

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**4R VE 2RPR MEKANİZMALARININ KİNEMATİĞİNİN DUAL
KUATERNİYONLAR VE CLIFFORD CEBİRİ İLE MODELLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Vedat DÖRMA
DANIŞMAN: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

VAN-2018

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**4R VE 2RPR MEKANİZMALARININ KİNEMATİĞİNİN DUAL
KUATERNİYONLAR VE CLIFFORD CEBİRİ İLE MODELLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

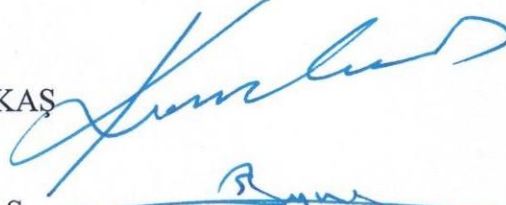
HAZIRLAYAN: Vedat DÖRMA

VAN-2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ danışmanlığında, Vedat DÖRMA tarafından sunulan “**4R ve 2RPR Mekanizmalarının Kinematığının Dual Kuaterniyonlar ve Clifford Cebiri ile Modellenmesi**” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 07/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ



Üye: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ



Üye: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU



Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

V.ant

Vedat DÖRMA

ÖZET

4R VE 2RPR MEKANİZMALARININ KİNEMATİĞİNİN DUAL KUATERNİYONLAR VE CLIFFORD CEBİRİ İLE MODELLENMESİ

DÖRMA, Vedat
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
Haziran 2018, 69 sayfa

RRRR (4R) ve RRPR (2RPR) mekanizmalarının kinematığının dual kuaterniyonlar ve Clifford cebiri ile modellenmesi başlıklı tez yedi bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümünde giriş, ikinci bölümünde kaynak bildirişleri, üçüncü bölümünde tezde kullanılacak temel kavramlara yer verildi. Dördüncü bölümde Clifford cebiri, dönme, yansıma ve motor cebirine ait bilgiler verildi. Beşinci bölümde Denavit-Hartenberg ileri kinematik denklemlerin temsili olan matris formları ve motor denklemlerinin ileri kinematığına ait bilgiler verildi. Altıncı bölümde tasarlanan 4R ve 2RPR mekanizmalarının Denavit-Hartenberg parametreleri, ileri kinematığı, motor denklemleri ve kinematik denklemleri elde edildi ve oluşturulan kinematik yapının belirlenen bir algoritma içinde Matlab programı yazıldı ve Matlab çıktıları eklendi. Yedinci bölümde sonuç ve tartışma verildi.

Anahtar kelimeler: Clifford cebiri, Denavit-Hartenberg temsili, Dual Kuaterniyon, SCARA robot.



ABSTRACT

MODELING THE KINEMATICS OF 4R AND 2RPR MECHANISMS USING DUAL QUATERNIONS AND CLIFFORD ALGEBRA

DÖRMA, Vedat
M. Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ
June 2018, 69 pages

This thesis consists of the dual quaternions of the kinematics of the RRRR (4R) and RRPR (2RPR) mechanisms and their modeling with Clifford algebra. The first chapter is about introduction, second chapter is about literature and the third chapter is about the basic concepts we used in the thesis. In the fourth chapter, Clifford algebra, rotation, reflection and motor algebra were given. In the fifth chapter, Denavit-Hartenberg representation, forward kinematic equations and forward kinematics of motor algebra were given. In the sixth chapter we give Denavit-Hartenberg parameters forward kinematics, motor equation and kinematic equations of the 4R and 2RPR mechanisms are obtained. Additionally, Matlab program were used for examples. The results and discussions were given in the seventh chapter.

Keywords: Clifford algebra, Denavit-Hartenberg representation, Dual quaternion, SCARA robot.



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen bana her zaman destek olan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ ve Sayın Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ'a, ayrıca verdikleri desteklerinden ötürü aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

2018
Vedat DÖRMA



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	5
3.1. Temel Kinematik Bilgiler	5
3.1.1. Katı transformasyonlar	5
3.1.2. Koordinat transformasyonları	5
3.1.3. Yer değiştirme.....	7
3.2. Kuaterniyonlar	8
3.2.1. Reel kuaterniyonların matris gösterimi	10
3.3. Dual Birim Küre ve Study Dönüşümü	13
3.3.1. DS üzerindeki iç çarpımın yorumu.....	21
3.3.2. Kuaterniyon operatörü.....	22
3.3.3. Dönme operatörü.....	23
3.3.4. Vida operatörü	24
4. CLIFFORD CEBİRİ.....	29
4.1. Geometrik Çarpım	30
4.2. Dönme ve Yansıma	32
4.3. Rotorlar.....	36
4.4. Motor Cebiri.	38
4.4.1. $Q^+_{3,0,1}$ daki motor, rotor ve translasyonlar.....	38
4.4.2. Motor özellikleri.....	40
4.4.3. Nokta, doğru ve düzlemlerin gösterimi	41
4.5. Nokta, Doğru ve Düzlemlerin Hareketlerinin Modellenmesi	43

	Sayfa
4.5.1. Nokta hareketi.....	43
4.5.2. Doğru hareketi.....	43
4.5.3. Düzlem hareketi.....	44
5. DENAVIT-HARTENBERG PARAMETRELERİ.....	45
5.1. Denavit-Hartenberg İleri Kinematik Denklemlerin Temsili.....	45
5.2. Robot Manipülatörlerin İleri Kinematiği.....	46
6. 4R VE 2RPR MEKANİZMALARININ DUAL KUATERNİYON, D-H PARAMETRELERİ VE CLIFFORD ÇARPIMI İLE TEMSİLİ	49
6.1. 4R Mekanizma Tasarımı ve İleri Kinematiği	49
6.2. 2RPR Mekanizma Tasarımı ve İleri Kinematiği	53
6.3. 4R Mekanizmasına Ait Matlab Programları ve Çıktıları	56
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	65
KAYNAKLAR.....	67
ÖZ GEÇMİŞ.....	69

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Kuaterniyon çarpımı.....	9
Çizelge 6.1. 4R robotun Denavit-Hartenberg değişkenleri.	50
Çizelge 6.2. 4R D-H sayısal değerleri.	53
Çizelge 6.3. 2RPR değişkenleri.....	53
Çizelge 6.4. 2RPR sayısal değerleri.	56



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Koordinat transformasyonu.....	6
Şekil 3.2. İki dual birim vektör arasındaki dual açı.....	21
Şekil 3.3. Düzlemde iki vektöre dik olan birim vektör.	22
Şekil 3.4. Kesişen iki doğruya dik olan vektör.....	23
Şekil 3.5. Vida operatörü.....	24
Şekil 3.6. Dönme ve öteleme.....	27
Şekil 4.1.Yönlendirilmiş alan olarak XAY ve YAX dış çarpımı.....	31
Şekil 4.2. Yönlendirilmiş hacim olarak $XAYAZ$ dış çarpımı.....	31
Şekil 4.3. Bir vektörün bileşenleri.....	32
Şekil 4.4. Bir vektörün yansıması.....	33
Şekil 4.5. mnanm dönmesi	34
Şekil 4.6. z ekseninde 2θ lık dönme.....	36
Şekil 4.7. 3-boyutlu uzayda çift yansımalar tarafından oluşturulan rotor.	37
Şekil 4.8. Vida hareketi.	39
Şekil 4.9. Bivektörler çatısında bir doğrunun yerleşimi.....	42
Şekil 4.10. Düzlem kareketi.	44
Şekil 5.1. Denavit-Hartenberg çatı yerleşmesi.	46
Şekil 5.2. Doğru ve düzlem gösterimi	47
Şekil 5.3. RRRP Scara manipülatörü.....	48
Şekil 6.1. Çalışma uzayı.	49
Şekil 6.2. 4R robotun çatı yerleşimi	52

	Sayfa
Şekil 6.3. 2RPR mekanizma	55
Şekil 6.4. 4R mekanizmasının çatı yerleşimi	59
Şekil 6.5. 4R mekanizmasının Matlab çıktısı	63



1. GİRİŞ

Dual sayılar William Kingdon Clifford (04.05.1845-03.03.1879) tarafından tanıtılmıştır. Asıl önem kazanması ise Eduard Study tarafından olmuştur. Dual sayılar kompleks sayıların bir benzeri gibi de görülebilir. Ancak kinematik açıdan, özellikle birim dual küre uygulamalarında önem arz eder. Birim dual küre ve \mathbb{R}^3 deki yönlü doğrular arasındaki bire-bir tekabül \mathbb{R}^3 deki doğru demetlerinin birim dual küre üstündeki temsilini sağlar. Kinematik açıdan doğru demetleri dönme eksenlerinin bir ailesi olması sebebiyle, bir hareketin regle yüzeyini birim dual küre üstünden irdelemek mümkündür. Ayrıca geometrik çarpım, vektör demetleri üstünden tanımlandığı için geometrik çarpım, birim dual küre, doğru demetleri arasındaki geçişler önemlidir ve detaylandırılabilir.

Robot sistemleri ve mekanizmalarda kinematik araç olarak dönme ve öteleme dönüşümlerini kullanılır. Dönme ve ötelemeler, matris teorisini kullanarak 3x3 dönme matrisi ve 3x1 öteleme matrisi veya homojen koordinatlarda 4x4 matrisler ile ifade edilebilir. Mekanizma yerleşiminde kullanışlı algoritmaların başında Denavit-Hartenberg (D-H) algoritması verilebilir. Dönme ve öteleme için kuaterniyonlar ve kuaterniyon cebirini dual kuaterniyonları kullanmak için de bir başka yöntemdir. Clifford tarafından geometrik çarpım olarak takdim edilen, daha sonraları Clifford çarpımı olarak isimlendirilen çarpım temel olarak bilinen bu yöntemleri bir üst çarpım olarak içerir. Mekanizma kinematiğini Clifford çarpımıyla vermek diğer mevcut yöntemler arasında geçişi de kolaylaştırır.

Motor kavramı Clifford tarafından ortaya atılmıştır, ancak nokta, doğru ve düzlemlerin motorlar açısından modellenmesini göstermemiştir. Dual kuaterniyonlar cümlesi motorlar cümlesine izomorftur. Bununla birlikte vektörlerin dönen düzlemler olarak geometrik anlamı nedeniyle, sadece geometrik bir bakış açısından motorları kullanarak vidalar kolayca formüle edilebilmektedir. Sonuç olarak nokta, doğru ve düzlemlerin cebirsel olarak motor cebiriyle modellenmesi dual kuaterniyonlarla daha kolaydır. Motor cebiri geometrik bir cebir olduğu için 2-bladelerin seçimi ve yorumlanmasında duallite kavramının yanı sıra geometrik kısıtlamalarda kullanılabilir. Son yıllarda robotikte dual matrisler ve dual kuaterniyon kullanımı artış göstermektedir. Motor cebirinin kullanımının önemli avantajları vardır. Motorlar kullanılarak nokta, doğru ve düzlemlerin hareketleri modellenebilir

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Literatürde robotik problemleri çözmek için çeşitli matematiksel yaklaşımlar vardır. Denavit ve Hartenberg, matris cebirine dayalı en alt çift mekanizmalar için kullanılan kinematik gösterimi yapmıştır (Bottema ve Roth, 1990; Fu ve ark., 1987; Niku, 2001). Walker, manipülatör kinematiği geliştirmek için epsilon cebirini kullanmıştır (Walker, 1988). Robotikte vida döndürme işleminin ayrıntılı bir hesaplamasının analizi gösterilmiştir (Funda, 1988). Bu yazarlar dual kuaterniyon dönme ve vida dönüşümlerini eş zamanlı olarak temsil edebildiğinden robot zincirlerin kinematik ile birim kuaterniyon biçiminden daha etkili olduğunu açıklamıştır.

Matematiksel yaklaşımların tamamının temelinde iki önemli husus dikkate alınır: Birincisi dual sayıların açık kullanımını, ikincisi ise vida dönüşümlerinin matrisler veya çift kuaterniyonlar olarak gösterilmesidir. Özellikle motor cebirinin nokta doğru temsilinin yanında, düzlem hareketlerinin modellenmesini mümkün kıldığı düşünülmektedir. Nokta, doğru ve düzlemler kullanılarak, bir robot manipülatörünün prizmatik ve döngüsel dönüşümlerinin modellenmesinden sonra, robot manipülatörlerinin ileri ve ters kinematikleri çözülebilir. Nokta, doğru ve düzlemlerin motorlar açısından hareketi ile basit bir kavrayış görevi için kısıtlamalar verilebilir. Robot manipülatörleri ile ilgili problemleri çözmek için motor cebirini kullanılmasının avantajları açıkça görülmektedir (Bayro-Corrochano ve Kahler, 2000).

Geometrik modelleme kullanılarak, motor cebirinin robotikte ardışık hareketler için elverişli materyaller sunar (Breuils ve ark., 2017; Gunn, 2017).



3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Temel Kinematik Bilgiler

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel bilgiler verilecektir. Bu temel bilgiler hareket geometrisinin, bir hareketin modellenmesinde temel olan yer değiştirme kavramı için gerekli olan dönme, öteleme ve bunlarla ilgili olan teorik bilgileri içerir.

3.1.1. Katı transformasyonlar

Bir kinematik zincirde, bir linkin diğer bir linke göre konumu matematiksel olarak her cisme bağlanmış referans çatıları arasında olan bir koordinat transformasyonu ile tanımlanır. Bir dönüşüm altında noktalar arasındaki uzaklıklar değişmeyen ise buna katı transformasyon denir. Katı transformasyonlar dönmeleri ve ötelemeleri içerir. Düzlemsel mekanizmalar için iki boyutta dönmeleri ve ötelemeleri ele almamız gerekmektedir. Uzaysal mekanizmalar için üç boyutta dönme ve ötelemeler ele alınır.

Koordinat transformasyonu cismin konumunu tanımlayan aynı denklem, cisimi bir başlangıç konumundan bitiş konumuna taşıyan bir işlem olarak yorumlanabilir. Bu terim olarak yer değiştirmedir. Cisim hareket ederken, cisimdeki nokta ve doğrular hareket etmez yani düzlemsel bir yer değiştirmenin kutup noktası, uzaysal bir dönmenin ekseni ve uzaysal bir yer değiştirmenin screw ekseni yer değiştirmeyi karakterize eder. Homojen transformasyonların invaryant altuzayları veya özvektörleri koordinat transformasyonunu tanımlar (McCarthy, 1990).

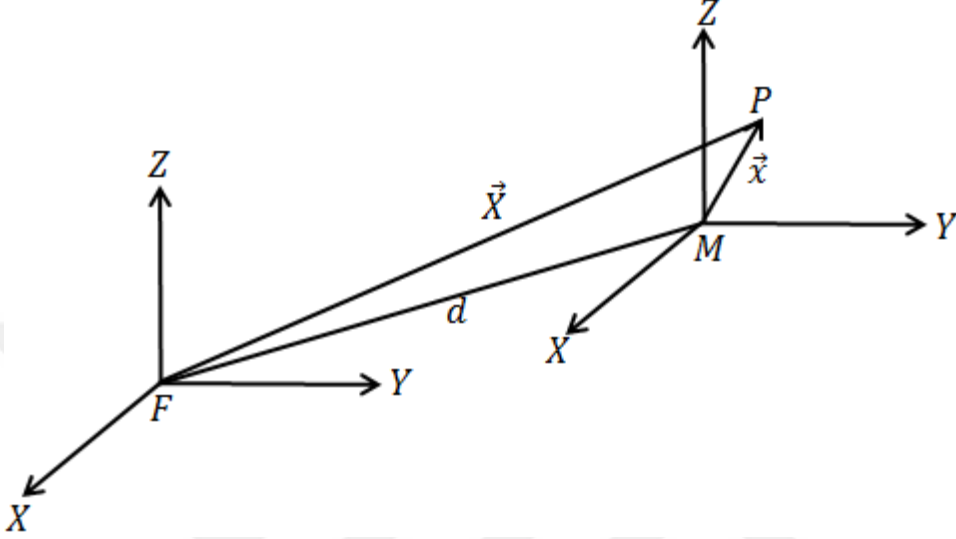
3.1.2. Koordinat transformasyonları

Bir cismin başka bir cisme göre konumunu çalışmak için her cisme bir koordinat çatısı bağlanır. Sabit koordinat çatısı F , hareketli koordinat çatısı ise M ile gösterilir. M nin konumunu F ye göre temsil etmek için M çatısında ölçülen koordinatları F çatısına dönüştüren $D: F \leftarrow M$ koordinat transformasyonu kullanılır. Bu transformasyon;

$$X = [A]x + d \quad (3.1)$$

şeklinde verilir. Burada x bir noktanın M deki koordinat vektörü ve X ise aynı noktanın F deki koordinat vektörüdür. Eğer hareket eden cisim n -boyutta (genellikle $n=2$ veya 3) ise, $[A]$ bir $n \times n$ matris ve d , n -boyutlu bir vektördür.

Bu transformasyon M cisminin katılığını korumak zorundadır. M cisminin üzerinde olan P ve Q noktaları arasındaki uzaklık Öklid uzaklık formülü ile tanımlanır (Şekil 3.1). F de ölçülen koordinatları kullanarak;



Şekil 3.1. Koordinat transformasyonu.

$$d(P, Q) = |P - Q| = \sqrt{(P - Q)^T (P - Q)} \quad (3.2)$$

yazılabilir.

Şimdi, M de ölçülen p ve q noktalarının koordinatlarını kullanarak bu uzaklık hesaplanınca,

$$\begin{aligned} |P - Q| &= |([A]p + d) - ([A]q + d)| = |[A](p - q)| \\ &= \sqrt{(p - q)^T [A^T][A](p - q)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir.

Eğer $[A]$ matrisi

$$[A^T][A] = I$$

bağıntısını sağlarsa, son denklem $|p - q|$ uzunluğuna eşittir. Bu Eş. 3.1 in bir katı transformasyonu olduğunu garanti eden kısıtlamadır. Eş 3.4 şartını sağlayan matris ortogonal bir matristir. Bu matrisin sol tersi ayrıca sağ tersidir, öyleyse;

$$[A][A^T] = I \quad (3.5)$$

yazılabilir. Bu eşitlik $[A]$ matrisinin satırlarının da ortogonal birim vektörler olduğunu gösterir. Eş. 3.4 veya Eş. 3.5 eşitliklerinden A matrisinin determinantında bir kısıtlama elde edilir.

$$\det(I) = \det([A^T][A]) = \det^2([A]) = 1$$

Böylece $\det(A) = \pm 1$. Determinantı 1 olan ortogonal matrisler dönmelerdir ve determinantı -1 olan ortogonal matrisler ise yansımalarıdır (McCarthy, 1990).

3.1.3. Yer değiştirme

Koordinat transformasyonunu, bir noktayı orijinal konumundan mevcut konumuna taşıyan bir işlem olarak görmek uygundur. Bu x vektörünün ölçüldüğü koordinat çatisı ile alakalı bir karışıklığa yol açabilir. Bu dönüşüm bütün M cisminin F ile çakışan bir başlangıç konumundan, x in M de ölçüldüğü durumda onun mevcut konumuna bir yer değiştirmesi olarak göstermektir. Bu transformasyon;

$$D: F \rightarrow M$$

ifadesi yer değiştirme olarak adlandırılır.

Bir yer değiştirme n -boyutlu bir uzayda $D = (A, d)$ matris-vektör çifti ile tanımlanır, burada; $[A]$, $n \times n$ boyutlu bir matris ve d , n -boyutlu bir vektördür. Burada iki özel durum vardır. $R = (A, 0)$ bir saf dönme ve $T = (I, d)$ bir saf ötelemedir.

$$D_1: F \rightarrow M_1 \text{ ve } D_2: M_1 \rightarrow M_2$$

iki yer değiştirme olsun. Bu durumda;

$$D = D_1 D_2: F \rightarrow M_2$$

bileşke bir yer değiştirmedir. Bileşke yer değiştirme için formül, $D_2 = (A_2, d_2)$ transformasyonunu Eş. 3.1 yerine koyarak $D_1 = (A_1, d_1)$ transformasyonu için yazılır. Sonuç olarak;

$$X = [A_1 A_2]x + [A_1]d_2 + d_1 \quad (3.6)$$

Böylece bileşke yer değiştirme;

$$D = D_1 D_2: F \rightarrow M_2$$

aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$D = D_1 D_2 = (A_1, d_1)(A_2, d_2) = ([A_1 A_2], [A_1]d_2 + d_1)$$

Bir $D = (A, d)$ yer değiştirmesinin tersi D^{-1} , Eş. 3.1 tersi alınarak tanımlanır:

$$X = [A^T]x - [A^T]d \quad (3.7)$$

olmak üzere;

$$D^{-1} = ([A^T] - [A^T]d).$$

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I$$

burada $I = (I, 0)$ birim yer değiştirmedir.

Bir n-boyutlu \mathbb{R}^n uzayında yer değiştirmelerin kümesi bir gruptur. İşlem bileşke işlemi olmak üzere;

1. İşlem kapalıdır.
2. Birim eleman vardır ve birim eleman $I = (I, 0)$ yer deęiřtirmesidir.
3. Her $D = (A, d)$ yer değiştirmesinin tersi $D^{-1} = ([A^T] - [A^T]d)$ olarak vardır.

Bu küme n-boyutlu uzayın Öklid grubu olarak adlandırılır ve $SE(n)$ ile gösterilir (McCarthy, 1990; Bottema ve Roth, 1990).

3.2. Kuaterniyonlar

\mathbb{R}^3 uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere, K cümlesi;

$$K = \{Q \mid Q = d \cdot 1 + ae_1 + be_2 + ce_3 \text{ } d, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlansın. Bir Q

$$Q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$$

elemanı;

$$Q = S_q + V_q$$

olarak yazılsın. Burada;

$$S_q = d, V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$$

K üzerinde \oplus toplama ve \odot skaleri ile çarpma işlemleri şöyle tanımlansın.

$\forall P = S_p + V_p$ ve $Q = S_q + V_q$ için;

$$P \oplus Q = (S_p + S_q) + (V_p + V_q)$$

$$\lambda \odot Q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

Bu işlemlerle $(K, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot)$ sistemi bir vektör uzayıdır. Kuaterniyon çarpımı 1843 yılında Hamilton tarafından aşağıdaki tabloyla verildi (Çizelge 3.1) (Hacısalıhoğlu, 1983).

Çizelge 3.1. Kuaterniyon çarpımı

\otimes	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Kuaterniyon çarpımı iç çarpım ve vektörel çarpım kullanılarak

$$q_1 \otimes q_2 = S_{q_1} \cdot S_{q_2} + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + V_{q_1} \times V_{q_2}$$

şeklinde de verilir.

Bu işlemle birlikte (K, \otimes) nun her bir elemanına kuaterniyon denir. K kuaterniyonlar cümlesi bir birleşimli cebirdir. \otimes kuaterniyon çarpımı, \times vektörel çarpımının değişimli olmaması sonucu, değişimli değildir. Değişim ancak, V_{q_1} ve V_{q_2} vektörel kısımlar lineer bağımlı iken sağlanır.

Tanım 3.2.1 $q \in K$ kuaterniyonu için q nun eşleniği;

$$E_q = S_q - V_q,$$

normu;

$$N_q = q \otimes E_q,$$

tersi

$$q^{-1} = E_q / N_q$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

Özellik: $E, N ()^{-1}$ işlemleri, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $E(q_1 + q_2) = E(q_1) + E(q_2), E(\lambda q) = \lambda E(q)$
2. $E(q_1 \otimes q_2) = E(q_2) \otimes E(q_1)$
3. $E \cdot E = I$
4. $q \otimes E(q) = E(q) \otimes q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0, q \otimes E(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$
5. $N(q_1 \otimes q_2) = N(q_1) \cdot N(q_2)$
6. $(q_1 \otimes q_2)^{-1} = q_2^{-1} \otimes q_1^{-1}$

$q \neq 0$ olmak kaydıyla, her $q \in K$ nin bir q^{-1} inversinin var olması K cebirini bir bölüm cebiri yapar. K nin bir bölüm cebiri olması, iki kuaterniyonun bölümü tanımı mümkün kılar. Ancak çarpım değişimli olmadığından, iki yönlü bölme tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2. $q \in K, q \neq 0$ olsun $q^{-1} \in K$ dir. $p \in K$ olmak üzere;

$$p \otimes q^{-1} = r_1, q^{-1} \otimes p = r_2$$

ile gösterilsin. r_1 e, p nin q ile sağdan bölümü, r_2 ye ise p nin q ile soldan bölümü denir. K, \mathbb{R} üzerinde 4 – boyutlu bir vektör uzayı olması nedeniyle, $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ sistemi;

$$e_0 = (0, 0, 0, 1)$$

$$e_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0)$$

şeklinde düşünülebilir. Kuarterniyonların çarpımı \mathbb{R}^3 e indirgenebilir. \mathbb{R}^3, K nın

$$\bar{K} = \{q / d = 0, q = ae_1 + be_2 + ce_3\}$$

alt cümlesine izomorftur. Böylece;

$p, q \in \bar{K}$ için;

$$p = V_p$$

$$q = V_q$$

olsun.

$$p \otimes q = -\langle V_p, V_q \rangle + V_p \wedge V_q$$

$$p \otimes q = -\langle p, q \rangle + p \times q$$

elde edilir. Bu durumda iki vektörün kuarterniyon çarpımı yardımıyla vektörlerin birbirine göre olan durumlarını yorumlamak mümkündür. Şöyle ki;

1. $\vec{p} \parallel \vec{q} \rightarrow \vec{p} \otimes \vec{q} = -\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle,$
2. $\vec{p} \perp \vec{q} \rightarrow \vec{p} \otimes \vec{q} = \vec{p} \times \vec{q}$
3. $\vec{p} \otimes \vec{q} = -(\vec{q} \otimes \vec{p}).$

Bir sonraki kesimde kuarterniyonların matris formu hesaplanacaktır (Hacısalihoglu, 1983).

3.2.1. Reel kuarterniyonların matris gösterimi

$$K_1 = \{a_0 e_0 + a_1 e_1 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}, e_0 = 1, e_1^2 = -1\}$$

olmak üzere;

$(K_1, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \otimes)$ sistemi bir cebirdir. Ayrıca $K_1 \subset K$ olduğundan K_1 bir alt cebirdir.

$$K_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a_0 e_0 + a_1 e_1 \rightarrow a_0 + a_1 i, \quad i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$$

dönüşümü 1-1 örtendir. Bu işlem altında toplama, skalerle çarpma, çarpma (kuaterniyon ve kompleks çarpma) işlemleri korunur. Böylece K_1 ve \mathbb{C} cebirleri izomorf cebirlerdir. Çarpma işleminin korunduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} q_1 \otimes q_2 &= (a_0 e_0 + a_1 e_1) \otimes (b_0 e_0 + b_1 e_1) \\ &= a_0 \cdot a_0 + a_0 \cdot b_1 e_1 + b_0 \cdot a_1 e_1 + (a_1 e_1) \wedge (b_1 e_1) - \langle a_1 e_1, b_1 e_1 \rangle \\ &= a_0 b_0 - a_1 b_1 + (a_0 b_1 + b_0 a_1) e_1 \\ &= (a_0 + ia_1) \cdot (b_0 + ib_1) \end{aligned}$$

K cebiri \mathbb{C} , kompleks sayılar cisminde izomorf bir K_1 cismini alt cümle olarak kabul ettiğinden, K nın \mathbb{C} üzerinde bir vektör uzayı yapısından söz etmek doğaldır. Bir dış işlem şöyle tanımlansın.

$$\begin{aligned} \odot: K \times \mathbb{C} &\rightarrow K \\ (q, Z) &\rightarrow q \odot Z = q \otimes Z \end{aligned}$$

bu işlem aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $(q_1 \oplus q_2) \odot Z = (q_1 \odot Z) \oplus (q_2 \odot Z)$
2. $q \odot (Z_1 + Z_2) = (q \odot Z_1) \oplus (q \odot Z_2)$
3. $q \odot (Z_1 \cdot Z_2) = (q \odot Z_1) \odot Z_2 = (q \odot Z_2) \odot Z_1$
4. $q \odot (1 + 0e_1) = q$

Ayrıca (K, \oplus) bir abel grupdur. $(K, \oplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot)$ Sistemi kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bir $q \in K$ kuaterniyonu;

$$\begin{aligned} q &= a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ &= a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 e_0 - a_3 e_2 e_1 \\ &= e_0 (a_0 + a_1 e_1) + e_2 (a_2 - a_3 e_1) \\ &= e_0 \underbrace{(a_0 + a_1 \sqrt{-1})}_{\in \mathbb{C}} + e_2 \underbrace{(a_2 - a_3 \sqrt{-1})}_{\in \mathbb{C}} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece K , \mathbb{C} üzerinde bir bazı $\{e_0, e_2\}$ olan bir vektör uzayı olarak 2-boyutludur.

$$K = S_p\{e_0, e_2\}$$

$$T: K \rightarrow L(K, K)$$

$$q \rightarrow T(q) = T_q$$

$$T_q: K \rightarrow K$$

$$q \circ \rightarrow T_q(q_0) = q \otimes q_0$$

$$\forall q_1, q_2 \in K \text{ için } \forall Z \in \mathbb{C}$$

$$T_q(q_1 \oplus q_2) = q \otimes (q_1 \oplus q_2)$$

$$\begin{aligned}
&= (q \otimes q_1) \oplus (q \otimes q_2) \\
&= T_q(q_1) \oplus T_q(q_2) \\
T_q(q^\circ \otimes Z) &= q \otimes (q^\circ \otimes Z) \\
&= (q \otimes q^\circ) \otimes Z \\
&= T_q(q^\circ) \otimes Z
\end{aligned}$$

dır. Yani $\forall q \in K$ için, T_q bir \mathbb{C} –lineer dönüşümdür, böylece;

$$\text{Hom}(\bar{K}, K) = \{T_q / q \in K\}$$

yazılabilir. Bu cümle üzerinde toplama ve kopleks skaler ile çarpma işlemleri

$$T_q \boxplus T_{q'} = T_{q \oplus q'}$$

$$T_q \boxtimes Z = T_{q \otimes Z}$$

şeklinde tanımlansın. $\text{Hom}((K, K), \boxplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \boxtimes)$ sistemi bir vektör uzayıdır.

$\forall q \in K$ için T_q dönüşümüne \mathbb{C} üzerinde;

$$T_q(e_0) = e_0 Z_{11} + e_2 Z_{21}$$

$$T_q(e_2) = e_0 Z_{12} + e_2 Z_{22}$$

eşitlikleri ile tanımlı bir

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

kompleks matrisine karşılık gelir.

e_0, e_1, e_2, e_3 için ilgili matrisleri bulunabilir.

$q = e_0$ için;

$$T_{e_0}(e_0) = e_0 \times e_0 = 1 = e_0 \cdot 1 + e_2 \cdot 0$$

$$T_{e_0}(e_2) = e_0 \times e_2 = e_2 = e_0 \cdot 0 + e_2 \cdot 1$$

$$T_{e_0} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$q = e_1$ için;

$$T_{e_1}(e_0) = e_1 \times e_0 = e_1 = \sqrt{-1} \cdot 1 = e_0 \sqrt{-1} + e_2 \cdot 0$$

$$T_{e_1}(e_2) = e_1 \times e_2 = -e_2 e_1 = e_2(-e_1) = e_0 \cdot 0 + e_2(-\sqrt{-1})$$

$$T_{e_1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$q = e_2$ için;

$$T_{e_2}(e_0) = e_2 \times e_0 = e_2 = e_0 \cdot 0 + e_2 \cdot 1$$

$$T_{e_2}(e_0) = -1 = e_0(-1) + e_2 \cdot 0$$

$$T_{e_2} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$q = e_3$ için;

$$T_{e_3}(e_0) = e_3 \times e_0 = e_3 = -e_2 e_1 = e_0 \cdot 0 + e_2(-\sqrt{-1})$$

$$T_{e_3}(e_2) = e_3 \times e_2 = -e_1 = e_0(-\sqrt{-1}) + e_2(0)$$

$$T_{e_3} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Genel olarak bir $q \in K$, $q = e_0 z + e_2 w$ kuarterniyonu için;

$$\begin{aligned} T_{e_0 z + e_2 w}(e_0) &= (e_0 z + e_2 w)e_0 \\ &= e_0 z e_0 + e_2 w e_0 = e_0 z + e_2 w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{e_0 z + e_2 w}(e_2) &= (e_0 z + e_2 w)e_2 \\ &= e_0 z e_2 + e_2 w e_2 \\ &= z e_2 + e_2 w e_2 \\ &= e_2 \bar{z} + e_2 e_2 \bar{w} = e_0(-\bar{w}) + e_2 \bar{z} \end{aligned}$$

$$T_{e_0 z + e_2 w} \leftrightarrow \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}$$

(Hacısalıhoğlu, 1983).

3.3. Dual Birim Küre ve Study Dönüşümü

\mathbb{R} , reel sayılar cümlesini göstermek üzere,

$$*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$$

olarak tanımlanan işleme, dual çarpım adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ ikilisi kısaca \mathfrak{D} ile gösterilir ve dual sayılar cümlesi olarak isimlendirilir.

Bir $d = (a, b)$ dual sayısı;

$$\begin{aligned} d &= (a, b) = (a, 0) + (0, b) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \end{aligned}$$

olarak yazılırsa, $(1, 0)$ dual sayısına d nin reel birimi, $(0, 1)$ dual sayısına da dual birim denir. $(0, 1)$, sayısı ϵ ile gösterilir ve

$$\epsilon * \epsilon = \epsilon \epsilon = (0, 0) = 0$$

dır. Şöyle ki;

$$\begin{aligned}
\epsilon * \epsilon &= (0, 1) * (0, 1) \\
&= (0.0, 0.1 + 1.0) \\
&= (0, 0).
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\{(a, 0) | (a, 0) \in \mathcal{D}\} \leftrightarrow \mathbb{R}$$

birebir tekabülünden,

$$\epsilon^2 = 0$$

dır.

Tanım 3.3.1. \mathcal{D} , üzerinde toplama işlemi,

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.3.2. (Çarpma) $\odot : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$

İç işlemi $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathcal{D}$ olmak üzere ;

$$A \odot B = AB = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlanır ve \mathcal{D} deki çarpma olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.3.3. (Eşitlik) $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathcal{D}$ için;

$a = b$, $a^* = b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.3.1. $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

İspat: İspat iki adımda yapılabilir.

- i. (\mathcal{D}, \oplus) ikilisi bir abel gruptur.
- ii. İkinci işlem \odot , \mathcal{D} de birimli ve birinci işlem olan \oplus üzerinde dağılımlıdır. Ayrıca \odot işlemine göre birim elemanı $(1, 0)$ dır.
- i. (\mathcal{D}, \oplus) ikilisi bir abel gruptur.

$$H_1 : \oplus : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

Şeklinde tanımlandığından \mathcal{D} cümlesi \oplus işlemine göre kapalıdır.

$H_2 : \oplus$ işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçekten $\forall A, B, C$ için;

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= [(a, a^*) \oplus (b, b^*)] \oplus (c, c^*) \\
&= [(a + b), (a^* + b^*)] \oplus (c, c^*) \\
&= (a + b + c, a^* + b^* + c^*) \\
A \oplus (B \oplus C) &= (a, a^*) \oplus [(b, b^*) \oplus (c, c^*)] \\
&= (a + [(b + c)], a^* + [b^* + c^*])
\end{aligned}$$

$$= (a + b + c, a^* + b^* + c^*)$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

H_3 : \oplus işlemine göre \mathcal{D} de bir 0 etkisiz elemanı vardır. Gerçekten $\forall A \in \mathcal{D}$ için

$$A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$$

olacak şekilde bir 0 etkisiz elemanına

$$0 = (x, x^*)$$

$$0 \oplus A = A \text{ ve } A \oplus 0 = A$$

için

$$x=0 \quad x^*=0 \quad (0, 0) \in \mathcal{D}$$

etkisiz elemanı elde edilir.

H_4 : \oplus işlemine göre $\forall A \in \mathcal{D}$ için

$$A \oplus X = X \oplus A = 0$$

olacak şekilde bir tek $X = (x, x^*) \in \mathcal{D}$ ters elemanı vardır. $A = (a, a^*) \in \mathcal{D}$ için;
 $X = (-a, -a^*) \in \mathcal{D}$

olduğu görülür. O halde (\mathcal{D}, \oplus) bir gruptur.

H_5 : $\forall A, B \in \mathcal{D}$ için Tanım 3.2.1 ve Tanım 3.2.3 ü kullanarak

$$A \oplus B = B \oplus A$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden (\mathcal{D}, \oplus) ikilisi aynı zamanda bir Abel grubudur.

ii. $\odot: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ iç işleminin özellikleri:

$$H_6 : \odot: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

işlemi bir iç işlem olarak tanımlandığından \odot işlemine göre \mathcal{D} cümlesi kapalıdır.

$$H_7 : (A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$$

$$H_8 : (A \oplus B) \odot C = A \odot C \oplus B \odot C \text{ ve } C \odot (A \oplus B) = C \odot A \oplus C \odot B$$

O halde $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır.

$$H_9 : \forall A, B \in \mathcal{D} \text{ için Tanım 3.2.2 ve Tanım 3.2.3 gereğince } A \odot B = B \odot A$$

olduğundan $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ halkası bir değişmeli halkadır.

H_{10} : İkinci işlem \odot için $(1, 0)$ bir etkisiz elemandır. Gerçekten Tanım 3.2.2 den
 $\forall A \in \mathcal{D}$ için;

$$(1, 0) \odot A = A \odot (1, 0) = A$$

olur. O halde $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ halkası birimli halkadır. Burada $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ halkası \mathcal{D} ile gösterilecektir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 3.3.2. $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

İspat: $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} - \{0\}$ denirse (\mathfrak{D}, \odot) ikilisi aksiyomlarını sağlamadığı için $(\mathfrak{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir. Bunu şuradan da görmek mümkündür.

$$\forall A = (a, a^*) \in \mathfrak{D}$$

için

$$A \odot X = X \odot A = (1, 0)$$

olacak şekilde bir tek $X = (x, x^*) \in \mathfrak{D}$ ters elemanı yoktur. Çünkü bu eleman Tanım 3.3.2 ve Tanım 3.3.3 gereğince;

$$A \odot X = (a, a^*) \odot (x, x^*) = (ax, ax^* + a^*x) = (1, 0)$$

$$ax = 1$$

$$ax^* + a^*x = 0$$

olur. Son denklemde x ve x^* çözülürse;

$$X = \left(\frac{1}{a}, \frac{a^*}{a^2}\right)$$

bulunur.

$$X \odot A = (1, 0)$$

olduğundan

$$X = \left(\frac{1}{a}, \frac{a^*}{a^2}\right)$$

elde edilir. O halde $X = (x, x^*)$ elemanı, A nın ters elemanı olması için $a \neq 0$ olmalıdır. Bu demektir ki $(0, a^*) \in \mathfrak{D}$ elemanının tersi olan bir eleman yoktur. O halde $(\mathfrak{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 3.3.3. \mathfrak{D} dual sayılar halkası, \mathbb{R} reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

İspat: $f: \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunu

$$f: (a, 0) \rightarrow a$$

olarak tanımlayalım. f bir izomorfizimdir.

f lineerdir: $A = (a, 0)$ ve $B = (b, 0) \in \mathfrak{D}$ olmak üzere;

$$f(A \oplus B) = f(a+b, 0) = a+b = f(a, 0) + f(b, 0)$$

olur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} f(A \odot B) &= f(ab, 0) = ab = f(a, 0) \cdot f(b, 0) \\ &= f(A) \cdot f(B) \end{aligned}$$

dır.

f birebirdir: $A=(a, 0) \neq B=(b, 0)$ ise $f(A) \neq f(B)$

dir. $A \neq B$ demek $a \neq b$ demektir. Bu da $f(A) \neq f(B)$ olduğunu ifade eder.

f örtendir: $\forall x \in \mathbb{R}$ reel sayısı bir tek $(x, 0) \in \mathcal{D}$ dual sayısının $f(x, 0)$ görüntüsüdür.

Tanım 3.3.4. $d = (a, b) = a + eb$ dual sayısının eşleniği $\bar{d} = a - eb$ olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983)

Tanım 3.3.5. Birimi 1 olan değişmeli bir halka H olsun. H üzerinde bir modül diye bir S abel gurubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan S üzerindeki bir

$$\begin{aligned} H \times S &\rightarrow S \\ (a, \alpha) &\rightarrow a \alpha \end{aligned}$$

dış işlemidir.

$$a, b \in H \text{ ve } \alpha, \beta \in S$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} M_1 : a(\alpha, \beta) &= a\alpha + a\beta; \\ M_2 : (a + b)\alpha &= a\alpha + b\alpha; \\ M_3 : (ab)\alpha &= a(b\alpha); \\ M_4 : 1. \alpha & \end{aligned}$$

\mathcal{D} dual sayılar halkası üzerinde $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} = \mathcal{D}^3$ bir modüldür. \mathcal{D} nin, birimi $(1, 0) = 1$ olan değişmeli bir halkadır. \mathcal{D}^3 ün \mathcal{D} üzerinde bir modül olduğunu göstermek için önce $(\mathcal{D}, +)$ nin bir abel grubu olduğu daha sonra ise, $\mathcal{D} \times \mathcal{D}^3 \rightarrow \mathcal{D}^3$ dış işleminin M_1, M_2, M_3, M_4 aksiyomlarını sağladığı gösterilmelidir.

$$\mathcal{D}^3 \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{D}\}$$

cümlesinin her bir elemanı büyük harf ile gösterilirse $A \in \mathcal{D}^3$ için $A = (A_1, A_2, A_3)$ veya $A = (A_i); (i = 1, 2, 3)$ notasyonlarından birisi kullanılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 3.3.6. $A = (A_i), B = (B_i) \in \mathcal{D}^3$ için;

$$A = B \Leftrightarrow A_i = B_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

(Hacısalıhoğlu, 1983)

Tanım 3.3.7. $A = (A_i), B = (B_i) \in \mathcal{D}^3, (i = 1, 2, 3)$ için;

$$+ : \mathcal{D}^3 \times \mathcal{D}^3 \rightarrow \mathcal{D}^3$$

iç işlemi;

$$A + B = (A_i + B_i)$$

olsun. $A + B$ ye \mathcal{D}^3 de A ile B nin toplamı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 3.3.8. $\lambda \in \mathcal{D}$ ve $A \in \mathcal{D}^3, (i = 1, 2, 3)$ için;

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}^3 \rightarrow \mathfrak{D}^3$$

dış işlemi için $\succ A = (\succ A_i)$ olsun. $\succ A$ ya A nın \succ skaları ile çarpımı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.3.4. $(\mathfrak{D}^3, +)$ bir abel grubudur.

İspat:

$$G_1 : A, B \in \mathfrak{D}^3 \text{ için } A + B \in \mathfrak{D}^3 \text{ dır.}$$

$$G_2 : A, B, C \in \mathfrak{D}^3 \text{ için } (H_2) \text{ den}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$G_3 : 0 = (0, 0, 0) \in \mathfrak{D}^3 \text{ için } (H_2) \text{ den}$$

$$A + 0 = 0 + A$$

$0 = (0, 0, 0)$ elemanı $+$ işlemine göre \mathfrak{D}^3 deki birim elemanıdır.

$$G_4 : \forall A \in \mathfrak{D}^3 \text{ için}$$

$$A + X = X + A = 0$$

olacak şekilde bir tek

$$X = -A = (A_i) \in \mathfrak{D}^3, (1 \leq i \leq 3),$$

eleman vardır. $-A, (+)$ işlemine göre A nın tersidir.

$$G_5 : \forall A, B \in \mathfrak{D}^3 \text{ için } A + B = B + A \text{ olur. Şu halde } (\mathfrak{D}^3, +) \text{ bir abel grubudur (Hacısalihoglu, 1983).}$$

Teorem 3.3.5. $(\mathfrak{D}^3, +)$ sistemi \mathfrak{D} üzerinde bir modüldür.

İspat: $(\mathfrak{D}^3, +)$ nin birimi 1 ve değışmeli bir halka olduğu Teorem 3.3.1 den bilinmektedir. Tanım 3.3.7 ile tanımlanan skalar ile çarpım dış işleminin Tanım 3.3.4 de adı geçen M_1, M_2, M_3 ve M_4 aksiyomlarını sağladığı gösterilirse;

$$M_1 : \forall \alpha \in \mathfrak{D} \text{ ve } \forall A, B \in \mathfrak{D}^3 \text{ için;}$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$$

dır.

$$M_2 : \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{D} \text{ ve } \forall A \in \mathfrak{D}^3 \text{ için;}$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

dır.

$$M_3 : \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{D} \text{ ve } \forall A \in \mathfrak{D}^3 \text{ için;}$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

dır.

$$M_4 : (1, 0) \in \mathfrak{D} \text{ elemanının } R \text{ deki izomorfı 1 olmak üzere ve } (H_6) \text{ dan } \forall A \in \mathfrak{D}^3 \text{ için}$$

$$1. A = A$$

Burada sonra \mathfrak{D} dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modül " \mathfrak{D} – modül "

Tanım 3.3.9. \mathfrak{D}^3 , modülünün her elemanına dual vektör denir.

\mathfrak{D}^3 ün bir $A = (A_1, A_2, A_3)$ elemanı,

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + \epsilon a_1^*, a_2 + \epsilon a_2^*, a_3 + \epsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \epsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. \mathfrak{D}^3 , üzerinde bir çarpım;

$A, B \in \mathfrak{D}^3$, için;

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \epsilon \vec{b}^* \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \epsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle) \\ &= \vec{c} + \epsilon \vec{c}^* \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir işlemdir ve iç çarpım özelliklerini sağlar (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.3.6. \mathbb{R}^3 vektör uzayı \mathfrak{D} –Modülün elemanları $(\vec{a}, \vec{0})$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur.

İspat: $f: \mathfrak{D}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $f(\vec{a}, \vec{0}) = \vec{a}$ olarak tanımlansın. f nin bir izomorfizim olduğu gösterilecektir.

f lineerdir: $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0}), \vec{B} = (\vec{b}, \vec{0}) \in \mathfrak{D}$ –modül olmak üzere;

$$\begin{aligned} f(\vec{A} + \vec{B}) &= f(\vec{a} + \vec{b}, \vec{0}) = \vec{a} + \vec{b} \\ &= f(\vec{a}, \vec{0}) + f(\vec{b}, \vec{0}) \end{aligned}$$

$$f(\vec{A} + \vec{B}) = f(\vec{A}) + f(\vec{B})$$

dır. $\lambda \in \mathfrak{D}$ ve $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0}) \in \mathfrak{D}$ –modülü için;

$$f(\lambda \vec{A}) = f(\lambda \vec{a}, \vec{0}) = \lambda \vec{a} = \lambda f(\vec{A})$$

$$f(\lambda \vec{A}) = \lambda f(\vec{A})$$

f birebirdir: $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0}) \neq \vec{B} = (\vec{b}, \vec{0})$ ise $\vec{a} \neq \vec{b}$

dır.

$$f(\vec{a}, \vec{0}) \neq f(\vec{b}, \vec{0}) \text{ veya } f(\vec{A}) \neq f(\vec{B})$$

dir.

f örtendir $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ reel vektörü, bir tek $\vec{X} = (\vec{x}, \vec{0}) \in \mathcal{D}$ – modül dual vektörünün $f(\vec{x}, \vec{0})$ görüntüsüdür (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.3.7. Bir $A \in \mathcal{D}^3$ dual vektörünün normu, $A = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*$ için;

$$\|A\| = (\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|})$$

dual sayıdır. $\|A\| = (1, 0) = 1$ ise A ya birim dual vektör denir. Bu durumda $\|\vec{a}\| = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ olur.

İspat: $\vec{d} = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}$ için $\sqrt{\vec{d}}$ hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \sqrt{\vec{a} + \epsilon \vec{a}^*} &= \vec{c} + \epsilon \vec{c}^* \\ \Rightarrow \vec{a} + \epsilon \vec{a}^* &= (\vec{c} + \epsilon \vec{c}^*)^2 = \vec{c}^2 + \epsilon (2\vec{c}\vec{c}^*) \\ \Rightarrow \vec{a} &= \vec{c}^2, \vec{a}^* = 2\vec{c}\vec{c}^* \\ \Rightarrow \vec{c} &= \sqrt{\vec{a}} \\ \Rightarrow \vec{c}^* &= \frac{\vec{a}^*}{2\sqrt{\vec{a}}} \\ \sqrt{\vec{a} + \epsilon \vec{a}^*} &= \sqrt{\vec{a}} + \epsilon \frac{\vec{a}^*}{2\sqrt{\vec{a}}} \end{aligned}$$

dır. Buna göre $A = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*$ için;

$$\begin{aligned} \|A\| &= (\langle A, A \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \epsilon 2\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\vec{a}\|^2 + \epsilon 2\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\vec{a}\| + \epsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}) \end{aligned}$$

olur (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.3.10 $\mathcal{D}\mathcal{S} = \{\vec{A} = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0), \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathcal{D}^3$ cümlesine birim dual küre denir (Hacısalihoglu, 1983).

Örnek:3.3.1. $A = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*$ ise;

$$A \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) + \epsilon (4, -1, -1)$$

dır.

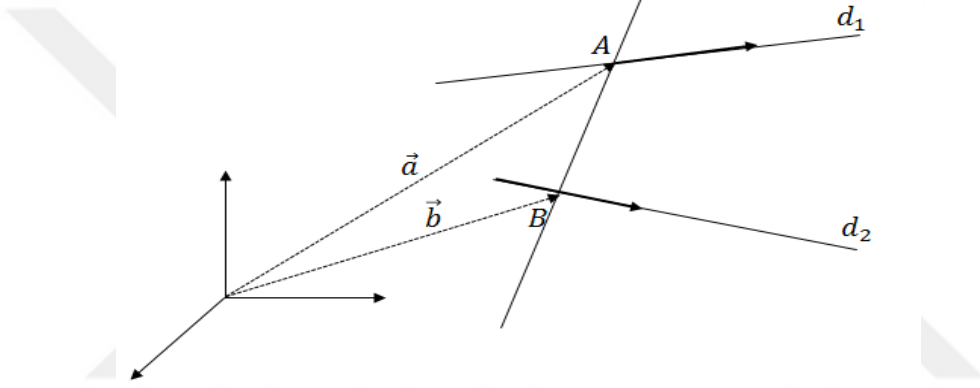
Teorem 3.3.8 (E.STUDY) Birim dual kürenin noktaları \mathbb{R}^3 deki yönlü doğrular ile birebir eşlenir (Hacısalihoglu, 1983).

3.3.1. \mathfrak{DS} üzerindeki iç çarpımın yorumu

\mathfrak{D}^3 de iki $D_1 = \vec{u} + \epsilon \overline{u^*}$, $D_2 = \vec{v} + \epsilon \overline{v^*}$ dual vektörünün iç çarpımı,

$$\begin{aligned} \langle D_1, D_2 \rangle &= \langle \vec{u} + \epsilon \overline{u^*}, \vec{v} + \overline{v^*} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \epsilon (\langle \vec{u}, \overline{v^*} \rangle + \langle \overline{u^*}, \vec{v} \rangle) \end{aligned}$$

dir. $D_1, D_2 \in \mathfrak{DS}$ olsun. D_1 ile belli olan yönlü doğru d_1 ve D_2 ile belli olan yönlü doğru d_2 olsun. d_1 için, \vec{u} doğrultman vektörü, $\overline{u^*}$ vektörel moment, d_2 için \vec{v} doğrultman vektörü $\overline{v^*}$ vektörel momentdir. d_1 ve d_2 doğrularının orta dikme ayakları A ve B noktaları olsun (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. İki dual birim vektör arasındaki dual açı.

$\vec{u} \times \vec{v}$ vektörü her iki doğruya da diktir ve $\vec{u} \times \vec{v} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ olup, d_1 ve d_2 arasındaki uzaklık θ^* ise;

$$\vec{a} - \vec{b} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \theta^*$$

olur.

$$\langle D_1, D_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \epsilon (\langle \vec{u}, \overline{v^*} \rangle + \langle \overline{u^*}, \vec{v} \rangle)$$

olur. Reel kısım için;

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta, \theta = \text{açı}(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

olur. Dual kısım için;

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \overline{v^*} \rangle + \langle \overline{u^*}, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{u}, \vec{b} \times \vec{v} \rangle + \langle \vec{a} \times \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= (\vec{u}, \vec{b}, \vec{v}) + (\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{b}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}) \\
&= -\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{a} \rangle \\
&= \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \\
&= \left\langle \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \theta^*, \vec{u} \times \vec{v} \right\rangle \\
&= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \theta^* \\
&= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \cdot \theta^* \\
&= \sin \theta \cdot \theta^*
\end{aligned}$$

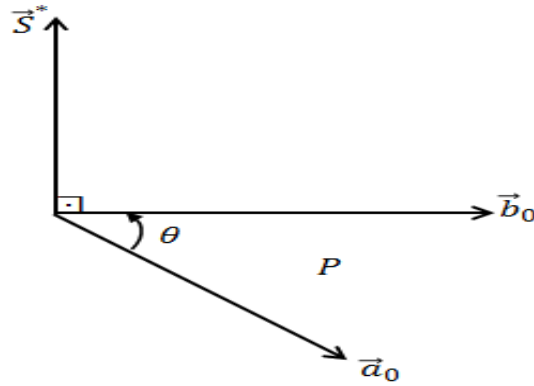
elde edilir. Dolayısıyla ;

$$\begin{aligned}
\langle D_1, D_2 \rangle &= \cos \theta - \epsilon \sin \theta \cdot \theta^* \\
&= \cos(\theta + \epsilon \theta^*)
\end{aligned}$$

$\theta + \epsilon \theta^*$ a dual açı denir. θ iki doğru arasındaki açıdır ve θ^* iki doğru arasındaki (en kısa) uzaklıktır (Hacısalihoglu, 1983).

3.3.2. Kuaterniyon operatörü

\vec{a}_0 ve \vec{b}_0 vektörleri yerine XOY düzleminde iki yönlü doğru alınsın ve aralarındaki açı θ olsun. Bu iki doğrunun gerdiği düzlem XOY dir. Bu düzlemi P ile gösterilsin. P nin XOY den farklı olması \vec{a}_0 ve \vec{b}_0 vektörlerini kapsayan doğruların seçilişi ile mümkündür. Bu demektir ki P düzlemi, kesişen iki doğrusu ile genel olarak seçilebilir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Düzlemde iki vektöre dik olan birim vektör.

$\|\vec{S}^*\| = \|\vec{a}_0\| = \|\vec{b}_0\| = 1$
olacak şekilde;

$$\vec{S}^* = \frac{\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0}{\|\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0\|}$$

vektörü alınsın. Böylece $\{\vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{S}^*\}$ sistemi bir sağ sistem olur. Kuaterniyon çarpımı (x) ile gösterilmek üzere;

$$\vec{b}_0 \times (\vec{a}_0)^{-1} = q^*$$

$$(\vec{b}_0)^{-1} \times \vec{a}_0 = q^*$$

$$q^* = \cos\theta + \vec{S}^* \sin\theta, \theta \in R$$

olsun.

$$q^* = \cos\theta + \vec{S}^* \sin\theta$$

olarak tanımlanan q^* reel kuaterniyonu ile ortaya çıkan;

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$\theta \rightarrow q^*$$

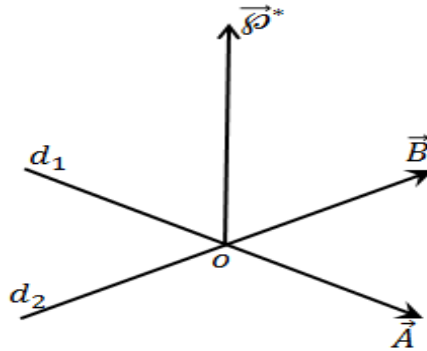
operatörüne kuaterniyon operatörü denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.3.3. Dönme operatörü

\vec{A} ve \vec{B} iki birim dual vektör olsun. \vec{A} ve \vec{B} ye karşılık gelen doğrular, sırası ile d_1 ve d_2 olsun. $d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ve $\mathfrak{A}(d_1, d_2) = \theta$ ise $\Theta = \theta$ dır. $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ ve $\theta^* = 0$ dır. Şekil 3.4'de görüldüğü gibi;

$$\vec{\varphi}^* \parallel \vec{A} \wedge \vec{B}$$

olarak seçilirse;



Şekil 3.4. Kesişen iki doğruya dik olan vektör.

$$\vec{B} \times \vec{A}^{-1} = Q^*$$

$$\vec{B}^{-1} \times \vec{A} = Q^*$$

olduğunu biliniyor. Burada;

$$Q^* = \cos\theta + \vec{\varphi}^* \sin\theta$$

dır.

$$\vec{B} = Q^* \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \times Q^*$$

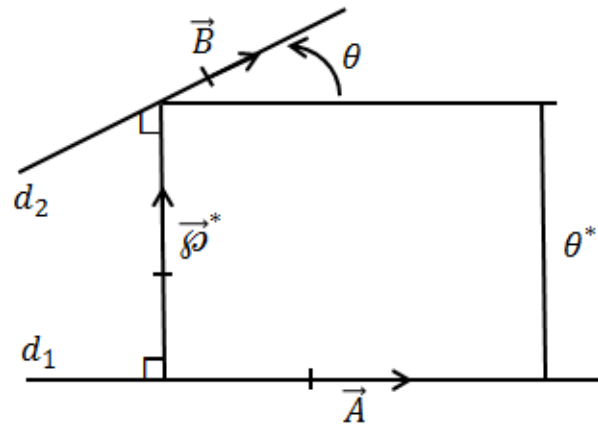
yazılabilir. O halde şu sonuç verilebilir. $\vec{\varphi}^*$ a dik bir birim dual vektörü;

$$Q^* = \cos\theta + \vec{\varphi}^* \sin\theta$$

ile soldan çarpmak(sağdan çarpmak) demek karşılık gelen doğruyu, $\vec{\varphi}^*$ a normal olan düzlem içinde $\vec{\varphi}^*$ doğrusu etrafında pozitif yönde (negatif yönde) θ kadar döndürmek demektir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.3.4. Vida operatörü

\vec{A} ve \vec{B} aralarındaki $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$, $\theta \neq 0, \theta^* \neq 0$, dual açısı olan iki birim dual vektör olsun. O halde \vec{A} ve \vec{B} ye kesişmeyen ve paralel olmayan iki doğru karşılık gelir. Bu doğrular d_1 ve d_2 olsun. d_1 ve d_2 nin orta dikme doğrusuna karşılık gelen ve \vec{A}, \vec{B} ile bir sağ sistem oluşturan birim dual vektör $\vec{\varphi}^*$ olsun. Yani $\vec{\varphi}^*$ ın yönü $\vec{A} \wedge \vec{B}$ nin yönü ile aynı olsun (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. Vida operatörü.

$$Q^* = \cos\theta + \vec{\rho}^* \sin\theta$$

olmak üzere;

$$\vec{B} \times \vec{A}^{-1} = Q^*$$

$$\vec{B}^{-1} \times \vec{A} = Q^*$$

yazabilir. Bu son bağıntıdan;

$$\vec{B} = Q^* \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \times Q^*$$

elde edilir.

Tanım 3.3.10. Bir A dual sayısı $A = a + \epsilon a^*$ ile gösterilir. Burada a ve a^* reel sayılar olmak üzere $\epsilon \neq 0, \epsilon^2 = 0$ kurallarıyla bellidir.

$$q = a_0 1 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad q^* = a_0^* 1 + a_1^* e_1 + a_2^* e_2 + a_3^* e_3$$

olmak üzere

$$Q = q + \epsilon q^*$$

şeklinde tanımlanan kuaterniyona dual kuaterniyon denir.

$$Q = q + \epsilon q^* = A_0 1 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

kuaterniyonun skaler kısım S_Q vektörel kısım V_Q olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$Q = S_Q + V_Q$$

biçiminde yazılır. Burada;

$$S_Q = A_0 \text{ ve } V_Q = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Örnek 3.3.4. A ve B birim dual vektör olmak üzere;

$$A = (1, 0, 0) + \epsilon (0, -1, 1)$$

ve

$$B = (0, -1, 0) + \epsilon (1, 0, 2)$$

olsun.

$$A = (1, -\epsilon, \epsilon) = e_1 - \epsilon e_2 + \epsilon e_3$$

$$B = (\epsilon, -1, 2\epsilon) = \epsilon e_1 - e_2 + 2\epsilon e_3$$

olur.

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{\|A\|} = -e_1 + \epsilon e_2 - \epsilon e_3$$

$$Q^* = \cos(\Theta) + \vec{\rho}^* \sin(\Theta)$$

olacak şekilde vida operatörü ve $\Theta = \theta + \epsilon \theta^*$ dual açı olmak üzere;

$$\vec{B} \otimes \vec{A}^{-1} = Q^*$$

$$\vec{B}^{-1} \otimes \vec{A} = Q^*$$

$$\vec{B} = Q^* \otimes \vec{A}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \otimes Q^*$$

$$\vec{\varphi}^* \parallel \vec{A} \wedge \vec{B}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} B \otimes A^{-1} &= (e_1 - \epsilon e_2 + \epsilon e_3) \otimes (\epsilon e_1 - e_2 + 2 \epsilon e_3) \\ &= \epsilon + e_2 e_1 + \epsilon + \epsilon e_2 e_3 - 2 \epsilon e_3 e_1 \end{aligned}$$

$$Q^* = 2 \epsilon + \epsilon e_1 - 2 \epsilon e_2 - e_3$$

Aynı şekilde; $\vec{B}^{-1} \otimes \vec{A} = Q^*$ olduğu açıkça görülür.

$$Q^* = \underbrace{(0 + 2 \epsilon)}_D + \underbrace{(0 + \epsilon)}_A e_1 + \underbrace{(0 - 2 \epsilon)}_B e_2 + \underbrace{(-1 + 0 \epsilon)}_C e_3$$

burada; D, A, B, C dual sayılar olmak üzere;

$$D = d + \epsilon d^* \rightarrow D = 0 + 2 \epsilon$$

$$A = a + \epsilon a^* \rightarrow A = 0 + \epsilon$$

$$B = b + \epsilon b^* \rightarrow B = 0 - 2 \epsilon,$$

$$C = c + \epsilon c^* \rightarrow C = -1 + 0 \epsilon$$

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 = 1$$

$$dd^* + aa^* + bb^* + cc^* = 0 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 0 = 0$$

olduğundan Q^* birim dual kuarterniyondur. O halde;

$$\cos(\Theta_0) = D$$

$$\sin(\Theta_0) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\cos(\Theta_0) = 2 \epsilon$$

$$\sin(\Theta_0) = 1$$

$$\theta = \arccos(d)$$

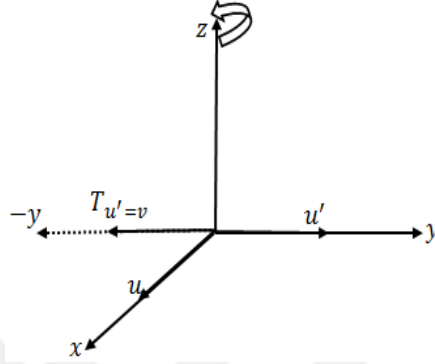
$$\theta^* = -\frac{d^*}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\theta = \arccos(0) \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta^* = -\frac{2}{\sqrt{0 + 0 + 1}} \rightarrow \theta^* = -2$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \epsilon 2$$

olduğundan Q^* vıda operatörü verilen birim dual vektörün doğrultman vektörü $\theta = \frac{\pi}{2}$ derece döndürölüp $\theta^* = -2$ (zıt yönde) 2 birim ötelenir. Şimdi bun \mathbb{R}^3 te gösterilirse (Şekil 3.6). A birim dual vektörün doğrultman vektörü: $u = (1, 0, 0)$ ve B birim dual vektörün doğrultman vektörü: $v = (0, -1, 0)$ olmak üzere;



Şekil 3.6. Dönme ve öteleme.



4. CLIFFORD CEBİRİ

n-boyutlu sayı

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ ve $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ de bir ortonormal bazdır. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baz vektörlerinin çarpımı;

$$e_i e_i = \Gamma_i \Rightarrow \Gamma_i = \mp 1$$

$$e_j e_k = -e_k e_j$$

özelliğine sahip olan bir çarpımdır. Bu kabullerle bir x sayısının karesi;

$$x^2 = \Gamma_1 x_1^2 + \Gamma_2 x_2^2 + \dots + \Gamma_n x_n^2$$

şeklinindedir. Clifford cebiri çarpımı olarak verilen bu çarpım, birleşme ve dağılma özelliklerine sahiptir ve değişmeli değildir. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ den seçilen k-tane farklı vektörün tüm çarpımları \mathbb{R}^n üzerinde Clifford cebiri için bir baz oluşturur. $0 \leq k \leq n$ dir. Bu cebirin boyutu 2^n dir. Örneğin $n=3$ için vektör kümesi $\{e_1, e_2, e_3\}$ tür, Clifford cebiri $2^3=8$ boyutludur ve bu cebirin bazı aşağıdaki gibidir.

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}$$

Bu baz kümesindeki elemanların grade(rütbe) leri farklıdır ve şöyle isimlendirilir;

0- rütbeli olanlar	1
1- rütbeli olanlar	e_1, e_2, e_3
2- rütbeli olanlar	e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3
3- rütbeli olanlar	$e_1e_2e_3$

Farklı rütbe(grade)lerdeki baz vektörleri bir graded(rütbelendirilmiş) cebir oluşturur. \mathbb{R}^3 üstündeki Clifford cebirindeki bir 8-boyutlu vektör şu formdadır.

$$a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3 + a_{123}e_1e_2e_3$$

a_0, \dots, a_{123} katsayıları reel sayılardır.

$\Gamma_i = \mp 1$ olarak alınabilir. $\Gamma_i = +1$ ve $\Gamma_i = -1$ olanları gruplandırılın.

$$\Gamma_i = +1, i = 1, 2, \dots, p$$

$$\Gamma_i = -1, i = p + 1, \dots, p + q, \rightarrow p + q = n$$

olmak üzere; bu cebir $Cf(p, q)$ ile gösterilsin. $p=0$ veya $q=0$ için $Cf(p, q)$ yerine Cf_n yazılır. $Cf(n, 0)$ da aynı şeyi ifade eder. Cf_n de k-grade(rütbe)li tüm elemanların alt-uzayı Cf_n^k ile gösterilecektir. $Cf_n^0 = \{1\}$, $Cf_n^1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ vs. Benzer biçimde Cf_n de çift gradeli elemanlar Cf_n^+ ile gösterilir. Kompleks sayılar cebiri Cf_2^+ cebirine izomorftur.

Kompeks sayılar cebiri $\{1, i\}$ ve $Cf_2^+, \{1, e_1, e_2\}$ bazlarına sahiptir ve $e_1e_2 = i$ olmak üzere izomorfizim aşıkardır. K kuaterniyonlar cebiri Cf_3^+ cebirine izomorftur.

Bu cebirin bir bazı $\{e_1e_2, e_3e_1, e_2e_3\}$ dir. Ayrıca

$$e_2e_3 = i$$

$$e_1e_2 = j$$

$$e_2e_3 = k$$

denirse,

$$i^2 = (e_2e_3)(e_2e_3) = -1$$

$$j^2 = (e_1e_2)(e_1e_2) = -1$$

$$k^2 = (e_2e_3)(e_2e_3) = -1$$

Ayrıca, K kuaterniyon cebiri $Cf_{(0,2)}$ cebirine izomorftur. $Cf_{(0,2)}$ de e_1, e_2, e_1e_2 alınırsa;

$$e_1 = i, e_2 = j, e_1e_2 = k$$

olur ve bu izomorfizmi gerçekleştirecektir (Syngg, 2012).

4.1. Geometrik Çarpım

\mathbb{R}^3 de en yaygın olarak bilinen iki çarpım dot product (nokta çarpım, iç çarpım) ve çapraz veya vektörel çarpımdır. Notasyonel olarak $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ise; iç çarpım $\langle X, Y \rangle$ ve vektörel çarpım $X \times Y (X \wedge Y)$ ile gösterilir.

$$X, Y \in \mathbb{R}^3, \text{ açı } \langle X, Y \rangle = \theta \text{ ise } 0 < \theta < \pi$$

$$X \cdot Y = \|X\| \|Y\| \cos \theta$$

dir ve sonuç bir reel sayıdır. $X \times Y$ vektörel sonuç ise $\|X\| \|Y\| \sin \theta$ büyüklüğünde X ve Y den farklı ve her ikisine de dik olan bir vektördür. Genellikle kabul edilen. $X \times Y$ nin X ve Y den farklı formatta olmadığıdır. $X = (ax, ay, az)$ ve $Y = (bx, by, bz)$ olsun.

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y - z)$$

transformasyonu ile

$$-X = (-ax, -ay, -az)$$

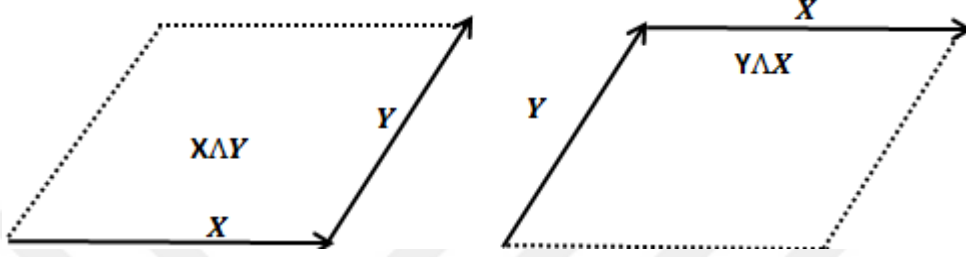
ve

$$-Y = (-bx, -by, -bz)$$

olur. Ayrıca $X \times Y$ nin bileşenleri $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y - z)$ dönüşümünden etkilenmez. Bu davranışa sahip olan vektörlere pseudovector-vektörüksü veya axial(eksensel) denir. Bu vektörler dönme ile daha da anlam kazanır. Kompleks sayılar ve kuaterniyonlar

cebirinin dahil edilesine ek olarak, Clifford cebiri yeni tipten bir evrensel vektör çarpım başlangıçta Clifford tarafından geometrik çarpım olarak adlandırıldı.

X ve Y nin dış(outer) çarpımı $X \wedge Y = \|X\| \|Y\| \sin \theta$ büyüklüğünde bir yönlendirilmiş alan elementidir. $\|X\| \|Y\| \sin \theta$ kenarları X ve Y olan paralelkenarın alanıdır. Yönlendirme özelliği $X \wedge Y = -Y \wedge X$ olmasını belirler (Şekil 4.1).



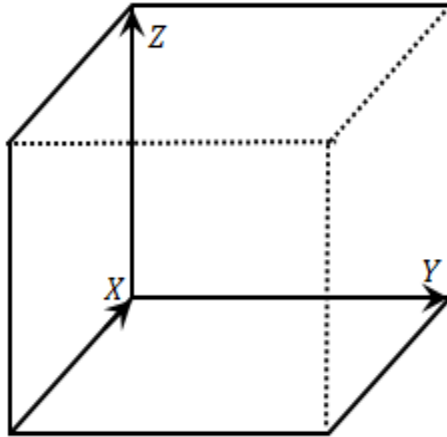
Şekil 4.1. Yönlendirilmiş alan olarak $X \wedge Y$ ve $Y \wedge X$ dış çarpımı.

k tane vektörün yönlü dış çarpımı;

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_k$$

şeklinde k tane grade nin bladesi(yaprak) olarak bellidir.

\mathbb{R}^3 de $X \wedge Y \wedge Z$ üç vektörü, kenarları X, Y ve Z olan bir paralelyüz tarafından belirlenen bir yönlü hacim elementidir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Yönlendirilmiş hacim olarak $X \wedge Y \wedge Z$ dış çarpımı.

İç çarpım ve dış çarpım değişik biçimlerde kombine edilebilir. Cf_n de X ve Y nin geometrik çarpımı;

$$XY = X \cdot Y + X \wedge Y$$

olarak tanımlanır. XY bir skaler ve bir 2-vektörün toplamı olan bir çoklu-vektör(multivector)dür. İç çarpımın değişmeli ve dış çarpımın değişmeli olmamasını kullanarak;

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

$$X \wedge Y = \frac{1}{2}(XY - YX)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunlar geometrik çarpımın simetrik ve antisimetrik parçalarını inşa edeler. Bazen $\frac{1}{2}(XY + YX)$ ve $\frac{1}{2}(XY - YX)$ X ve Y çarpımı için komütatör ve anti-komütatör olarak isimlendirilir.

Geometrik çarpım vektörler için tanımlanmış gibi algılansa da geometrik çarpım bir sistematik algoritma ile Cf_n deki blade ve multi-vektörlere genişletilebilir.

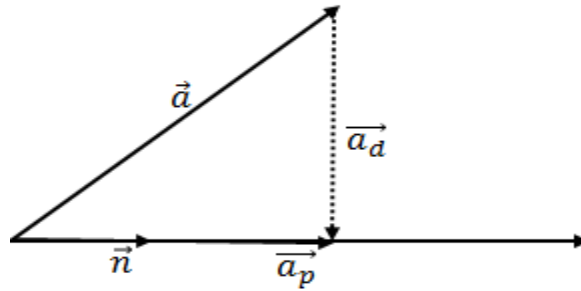
Bir $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$ bladesinin inversi;

$$\frac{a_k \wedge a_{k-1} \wedge \dots \wedge a_2 \wedge a_1}{\|a_1\|^2 \cdot \|a_2\|^2 \dots \|a_k\|^2}$$

olarak bellidir.

4.2. Dönme ve Yansıma

Herhangi a vektörü bir \vec{n} birim vektörüne dik ve paralel olan bileşenlerine ayrılabilir (Şekil 4.3). Yani;



Şekil 4.3. Bir vektörün bileşenleri.

$$\vec{a}_d \perp \vec{n} \text{ ve } \vec{a}_p \parallel \vec{n}$$

olmak üzere;

$$\vec{a}_d = \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \vec{n}$$

$$\vec{a}_d = \vec{a} - \vec{a}_p$$

$XY = X \cdot Y + X \wedge Y$ geometrik çarpımı $\vec{n} \vec{a} \vec{n}$ için kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{n} \vec{a} \vec{n} &= (\vec{n} \vec{a}) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{a} + \vec{n} \wedge \vec{a}) \vec{n} \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{n} + (\vec{n} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{n} \\ &= \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \vec{n} + \langle \vec{n} \wedge \vec{a}, \vec{n} \rangle + (\vec{n} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{n} \end{aligned}$$

$(\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{n} = \vec{a}_d$ dır. Eşitliğin sağ tarafı üç vektör lineer bağımsız olamayacağı için sıfırdır. Bu durumda;

$$(\vec{n} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{n} = -\vec{a}_d$$

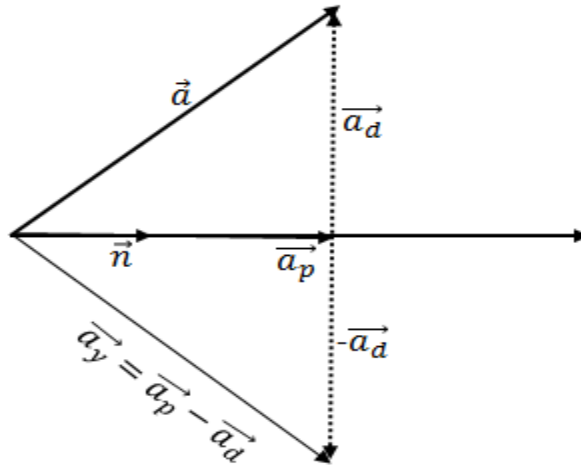
olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} (\vec{n} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{n} &= (\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{a} \\ &= \vec{a}_d - \vec{a} \\ &= -\vec{a}_d \end{aligned}$$

böylece;

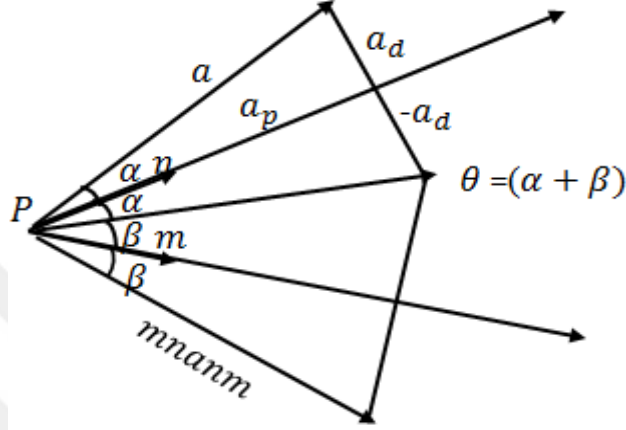
$$\vec{n} \vec{a} \vec{n} = \vec{a}_p - \vec{a}_d$$

dır. $\vec{n} \vec{a} \vec{n}$ \vec{a} vektörü \vec{n} birim vektörüne göre yansımasıdır (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. Bir vektörün yansıması.

\vec{n} ve \vec{m} birim vektörleriyle bir \vec{a} vektörüne iki ardışık yansıma uygulansın
 Önce \vec{n} uygulansın: $\vec{n}\vec{a}\vec{n}$
 Sonra \vec{m} uygulansın: $\vec{m}\vec{n}\vec{a}\vec{n}\vec{m}$
 $\vec{m}\vec{n}\vec{a}\vec{n}\vec{m}$ iki yansımanın bileşkesi olarak bir dönme tanımlar (Şekil 4.5). Şöyle ki;



Şekil 4.5. $mnanm$ dönmesi.

$\|\vec{a}\| = \|\vec{m}\vec{n}\vec{a}\vec{n}\vec{m}\|$ ve P noktası sabit. Yani dönme şartları gerçekleşir. Dönme düzlemi $\vec{m}\wedge\vec{n}$ ile bellidir ve 2θ lık dönme açısı $\cos\theta = \vec{m} \cdot \vec{n}$ ile bellidir.

$$R = \vec{m}\vec{n} = \vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{m}\wedge\vec{n}$$

geometrik çarpımı \mathbb{R}^n de rotor olarak adlandırılır. R nin tersi(karşıtı) $\bar{R} = \vec{n}\vec{m}$ dir.

$R\bar{R} = 1$ dir. Ayrıca R;

$$R = \cos\theta + \sin\theta \frac{\vec{m}\wedge\vec{n}}{\|\vec{m}\wedge\vec{n}\|}$$

şeklinde yazılır.

$R = \vec{m}\vec{n}$ rotorunu kullanarak bir dönme(rotasyon);

$$Ra\bar{R}$$

olarak tanımlanır (Klawitter, 2015; Meinrenken, 2013).

Örnek 4.2.1. $R = \vec{m}\vec{n}$, $\bar{R} = \vec{n}\vec{m}$ olmak üzere;

$$\vec{m} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{a} = (1, 0, 0)$$

olsun.

$$\vec{m} = e_1$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \vec{a} = e_1$$

baz vektörlerini lineer birleşimi olarak yazılır.

$$\vec{m}\vec{n} = e_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_1e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right)$$

$$\vec{n}\vec{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right) e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_1e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right)$$

$$\vec{m}\vec{n}\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right) e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3e_1 \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{m}\vec{n}\vec{a}\vec{n}\vec{m} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right) \\ &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_1e_3 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_1 \\ &= e_1 \end{aligned}$$

olur. O halde;

$$\vec{a}' = (0, 1, 0)$$

dır.

$$\vec{b} = (3, 4, 0) = 3e_1 + 4e_2$$

olsun.

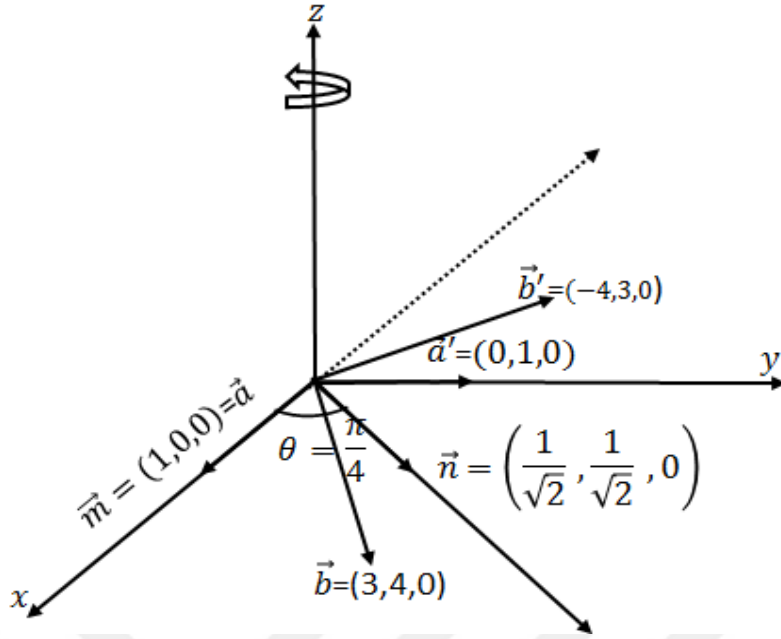
$$\begin{aligned} \vec{m}\vec{n}\vec{b} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right) (3e_1 + 4e_2) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}e_3e_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}e_3e_2 \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{4}{\sqrt{2}}e_1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{7}{\sqrt{2}}e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{m}\vec{n}\vec{b}\vec{n}\vec{m} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{7}{\sqrt{2}}e_2 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right) \\ &= -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_1e_3 + \frac{7}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_2e_3 \\ &= -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{7}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_1 \\ &= -4e_1 + 3e_2 \end{aligned}$$

olur. O halde;

$$b' = (-4, 3, 0)$$

dır (Şekil 4.6).



Şekil 4.6. z ekseninde 2θ lık dönme.

4.3. Rotorlar

σ_1, σ_2 ve σ_3 ün üç baz vektörünün I ile çarpılması baz bivector ile sonuçlanır.

$$\sigma_1 \sigma_2 = I \sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = I \sigma_1$$

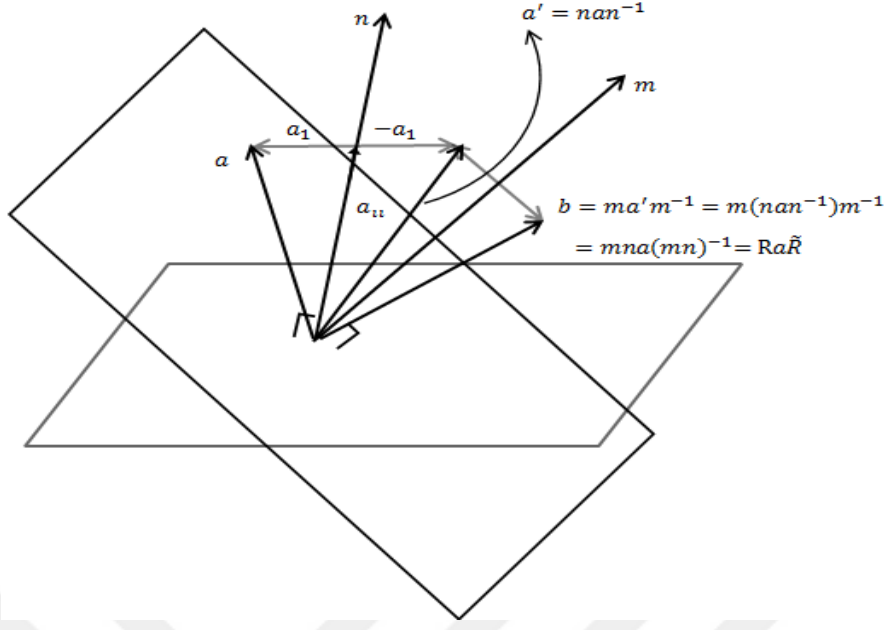
$$\sigma_3 \sigma_1 = I \sigma_2$$

(4.1)

bu bivectorler kendi düzlemindeki vektörleri 90° döndürür.

$$(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_2 = \sigma_1, \quad (\sigma_2 \sigma_3) \sigma_3 = -\sigma_2$$

$I \sigma_1, -I \sigma_2, I \sigma_3$ ile kuaterniyon cebirinin i, j, k tanımlanması ünlü Hamilton ilişkileri $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ elde edilir. i, j, k bivector olduğundan ortogonal yönlerde 90° dönüşü temsil ettikleri ve 3 boyutlu rotasyonların gösterimi için uygun bir sistem oluşturur (Şekil 4.7).



Şekil 4.7. 3-boyutlu uzayda çift yansımalar tarafından oluşturulan rotor.

Eğer $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \in Q_{(3,0,0)}$ bir birim kuaterniyonu temsil ediyorsa aynı rotasyonu gerçekleştiren rotor şu şekilde verilir.

$$R = \underbrace{a_0}_{\text{skaler}} + \underbrace{a_1(I\sigma_1) - a_2(I\sigma_2) + a_3(I\sigma_3)}_{\text{bivektör}}. \quad (4.2)$$

Kuaterniyon cebiri bu nedenle 3- boyutlu geometrik cebirin bir alt kümesi olarak görülmektedir. Bir dönme bir çift yansıma ile gerçekleştirilebilir. n bir birim vektörünü dik düzlem üzerinde bir a vektörünün yansımalarının sonucu;

$$a_1 - a_{11} = a' = -nan^{-1}$$

yazılabilir. Burada a n'nin iz düşümü olan a_1 , n ye dik ve a_{11} de n ye paraleldir. Böylece a n'nin n ye dik olan düzleminde bir yansıması ardından başka bir yansıma olan yeni bir vektör;

$$b = -m(-nan^{-1})m^{-1} = (mn)a(mn)^{-1} = Ra\tilde{R}.$$

olarak elde edilir. Geometrik çarpımı kullanarak Eş. 4.2 de verilen R rotorunun hem skaler hem de bivektör kısmını multivektör şeklinde gösterebilir. Yani;

$$R = mn = m \cdot n + m\wedge n$$

Bu bileşenler $Q_{(3,0,0)}$ daki eşdeğer bir birim kuaterniyonun skaler ve vektör parçalarına karşılık gelir. Skaler ve bivektör kısımları düşünüldüğünde bir rotorun Euler gösterimi aşağıdaki gibidir;

$$R = e^{n\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos \frac{\theta}{2} + n \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.3)$$

Burada dönme eksenini;

$$n = n_1 \sigma_2 \sigma_3 + n_1 \sigma_3 \sigma_1 + n_3 \sigma_1 \sigma_2$$

bivektör bazını gerer. R_1 rotorunu takip eden R_2 rotorunun birleşimi;

$$R = R_1 R_2$$

şeklindedir (Bayro-Corrochano ve Kahler, 2000; Lounesto, 2011).

4.4. Motor Cebiri

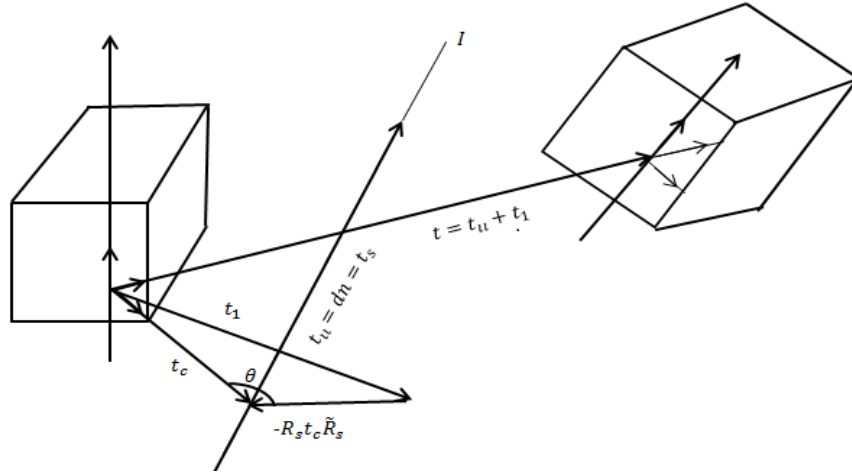
Clifford kuaterniyon adı verilen motorları tanıtmıştır. Motor “moment ve rotorların” birlikte ifade eden bir tabirdir. $Q_{3,0,1}$, yada motor cebirin 4 boyutlu tüm alt cebirinde bile bulunabilirler $Q^+_{3,0,1}$ ile gösterilen bu tam alt cebir skaler, bivektör ve pseudoskaler’lerin bir bazını gerer.

$$\underbrace{1}_{\text{skaler}}, \underbrace{\gamma_2 \gamma_3, \gamma_3 \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 \gamma_3, \gamma_4 \gamma_2, \gamma_4 \gamma_3}_{6 \text{ bivektör}}, \underbrace{1}_{\text{birim pseudoskaler}} \quad (4.4)$$

Burada bivektör bazlarına karşılık gelen benzer bir baz için 3-boyutlu doğrular uzayını gerer. Bir skaler çiftinin pseudoskalerleri P ve ilk üç tabanlı bivektörler dualleridir. Örneğin, $\gamma_2 \gamma_3$ nin duali $1 \gamma_2 \gamma_3$ veya $\gamma_4 \gamma_1$ dir.

4.4.1. $Q^+_{3,0,1}$ daki motorlar, rotorlar ve translasyonlar

Katı bir hareket dönme ve ötelemeden oluştuğundan bir motoru rotor ve translasyonlar gibi operatörler açısından ifade etmek mümkündür. Motor hareketi temel olarak iki basamakta tanımlanabilir. Birincisi bir eksenini belli bir yönde başka bir eksene paralel olana kadar döndürülür diğeri ise bir eksenini başka bir eksene paralel hale getirilir (Şekil 4.8).



Şekil 4.8. Vida hareketi.

Vida hareketinin eksen doğrusu aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
 R_s &= a_0 + a_s n + I a_s n \Lambda t_s \\
 &= a_c + a_s (n + I m) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n + I m) \\
 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) l
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Doğrunu n yönü için bir bivektör ve $m = n \Lambda t_s$ momentum için dual bivektör ile ifade edilir. Motor rotasyon eksen doğrusu l boyunca $t_s = dn$ mesafesine kayarak tanımlanır.

Soldan ve sağdan motor etkisi nedeniyle $\frac{t_s}{2}$ alınır.

$$\begin{aligned}
 M &= T_s R_s = (1 + I \frac{t_s}{2})(a_0 + a + I a \Lambda t_c) \\
 &= (1 + I \frac{dn}{2})(a_c + a_s n + I a_s n \Lambda t_c) \\
 &= a_c + a_s n + I a_s n \Lambda t_c + I \frac{d}{2} a_c n - I \frac{d}{2} a_s n n \\
 &= (a_c - I \frac{d}{2} a_s) + (a_s + I a_c \frac{d}{2})(n + I n \Lambda t_c) \\
 &= (a_c - I a_s \frac{d}{2}) + (a_s + I a_c \frac{d}{2}) l
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Motorun bu ifadesi, üniter vida eksen doğrusu olan l yi açıkça ortaya koyar. Bir motorun Euler gösterimi Eş. 4.6 da

$$\begin{aligned}
 a_c &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 a_s &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

yazılırsa;

$$\begin{aligned}
M &= T_s R_s = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - I \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d}{2} \right) + \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d}{2} \right) I \\
&= \cos\left(\frac{\theta}{2} + I \frac{d}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} + I \frac{d}{2}\right) I
\end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılabilir. Eğer motoru yalnızca bir rotor ve konjuge olarak ifade edilirse;

$$\tilde{R} = r_0 - r_1 \sigma_2 \sigma_3 - r_2 \sigma_3 \sigma_1 - r_3 \sigma_1 \sigma_2 = r_0 - r_1 \tag{4.8}$$

olur.

$$M = T_s R_s = \left(1 + I \frac{t_s}{2} \right) R_s = R_s + I \frac{t_s}{2} R_s = R_s + I R'_s. \tag{4.9}$$

Bu durumda rotor t_s cinsinden ifade edilebilir.

$$R'_s \tilde{R}_s = \left(\frac{t_s}{2} R_s \right) \tilde{R}_s \tag{4.10}$$

böylece

$$t_s = 2R'_s \tilde{R}_s \tag{4.11}$$

dir. Şekil 4.8 te t nin, bir nesnenin dönüş ekseninin koordinat sistemine atıfta bulunduğu 3 boyutlu bir uzaklık vektörü ve t_{11} veya t_s nin motor eksen doğrusu boyunca vektör olduğunu gösterir. Burada bir bivector olarak düşünülen t uzaklığı, t_c ve t_s bivektörleri açısından aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
t &= t_1 + t_{11} = t_{11} + t_s \\
&= (t_c - R_s t_c \tilde{R}_s) + (t \cdot n)n \\
&= (t_c - R_s t_c \tilde{R}_s) + dn \\
&= (t_c - R_s t_c \tilde{R}_s) + t_s \\
&= (t_c - R_s t_c \tilde{R}_s) + (2R'_s \tilde{R}_s).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.4.2. Motor özellikleri

Genel olarak bir motor şu şekilde ifade edilebilir.

$$M_\alpha = \alpha M \tag{4.13}$$

burada; $\alpha \in \mathbb{R}$ ve M bir birim motordur. Bir M birim motorunun normu;

$$\begin{aligned}
|M| &= M \tilde{M} = T_s R_s \tilde{R}_s \tilde{T}_s \\
&= \left(1 + I \frac{t_s}{2} \right) R_s \tilde{R}_s \left(1 - I \frac{t_s}{2} \right) \\
&= 1 + I \frac{t_s}{2} - I \frac{t_s}{2} = 1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dır. Burada \tilde{M} , motorun eşleniği olup;

$$\tilde{M} = \tilde{T}\tilde{R} = \tilde{R} \tilde{T} \quad (4.15)$$

dir. Eş. 4.9 ve birim motor büyüklüğü göz önüne alındığında iki önemli eşitlik verilebilir.

$$\begin{aligned} |M| &= M\tilde{M} = (R_s + IR'_s)(\tilde{R}_s + I\tilde{R}'_s) \\ &= R_s\tilde{R}_s + I(\tilde{R}_sR'_s + \tilde{R}'_sR_s) = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

olacak şekilde;

$$R_s\tilde{R}_s = 1 \quad (4.17)$$

$$\tilde{R}_sR'_s + \tilde{R}'_sR_s = 2(r_0r'_0 - r \cdot r') = 0 \quad (4.18)$$

elde edilir. Ortaya çıkan motor toplam yer değiştirmeyi tanımlar. Yani;

$$\begin{aligned} M_c &= M_a M_b = (R_{s_a} + IR'_{s_a})(R_{s_b} + IR'_{s_b}) \\ &= R_{s_a}R_{s_b} + I(R_{s_a}R'_{s_b} + R'_{s_a}R_{s_b}) \\ &= R_{s_c} + IR'_{s_c} \end{aligned} \quad (4.19)$$

dir. Eş. 4.9 da bir motor bir skaler, bivektör dual skaler ve dual bivektör olarak ifade edilir.

$$\begin{aligned} M &= T_s R_s = R_s + IR'_s \\ &= (a_0 + a_1\gamma_2\gamma_3 + a_2\gamma_3\gamma_2 + a_3\gamma_2\gamma_1) \\ &\quad + I(b_0 + b_1\gamma_2\gamma_3 + b_2\gamma_3\gamma_2 + b_3\gamma_2\gamma_1) \\ &= (a_0 + a) + I(b_0 + b) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Motorun reel ve dual kısımlarının bileşenlerini geliştirmek için başka bir gösterim kullanılabilir.

$$M = (a_0, a) + I(b_0, b) \quad (4.21)$$

Parantez içindeki her terim bir skaler ve bir 3-boyutlu bivektörü içermektedir.

4.4.3. Nokta, doğru ve düzlemlerin gösterimi

Bu bölümde 4-boyutlu uzayda nokta, doğru ve düzlemler modellenecektir. Bunun için bir bivektör bazını ve 4-boyutlu doğru uzayını kullanarak $Q^+_{3,0,1}$ özel cebiri seçilebilir.

Nokta gösterimi durumunda hiperdüzleme $X_4 = 1$ e 3-boyutlu bir nokta yerleştirerek devam edilsin. Böylece $X \in Q^+_{3,0,1}$ de alınan noktanın denklemi;

$$\begin{aligned} X &= 1 + x_1\gamma_4\gamma_1 + x_2\gamma_4\gamma_2 + x_3\gamma_4\gamma_3 \\ &= 1 + I(x_1\gamma_2\gamma_3 + x_2\gamma_3\gamma_1 + x_3\gamma_1\gamma_2) \end{aligned}$$

$$= 1 + Ix \equiv (1, 0) + I(0, x) \quad (4.22)$$

Bu ifadede reel kısmı 1 den ve 3-boyutlu bir bivektörün ikili kısmından oluştuğu görülür.

$Q^+_{3,0,1}$ cebiri yalnızca bivektör ve skalerler ile oluştuğundan bu özel geometrik cebir, modelleme için uygun bir sistem olarak alınabilir. Doğru temsiline karşısında, nokta ve düzlem bazen skaler ve bivektör kısımlarına göre simetrik olmayan gösterimlerdir. Birim pseudoskaler olan $I = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ nin bazı $\{\gamma_4\gamma_1, \gamma_4\gamma_2, \gamma_4\gamma_3\}$ den elde edilen herhangi bir dual bivektörleriyle çarpımı sıfır olduğundan, doğruyu temsil etmek için baz bivektör olan $\{\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1, \gamma_1\gamma_2\}$ seçilmelidir.

$$L = n + Im \quad (4.23)$$

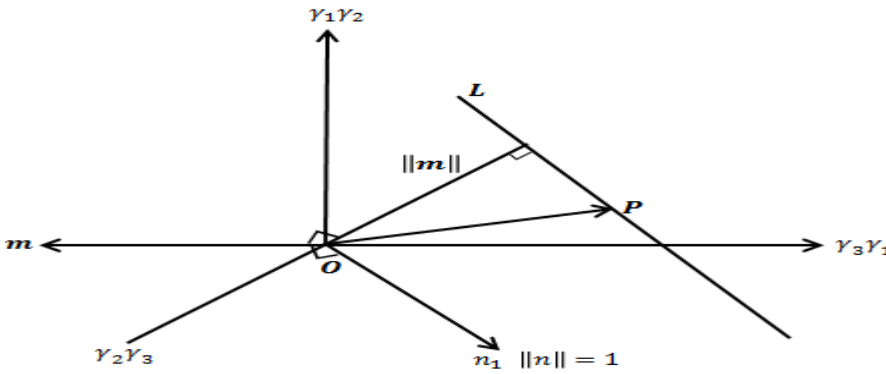
Burada doğru yönü ve momentini için bivektörler, doğru üzerinde bulunan x_1 ve x_2 noktalarını iki bivektör yerine kullanarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} n &= (x_2 - x_1) \\ &= (x_{21} - x_{11})\gamma_2\gamma_3 + (x_{22} - x_{12})\gamma_3\gamma_1 + (x_{23} - x_{13})\gamma_1\gamma_2 \\ &= L_{n_1}\gamma_2\gamma_3 + L_{n_2}\gamma_3\gamma_1 + L_{n_3}\gamma_1\gamma_2 \\ m &= x_1 \times x_2 \\ &= (x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22})\gamma_2\gamma_3 + (x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23})\gamma_3\gamma_1 \\ &\quad + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})\gamma_1\gamma_2 \\ &= L_{m_1}\gamma_2\gamma_3 + L_{m_2}\gamma_3\gamma_1 + L_{m_3}\gamma_1\gamma_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dual sayılar kullanılarak, bu doğru gösteriminin anlaşılması kolaydır ve cebirsel olarak işlem yapılabilir.

$$L \equiv (0, n) + I(0, m), \quad (4.25)$$

Burada m ve n , 3-boyutlu bivektör bir baz ile gerilmiştir. Şekil 4.9'da dual bivektör taban cinsinden doğruyu gösterir.



Şekil 4.9. Bivektörler çatısında bir doğrunun yerleşimi.

4.5. Nokta, Doğru ve Düzlemlerin Hareketlerinin Modellenmesi

Bu kesimde, genel olarak motor cebirinin 3-boyuttaki kinematik kavramlar ele alınacaktır.

4.5.1. Nokta hareketi

Nokta hareketinin modellenmesi için Eş. 4.22 nin nokta gösterimi kullanılır.

$I^2 = 0$ için motor özelliklerinden;

$$\begin{aligned}
 X' &= 1 + Ix' = MX\tilde{M} = M(1 + Ix)\tilde{M} \\
 &= T_s R_s (1 + Ix) \tilde{R}_s T_s \\
 &= \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) R_s (1 + Ix) \tilde{R}_s \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) \\
 &= \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) (1 + IR_s x \tilde{R}_s) \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) \\
 &= \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) + IR_s x \tilde{R}_s + I \frac{t_s}{2} \\
 &= 1 + I(R_s x \tilde{R}_s + t_s)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

yazılır. 4-boyutlu uzayda bu denklemin dual kısmı 3-boyutlu uzayın $Q_{3,0,0}$ geometrik cebirinde formüle edilen denklemle tamamen eşdeğerdir.

4.5.2. Doğru hareketi

Eş. 4.23 deki doğruyu kullanarak, bir doğru hareketi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

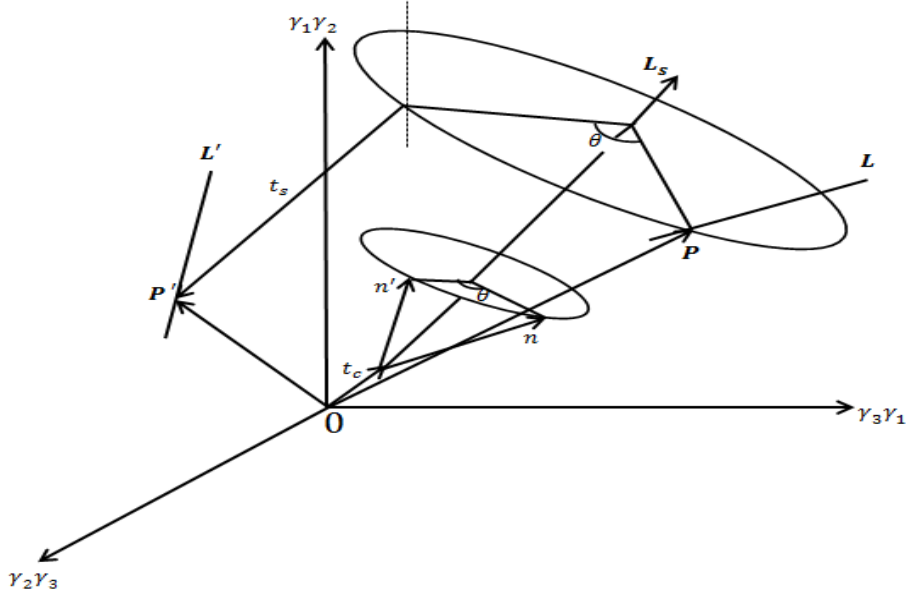
$$\begin{aligned}
 L' &= n' + Im' = ML\tilde{M} = M(n + IM)\tilde{M} \\
 &= T_s R_s (n + Im) \tilde{R}_s \tilde{T}_s \\
 &= \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) R_s (n + Im) \tilde{R}_s \left(1 - I \frac{t_s}{2}\right) \\
 &= \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) \left(R_s n \tilde{R}_s + IR_s m \tilde{R}_s - IR_s n \tilde{R}_s \frac{t_s}{2}\right) \\
 &= R_s n \tilde{R}_s + I \left(R_s n \frac{t_s}{2} \tilde{R}_s + \frac{t_s}{2} R_s n \tilde{R}_s + R_s m \tilde{R}_s\right) \\
 &= R_s n \tilde{R}_s + I(R_s n \tilde{R}'_s + R'_s n \tilde{R}_s + R_s m \tilde{R}_s)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Eş. 4.27 de bivektörü olan $\frac{t_s}{2}$ yi rotor R_s veya \tilde{R}_s ile birleştirmeden önce reel ve dual kısımların $Q_{3,0,0}$ da formüle edilen doğru denkleminin elemanları ile tamamen

eşdeğerdir. Doğrunun vidalı hareketi temsil edilmektedir (Şekil 4.9) (Bayro-Corrochano ve Kahler, 2000; Vince, 2009).

4.5.3. Düzlem hareketi

$Q^+_{3,0,1}$ de bir düzlem hareketi, nokta çiftinin hareketi olarak görülebilir (Şekil 4.10).



Şekil 4.10. Düzlem hareketi.

Düzlem hareketinin denklemi;

$$\begin{aligned}
 H' &= n' + Id' = MH\tilde{M} = M(n + Id)\tilde{M} \\
 &= T_s R_s (n + Id) \tilde{R}_s T_s \\
 &= \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) (R_s n \tilde{R}_s + Id) \left(1 + I \frac{t_s}{2}\right) \\
 &= R_s n \tilde{R}_s + I \left(R_s n \tilde{R}_s \frac{t_s}{2} + \frac{t_s}{2} R_s n \tilde{R}_s + d\right) \\
 &= R_s n \tilde{R}_s + I(t_s \cdot (R_s n \tilde{R}_s) + d) \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Bu ifadenin reel ve dual kısmı $Q_{3,0,0}$ da formüle edilen denklemin bivektör ve trivektör kısımlarına daha yüksek bir boyutta eşdeğerdir (Bayro-Corrochano ve Kahler, 2000; Belon ve Hildenbrand, 2017; Selig, 2000).

5. DENAVIT-HARTENBERG PARAMETRELERİ

Manipülâtör kinematiginde son noktanın yerinin belirlenmesi klasik olarak analitik yöntemle verilebildiği gibi çatı yerleşimi algoritması ile de verilebilir. Bu konudaki yöntemlerden biri D-H (Denavit-Hartenberg) temsil metodudur. Bu bölümde öncelikle D-H parametreleri ile ilgili bilgi verilecektir.

5.1. Denavit-Hartenberg İleri Kinematik Denklemlerin Temsili

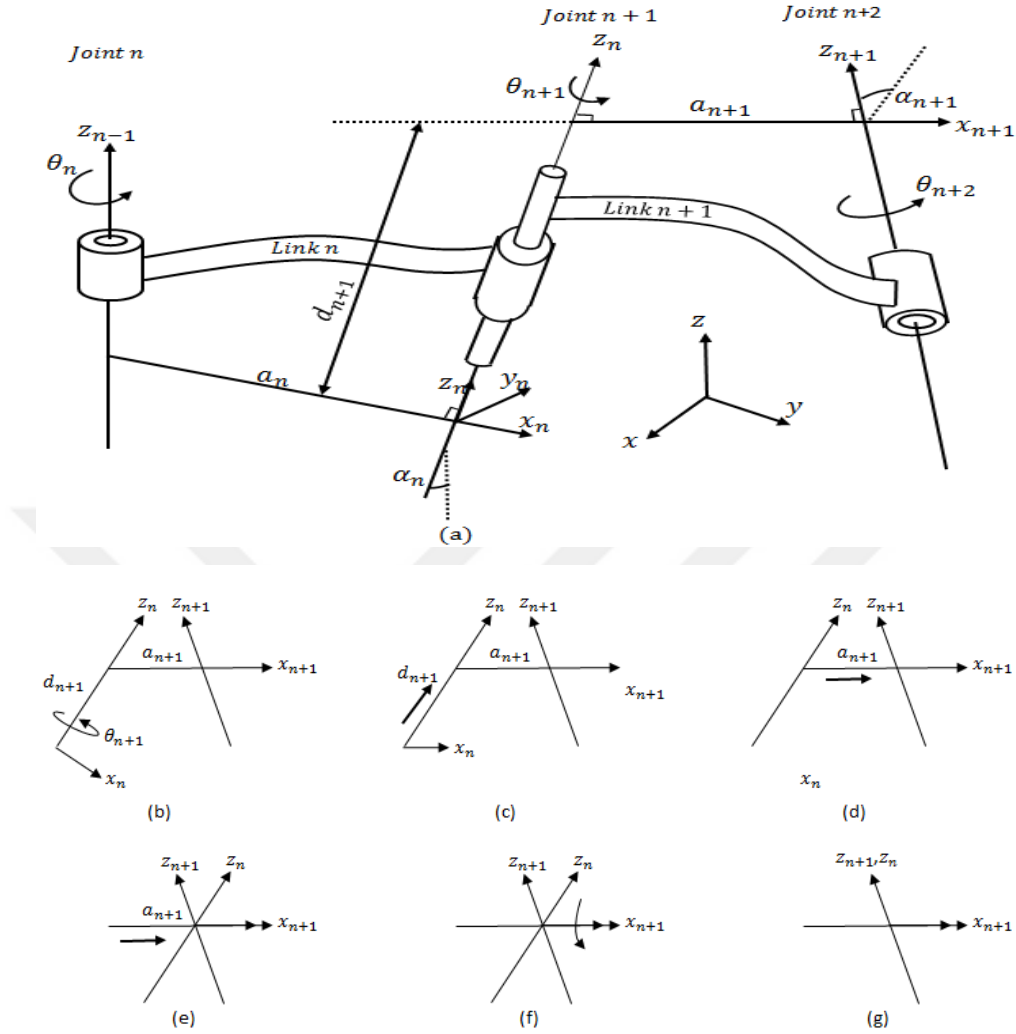
Öncelikle, $\{n\}$ çatısını $\{n+1\}$ çatısına göre tanımlayan, genellikle dört link parametresinin bir fonksiyonu olan dönüşüm inşa edilir. Her link için bir çatı aşğıdaki algoritmaya göre verilir.

- θ_{n+1} açıyla z_n –ekseni etrafında dönme işlemi yapılır (Şekil 5.1) (b). Bu x_n ve x_{n+1} eksenlerini paralel hale getirir.
- x_n ve x_{n+1} eksenlerini eş doğrusal hale getiren z_n eksenı boyunca d_{n+1} kadar öteleme işlemi yapılır (Şekil 5.1) (c).
- x_n ve x_{n+1} eksenlerinin orijinlerini bir araya getiren x_n eksenı boyunca a_{n+1} kadar öteleme işlemi yapılır (Şekil 5.1) (d). Bu noktada, iki referans çatılarının orijinleri aynı konumda olur.
- z_n ve z_{n+1} , z_n –eksenini x_n –ekseni etrafında α_{n+1} açısıyla dönme işlemi yapılır (Şekil 5.1) (f). Bu noktada n ve $n + 1$ çatıları hizalanır.

Hareketi temsil eden matris, bu dört hareketi temsil eden dört matrisin birbirleri ile ardışık çarpılmasıyla bulunur. Sonuç şu şekildedir:

$$T_n^{n+1} = A_{n+1} = \text{Rot}(z, \theta_{n+1}) \times \text{Trans}(0, 0, d_{n+1}) \times \text{Trans}(a_{n+1}, 0, 0) \times \text{Rot}(x, \alpha_{n+1})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} c \theta_{n+1} & -s \theta_{n+1} & 0 & 0 \\ s \theta_{n+1} & c \theta_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \alpha_{n+1} & -s \alpha_{n+1} & 0 \\ 0 & s \alpha_{n+1} & c \alpha_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{n+1} &= \begin{bmatrix} c \theta_{n+1} & -s \theta_{n+1} c \alpha_{n+1} & s \theta_{n+1} s \alpha_{n+1} & a_{n+1} c \theta_{n+1} \\ s \theta_{n+1} & c \theta_{n+1} c \alpha_{n+1} & -c \theta_{n+1} s \alpha_{n+1} & a_{n+1} s \theta_{n+1} \\ 0 & s \alpha_{n+1} & c \alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Şekil 5.1. Denavit-Hartenberg çatı yerleştirmesi.

Her dönüşüm ifadesinde, dönüşümleri temsil eden bir dizi matrisi vardır. Robot tabanı ile el arasındaki toplam dönüşüm;

$$T_R^H = T_R^1 T_1^2 T_2^3 \dots T_{n-1}^n = A_1 A_2 A_3 \dots A_n,$$

şeklindedir. Burada n mafsal numarasıdır (Niku, 2001; McCarthy, 2000).

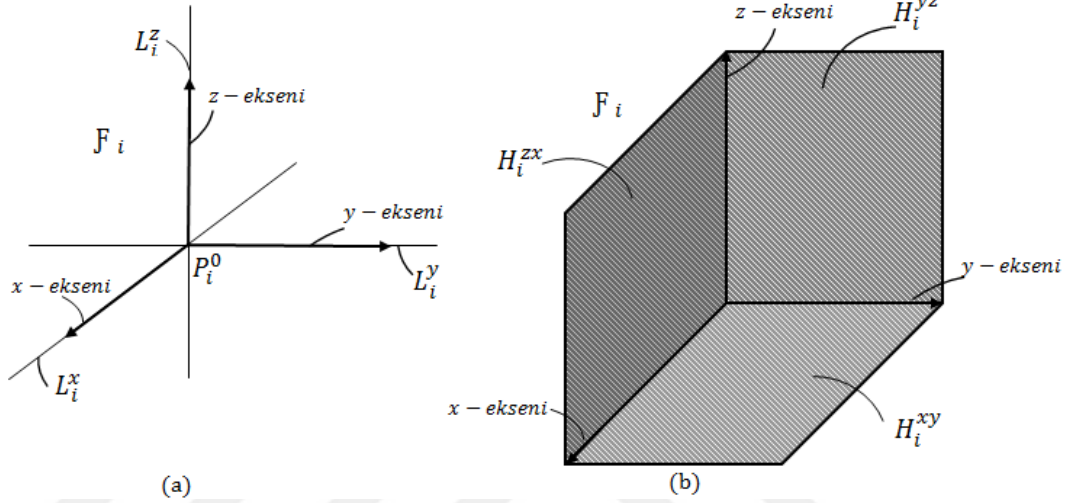
5.2. Robot Manipülatorlerin İleri Kinematığı

İleri kinematik ortak geçişlerin parametreleri göz önüne alındığında, uç-efektör veya çatı olan F_n nin konum ve doğrultmanının hesaplamasını içerir. Bu bölümde geometrik nesne olarak bir nokta, doğru veya düzlem kullandığımızda ileri kinematığın nasıl hesaplanacağı gösterilecektir. Sonraki kesimde kullanılacak nokta, doğru ve

düzlemler için gösterim (Şekil 5.2) (a, b) de gösterilmiştir. n ile manipülâtörün genel durumu için ileri kinematik aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$${}^0_nM = {}^0_1M {}^1_2M {}^2_3M \dots {}^{n-1}_nM = \prod_{i=1}^n {}^{i-1}_iM \quad (5.1)$$

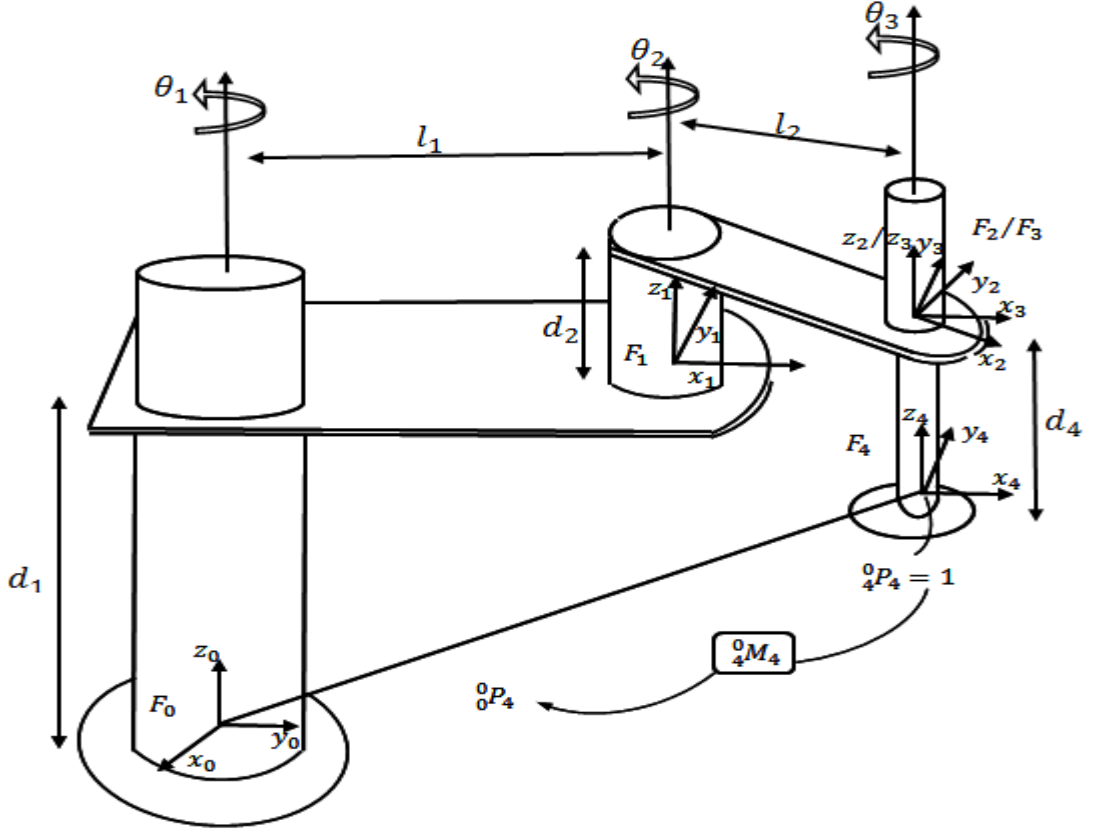
İleri kinematikte nokta, doğru veya düzlem gösterimi aşağıdaki gibi formüle edilebilir.



Şekil 5.2. Doğru ve düzlem gösterimi.

$$\begin{aligned} {}^0_nX &= {}^0_nM {}^n_0X {}^0_n\tilde{M} = \prod_{i=1}^n {}^{i-1}_iM {}^n_0X \prod_{i=1}^n {}^{n-i}_{n+1-i}\tilde{M} \\ {}^0_nL &= \prod_{i=1}^n {}^{i-1}_iM {}^n_0L \prod_{i=1}^n {}^{n-i}_{n+1-i}\tilde{M} \\ {}^0_nH &= \prod_{i=1}^n {}^{i-1}_iM {}^n_0H \prod_{i=1}^n {}^{n-i}_{n+1-i}\tilde{M} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Denavit-Hartenberg parametreleri tarafından belirtilen SCARA manipülâtörü için Eş. 5.2 gibi nokta, doğru ve düzlemler için ileri kinematiği göstermek üzere 0_4M yazılsın. İlk olarak, n=4 için Eş. 5.1 i kullanarak, gerekli olan motor 0_4M aşağıdaki gibi yazabilir. Burada; $\hat{\theta}_i = \theta_i + Id_i$ $\hat{\alpha}_i = \alpha_i + Il_i$ dual açılardır. Döngüsel manipülâtör de θ_i , prizmatik manipülâtörde d_i kullanılır (Şekil 5.3).



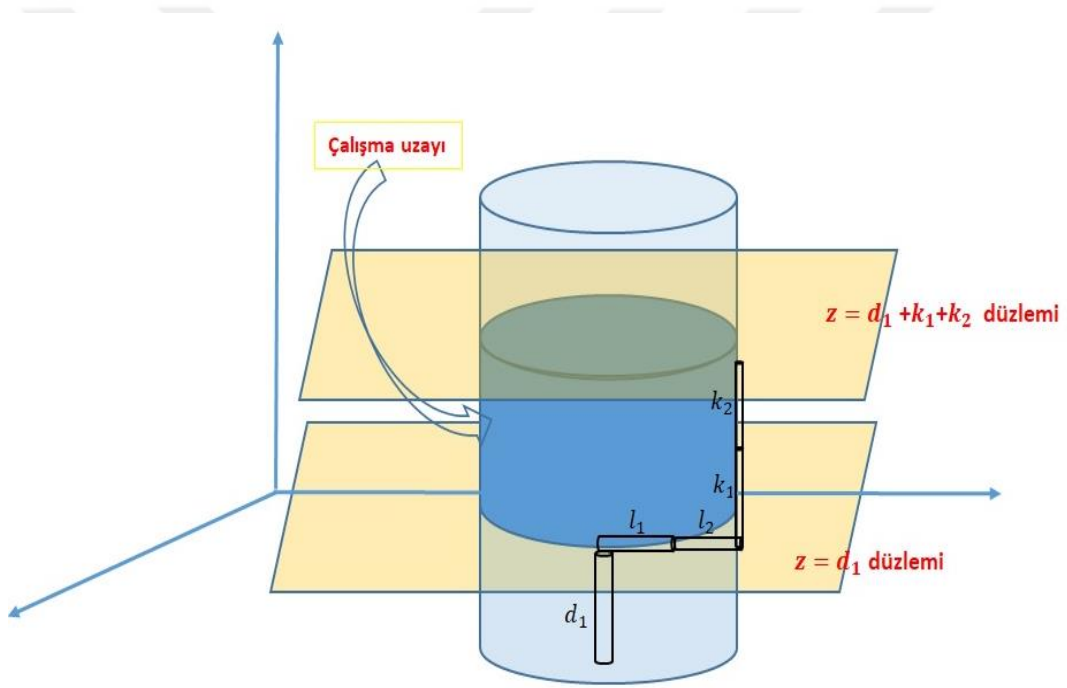
Şekil 5.3. RRRP Scara manipülatörü.

$$\begin{aligned}
 {}^0M &= {}^0M_1 {}^1M_2 {}^2M_3 {}^3M_4 M = (M_{\theta_1}^z M_{\alpha_1}^x) \dots (M_{\theta_4}^z M_{\alpha_4}^x) \\
 &= (T_{d_1}^z R_{\theta_1}^z T_{l_1}^x R_{\alpha_1}^x) \dots (T_{d_4}^z R_{\theta_4}^z T_{l_4}^x R_{\alpha_4}^x) \\
 &= \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_1}^z \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_2}^z \\
 &\quad \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_3}^z \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix} \right). \\
 {}^0P^0 &= {}^0M_4 {}^4P^0 {}^0\tilde{M} = {}^0M (1 + I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) {}^0\tilde{M} \\
 &= 1 + I \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ d_1 + d_2 + d_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(Bayro-Corrochano ve Kahler, 2000).

6. 4R VE 2RPR MEKANİZMALARININ DUAL KUATERNİYON, D-H PARAMETRELERİ VE CLIFFORD ÇARPIMI İLE TEMSİLİ

Bu kesimde, özel bir RRRR (4R) ve RRPR (2RPR) mekanizmalarının dizaynı, mekanizmaya ait D-H parametreleri, hareket matrisleri, Clifford cebiri yaklaşımı ile motorlar ve dual kuaterniyon formları hesaplanacaktır. Mekanizma \mathbb{R}^3 te XOY düzleminde bir $P(a, b, 0)$ noktasına konuşlandığında, çalışma uzayı P merkezli $l_1 + l_2$ yarıçaplı dik dairesel silindirin $Z = d_1$ ve $Z = d_1 + k_1 + k_2$ düzlemleri ile arakesiti olan bölgedir (Şekil 6.1).



Şekil 6.1. Çalışma uzayı.

Bu mekanizmanın ilham kaynağı klasik Scara (Selective Compliance Assembly Robot Arm) robotudur.

6.1. 4R Mekanizma Tasarımı ve İleri Kinematığı

Kinematik hesaplamalara, robotun her eklemi için ayrı ayrı D-H değişkenlerinin bulunması ile başlanılır. Daha sonra robotun eklemlerine çatılar yerleştirilir ve kurallar

gereği D-H değişken çizelgesi oluşturulur (Çizelge 6.1). Verilen çizelgede, prizmatik eklem hariç diğer eksenlerde değişken dönme açısıdır. Prizmatik eksen ise değişken uzama miktarıdır. Tasarlanan robotun ilk formunda dört tane dönme (revolute) vardır (Şekil 6.2).

Çizelge 6.1. 4R robotun Denavit-Hartenberg değişkenleri

Link	d_i	θ_i	l_i	α_i
1	d_1	θ_1	l_1	0
2	d_2	θ_2	l_2	0
3	d_3	θ_3	0	0
4	d_4	θ_4	0	0

Dönüşüm matrisleri:

$${}^0_1M = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2M = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3M = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4M = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_4M = {}^0_1M {}^1_2M {}^2_3M {}^3_4M$$

olmak üzere;

$${}^0_4M = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yazılan matris dönüşümleri, sırasıyla birbiriyle çarpılması sonucu 0_4M ileri kinematik matrisi elde edilir.

$${}^0_4M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde;

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos\theta_4(\cos\theta_3(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (-\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3) \\ &\quad + (\cos\theta_3(-\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad - (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3)\sin\theta_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= \cos\theta_4(\cos\theta_3(-\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2) - (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3) \\ &\quad - (\cos\theta_3(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + (-\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3)\sin\theta_4 \end{aligned}$$

$$m_{13} = 0$$

$$m_{14} = l_1\cos\theta_1 + l_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$\begin{aligned} m_{21} &= \cos\theta_4(\cos\theta_3(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3) \\ &\quad + (\cos\theta_3(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) - (\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3)\sin\theta_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{22} &= \cos\theta_4(\cos\theta_3(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) - (\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3) \\ &\quad - (\cos\theta_3(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_3)\sin\theta_4 \end{aligned}$$

$$m_{23} = 0$$

$$m_{24} = l_1\sin\theta_1 + l_2(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{23} = 0$$

$$m_{24} = l_1\sin\theta_1 + l_2(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{31} = 0$$

$$m_{32} = 0$$

$$m_{33} = 1$$

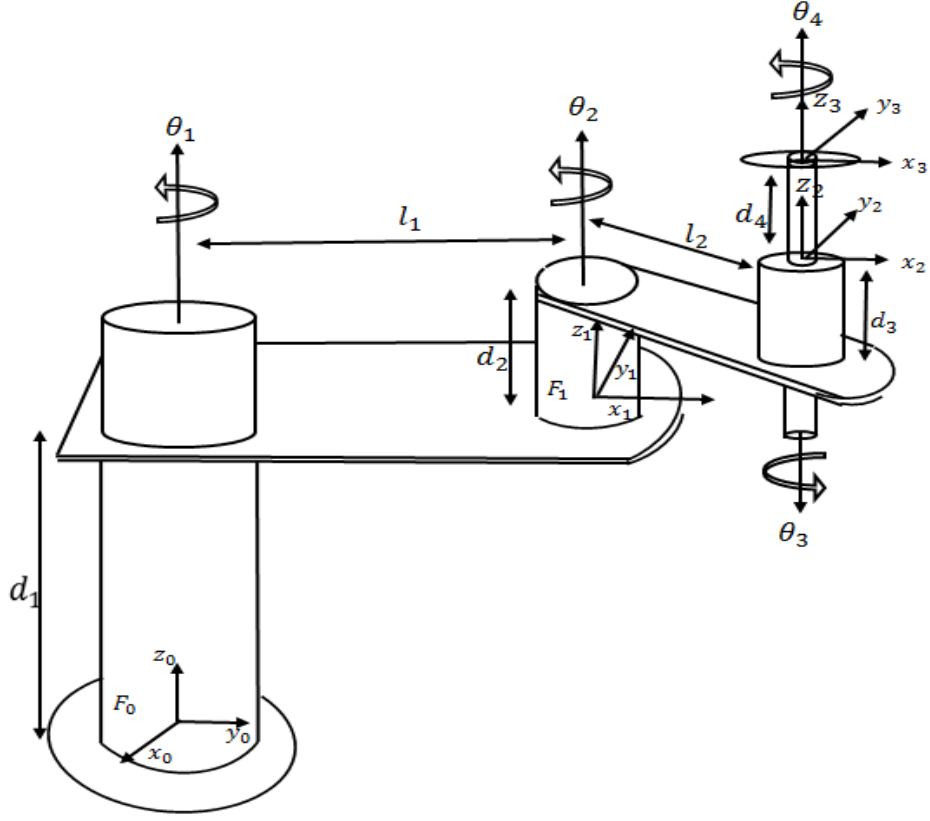
$$m_{34} = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

$$m_{41} = 0$$

$$m_{42} = 0$$

$$m_{43} = 0$$

$$m_{44} = 1$$



Şekil 6.2. 4R robotun çatı yerleşimi.

olur. O halde 4R manipütörü için ileri kinematiğin motor denklemini yazılırsa.

$$\begin{aligned}
 {}^0_4M &= {}^0_1M_2M_3M_4M = (M_{\theta_1}^z M_{a_1}^x) \dots (M_{\theta_4}^z M_{a_4}^x) \\
 &= (T_{d_1}^z R_{\theta_1}^z T_{l_1}^x R_{a_1}^x) \dots (T_{d_4}^z R_{\theta_4}^z T_{l_4}^x R_{a_4}^x) \\
 &= (T_{d_1}^z R_{\theta_1}^z T_{l_1}^x) \cdot (T_{d_2}^z R_{\theta_2}^z T_{l_2}^x) \cdot (T_{d_3}^z R_{\theta_3}^z) \cdot (T_{d_4}^z R_{\theta_4}^z) \\
 &= \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_1}^z \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_2}^z \\
 &\quad \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_3}^z \left(1 + \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_4}^z \\
 &= 1 + I \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Örnek 6.1.2. D-H değişkenlerinin sayısal değerleri verilmek üzere (Çizelge 6.2);

Çizelge 6.2. 4R D-H sayısal değerleri

Link	d_i	θ_i	l_i	α_i
1	3	3π	4	0
2	2	$\frac{2}{\pi}$	3	0
3	1	$-\pi$	0	0
4	4	π	0	0

$${}^0_4M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dönüşüm matrisi elde edilir.

$$= 1 + I \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

6.2. 2RPR Mekanizma Tasarımı ve İleri Kinematığı

Tasarlanan revolute-revolute-prismatic-revolute (RRPR) mekanizmasına ait görsel bilgiler Şekil 6.3.de gösterilmektedir. Parametrelere bağlı olarak D-H çizelgesi ve ilgili hesaplamalar bu kesimde verilecektir.D-H çizelgesi verilmek üzere (Çizelge 6.3);

Çizelge 6.3. 2RPR değişkenleri

Link	d_i	θ_i	l_i	α_i
1	d_1	θ_1	l_1	0
2	d_2	θ_2	l_2	0
3	d_3	0	0	0
4	0	θ_3	0	0

Dönüşüm matrisleri

$${}^0_1M = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2M = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4M = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_4M = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_4M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$m_{11} = \sin\theta_2(-\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2) + \cos\theta_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{12} = \cos\theta_2(-\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2) - \sin\theta_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{13} = 0$$

$$m_{14} = l_1\cos\theta_1 + l_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{21} = \cos\theta_2(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2) + \sin\theta_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{22} = -\sin\theta_2(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2) + \cos\theta_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{23} = 0$$

$$m_{24} = l_1\sin\theta_1 + l_2(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$m_{31} = 0$$

$$m_{32} = 0$$

$$m_{33} = 1$$

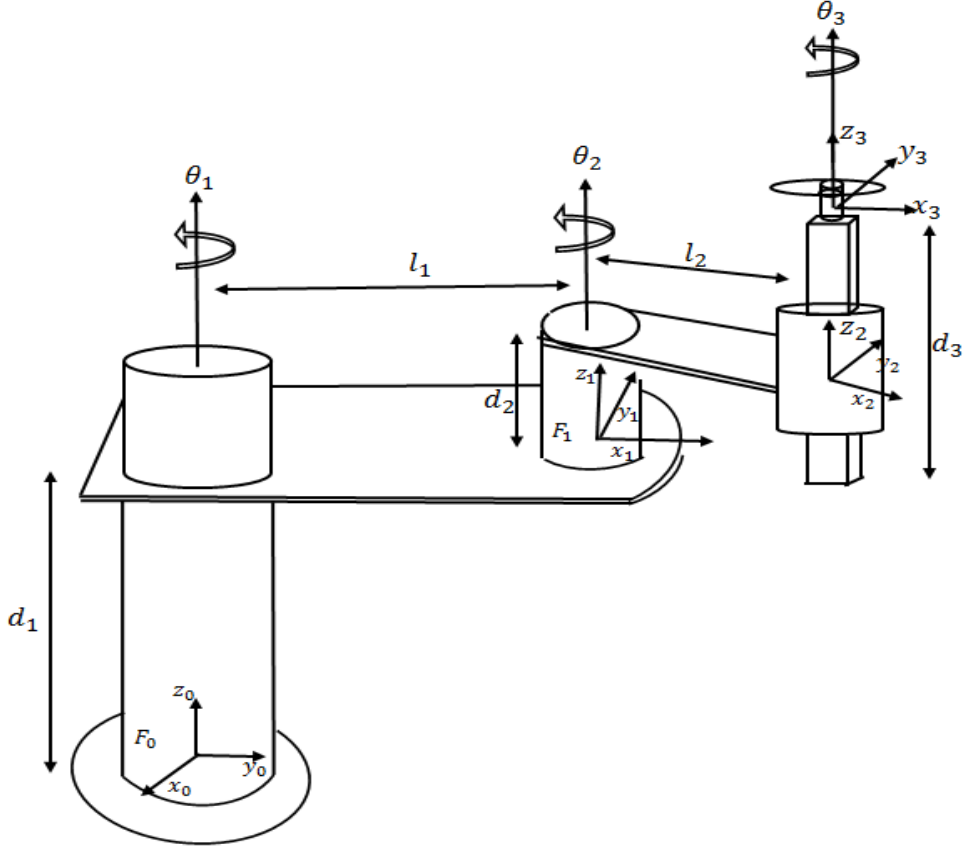
$$m_{34} = d_1 + d_2 + d_3$$

$$m_{41} = 0$$

$$m_{42} = 0$$

$$m_{43} = 0$$

$$m_{44} = 1$$



Şekil 6.3. 2RPR mekanizma.

2RPR manipülatörü için ileri kinematiğin motor denklemleri yazılırsa;

$$\begin{aligned} {}^0M_4 &= {}^0M_1 {}^1M_2 {}^2M_3 {}^3M_4 = (M_{\hat{\theta}_1}^Z M_{\hat{a}_1}^x) \dots (M_{\hat{\theta}_4}^Z M_{\hat{a}_4}^x) \\ &= (T_{d_1}^Z R_{\theta_1}^Z T_{l_1}^x R_{\alpha_1}^x) \dots (T_{d_4}^Z R_{\theta_4}^Z T_{l_4}^x R_{\alpha_4}^x) \\ &= (T_{d_1}^Z R_{\theta_1}^Z T_{l_1}^x) (T_{d_2}^Z R_{\theta_2}^Z T_{l_2}^x) (T_{d_3}^Z R_{\theta_3}^Z) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{l_1}{d_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_1}^Z \left(1 + \frac{l_2}{d_2} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left(1 + \frac{l_3}{d_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_2}^Z \left(1 + \frac{l_4}{d_3} \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad \left(1 + \frac{l_5}{d_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) R_{\theta_3}^Z \end{aligned}$$

$$= 1 + I \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ d_1 + d_2 + d_3 \end{pmatrix}$$

Örnek 6.1.3. D-H değişkenlerinin sayısal değerleri verilmek üzere (Çizelge 6.4);

Çizelge 6.4. 2RPR sayısal değerleri

Link	d_i	θ_i	l_i	α_i
1	3	π	2	0
2	1	$\frac{\pi}{2}$	1	0
3	4	0	0	0
4	0	$\frac{3\pi}{2}$	0	0

$${}^0_4M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dönüşüm matrisi elde edilir. Bu manipülatör için ileri kinematiğin motor formu;

$$= 1 + I \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

6.3. 4R Mekanizmasına Ait Matlab Programları ve Çıktıları

4R mekanizmasının çatı yerleşimine ait Matlab programı aşağıdaki gibidir (Şekil 6.4).

axis square

k=2

axis([-k k -0.1*k k -0.1*k k])

r=12

Q1=45

Q2=110

Q3=-90

L1=20

L2=10

d1=7

d2=0


```

d3=-2
AA=[4;0;0;1]
BB=[ 0;4;0;1]
CC=[0;0;4;1]
O=[0;0;0;1]
line([0, AA(1)], [0, AA(2)], [0, AA(3)], LineWidth, 6, Color, [1 0 0])
line([0, BB(1)], [0, BB(2)], [0, BB(3)], LineWidth, 6, Color, [0 0 1])
line([0, CC(1)], [0, CC(2)], [0, CC(3)], LineWidth, 6, Color, [1 0 1])
hold on
RotzQ1=[cosd(Q1) -sind(Q1) 0 0; sind(Q1) cosd(Q1) 0 0; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1];
RotzQ2=[cosd(Q2) -sind(Q2) 0 0; sind(Q2) cosd(Q2) 0 0; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1];
RotxQ1 =[ 1 0 0 0; 0 cosd(Q1) -sind(Q1) 0; 0 sind(Q1) cosd(Q1) 0;0 0 0 1]
RotzQ3=[cosd(Q3) -sind(Q3) 0 0; sind(Q3) cosd(Q3) 0 0; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1];
TxL1=[1 0 0 L1;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]
TxL2=[1 0 0 L2;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]

Tzd1=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 d1;0 0 0 1]
Tzd2=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 d2;0 0 0 1]
Tzd3=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 -d3;0 0 0 1]
a1=Tzd1*AA
b1=Tzd1*BB
c1=Tzd1*CC
o1=Tzd1*O
hold on
line([o1(1), a1(1)], [o1(2), a1(2)], [o1(3), a1(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 0])
line([o1(1), b1(1)], [o1(2), b1(2)], [o1(3), b1(3)], LineWidth, 2, Color, [0 0 1])
line([o1(1), c1(1)], [o1(2), c1(2)], [o1(3), c1(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 1])
line([o1(1), O(1)], [o1(2), O(2)], [o1(3), O(3)], LineWidth, 6, Color, [0 0 0])
a=Tzd1*RotzQ1*TxL1*AA
b=Tzd1*RotzQ1*TxL1*BB
c=Tzd1*RotzQ1*TxL1*CC
o=Tzd1*RotzQ1*TxL1*O

```

hold on

line([o(1), a(1)], [o(2), a(2)], [o(3), a(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 0])

line([o(1), b(1)], [o(2), b(2)], [o(3), b(3)], LineWidth, 2, Color, [0 0 1])

line([o(1), c(1)], [o(2), c(2)], [o(3), c(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 1])

pause(1)

line([o(1), o1(1)], [o(2), o1(2)], [o(3), o1(3)], LineWidth, 6, Color, [0 1 0])

atd2=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*AA

btd2=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*BB

ctd2=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*CC

otd2=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*O

hold on

line([otd2(1), atd2(1)], [otd2(2), atd2(2)], [otd2(3), atd2(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 0])

line([otd2(1), btd2(1)], [otd2(2), btd2(2)], [otd2(3), btd2(3)], LineWidth, 2, Color, [0 0 1])

line([otd2(1), ctd2(1)], [otd2(2), ctd2(2)], [otd2(3), ctd2(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 1])

line([o(1), otd2(1)], [o(2), otd2(2)], [o(3), otd2(3)], LineWidth, 6, Color, [0 1 0])

pause(1)

at=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*AA

bt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*BB

ct=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*CC

ot=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*O

hold on

line([ot(1), at(1)], [ot(2), at(2)], [ot(3), at(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 0])

line([ot(1), bt(1)], [ot(2), bt(2)], [ot(3), bt(3)], LineWidth, 2, Color, [0 0 1])

line([ot(1), ct(1)], [ot(2), ct(2)], [ot(3), ct(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 1])

line([otd2(1), ot(1)], [otd2(2), ot(2)], [otd2(3), ot(3)], LineWidth, 5, Color, [0 1 0])

pause(1)

att=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*AA

btt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*BB

ctt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*CC

```
ott=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*O
```

```
hold on
```

```
line([ott(1), att(1)], [ott(2), att(2)], [ott(3), att(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 0])
```

```
line([ott(1), btt(1)], [ott(2), btt(2)], [ott(3), btt(3)], LineWidth, 2, Color, [0 0 1])
```

```
line([ott(1), ctt(1)], [ott(2), ctt(2)], [ott(3), ctt(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 1])
```

```
line([ot(1), ott(1)], [ot(2), ott(2)], [ot(3), ott(3)], LineWidth, 5, Color, [0 1 1])
```

```
pause(1)
```

```
attt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*RotzQ3*AA
```

```
bttt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*RotzQ3*BB
```

```
cttt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*RotzQ3*CC
```

```
ottt=Tzd1*RotzQ1*Txl1*Tzd2*RotzQ2*Txl2*Tzd3*RotzQ3*O
```

```
hold on
```

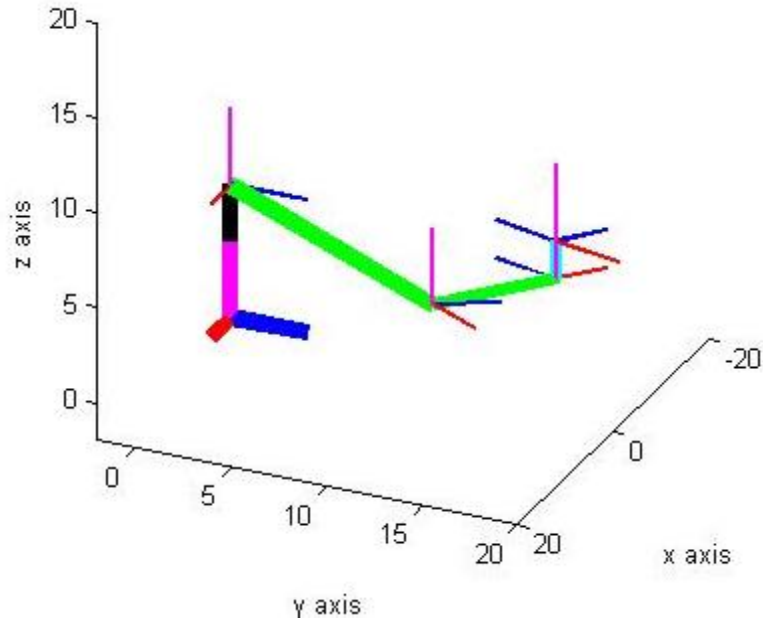
```
line([ot(1), attt(1)], [ot(2), attt(2)], [ot(3), attt(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 0])
```

```
line([ot(1), bttt(1)], [ot(2), bttt(2)], [ot(3), bttt(3)], LineWidth, 2, Color, [0 0 1])
```

```
line([ot(1), cttt(1)], [ot(2), cttt(2)], [ot(3), cttt(3)], LineWidth, 2, Color, [1 0 1])
```

```
line([ot(1), ottt(1)], [ot(2), ottt(2)], [ot(3), ottt(3)], LineWidth, 3, Color, [0 1 1])
```

```
pause(1)
```



Şekil 6.4. 4R mekanizmasının çatı yerleşimi.

4R mekanizmasına ait Matlab programı

axis square

k=50

axis([-k k -0.4*k k 0 k+7])

Q1=25

Q2=45

t=0:10:20

T=[1 0 0 20;0 1 0 20;0 0 1 0;0 0 0 1]

T*[0;0;0;1];

A=[20;20;0;1];

B=[20;20;t;1];

t

line([A(1), B(1)], [A(2), B(2)], [A(3), B(3)], LineWidth, 8, Color, [0 1 0])

pause(0.5)

cla

t=20

T=[1 0 0 20;0 1 0 20;0 0 1 0;0 0 0 1]

T*[0;0;0;1]

A=[20;20;0;1]

B=[20;20;t;1]

line([A(1), B(1)], [A(2), B(2)], [A(3), B(3)], LineWidth, 8, Color, [1 0 1])

for Q1=0:15:Q1

C=[30;20;20;1]

R=[cosd(Q1) sind(Q1) 0 0;

-sind(Q1) cosd(Q1) 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]

D=T*R*C

line([B(1), D(1)], [B(2), D(2)], [B(3), D(3)], LineWidth, 14, Color, [0 0 1])

pause(0.5)

cla

end

Q1=Q1

```

C=[30;20;20;1]
R=[cosd(Q1) -sind(Q1) 0 0;
    sind(Q1) cosd(Q1) 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]
D=T*R*C
line([B(1), D(1)], [B(2), D(2)], [B(3), D(3)], LineWidth, 8, Color, [1 0 1])
for Q2=0:5:Q2
RR=[cosd(Q2) -sind(Q2) 0 0;
    sind(Q2) cosd(Q2) 0 0;0 0 1 0; 0 0 0 1]
TT=[1 0 0 -40;0 1 0 20;0 0 1 0; 0 0 0 1]
E=[50;20;20;1]
F=TT*T*RR*E
    line([ D(1), F(1)], [D(2), F(2)], [D(3), F(3)], LineWidth, 8, Color, [1 0 1])
    pause(0.1)
cla
end
t=20
    T=[1 0 0 20;0 1 0 20;0 0 1 0;0 0 0 1]
    T*[0;0;0;1]
A=[20;20;0;1]
B=[20;20;t;1]
line([A(1), B(1)], [A(2), B(2)], [A(3), B(3)], LineWidth, 12, Color, [0 0 0])
Q1=Q1
C=[30;20;20;1]
R=[cosd(Q1) -sind(Q1) 0 0;
    sind(Q1) cosd(Q1) 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]
D=T*R*C
line([B(1), D(1)], [B(2), D(2)], [B(3), D(3)], LineWidth, 8, Color, [1 0 1])

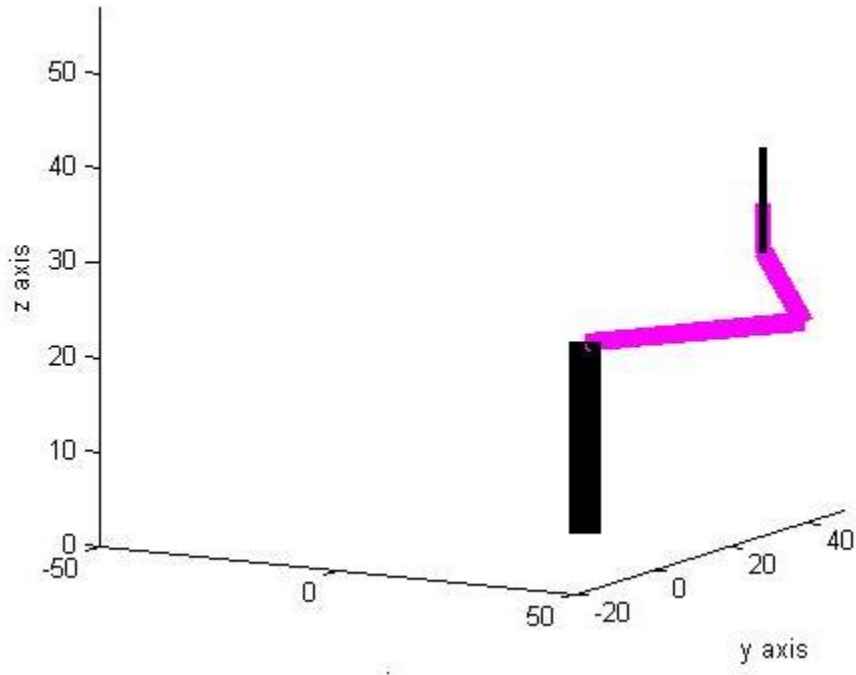
Q2=Q2
RR=[cosd(Q2) -sind(Q2) 0 0;
    sind(Q2) cosd(Q2) 0 0;0 0 1 0; 0 0 0 1]
TT=[1 0 0 -40;0 1 0 20;0 0 1 0; 0 0 0 1]

```

```

E=[50;20;20;1];
F=TT*T*RR*E
    line([ D(1), F(1)], [D(2), F(2)], [D(3), F(3)], LineWidth, 8, Color, [1 0 1]);
pause(0.5)
for ttt=0:2:6
    for tt=0:5:5
        line([ F(1), F(1)], [F(2), F(2)], [F(3), F(3)+tt],
            LineWidth, 6, Color, [1 0 1])
        line([ F(1), F(1)], [F(2), F(2)], [F(3), F(3)+tt+ttt],
            LineWidth, 3, Color, [0 0 0])
        pause(0.5)
    end
end
hold on
pointAA = [5, 5, 0];
pointBB = [25, 25, 0]
pointCC= [30, 30, 0];
pointDD=[4, 9, 15]
points=[pontAA pontBB pontCC pontDD];
fill3(ponts(1, :), ponts(2, :), ponts(3, :), ponts(4, :), r)
alpha(0.1) (Şekil 6.5).

```



Şekil 6.5. 4R mekanizmasının Matlab çıktısı.



7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Robotikte çalışma uzayı ve bu uzaya erişilebilirlikteki zaman oldukça önemlidir. Hız, kullanılan kinematik malzeme ile yakın ilgilidir. Matrisler teori, kuaterniyonlar teorisi, dual kuaterniyonlar teorisi ve Clifford teori kinematik malzemelerin alındığı temel teorilerdir.

Tasarlanan 4R ve 2RPR mekanizmalarında dönme ve öteleme için bu dört teoride karşılık gelen formlar kullanılmıştır. Her bir teoriden yaklaşım mekanizmanın yapısına göre farklı avantajlara ve dezavantajlara sahiptir. Teorik olarak ve genel uzaylarda çalışırken Clifford teori en avantajlı olanıdır. Kuaterniyonlar hesap tekniği açısından, dual kuaterniyonlar ise hem hesap tekniği hem de teorik çalışmalarda kolaylaştırıcıdır. Ayrıca görüldü ki bilgisayar programı olarak Matlab programı kullanılıyor ise en avantajlı olan matris teorisi en dezavantajlı olan Clifford teoridir.

Tasarlanan her iki mekanizmanın da Matlab programları gösterdi ki, her iki mekanizma çalışma uzaylarının çok belirgin olması, matris teorisinin kullanımına daha yatkın olması ve işlevsel olarak kullanılabilirliği yüksek tasarımlardır.



KAYNAKLAR

- Belon, M. C. L., Hildenbrand, D., 2017. Practical geometric modeling using geometric algebra motors. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **27**: 2019–2033.
- Breuils, S., Nozick, V., Fuchs, L., 2017. A geometric algebra implementation using binary tree. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **27**: 2133-2151.
- Bayro-Corrochano, E., Kahler, D., 2000. Motor algebra approach for computing the kinematics of robot manipulators. *Journal of Robotic Systems*, **17**(9): 495-516.
- Bottema, O., Roth, B., 1990. *Theoretical Kinematics*. Dover Publications, Inc, New York.
- Fu, K. S., Gonzalez, R.C., Lee, C.S.G., 1987. *Robotics*. McGraw-Hill International Editions, Singapore.
- Funda, J., 1988. *A Computational Analysis of Line-Oriented Screw Transformations in Robotics*. Technical Reports, University of Pennsylvania.
- Gunn, C., 2017. Geometric algebras for euclidean geometry. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **27**: 185–208.
- Hacısalihođlu, H. H., 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara.
- Klawitter, D., 2015. *Clifford Algebras*. Springer Fachmedien, Wiesbaden.
- Lounesto, P., 2011. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press NewYork.
- McCarthy, J. M., 1990. *Introduction to Theoretical Kinematics*, The MIT Press, USA.
- McCarthy, J. M., 2000. *Geometric Design of Linkages*, Springer-Verlag, New York.
- Meinrenken, E., 2013. *Clifford Algebras and Lie Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- Niku, S. B., 2001. *Introduction to Robotics*, Prentice Hall, New Jersey.
- Selig, J. M., 2000. Clifford algebra of points, lines and planes. *Robotica*, **18**, 545-556.
- Syngg, J., 2012. *A New Approach to Differential Geometry Using Cliffords Geometric Algebra*. Springer Science Business Media, New York.
- Vince, J., 2009. *Geometric Algebra: An Algebraic System for Computer Games and Animation*. Springer-Verlag London.
- Walker, M., 1988. Manipulator kinematics and the epsilon algebra, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**(2), 186-192.



ÖZ GEÇMİŞ

1994 yılında Ağrının Patnos ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Patnos'ta tamamladı. 2011 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'ne başladı ve 2015'de mezun oldu. Aynı yıl Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.



T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih:27/06./2018

Tez Başlığı / Konusu:

4R ve 2RPR Mekanizmalarının Kinematığının Dual Kuaterniyonlar ve CliffordCebiri ile Modellenmesi

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 69+16 sayfalık kısmına ilişkin, 27/06./2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitinintihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 20 (Yirmi) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyiinceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihaliçermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabulettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.


27.06.2018

Adı Soyadı: Vedat Dörma


Öğrenci No:159102021

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü:Y.LisansDoktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR



Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)