t,x,y) = \exp\left\{ x + \int_{-K}^y \frac{u}{\lambda(u)+m} du \right\}$$

şeklinde tanımladığımızda Teorem 3.21'in tüm şartları sağlanır. Bu taktirde verilen denklemin bir periyodik çözümünün var olduğunu görürüz (Yoshizawa, 1975).

Örnek 3.2. $x'' + k\sin x = p(t), k > 0$ özel durumunu göz önüne alındığında, $p(t)$, $\omega-$ periyodik bir fonksiyon ve $|p(t)| \leq k$ ise bu denklem $\omega-$ periyodik bir çözüme sahiptir (Yoshizawa, 1975).

$$y' = f(t,x) \tag{3.4}$$

otonom olmayan vektör diferansiyel denklemini ele alalım.

Burada $f(t,x)$, her $(t,x)\in E^1\times E^2$ için sürekli olup x'e göre Lipschitz şartını sağlayan ω - periyodik bir fonksiyondur ($f(t+\omega,x)\equiv f(t,x)$).

Bu tür problemlerin salınımlı çözümlerinin asimptotik davranışları, salınımların incelenmesi için genel metotları geliştirmede önemli bir rol oynar. Bunlar ω- periyodik çözümlerle tanımlanır ve

$$x(0)=x(\omega)$$

sınır koşuluyla karekterize edilebilir. Zorlamalı salınımın oluşması için gereken basit kriteri aşağıda verelim.

Şayet, (3.4) global asimptotik kararlı olan sınırlı bir çözüme sahip ise bu çözüme son derece (extremely) kararlıdır denir. Bu durumda, tüm çözümler sınırlıdır (Reissig ve ark. 1974).

Teorem 3.22. Kabul edelim ki (3.4) sistemi (extremely) kararlı ve $f(t,x)$, t'de ω-periyodik bir fonksiyon olsun. O zaman, (3.4) denkleminin kesinlikle bir ω- periyodik çözümü vardır ve diğer tüm çözümler $t\to\infty$ için bu periyodik çözüme yakınsar (Reissig ve ark. 1974).

Teorem 3.23.

$$x'=f(t,x) \quad [\ f(t+\omega,x)\equiv f(t,x) \text{ ,sürekli}]$$

vektör diferansiyel denkleminde f fonksiyonu, şayet

$$f=A(t)x+\sum_{K=1}^{k} g_k(t,x)$$

şeklinde toplamsal olarak yazılabiliyorsa (3.4) denkleminin en az bir $\omega-$ periyodik çözümü vardır.

Burada,

$A(t+\omega)\equiv A(t)$, $g_k(t+\omega,x)\equiv g_k(t,x)$ sürekli fonksiyonlar ve aşağıdaki özellikler sağlansın;

a) $x'=A(t)x$ homojen lineer denklemi, başlangıç şartsız ω periyotlu çözüme sahip değildir.

b) $x'=A(t)x+\sum_{K=1}^{k} u^K g_k(t,x),\ 0\le\mu\le 1$, denkleminin $\omega-$ periyodik çözümleri için μ'den bağımsız bir sınır vardır (Reissig ve ark. 1974).

Teorem 3.24.

$$\dot{x} = f(t,x) \;\; [\, f(t+\omega, x) \equiv f(t,x) \,]$$

denkleminde f fonksiyonu, şayet

$$f = A(t)x + g(t,x)$$

şeklinde yazılabiliyorsa (3.4) denkleminin en az bir $\omega -$ periyodik çözümü vardır.

Burada,

$A(t+\omega) \equiv A(t),\; g\;(t+\omega, x) \equiv g\;(t,x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olup aşağıdaki özelliklere sahiptir:

a) $x' = A(t)x$ homojen lineer denklemi, başlangıç şartsız ω periyotlu çözüme sahip değildir.

b) $0 \le \mu \le 1$ aralığında tanımlı ve sürekli $g(t; x, \mu) \equiv g(t+\omega; x, \mu)$ fonksiyonu vardır.

Burada, $g(t; x, 0) \equiv 0,\; g(t; x, 1) \equiv g(t,x)$’dir

$x' = A(t)x + g(t; x, \mu),\; 0 \le \mu \le 1$ sınırlıdır (Reissig ve ark. 1974).

4. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT VE DEĞİŞKEN GECİKMELİ BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Giriş ve Literatür bildirişleri bölümünde ifade edildiği gibi ilgili literatürde birçok diferansiyel denklem modelinin periyodik çözümlerinin davranışları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan,

Yoshizawa (1966) ikinci mertebeden gecikmeli,

$$x'' + \phi(t, x') + f(x(t-\tau)) = p(t)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne almış ve $\omega-$periyodik çözümlerinin varlığını Lyapunov metodu yardımıyla incelemiştir.

Zhao ve ark. (1994) yaptığı çalışmada bir uygulama olarak ikinci mertebeden sabit gecikmeli

$$x''(t) + ax'(t) + g(x(t-\tau)) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin $\omega-$periyodik çözümlerinin varlığı için Lyapunov metodu aracılığıyla yeter şartlar vermiştir.

Ayrıca, Tunç ve Yazgan (2013) ikinci mertebeden çoklu gecikmeli

$$x''(t) + [f(x(t), x'(t)) + g(x(t), x'(t))x'(t)]x'(t)$$

$$+h(x(t)) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x(t-\tau_i)) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar elde etmiştir.

4.1. İkinci Mertebeden Sabit Gecikmeli Bir Diferansiyel Denklemin Periyodik Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde ilk olarak yukarıda verilen çalışmalar ve ilgili literatür dikkate alınarak ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli

$$[a(t)x']' + \phi(t, x') + h(t, x'(t-\tau)) + g(x) + f(x(t-\tau)) = e(t, x, x') \qquad (4.1)$$

diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Burada $t \in \Re^+$, $\Re^+ = [0, \infty)$, $x \in \Re, \Re = (-\infty, \infty)$, $a(t)$ sürekli türevlenebilir, pozitif ve $\omega-$periyodik bir fonksiyon, ϕ, h ve e bağlı bulundukları değişkenlere göre sürekli ve t'ye göre ω- periyodik fonksiyonlardır. Ayrıca $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

Söz konusu olan çalışmalardaki sonuçlardan yola çıkarak Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla (4.1) denkleminin $\omega-$periyodik çözümlerinin varlığı araştırılacaktır.

(4.1) denkleminden aşağıdaki sistemi yazalım;

$$x' = y,$$

$$y' = -\frac{a'(t)}{a(t)}y - \frac{1}{a(t)}\phi(t,y) - \frac{1}{a(t)}h(t,y(t-\tau)) - \frac{1}{a(t)}g(x) - \frac{1}{a(t)}f(x)$$

$$+\frac{1}{a(t)}\int_{-\tau}^{0} f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \frac{1}{a(t)}e(t,x,y). \tag{4.2}$$

(4.2) diferansiyel denklem sisteminin periyodik çözümlerinin varlığına dair aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.1. (4.2) sistemi için aşağıdaki şartlar sağlansın;

(i) $a_0 \ge a(t) \ge 1,\ a'(t) \ge 0,\ t \in \Re^+$ ' dır,

(ii) $\alpha,\ A$ pozitif sabitler ve $|y| \ge A$ için $\dfrac{\phi(t,y)}{y} > \alpha a(t) > 0,\ (y \ne 0),\ t \in \Re^+,$

$|y| \ge A$ için $\dfrac{h(t,y(t-\tau))}{y} \ge b_0 > 0,\ \ (y \ne 0, b_0 \ge 1,\ b_0 \in \Re)$ dır,

(iii) $|x| \to \infty$ için $f(x)\mathrm{sgnx} \to \infty$, $|f'(x)| \le L,\ \ L > 0,\ L, x \in \Re,$

(iv) $|e(t,x,y)| \le \dfrac{\alpha a(t)|y|}{4},\ t \in \Re^+,\ x, y \in \Re,$

(v) $|x| \to \infty$ için $g(x)\operatorname{sgn} x \to \infty$, $|g'(x)| \le L_0,\ \ L_0 > 0,\ L_0, x \in \Re.$

O zaman bir $\tau_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki $0 \le \tau \le \tau_0$ için (4.2) sistemi ω-periyodik bir çözüme sahiptir.

İspat. Şimdi bu sistem için uygun Lyapunov fonksiyonelini $V_0 = V_0(t, x_t, y_t)$ olmak üzere

$$V_0 = \frac{2}{a(t)}\int_0^x f(s)ds + \frac{2}{a(t)}\int_0^x g(s)ds + y^2$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_s^0 y^2(\theta)d\theta\right)ds + L\int_{-\tau}^{0}\left(\int_s^0 |y(\theta)|d\theta\right)ds$$

şeklinde tanımlayalım.

V_0 Lyapunov fonksiyelinin pozitif tanımlı olduğu ayrıca alttan ve üstten bu fonksiyoneli sınırlayacak 'wedge' lerin kolaylıkla bulunabileceği açıktır.

Verilen Lyapunov fonksiyonelinin (4.2) sistemi boyunca türevi alındığında,

$$\frac{d}{dt}V_0 = -\frac{2a'(t)}{a(t)}\int_0^x f(s)ds + \frac{2}{a(t)}f(x)y$$

$$-\frac{2a'(t)}{a(t)}\int_0^x g(s)ds + \frac{2}{a(t)}g(x)y - \frac{2a'(t)}{a(t)}y^2$$

$$-\frac{2}{a(t)}\frac{\phi(t,y)}{y}y^2 - \frac{2}{a(t)}h(t,y(t-\tau))y - \frac{2}{a(t)}g(x)y$$

$$-\frac{2}{a(t)}f(x)y + \frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^0 f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta$$

$$+\frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^0 y^2(t)d\theta$$

$$-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^0 y^2(t+\theta)d\theta + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^0 |y(t+\theta)|d\theta$$

$$= -\frac{2a'(t)}{a(t)}\int_0^x f(s)ds - \frac{2a'(t)}{a(t)}\int_0^x g(s)ds$$

$$-\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{\phi(t,y)}{y}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{h(t,y(t-\tau))}{y}y^2$$

$$+\frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^0 f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^0 y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^0 y^2(t+\theta)d\theta + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^0 |y(t+\theta)|d\theta$$

$$\leq -\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{\phi(t,y)}{y}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{h(t,y(t-\tau))}{y}y^2$$

$$+\frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^0 f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \frac{\alpha}{2}y^2 + L\tau|y|$$

$$-L\int_{-\tau}^0 |y(t+\theta)|d\theta + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^0 y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^0 y^2(t+\theta)d\theta \tag{4.3}$$

elde edilir. Teorem 4.1' in (i)-(v) şartları ve $-\frac{2a'(t)}{a(t)} \le 0$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\frac{dV_0}{dt} \le -2\alpha y^2 + \frac{2}{a(t)} \int_{-\tau}^{0} |f'(x(t+\theta))||y(t)||y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2} y^2 + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0} |y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau} \int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau} \int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta$$

$$\le -2\alpha y^2 + 2\int_{-\tau}^{0} L|y(t)||y(t+\theta)|\,d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2} y^2 + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0} |y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau} \int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau} \int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta$$

elde edilir.

$\tau < \frac{\alpha}{2L}$ olduğunu varsayalım. $L < \frac{\alpha}{2\tau}$ yazılabilir. Buna bağlı olarak

$$\frac{dV_0}{dt} \le -\int_{-\tau}^{0} \left[\frac{\alpha}{2\tau} y^2(t) - \frac{\alpha}{\tau}|y(t)||y(t+\theta)| + \frac{\alpha}{2\tau} y^2(t+\theta) \right] d\theta$$

$$-\frac{3}{2}\alpha y^2 + \frac{\alpha}{2} y^2 + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0} |y(t+\theta)|d\theta + \frac{\alpha}{2\tau} \int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta.$$

$$= -\frac{\alpha}{2\tau} \int_{-\tau}^{0} \left[|y(t)| - |y(t+\theta)|\right]^2 d\theta - \alpha y^2 + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0} |y(t+\theta)|d\theta$$

elde edilir. $\tau < \frac{\alpha}{2L}$ ve $|y(t)| \ge c$ olduğundan

$$\frac{dV_0}{dt} \le -\frac{1}{2}\alpha y^2(t)$$

elde edilir.

I. Durum. $|y(t)| \le c$ olduğunu varsayalım. B_0, pozitif bir sayı olsun. Bu taktirde eğer $|y| \le c,\ c \in \Re,\ c > 0$ ise,

$$\frac{2|y||\phi(t,y)|}{a(t)} + \frac{|\phi(t,y)|}{a(t)} + \frac{|h(t,y(t-\tau)|}{a(t)} \le B_0 \tag{4.4}$$

olduğu açıktır.

$x(t) \ge d,\ d \in \Re,\ d > 0$ olduğunu kabul edelim ve

$$V(t,x_t,y_t) = V_0(t,x_t,y_t) + y(t)$$

olsun. Bu durumda $|y(t)| \le c$, $|x(t)| \ge d$ olduğu açıktır. V fonksiyonelinin türevi alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V &= \frac{d}{dt}V_0 + y' \\
&= \frac{dV_0}{dt} - \frac{a'(t)}{a(t)}y - \frac{1}{a(t)}\phi(t,y) - \frac{1}{a(t)}(h(t,y(t-\tau)) \\
&\quad - \frac{1}{a(t)}g(x) - \frac{1}{a(t)}f(x) + \frac{1}{a(t)}\int_{-\tau}^{0} f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{e(t,x,y)}{a(t)} \\
&\le -\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2 - \frac{2}{a(t)}\phi(t,y)y - \frac{2}{a(t)}(h(t,y(t-\tau))y \\
&\quad + \frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^{0} f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta \\
&\quad - \frac{a'(t)}{a(t)}y - \frac{1}{a(t)}\phi(t,y) - \frac{1}{a(t)}(h(t,y(t-\tau)) \\
&\quad - \frac{1}{a(t)}g(x) - \frac{1}{a(t)}f(x) + \frac{1}{a(t)}\int_{-\tau}^{0} f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{e(t,x,y)}{a(t)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1’ in şartları, (4.4) eşitsizliği ve yukarıda verilen kabullerden,

$$\frac{dV}{dt} \leq \left[\frac{2|y||\phi(t,y)|}{a(t)} + \frac{1}{a(t)}|\phi(t,y)| + \frac{1}{a(t)}|h(t,y(t-\tau))| \right]$$

$$+\frac{\alpha}{2}c^2 - \left[\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta - 2L\int_{-\tau}^{0} |y(t)||y(t+\theta)|d\theta + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta \right]$$

$$+\frac{2\alpha}{2}c^2 + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0} |y(t+\theta)|d\theta - \frac{a'(t)}{a(t)}y$$

$$-\frac{1}{a(t)}g(x) - \frac{1}{a(t)}f(x)$$

$$+L\int_{-\tau}^{0} |y(t+\theta)|d\theta + \frac{|e(t,x,y)|}{a(t)}$$

$$\leq B_0 + \frac{\alpha c^2}{2} - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} \left[|y(t)| - |y(t+\theta)| \right]^2 d\theta + \alpha c^2 + L\tau c + a_0 c$$

$$+\frac{\alpha c}{4} - \frac{1}{a(t)}g(x) - \frac{1}{a(t)}f(x)$$

elde edilir. $a_0 \geq a(t) \geq 1$ olduğundan,

$$\frac{dV}{dt} \leq B_0 + \frac{\alpha c^2}{2} + \alpha c^2 + a_0 c + \frac{3\alpha c}{4} - \left[g(x) + f(x) \right]$$

bulunur. $|x| \to \infty$ için $f(x)\text{sgnx} \to \infty$ ve $|x| \to \infty$ için $g(x)\text{sgnx} \to \infty$ olduğundan $|x| \to \infty$ için

$$\frac{dV}{dt} \leq -1$$

sonucuna ulaşılabileceği açıkça görülür.

II. Durum. Şimdi ise

$$|y(t)| \leq c,\ x(t) \leq -d,\ \ c,d \in \Re,\ c > 0,\ \ d > 0$$

olduğunu varsayalım.

Eğer $|y| \leq c$ ise, $a(t)$' nin sınırlı olması nedeniyle (4.4) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Lyapunov fonksiyonelini

$$V(t,x_t,y_t) = V_0(t,x_t,y_t) - y$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, V' nin (4.2) sistemi boyunca türevi alındığında,

$$\frac{d}{dt}V=\frac{d}{dt}V_0-\frac{d}{dt}y$$

$$=\frac{dV_0}{dt}+\frac{a'(t)}{a(t)}y+\frac{1}{a(t)}\phi(t,y)+\frac{1}{a(t)}(h(t,y(t-\tau))$$

$$+\frac{1}{a(t)}g(x)+\frac{1}{a(t)}f(x)-\frac{1}{a(t)}\int_{-\tau}^{0}f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta$$

$$-\frac{e(t,x,y)}{a(t)}$$

olarak bulunur. (4.3) eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}V\leq-\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2-\frac{2}{a(t)}\phi(t,y)y-\frac{2}{a(t)}(h(t,y(t-\tau))y$$

$$+\frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^{0}f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta+\frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta$$

$$-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t+\theta)d\theta+L\tau|y|-L\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{a'(t)}{a(t)}y+\frac{1}{a(t)}\phi(t,y)+\frac{1}{a(t)}(h(t,y(t-\tau))$$

$$+\frac{1}{a(t)}g(x)+\frac{1}{a(t)}f(x)-\frac{1}{a(t)}\int_{-\tau}^{0}f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta$$

$$-\frac{e(t,x,y)}{a(t)}$$

elde edilir. Teorem 4.1’ in (ii)-(v) şartları yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}V\leq-\frac{2}{a(t)}\phi(t,y)y+2L\int_{-\tau}^{0}|y(t)||y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2}c^2+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta-\left[\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t+\theta)d\theta\right]$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta+L\tau|y|-L\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta$$

$$+\frac{a'(t)}{a(t)}y+\frac{1}{a(t)}|\phi(t,y)|+\frac{1}{a(t)}|h(t,y(t-\tau))|$$

$$+\frac{1}{a(t)}g(x)+\frac{1}{a(t)}f(x)$$

$$+\frac{1}{a(t)}\int_{-\tau}^{0}|f'(x(t+\theta))||y(t+\theta)|d\theta+\frac{\alpha c}{4}$$

elde edilir.

$a_0 \geq a(t) \geq 1$ şartı kullanıldığında, Teorem 4.1' in şartlarına bağlı olarak,

$$\frac{d}{dt}V \leq B_0+\frac{\alpha c^2}{2}-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[|y(t)|-|y(t+\theta)|\right]^2 d\theta+\alpha c^2+L\tau c+\beta c$$

$$+\frac{\alpha c}{4}+\frac{1}{a(t)}g(x)+\frac{1}{a(t)}f(x)$$

$$\leq B_0+\frac{\alpha c^2}{2}+\alpha c^2+\beta c+\frac{3\alpha c}{4}+g(x)+f(x)$$

elde edilir. $|x|\to\infty$ için $f(x)\operatorname{sgnx}\to\infty$ ve $|x|\to\infty$ için $g(x)\operatorname{sgnx}\to\infty$ şartları gereği x negatifken $f(x)$ ve $g(x)$ de negatif olacağından,

$$\frac{dV}{dt}\leq -1$$

elde edilir.

III. Durum. Şimdi ise

$$|x(t)|\leq d,\ y(t)\geq c,\ c,d\in\Re,\ c>0,\ \ d>0$$

olsun.

Lyapunov fonksiyonelini,

$$V(t,x_t,y_t)=V_0(t,x_t,y_t)+\frac{c}{d}x$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, V fonksiyonelinin (4.2) sistemi boyunca t' ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dt}V=\frac{d}{dt}V_0+\frac{c}{d}y$$

$$\leq -\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2-\frac{2}{a(t)}\frac{\phi(t,y)}{y}y^2-\frac{2}{a(t)}\frac{(h(t,y(t-\tau))}{y}y^2$$

$$+\frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^{0}f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta+\frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta$$

$$-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t+\theta)d\theta+L\tau|y|-L\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta+\frac{c}{d}y$$

$$\leq -2\alpha y^2 + 2L\int_{-\tau}^{0}|y(t)||y(t+\theta)|d\theta + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta$$

$$-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t+\theta)d\theta + \frac{\alpha}{2}|y| + \frac{c}{d}y$$

$$\leq -2\alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}y^2 - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[|y(t)| - |y(t+\theta)|\right]^2 d\theta + \alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}|y| + \frac{c}{d}y$$

$$\leq -2\alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}y^2 + \alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}|y| + \frac{c}{d}y$$

$$\leq -\frac{1}{2}\alpha y^2 + \frac{c}{d}y \leq -\frac{1}{4}\alpha y^2$$

elde edilir.

IV. Durum: Şimdi de

$$|x(t)| \leq d,\ \ y(t) \leq -c,\ \ c, d \in \Re,\ c > 0,\ \ d > 0$$

olsun. Lyapunov fonksiyonelini,

$$V(t, x_t, y_t) = V_0(t, x_t, y_t) - \frac{c}{d}x$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, V fonksiyonelinin (4.2) sistemi boyunca t'ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}V_0 - \frac{c}{d}y$$

$$\leq -\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{\phi(t,y)}{y}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{(h(t, y(t-\tau))}{y}y^2$$

$$+\frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^{0}f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta$$

$$-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t+\theta)d\theta + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta - \frac{c}{d}y$$

$$\leq -2\alpha y^2 + 2L\int_{-\tau}^{0}|y(t)||y(t+\theta)|d\theta + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}y^2(t)d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta$$

$$-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta - \frac{c}{d}y$$

$$\leq -2\alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}y^2 - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[|y(t)| - |y(t+\theta)|\right]^2 d\theta + \alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}|y| - \frac{c}{d}y$$

$$\leq -2\alpha y^2 + \frac{\alpha}{2}y^2 + \alpha y^2 - \frac{c}{d}y$$

$$\leq -\frac{1}{2}\alpha y^2 - \frac{c}{d}y \leq -\frac{1}{4}\alpha y^2$$

elde edilir.

V. Durum. Şimdi ise $c, d \in \Re,\ c > 0,\ d > 0$ için $x(t) \geq d$, $y(t) \geq c$ ya da $x(t) \leq -d$, $y(t) \leq -c$ olduğunu kabul edelim. Lyapunov fonksiyoneli

$$V(t, x_t, y_t) = V_0(t, x_t, y_t) + c$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, $x(t) \geq d$, $y(t) \leq -c$ ya da $x(t) \leq -d$, $y(t) \geq c$ olduğunda ise Lyapunov fonksiyoneli,

$$V(t, x_t, y_t) = V_0(t, x_t, y_t) - c$$

olarak tanımlansın. Bu iki durum için, c pozitif bir sabit olduğundan, V Lyapunov fonksiyonelinin (4.2) sistemi boyunca t ’ ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}V_0$$

$$\leq -\frac{2a'(t)}{a(t)}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{\phi(t,y)}{y}y^2 - \frac{2}{a(t)}\frac{(h(t, y(t-\tau))}{y}y^2$$

$$+\frac{2}{a(t)}y\int_{-\tau}^{0} f'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \frac{2}{a(t)}e(t,x,y)y$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta - \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta + L\tau|y| - L\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta$$

bulunur. Burada Teorem 4.1 şartları ve yukarıdaki kabuller kullanıldığında

$$\frac{d}{dt}V \leq -2\alpha y^2 + 2L\int_{-\tau}^{0}|y(t)||y(t+\theta)|\,d\theta + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta$$

$$+\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t)d\theta-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0} y^2(t+\theta)d\theta$$

$$\leq -2\alpha y^2+\frac{\alpha}{2}y^2-\frac{\alpha}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[|y(t)|-|y(t+\theta)|\right]^2 d\theta+\alpha y^2+\frac{\alpha}{2}|y|$$

$$\leq -2\alpha y^2+\frac{\alpha}{2}y^2+\alpha y^2$$

$$=-\frac{1}{2}\alpha y^2\leq -\frac{1}{4}\alpha y^2$$

elde edilir.

O halde yukarıdaki her iki durum için de $V(t,x_t,y_t)$ Lyapunov fonksiyonelinin Teorem 3.20' nin (iii) şartını sağladığı görülebilir. Ayrıca

$$\frac{2}{a(t)}\int_0^x f(s)ds+\frac{2}{a(t)}\int_0^x g(s)ds+y^2-c$$

$$\leq 2\int_0^x f(s)ds+2\int_0^x g(s)ds+y^2-c$$

$$\leq V(t,x_t,y_t)\leq 2\int_0^x f(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}+2\int_0^x g(s)ds$$

$$+c+\frac{a}{2\tau}\int_{-\tau}^{0}(\int_{\tau}^{0} y^2(\theta)d\theta)ds+L\int_{-\tau}^{0}(\int_{\tau}^{0}|y(\theta)|d\theta)ds$$

olduğu açıktır. Buna bağlı olarak Teorem 3.22' nin (iv) şartının sağlatılabileceği kolaylıkla gösterilebilir.

Böylece, Teorem 3.22' nin bütün şartlarının yeterince küçük τ' lar için sağlandığı görülmektedir. Bu durumda, (4.2) sisteminin en az bir $\omega-$periyodik çözümü vardır.

Örnek 4.1. (4.2) sistemindeki fonksiyonlar için aşağıdaki seçimi yapalım:

$\phi(t,y)=(3+\sin t)y$, $a(t)=1$,

$h(t,y(t-\tau))=3+\sin t+y^2(t-1)$,

$f(x)=x$, $g(x)=2x$ ve

$e(t,x,y)=\frac{1}{8}y\sin t.$

Bu fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

$$\frac{\phi(t,y)}{y} = 3 + \sin t > \alpha = 1,$$

$$h(t, y(t-\tau)) = 3 + \sin^2 t + y^2(t-1) \geq 3 = b_0 > 0,$$

$$|x| \to \infty \text{ için } f(x)\operatorname{sgn} x = x \operatorname{sgn} x \to \infty,$$

$$|f'(x)| = |x| = 1 \leq 2 = L,$$

$$|e(t,x,y)| = \frac{1}{8}|y||\sin t| \leq \frac{\alpha|y|}{4} = \frac{|y|}{4},\ \alpha = 1,$$

$$|x| \to \infty \text{ için } g(x)\operatorname{sgn} x = 2x \operatorname{sgn} x \to \infty \text{ ve } |g'(x)| = |2| = 2 \leq L.$$

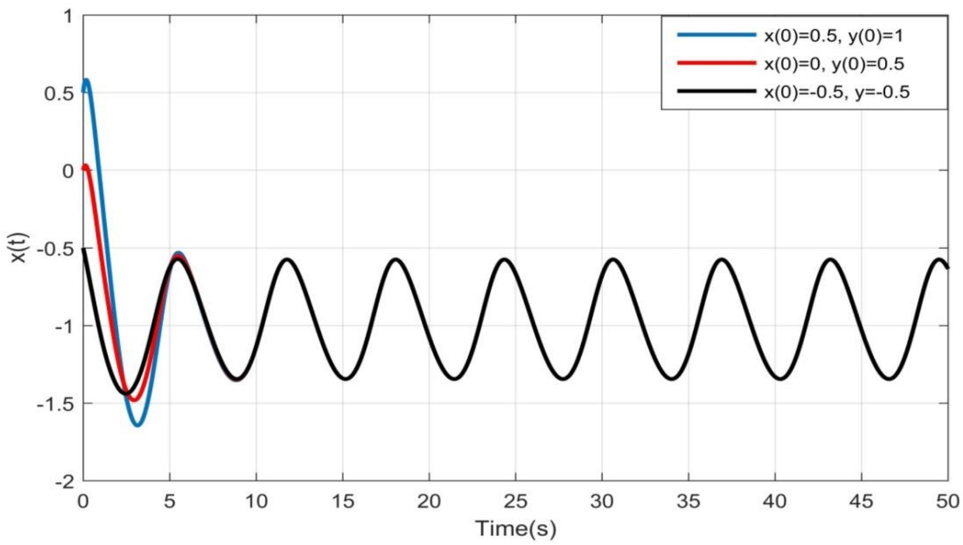
Ayrıca, $a(t) = 1$ ve $a'(t) = 0$ olduğu açıktır.

O halde,

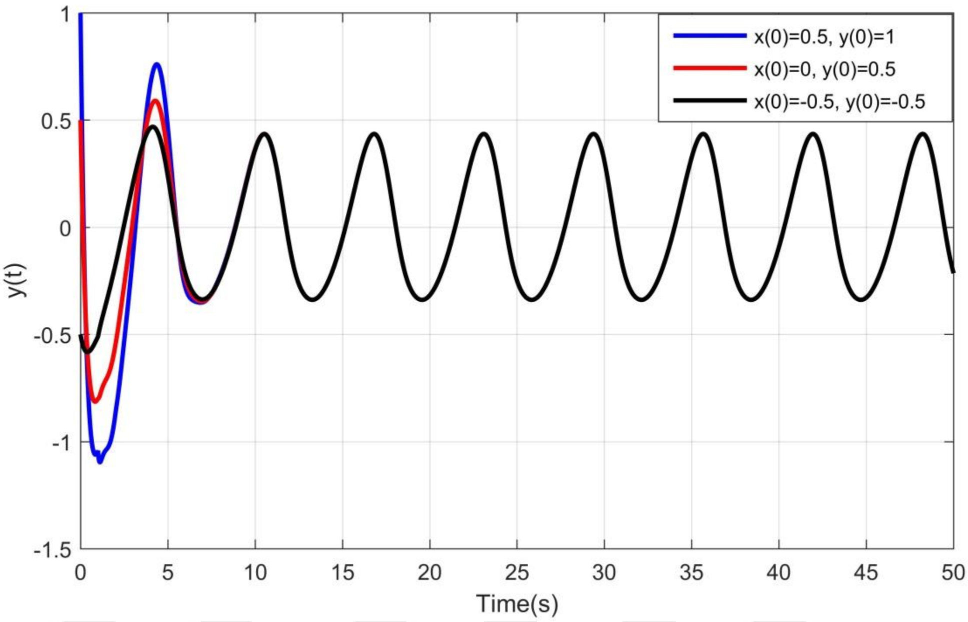
$$x'' + (3 + \sin t)x' + 3 + \sin t + x'^2(t-1), +2x + x(t-1) = \frac{1}{8}x' \sin t$$

diferansiyel denklemi Teorem 4.1' in (i)-(v) şartlarını sağladığından bu denklem en az bir $2\pi -$periyodik çözüme sahiptir.

Yukarıdaki örnekte verilen denklemin çözümlerinin grafikleri aşağıda verilmektedir (Şekil 4.1; 4.2).



Şekil 4.1 $x(t)$ çözümüne ait yörüngelerin grafiği.



Şekil 4.2 $y(t)$ çözümüne ait yörüngelerin grafiği.

4.2. İkinci Mertebeden Değişken Gecikmeli Bir Diferansiyel Denklemin Periyodik Çözümlerinin Varlığı

Bu kesimde tekrar Yoshizawa (1966), Zhao ve ark. (1994), Tunç ve Yazgan (2013) ve literatür bildirişlerindeki çalışmalar dikkate alınarak, ikinci mertebeden lineer olmayan değişken gecikmeli

$$x'' + f(t, x', x'(t-\tau(t))) + g(x(t-\tau(t))) + h(x) = p(t, x', x'(t-\tau(t))) \tag{4.5}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınacaktır.

Burada, $t \in \Re^+, \Re^+ = [0,\infty)$, $x \in \Re,\ \Re = (-\infty,\infty)$, f, g, h ve p sürekli fonksiyonlar olup g, x' e göre sürekli türevlenebilirdir. Ayrıca, f ve p, t' ye göre ω - periyodik fonksiyonlardır ve $\tau(t)$ fonksiyonu t' ye göre sürekli türevlenebilir ve ω- periyodik olup, $0 \le \tau(t) \le \alpha,\ \alpha > 0,\ \alpha \in \Re,\ \tau'(t) \le \beta,\ 0 < \beta < 1,\ \beta \in \Re$' dir.

Bu denklem sistem formunda aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -f(t, y, y(t-\tau(t))) - h(x) - g(x) \\ &\quad + \int_{-\tau(t)}^{0} g_x(x(t+s))y(t+s)ds + p(t, y, y(t-\tau(t))). \end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.6) diferansiyel denklem sisteminin periyodik çözümlerinin varlığına ait aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.2. (4.6) sistemi için aşağıdaki şartlar sağlansın;

(i) $\dfrac{f(t,y,y(t-\tau(t)))}{y} \geq a > 0, \quad (y \neq 0),\ a \in \Re,\ |g_x(x)| \leq L, \quad L > 0,\ L \in \Re,$

$x, y \in \Re,$

(ii) $|x| \to \infty$ için $[g(x)+h(x)]\operatorname{sgn} x \to \infty,$

(iii) $|p(t,y,y(t-\tau(t)))| \leq \theta(t)|y|$, $\theta(t)$ negatif olmayan sürekli ve sınırlı bir fonksiyon ve $\alpha > 0,\ \alpha \in \Re$ olmak üzere $0 \leq \theta(t) \leq \alpha$' dır.

O zaman,

$$0 < \alpha < \frac{2a(1-\beta)}{(2-\beta)L + 1 - \beta}$$

olmak kaydıyla, (4.5) denklemi en az bir $\omega-$ periyodik çözüme sahiptir.

İspat.

Şimdi bu sistem için uygun Lyapunov fonksiyonelini $V = V(t, x_t, y_t)$ olmak üzere,

$$V = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(\xi)d\xi + \int_0^x h(\xi)d\xi + \lambda \int_{-\tau(t)}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(u)du\,ds$$

olarak tanımlayalım. Burada λ pozitif bir sabit olup, amaca yönelik olarak sonradan belirlenecektir. Ayrıca $f(.) = f(t,y,y(t-\tau(t)))$ ve $p(.) = p(t,y,y(t-\tau(t)))$ olarak alalım.

Şimdi Lyapunov fonksiyonelinin türevini alırsak;

$$\frac{d}{dt}V = -\frac{f(.)y^2}{y} + y\int_{-\tau(t)}^{0} g_x(x(t+s))y(t+s)ds + p(.)y$$

$$+\lambda\tau(t)y^2 - [1-\tau'(t)]\lambda \int_{-\tau(t)}^{0} y^2(t+s)ds$$

elde edilir. Teorem 4.2' nin (i) ve (iii) şartları kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}V \leq -ay^2 + \int_{-\tau(t)}^{t} |y(t)||g_x(x(t+s))||y(t+s)|ds$$

$$+\theta(t)y^2+\lambda\alpha y^2-(1-\beta)\lambda\int_{-\tau(t)}^{0}y^2(t+s)ds$$

$$\leq -ay^2+\frac{1}{2}L\int_{-\tau(t)}^{0}[y^2(t)+y^2(t+s)]ds$$

$$+\theta(t)y^2+\lambda\alpha y^2-(1-\beta)\lambda\int_{-\tau(t)}^{0}y^2(t+s)ds$$

$$\leq -ay^2+\frac{1}{2}L\alpha y^2+\frac{L}{2}\int_{-\tau(t)}^{0}y^2(t+s)ds$$

$$+\alpha y^2+\lambda\alpha y^2-(1-\beta)\lambda\int_{-\tau(t)}^{0}y^2(t+s)ds$$

elde edilir.

Burada, $\lambda=\dfrac{L}{2(1-\beta)}$, $(0<\beta<1)$ alındığında,

$$\frac{dV}{dt}\leq -ay^2+\frac{1}{2}\alpha Ly^2+\alpha y^2+\frac{\alpha L}{2(1-\beta)}y^2$$

$$=-[a-\frac{1}{2}[L+1+\frac{L}{1-\beta}]\alpha]y^2$$

$$=-\frac{1}{2}[2a-[\frac{(2-\beta)L+1-\beta}{1-\beta}]\alpha]y^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Şayet, $2a(1-\beta)>\left[(2-\beta)L+1-\beta\right]\alpha$ yani, $0<\alpha<\dfrac{2a(1-\beta)}{(2-\beta)L+1-\beta}$ ise, o zaman pozitif bir α_0 sabiti vardır öyle ki,

$$\frac{dV}{dt}\leq -\frac{\alpha_0}{2}y^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu yüzden, (4.6) sisteminin çözümünün y bileşeni pozitif bir α_0 sabiti için mutlak sınırlıdır.

İkinci olarak, $p(t,y,y(t-\tau(t)))$ sürekli bir periyodik fonksiyon olduğundan $|y|\leq\beta$ ve $V_1=V+y$ olarak tanımlanırsa, V_1' in türevi için Teorem 4.2' nin şartlarına bağlı olarak,

$$\frac{d}{dt}V_1 = \frac{d}{dt}V + \frac{d}{dt}y$$

$$= -f(.)y + y\int_{-\tau(t)}^{0} g_x(x(t+s))y(t+s)ds$$

$$-h(x)y - g(x)y + p(.)y + h(x)y + g(x)y$$

$$-f(.) - h(x) - g(x) + \int_{-\tau(t)}^{0} g_x(x(t+s))y(t+s)ds$$

$$+\lambda\tau(t)y^2 - [1-\tau'(t)]\lambda\int_{-\tau(t)}^{0} y^2(t+s)ds$$

$$\leq -ay^2 + |y|\int_{-\tau(t)}^{0} L|y(t+s)|ds - f(.) - h(x) - g(x)$$

$$+\int_{-\tau(t)}^{0} L|y(t+s)|ds + \lambda\alpha y^2 - (1-\beta)\lambda\int_{-\tau(t)}^{0} y^2(t+s)ds$$

$$\leq -g(x) - h(x) + L_1$$

elde edilir. Burada L_1 bir sabittir.

Teorem 4.2' nin (ii) şartı gereği $x \to \infty$ için $g(x)+h(x) \to \infty$ olduğundan bir B_1 sabiti seçilebilir öyle ki

$$x \geq B_1 \text{ için } \frac{d}{dt}V_1 \leq -0.5$$

olur.

Bu yüzden, $\alpha_1 > 0$ sabiti vardır öyle ki (4.6) sisteminin çözümlerinin x bileşeni $|y| \leq \beta$ için $x \leq \alpha_1$ sağlar.

Benzer şekilde, $|y| \leq \beta$ ve $V_2 = V - y$ olarak tanımlanırsa, o zaman bir K_2 sabiti vardır öyle ki Teorem 4.2' nin şartları göz önüne alındığında:

$$\frac{d}{dt}V_2 = \frac{d}{dt}V - \frac{d}{dt}y$$

$$= -f(.)y - h(x)y - g(x)y + y\int_{-\tau(t)}^{0} g_x(x(t+s))y(t+s)ds$$

$$+yp(.) + \lambda\tau(t)y^2 - [1-\tau'(t)]\lambda\int_{-\tau(t)}^{0} y^2(t+s)ds$$

$$+h(x)y+g(x)y+f(.)+h(x)+g(x)$$

$$-\int_{-\tau(t)}^{0} g_x(x(t+s))y(t+s)ds-p(.)$$

$$\leq -ay^2+L\int_{-\tau(t)}^{0}|y(t)||y(t+s)|ds+\alpha y^2+|p(.)|$$

$$+\lambda\alpha y^2-(1-\beta)\lambda\int_{-\tau(\tau)}^{0} y^2(t+s)ds+f(.)+h(x)$$

$$+g(x)+L\int_{-\tau(t)}^{0}|y(t+s)|ds$$

$$\leq h(x)+g(x)+K_2$$

elde edilir.

Teorem 4.2' nin (ii) şartı gereği $x\to-\infty$ için $g(x)+h(x)\to-\infty$ olduğundan bir B_2 sabiti seçilebilir öyle ki

$$x\leq -B_2 \text{ için } \frac{d}{dt}V_2\leq -0.5$$

olur.

Bu yüzden, bir $\alpha_2>0$ sabiti vardır öyle ki (4.6) sisteminin çözümlerinin x bileşeni $|y|\leq\beta$ için $x\geq-\alpha_2$ eşitsizliğini sağlar.

Yukarıdaki sonuçlardan, (4.6) sisteminin tüm çözümlerinin mutlak sınırlı olduğu sonucuna ulaşılır. Bu yüzden, (4.5) denkleminin en az bir $\omega-$periyodik çözümü vardır.

Örnek 4.2. Aşağıda verilen ikinci mertebeden değişken gecikmeli lineer olmayan

$$x''+\left(3+\sin t+\cos(y(t-\tau(t)))\right)x'$$

$$+\left[2+\frac{2^{-1}+\sin x(t-\tau(t))}{1+x^2(t-\tau(t))}\right]x(t-\tau(t))+2x=(\sin t)x'$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\tau(t)$, sürekli türevlenebilir ve $2\pi-$periyodik bir fonksiyondur.

Yukarıda verilen diferansiyel denklem sistem biçiminde,

$x'=y,$

$$y' = -\left(3+\sin t+\cos(y(t-\tau(t)))\right)y - 2x - \left[2+\frac{2^{-1}+\sin x}{1+x^2}\right]x$$

$$+\int_{t-\tau(t)}^{0}\frac{2x(s)\left[x^2(s)+1\right]\cos x(s)+2\left[1-x^2(s)\right]\sin x(s)+4x^4(s)+7x^2(s)+5}{2\left[x^2(s)+1\right]^2}y(s)ds$$

$$+(\sin t)y$$

olarak ifade edilebilir.

Bu diferansiyel denklem sistemi (4.6) sistemiyle karşılaştırıldığında:

$$f(t,y,y(t-\tau(t))) = y\left(3+\sin t+\cos(y(t-\tau(t)))\right),$$

$$g(x) = \left[2+\frac{2^{-1}+\sin x}{1+x^2}\right]x,$$

$$h(x) = 2x,$$

$$p(t,y,y(t-\tau(t))) = y\sin t$$

olduğu açıktır. Bu fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığı kolaylıkla görülebilir:

$$\frac{f(.)}{y} = 3+\sin t+\cos(y(t-\tau(t))) \geq 1 = a > 0,\ a\in\Re,\ \ t\geq 0,\ \ y\neq 0,\ \ y\in\Re,$$

$$-1 \leq \frac{2^{-1}+\sin x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{g(x)}{x} \leq 3,\ x\neq 0,\ x\in\Re,\ |x|\to\infty \text{ için } g(x)\operatorname{sgn} x\to\infty,$$

$$|p(.)| = |y||\sin t| \leq (2+\sin t)|y| = \theta(t)|y| \text{ olup, } \theta(t) = 2+\sin t,\ 1\leq\theta(t)\leq 3,$$

$$g'(x) = \frac{2x\left[x^2+1\right]\cos x+2\left[1-x^2\right]\sin x+4x^4+7x^2+5}{2\left[x^2+1\right]^2} \Rightarrow |g'(x)| \leq 3 = L.$$

O halde, $\beta = \frac{1}{2}$ ve $0<\alpha<\frac{2a(1-\beta)}{(2-\beta)L+1-\beta} = \frac{1}{5}$ için Teorem 4.2' nin (i)-(iii) şartları sağlandığından yukarıda verilen denklem en az bir $2\pi-$periyodik çözüme sahiptir.

5. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN ÇOKLU GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN İKİ FARKLI DİFERANSİYEL DENKLEMİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölümde üçüncü mertebeden iki farklı çoklu gecikmeli diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı incelenecektir.

Chukwu (1978), üçüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli

$$x''' + f(x, x', x'')x'' + g(x(t-h), x'(t-h)) + i(x(t-h))$$
$$= p(t, x, x', x(t-h), x'(t-h), x'')$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığını inceledi.

Zhu (1992), üçüncü mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli

$$x''' + ax'' + \phi(x'(t-r)) + f(x) = p(t)$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığı için yeter şartlar elde etti.

Tejmula ve Tchegnani (2000), üçüncü mertebeden

$$x''' + f(t, x, x', x'')x'' + g(t, x(t-\tau), x'(t-\tau)) + h(x(t-\tau))$$
$$= P_1(t, x, x', x'', x(t-\tau), x'(t-\tau))$$

diferansiyel denkleminin periyodik çözümünün varlığı için yeter şartlar oluşturdu.

Tunç (2012)

$$x''' + \psi(x')x'' + \sum_{i=1}^{n} g_i(x'(t-\tau_i)) + f(x)$$
$$= p(t, x, x(t-\tau_1), ..., x', ..., x'(t-\tau_n), x'')$$

diferansiyel denklemini ele aldı ve bu denklem için periyodik çözümlerin varlığını inceledi.

Yukarıda verilen çalışmalarda araştırmacılar Lyapunov' un ikinci metodu yardımıyla verilen diferansiyel denklemlerin en az bir periyodik çözüme sahip olması için yeter şartlar elde ettiler.

5.1. Üçüncü Mertebeden Çoklu Gecikmeli Lineer Olmayan Bir Diferansiyel Denklemin Periyodik Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde ilk olarak yukarıda belirtilen kaynaklardaki sonuçlar göz önüne alınarak aynı yöntemle aşağıdaki üçüncü mertebeden,

$$x''' + \psi(x')x'' + \sum_{i=1}^{n} g_i(x'(t-\tau_i)) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x(t-\tau_i))$$
$$= p(t, x, x(t-\tau_i), \ldots, x'(t-\tau_n), x'') \tag{5.1}$$

çoklu gecikmeli lineer olmayan diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar oluşturulmaktadır. Ayrıca, konu ile ilgili bir örnek verilmektedir. Burada $x \in \Re$, $\Re = (-\infty, \infty)$, $t \in \Re^+$, $\Re^+ = [0, \infty)$, τ_i' ler pozitif sabitler yani sabit gecikmelerdir. ψ, g_i, f_i ve $p(.)$ fonksiyonları sırasıyla $\Re$ ve $\Re^+ \times \Re^{2n+3}$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır, $g_i(0) = f_i(0) = 0$ ve $p(.)$, *t'* ye göre *T*-periyodik ve $T \geq \tau_i$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $g_i'(y) \equiv \frac{d}{dy} g_i(y)$ ve $f_i'(y) \equiv \frac{d}{dy} f_i(y)$ türevlerinin var ve sürekli olduğu kabul edilmektedir. İhtiyaç duyulduğu taktirde $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$, sırasıyla x, y ve z olarak gösterilecektir.

(5.1) denklemini aşağıdaki sistem biçiminde ifade edelim:

$$x' = y,$$
$$y' = z,$$
$$z' = -\psi(y)z - \sum_{i=1}^{n} g_i(y) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i}^{t} f_i'(x(s))y(s)ds$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i}^{t} g_i'(y(s))z(s)ds + p(t, x, x(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_n), z). \tag{5.2}$$

Şimdi (5.1) denklemi için periyodik çözümlerin varlığına ait aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1. $a, b_i, c_i, m, \delta, L_i$ ve τ_i, $(i=1,2,...,n)$, pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $\mu b_i - c > 0, \quad ab - c > 0, \quad f_i(0) = 0, \quad f_i(x)\operatorname{sgn} x > 0, (x \neq 0), \ x \in \Re,$

$\sup\{f_i'(x)\} = c_i, \ (i=1,2,...,n),$

(ii) $|x| \to \infty$ için $f_i(x)\operatorname{sgn} x \to \infty \quad g_i(0) = 0, \quad \dfrac{g_i(y)}{y} \geq b_i, \quad (y \neq 0), y \in \Re,$

$|g_i'(y)| \leq L_i, \quad 0 \leq \psi(y) - a \leq \delta, \ y \in \Re, \quad |p(.)| \leq m.$

Eğer,

$$\tau \leq \min\left\{\frac{ab-c}{2bN_1}, \frac{ab-c}{4M_1}\right\}, \ \tau = \max_{1 \leq i \leq n} \tau_i$$

ise, o zaman (5.1) denkleminin en az bir T - periyodik çözümü vardır.

Burada

$$b = \sum_{i=1}^{n} b_i, \ c = \sum_{i=1}^{n} c_i, \ M_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(1+2\mu)c_i + \mu L_i],$$

$$N_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(2+\mu)L_i + c_i] \text{ ve } \mu = (ab+c)/2b, \ L = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

şeklindedir.

İspat. (5.2) sistemi için $V = V(x_t, y_t, z_t)$ Lyapunov fonksiyoneli tanımlayalım:

$$V(x_t, y_t, z_t) = V_1(x_t, y_t, z_t) + V_2(x_t, y_t, z_t) + 1$$

$$+\sum_{i=1}^{n} L_i \int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} |z(\theta)| d\theta ds + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} |y(\theta)| d\theta ds. \tag{5.3}$$

Burada,

$$V_1(x_t, y_t, z_t) = \mu \sum_{i=1}^{n} \int_0^x f_i(\xi) d\xi + y \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_0^y g_i(\eta) d\eta + \mu yz + \mu \int_0^y \psi(\eta)\eta d\eta + \frac{1}{2} z^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} z^2(\theta)d\theta ds+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\theta)d\theta ds$$

ve

$$V_2(x_t, y_t, z_t) = \begin{cases} \dfrac{z}{M}\operatorname{sgn} x, & |x| \geq 1, z \leq M \\ \operatorname{sgn} z \operatorname{sgn} x, & |x| \geq 1, z \geq M \\ \dfrac{xz}{M}, & |x| \leq 1, z \leq M \\ x\operatorname{sgn} z, & |x| \leq 1, z \geq M \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca yukarıda geçen $M,\ (M>1),\ \beta_i$ ve γ_i belirli pozitif sabitler olup $\gamma_i,\ \beta_i$ sabitleri daha sonra belirlenecektir.

$V_1(0,0,0)=0$ sağlandığı açıktır. $\psi(y)\geq a,\quad \dfrac{g_i(y)}{y}\geq b_i \quad f_i(0)=0,$ $f_i(x)\operatorname{sgn}(x)>0,\ \forall x\neq 0,$ ve $\sup\{f_i'(x)\}=\mathrm{c}_i,\ (i=1,2,...,n),$ şartlarına bağlı olarak,

$$V_1(x_t, y_t, z_t) \geq \frac{1}{2b_1}\left[b_1 y + f_1(x)\right]^2 + ... + \frac{1}{2b_n}\left[b_n y + f_n(x)\right]^2$$

$$+\left[4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2b_i y^2}\int_0^x f_i(\xi)\left\{\int_0^y(\mu b_i - f_i'(\xi))\eta d\eta\right\}d\xi\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\mu y + z\right]^2 + \frac{1}{2}\mu(a-\mu)y^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} z^2(\theta)d\theta ds+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\theta)d\theta ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak

$$V_1(x_t, y_t, z_t) \geq D_1x^2 + D_2y^2 + D_3z^2 \geq D_4(x^2 + y^2 + z^2) \tag{5.4}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Burada, $D_4 = \min\{D_1, D_2, D_3\}$ olarak seçilmiştir.

Teorem 5.1'in şartlarını kullanarak,

$$(a-\mu) = a - \frac{ab+c}{2b} > 0, \ \mu b_i - f_i'(\xi) \geq \mu b_i - c_i > 0$$

yazabiliriz.

Ayrıca V_2 fonksiyonu sürekli olup

$$|V_2| \leq 1 \qquad (5.5)$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Dolayısıyla, (5.3), (5.4), (5.5) ve Teorem 5.1'in şartları göz önüne alınarak, V 'nin Teorem 3.20' nin (i) şartındaki eşitsizliğin sağ tarafının sağladığı kolaylıkla görülebilir.

Basit bir hesaplamayla, V_1'in (5.2) sistemi boyunca türevi,

$$\begin{aligned} V_1' &= y^2 \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) + \mu z^2 - \mu y \sum_{i=1}^{n} g_i(y) - \psi(y) z^2 \\ &+(\mu y + z) \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_1}^{t} g_i'(y(s)) z(s) ds + (\mu y + z) \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_1}^{t} f_i'(x(s)) y(s) ds \\ &+\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \tau_i) z^2 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_{t-\tau_i}^{t} z^2(s) ds + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i \tau_i) y^2 \\ &-\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s) ds + (\mu y + z) p(.) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$|g'(y)| \leq L_i$ şartı ve $2|m||n| \leq m^2 + n^2$ eşitsizliği uygulanarak yukarıdaki türevde içerilen bazı terimler için aşağıdaki eşitsizlikler kolaylıkla yazılabilir:

$$\mu y \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_1}^{t} g_i'(y(s)) z(s) ds \leq \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{n} (L_i \tau_i) y^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{n} L_i \int_{t-\tau_i}^{t} z^2(s) ds,$$

$$z \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_1}^{t} g_i'(y(s)) z(s) ds \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (L_i \tau_i) z^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} L_i \int_{t-\tau_i}^{t} z^2(s) ds,$$

$$\mu y \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_1}^{t} f_i'(x(s)) y(s) ds \leq \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{n} (c_i \tau_i) y^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s) ds,$$

$$z\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_i}^{t} f_i'(x(s))y(s)ds \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_i\tau_i)z^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i\int_{t-\tau_i}^{t} y^2(s)ds.$$

Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikler, $\sup\left\{f_i'(x)\right\}=c_i,\ (i=1,2,...,n)$, $\psi(y)\ge a$ ve $ab-c>0$ olduğu göz önüne alınarak,

$$V_1'(x_t,y_t,z_t) \le -\left[\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i(y)}{y} - c - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(L_i+c_i)\mu+2\beta_i\right]\tau_i\right]y^2$$

$$-\left[\frac{ab-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(L_i+c_i+2\gamma_i)\tau_i\right]z^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}L_i(1+\mu)-\gamma_i\right]\int_{t-\tau_i}^{t} z^2(s)ds$$

elde edilir.

Eğer $\gamma_i=\frac{1}{2}L_i(1+\mu)$, $\beta_i=\frac{1}{2}c_i(1+\mu)$ olarak seçilir ve $|p(.)|\le m$ şartı kullanılırsa,

$$V_1'(x_t,y_t,z_t) \le -\left[\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i(y)}{y} - c - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(1+2\mu)c_i+\mu L_i\right]\tau_i\right]y^2$$

$$-\left[\frac{ab-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((2+\mu)L_i+c_i)\tau_i\right]z^2 + \mu m|y| + m|z| \qquad (5.6)$$

yazılabilir.

(5.2) sistemi boyunca V_2' türevi hesaplanır ve Teorem 5.1'in şartları kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$V_2' \le \begin{cases} -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\operatorname{sgn}x + \left\{\begin{array}{l} a+\delta+m+\sum_{i=1}^{n}|g_i(y)| + \sum_{i=1}^{n}c_i\int_{t-\tau_i}^{t}|y(s)|ds \\ +\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}|z(s)|ds \end{array}\right\}, & |x|\ge 1, z\le M \\ 0, & |x|\ge 1, z\ge M \\ |y|+a+\delta+m+\sum_{i=1}^{n}|g_i(y)| + \sum_{i=1}^{n}c_i\int_{t-\tau_i}^{t}|y(s)|ds + \sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}|z(s)|ds, & |x|\le 1, z\le M \\ |y|, & |x|\le 1, z\ge M. \end{cases}$$

$\max\{|y|-K,|z|-M\}\geq 0$ bölgesinde V Lyapunov fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada K ve M yeterince büyük sabitler olup daha sonra belirlenecektir. Aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

I.Durum: $|y|\geq K\geq 1,$ ve x,z keyfi sabitler olsun. Bu durumda,

$$V_2'\leq |y|+a+\delta+m+\sum_{i=1}^{n}|g_i(y)|+\sum_{i=1}^{n}c_i\int_{t-\tau_i}^{t}|y(s)|ds+\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\tau_i}^{t}|z(s)|ds \tag{5.7}$$

eşitsizliği yazılabilir. (5.3), (5.6), (5.7) eşitsizlikleri ve $\tau=\max_{1\leq i\leq n}\tau_i$ şartı kullanılarak

$$V'(x_t,y_t,z_t)\leq -\left[\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i(y)}{y}-c-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(1+2\mu)c_i+\mu L_i\right]\tau_i\right]y^2+\sum_{i=1}^{n}|g_i(y)|$$

$$-\left[\frac{ab-c}{2b}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((2+\mu)L_i+c_i)\tau_i\right]z^2+(\mu m+1)|y|+m|z|$$

$$+(a+\delta+m)|y|+\sum_{i=1}^{n}(L_i\tau_i)|z|+\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{c}_i\,\tau_i)|y|.$$

elde edilir.

$$h=\frac{ab+3c}{2(ab+c)}<1$$

olarak tanımlayalım.

O zaman, $|y|\geq K_1$ için $(1-\frac{1}{\mu}|y|)\geq h$ şartını sağlayan bir $K_1,\ (K_1\geq 1)$ sabiti vardır öyle ki, $|y|\geq K_1$ için

$$\mu\sum_{i=1}^{n}g_i(y)y-\sum_{i=1}^{n}|g_i(y)|-cy^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(1+2\mu)c_i+\mu L_i\right]\tau_i y^2$$

$$\geq\left(\frac{ab-c}{4}-M_1\tau\right)y^2$$

elde edilir.

Böylece,

$$V'(x_t, y_t, z_t) \le -\left(\frac{ab-c}{4} - M_1\tau\right)y^2 - \left(\frac{ab-c}{2b} - N_1\tau\right)z^2$$

$$+(\mu m + 1 + a + \delta + m + c\tau)|y| + (m + L\tau)|z|,$$

bulunur. Burada,

$$M_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(1+2\mu)c_i + \mu L_i\right],\;\; N_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(2+\mu)L_i + c_i\right],\;\; \sum_{i=1}^{n} L_i = L$$

olarak alınmaktadır.

$$\tau < \min\left\{\frac{ab-c}{2bN_1}, \frac{ab-c}{4M_1}\right\}$$

şartı kullanılırsa, o zaman bir δ_1 pozitif sabiti için yukarıdaki eşitsizlikten

$$V'(x_t, y_t, z_t) \le -\delta_1(y^2 + z^2) + (\mu m + a + \delta + m + c\tau + 1)|y|$$

$$+(m + L\tau)|z|$$

yazılabilir.

$$\rho_1 = \max\left\{\mu m + a + \delta + m + c\tau + 1, m + L\tau\right\}$$

alalım. Bu durumda $|y| \ge (\sqrt{2}+1)\rho_1\delta_1^{-1}$ olmak kaydıyla kolaylıkla,

$$V'(x_t, y_t, z_t) \le -\frac{\delta_1}{2}(y^2 + z^2)$$

yazılabilir.

$K = \max\{(\sqrt{2}+1)\rho_1\delta_1^{-1}, K_1\}$ alalım. Eğer $|y| \ge K$ ise, o zaman

$$V'(x_t, y_t, z_t) \le -\frac{\delta_1}{2}(y^2 + z^2)$$

elde edilir. I. Durumun incelemesi tamamlanmış olur.

II. Durum: $|z| \ge M$, ve x, y keyfi olsun. O zaman, kolaylıkla

$$V_2'(x_t, y_t, z_t) \le |y|$$

elde edilir. Önceki duruma benzer bir yol izlenerek,

$$\gamma_i = \frac{1}{2} L_i (1+\mu), \ \ \beta_i = \frac{1}{2} c_i (1+\mu)$$

alınarak ve

$$\tau < \min \left\{ \frac{ab-c}{2bN_1}, \frac{ab-c}{4M_1} \right\}$$

şartı göz önünde bulundurularak, bazı δ_2 ve ρ_2 pozitif sabitleri için $|z| \geq M = K$ olduğunda,

$$V'(x_t, y_t, z_t) \leq -\frac{\delta_1}{2}(y^2 + z^2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç olarak, $\max\{|y|-K, |z|-M\} \leq 0$ olmak üzere V fonksiyonelini göz önüne alalım. $|x| \geq H > 1$ olsun. V_2 fonksiyonunun türevi mevcut şartlar altında dikkate alınırsa,

$$V_2' \leq -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \operatorname{sgn} x + \max_{|y|\leq K} \sum_{i=1}^{n} |g_i(y)| + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{t-\tau_i}^{t} |y(s)|\, ds$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} L_i \int_{t-\tau_i}^{t} |z(s)|\, ds + a + \delta + m \qquad (5.8)$$

bulunur.

(5.3), (5.6) ve (5.8)'den aşağıdaki eşitsizliklere kolaylıkla ulaşılabilir:

$$V'(x_t, y_t, z_t) \leq -\left(\frac{ab-c}{4} - M_1 \tau \right) y^2 - \left(\frac{ab-c}{2b} - N_1 \tau \right) z^2$$

$$-\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \operatorname{sgn} x + \max_{|y|\leq K} \sum_{i=1}^{n} |g_i(y)|$$

$$+(a + \delta + m + LM\tau + \mu m K + mM). \qquad (5.9)$$

$|x| \to \infty$ için $f_i(x) \operatorname{sgn} x \to \infty$ ve $|x| \geq H > 1$ olduğundan,

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\operatorname{sgn} x}{2M}+\left\{\max_{|y|\le K}\sum_{i=1}^{n}\left|g_i(y)\right|+(a+\delta+m+LM\tau+\mu mK+mM)\right\}\le 0$$

yazılabilir. Son eşitsizlik, (5.9)'da yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$V'(x_t,y_t,z_t)\le-\left(\frac{ab-c}{4}-M_1\tau\right)y^2-\left(\frac{ab-c}{2b}-N_1\tau\right)z^2$$
$$-\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\operatorname{sgn} x.$$

Yukarıda elde ettiğimiz sonuç yardımıyla, yeterince büyük bir R pozitif sabiti vardır öyle ki $u^2\ge R^2$ için

$$V'(x_t,y_t,z_t)\le-\omega(u)$$

olur. Burada $u=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ ' dır.

Böylece, $V(x_t,y_t,z_t)$ Lyapunov fonksiyoneli Teorem 3.20'nin tüm şartlarını sağladığından Teorem 5.1 için ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.1. (5.1) denkleminin özel bir hali olan üçüncü mertebeden iki sabit gecikme bileşenli aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi ele alalım:

$$x'''+\left(4+\frac{1}{1+(x')^2}\right)x''+4x'(t-\tau_1)+\sin x'(t-\tau_1)$$
$$+4x'(t-\tau_2)+\sin x'(t-\tau_2)+11x(t-\tau_1)+11x(t-\tau_2) \qquad (5.10)$$

$$=\frac{\sin t+\cos t}{3+\sin t+x^2+\ldots+x'^2(t-\tau_2)+x''^2}.$$

Burada, $\tau_1>0$ ve $\tau_2>0$ sabit gecikmelerdir. (5.10) diferansiyel denklemi diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilip, elde edilen sistem (5.2) sistemi ile karşılaştırılarak, Teorem 5.1 şartlarının sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir:

$$\psi(y) = 4 + \frac{1}{1+y^2}, \quad 0 \le \psi(y) - 4 \le 1,$$

$$a = 4,\ \ \delta = 1,\ \ g_1(y) = 4y + \sin y,\ \ g_1(0) = 0,\ \ \frac{g_1(y)}{y} = 4 + \frac{\sin y}{y},\ \ b_1 = 3,\ y \ne 0,$$

$$\left| g_1{}'(y) \right| \le 5 = L_1,$$

$$g_2(y) = 4y + \sin y,\ \ g_2(0) = 0,\ \ \frac{g_2(y)}{y} = 4 + \frac{\sin y}{y},\ \ b_2 = 3,\ y \ne 0,$$

$$\left| g_2{}'(y) \right| \le 5 = L_2,$$

$$f_1(x) = 11x,\ \ f_1(0) = 0,$$

$$f_1(x)\operatorname{sgn} x = 11x \operatorname{sgn} x > 0,\ \ (x \ne 0),$$

$$|x| \to \infty \text{ için } \ f_1(x)\operatorname{sgn} x = 11x\operatorname{sgn} x \to \infty,$$

$$f_1'(x) = 11,\ \ c_1 = 11,$$

$$f_2(x) = 11x,\ \ f_2(0) = 0,$$

$$f_2(x)\operatorname{sgn} x = 11x\operatorname{sgn} x > 0,\ \ (x \ne 0)$$

$$f_2(x)\operatorname{sgn} x = 11x\operatorname{sgn} x \to \infty \text{ as } |x| \to \infty,$$

$$f_2'(x) = 11,\ \ c_2 = 11,\ \ \ c = c_1 + c_2 = 22,\ \ b = b_1 + b_2 = 3 + 3 = 6,\ \ ab - c = 2 > 0,$$

$$h = \frac{ab + 3c}{2(ab + c)} = \frac{90}{92} < 1,$$

$$p(.) = \frac{\sin t + \cos t}{3 + \sin t + x^2 + ... + y^2(t - \tau_2) + z^2} \le 1 = m,$$

$$p(t + 2\pi,.) = p(t,.)$$

olduğu açıktır. Böylece yukarıdaki işlemler dikkate alındığında, verilen denklemin Teorem 5.1’in tüm şartlarının sağlandığı görülmektedir. Bu durumda (5.10) denklemi en az bir $T = 2\pi -$ periyodlu çözüme sahiptir.

5.2. Üçüncü Mertebeden Lineer Olmayan Çoklu Gecikmeli Bir Diferansiyel Denklemin Periyodik Çözümlerinin Varlığı, Kararlılığı Ve Sınırlılığı

Tejumula ve Tchegnani (2000), üçüncü mertebeden, sabit gecikmeli, lineer olmayan

$$x''' + f(t,x,x',x'')x'' + g(t,x(t-\tau),x'(t-\tau)) + h(x(t-\tau)) = P_1$$

diferansiyel denklemini ele alarak bu denklemin kararlılığını, sınırlılığını ve periyodik çözümlerin varlığı incelendi.

Burada, $\tau > 0$ sabit gecikme bileşeni, f, g, h reel değerli ve sürekli fonksiyonlar ve

$$P_1 = P_1(t,x,x',x'',x(t-\tau),x'(t-\tau))$$

şeklindedir.

Çalışmamızın bu bölümünde, Lyapunov ikinci metodu yardımıyla, aşağıdaki çoklu gecikmeli diferansiyel denklem ele alınacaktır:

$$x''' + \varphi(t,x,x',x'')x'' + \sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i),x'(t-\tau_i)) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x(t-\tau_i) = P_1. \tag{5.11}$$

Burada

$$P_1 = P_1(t,x,x',x'',x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_n),...,x''(t-\tau_1),...,x''(t-\tau_n)),$$

ve $\tau_i \geq 0, i = 1,2,...n,$ sabit gecikmeler, φ, g_i, h_i ve $P_1(.)$ reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olup belirtilen bileşenlere bağlıdır. Ayrıca, $t \in [0,\infty), x \in \Re, \Re = (-\infty,\infty)$ olduğu ve h_i fonksiyonlarının bileşenleri cinsinden türevlerinin sürekli olduğu kabul edilmektedir.

Şimdi (5.11) diferansiyel denklemi aşağıdaki sistem gibi ifade edilebilir:

$$x' = y,$$

$$y' = z,$$

$$z' = -az - \sum_{i=1}^{n} b_i y - \sum_{i=1}^{n} h_i(x) + N(t). \tag{5.12}$$

Burada

$$N(t) = az - \varphi(t,x,y,z)z + \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{-\tau_i}^{0} z(t+\theta)d\theta - \sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i),y(t-\tau_i))$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i y(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0} h_i'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta+P_1$$

olup, a,b,c reel sabitler ve $\sum_{i=1}^{n} c_i = c, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = b$ dir.

Teorem 5.2. Her t,x ve $i=1,2,...,n$ için

$$h_i(0)=0=g_i(t,x,0)$$

olsun.

Ayrıca, $i=1,2,...,n$ için $a,b_i,\ a',b_i',\ \delta_i$ ve c_i pozitif sabitlerinin $ab-c>0$ olacak şekilde var olduğunu ve aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

i) Her t,x,y,z için, $a<\varphi(t,x,y,z)\le a'$,

ii) Her t,x ve $y\neq 0$ için, $b_i<\dfrac{g_i(t,x,y)}{y}\le b_i',\ \sum_{i=1}^{n} b_i' = b',\ i=(1,2,...,n)$,

iii) Her $x\neq 0$ için, $K_i<\dfrac{h_i(x)}{x}$, $\sum_{i=1}^{n} K_i = K$ ve her x için

$h_i'(x)\le c_i,\ i=(1,2,...,n)$.

Bu takdirde, yeterince küçük τ_i 'ler ve $P_1\equiv 0$ için (5.12) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Teorem 5.3. Teorem 5.2'nin şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $\Delta_0>0$ ve $\Delta_0'>0$ sabitleri vardır öyle ki

$$|P_1|\le \Delta_0+\Delta_0'(|x|+|y|+|z|) \tag{5.13}$$

sağlansın. Bu takdirde, yeterince küçük τ_i 'ler için (5.12) sisteminin her çözümü düzgün sınırlıdır ve düzgün mutlak sınırlıdır.

Uyarı. Periyodik çözümlerin varlığı için (5.11) denkleminde $\varphi,\ g_i$ ve P_1 fonksiyonlarının t'ye göre $T-$periyodik (her $i=1,2,...,n$ için $T>\tau_i$) olduğu kabul edildiği takdirde, Teorem 5.3'ün şartları altında, (5.12) sistemi en az bir T-periyodik çözüme sahiptir.

Teorem 5.2 ve Teorem 5.3' ün ispatı.

$V = V(x, y, z, x_t, y_t, z_t)$ fonksiyoneli aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$V = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + V_3(x_t, y_t, z_t).$$

Burada,

$$2V_1 = 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^x h_i(s)ds + ay^2 + \varepsilon_1 by^2 + \varepsilon_1 z^2 + 2yz + 2\varepsilon_1 y\sum_{i=1}^{n} h_i(x),$$

$$2V_2 = 2a\sum_{i=1}^{n}\int_0^x h_i(s)ds + \varepsilon_2 bx^2 + (a^2 - \varepsilon_2)y^2 + by^2 + z^2$$

$$+2a\varepsilon_2 xy + 2\varepsilon_2 xz + 2ayz + 2y\sum_{i=1}^{n} h_i(x),$$

$$V_3 = \sum_{i=1}^{n}\frac{2\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\int_s^0 [x^2(t+\theta) + y^2(t+\theta) + z^2(t+\theta)]d\theta ds$$

ile verilmektedir. $ab - c > 0$ olduğundan

$$a^{-1} < \varepsilon_1 < bc^{-1}, ab - c > a\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 > \{(b' - b) + (a' - a)\}\frac{\varepsilon_2}{4}$$

koşullarına uygun olarak, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sabitleri seçilebilir ve $\gamma_i \geq 0$ olup daha sonra belirtilecektir.

Teoremlerin ispatlarını tamamlamak için gerekli olan aşağıdaki Lemma'yı verelim:

Lemma 5.1. Teorem 5.2'nin (i)-(iii) şartları sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde yukarıda tanımlanan $V = V(x, y, z, x_t, y_t, z_t)$ fonksiyoneli için,

i) d_1, d_2 ve d_3 pozitif sabitleri vardır öyle ki;

$$d_1(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \leq V(x, y, z, x_t, y_t, z_t)$$

$$\leq d_2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + d_3(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.14}$$

ii) (5.12) sisteminin her (x, y, z, x_t, y_t, z_t) çözümü için $d_4, d_5 > 0$ pozitif sabitleri vardır öyle ki;

$$V' \le -2d_4(x^2+y^2+z^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\tau_i}^{0} x^2(t+\theta)d\theta + \Delta_0 d_5(|x|+|y|+|z|) \tag{5.15}$$

özellikleri sağlanır.

Uyarı. Eğer (5.14) ve (5.15) sağlanırsa, $P_1 \equiv 0, (\Delta_0 = 0)$ olmak kaydıyla (5.11) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı ve tüm çözümleri düzgün sınırlı ve düzgün mutlak sınırlıdır. Ayrıca, (5.11) denklemindeki otonom olmayan terimler $T-$ periyodik olduğunda verilen denklem en az bir $T-$periyodik çözüme sahiptir.

Harrow (1968) ve Tejumola (1972)'nin çalışmalarındaki sonuçlar ve V_3 göz önüne alınarak (5.14)'ün sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi, Teorem 5.2'nin ispatı için V_1, V_2, V_3 türevleri sırasıyla,

$$V_i' = \frac{\partial V_i}{\partial x} y + \frac{\partial V_i}{\partial y} z + \frac{\partial V_i}{\partial z} z'$$

olarak yazılırsa,

$$2V_1' = 2\varepsilon_1 y^2 \sum_{i=1}^{n} h_i'(x) + 2\varepsilon_1 byz + 2z^2 - 2a\varepsilon_1 z^2 - 2b\varepsilon_1 yz$$

$$-2by^2 + [2\varepsilon_1 z + 2y]N(t),$$

$$2V_2' = 2a\varepsilon_2 y^2 + 2y^2 \sum_{i=1}^{n} h_i'(x) - 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{n} h_i(x)x - 2aby^2$$

$$+(2z + 2\varepsilon_2 x + 2ay)N(t),$$

$$V_3' = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\tau_i}^{0} [x^2 + y^2 + z^2 - x^2(t+\theta) - y^2(t+\theta) - z^2(t+\theta)]d\theta$$

şeklinde elde edilir.

Buna bağlı olarak, Teorem 5.2'nin (iii) şartı göz önüne alındığında,

$$V_1' + V_2' \le -K\varepsilon_2 x^2 - [(b - \varepsilon_1 c) + (ab - a\varepsilon_2 - c)]y^2$$

$$-(a\varepsilon_1 - 1)z^2 + (\varepsilon_2|x| + (a+1)|y| + (\varepsilon_1 + 1)|z|)N(t)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Burada,

$$d_6 = \min\{K\varepsilon_2, [(b - \varepsilon_1 c) + (ab - a\varepsilon_2 - c)], (a\varepsilon_1 - 1)\} > 0,$$

$$d_7 = \max\{\varepsilon_2, (a+1), (\varepsilon_1 + 1)\} > 0$$

olarak belirlenirse,

$$V_1'+V_2' \le -d_6(x^2+y^2+z^2)+d_7(|x|+|y|+|z|)|N(t)| \tag{5.16}$$

şeklinde bulunur. Burada, $N(t)$ fonksiyonu için,

$$|N(t)| \le a|z|+|\varphi(t,x,y,z)||z|+\sum_{i=1}^{n} b_i \int_{-\tau_i}^{0} |z(t+\theta)|\,d\theta+\sum_{i=1}^{n}|g_i(t,x(t-\tau_i),y(t-\tau_i))|$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i|y(t-\tau_i)|+\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|h_i'(x(t+\theta))||y(t+\theta)|\,d\theta+|P_1| \tag{5.17}$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Ayrıca Teorem 5.2’nin (ii) şartı ve

$$y(t-\tau_i)=y(t)-\int_{-\tau_i}^{0} z(t+\theta)d\theta$$

eşitliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \int_{-\tau_i}^{0} |z(t+\theta)|\,d\theta+\sum_{i=1}^{n}|g_i(t,x(t-\tau_i),y(t-\tau_i))|+\sum_{i=1}^{n} b_i|y(t-\tau_i)|$$

$$\le (b+b')|y|+2b\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|z(t+\theta)|\,d\theta.$$

(5.17), (5.13), Teorem 5.2’nin (i) ve (iii) şartları ile yukarıdaki eşitsizlik göz önüne alınırsa ve

$$(|x|+|y|+|z|)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$d_7(|x|+|y|+|z|)|N(t)| \le d_7\Delta_0(|x|+|y|+|z|)+3k(x^2+y^2+z^2)$$

$$+k(|x|+|y|+|z|)\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}[|y(t+\theta)|+|z(t+\theta)|]d\theta$$

elde edilir. Burada,

$$k=d_7\max[\max\{a+a'+\Delta_0',b+b'+\Delta_0',\Delta_0'\},\max\{c,2b\}]$$

olarak seçilmiştir.

$4d_8-3k-4\sqrt{3}k\tau_i>0$ ($4d_8=d_6-3k$ şartından dolayı $d_8>0$ sağlanır) kabul edilip,

$$\gamma_i=\frac{d_8}{2n}-\frac{\left(d_8^{\,2}-3k^2\tau_i^{\,2}\right)^{1/2}}{2n}\ge 0,\quad \mu_i=\frac{d_8}{2n}+\frac{\left(d_8^{\,2}-3k^2\tau_i^{\,2}\right)^{1/2}}{2n}\ge 0 \tag{5.18}$$

şeklinde tanımlansın.

(5.16) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilir:

$$V_1' + V_2' \le -4d_8(x^2 + y^2 + z^2) + d_7\Delta_0(|x| + |y| + |z|)$$

$$+k(|x| + |y| + |z|)\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}[|y(t+\theta)| + |z(t+\theta)|]d\theta.$$

Son bulunan eşitsizlik ile V_3' türevi ve (5.18) göz önüne alındığında aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığı açıktır:

$$V' \le -2d_8(x^2 + y^2 + z^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{2\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}x^2(t+\theta)d\theta + \Delta_0 d_7(|x| + |y| + |z|)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[\mu_i x^2 - k\tau_i|x||y(t+\theta)| + \frac{2}{3}\gamma_i y^2(t+\theta)]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[\mu_i y^2 - k\tau_i|y||y(t+\theta)| + \frac{2}{3}\gamma_i y^2(t+\theta)]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[\mu_i z^2 - k\tau_i|z||y(t+\theta)| + \frac{2}{3}\gamma_i y^2(t+\theta)]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[\mu_i x^2 - k\tau_i|x||z(t+\theta)| + \frac{2}{3}\gamma_i z^2(t+\theta)]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[\mu_i y^2 - k\tau_i|y||z(t+\theta)| + \frac{2}{3}\gamma_i z^2(t+\theta)]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[\mu_i x^2 - k\tau_i|z||z(t+\theta)| + \frac{2}{3}\gamma_i z^2(t+\theta)]d\theta.$$

Bu eşitsizlikteki integrallerin her birinin diskiriminantı $-2k^2\tau_i^2 < 0$ olduğundan bu integraller pozitif tanımlıdır. Böylece,

$$V' \le -2d_8(x^2 + y^2 + z^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{2\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau}^{0}x^2(t+\theta)d\theta + d_7\Delta_0(|x| + |y| + |z|)$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

O halde elde edilen yukarıdaki sonuçlardan $P_1 = 0$ için (5.12) sisteminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu söylenebilir. Ayrıca, (Chukwu, 1978, Teorem 1.1 ve Teorem 1.2 dikkate alındığında) verilen diferansiyel denklemin en az bir periyodik çözümünün var olduğu ve çözümlerinin sınırlı olduğu sonucuna varılabilir.

6. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN ÇOKLU GECİKMELİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI, KARARLILIĞI VE SINIRLILIĞI

Tejumula ve Tchegnani (2000), dördüncü mertebeden,

$$x^{(4)} + \varphi(t,x,x',x'',x''')x''' + \psi(t,x'(t-\tau),x''(t-\tau))$$
$$+\chi(t,x(t-\tau),x'(t-\tau)) + h(x(t-\tau)) = P_2$$

diferansiyel denklemini ele alarak bu denklemin çözümlerinin kararlılığını, sınırlılığını ve periyodik çözümlerin varlığını inceledi.

Burada, $\tau > 0$, sabit gecikme bileşeni, h, φ, ψ ve χ reel değerli ve sürekli fonksiyonlar ve

$$P_2 = P_2(t,x,x',x'',x''',x(t-\tau),x'(t-\tau),x''(t-\tau))$$

şeklindedir.

Çalışmamızın bu bölümünde, aşağıdaki çoklu gecikmeli diferansiyel denklem ele alınacaktır:

$$x^{(4)} + f(t,x,x',x'',x''')x''' + \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t,x'(t-\tau_i),x''(t-\tau_i))$$
$$+\sum_{i=1}^{n} g_i(t,x(t-\tau_i),x'(t-\tau_i)) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x(t-\tau_i)$$
$$= P(t,x,x',x'',x''',x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_n),...,x'''(t-\tau_1),...,x'''(t-\tau_n)). \tag{6.1}$$

Burada $\tau_i \geq 0, i = 1,2,...n,$ sabit gecikmeler, f, g_i, h_i, ψ_i ve P reel değerli sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, $t \in [0,\infty)$, $x \in \Re$, $\Re = (-\infty,\infty)$ olduğu ve h_i fonksiyonlarının bileşenleri cinsinden türevlerinin sürekli olduğu kabul edilmektedir.

Şimdi (6.1) denklemine eşdeğer sistem

$x' = y,$

$y' = z,$

$z' = w,$

$$w' = -aw - \sum_{i=1}^{n} b_i z - \sum_{i=1}^{n} c_i y - \sum_{i=1}^{n} h_i(x) + M(t), \tag{6.2}$$

şeklindedir.

Burada

$$M(t) = aw - f(t,x,y,z,w)w + \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{-\tau_i}^{0} w(t+\theta)d\theta - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t, y(t-\tau_i), z(t-\tau_i))$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_i z(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\tau_i}^{0} z(t+\theta)d\theta - \sum_{i=1}^{n} g_i(t, x(t-\tau_i), y(t-\tau_i))$$
$$+\sum_{i=1}^{n} c_i y(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-\tau_i}^{0} h_i'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + P(.)$$

olup, a,b,c reel sabitler ve $\sum_{i=1}^{n} c_i = c,\quad \sum_{i=1}^{n} b_i = b$ ’ dir.

6.1 Çözümlerin Kararlılığı, Sınırlılığı ve Periyodik Çözümün Varlığı

Teorem 6.1. Her $t \in [0,\infty)$, $x \in \Re$, $\Re = (-\infty,\infty)$ ve $i = 1,2,...,n$ için

$$g_i(t,x,0) = \psi_i(t,y,0) = 0$$

olsun. Ayrıca a,b,c pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan d_i, δ_i, K pozitif sabitlerinin var olduğunu kabul edelim.

$$ab - c > 0,\quad s \equiv abc - c^2 - a^2 d > 0,\quad s^* = s + 2ad(ab-c)b^{-1},$$

i) Her t,x,y,z,w için, $0 < f(t,x,y,z,w) \le a,$

ii) Her $t,y,$ ve $z \ne 0$ için, $0 < \dfrac{\psi_i(t,y,z)}{z} \le b_i,$

iii) Her $t,x,$ ve $y \ne 0$ için, $0 < \dfrac{g_i(t,x,y)}{y} \le c_i,$

iv) Her x için, $\delta_i \le h_i'(x) \le d_i,\quad \sum_{i=1}^{n} d_i = d,\quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \delta,\quad d - 2asc^{-1} < \delta,$

v) Her $x \ne 0$ için, $d_i\left(1 - \dfrac{s_i c_i}{s_i^* ab_i}\right) < K_i < \dfrac{h_i(x)}{x}$, $\sum_{i=1}^{n} K_i = K.$

O zaman, yeterince küçük τ_i ’ler ve $P(.) \equiv 0$ için (6.2) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Teorem 6.2. Teorem 6.1'in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $\Delta > 0$ ve $\Delta_1 > 0$ sabitleri vardır öyle ki

$$|P(.)| \le \Delta + \Delta_1(|x| + |y| + |z| + |w|) \tag{6.3}$$

sağlansın. Bu takdirde, yeterince küçük τ_i'ler için (6.2) sisteminin her çözümü düzgün sınırlıdır ve düzgün mutlak sınırlıdır.

Teorem 6.1 ve Teorem 6.2'nin ispatı:

Teorem 6.1 ve Teorem 6.2'nin ispatları birbirine bağlantılı olduğundan burada bu iki ispat birlikte verilmektedir.

$W = W(x, y, z, w, x_t, y_t, z_t, w_t)$ Lyapunov fonksiyoneli aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$W = W_1(x, y, z) + W_2(x, y, z) + W_3(x_t, y_t, z_t).$$

Burada,

$$2W_1 = m_1(w + m_1 z + m_1 d c^{-1} y)^2 + c(z + m_1 y + m_1 c^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(x))^2$$

$$+ m_1 d \sigma c^{-2}(y + c m_1 \alpha \sigma^{-1} z)^2 + m_2 z^2,$$

$$2W_2 = a(w + az + (ab - n_1)a^{-1} y + \beta x)^2 + n_1(z + ay + a n_1^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(x))^2$$

$$+ \upsilon a^{-1}(y + a n_1 \beta \upsilon^{-1} x)^2 + n_2 x^2 + 2k_1 \sum_{i=1}^{n} \int_0^x h_i(\xi) d\xi - d k_1 x^2$$

$$+ (d^2 x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right)^2)(a^2 n_1^{-1} + m_1^2 c^{-1}),$$

$$W_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{3\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\tau_i}^{0} \int_{s}^{0} [y^2(t+\theta) + z^2(t+\theta) + w^2(t+\theta)] d\theta ds,$$

olup, $\gamma_i \ge 0$ ihtiyaca göre daha sonra belirlenecektir. Ayrıca verilen fonksiyoneldeki sabitler için,

$$0 < \alpha < s(bc - ad)^{-1}, \quad 0 < \beta < s(ab - c)^{-1},$$

$$s \equiv abc - c^2 - ad > 0, \; ab - c > 0$$

$$m_1 = (a - \alpha) > 0, \quad k_1 = ab - n_1 + d m_1^2 c^{-1} > 0, \; n_1 = c - \beta > 0,$$

$$0 < m_2 = s c^{-1} + (ad - bc)\alpha c^{-1} + \alpha m_1^2 m_3 \sigma^{-1} + \alpha d m_1 c^{-1},$$

$$m_3 = \sigma - \alpha d m_1 > 0, \quad \sigma = m_1 bc - m_1^2 d - c^2 > 0,$$

$$n_3 = \upsilon - \beta n_1, \quad \upsilon = abn_1 - n_1^2 - a^2 d > 0,$$

$$n_2 = dsn_1^{-1} + a\beta n_1 n_3 \upsilon^{-1} - d\beta(ab-c)n_1^{-1} + d\beta > 0$$

şartlarının sağlandığı kabul edilmektedir.

Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 ispatında kullanılacak olan aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 6.1. Teorem 6.1'in (i)-(v) şartları ve (6.3) sağlansın. Bu taktirde, $W = W(x, y, z, w, x_t, y_t, z_t, w_t)$ fonksiyoneli ve türevi için aşağıda verilen eşitsizlikler sağlanır:

i) d_1, d_2 ve d_3 pozitif sabitleri vardır öyle ki;

$$d_1(x^2+y^2+z^2+w^2)^{\frac{1}{2}} \le W(x, y, z, w, x_t, y_t, z_t, w_t) \tag{6.4}$$

$$\le d_2(x^2+y^2+z^2+w^2)^{\frac{1}{2}} + d_3(x_t^2+y_t^2+z_t^2+w_t^2)^{\frac{1}{2}},$$

ii) (6.2) sisteminin her (x, y, z, w) çözümü için, $d_i = d_i(a,b,c,d,\delta_1,\delta_2)$, $i = 4, 5$ pozitif sabitleri olmak üzere;

$$W' \le -2d_4(x^2+y^2+z^2+w^2) + \Delta d_5(|x|+|y|+|z|+|w|). \tag{6.5}$$

Şimdi Teorem 6.1'in ispatı için gereken W_1, W_2, W_3 türevlerini sırasıyla hesaplayalım:

$$W_i' = \frac{\partial W_i}{\partial x} y + \frac{\partial W_i}{\partial y} z + \frac{\partial W_i}{\partial z} w + \frac{\partial W_i}{\partial w} w'$$

olduğu dikkate alınırsa;

$$W_1' = m_1 y \sum_{i=1}^{n} h_i'(x)\left(z + m_1 y + m_1 c^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \right)$$

$$+ m_1^2 dc^{-1} z\left(w + m_1 z + m_1 dc^{-1} y \right)$$

$$+ m_1 cz\left(z + m_1 y + m_1 c^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \right) + m_1 d\sigma c^{-2} z\left(y + m_1 c\alpha\sigma^{-1} z \right)$$

$$+m_1^2 w\left(w+m_1 z+m_1 d c^{-1} y\right)+cw\left(z+m_1 y+m_1 c^{-1}\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right)$$
$$+m_1^2 c^{-1} d\alpha w\left(y+m_1 c\alpha\sigma^{-1} z\right)+m_2 zw+\left(m_1 w+m_1^2 z+m_1^2 d c^{-1} y\right)w',$$

$$W_2' = a\beta y\left(w+az+(ab-n_1)a^{-1}y+\beta x\right)$$
$$+ay\sum_{i=1}^{n} h_i'(x)\left(z+ay+an_1^{-1}\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right)$$
$$+n_1\beta y\left(y+an_1\beta\upsilon^{-1}x\right)+n_2 xy+k_1 y\sum_{i=1}^{n} h_i(x)-dk_1 xy$$
$$+\left(a^2 n_1^{-1}+m_1^2 c^{-1}\right)\left(d^2 xy-y\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\sum_{i=1}^{n} h_i'(x)\right)$$
$$+z(ab-n_1)\left(w+az+(ab-n_1)a^{-1}y+\beta x\right)+an_1 z\left(z+ay+an_1^{-1}\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right)$$
$$+\upsilon a^{-1} z\left(y+an_1\beta\upsilon^{-1}x\right)+a^2 w\left(w+az+(ab-n_1)a^{-1}y+\beta x\right)$$
$$+n_1 w\left(z+ay+an_1^{-1}\sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right)+\left(aw+a^2 z+(ab-n_1)y+a\beta x\right)w',$$
$$W_3' = \sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikler ve bazı düzenlemeler kullanılarak W' türevi yeniden yazılırsa:

$$W' = -U(x,y,z,w)+[(m_1+a)w+(m_1^2+a^2)z+k_1 y+a\beta x]M(t)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta,$$

elde edilir. Burada,

$$U(x,y,z,w) = m_1\alpha w^2+n_3 y^2+a\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i(x)}{x}x^2+T(x,y,z)$$

$$T(x,y,z) = m_1 c^{-1} m_3 z^2+(m_1^2+a^2)\left[\sum_{i=1}^{n}(d_i-h_i'(x))\right]y^2$$
$$+(m_1+a)\left[\sum_{i=1}^{n}(d_i-h_i'(x))\right]yz$$

$$=\left[d-\sum_{i=1}^{n}h_i'(x)\right]\left\{\left(m_1y+\frac{z}{2}\right)^2+\left(ay+\frac{z}{2}\right)^2\right\}$$

$$+\left\{m_1c^{-1}m_3-\frac{1}{2}\left[d-\sum_{i=1}^{n}h_i'(x)\right]\right\}z^2$$

olarak alınmaktadır.

$\delta_i \le h_i'(x) \le d_i, \ \sum_{i=1}^{n} d_i = d$ olduğundan,

$$T(x,y,z)\ge \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}h_i'(x)-(d-2m_1m_3c^{-1})\right]z^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Bu eşitsizlik $U(x,y,z,w)$'da yerine yazılır ve

$$D_3=\min\{m_1\alpha, n_3, a\beta K, \frac{1}{2}[\delta-(d-2m_1m_3c^{-1})]\}>0,$$

$$D_4=\max\{(m_1+a),(m_1^2+a^2),k_1,a\beta\}>0$$

şeklinde seçilirse,

$$U(x,y,z,w)\ge D_3(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki ifadeler W' türevinde yerine yazıldığında;

$$W'\le -D_3(x^2+y^2+z^2+w^2)+D_4(|x|+|y|+|z|+|w|).$$

$$.\Big[a|w|+|f(t,x,y,z,w)||w|+\sum_{i=1}^{n}b_i\int_{-\tau_i}^{0}|w(t+\theta)|d\theta$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|\psi_i(t,y(t-\tau_i),z(t-\tau_i))|+\sum_{i=1}^{n}b_i|z(t-\tau_i)|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i\int_{-\tau_i}^{0}|z(t+\theta)|d\theta+\sum_{i=1}^{n}|g_i(t,x(t-\tau_i),y(t-\tau_i))|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i|y(t-\tau_i)|+\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}\left|h_i'(x(t+\theta))\right||y(t+\theta)|d\theta+|P_2|\Big]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta \tag{6.6}$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 6.1'in (ii) ve (iii) şartları dikkate alınarak aşağıdaki eşitsizliklere ulaşılır:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\psi_i(t, y(t-\tau_i), z(t-\tau_i))\right| + \sum_{i=1}^{n} b_i\left|z(t-\tau_i)\right| \leq 2b\sum_{i=1}^{n}\left|z(t-\tau_i)\right|,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g_i(t, x(t-\tau_i), y(t-\tau_i))\right| + \sum_{i=1}^{n} c_i\left|y(t-\tau_i)\right| \leq 2c\sum_{i=1}^{n}\left|y(t-\tau_i)\right|.$$

Son eşitsizlikler ve Teorem 6.1'in (iv) şartı göz önüne alınarak, (6.6) eşitsizliğinden,

$$W' \leq -D_3(x^2+y^2+z^2+w^2) + D_4(|x|+|y|+|z|+|w|).$$

$$.\Big[(a+|f(t,x,y,z,w)|)|w| + \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{-\tau_i}^{0} |w(t+\theta)|\,d\theta + 2b\sum_{i=1}^{n}|z(t-\tau_i)|$$

$$+2c\sum_{i=1}^{n}|y(t-\tau_i)| + \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{-\tau_i}^{0} |z(t+\theta)|\,d\theta + d\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0} |y(t+\theta)|\,d\theta + |P|\Big]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta \qquad (6.7)$$

elde edilir. Burada,

$2b\sum_{i=1}^{n}|z(t-\tau_i)|$ ve $2c\sum_{i=1}^{n}|y(t-\tau_i)|$ terimleri ele alınır ve

$$|z(t-\tau_i)| = |z(t)| - \int_{-\tau_i}^{0} |w(t+\theta)|d\theta$$

eşitliği kullanılırsa,

$$2\sum_{i=1}^{n} b_i|z(t-\tau_i)| \leq 2b|z(t)| + 2b\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|w(t+\theta)|\,d\theta$$

ve

$$|y(t-\tau_i)| = |y(t)| - \int_{-\tau_i}^{0} |z(t+\theta)|d\theta$$

eşitliği kullanıldığında ise,

$$2\sum_{i=1}^{n} c_i|y(t-\tau_i)| \leq 2c|y(t)| + 2c\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|z(t+\theta)|\,d\theta$$

elde edilir.

Teorem 6.1'in (i) şartı, (6.3) eşitsizliği ve son elde edilen eşitsizlikler (6.7)'de yerine yazıldığında bazı düzenlemeler yardımıyla;

$$W' \le -D_3(x^2+y^2+z^2+w^2)+\Delta D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)$$
$$+D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)\left[3b\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|w(t+\theta)|\,d\theta\right.$$
$$\left.+3c\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|z(t+\theta)|\,d\theta+d\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}|y(t+\theta)|\,d\theta\right]$$
$$+D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)\left[\Delta_1|x|+(\Delta_1+2c)|y|+(\Delta_1+2b)|z|+(\Delta_1+2a)|w|\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta \qquad (6.8)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\Delta_2=\max\{\Delta_1,\Delta_1+2c,\Delta_1+2b,\Delta_1+2a\},$$
$$k=D_4\max\{3b,3c,d,\Delta_2\}$$

olarak seçilirse, (6.8) eşitsizliğinin aşağıdaki şekilde yazılabileceği kolaylıkla görülebilir:

$$W' \le -D_3(x^2+y^2+z^2+w^2)+\Delta D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)+k(|x|+|y|+|z|+|w|).$$
$$.\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}\{|y(t+\theta)|+|z(t+\theta)|+|w(t+\theta)|\}d\theta+(|x|+|y|+|z|+|w|)\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta. \qquad (6.9)$$

Burada $k(|x|+|y|+|z|+|w|)^2$ ifadesi gözönüne alındığında $2|a||b|\le a^2+b^2$ eşitsizliği yardımıyla,

$$k(|x|+|y|+|z|+|w|)^2 \le 4k(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

elde edilir. Son eşitsizlik (6.9)'da yerine yazıldığında,

$$W' \le -D_3(x^2+y^2+z^2+w^2)+\Delta D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)+4k(x^2+y^2+z^2+w^2)$$
$$+k\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{0}(|x|+|y|+|z|+|w|)\{|y(t+\theta)|+|z(t+\theta)|+|w(t+\theta)|\}d\theta$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{3\gamma_i}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}[y^2+z^2+w^2-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)-w^2(t+\theta)]d\theta$$

olduğu görülür.

Burada $D_3-4k=5D>0$ alınırsa ve γ_i, μ_i,

$$\gamma_i=\frac{D}{2n}-\frac{\left(D^2-4k^2\tau_i^{\,2}\right)^{1/2}}{2n}\geq 0,\quad \mu_i=\frac{D}{2n}+\frac{\left(D^2-4k^2\tau_i^{\,2}\right)^{1/2}}{2n}\geq 0$$

olarak seçilirse, son eşitsizlik aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenebilir:

$$W'\leq -2D(x^2+y^2+z^2+w^2)+\Delta D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i x^2+\frac{3}{4}\gamma_i y^2(t+\theta)-k\tau_i|x||y(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i x^2+\frac{3}{4}\gamma_i z^2(t+\theta)-k\tau_i|x||z(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i x^2+\frac{3}{4}\gamma_i w^2(t+\theta)-k\tau_i|x||w(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i y^2+\frac{3}{4}\gamma_i y^2(t+\theta)-k\tau_i|y||y(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i y^2+\frac{3}{4}\gamma_i z^2(t+\theta)-k\tau_i|y||z(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i y^2+\frac{3}{4}\gamma_i w^2(t+\theta)-k\tau_i|y||w(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i z^2+\frac{3}{4}\gamma_i y^2(t+\theta)-k\tau_i|z||y(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i z^2+\frac{3}{4}\gamma_i z^2(t+\theta)-k\tau_i|z||z(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i z^2+\frac{3}{4}\gamma_i w^2(t+\theta)-k\tau_i|z||w(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i w^2+\frac{3}{4}\gamma_i y^2(t+\theta)-k\tau_i|w||y(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i w^2+\frac{3}{4}\gamma_i z^2(t+\theta)-k\tau_i\,|w||z(t+\theta)|\right]d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}\left[\mu_i w^2+\frac{3}{4}\gamma_i w^2(t+\theta)-k\tau_i\,|w||w(t+\theta)|\right]d\theta.$$

Yukarıdaki eşitsizlikteki herbir integral pozitif tanımlıdır. Böylece,

$$W'\leq -2D(x^2+y^2+z^2+w^2)+\Delta D_4(|x|+|y|+|z|+|w|)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani, Lemma 6.1'de verilen (6.5) eşitsizliği sağlanmış olur. O halde (6.2) sisteminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu söylenebilir. Ayrıca, (Chukwu, 1978, Teorem 1.1 ve Teorem 1.2) dikkate alındığında verilen diferansiyel denklemin en az bir T - periyodik çözümünün var olduğu ve çözümlerinin sınırlı olduğu sonucuna varılabilir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, Giriş ve Kaynak Bildirişleri bölümünde, ilgili literatürde bahsi geçen, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli fonksiyonel bazı diferansiyel denklemler için periyodik çözümlerin varlığı, kararlılığı, asimptotik kararlılığı, sınırlılığı ve düzgün sınırlılığı üzerinde durulmuştur.

Bu doğrultuda, üçüncü bölümde tezdeki çalışmalarda kullandığımız ve temel nitelikte olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ikinci mertebeden lineer olmayan sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli iki farklı diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar, beşinci bölümünde üçüncü mertebeden lineer olmayan çoklu gecikmeli iki farklı diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar Lyapunov yöntemi yardımıyla elde edilmiştir. Altıncı bölümde ise dördüncü mertebeden lineer olmayan çoklu gecikmeli bir diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı, kararlılık durumu ve sınırlılığı için yeter şartlar Lyapunov yöntemi aracılığıyla elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu tezde ele alınan problemlerin ilgili literatüre katkılarının olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Abou-El-Ela, A. M. A., Sadek, A. I., Mahmoud, A. M. 2012. Existence and uniqueness of a periodic solution for third-order delay differential equation with two deviating arguments. ***IAENG Int. J. Appl. Math,*** **42** (1): 7–12.

Ademola, A., T., 2013. Existence and uniqueness of a periodic solution to certain third order nonlinear delay differential equation with multiple deviating arguments. ***Acta Univ. Sapientiae Math,*** **5** (2): 113–131.

Ademola, A. T., Ogundiran, M. O., Arawomo, P. O., 2015. Stability, boundedness and existence of periodic solutions to certain third order nonlinear differential equations. ***Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math,*** **54** (1): 5–18.

Ademola, A. T., Ogundare, B. S., Ogundiran, M. O., Adesina, O. A., 2015. Stability, boundedness, and existence of periodic solutions to certain third-order delay differential equations with multiple deviating arguments. ***Int. J. Differ. Equ.***, 12.

Afuwape, A. U., Adesina, O. A., 2005. Frequency-domain approach to stability and periodic solutions of certain fourth-order non-linear differential equations. ***Nonlinear Stud.,*** **12** (3): 259–269.

Ahmad, S., Rama Mohana Rao, M., 1999. ***Theory of Ordinary Differential Equations with Applications in Biology and Engineering.*** Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi.

Ardjouni, A., Rezaiguia, A., Djoudi, A., 2014. Existence of positive periodic solutions for fourth-order nonlinear neutral differential equations with variable delay. ***Adv. Nonlinear Anal.,*** **3** (3): 157–163.

Bereanu, C., 2009. Periodic solutions of some fourth-order nonlinear differential equations. ***Nonlinear Anal.,*** **71** (1-2): 53–57.

Burton, TA., 1985. ***Stability and periodic solutions of ordinary and funtional differential equations.*** Academic Press, New York, 331.

Cheng, Z., 2014. Existence of positive periodic solutions for third-order differential equation with strong singularity. ***Adv. Difference Equ.,*** **162**: 12.

Chukwu, E. N., 1978. On the boundedness and the existence of a periodic solution of some nonlinear third order delay differential equation. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,*** **64** (5): 440–447.

Ezeilo, J. O. C., 1960. On the existence of periodic solutions of a certain third-order differential equation. ***Proc. Cambridge Philos. Soc.,*** **56**: 381–389.

Ezeilo, J. O. C., 1973. Periodic solutions of a certain third order differential equation. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,*** **54**:34–41.

Ezeilo, J. O. C., 1975. Periodic solutions of certain third order differential equations. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,*** **57** (1-2): 54–60.

Ezeilo, J. O. C., 1978. Periodic solutions of certain third order differential equations of the nondissipative type. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,*** **63** (3-4): 212–224.

Ezeilo, J. O. C., 1978. Further results on the existence of periodic solutions of a certain third-order differential equation. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,*** **64** (1): 48–58.

Ezeilo, J. O. C., 1978. Further results on the existence of periodic solutions of a certain third order differential equation. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*,** **63** (6): 493–503.

Ezeilo, J. O. C., 1978. Periodic solutions of a certain fourth order differential equation. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*,** **68** (3-4): 204–211.

Ezeilo, J. O. C., 1979. On the existence of periodic solutions of certain third order nondissipative differential systems. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.***, **66** (2): 126–135.

Ezeilo, J. O. C., Tẹjumọla, H. O., 1979. Periodic solutions of a certain fourth order differential equation. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur*., 66** (5): 344–350.

Ezeilo, J. O. C., 1983. Uniqueness theorems for periodic solutions of certain fourth and fifth order differential systems. ***J. Nigerian Math. Soc.*, 2**: 55–59.

Fan, Q., Wang., W., Zhou., J., 2009. Periodic solutions of some fourth-order nonlinear differential equations***. J. Comput. Appl. Math.*, 233** (2): 121–126.

Feng, C. H., 1995. On the existence of periodic solutions to certain fourth order differential equation. ***Ann. Differential Equations*, 11** (1): 46–50.

Guo, C., O'Regan, D., Xu, Y., Agarwal, Ravi P., 2014.Existence of periodic solutions for a class of second-order superquadratic delay differential equations. ***Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 21** (5): 405–419.

Harrow, M., 1968. Further results for the solution of certain third order differential equations. ***J. London Math. Soc.*, 43**: 587–592.

Huang, X., 1999. On the existence of periodic solutions for the third-order nonlinear ordinary differential equations. ***Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser., B* 14** (2): 125–130.

Jiang, A., Shao, J., 2012. Existence and uniqueness on periodic solutions of fourth-order nonlinear differential equations. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ*.,** (69): 13.

Kiguradze, I. T., 1968. On periodic solutions of nonlinear second order differential equations. ***Proceedings of the Fouth Conference on Nonlinear Oscillations***, 175–180.

Kurasin, V. N., 1978. Determination of the domain of stability of a fourth-order differential equation with periodic coefficients. (Russian) ***Differentsial'nye Uravneniya (Ryazan)*, 11:** 112–115.

Lezina, T. A., 1984. Periodic solutions of systems of second-order differential equations. ***Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom*., vyp., 2**: 98–101.

Li, Q., Li, Y., 2012. On the existence of positive periodic solutions for second-order functional differential equations with multiple delays. ***Abstr. Appl. Anal.***, 13.

Li, Y., Guo, L., 2017. Odd periodic solutions of fully second-order ordinary differential equations with superlinear nonlinearities. ***J. Funct. Spaces***, 5.

Li, Q., Li, Y., 2014. Existence and multiplicity of positive periodic solutions for second-order functional differential equations with infinite delay. ***Electron. J. Differential Equations***, (93): 14.

Liao, F., 2017. Periodic solutions of second order differential equations with vanishing Green's functions. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ***., (55): 8.

Liu, B. W., Huang, L. H., Li, Y., 2006. Existence of periodic solutions of a third-order functional differential equation. (Chinese***) Acta Math. Appl. Sin.*, 29** (2): 226–233.

Lippman, D., Rasmussen, M., 2012. ***Precalculus An Investigation of Functions.*** San Francisco, California, USA.

Llibre, J., Makhlouf, A., 2017. Periodic solutions of some classes of continuous second-order differential equations. ***Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser., B*** **22** (2): 477–482.

Llibre, J., Makhlouf., A., 2012. Periodic orbits of the fourth-order non-autonomous differential equation $u'''' + qu'' + pu = \varepsilon F(t, u, u', u'', u''')$. ***Appl. Math. Comput.,*** **219** (3): 827–836.

Llibre, J., Teixeira, M. A., 2012. On the periodic orbits of the fourth-order differential equation $u'''' + qu'' - u = \varepsilon F(u, u', u'', u''')$. ***J. Math. Anal. Appl.,*** **387** (1): 181–188.

Lomtatidze, A., 2017. On periodic bounded and unbounded solutions of second order nonlinear ordinary differential equations. ***Georgian Math. J.***, **24** (2): 241–263.

Ma, R., Chen, R., He, Z., 2014. Positive periodic solutions of second-order differential equations with weak singularities. ***Appl. Math. Comput***., **232**: 97–103.

Ma, R., Lu, Y., 2014. Existence of positive periodic solutions for second-order functional differential equations. ***Monatsh. Math.,*** **173** (1): 67–81.

Ma, Y., 2014. Existence of positive periodic solutions of second-order differential equations with weak singularities. ***Bound. Value Probl.,*** **188:** 8.

Mehri, B., Khalessizadeh, M., 1977. On the existence of periodic solutions for a certain non-linear third order differential equation. ***Z. Angew. Math. Mech.,*** **57** (5): 241–243.

Mehri, B., 1980. Periodic solutions for a certain nonlinear third order differential equation. ***Bull. Iranian Math. Soc.,*** **8** (1): 9–13.

Mehri, B., 1981. A note on periodic solution for certain nonlinear third order autonomous differential equation. ***Rev. Roumaine Math. Pures Appl.,*** **26** (9): 1211–1215.

Mehri, B., 1990. Periodic solution for certain nonlinear third order differential equations***. Indian J. Pure Appl. Math.,*** **21** (3): 203–210.

Mehri, B., Shadman, D., 1997. Periodic solutions of certain third order nonlinear differential equations. ***Studia Sci. Math. Hungar.,*** **33** (4): 345–350.

Mehri, B., Shadman., D., 1997. Periodic solution of a certain class of nonlinear fourth order differential equation. ***Sci. Iran.,*** **4** (1-2): 1–7.

Mehri, B., Niksirat, M., 2001. On the existence of periodic solutions for the quasi-linear third-order differential equation. ***J. Math. Anal. Appl.,*** **261** (1): 159–167.

Mehri, B.; Niksirat, M. A., 2003. On the existence of periodic solutions for singular non-autonomous third order systems. ***Appl. Comput. Math.,*** **2** (2): 148–155.

Mehri, B., Shadman, D., 2004. Periodic solution of a certain non-linear third order differential equation. ***Sci. Iran.,*** **11** (3): 181–184.

Mehri, B., Niksirat, M. A., 2005. Some computable results on the existence of periodic solutions for singular non-autonomous third order systems. ***Appl. Math. Comput.,*** **163** (1): 51–60.

Meng, Q., Zhang, X., 2013. Multiple periodic solutions to a class of nonautonomous second-order delay differential equation. ***Bound. Value Probl.,*** **244**: 13.

Metzen, G., 1988. Existence of periodic solutions of second order differential equations with delay. ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** **103** (3): 765–772.

Ogundare, B. S., 2010. Globally stable periodic solution of certain fourth order non-linear differential equations. ***Far East J. Math. Sci. (FJMS),*** **42** (1): 1–19.

Reissig, R., 1972. Periodic solutions of a third order nonlinear differential equation. ***Ann. Mat. Pura Appl.,* 4** (92): 193–198.

Reissig, R., Sansone , G., and Conti, R., 1974. ***Non-linear differential equations of higher order.*** Translated from the German. Noordhoff International Publishing , Leyden. xiii+669.

Remili, M., Beldjerd, D., 2016. On ultimate boundedness and existence of periodic solutions of kind of third order delay differential equations. ***Acta Univ. M. Belii Ser. Math.***, 1–15.

Saburov, M. S., 1971. The boundedness of the solutions of a second order differential equation with periodic coefficients. ***Differencial'nye Uravnenija*** , **7**: 2019–2029.

Schmitt, K., 1971. A note on periodic solutions of second order ordinary differential equations**. *SIAM J. Appl. Math.,* 21**: 491–494.

Tẹjumọla, H. O., 1972. A note on the boundedness and the stability of solutions of certain third-order differential equations**. *Ann. Mat. Pura Appl.,* 4 (92**): 65–75.

Tẹjumọla, H. O., 1975. On the existence of periodic solutions of certain fourth order differential equations. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), 57** (6): 530–533.

Tẹjumọla, H. O., 1975. Periodic solutions of certain fourth order differential equations. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), 57** (5): 328–336.

Tẹjumọla, H. O., 1979. Periodic solutions of certain third order differential equations. ***Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), 66** (4): 243–249.

Tẹjumọla, H. O., 1979. Periodic solutions of certain nondissipative systems of third-order differential equations. ***Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II***, 985–1001.

Tejumola, H. O., 1992. On the existence of periodic solutions of some third-order nonlinear differential equations with delay. Special issue in honour of Professor James O. C. Ezeilo. ***J. Nigerian Math. Soc.* 11**, (3): 19–28.

Tẹjumọla, H. O., Tchegnani, B., 2000. Stability, boundedness and existence of periodic solutions of some third and fourth order nonlinear delay differential equations**. *J. Nigerian Math. Soc.,* 19** (3): 9–19.

Tunç, E. 2005. On the periodic solutions of certain fourth and fifth order vector differential equations. ***Math. Commun.,* 10** (2): 135–141.

Tunç, C., 2009. On existence of periodic solution to certain nonlinear third order differential equations***. Proyecciones,* 28** (2): 125–132.

Tunç, C., Yazgan, R., 2013. Existence of periodic solutions to multidelay functional differential equations of second order. ***Abstr. Appl. Anal.,*** Art. ID 968541, 5.

Wang, Y. G., Lu, S. P., 2009. Existence and uniqueness of the periodic solution for a third-order functional differential equation. (Chinese) ***J. Math. Study.,* 42** (1): 58–62.

Wei, Y., 2014. Existence and uniqueness of periodic solutions for second order differential equations. ***J. Funct. Spaces***, 5.

Wu, K., Wu, X., Zhou, F., 2013. Periodic solutions for a class of second order delay systems. ***J. Dyn. Control Syst.,* 19** (3): 421–437.

Xiang, Z. G., 1992. Periodic solutions to a class of third-order nonlinear ordinary differential equations. ***(Chinese) Pure Appl. Math. (Xi'an)* 8** (2): 14–20.

Yoshizawa, T., 1966. ***Stability theory by Liapunov's second method.*** The Mathematical Society of Japan, Tokyo. 223.

Yoshizawa, T., 1975. ***Stability theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions.*** Springer-Verlag. 223.

Zhang, Z., Wang, Z., 2002. Periodic solutions of third-order functional differential equations with variable coefficients. ***Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser., B*** **17** (2): 145–154.

Zhang., Z., Zheng., X., Wang., Z., 2002. Periodic solutions of a fourth order nonlinear functional differential equations. ***Soochow J. Math.,*** **28** (3): 253–265.

Zhang, Z., Wang, Z., Wu, J., 2003. Periodic solutions of third order nonlinear functional differential equations. ***Commun. Appl. Anal.,*** **7** (2-3): 425–435.

Zhang, Z., Wang, Z., 2004. Periodic solutions of the third order functional differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.,*** **292** (1): 115–134.

Zhang, T., Ma, T., 2014. Positive periodic solution of second-order differential equations with singularities. ***Gongcheng Shuxue Xuebao***, **31** (4): 611–621.

Zhao, J. M., Huang, K. L., Lu, Q. S., 1994. The existence of periodic solutions for a class of functional-differential equations and their application. ***Appl. Math. Mech.***, **15** (1): 49–59.

Zhao, C., Chen, W., Zhou., J., 2010. Periodic solutions for a class of fourth-order nonlinear differential equations. ***Nonlinear Anal.,*** **72** (3-4): 1221–1226.

Zhou, T. F., 2015. Existence of periodic solutions for semi-linear second-order differential equations. ***Gongcheng Shuxue Xuebao,*** **32** (5): 690–696.

Zhu, Y., 1992. On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlinear delay differential system. ***Ann. of Diff. Eqs., 8*** (2): 249-259.

ÖZ GEÇMİŞ

1982 yılında Manisa'da doğdu. İlk ve Ortaöğretimi Konya'nın Doğanhisar ilçesinde tamamladı. 2000 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2004 yılında hem fakülte hem de bölümden birincilikle mezun olup aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başlayarak 2007 yılında mezun oldu ve 2008'de doktora eğitimine başladı.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 21/05/2018

Tez Başlığı: **Bazı Türden Diferansiyel Denklemlerde Periyodik Çözümlerin Varlığı**

Yukarıda başlığı belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 48 sayfalık kısmına ilişkin, 21/05/2018 tarihinde şahsım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 19 (ondokuz) dur.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç.
- Teşekkür hariç.
- İçindekiler hariç.
- Simge ve kısaltmalar hariç.
- Gereç ve yöntemler hariç.
- Kaynakça hariç.
- Alıntılar hariç.
- Tezden çıkan yayınlar hariç.
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

21/05/2018

Adı Soyadı: SULTAN ERDUR

Öğrenci No: 7911120067

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Statüsü: Y. Lisans ☐ Doktora ■

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Cemil TUNÇ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)