KESİRLİ BİR EPİDEMİYOLOJİK MODELİN BİLGİSAYAR VİRÜSLERİ İÇİN ATANGANA-BALEANU OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

Cansu YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI-2020

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Cansu YILDIRIM

KESİRLİ BİR EPİDEMİYOLOJİK MODELİN BİLGİSAYAR VİRÜSLERİ İÇİN ATANGANA-BALEANU OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI – 2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BİR EPİDEMİYOLOJİK MODELİN BİLGİSAYAR VİRÜSLERİ İÇİN ATANGANA-BALEANU OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Ali DOKUYUCU

Jüri: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tezde bilgisayar virüsleri için kesirli bir epidemiyolojik model Atangana-Baleanu operatörüne genişletilecektir. Daha sonra Atangana-Baleanu operatörüne genişletilen bu modelin sabit nokta teoremi yardımıyla varlık çözümü yapılacak Picard-Lindelöf dönüşümü kullanılarak hangi şartlar altında tek çözümlerinin olduğu incelenecektir. Modelin Hyers-Ulam'a göre kararlılığına bakıldıktan sonra Atangana-Owolabi nümerik yaklaşımı kullanılarak simülasyonları yapılacak ve son olarak elde edilen simülasyonlar karşılaştırılarak sonuçlar yazılacaktır.

2020, 83 sayfa

Anahtar Kelimeler: Atangana-Baleanu operatörü, Sabit nokta teoremi, Picard-Lindelöf yaklaşımı, Hyers-Ulam kararlılığı, iki aşamalı Adams-Bashforth şeması.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

OF A FRACTIONAL EPIDEMIOLOGICAL MODEL FOR COMPUTER VIRUSES ANALYSIS WITH ATANGANA-BALEANU OPERATOR

Advisor Of Thesis: Assist. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jury: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assist. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this thesis, a fractional epidemiological model for computer viruses will be extended to the Atangana-Baleanu operator. Later, this model, which was expanded to the Atangana-Baleanu operator, will be examined under which conditions they have only one solution using the Picard-Lindelöf transformation with the help of fixed point theorem. After looking at the stability of the model according to Hyers-Ulam, simulations will be made using the Atangana-Owolabi numerical approach and the results will be written by comparing the final simulations.

2020, 83 pages

Key Words: Atangana-Baleanu operator, Fixed point theorem, Picard-Lindelöf approach, Hyers-Ulam Stability, two-stage Adams-Bashforth scheme.

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırladığım yoğun çalışma sürecinde her türlü gayreti gösteren tecrübe ve bilgileriyle desteğini esirgemeyen, değerli hocam ve danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Ali DOKUYUCU'ya içtenlikle teşekkür ederim.

Bu süreçte manevi desteklerini esirgemeyen takıldığım yerlerde her daim yardımcı olmaya hazır olan değerli arkadaşlarım Aylin Yetim ve Remziye Sarıaydın' a, biricik ablam Nilgün Adıgüzel'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen, her daim arkamda duran sevgili aileme sonsuz teşekkürler.

Haziran 2020

Cansu YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Reel Sayılar
R^+	: Pozitif Reel Sayılar
$\in$	: Elemanıdır
$n!$	: Faktöriyel (n!=1.2.3...n)
$\lim$	: Limit
$Re(z)$	: z Karmaşık Sayısının Reel kısmı
$Re(\vartheta)$	: ϑ Karmaşık Sayısının Reel kısmı
$\sum$	: Toplam Sembolü
$\prod$	: Çarpım Sembolü
$\int$	: İntegral
$\mathfrak{L}$	: Laplace
$\begin{pmatrix} \vartheta \\ r \end{pmatrix}$	: ϑ nın r li kombinasyonu
$B.D.P$	: Başlangıç Değer Problemi
$\Gamma(n)$	: Gama Fonksiyonu
$B(z,\vartheta)$	: Beta Fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Tek Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{(\alpha,\beta)}(z)$	: İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\sinh$	: Sinüs hiperbolik fonksiyonu
$\cosh$	: Kosinüs hiperbolik fonksiyonu
${}^{C}D^{\vartheta}f(t)$	: Caputo Kesirli Türevi
$D^{-\vartheta}f(t)$	: Kesirli İntegral
${}_{a}^{CF}\mathfrak{D}_{t}^{\vartheta}f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi
${}_{0}^{AC}\mathfrak{D}_{x}^{\alpha,\beta}f(t)$	: Atangana Caputo Kesirli Türevi
${}^{ABC}\mathfrak{D}^{\vartheta}f(t)$	: Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{ABR}\mathfrak{D}^{\vartheta}f(t)$	: Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{CF}I^{\vartheta}f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli integrali
${}_{a}^{AB}I_{t}^{\vartheta}\ f(t)$	: Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Değişimi ölçmek için kullanılan türev anlık değişim hızı olarak tanımlanmaktadır. Başta matematik, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi pek çok alanda kullanılmakta ve teknolojinin temelini oluşturmaktadır.

Kesirli mertebeden türev ise tam sayı mertebeden türevin genişletilmiş halidir ve tam sayılı mertebeden türevlerin cevaplayamadığı soruların çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Kesirli türevin ortaya çıkışı L'Hospital in 1695 yılında Leibniz'e yazdığı bir mektuba dayanmaktadır. Mektupta L'Hospital Leibniz'e $\frac{d^n f(x)}{f(x)^n}$ tamsayı mertebeli türev tanımındaki n tamsayısının kesirli, reel olarak alınması durumunda ne gibi bir durumun ortaya çıkacağını (yani tam sayılı türevin kesirli türeve genişletilebilirliğini) sorması üzerine yeni bir problem ortaya çıkmıştır.

Bu durum pek çok matematikçinin de ilgisini çekmiş ve onları bu alanda çalışmalar yapmaya yöneltmiştir. Nitekim Riemann Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Riesz ve Laplace kesirli türeve katkı sağlayan başlıca matematikçilerden olmuştur. Bu çalışmalar sonucu olarak da pek çok kesirli türev tanımı ortaya atılmış olup karşılaşılan probleme uygun olan kesirli türev tanımının kullanılması imkanı araştırmacıların daha iyi sonuçlar elde etmesine olanak sağlamıştır. Kesirli türevin ilk uygulaması ise 1823 yılında Abel'in tautochurane probleminde karşımıza çıkmaktadır. Caputo (1967) tarafından yapılmış olan kesirli türev tanımındaki çekirdeğin dezavantajı(yerellik ve tekillik) olmasına karşın literatürde bir çok çalışmada kullanılmıştır. Daha sonra Caputo ve Fabrizio (2015) farklı bir çekirdek ile yeni bir kesirli türev tanımı ortaya atmışlardır. Bu çekirdeğin farkı matematiksel problemlerin analizini ve nümerik çözümlerini güçleştiren yerellik problemini ortadan kaldırmasıdır. Daha sonra Atangana-Baleanu da bu çekirdeği daha da genelleştirerek başka bir çekirdek ortaya koymuştur. Bu çekirdeğin farkı ise yerel ve tekil olmamasıdır. Atangana-Baleanu çekirdeğinin yerel ve tekil olmaması diğer çekirdeklere göre önemli bir avantaj sağlamaktadır. Çözümlerde daha kesin sonuçlar elde etmek bu avantajlardan sadece biridir. Bu anlamda kesirli türev ve integral operatörleri kronolojik olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir:

L.Euler (1730):

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1).(m-2).(m-3)...(m-n+1)x^{m-n},$$

özelliği kullanılarak;

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n},$$

eşitliği ile tanımlanır.

J. B. J. Fourier (1820-1822):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \int_{-\infty}^{\infty} cos(px - pz)dp,$$

integral eşitliği yardımı ile;

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \int_{-\infty}^{\infty} cos(px - pz + n\frac{\pi}{2})dp,$$

şeklinde ifade edilir.

N. H. Abel (1823-1826): Keyfi bir ϑ değeri için;

$$\int_0^x \frac{s^{'}(\kappa)d\kappa}{(x-\kappa)^{\vartheta}} = \phi(x),$$

eşitliği kullanılarak;

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \frac{d^{-\vartheta}\phi(x)}{dx^{-\vartheta}},$$

ile tanımlanır.

J. Liouville (1832-1855): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n e^{a_n x}$ seri açılımı kullanılarak;

$$\frac{d^{\vartheta} f(x)}{dx^{\vartheta}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{\vartheta} e^{a_n x},$$

şeklinde tanımlanır.

G. F. B. Riemann (1847-1876):

$$D^{-\vartheta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_c^x (x-t)^{\vartheta-1} f(t)dt + \phi(t),$$

ile tanımlanır.

G.F.B Riemann , J.Liouville: $n-1 \leq \vartheta < n$ olmak üzere;

$${}_aD_t^{\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\vartheta)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\vartheta-n+1}},$$

şeklinde tanımlanır.

Grünwald-Letnikov:

$${}_aD_t^{\vartheta} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-\vartheta} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^k \begin{pmatrix} \vartheta \\ k \end{pmatrix} f(t-kh),$$

ile tanımlanır.

M.Caputo (1967): $n-1 \leq \vartheta < n$ olmak üzere;

$${}_a^C D_t^{\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\vartheta)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\vartheta-n+1}},$$

şeklinde tanımlanır.

K. S. Miller, B. Ross (1993):

$$D^{\tilde{a}} f(t) = D^{a_1} D^{a_2} ... D^{a_n} f(t) \qquad \tilde{a} = (a_1, a_2, ...a_n),$$

ile tanımlanır.

M.Caputo , M.Fabrizio (2015): $\vartheta \in [0,1], f \in H^1(a,b), b > a$ olmak üzere;

$${}_a\mathfrak{D}_t^{\vartheta} f(t) = \frac{M(\vartheta)}{(1-\vartheta)} \int_a^t \dot{f}(\tau) exp\left[\frac{-\vartheta(t-\tau)}{1-\vartheta}\right] d\tau,$$

ile tanımlanır. Burada $M(\vartheta)$ normalleştirme sabiti olup, $M(0) = M(1) = 1$ dir. Caputo-Fabrizio integral operatörü de,

$$^{CF}I^{\vartheta}f(t) = \frac{2(1-\vartheta)}{(2-\vartheta)M(\vartheta)}u(t) + \frac{2\vartheta}{(2-\vartheta)M(\vartheta)}\int_0^t u(s)ds, \qquad t \geq 0, \qquad 0 < \vartheta < 1$$

Caputo ve Fabrizio (2015) tarafından yukarıdaki gibi ifade edilir .

J. Losada, J. J. Nieto (2015): $0 < \vartheta < 1$ olmak üzere, ϑ. mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi Losada ve Nieto (2015) tarafından,

$$^{CF}D_*^{\vartheta}f(t) = \frac{1}{1-\vartheta}\int_0^t f^{'}(s)exp\left[\frac{-\vartheta}{1-\vartheta}(t-s)\right]ds, \qquad t \geq 0$$

şeklinde ifade edilir.

A.Atangana, D.Baleanu (2016): $\vartheta \in [0,1], f \in H^1(a,b), b > a$ olmak üzere;

$$^{ABC}_{\ a}\mathfrak{D}_t^{\vartheta}f(t) = \frac{B(\vartheta)}{(1-\vartheta)}\int_a^t \dot{f}(\tau)E_{\vartheta}\left[\frac{-\vartheta(t-\tau)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right]d\tau,$$

Atangana ve Baleanu (2016) tarafından şeklinde tanımlanır. Burada B(ϑ) normalleştirme sabiti olup, $B(0) = B(1) = 0$ dir.

A. Atangana, D. Baleanu (2016): $0 < \vartheta < 1$ olmak üzere,

$$^{AB}_{\ a}I_t^{\vartheta}\{\ f(t)\} = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}f(t) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\vartheta-1}dy,$$

şeklinde ifade edilir.

A. Atangana (2016): $f(x,t)$ x veya t yönünde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\alpha, \beta \in (0,1)$ ve $x^{-\alpha}E_{\beta}\left\{\frac{-\beta}{1-\beta}x^{\beta+\alpha}\right\}$ ve $\frac{\delta f}{\delta x}$ olmak üzere, f fonksiyonu Atangana-Caputo kısmi diferansiyel denklemi,

$$^{AC}_{\ 0}D_x^{\alpha,\beta}f(x,t) = \frac{A(\beta)}{1-\beta}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{\delta f(\xi,t)}{\delta t^n}(x-\xi)^{-\alpha}fE_{\beta}\left[\frac{-\beta}{1-\beta}(x-\xi)^{\beta+\alpha}\right]d_{\xi},$$

ile tanımlanır.

2. KURAMSAL TEMELLER

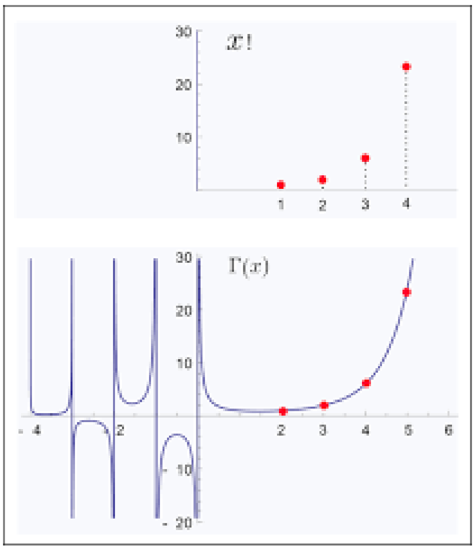
2.1. Gama Fonksiyonu

Tanım 2.1 *Gama fonksiyonu faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellenmiş halidir.* $\Gamma(n)$ *ile gösterilir.*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \qquad n \in R,$$

şeklinde tanımlanır ve $n > 0$ *için yakınsaktır.*

Bu durumda $a > 0$ olmak üzere her $[a, b]$ sonlu aralığında gama fonksiyonu ile gösterilen $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$ integrali düzgün yakınsaktır. Bilinen bu bilgiler ile birlikte gama fonksiyonunun diğer özelliklerini de aşağıdaki gibi yazabiliriz:



Şekil 2.1. Gama Fonksiyonu

1. $\Gamma(n)$ nin tanım bölgesi $\{n, n > 0\}$ dır.

2. $\Gamma(n)$ $n > 0$ için süreklidir.

3. $\Gamma(n)$ için verilen integral, her sonlu $[a, b] \subset R^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğunda $\Gamma(n)$ nin türevi de elde edilebilir.

Gama fonksiyonu,

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

2. $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

eşitliklerini de sağlar.

2.2. Beta Fonksiyonu

Birçok durumda beta fonksiyonunun kullanılması daha doğru olur. Gama fonksiyonunun belirli bir değer kombinasyonunun değeri için Beta fonksiyonu genellikle

$$B(z, \vartheta) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\vartheta-1} d_t, \qquad Re(z) > 0, Re(\vartheta) > 0$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikler:

1) $B(z) = \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)}$,

2) $B(z, \vartheta) = B(\vartheta, z)$,

3) $B(z, \vartheta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(z+\vartheta)}$,

4) $B(z, \vartheta) = \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+\vartheta}} dt, \qquad Re(z) > 0, Re(\vartheta) > 0,$

5) $B(\frac{1}{2}) = \pi$.

2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Tanım 2.2 *Mittag-Leffler fonksiyonu α, β parametrelerine bağlı karmaşık bir fonksiyondur. α ve β nın reel ve pozitif olması durumunda seri z argümanının bütün değerleri için yakınsaktır. Tek parametreli Mittag-Leffler;*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad \alpha > 0,$$

şeklindedir. İki parametreli Mittag-Leffler ise;

$$E_{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0,$$

şeklinde temsil edilmektedir. $\alpha = 1, \beta = 1, 2, 3$ değerleri için;

$$E_{(1,1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$
$$E_{(1,2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k+1)}}{(k+1)} = \frac{e^z-1}{z},$$
$$E_{(1,3)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k+2)}}{(k+2)} = \frac{e^z-1-z}{z^2},$$

yazılır.

Mittag-Leffler in genel denklemi;

$$E_{(1,m)}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right\} \quad ,$$

şeklindedir. Mittag Leffler in hiperbolik denklemi ise;

$$E_{(2,1)}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k)}}{(2k)!} = cosh(z),$$

$$E_{(2,2)}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \frac{sinh(z)}{z},$$

şeklinde ifade edilir.

2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali

Kesirli mertebeden türev tam sayı mertebeden türevin genişletilmiş halidir ve tam sayılı mertebeden türevlerin cevaplayamadığı soruların çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Kesirli diferensiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville kesirli türevi yerine Caputo kesirli türevi daha çok tercih edilmektedir.

2.4.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi ve İntegrali

$y = f(t)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere; f fonksiyonunun birinci dereceden türevi;

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $y = f(t)$ denkleminin ikinci dereceden türevi ise;

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklindedir. Benzer şekilde üçüncü dereceden türev ise;

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}, \tag{2.3}$$

şeklindedir. Bu durum genelleştirilirse;

$$f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} f(t - rh), \tag{2.4}$$

elde edilir.

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}, \tag{2.5}$$

Şimdi (2.2) - (2.5) arasındaki denklemleri genelleyen bir denklem yazılırsa;

$$f_h^{(\vartheta)}(t) = \frac{1}{h^\vartheta}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \begin{pmatrix} \vartheta \\ r \end{pmatrix} f(t-rh), \tag{2.6}$$

elde edilir. Burda ϑ rastgele bir tam sayı, n de yukarıdaki gibi bir tam sayıdır.
Şimdi $\vartheta \leq n$ için;

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(\vartheta)}(t) = f^{(\vartheta)}(t) = \frac{d^\vartheta f}{dt^\vartheta}, \tag{2.7}$$

yazılabilir. Çünkü böyle bir durumda (2.5) denkleminde $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$ dan sonra paydaki tüm katsayılar 0'a eşittir.
Aşağıdaki eşitlikte;

$$\begin{bmatrix} \vartheta \\ r \end{bmatrix} = \frac{\vartheta(\vartheta+1)\dots(\vartheta+r-1)}{r!}, \tag{2.8}$$

ϑ negatif değerleri için kolaylık olması açısından

$$\begin{bmatrix} -\vartheta \\ r \end{bmatrix} = \frac{-\vartheta(-\vartheta+1)\dots(-\vartheta+r-1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} \vartheta \\ r \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

yazılabilir. (2.6) denkleminden ϑ yerine $-\vartheta$ yazılırsa;

$$f_h^{(-\vartheta)}(t) = \frac{1}{h^{-\vartheta}}\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} \vartheta \\ r \end{bmatrix} f(t-rh), \tag{2.10}$$

elde edilir. Burada ϑ pozitif bir tamsayıdır.
Eğer n sabitse, o zaman $h \to 0$ giderken $f_h^{(-\vartheta)}(t)$ limiti 0 sınırına yaklaşır. Sıfırdan farklı bir sınıra ulaşmak için, $n \to \infty$ ve $h \to 0$ olduğu varsayılırsa $h = \frac{t-a}{n}$, alınabilir. Burada a gerçek bir sabit, ve $f_h^{(-\vartheta)}(t)$ sınır değeri sonlu veya sonsuz olarak düşünülürse,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-\vartheta)}(t) = {}_aD_t^{(-\vartheta)}(t),$$

yazılabilir.

Burada a ve t sınırlar olmak üzere $D_h^{(-\vartheta)}(t)$ aslında $f(t)$ üzerinde gerçekleştirilen integral işlemini belirtir.

Birkaç değer için uygulama yapılırsa;

$\vartheta = 1$ için;

$$f_h^{(-1)}(t) = h\sum_{r=0}^{n} f(t-rh) \tag{2.11}$$

yazılabilir.

Eğer $t - nh = a$ alınırsa ve $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu varsayılırsa ;

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{(-1)}f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dt = \int_a^t f(\tau)d\tau. \tag{2.12}$$

elde edilir.

Şimdi $\vartheta = 2$ alınırsa buradan

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3.\ldots.(2+r-1)}{r!} = r+1$$

ve

$$f_h^{(-2)}(t) = h^2\sum_{r=0}^{n}(r+1)f(t-rh) \tag{2.13}$$

elde edilir. Aşağıdaki denklemde $h \to 0$ alınırsa $t + h = t$ yazılabilir. Buradan

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(t-rh) \tag{2.14}$$

olur.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{(-2)}f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)dt = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{2.15}$$

elde edilir.

Çünkü $z \to t - \tau$ ve $h \to 0$ için (2.10)-(2.15) denklemlerinden aşağıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{(-\vartheta)} f(t) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{\vartheta} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} \vartheta \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\ &= \frac{1}{(\vartheta - 1)!} \int_a^t (t - \tau)^{\vartheta - 1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.16}$$

yazılabilir. (2.16) nın doğruluğunu kanıtlamak için f in bazı ϑ değerleri için doğru olduğu gösterildikten sonra $\vartheta + 1$ için doğruluğu gösterilmelidir.

Şimdi

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \tag{2.17}$$

fonksiyonu tanımlanırsa ve $f_1(a) = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{(-\vartheta-1)} f(t) = & \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{\vartheta+1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} \vartheta + 1 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\ = & \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{\vartheta} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} \vartheta + 1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t - rh) \\ & - \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{\vartheta} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} \vartheta + 1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t - (r+1)h), \end{aligned} \tag{2.18}$$

yazılabilir. (2.8) kullanılarak aşağıdaki eşitlik

$$\begin{bmatrix} \vartheta + 1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta + 1 \\ r - 1 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

doğrulanır. Buradan

$$\begin{bmatrix} \vartheta + 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

kullanılabilir. (2.18) deki denklemde ilk toplamda (2.19) ve ikinci toplamda r yerine $r - 1$

yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{(-\vartheta-1)}f(t) = & \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{\vartheta}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}\vartheta\\ r\end{bmatrix} f_1(t-rh)\\
& + \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{\vartheta}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}\vartheta+1\\ r-1\end{bmatrix} f_1(t-rh)\\
& - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{\vartheta}\sum_{r=1}^{n+1}\begin{bmatrix}\vartheta+1\\ r-1\end{bmatrix} f_1(t-rh)\\
= & {}_aD_t^{(-\vartheta)}f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{\vartheta}\begin{bmatrix}\vartheta+1\\ n\end{bmatrix} f(t-(n+1)h)\\
= & {}_aD_t^{(-\vartheta)}f_1(t) - (t-a)^{\vartheta}\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\vartheta+1\\ n\end{bmatrix}\frac{1}{n^{\vartheta}}\\
& \times f_1\left(a-\frac{t-a}{n}\right),
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

elde edilir.

(2.16) tanımından $f_1(t)$ fonksiyonunun yerine

$$
\lim_{n\to\infty} f_1\left(a-\frac{t-a}{n}\right)=0.
$$

yazılırsa ve aşağıdaki limit

$$
\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\vartheta+1\\ n\end{bmatrix}\frac{1}{n^{\vartheta}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\vartheta+1)(\vartheta+2)\dots(\vartheta+n)}{n^{\vartheta}n!} = \frac{1}{\Gamma(\vartheta+1)}
$$

dikkate alınırsa;

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{(-\vartheta-1)}f(t) = {}_aD_t^{(-\vartheta)}f_1(t) &= \frac{1}{(\vartheta-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-1}f(\tau)d\tau\\
&= -\frac{(t-\tau)^{\vartheta}f_1(\tau)}{\vartheta!}\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{\vartheta!}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta}f(\tau)d\tau\\
&= \frac{1}{\vartheta!}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta}f(\tau)d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

yazılabilir.

Bu (2.16) nın ispatıdır. Şimdi bu formülün (2.16) denkleminin ϑ- katlı integralinin bir temsili olduğu gösterilirse ve bu durum aşağıdaki denkleme uygulanırsa;

$$\frac{d}{dt}\big({}_aD_t^{-\vartheta}f(t)\big) = \frac{1}{(\vartheta-2)!}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-2}f(\tau)d\tau = {}_aD_t^{-\vartheta+1}f(t),$$

a dan t ye kadar

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-\vartheta}f(t) &= \int_a^t \big({}_aD_t^{-\vartheta+1}f(t)\big)dt, \\ {}_aD_t^{-\vartheta+1}f(t) &= \int_a^t \big({}_aD_t^{-\vartheta+2}f(t)\big)dt \qquad vb, \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-\vartheta}f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \big({}_aD_t^{-\vartheta+2}f(t)\big) \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \big({}_aD_t^{-\vartheta+3}f(t)\big)dt, \end{aligned} \tag{2.22}$$

olur. (2.4) denkleminin n tam sayı türevi ve (2.16) denkleminin ϑ-katlı integrali $f(t)$ sürekli fonksiyonunun genel ifadesidir.

$${}_aD_t^{\vartheta}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-\vartheta}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{\vartheta}{r} f(t-rh), \tag{2.23}$$

Bu ifade eğer $\vartheta = m$ ise m. mertebeden türevi ve $\vartheta = -m$ ise m-katlı integrali temsil eder (Podlubny, 1999).

2.4.2. Grünwald-Letnikov Keyfi Mertebeden İntegrali

$\vartheta < 0$ örneğini ele alınsın. Kolaylık sağlaması için (2.23) denkleminde ϑ yerine $-\vartheta$ yazılırsa

$${}_aD_t^{-\vartheta}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{\vartheta}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \begin{bmatrix}\vartheta\\ r\end{bmatrix} f(t-rh), \tag{2.24}$$

denklemi elde edilir.

Burada h ve n, $nh = t-a$ denklemi ile ilişkilidir.

(2.24) denkleminin varlığını kanıtlamak ve sınırı değerlendirmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır (Letnikov, 1868).

Teorem 2.1 $\beta_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$ *alalım ve varsayalım ki;*

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1; \tag{2.25}$$

olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_{n,k} = 0$ *tüm* k *değerleri için,*

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_{n,k} = A$ *tüm* k *değerleri için,*

$\sum_{k=1}^{n} |\vartheta_{n,k}| < K$ *tüm* n *değerleri için,*

olur. Buradan;

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_{n,k}\beta_k = A. \tag{2.26}$$

dır.

2.4.3. Grünwald-Letnikov Keyfi Mertebeden Türevi

$\vartheta > 0$ durumu ele alınsın. Limit de dikkate alınırsa (Podlubny, 1999);

$${}_aD_t^{\vartheta} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} \vartheta \\ r \end{pmatrix} f(t-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(\vartheta)}(t), \tag{2.27}$$

yazılabilir.

$$f_h^{(\vartheta)}(t) = h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} \vartheta \\ r \end{pmatrix} f(t-rh), \tag{2.28}$$

(2.27) denkleminde öncelikle aşağıdaki

$$\binom{\vartheta}{r} = \binom{\vartheta - 1}{r} + \binom{\vartheta - 1}{r - 1}, \tag{2.29}$$

kombinasyon özelliği kullanılarak $f_h^{(\vartheta)}(t)$ ifadesi dönüştürülürse;

$$\begin{aligned} f_h^{(\vartheta)}(t) &= h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\vartheta - 1}{r} f(t - rh) \\ &\quad + h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\vartheta - 1}{r - 1} f(t - rh) \\ &= h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\vartheta - 1}{r} f(t - rh) \\ &\quad + h^{-\vartheta} \sum_{r=-1}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{\vartheta - 1}{r} f(t - (r+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{\vartheta - 1}{n} h^{-\vartheta} f(a) \\ &\quad + h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{\vartheta - 1}{r} \Delta f(t - rh), \end{aligned} \tag{2.30}$$

yazılabilir. Burada

$$\Delta f(t - rh) = f(t - rh) - f(t - (r+1)h).$$

dır. Açıkçası $\Delta f(t - rh)$ ifadesi $\tau = t - rh$ için $f(\tau)$ ya eşittir.

(2.29) denklemindeki kombinasyon özelliği (2.30) deki denkleme m kez uygulanırsa:

$$
\begin{aligned}
f_h^{(\vartheta)}(t) &= (-1)^n \begin{pmatrix} \vartheta-1 \\ n \end{pmatrix} h^{-\vartheta} f(a) + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} \vartheta-2 \\ n-1 \end{pmatrix} h^{-\vartheta} \Delta f(a+h) \\
&\quad + h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \begin{pmatrix} \vartheta-2 \\ r \end{pmatrix} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} \vartheta-1 \\ n \end{pmatrix} h^{-\vartheta} f(a) + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} \vartheta-2 \\ n-1 \end{pmatrix} h^{-\vartheta} \Delta f(a+h) \\
&\quad + (-1)^{n-2} \begin{pmatrix} \vartheta-3 \\ n-2 \end{pmatrix} h^{-\vartheta} \Delta^2 f(a+2h) \\
&\quad + h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \begin{pmatrix} \vartheta-3 \\ r \end{pmatrix} \Delta^3 f(t-rh) \\
&= \dots \\
&= \sum_{r=0}^{m} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} \vartheta-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} h^{-\vartheta} \Delta^k f(a+kh) \\
&\quad + h^{-\vartheta} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \begin{pmatrix} \vartheta-m-1 \\ r \end{pmatrix} \Delta^{m+1} f(t-rh).
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

elde edilir.

(2.31) denkleminin toplamındaki ilk k. terim değerlendirilirse;

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} \vartheta-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} h^{-\vartheta} \Delta^k f(a+kh) \\
&\quad = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} \vartheta-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} (n-k)^{\vartheta-k} \\
&\qquad \times \Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{\vartheta-k} (nh)^{-\vartheta+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&\quad = (t-a)^{-\vartheta+k} \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} \vartheta-k-1 \\ n-k \end{pmatrix} (n-k)^{\vartheta-k} \\
&\qquad \times \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{\vartheta-k} \times \lim_{h\to\infty} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&\quad = \frac{f^k(a)(t-a)^{-\vartheta+k}}{\Gamma(-\vartheta+k+1)}.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

elde edilir.

Gama fonksiyonunun özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}\vartheta-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{\vartheta-k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(-\vartheta+k+1)(-\vartheta+k+2)\dots(-\vartheta+n)}{(n-k)^{-\vartheta+k}(n-k)!}=\frac{1}{\Gamma(-\vartheta+k+1)},
\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{\vartheta-k}=1,$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}=f^k(a)$$

yazılabilir. (2.32) denklemindeki limit bilinirse (2.31) deki limit kolayca yazılabilir. (2.31) denkleminde ikinci limit alınırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(-\vartheta+m+1)}&\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-\vartheta+m+1)\begin{pmatrix}\vartheta-m-1\\ r\end{pmatrix}r^{-m+\vartheta}\\
&\times h(rh)^{m-\vartheta}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}.
\end{aligned}\tag{2.33}$$

yazılabilir.

Gama fonksiyonunun özelliği kullanılarak;

$$\lim_{r\to\infty}(-1)^r\Gamma(-\vartheta+m+1)\begin{pmatrix}\vartheta-m-1\\ r\end{pmatrix}r^{-m+\vartheta}=1.\tag{2.34}$$

yazılır.

Ayrıca, $m-\vartheta>-1$, ise;

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\vartheta_{n,r}&=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=0}^{n-m-1}h(rh)^{m-\vartheta}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}\\
&=\int_a^t(t-\tau)^{m-\vartheta}f^{(m+1)}(\tau)d\tau.
\end{aligned}\tag{2.35}$$

yazılır.

(2.34) ve (2.35) denklemleri ele alınarak teorem (2.1) e uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-\vartheta}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r \binom{\vartheta-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(t-rh) \\ =\frac{1}{\Gamma(-\vartheta+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\vartheta}f^{(m+1)}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{2.36}$$

elde edilir.

(2.32) ve (2.36) denklemleri kullanılarak (2.27) nin limiti elde edilir.
Buradan:

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{\vartheta} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(\vartheta)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\vartheta+k}}{\Gamma(-\vartheta+k+1)} \\ &+\frac{1}{\Gamma(-\vartheta+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\vartheta}f^{(m+1)}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{2.37}$$

yazılır.

(2.37) denklemi $f^{(k)}(t)$, $(k=1,2,\ldots,m+1)$ türevleri olduğu varsayımıyla $[a,t]$ kapalı aralığında süreklidir ve m , $m>\vartheta-1$ koşulunu sağlayan bir tamsayıdır. m nin en küçük değeri ise

$$m<\vartheta<m+1$$

eşitsizliği ile belirlenir.

2.4.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali

Kesirli sıralı geri farkın bir sınırı olarak tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevleri ile uygulaması uygun değildir. Elde edilen ifade (2.37) denklemindeki integralin varlığı ile daha iyi anlaşılır. Peki ya ayrılmaz terimler? Cevap basittir. (2.37) denklemini diferansiyelin özel bir integrali olarak düşünmek.

$${}_aD_t^{\vartheta}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\int_a^t (t-\tau)^{m-\vartheta}f(\tau)d\tau, \qquad (m\le\vartheta\le m+1). \tag{2.38}$$

(2.38) ifadesi, kesirli türevin en yaygın olarak bilinen tanımıdır; buna genellikle Riemann-Liouville tanımı denir.

Açıkçası, Grünwald-Letnikov kesirli türevi için $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olarak farklılaşabilmesi için $m+1$ kez türevi alınması gerektiği varsayımı ile elde edilen (2.37) ifadesine tekrar tekrar integral ve türev alınarak (2.38) elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{\vartheta} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-\vartheta} f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\vartheta+k}}{\Gamma(-\vartheta+k+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(-\vartheta+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\vartheta} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \\
&= {}_aD_t^{\vartheta} f(t), \qquad\qquad (m \le \vartheta \le m+1).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Bu nedenle, sürekli bir $f(t)$ fonksiyonun $t \geq 0$ için $m+1$ kez türevi vardır. Grünwald-Letnikov tanımı (2.27) (veya bu durumla aynı olan (2.37) integral formu) (2.38) Riemann-Liouville tanımına eşdeğerdir.
Saf matematiksel bakış açısına göre böyle bir fonksiyon sınıfı yetersizdir; ancak bu işlev sınıfı uygulamaları için çok önemlidir.
Çünkü dinamik süreçlerin çoğunun karakteri yeterince pürüzsüzdür ve süreksizliklere izin vermez. Bu gerçeği anlamak, yöntemlerin doğru kullanımı için önemlidir.
Kesirli analizin uygulamalardaki yeri ise, özellikle (2.38) Riemann-Liouville tanımının $f(t)$ fonksiyonundaki koşulları zayıflatması için mükemmel bir fırsat sağlamasıdır. Yani, $f(t)$'nin integralini zorunlu kılmak yeterlidir; o zaman integral (2.38) $t > a$ için var olur ve $m+1$ kez uygulanabilir. Örneğin, Abel'in çözümünü elde etmek için (2.38) 'de $f(t)$ fonksiyonundaki zayıf koşullar gereklidir.
Riemann-Liouville tanımının nasıl olduğuna bakılırsa; (2.38) tamsayı sıralı integral ve türev kavramlarının birleşmesinin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır (Podlubny, 1999).

2.4.5. Tamsayılı Türevlerin ve İntegrallerin Birleştirilmesi

$f(\tau)$ fonksiyonu sürekli ve her sonlu aralık (a,t) için; $f(t)$ fonksiyonunun $r < 1$ için $\tau = a$ ya uygun bir tekilliği olabilir. Bu da:

$$\lim_{\tau \to a} (\tau - a)^r f(t) = \text{const}(\neq 0). \tag{2.40}$$

şeklinde gösterilebilir. Sonra integral

$$f^{-1}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \tag{2.41}$$

vardır ve $t \to a$ için 0'a eşittir yani sonlu bir değeri vardır. $\tau = a + y(t-a)$ ve $\epsilon = t - a$ ifadesi alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to a} f^{(-1)}(t) &= \lim_{t\to a} \int_a^t f(\tau) d\tau \\ &= \lim_{t\to a} (t-a) \int_0^1 f(a + y(t-a)) dy \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{1-r} \int_0^1 (\epsilon y)^r f(a + y\epsilon) y^{-r} dy = 0, \end{aligned} \tag{2.42}$$

yazılabilir. Çünkü $r < 1$ dir. Bu nedenle, iki katlı integral düşünebilir.

$$\begin{aligned} f^{-2}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_\tau^t d\tau_1 \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.43}$$

(2.43) ifadesi $f(\tau)$ nun iki katlı integralini verir:

$$\begin{aligned} f^{-3}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3) d\tau_3 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.44}$$

ve genel durumdaki tümevarımla Cauchy formülü

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.45}$$

vadır. Diyelim ki $n \geq 1$ sabit ve $k \geq 0$ tam sayı alınırsa

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.46}$$

elde edilir.

Burada $D^{-k}(k \geq 0)$ sembolü k yinelenen integralleri belirtir.

Diğer yandan sabit bir $n \geq 1$ ve $k \geq n$ tamsayısı için $(k-n)-$ $f(t)$ fonksiyonunun türevi şu şekilde yazılabilir:

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \tag{2.47}$$

Burada $D^k(k \geq 0)$ sembolü , k yinelemeli türevleri gösterir.

Formül (2.46) ve (2.47) bunlardan belirli durumlar olarak kabul edilebilir. $n(n \leq 1)$ sabittir $k \leq 0$ ve $k > 0$ için $k = n-1, n-2, ...,$ ise formül (2.47) $f(t)$ nin k yinelemeli integrallerini verir. $k = n$ için $k = n+1, n+2, n+3, ...$ ise $f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevlerini verir. $k - n = 1, 2, 3, ...$ ise $f(t)$ fonksiyonunun yinelemeli türevlerini verir (Podlubny, 1999).

2.4.6. Riemann-Liouville Keyfi Mertebeden İntegrali

N -katlı integral kavramını n tamsayı olmayan değerlere genişletmek için, Cauchy formülü (2.45) ile başlanılabilir ve içindeki n tamsayısını gerçek bir $\vartheta > 0$ ile değiştirebilir:

$${}_aD_t^{-\vartheta} = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-1} f(\tau) d\tau \tag{2.48}$$

(2.45) 'de n tamsayısı için $n \geq 1$ koşulu sağlanmalıdır; ϑ için karşılık gelen zayıflık: (2.48) deki integralin varlığı için $\vartheta > 0$ olmasıdır.

Ayrıca, bazı makul varsayımlar altında

$$\lim_{\vartheta \to 0} D_t^{-\vartheta} f(t) = f(t), \tag{2.49}$$

dır. Burada $\vartheta = 0$ yazılırsa;

$${}_aD_t^0 f(t) = f(t) \tag{2.50}$$

elde edilir. $f(t)$ $t \leq 0$ için sürekli türevlere sahipse, (2.49) deki ilişkinin ispatı çok basittir. Böyle bir durumda, parçalara göre çözüm yapılırsa ve gama özelliği kullanılırsa;

$$
{}_aD_t^{-\vartheta} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{\vartheta}}{\Gamma(\vartheta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\vartheta+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\vartheta} f'(\tau) d\tau,
$$

elde edilir ve

$$
\lim_{\vartheta \to 0} D_t^{-\vartheta} = f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau = f(a) + \big(f(t) - f(a)\big) = f(t)
$$

yazılır. $f(t)$ yalnızca $t \geq a$ için sürekli ise, (2.49) nin ispatı biraz daha uzundur. Bu durumda, forma ${}_aD_t^{(-\vartheta)} f(t)$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{(-\vartheta)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-1} \big(f(\tau) - f(t)\big) d\tau \\
&\quad + \frac{f(t)}{\Gamma(\vartheta)} \int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\vartheta-1} \big(f(\tau) - f(t)\big) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\vartheta)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\vartheta-1} \big(f(\tau) - f(t)\big) d\tau \\
&\quad + \frac{f(t)(t-a)^{\vartheta}}{\Gamma(\vartheta+1)}.
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

elde edilir.

(2.51) deki integralin ikinci bölümü ele alınırsa; $f(t)$ sürekli olduğundan, her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır.

$$
|f(\tau) - f(t)| < \epsilon.
$$

Sonra (2.51) deki integralin ikinci kısmı hakkında şu tahminler yapılabilir :

$$
|I_2| < \frac{\epsilon}{\Gamma(\vartheta)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\vartheta-1} d\tau < \frac{\epsilon \delta^{\vartheta}}{\Gamma(\vartheta+1)}, \tag{2.52}
$$

ve $\epsilon \to 0$’ a ve $\delta \to 0$’ ı dikkate alınarak, tüm $\vartheta \geq 0$ için

$$
\lim_{\delta \to 0} |I_2| = 0. \tag{2.53}
$$

dır.

Şimdi isteğe bağlı bir $\epsilon > 0$ alınsın ve δ seçilsin.

$$|I_2| < \epsilon \tag{2.54}$$

tüm $\vartheta \geq 0$ ve δ sabiti için (2.51) deki integralin ilk tahmini olan

$$|I_1| \leq \frac{M}{\Gamma(\vartheta)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\vartheta-1} d\tau \leq \frac{M}{\Gamma(\vartheta+1)} \big(\delta^\vartheta - (t-a)^\vartheta\big), \tag{2.55}$$

denklemi elde edilir. Bundan sonra, sabit $\delta > 0$ için

$$\lim_{\vartheta \to 0} |I_1| = 0, \tag{2.56}$$

olur.

$$\big|{}_aD_t^{(-\vartheta)} f(t) - f(t)\big| \leq |I_1| + |I_2| + |f(t)| \times \left|\frac{(t-a)^\vartheta}{\Gamma(\vartheta+1)} - 1\right|$$

(2.53) daki limitleri ve elde edilen (2.54) tahmini dikkate alınarak;

$$\lim_{\vartheta \to 0} \sup \big|{}_aD_t^{(-\vartheta)} f(t) - f(t)\big| \leq \epsilon$$

yazılabilir. Burada ϵ istenildiği kadar küçük seçilebilir. Bu nedenle,

$$\lim_{\vartheta \to 0} \sup \big|{}_aD_t^{(-\vartheta)} f(t) - f(t)\big| = 0,$$

yazılabilir ve (2.49) de $t \geq a$ için uygunsa $f(t)$ tutar.

$f(t)$ $t \geq a$ için sürekli ise, (2.48) ile tanımlanan rastgele gerçek düzen integral aşağıdaki önemli özelliğe sahiptir:

$$D_t^{-\vartheta}\big(D_t^{-q} f(t)\big) = D_t^{-\vartheta-q} f(t). \tag{2.57}$$

Gerçekten de

$$
\begin{aligned}
D_t^{-\vartheta}\big(D_t^{-q}f(t)\big) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}D_\tau^{-\vartheta}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}d\tau\int_a^\tau (\tau-\xi)^{\vartheta-1}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)\Gamma(q)}\int_a^t f(\xi)d\xi\int_\xi^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\xi)^{\vartheta-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta+q)}\int_a^t (t-\xi)^{\vartheta+q-1}f(\xi)d\xi \\
&= D_t^{-\vartheta-q}f(t).
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

dır. Açıkçası, ϑ ve q yer değiştirebilir, buradan

$$
D_t^{-\vartheta}\big(D_t^{-q}f(t)\big) = D_t^{-q}\big(D_t^{-\vartheta}f(t)\big) = D_t^{-\vartheta-q}f(t). \tag{2.59}
$$

yazılabilir. Denklem (2.59) 'nin tamsayı sıralı türevlerinin iyi bilinen ;

$$
\frac{d^m}{dt^m}\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) = \frac{d^n}{dt^n}\Big(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\Big) = \frac{d^{m+n}f(t)}{dt^{m+n}} \tag{2.60}
$$

özelliğine benzer olduğu dikkat çekebilir.

2.4.7. Riemann-Liouville Keyfi Mertebeden Türevi

(2.47) denklemi, $k-n$ tamsayı türevinin düzenini tamsayı olmayan düzene genişletmek için bir fırsat sunar. Yani, k tamsayısı bırakılıp n tamsayısı gerçek bir ϑ ile değiştirilebilir, böylece $k-\vartheta>0$ olur. Bu da bize;

$$
{}_aD_t^{k-\vartheta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\frac{d^k}{dt^k}\int_{(a)}^t (t-\tau)^{\vartheta-1}f(\tau)d\tau, \quad (0<\vartheta\leq 1). \tag{2.61}
$$

denklemini verir.

Burada (2.61) 'deki integralin yakınsaması için gerekli olan tek önemli kısıtlama $\vartheta>0$ olmasıdır. Bununla birlikte, bu kısıtlama genellik kaybı olmadan olabilir, bu durum (2.61)

deki integrallerin tanım özelliği ve (2.59) denklemi yardımıyla kolayca gösterilebilir.
(2.61) denkleminde $\vartheta = k - \vartheta$ yazılırsa

$$ {}_aD_t^{\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\vartheta)} \frac{d^k}{dt^k} \int_{(a)}^{t} (t-\tau)^{k-\vartheta-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq \vartheta < k) \tag{2.62} $$

elde edilir veya

$$ {}_aD_t^{\vartheta} f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \big({}_aD_t^{-(k-\vartheta)} f(t) \big), \quad (k-1 \leq \vartheta < k) \tag{2.63} $$

yazılabilir. $\vartheta = k-1$ ise, $k-1$: derecesinde genel bir tamsayı-dereceden türev elde edilir.

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{\vartheta} f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} \big({}_aD_t^{-(k-(k-1))} f(t) \big) \\ &= \frac{d^k}{dt^k} \big({}_aD_t^{-1} f(t) \big) = f^{(k-1)}(t) \end{aligned} \tag{2.64} $$

Dahası, (2.65) kullanılarak $\vartheta = k \geq 1$ ve $t > a$ için

$$ {}_aD_t^{\vartheta} f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \big({}_aD_t^{0} f(t) \big) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t), \tag{2.65} $$

dır. Yani $t > a$ için (2.62) deki Riemann Liouville kesirli türevi $\vartheta = k > 1$ derecesindeki , k derecesinin genel türevi ile çakışır.
Şimdi Riemann Liouville kesirli türevlerinin bazı özellikleri ele alınırsa; Riemann Liouville kesirli türevinin ilk ve belki de en önemli özelliği $\vartheta > 0$ ve $t > a$ için,

$$ {}_aD_t^{\vartheta} \big({}_aD_t^{-\vartheta} f(t) \big) = f(t) \tag{2.66} $$

olmasıdır.
Bu da Riemann Liouville kesirli integral operatörünün kesirli türev operatörünün tersi olduğu anlamına gelir.
(2.66)'daki özelliği kanıtlamak için $\vartheta = n \geq 1$ tamsayı örneği ele alınırsa:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{n} \big({}_aD_t^{-n} f(t) \big) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t). \end{aligned} \tag{2.67} $$

yazılabilir.

Şimdi $k-1 \leq \vartheta < k$ alınarak ve (2.59) daki Riemann Liouville kesirli integralleri için kombinasyon kuralı kullanılarak;

$$ {}_aD_t^{-k} f(t) =_a D_t^{-k-\vartheta}\big({}_aD_t^{\vartheta} f(t)\big), \tag{2.68}$$

yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\vartheta}\big({}_aD_t^{-\vartheta} f(t)\big) &= \frac{d^k}{dt^k}\big\{{}_aD_t^{-(k-\vartheta)}\big({}_aD_t^{-\vartheta} f(t)\big)\big\} \\ &= \frac{d^k}{dt^k}\big\{{}_aD_t^{-k} f(t)\big\} = f(t). \end{aligned} \tag{2.69}$$

(2.68) deki denklemin kanıtını sona erdiren denklem elde edilmiş olur .

Geleneksel tamsayı sıralı türev ve integralde olduğu gibi, kesirli türev ve integral de hesaplanmaz.

Eğer kesirli türev ${}_aD_t^{\vartheta} f(t), (k-1 \leq \vartheta < k)$, $f(t)$ fonksiyonunun türevi ile bütünleştirilebilirse

$$ {}_aD_t^{\vartheta}\big({}_aD_t^{-\vartheta} f(t)\big) = f(t) - \sum_{j=1}^{k}\big[{}_aD_t^{\vartheta-j}\big]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j}}{\Gamma(\vartheta-j+1)} \tag{2.70}$$

yazılabilir.

Gerçekten de, bir yandan

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-\vartheta}\big({}_aD_t^{\vartheta} f(t)\big) &= \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-1}({}_aD_\tau^{\vartheta} f(\tau))d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\Gamma(\vartheta+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta}({}_aD_\tau^{\vartheta} f(\tau))d\tau\right\}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

dır.

Öte yandan (2.70) denklemindeki özellik kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\vartheta+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta}({}_aD_\tau^{\vartheta} f(\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta}\frac{d^k}{d\tau^k}({}_aD_\tau^{-(k-\vartheta)} f(\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-k}({}_aD_\tau^{-(k-\vartheta)} f(\tau))d\tau \\
&\quad -\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}{}_aD_t^{-(k-\vartheta)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j+1}}{\Gamma(2+\vartheta-j)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\vartheta-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\vartheta-k}({}_aD_\tau^{-(k-\vartheta)} f(\tau))d\tau \\
&\quad -\sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{\vartheta-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j+1}}{\Gamma(2+\vartheta-j)} \\
&= {}_aD_t^{-(\vartheta-k+1)}\big({}_aD_t^{-(k-\vartheta)} f(t)\big) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{\vartheta-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j+1}}{\Gamma(2+\vartheta-j)} \\
&= {}_aD_t^{-1} f(t)-\sum_{j=1}^{k}\big[{}_aD_t^{\vartheta-j} f(t)\big]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j+1}}{\Gamma(2+\vartheta-j)}
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

denklemi yazılabilir.

(2.72) ’deki tüm terimlerin varlığı, ${}_aD_t^{\vartheta} f(t)$ nin bütünlüğünden kaynaklanmaktadır, çünkü bu koşul nedeniyle ${}_aD_t^{\vartheta-j} f(t), (j=1,2,\dots k),$ ’ın tümü $t=a$ ile sınırlıdır.

(2.70) ve (2.71) birleştirildiğinde, (2.72) deki ilişkinin kanıtı sona ermektedir.

$0<\vartheta<1$ ise

$$
{}_aD_t^{-\vartheta}\big({}_aD_t^{\vartheta} f(t)\big)=f(t)-\big[{}_aD_t^{\vartheta-1}\big]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-1}}{\Gamma(\vartheta)} \tag{2.73}
$$

önemli özel bir durumdan bahsedilmelidir. (2.66) denklemi daha genel (2.74) denkleminin özel bir halidir.

$$
{}_aD_t^{\vartheta}\big({}_aD_t^{-q} f(t)\big)={}_aD_t^{\vartheta-q} f(t), \tag{2.74}
$$

$\vartheta\geq q\geq 0$ ise $f(t)$ ’nin sürekli olduğunu ve ${}_aD_t^{\vartheta-q} f(t)$ türevinin mevcut olduğunu varsayarız.

İki durum $q\geq\vartheta\geq 0$ ve $\vartheta>q\geq 0$. dikkate alınmalıdır:

(2.66) ve (2.74) özellikleri kullanılarak $q\geq\vartheta\geq 0$ ise

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\vartheta}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) &= {}_aD_t^{\vartheta}\left({}_aD_t^{-\vartheta}\,{}_aD_t^{-(q-\vartheta)}f(t)\right) \\
&= {}_aD_t^{-(q-\vartheta)}f(t) = {}_aD_t^{\vartheta-q}f(t)
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

yazılabilir.

Şimdi $\vartheta > q \geq 0$ ve m , n tam sayılarıyla $0 \leq m-1 \leq \vartheta < m$ ve $0 \leq n \leq \vartheta$
$q < n$ örneği ele alınırsa $n \leq m.$ Ardından, tanım (2.62) ve (2.74) denklemi kullanarak

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\vartheta}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-\vartheta)}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{\vartheta-q-m}f(t)\right\} \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_aD_t^{\vartheta-q-n}f(t)\right\} = {}_aD_t^{\vartheta-q}f(t).
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

yazılabilir.

Yukarıda (2.70) te belirtilen özellik daha özel bir durumdur.

$$
{}_aD_t^{-\vartheta}\left({}_aD_t^{q}f(t)\right) =_a D_t^{q-\vartheta}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j}\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j}}{\Gamma(\vartheta-j+1)} \tag{2.77}
$$

Formül (2.77) i kanıtlamak için eğer $q \leq \vartheta$ ise önce (2.74) deki özellik veya eğer $q \geq \vartheta$ ise (2.76) daki özellik , sonra da (2.70) deki özellik kullanılır.

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-\vartheta}\left({}_aD_t^{q}f(t)\right) &= {}_aD_t^{q-\vartheta}\left\{{}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{q}f(t)\right)\right\} \\
&= {}_aD_t^{q-\vartheta}\left\{f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j}}{\Gamma(\vartheta-j+1)}\right\} \\
&= {}_aD_t^{q-\vartheta}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\vartheta-j}}{\Gamma(\vartheta-j+1)}
\end{aligned} \tag{2.78}
$$

denklemi elde edilir.

Burada güç fonksiyonunun bilinen türevi kullanıldı (Podlubny, 1998).

Tanım 2.3 *Caputo türevi;*

$$
{}_a^CD_t^{\vartheta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\vartheta)}\int_a^t \frac{f^n(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\vartheta-n+1}},
$$

şeklinde ifade edilir. Şayet ϑ değeri $0 < \vartheta < 1$ arasında bir değer alınırsa,

$$ {}_a^C D_t^{\vartheta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\vartheta)} \int_a^t \frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\vartheta}}, \tag{2.79} $$

şeklinde olup hem yerel (noktasal) hem de tekildir (belli bir noktada t=τ için çözüm sonsuza gider). Bu dezavantajı ortadan kaldırmak için $(t-\tau)^{-\vartheta}$ çekirdeği yerine $e^{\frac{-\vartheta(t-\tau)}{1-\vartheta}}$ çekirdeği kullanılır. Bunun sonucu olarak da ortaya Caputo-Fabrizio kesirli türevi orataya çıkar.

Tanım 2.4 $\vartheta \in [0,1], f \in H^1(a,b), b > a$ *olmak üzere;*

$$ {}_a^{CF}\mathfrak{D}_t^{\vartheta} f(t) = \frac{M(\vartheta)}{(1-\vartheta)} \int_a^t \dot{f}(t) exp\left[\frac{-\vartheta(t-\tau)}{1-\vartheta}\right] d\tau, \tag{2.80} $$

şeklinde tanımlanır. Burada $M(\vartheta)$ *normalleştirme sabiti olup,* $M(0) = M(1) = 1$ *dir.*

Tanım 2.5 $0 < \vartheta < 1$ *olmak üzere;*

$$ {}^{CF}I^{\vartheta} f(t) = \frac{2(1-\vartheta)}{(2-\vartheta)M(\vartheta)} u(t) + \frac{2\vartheta}{(2-\vartheta)M(\vartheta)} \int_0^t u(s)ds, \qquad t \geq 0, \tag{2.81} $$

şeklindedir. Caputo-Fabrizio operatörünün Laplace açılımı:

$$ \mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^{\vartheta} f(t)\} = \frac{1}{1-\vartheta} \int_0^{\infty} exp - st \int_0^t f'(\tau) exp - \frac{\vartheta(t-\tau)}{1-\vartheta} d\tau dt, $$

şeklinde olup convulasyon yani ters laplace tanımından;

$$ \mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^{\vartheta} f(t)\} = \frac{1}{1-\vartheta} \mathfrak{L}\{f'(t)\} \mathfrak{L}\{exp - \frac{\vartheta t}{1-\vartheta}\} = \frac{s\mathfrak{L}(f(t) - f(0))}{s + \vartheta(1-s)}, $$

$$ \mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^{\vartheta+1} f(t)\} = \frac{1}{1-\vartheta} \mathfrak{L}\{f''(t)\} \mathfrak{L}\{exp - \frac{\vartheta t}{1-\vartheta}\} = \frac{(s^2\mathfrak{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0))}{s + \vartheta(1-s)}, $$

elde edilir. Genelleştirişmiş Laplace açılımı ise:

$$\mathfrak{L}\{\mathfrak{D}_t^{\vartheta+n}f(t)\} = \frac{1}{1-\vartheta}\mathfrak{L}f^{n+1}(t)\mathfrak{L}(exp - \frac{\vartheta t}{1-\vartheta}) = \frac{(s^{n+1}\mathfrak{L}\{f(t)\} - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0)...f^n(0))}{s+\vartheta(1-s)},$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.6 *Mittag-Leffler Fonsiyonu:*

$$E_{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0,$$

şeklindedir. Mittag Leffler Fonksiyonunun Laplace açılımı ise:

$$\mathfrak{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda}, \qquad R(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}},$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.7 $\vartheta \in [0,1], f \in H^1(a,b), b > a$ *olmak üzere;*

$${}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)E_{\vartheta}\left[-\frac{\vartheta(t-\tau)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right]d\tau,$$

Teorem 2.2 *: f*$\in H^1(a,b), b > a, \vartheta \in [0,1]$ *olmak üzere;*

$$\mathfrak{L}\{{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)\}(s) + H(t),$$

dir (Atangana ve Owolabi, 2018).

İspat Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının Laplace ı alınırsa;

$$\mathfrak{L}\{{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t)\}(s) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{s^{\vartheta}\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^{\vartheta}+\frac{\vartheta}{1-\vartheta}} - \frac{s^{\vartheta-1}f(0)}{s^{\vartheta}+\frac{\vartheta}{1-\vartheta}}\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}, \tag{2.82}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\mathfrak{L}\{{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)\}(s) - \frac{s^{\vartheta-1}f(0)}{s^{\vartheta}+\frac{\vartheta}{1-\vartheta}}\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta},$$

olur. Burada $-\frac{s^{\vartheta-1}f(0)}{s^{\vartheta}+\frac{\vartheta}{1-\vartheta}}\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}$ yerine $H(t)$ yazılırsa ispat tamamlanmış olur. Ayrıca yukarıdaki eşitlikte her iki tarafa da ters Laplace uygulanırsa;

$${}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t) = {}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t) - \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}f(0)E_{\vartheta}\left(-\frac{\vartheta}{1-\vartheta}t^{\vartheta}\right),$$

olur.

Teorem 2.3 *f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ aralığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.*

$$||{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t))|| < \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}K, \quad ||h(t)|| = max_{a\leq t\leq b}|h(t)|. \tag{2.83}$$

İspat

$$\begin{aligned} ||{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t))|| &= \left|\left|\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)E_{\vartheta}\left[-\vartheta\frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right]dx\right|\right| \\ &< \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\left|\left|\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)dx\right|\right| \\ &< \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}||f(x)||, \end{aligned} \tag{2.84}$$

K = $||f(x)||$ alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.4 *A.B. Riemann ve Caputo anlamında türev, Lipschitz koşuluna sahiptir, yani belirli bir çift fonksiyon f ve h için için aşağıdaki eşitsizlikler kurulabilir:*

$$||{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)) - {}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}h(t))|| \leq H||f(t)-h(t)||, \tag{2.85}$$

ve

$$||{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t)) - {}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}h(t))|| \leq H||f(t)-h(t)||, \tag{2.86}$$

yazılabilir.

İspat

$$\begin{aligned} &\left|\left|{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta}h(t))\right|\right| = \\ &\left|\left|\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)E_{\vartheta}\Big[-\vartheta\frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\Big]dx \right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t h(x)E_{\vartheta}\Big[-\vartheta\frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\Big]dx\right|\right|, \end{aligned} \tag{2.87}$$

dir. Burada birinci dereceden türevin Lipschitz koşulunu kullanarak, küçük bir pozitif sabit bulabiliriz ki:

$$\begin{aligned} &\left|\left|{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta}h(t))\right|\right| \\ &\leq \frac{B(\vartheta)\theta_1}{1-\vartheta}E_{\vartheta}\Big[-\vartheta\frac{t^{\vartheta}}{1-\vartheta}\Big]\left|\left|\int_0^t f(x)dx - \int_0^t h(x)dx\right|\right|, \end{aligned} \tag{2.88}$$

olup

$$\begin{aligned} &\left|\left|{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta}h(t))\right|\right| \\ &\leq \frac{B(\vartheta)\theta_1}{1-\vartheta}E_{\vartheta}\Big[-\vartheta\frac{t^{\vartheta}}{1-\vartheta}\Big]\left|\left|f(t)-h(t)\right|\right| \\ &\leq H\left|\left|f(t)-h(t)\right|\right|, \end{aligned} \tag{2.89}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan A.B. Riemann anlamında tüev Lipschitz koşuluna sahiptir. Benzer şekilde A.B. Caputo anlamında türevin de Lipschitz koşuluna sahip olduğu gösterilebilir.

Şimdi k doğal sayı ile ayırt edilebilen n zamanı olsun. $f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$, olmak üzere;

$${}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}\big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\big) = \frac{d^n}{dt^n}\big({}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)\big), \tag{2.90}$$

dir. Bu ters Laplace dönüşümü alınarak ve aşağıdaki kesirli zaman adi diferansiyel denklemin konvilasyon teoremi kullanılarak gösterilebilir.

$${}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}\big(f(t)\big) = u(t), \tag{2.91}$$

ifadesinin benzersiz bir çözümü var, yani

$$f(t) = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}u(t) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t u(y)(t-y)^{\vartheta-1}dy,$$

dır.

Tanım 2.8 *Kesirli integral, yerel olmayan yeni kesirli türev ile ilişkilendirilir ve çekirdek:*

$${}_{a}^{AB}I_t^{\vartheta}\big(f(t)\big) = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}u(t) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\vartheta-1}dy,$$

şeklinde tanımlanır.

$\vartheta = 0$ *olduğunda, başlangıç değerini hesaplarız ve ayrıca* $\vartheta = 1$ *ise, normal Atangana-Baleanu integrali elde edilir.*

2.5. Varlık-Teklik

Varlık teklik başlangıç değer problemi olan diferansiyel denklemlerle ilgilidir (Başlangıç değeri verilip çözümün var olduğu ve tek olduğu en geniş aralık sorulduğunda da varlık tekliğe bakılır). Varlık teklik için öncelikle çözümün varlığına bakılır daha sonra tekliği incelenir.

2.5.1. Çözümün Varlığı

Tanım 2.9

$$u'' = g(t,u) \quad u(t_0) = u_0$$

başlangıç koşulunu ele alalım, burada g, IxR *üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon,* $I \subset R$ *açık bir aralıktır. I üzerinde tanımlı olan ve aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan bir* $\sigma(t)$ *fonksiyonuna (1)-(2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir:*

1. $t \in I$ *için* $\sigma^{'}(t)$ *mevcuttur,*

2. $\sigma(t_0) = u_0, t_0 \in I$

3. $t \in I$ *için* $(t, \sigma(t)) \in IxR$

4. $t \in I$ *için* $\sigma'(t) = g(t, \sigma(t))$

Tanım 2.10 *Her* (t, u_1), $(t, u_2) \in R(a, b)$ *için*

$$|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir K sabiti mevcutsa, g fonksiyonuna $R(a, b)$ *bölgesinde bir Lipschitz koşulunu sağlıyor denir, K sabitine de Lipschitz sabiti denir.*

Tanım 2.11 *X, H de bir Banach uzayı olsun. H ≤ E için sınırlı bir yaklaşım oluşturur.*

$$y \geq x \Rightarrow y - x \in H$$

2.5.2. Çözümün Tekliği

Çözümün tekliği başlangıç değer probleminin yanlız bir çözümü olduğu anlamına gelir. Picard-Lindelöf teoremi başlangıç değer probleminin uygun aralıkta varlığını ve tekliğini göstermek için kullanılan bir yöntemdir.

Teorem 2.5 $g(t, u)$ *ve* $\frac{\delta(g)}{\delta(u)}$ *fonksiyonları* $R(a, b) = \{(t, u) : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$ *kapalı ve sınırlı bölgesinde* t *ve* u *ya göre sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlıyorsa bu durumda (1)-(2) başlangıç değer probleminin* $|g(t, u)| \leq M$ *ve* $h = \min(a, \frac{b}{M})$ *olmak üzere* $|t - t_0| \leq h$ *aralığında tanımlı tek bir* $u(t)$ *çözümü vardır.*

1. $t \in I$ *için* $\sigma'(t)$ *mevcuttur,*

2. $\sigma(t_0) = u_0, t_0 \in I$

Teorem 2.6 (Picard-Lindelöf:) *Başlangıç değer problemi için;*
$B \subset IR^2$ $\quad f : B \to IR$ *olacak şekilde bir* B *alanı ve* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *ve* $y(x_0) = y_0$ *olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlansın eğer;*

- f B *de sürekli bir fonksiyon ve*

- $f(x, y)$ *ve* y *Lipschitz şartı ile* B *de sürekli ise* $\epsilon > 0$ *sabit sayısı için;*

B de tek bir çözüm vardır.

İspat $(x_0, y_0) \in B$ iç noktası ve $a > 0, b > 0$ sabit noktaları alınsın.

$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b\} \subset B$ olacak şekilde bir dikdörtgensel alan olsun.

$$M = \max_{(x,y)\in R} f(x, y)$$

$h = min(a, \frac{b}{M})$ olmak üzere;

$|x - x_0| \leq h$ aralığında başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir.

$a < \frac{b}{M}$ olduğunda $h = a$ olur. Buradan $R_1 = R$

$\frac{b}{M} < a$ olduğunda $h = \frac{b}{M}$ olur. Buradan $R_1 \subset R$

$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$

$R_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$

Ardışık yaklaşımlarla Picard teoreminin ispatı yapılabilir. Bunun için problemin çözümüne yakınsayacak fonksiyon dizisi kullanılarak çözümün bulunması sağlanır. O halde;

$|x - x_0| < h$ aralığında Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3... fonksiyonları tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \\
\Psi_2 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_1(t))dt \\
\Psi_3 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_2(t))dt \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Psi_n &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_{n-1}(t))dt
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Öncelikle başlangıç değer probleminin $[x_0, x_0 + h]$ aralığında varlığı kanıtlanır. Benzer şekilde $[x_0 - h, x_0]$ aralığında da varlık gösterilir. Daha sonra çözümün tekliği ispatlanır. Bunun için İspat 4 aşamaya ayrılırsa:

1 Ψ_n (2.92) te tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

a) iyi tanımlı,

b) Ψ_n sürekli ve kısmi türeve sahip,

c) $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|\Psi_n(x) - y_0| \leq b$,

d) $f(x, \Psi_n(x))$ iyi tanımlıdır.

O halde Ψ_n fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ üzerinde bir çözümdür.

İspat Varsayalım $\Phi_{n-1}(x)$ fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında türeve sahip olsun ve $x \in [x_0, x_0 + h]$ için $|\Phi_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ olsun.

Buradan $(x, \Psi_{n-1}(x)) \in R_1$ olur. $(x, \Psi_{n-1}(x))$ aralığında tanımlanmış sürekli bir $f(x, \Psi_{n-1}(x))$ fonksiyonu vardır.

Buradan $[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|f(x, \Psi_{n-1}(x))| \leq M$ yazılabilir.

$\Psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_{n-1}(x))dt$ olduğu düşünülürse;

Ψ_n fonksiyonu vardır ve bu fonksiyonun $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli türevi vardır. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
|\Psi_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_{n-1}(x))dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_{n-1}(x))dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} M dt = M(x - x_0) \qquad h = min(a, \frac{b}{M}) \\
&\leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

$(x, \Psi_n(x))$ R_1 de bir nokta bu nedenle $f(x, \Psi_n(x))$ fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyondur.

Örneğin $n = 1$ alınırsa; $\Psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt$ olur.

Buradan Ψ_1 fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt \\
&\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

dır.

O halde $n = 1$ için $(x, \Psi_1(x))$ noktası R_1 de bir nokta ve $f(\Psi_1(x))$ fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur ve $[x_0, x_0 + h]$ aralığında bir çözümdür.

Benzer şekilde (2.95) te tanımlanan $\{\Psi_n\}$ dizi fonksiyonlarının tümevarım yöntemi ile $[x_0, x_0 + h]$ aralığındaki tüm özellikleri gösterilmiş olur. O halde Ψ fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında denklemin bir çözümüdür.

Buradan ispat tamamlanmş olur.

2 $(x_0, x_0 + h)$ aralığında $\{\Psi_n\}$ çözümü tektir ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.
$[x_0, x_0 + h]$ aralığında $|\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{\alpha}\frac{(\alpha h)^n}{n!}$ dır.

İspat $x \in (x_0, x_0 + h)$ için $|\Psi_{n-1}(x) - \Psi_{n-2}(x)| \leq \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$ olduğu varsayılırsa;

$$\begin{aligned}
|\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, \Psi_{n-1}(t)) - f(t, \Psi_{n-2}(t)))dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, \Psi_{n-1}(t)) - f(t, \Psi_{n-2}(t)) \right| dt
\end{aligned}$$

1. ifadeden
$x \in (x_0, x_0 + h)$ aralığında $|\Psi_n(x) - y_0| \leq b$ dır. Bu nedenle
$(x, \Psi_{n-1}(x))$ ve $(x, \Psi_{n-2}(x))$ noktaları $x \in (x_0, x_0 + h)$ aralığında R_1 de iki noktadır.
Lipschitz teoreminden; $|\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| \leq \alpha \int_{x_0}^{x} |\Psi_{n-1}(t) - \Psi_{n-2}(t)|dt$

$$\begin{aligned}
|\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| &\leq \alpha \int_{x_0}^{x} |\Psi_{n-1}(t) - \Psi_{n-2}(t)|dt \\
&\leq \alpha \int_{x_0}^{x} \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!}(t - x_0)^{n-1}dt \\
&\leq \frac{M\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{(t - x_0)^n}{n}\right]_{x_0}^{x} = \frac{M\alpha^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n = \frac{M}{\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}h^n \\
&\leq \frac{M}{\alpha}\frac{(\alpha h)^n}{n!} \qquad \Big(|x - x_0| \leq h\Big)
\end{aligned}$$

olur. Buradan ispat tamamlanmış olur. Yani çözüm tektir.

3 $n \to \infty$ Ψ_n sürekli fonksiyonu $[x_0, x_0 + h]$ aralığında eşit aralıklarla Ψ ye yakınsar.

4 Ψ fonksiyonunun limiti $[x_0, x_0 + h]$ aralığında başlangıç değer problemine karşılık gelmektedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Opetatörü

Mittag-Leffler fonksiyonunun aşağıdaki kesirli adi diferansiyel denklemin çözümü olduğu biliniyor (Kilbas ve dig., 2006, Hristov, 2015b, Hristov, 2015a).

$$\frac{d^{\vartheta}y}{dx^{\vartheta}} = ay, \qquad 0 < \vartheta < 1. \tag{3.1}$$

Mittag-Leffler fonksiyonu ve genelleştirilmiş halleri bu nedenle yerel olmayan işlevler olarak kabul edilir. Aşağıdaki genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu ele alınırsa;

$$E_{\vartheta}(-t^{\vartheta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{\vartheta k}}{\Gamma(\vartheta k + 1)} \tag{3.2}$$

T noktasındaki $exp(-a(t-y))$ Taylor serisi şu şekilde verilir:

$$exp(-a(t-y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a(t-y))^k}{k!} \tag{3.3}$$

$a = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$ seçilirse ve yukarıdaki ifade Caputo-Fabrizio türevi ile değiştirilirse,

$$D_t^{\vartheta}(f(t)) = \frac{M(\vartheta)}{(1-\vartheta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\vartheta)^k}{k!} \int_b^t \frac{df(y)}{dy}(t-y)^k dy. \tag{3.4}$$

Yerellik sorununu çözmek için aşağıdaki ifade yazılırsa;
Denklem (3.4) 'da $k!$ yerine $\Gamma(\vartheta k+1)$ ve $(t-y)^k$ yerine $(t-y)^{\vartheta k}$ yazılırsa:

$$D_t^{\vartheta}(f(t)) = \frac{M(\vartheta)}{(1-\vartheta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\vartheta)^k}{\Gamma(\vartheta k+1)} \int_b^t \frac{df(y)}{dy}(t-y)^{\vartheta k} dy. \tag{3.5}$$

olur. Böylece, aşağıdaki türev yazılabilir.

Tanım 3.1 $f \in H^1(a,b), b > a, \vartheta \in [0,1]$ *için, yeni kesirli türevin tanımı :*

$$ {}_{b}^{ABC}D_t^{\vartheta}(f(t)) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta} \int_b^t f'(x) E_{\vartheta}\left[-\vartheta \frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta} \right] dx. \tag{3.6} $$

şekilinde verilir.

Elbette $B(\vartheta)$, Caputo ve Fabrizio durumundakilerle aynı özelliklere sahiptir. Yukarıdaki tanım, gerçek dünya sorunlarını anlamak için yararlı olacaktır. Ayrıca Laplace dönüşümü kullanırken de büyük bir avantaj sağlayacaktır. Başlangıçtaki bazı fiziksel problemleri çözmek için $\vartheta > 0$ olduğunda, başlangıçta işlevin kaybolması dışında orijinal işlevi kurtarılır. Bu sorunu önlemek için aşağıdaki tanım önerilir.

Tanım 3.2 $H^1(a,b), b > a, [0,1]$ *içindeki* ϑ *'de* f *olsun, yeni kesirli türevin tanımı*

$$ {}_{b}^{ABC}D_t^{\vartheta}(f(t)) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta} \frac{d}{dt} \int_b^t f(x) E_{\vartheta}\left[-\vartheta \frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta} \right] dx. \tag{3.7} $$

şekilinde verilir: (3.6) ve (3.7) denklemlerinin yerel olmayan bir çekirdeği vardır. Ayrıca denklem (3.6) 'da fonksiyon sabit olduğunda sıfır elde edilir. Şimdi her iki denklemin türevi ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişki gösterilirse, basit bir hesaplama ile

$$ \mathfrak{L}[{}_{0}^{ABR}D_t^{\vartheta} f(t)](s) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta} \frac{s^{\vartheta} \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^{\vartheta} + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}} \tag{3.8} $$

ve

$$ \mathfrak{L}[{}_{0}^{ABC}D_t^{\vartheta} f(t)](s) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta} \frac{s^{\vartheta} \mathfrak{L}\{f(t)\}(s) - s^{\vartheta-1} f(0)}{s^{\vartheta} + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}} \tag{3.9} $$

yazılabilir.

Buradan aşağıdaki teorem oluşturulabilir.

Teorem 3.1 $f \in H^1(a,b), b > a, \vartheta \in [0,1]$ *alınırsa aşağıdaki denklem*

$$ {}_{0}^{ABC}D_t^{\vartheta}(f(t)) = {}_{0}^{ABR}D_t^{\vartheta}(f(t)) + H(t) \tag{3.10} $$

elde edilir.

İspat Tanım (3.2) ve her iki tarafa da uygulanan Laplace dönüşümünü kullanarak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir:

$$ \mathfrak{L}[{}_{0}^{ABC}D_t^{\vartheta} f(t)](s) = \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta} \frac{s^{\vartheta} \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)}{s^{\vartheta} + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}} - \frac{s^{\vartheta-1} f(0)}{s^{\vartheta} + \frac{\vartheta}{1-\vartheta}} \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}, \tag{3.11} $$

(3.10) denkleminden aşağıdaki denkleme

$$\mathfrak{L}[{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t)](s) = \mathfrak{L}[{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)](s) - \frac{s^{\vartheta-1}f(0)}{s^{\vartheta}+\frac{\vartheta}{1-\vartheta}}\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta} \tag{3.12}$$

sahibiz. (3.12) denkleminin her iki tarafına da ters Laplace uygulanırsa:

$${}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t) ={}_0^{ABR} D_t^{\vartheta}f(t) - \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}f(0)E_{\vartheta}\big(-\frac{\vartheta}{1-\vartheta}t^{\vartheta}\big). \tag{3.13}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2 *F, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Sonra $[a,b]$ 'da aşağıdaki eşitsizlik*

$$\big|\big|{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t))\big|\big| < \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}K, \quad ||h(t)|| = max_{a\leq t\leq b}|h(t)|. \tag{3.14}$$

elde edilir.

İspat

$$\begin{aligned}\big|\big|{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t))\big|\big| &= \left|\left|\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)E_{\vartheta}\Big[-\vartheta\frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\Big]dx\right|\right| \\ &< \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\left|\left|\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)dx\right|\right| \\ &= \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}||f(x)||.\end{aligned}$$

Sonra K = $||f(x)||$ olur kanıt tamamlanır.

Teorem 3.3 *A.B. Riemann ve Caputo anlamında türev, Lipschitz durumuna sahiptir, yani, belirli bir çift f ve h fonksiyonu için,*

$$\big|\big|{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta}f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta}h(t))\big|\big| \leq H||f(t)-h(t)|| \tag{3.15}$$

ve ayrıca

$$\big|\big|{}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}f(t)) -{}_0^{ABC} D_t^{\vartheta}h(t))\big|\big| \leq H||f(t)-h(t)|| \tag{3.16}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

(3.16) 'nın ispatı benzer şekilde elde edilebildiğinden (3.15)' nin ispatı

İspat

$$||{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta} f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta} h(t))|| =$$

$$\left|\left|\frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)E_{\vartheta}\left[-\vartheta\frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right]dx - \frac{B(\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{d}{dt}\int_0^t h(x)E_{\vartheta}\left[-\vartheta\frac{(t-x)^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right]dx\right|\right|,$$

şeklindedir.

Birinci dereceden türevin Lipschitz koşulunu kullanarak, küçük bir pozitif sabit bulabiliriz ki:

$$\begin{aligned} ||{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta} f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta} h(t))|| \leq & \frac{B(\vartheta)\theta_1}{1-\vartheta}E_{\vartheta}\left[-\vartheta\frac{t^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right] \\ & \times \left|\left|\int_0^t f(x)dx - \int_0^t h(x)dx\right|\right|, \end{aligned} \tag{3.17}$$

ve sonra aşağıdaki

$$\begin{aligned} ||{}_0^{ABR}D_t^{\vartheta} f(t)) -{}_0^{ABR} D_t^{\vartheta} h(t))|| \leq & \frac{B(\vartheta)\theta_1}{1-\vartheta}E_{\vartheta}\left[-\vartheta\frac{t^{\vartheta}}{1-\vartheta}\right] \\ & \times ||f(x) - h(x)||t \\ \leq & H||f(x) - h(x)||, \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan A.B. Riemann anlamında türev Lipschitz koşulunu sağlar. İstenen sonucu veren f, n-kez farklılaşabilir doğal sayı olsun ve $f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$ olmak üzere;

$${}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}\big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\big) = \frac{d^n}{dt^n}\big({}_0^{ABR}D_t^{\vartheta} f(t)\big) \tag{3.19}$$

elde edilir.

Şimdi, ters Laplace dönüşümü alınarak ve aşağıdaki kesirli adi diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü kullanılarak denklem kolayca kanıtlanabilir.

$$ {}_{0}^{ABC}D_t^{\vartheta}\big(f(t)\big) = u(t) \tag{3.20} $$

Şeklinde benzersiz bir çözümü vardır, yani

$$ f(t) = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}u(t) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t u(y)(t-y)^{\vartheta-1}dy. $$

dır.

Tanım 3.3 *Kesirli integral, yerel olmayan yeni kesirli türev ile ilişkilendirilir çekirdek,*

$$ {}_{a}^{AB}I_t^{\vartheta}\big(f(t)\big) = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}u(t) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\vartheta-1}dy. $$

şeklinde tanımlanır.

$\vartheta = 0$ olduğunda, başlangıç fonksiyonu elde edilir ve ayrıca $\vartheta = 1$ ise, normal integral elde edilir (Atangana ve Baleanu, 2016).

3.2. Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevinin İki Aşamalı Adams-Bashford Şeması

Aşağıdaki kesirli diferansiyel denklem

$$ {}_{0}^{ABC}D_t^{\vartheta}y(t) = f(t, y(t)) \tag{3.21} $$

ele alınırsa analizin temel teoreminden

$$ \begin{aligned} y(t) - y(0) =& \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}f(t, y(t)) \\ &+ \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}f(\tau, y(\tau))d(\tau), \end{aligned} \tag{3.22} $$

yazılabilir.

t_{n+1} için;

$$ \begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(0) =& \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}f(t_n, y_n) \\ &+ \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-\tau)^{\vartheta-1}f(t, y(t))dt, \end{aligned} \tag{3.23} $$

ve t_n için;

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^{t_n} (t_n - \tau)^{\vartheta-1} f(t, y(t)) dt, \tag{3.24}$$

taraf tarafa çıkarma yapılırsa;

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) = & \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} \\ & + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\vartheta-1} f(t, y(t)) dt \\ & - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\vartheta-1} f(t, y(t)) dt \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bu nedenle,

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + A_{\vartheta,1} - A_{\vartheta,2} \tag{3.26}$$

Genelliği kaybetmeden,

$$A_{\vartheta,1} = \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\vartheta-1} f(t, y(t)) dt \tag{3.27}$$

Lagrange interpolasyon yaklaşımı düşünülürse;

$$p(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n, y_n) + \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \tag{3.28}$$

böylece;

$$
\begin{aligned}
A_{\vartheta,1} =&\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\\
&\times\left\{\frac{t-t_{n-1}}{h}f(t_n,y_n)-\frac{t-t_n}{h}f(t_{n-1},y_{n-1})\right\}\\
=&\frac{\vartheta f(t_n,y_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}f(t-t_{n-1})\right\}d_t\\
&-\frac{\vartheta f(t_{n-1},y_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}f(t-t_n)\right\}d_t\\
=&\frac{\vartheta f(t_n,y_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\}-\frac{\vartheta f(t_{n-1},y_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\\
&\times\left\{\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Benzer şekilde,

$$
A_{\vartheta,2}=\frac{\vartheta f(t_n,y_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\}-\frac{f(t_{n-1},y_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}t_n^{\vartheta+1}, \tag{3.30}
$$

böylece;

$$
\begin{aligned}
y(t_{n+1})-y(t_n)=&\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\}\\
&+\frac{\vartheta f(t_n,y_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\}\\
&-\frac{\vartheta f(t_{n-1},y_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\}\\
&-\frac{\vartheta f(t_n,y_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\}\\
&+\frac{f(t_{n-1},y_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}t_n^{\vartheta+1}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}=&y_n+f(t_n,y_n)\left\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h}\left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right.\\
&\left.-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right\}+f(t_{n-1},y_{n-1})\\
&\times\left\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)}-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\right.\\
&\left.\times\left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}+\frac{t^{\vartheta+1}}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Yukarıdaki denkleme Atangana-Baleanu fraksiyonel türevi için (Caputo anlamında) iki aşamalı Adams-Bashforth şeması denir. Aşağıda, yakınsama ve kararlılık sonuçları verilirse aşağıdaki teoremler yazılabilir.

Teorem 3.4 (Yakınsama Sonucu) *Aşağıdaki denklem y(t) nin bir çözümü olsun.*

$$ {}_{0}^{ABC}D_t^{\vartheta} y(t) = f(t, y(t)) $$

f sürekli ve sınırlıdır, y (t) 'nin sayısal çözümü:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1=}y_n + f(t_n, y_n)&\left\{ \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h}\left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} \right] \right. \\
&\left. - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} \right] \right\} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\
&\times \left\{ \frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)} - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{t^{\vartheta+1}}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h} \right] \right\} + R_{\vartheta},
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

şeklindedir. Burada $||R_{\vartheta}||_{\infty} < M$ dir.

İspat

$$
\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) =& \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\times \left[\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1} f(t, y(t))dt - \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\vartheta-1} f(t, y(t))dt \right] \\
=& \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}(f_n - f_{n-1}) + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\left\{ \left[\int_0^{t_{n+1}} \frac{t-t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f(t_n, y_n) \right. \right. \\
&\left. + \frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(t-t_i) \right] (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1} d_t \\
&- \int_0^{t_n} \left[\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} f(t_n, y_n) + \frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{f^n(t)}{(n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i) \right] \\
&\left. \times (t_n - t)^{\vartheta-1} dt \right\} \\
=& L(t, \vartheta, n) + \int_0^{t_{n+1}} \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1} d_t \\
&- \int_0^{t_n} \frac{f^n(t)}{(n)!}\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)(t_n-t)^{\vartheta-1} d_t
\end{aligned}
$$

bu da aşağıdaki denklemi ifade eder.

$$ y_{n+1} - y_n = L(t, \vartheta, n) + R_{\vartheta}(t) \tag{3.34} $$

$$
\begin{aligned}
L(t,\vartheta,n) =& f(t_n,y_n)\left\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h}\left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right.\\
&\left.-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right\}\\
&+f(t_{n-1},y_{n-1})\times\left\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\right.\\
&\left.\times\left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}+\frac{t^{\vartheta+1}}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\right]\right\}+R_{\vartheta},
\end{aligned}
$$

ve

$$
R_{\vartheta}(t)=\int_0^{t_{n+1}}\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}d_t-\int_0^{t_n}\frac{f^{n}(t)}{(n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i)(t_n-t)^{\vartheta-1}d_t
$$

Bunu göstermek gerekiyor.

$$
\begin{aligned}
||R_{\vartheta}(t)||_{\infty} =& \Bigg|\Bigg|\int_0^{t_{n+1}}\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}d_t\\
&-\int_0^{t_n}\frac{f^{n}(t)}{(n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i)(t_n-t)^{\vartheta-1}d_t\Bigg|\Bigg|_{\infty}\\
<& \Bigg|\Bigg|\int_0^{t_{n+1}}\frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}d_t\Bigg|\Bigg|_{\infty}\\
&+\Bigg|\Bigg|\int_0^{t_n}\frac{f^{n}(t)}{(n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i)(t_n-t)^{\vartheta-1}d_t\Bigg|\Bigg|_{\infty}\\
<& \max_{t\in[0,t_{n+1}]}\frac{|f^{n+1}(t)|}{(n+1)!}\Bigg|\Bigg|\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)\Bigg|\Bigg|_{\infty}\frac{t_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}\\
&+\max_{t\in[0,t_{n+1}]}\frac{|f^{n}(t)|}{(n)!}\Bigg|\Bigg|\prod_{i=0}^{n-1}(t-t_i)\Bigg|\Bigg|_{\infty}\frac{t_n^{\vartheta}}{\vartheta}\\
<& \sup_{t\in[0,t_{n+1}]}\left\{\max_{t\in[0,t_{n+1}]}\frac{|f^{n+1}(t)|}{(n+1)!},\max_{t\in[0,t_{n+1}]}\frac{|f^{n}(t)|}{(n)!}\right\}\\
&\times\left(n!\frac{h^{n+1}}{4\vartheta}t_{n+1}^{\vartheta}+(n-1)!\frac{h^{n}}{4\vartheta}t_n^{\vartheta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5 (Kararlılık Koşulu) *Lipschitz koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu varsa ve Adams-Bashforth yöntemi Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevine uygulandığında aşağıdaki koşul sağlanıyorsa sistem kararlıdır.*

$$
||f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})||_{\infty}\longrightarrow 0
$$

$n\to\infty$

İspat

$$\begin{aligned}||y_{n+1}-y_n||_\infty =&\Bigg|\Bigg|\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\}+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\\
&\times\Bigg[\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}f(t,y(t))dt-\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}f(t,y(t))dt\Bigg]\Bigg|\Bigg|_\infty\\
<&\Bigg|\Bigg|\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\}\Bigg|\Bigg|_\infty+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\\
&\times\Bigg|\Bigg|\Bigg[\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}f(t,y(t))dt-\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}f(t,y(t))dt\Bigg]\Bigg|\Bigg|_\infty\\
<&\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\Bigg|\Bigg|_\infty\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}f(t,y(t))dt\Bigg|\Bigg|_\infty\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}f(t,y(t))dt\Bigg|\Bigg|_\infty\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}||y_{n+1}-y_n||_\infty <&\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\Bigg|\Bigg|_\infty\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\sum_{i=0}^{n}\prod_{0\le i\le n}\frac{t-t_i}{(-1)^i h}f(t_i,y_i)dt\Bigg|\Bigg|_\infty\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{0\le i\le n-1}f(t_i,y_i)dt\Bigg|\Bigg|_\infty\\
<&\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}||f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})||_\infty+||P_n^\vartheta(t)||_\infty+||R_n^\vartheta(t)||_\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||P_n^\vartheta(t)||_\infty =&\Bigg|\Bigg|\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\sum_{i=0}^{n}\frac{t-t_i}{(-1)^i h}f(t_i,y_i)dt\Bigg|\Bigg|_\infty\\
\le&\sum_{i=0}^{n}\frac{||f(t_i,y_i||_\infty}{h}\frac{t_{n+1}^\vartheta}{\vartheta}\prod_{i=0}^{n}|t-t_i|\\
\le&\sum_{i=0}^{n}\frac{||f(t_i,y_i||_\infty}{h}\frac{t_{n+1}^\vartheta}{\vartheta}\frac{n!h^n}{4},\end{aligned} \tag{3.36}$$

ve

$$||R_n^\vartheta(t)||_\infty\le\sum_{i=0}^{n}\frac{||f(t_i,y_i||_\infty}{h}\frac{t_n^\vartheta}{\vartheta}\frac{h^{n-1}}{4} \tag{3.37}$$

Buradan;

$$
\begin{aligned}
||y_{n+1}-y_n||_\infty <& \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\Big|\Big|f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\Big|\Big|_\infty \\
&+\sum_{i=0}^{n}\frac{||f(t_i,y_i)||_\infty}{4\vartheta}t_{n+1}^{\vartheta}h^{n-1}n! \\
&+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{||f(t_{i-1},y_{i-1})||_\infty}{4\vartheta}t_n^{\vartheta}h^{n-3}(n-1)! \\
<& \frac{Mn!h^n}{4\vartheta}\left\{\frac{t_{n+1}^{\vartheta}(n+1)}{h}+\frac{t_n^{\vartheta}}{h^2}\right\} \\
&+\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\Big|\Big|f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})\Big|\Big|_\infty
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

elde edilir.

Burada $n \to \infty$ için $M = \max\limits_{t\in[0,t_{n+1}]}|f(t,y(t))|$ ve $||f(t_n,y_n)-f(t_{n-1},y_{n-1})||_\infty \longrightarrow 0$ ve $h \to 0$ için $\frac{Mn!h^n}{4\vartheta} \to 0$ olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur (Atangana ve Owolabi, 2018).

3.3. Kesirli Basamaktan Diferensiyel Denklemler İçin Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

$\vartheta \in (0,1]$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
D^{\vartheta}x_1(t) =& f_1(x_1,x_2,...,x_k), \\
D^{\vartheta}x_2(t) =& f_2(x_1,x_2,...,x_k), \\
&. \\
&. \\
&. \\
D^{\vartheta}x_k(t) =& f_k(x_1,x_2,...,x_k),
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

otonom sistemini

$$
x_1(0)=x_{01}, x_2(0)=x_{02}, ..., x_k(0)=x_{0k},
$$

başlangıç değerleri ile birlikte göz önüne alınırsa (3.39) sisteminin denge noktaları,

$$D^{\vartheta}x_i(t) = 0 \Longrightarrow f_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., k$$

koşullarını sağlayan $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ noktalarıdır.

Denge noktalarının asimptotik kararlılığını elde etmek için,

$$x_i(t) = x_i^* + \Omega_i(t) \qquad i = 1, 2, ..., k$$

diyelim $x(t)$ (3.39) da verilen B.D.P 'nin çözümü olduğundan

$D^{\vartheta}(x_i^* + \Omega_i) = f_i(x_1^* + \Omega_1, x_2^* + \Omega_2, ..., x_k^* + \Omega_k), \qquad i = 1, 2, ..., k$

yani

$D^{\vartheta}\Omega_i(t) = f_i(x_1^* + \Omega_1, x_2^* + \Omega_2, ..., x_k^* + \Omega_k), \qquad i = 1, 2, ..., k$

yazılabilir. * denge noktasını göstermek üzere;

$$\begin{aligned} f_i(x_1^* + \Omega_1, x_2^* + \Omega_2, ..., x_k^* + \Omega_k) \simeq & f_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) \\ & + \frac{\partial fi}{\partial x_1}| * \Omega_1 + \frac{\partial fi}{\partial x_2}| * \Omega_2 \\ & + ... + \frac{\partial fi}{\partial x_k}| * \Omega_k \\ & + ... \end{aligned} \tag{3.40}$$

ve $f_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) = 0$ olduğundan,

$$f_i(x_1^* + \Omega_1, x_2^* + \Omega_2, ..., x_k^* + \Omega_k) \simeq \frac{\partial fi}{\partial x_1}| * \Omega_1 + \frac{\partial fi}{\partial x_2}| * \Omega_2 + ... + \frac{\partial fi}{\partial x_k}| * \Omega_k \tag{3.41}$$

yazılabilir. (3.40) ve (3.41) den

$$D^{\vartheta}(\Omega_i(t)) \simeq \frac{\partial fi}{\partial x_1}| * \Omega_1 + \frac{\partial fi}{\partial x_2}| * \Omega_2 + ... + \frac{\partial fi}{\partial x_k}| * \Omega_k \qquad (i = 1, 2, ..., k) \tag{3.42}$$

elde edilir.

$$\Omega = [\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k]^T \tag{3.43}$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}| * \quad i,j = 1,2,...,k,$$

olmak üzere;

$$D^{\vartheta}\Omega = A\Omega \tag{3.44}$$

$\Omega_i(0) = x_i(0) - x_i^*, \qquad i = 1,2,...,k$

başlangıç değer problemini verir. B, A matrisinin öz vektörlerinden oluşan matris ve λ_1,λ_2,...,λ_k değerleri A matrisinin özdeğerleri olmak üzere;

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_k \end{bmatrix}, \tag{3.45}$$

$$C = B^{-1}AB \tag{3.46}$$

(3.46) ifadesi (3.44) de yerine yazılırsa;

$$D^{\vartheta}\S = B^{-1}CB\S \tag{3.47}$$

sistemi elde edilir. Burada, $\S = B^{-1}\Omega$ ve $\S = [\S_1, \S_2, ..., \S_k]$ dır. (3.47) ile verilen sistemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları yardımı ile ;

$$\S_i(t) = \sum_0^{\infty} \frac{(\lambda_i)^n t^{n\vartheta}}{\Gamma(n\vartheta + 1)} \S_i(0) = E_{\vartheta}(\lambda_i t^{\vartheta})\S_i(0) \qquad (i = 1,2,...,k) \tag{3.48}$$

şeklinde yazılabilir (Podlubny, 1999).

Matignon (1996) tarafından elde edilen sonuçlar kullanılırsa,

$$|arg(\lambda_i)| > \frac{\vartheta\pi}{2}, \qquad (i = 1, 2, ..., k) \tag{3.49}$$

olduğunda $\S_i(t)$ azalandır. O halde $\Omega_i(t)$ azalandır.

Yani $|arg(\lambda_i)| > \frac{\vartheta\pi}{2}$ tüm λ_i, $i = 1, 2, ..., k$ özdeğerleri için sağlanıyorsa denge noktaları asimptotik kararlıdır (Yaprakdal, 2019).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Teknoloji kendini yenileyen ve sürekli ilerleyen bir süreçtir. İnsanların hayatlarını kolaylaştırmak amacı ile bulunmuştur. Bulunan bir icat o yüzyılın hatta o çağın tamamen değişmesine sebep olmuştur.

20. yüzyılın en önemli buluşlarının başında bilişim teknolojileri gelmektedir. Bu teknolojilere bilgisayar, akıllı telefon, tablet vb. örnekleri verilebilir. Fakat bu teknolojiler her zaman insanların faydalarına olmamaktadır. Teknoloji geliştikçe buna karşı zarar verebilecek kötü amaçlı bir çok sektör de gelişmektedir. Virüs, solucan gibi kötü amaçlı yazılımlar ile birçok insan buna önlem almak zorunda kalmıştır.

Bu tezde birgisayar virüleri için yeniden modifiye edilen klasik SIR modelinin analizi yapılmıştır. Bu bölümde ise bilgisayar virüslerine uyarlanmış epidemiyolojik SIR modelinin varlık-teklik çözümü, kararlılık analizi ve sayısal simülasyonları verilmiştir.

4.1. SIR Modeli

Epidemiyolojik bir model olan SIR modelinin bilgisayar virüslerine uyarlanmış hali aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= a - \psi S(t)I(t) - dS(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \psi S(t)I(t) - \eta I(t) - dI(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \eta I(t) - dR(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Yukarıdaki denklem sisteminde;

S, t zamanında duyarlı bilgisayarların sayısını,

I, t zamanında virüslü bilgisayarların sayısını,

R, t zamanında kurtarılan bilgisayarların sayısını belirtir.

Ayrıca, a harici bilgisayarların ağa bağlanma hızını, d bir bilgisayarın ağdan kaldırılma hızını, ψ ise etkilenen bir bilgisayar bağlandığında duyarlı bir bilgisayarın bulaşma hızını, η ağın antivürüs özelliği nedeniyle virüs bulaşmış bilgisayarın iyileşme oranını temsil eder. $T = S + I + R$ sabit olarak alınacaktır. Şimdi, kesirli epidemiyolojik SIRA modelin çözümünün varlığı ve tekliği, sabit nokta teoremi uygulanarak kanıtlanacaktır.

4.2. Bilgisayar Virüsleri için Uyarlanmış Bir Epidemiyolojik Modelin Caputo Anlamındaki Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörüne Genişletilmesi

Singh ve dig. (2018) SIR modelini (4.2) denklem sistemindeki gibi yeniden düzenlemişlerdir. Burada A antivirüs ile virüs bulaşmamış bilgisayar sayısını göstermektedir.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \rho_{SA}S(t)A(t) - \alpha S(t)I(t) - \nu S(t) + \gamma R(t)\\
\frac{dI}{dt} &= \alpha S(t)I(t) - \rho_{IA}A(t)I(t) - \sigma I(t) - \nu I(t)\\
\frac{dR}{dt} &= \sigma I(t) - \gamma R(t) - \nu R(t)\\
\frac{dA}{dt} &= \rho_{SA}S(t)A(t) + \rho_{IA}A(t)I(t) - \nu A(t)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(4.2) denkleminde $\Lambda = 0$ ve $\nu = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\rho_{SA}S(t)A(t) - \alpha S(t)I(t) + \gamma R(t)\\
\frac{dI}{dt} &= \alpha S(t)I(t) - \rho_{IA}A(t)I(t) - \sigma I(t)\\
\frac{dR}{dt} &= \sigma I(t) - \gamma R(t)\\
\frac{dA}{dt} &= \rho_{SA}S(t)A(t) + \rho_{IA}A(t)I(t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. Buradan (4.3) denklem sistemi Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı yardımıyla;

$$\begin{aligned}
{}_{t}^{ABC}D_0^{\vartheta}S(t) &= -\rho_{SA}S(t)A(t) - \alpha S(t)I(t) + \gamma R(t)\\
{}_{t}^{ABC}D_0^{\vartheta}I(t) &= \alpha S(t)I(t) - \rho_{IA}A(t)I(t) - \sigma I(t)\\
{}_{t}^{ABC}D_0^{\vartheta}R(t) &= \sigma I(t) - \gamma R(t)\\
{}_{t}^{ABC}D_0^{\vartheta}A(t) &= \rho_{SA}S(t)A(t) + \rho_{IA}A(t)I(t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.. (4.4) denklem sistemi için başlangıç koşulları;
$S(0) = c_0$, $I(0) = c_1$, $R(0) = c_2$, $A(0) = c_3$ olsun. Mevcut çalışmada ağın toplam nüfusu $P = S + I + R + A$ sabit olmalıdır. Banach uzayında $R \to R$ aralığında tanımlanmış sürekli bir F fonksiyonu T normu ile $||S|| = sup\{|S(t)| : t \in T\}, ||I|| = sup\{|I(t)| : t \in T\}, ||R|| = sup\{|R(t)| : t \in T\}, ||A|| = sup\{|A(t)| : t \in T\}$ olmak üzere;
$||(S, I, R, A)|| = ||S|| + ||I|| + ||R|| + ||A||$ şeklindedir.
Özellikle $F = C(T) \times C(T)\ C(T)$ Banach uzayında R de tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olmak üzere T supremum norma sahiptir.

4.3. SIRA Modelinin Varlık ve Teklik Çözümleri

Sabit nokta teoremi ile (4.4) sisteminin varlığı incelenecektir.Bunun için 4.4 sistemi Atangana-Baleanu integral operatörü yardımıyla;

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0) +_t^{ABC} I_0^{\vartheta}\{ -\rho_{SA}S(t)A(t) - \alpha S(t)I(t) + \gamma R(t)\},\\
I(t) &= I(0) +_t^{ABC} I_0^{\vartheta}\{\alpha S(t)I(t) - \rho_{IA}A(t)I(t) - \sigma I(t)\},\\
R(t) &= R(0) +_t^{ABC} I_0^{\vartheta}\{\sigma I(t) - \gamma R(t)\},\\
A(t) &= A(0) +_t^{ABC} I_0^{\vartheta}\{\rho_{SA}S(t)A(t) + \rho_{IA}A(t)I(t)\},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde ifade adilir. (4.5) sistemi Atangana-Baleanu integral operatörü yardımıyla düzenlenirse;

$$
\begin{aligned}
S(t)-S(0)=&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\{-\rho_{SA}S(t)A(t)-\alpha S(t)I(t)+\gamma R(t)\}\\
&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\{-\rho_{SA}S(\tau)A(\tau)\\
&-\alpha S(\tau)I(\tau)+\gamma R(\tau)\}d(\tau)\\
I(t)-I(0)=&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\{\alpha S(t)I(t)-\rho_{IA}A(t)I(t)-\sigma I(t)\}\\
&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\{\alpha S(\tau)I(\tau)\\
&-\rho_{IA}A(\tau)I(\tau)-\sigma I(\tau)\}d(\tau)\\
R(t)-R(0)=&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\{\sigma I(t)-\gamma R(t)\}\\
&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\{\sigma I(t)-\gamma R(t)\}d(\tau)\\
A(t)-A(0)=&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\{\rho_{SA}S(t)A(t)+\rho_{IA}A(t)I(t)\}\\
&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\{\rho_{SA}S(\tau)A(\tau)\\
&+\rho_{IA}A(\tau)I(\tau)\}d(\tau)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

elde edilir. Kolaylık sağlaması açısından

$$
\begin{aligned}
\kappa_1(t,S)&=-\rho_{SA}S(t)A(t)-\alpha S(t)I(t)+\gamma R(t)\\
\kappa_2(t,I)&=\alpha S(t)I(t)-\rho_{IA}A(t)I(t)-\sigma I(t)\\
\kappa_3(t,R)&=\sigma I(t)-\gamma R(t)\\
\kappa_4(t,A)&=\rho_{SA}S(t)A(t)+\rho_{IA}A(t)I(t)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

notasyonları kullanılacaktır ve

$$
\begin{aligned}
\zeta_1&=\rho_{SA}\Theta_1+\alpha\Theta_2,\\
\zeta_2&=\alpha\Theta_3+\rho_{IA}\Theta_1+\sigma,\\
\zeta_3&=\gamma,\\
\zeta_4&=\rho_{SA}\Theta_3+\rho_{IA}\Theta_2.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

alınacaktır. Yukarıdaki eşitliklerin doğruluğunu ispatlamak için $S_1(t), S_2(t), I_1(t), I_2(t), R_1(t),$

$R_2(t), A_1(t), A_2(t) \in L[0,1]$, H'de sürekli olmak üzere $||S(t)|| \leq \Theta_3, ||I(t)|| \leq \Theta_2, ||R(t)|| \leq \Theta_4, ||A(t)|| \leq \Theta_1$ olarak alınsın.

Teorem 4.1 *Aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması durumunda (4.7) sistemindeki* $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ *çekirdekleri Lipchitz koşulunu sağlar. Buradan*

$$\begin{aligned} &0 \leq \rho_{SA}\Theta_1 + \alpha\Theta_2 < 1 \\ &0 \leq \alpha\Theta_3 + \rho_{IA}\Theta_1 + \sigma < 1 \\ &0 \leq \gamma < 1 \\ &0 \leq \rho_{SA}\Theta_3 + \rho_{IA}\Theta_2 < 1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

dır.

İspat Öncelikle κ_1 çekirdeğinin varlığı incelenirse: S_1 ve S_2 iki fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} ||\kappa_1(t,S_1) - \kappa_1(t,S_2)|| =&|| - \rho_{SA}\{S_1(t) - S_2(t)\}A(t) \\ &- \alpha\{S_1(t) - S_2(t)\}I(t)|| \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) denkleminde üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} ||\kappa_1(t,S_1) - \kappa_1(t,S_2)|| &\leq ||\rho_{SA}\{S_1(t) - S_2(t)\}A(t)|| + ||\alpha\{S_1(t) - S_2(t)\}I(t)|| \\ &\leq \{\rho_{SA}||A(t)|| + \alpha||I(t)||\}||S_1(t) - S_2(t)|| \\ &\leq \{\rho_{SA}\Theta_1 + \alpha\Theta_2\}||S_1(t) - S_2(t)|| \\ &= \zeta_1||S_1(t) - S_2(t)|| \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Yani, κ_1 bir daralmaya sahiptir. Yani Lipschitz koşulunu sağlar.

İkinci olarak κ_2 çekirdeğinin varlığı incelenirse: I_1 ve I_2 iki fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} ||\kappa_2(t,I_1) - \kappa_2(t,I_2)|| =&||\alpha S(t)\{I_1(t) - I_2(t)\} \\ &- \rho_{IA}A(t)\{I_1(t) - I_2(t)\} - \sigma\{I_1(t) - I_2(t)\}|| \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) denkleminde üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
||\kappa_2(t,I_1)-\kappa_2(t,I_2)|| &\leq ||\alpha S(t)\{I_1(t)-I_2(t)\}|| \\
&\quad + ||\rho_{IA}A(t)\{I_1(t)-I_2(t)\}|| \\
&\quad + ||\sigma\{I_1(t)-I_2(t)\}|| \\
&\leq \{\alpha||S(t)||+\rho_{IA}||A(t)||+\sigma\} \\
&\quad \times ||\{I_1(t)-I_2(t)\}|| \\
&\leq \{\alpha\Theta_3+\rho_{IA}\Theta_1+\sigma\}||I_1(t)-I_2(t)|| \\
&= \zeta_2||I_1(t)-I_2(t)||
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

elde edilir. Yani, κ_2 bir daralmaya sahiptir. Yani Lipschitz koşulunu sağlar.

Üçüncü olarak κ_3 çekirdeğinin varlığı incelenirse: R_1 ve R_2 iki fonksiyon olmak üzere;

$$
||\kappa_3(t,R_1)-\kappa_3(t,R_2)|| = ||-\gamma\{R_1(t)-R_2(t)\}|| \tag{4.14}
$$

elde edilir. (4.14) denkleminde üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
||\kappa_3(t,R_1)-\kappa_3(t,R_2)|| &\leq ||\gamma\{R_1(t)-R_2(t)\}|| \\
&\leq \gamma||R_1(t)-R_2(t)|| \\
&= \zeta_3||R_1(t)-R_2(t)||
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

elde edilir. Yani, κ_3 bir daralmaya sahiptir. Yani Lipschitz koşulunu sağlar.

Son olarak κ_4 çekirdeğinin varlığı incelenirse: A_1 ve A_2 iki fonksiyon olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
||\kappa_4(t,A_1)-\kappa_4(t,A_2)|| =& ||\rho_{SA}S(t)\{A_1(t)-A_2(t)\} \\
&+ \rho_{IA}I(t)\{A_1(t)-A_2(t)\}||
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

elde edilir. (4.16) denkleminde üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
||\kappa_4(t,A_1)-\kappa_4(t,A_2)|| &\leq ||\rho_{SA}S(t)\{A_1(t)-A_2(t)\}|| \\
&\quad + ||\rho_{IA}I(t)\{A_1(t)-A_2(t)\}|| \\
&\leq \{\rho_{SA}||S(t)||+\rho_{IA}||I(t)||\}||A_1(t)-A_2(t)|| \\
&\leq \{\rho_{SA}\Theta_3+\rho_{IA}\Theta_2\}||A_1(t)-A_2(t)|| \\
&= \zeta_4||A_1(t)-A_2(t)||
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

elde edilir. Yani, κ_4 bir daralmaya sahiptir. Yani Lipschitz koşulunu sağlar. Böylelikle teorem ispatlanmış olur.

(4.6) denklem sistemde tüm başlangıç değerleri sıfır kabul edersek,

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_1(t,S) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_1(\tau,S)d(\tau) \\
I(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_2(t,I) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_2(\tau,I)d(\tau) \\
R(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_3(t,R) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_3(\tau,R)d(\tau) \\
A(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_4(t,A) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_4(\tau,A)d(\tau)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

elde edilir. Daha sonra, tümevarım metodu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
S_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_1(t,S_{n-1}) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_1(\tau,S_{n-1})d(\tau) \\
I_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_2(t,I_{n-1}) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_2(\tau,I_{n-1})d(\tau) \\
R_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_3(t,R_{n-1}) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_3(\tau,R_{n-1})d(\tau) \\
A_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_4(t,A_{n-1}) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_4(\tau,A_{n-1})d(\tau)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

elde edilir. Birbirini izleyen terimler arasındaki farklar,

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t)-S_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_1(t,S_n)-\kappa_1(t,S_{n-1}) \\
&+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
&\times (\kappa_1(\tau,S_n)-\kappa_1(\tau,S_{n-1}))d(\tau) \\
I_{n+1}(t)-I_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_2(t,I_n)-\kappa_2(t,I_{n-1})) \\
&+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
&\times (\kappa_2(\tau,I_n)-\kappa_2(\tau,I_{n-1}))d(\tau) \\
R_{n+1}(t)-R_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_3(t,R_n)-\kappa_3(t,R_{n-1})) \\
&+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
&\times (\kappa_3(\tau,R_n)-\kappa_3(\tau,R_{n-1}))d(\tau) \\
A_{n+1}(t)-A_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_4(t,A_n)-\kappa_4(t,A_{n-1})) \\
&+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
&\times (\kappa_4(\tau,A_n)-\kappa_4(\tau,A_{n-1}))d(\tau)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.20) denklem sisteminin normu alınırsa;

$$\begin{aligned}
||S_{n+1}(t)-S_n(t)|| &= \Bigg|\Bigg|\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_1(t,S_n)-\kappa_1(t,S_{n-1}) \\
&+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
&\times (\kappa_1(\tau,S_n)-\kappa_1(\tau,S_{n-1}))d(\tau)\Bigg|\Bigg| \\
&\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} \\
&\times ||\kappa_1(t,S_n)-\kappa_1(t,S_{n-1})|| \\
&+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\Bigg|\Bigg|\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
&\times (\kappa_1(\tau,S_n)-\kappa_1(\tau,S_{n-1}))d(\tau)\Bigg|\Bigg|
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Çekirdek Lipschitz koşulunu sağladığından aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
||S_{n+1}(t) - S_n(t)|| \leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_1 ||S_n - S_{n-1}|| \\
+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_1 \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} ||S_n - S_{n-1}|| d(\tau)
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

İkinci olarak,

$$
\begin{aligned}
||I_{n+1}(t) - I_n(t)|| = & \left|\left| \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_2(t, I_n) - \kappa_2(t, I_{n-1}) \right.\right. \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
& \left.\left. \times (\kappa_2(\tau, I_n) - \kappa_2(\tau, I_{n-1}))d(\tau) \right|\right| \\
\leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} ||\kappa_2(t, I_n) - \kappa_2(t, I_{n-1})|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \left|\left| \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} (\kappa_2(\tau, I_n) \right.\right. \\
& \left.\left. - \kappa_2(\tau, I_{n-1}))d(\tau) \right|\right|
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Çekirdek Lipschitz koşulunu sağladığından aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
||I_{n+1}(t) - I_n(t)|| \leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2 ||I_n - I_{n-1}|| \\
+ \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2 \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} ||I_n - I_{n-1}|| d(\tau)
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Üçüncü olarak,

$$
\begin{aligned}
||R_{n+1}(t) - R_n(t)|| = & \left|\left| \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_3(t, R_n) - \kappa_3(t, R_{n-1}) \right.\right. \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\
& \left.\left. \times (\kappa_3(\tau, R_n) - \kappa_3(\tau, R_{n-1}))d(\tau) \right|\right| \\
\leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} ||\kappa_3(t, R_n) - \kappa_3(t, R_{n-1})|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \left|\left| \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \right.\right. \\
& \left.\left. \times (\kappa_3(\tau, R_n) - \kappa_3(\tau, R_{n-1}))d(\tau) \right|\right|
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

dır. Çekirdek Lipschitz koşulunu sağladığından aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} ||R_{n+1}(t) - R_n(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3||R_n - R_{n-1}|| \\ & + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3 \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}||R_n - R_{n-1}||d(\tau) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Son olarak,

$$\begin{aligned} ||A_{n+1}(t) - A_n(t)|| = & \left|\left|\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_4(t, A_n) - \kappa_4(t, A_{n-1})\right.\right. \\ & + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\ & \left.\left.\times (\kappa_4(\tau, A_n) - \kappa_4(\tau, A_{n-1}))d(\tau)\right|\right| \\ \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_4(t, A_n) - \kappa_4(t, A_{n-1})|| \\ & + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\left|\left| \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\right.\right. \\ & \left.\left.\times (\kappa_4(\tau, A_n) - \kappa_4(\tau, A_{n-1}))d(\tau)\right|\right| \end{aligned} \tag{4.27}$$

Çekirdek Lipschitz koşulunu sağladığından aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} ||A_{n+1}(t) - A_n(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4||A_n - A_{n-1}|| \\ & + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4 \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}||A_n - A_{n-1}||d(\tau) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Yukarıdaki sonuç dikkate alındığında, aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.2 *Bilgisayar virüsleri için fraksiyonel epidemiyolojik model (4.4) aşağıdaki şartlar altında kesin çözümlere sahiptir.*

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_1 + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_1 t_0 < 1 \\ \Delta_2 &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2 + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2 t_0 < 1 \\ \Delta_3 &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3 + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3 t_0 < 1 \\ \Delta_4 &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4 + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4 t_0 < 1 \end{aligned} \tag{4.29}$$

İspat Aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım.

$$\begin{cases} S_{n+1}(t) - S(t) = K_n(t) \\ I_{n+1}(t) - I(t) = L_n(t) \\ R_{n+1}(t) - R(t) = M_n(t) \\ A_{n+1}(t) - A(t) = N_n(t) \end{cases} \tag{4.30}$$

$K_n(t)$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} ||K_n(t)|| &= \bigg|\bigg| \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_1(t, S_{n-1}) - \kappa_1(t, S) \\ &\quad + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}(\kappa_1(\tau, S_{n-1}) - \kappa_1(\tau, S))d(\tau) \bigg|\bigg| \\ &\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} ||\kappa_1(t, S_{n-1}) - \kappa_1(t, S)|| \\ &\quad + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} ||\kappa_1(\tau, S_{n-1}) - \kappa_1(\tau, S)|| d(\tau) \\ &\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} \zeta_1 ||S_{n-1} - S|| + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \zeta_1 ||S_{n-1} - S|| t \end{aligned} \tag{4.31}$$

Bu işlemler tekrarlanırsa(genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$||K_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} t \right)^n \zeta_1^n \tag{4.32}$$

Burda $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$||K_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} t_0 \right)^n \zeta_1^n \tag{4.33}$$

(4.33) denkleminin limiti alınırsa $n \to \infty$ giderken $||K_n(t)|| \to 0$ olur.

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
||L_n(t)|| &= \left|\left|\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_2(t,I_{n-1})-\kappa_2(t,I)+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times(\kappa_2(\tau,I_{n-1})-\kappa_2(\tau,I))d(\tau)\right|\right|\\
&\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_2(t,I_{n-1})-\kappa_2(t,I)||+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\\
&\quad\times||\kappa_2(\tau,I_{n-1})-\kappa_2(\tau,I)||d(\tau)\\
&\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2||I_{n-1}-I||+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2||I_{n-1}-I||t
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Bu işlemler tekrarlanırsa(genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$
||L_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t\right)^n\zeta_2^n \tag{4.35}
$$

Burda $t=t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$
||L_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t_0\right)^n\zeta_2^n \tag{4.36}
$$

(4.36) denkleminin limiti alınırsa $n\to\infty$ giderken $||L_n(t)||\to 0$ olur.

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
||M_n(t)|| &= \left|\left|\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_3(t,R_{n-1})-\kappa_3(t,R)+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times(\kappa_3(\tau,R_{n-1})-\kappa_3(\tau,R))d(\tau)\right|\right|\\
&\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_3(t,R_{n-1})-\kappa_3(t,R)||+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}\\
&\quad\times||\kappa_3(\tau,R_{n-1})-\kappa_3(\tau,R)||d(\tau)\\
&\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3||R_{n-1}-R||+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3||R_{n-1}-R||t
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Bu işlemler tekrarlanırsa(genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$
||M_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t\right)^n\zeta_3^n \tag{4.38}
$$

Burda $t=t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$||M_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t_0\right)^n \zeta_3^n \tag{4.39}$$

(4.39) denkleminin limiti alınırsa $n \to \infty$ giderken $||M_n(t)|| \to 0$ olur.
Benzer şekilde

$$\begin{aligned} ||N_n(t)|| &= \left|\left|\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_4(t, A_{n-1}) - \kappa_4(t, A) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. \times (\kappa_4(\tau, A_{n-1}) - \kappa_4(\tau, A))d(\tau)\right|\right| \\ &\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_4(t, A_{n-1}) - \kappa_4(t, A)|| + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)} \\ &\quad \times ||\kappa_4(\tau, A_{n-1}) - \kappa_4(\tau, A)||d(\tau) \\ &\leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4||A_{n-1} - A|| + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4||A_{n-1} - A||t \end{aligned} \tag{4.40}$$

Bu işlemler tekrarlanırsa(genişletilirse) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$||N_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t\right)^n \zeta_4^n \tag{4.41}$$

Burda $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$||N_n(t)|| \leq \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t_0\right)^n \zeta_4^n \tag{4.42}$$

(4.42) denkleminin limiti alınırsa $n \to \infty$ giderken $||M_n(t)|| \to 0$ olur.
Buradan (4.4) denklem sisteminin varlığı ispatlanmış olur.

Şimdi (4.4) denklem sisteminin tekliğini ispatlayalım.
$S_1(t), I_1(t), R_1(t), A_1(t)$ (4.4) denklem sisteminin başka bir çözüm sistemi olmak üzere;

$$\begin{aligned} S(t) - S_1(t) &= \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_1(t, S) - \kappa_1(t, S_1) \\ &\quad + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}(\kappa_1(\tau, S) - \kappa_1(\tau, S_1))d(\tau) \end{aligned} \tag{4.43}$$

(4.43) denkleminin normu alınırsa,

$$||S(t)-S_1(t)|| \leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_1(t,S)-\kappa_1(t,S_1)|| \\ + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}||\kappa_1(\tau,S)-\kappa_1(\tau,S_1)||d(\tau) \tag{4.44}$$

olur. Çekirdeğin Lipschitz durumu kullanılarak

$$||S(t)-S_1(t)|| \leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_1||S(t)-S_1(t))|| \\ + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_1||S(t)-S_1(t))|| \tag{4.45}$$

yazılır. Bu da bize aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$||S(t)-S_1(t)||\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_1-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_1 t\right) \leq 0 \tag{4.46}$$

Benzer şekilde;

$$I(t)-I_1(t) = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_2(t,I)-\kappa_2(t,I_1)) \\ + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}(\kappa_2(\tau,I)-\kappa_2(\tau,I_1))d(\tau) \tag{4.47}$$

(4.47) denkleminin normu alınırsa,

$$||I(t)-I_1(t)|| \leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_2(t,I)-\kappa_2(t,I_1)|| \\ + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}||\kappa_2(\tau,I)-\kappa_2(\tau,I_1)||d(\tau) \tag{4.48}$$

Çekirdeğin Lipschitz durumu kullanılarak

$$||I(t)-I_1(t)|| \leq \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2||I(t)-I_1(t))|| + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2||I(t)-I_1(t))|| \tag{4.49}$$

yazılır. Bu da bize aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$||I(t)-I_1(t)||\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2 t\right)\leq 0 \tag{4.50}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}R(t)-R_1(t)=&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_3(t,R)-\kappa_3(t,R_1))\\&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}(\kappa_3(\tau,R)-\kappa_3(\tau,R_1))d(\tau)\end{aligned} \tag{4.51}$$

(4.51) denkleminin normu alınırsa,

$$\begin{aligned}||R(t)-R_1(t)||\leq&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_3(t,R)-\kappa_3(t,R_1)||\\&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}||\kappa_3(\tau,R)-\kappa_3(\tau,R_1)||d(\tau)\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Çekirdeğin Lipschitz durumu kullanılarak

$$\begin{aligned}||R(t)-R_1(t)||\leq&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3||R(t)-R_1(t))||\\&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3||R(t)-R_1(t))||\end{aligned} \tag{4.53}$$

yazılır. Bu da bize aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$||R(t)-R_1(t)||\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3 t\right)\leq 0 \tag{4.54}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}A(t)-A_1(t)=&\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}(\kappa_4(t,A)-\kappa_4(t,A_1))\\&+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t(t-\tau)^{(\vartheta-1)}(\kappa_4(\tau,A)-\kappa_4(\tau,A_1))d(\tau)\end{aligned} \tag{4.55}$$

(4.55) denkleminin normu alınırsa,

$$
\begin{aligned}
||A(t)-A_1(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_4(t,A)-\kappa_4(t,A_1)|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}||\kappa_4(\tau,A)-\kappa_4(\tau,A_1)||d(\tau)
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

Çekirdeğin Lipschitz durumu kullanılarak

$$
\begin{aligned}
||A(t)-A_1(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4||A(t)-A_1(t))|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4||A(t)-A_1(t))||
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

yazılır. Bu da bize aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$
||A(t)-A_1(t)||\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4 t\right) \leq 0 \tag{4.58}
$$

Teorem 4.3 *Aşağıdaki koşullar altında (4.4) sisteminin tek çözümü vardır.*

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_1-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_1 t\right) > 0 \\
\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2 t\right) > 0 \\
\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3 t\right) > 0 \\
\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4 t\right) > 0
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

İspat: *(4.59) sağlansın. (4.46) eşitsizliğinden*

$$
||S(t)-S_1(t)||\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_1-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_1 t\right) \leq 0
$$

olduğundan $||S(t)-S_1(t)||=0$ *olup* $S(t)=S_1(t)$ *olur.*

Benzer şekilde (4.50) eşitsizliğinden,

$$
||I(t)-I_1(t)||\left(1-\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_2-\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_2 t\right) \leq 0
$$

olduğundan $||I(t) - I_1(t)|| = 0$ *olup* $I(t) = I_I(t)$ *olur.*

Benzer şekilde (4.54) eşitsizliğinden,

$$||R(t) - R_1(t)||\left(1 - \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_3 - \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_3 t\right) \leq 0$$

olduğundan $||R(t) - R_1(t)|| = 0$ *olup* $R(t) = R_1(t)$ *olur.*

Son olarak (4.58) eşitsizliğinden

$$||A(t) - A_1(t)||\left(1 - \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\zeta_4 - \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\zeta_4 t\right) \leq 0$$

olduğundan $||A(t) - A_1(t)|| = 0$ *olup* $A(t) = A_1(t)$ *olur.*

Bu da bize (4.4) denklem sisteminin çözümün tekliğini gösterir.

4.4. SIRA Modelinin Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

Bu bölümde bilgisayar virüsleri için epidemiyolojik matematiksel modelin kararlılığı incelenecektir. Öncelikle aşağıdaki tanım verilsin.

Tanım 4.1 *(4.20) sistemi* $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ *ve* $\varphi_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ *sabitleri varsa sistem Hyers Ulam a göre kararlıdır.*

$$
\begin{aligned}
&|S(t) - \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_1(t, S(t)) - \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_1(\tau, S(\tau))d\tau| < \varphi_1, \\
&|I(t) - \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_2(t, I(t)) - \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_2(\tau, I(\tau))d\tau| < \varphi_2, \\
&|R(t) - \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_3(t, R(t)) - \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_3(\tau, R(\tau))d\tau| < \varphi_3, \\
&|A(t) - \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_4(t, A(t)) - \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_4(\tau, A(\tau))d\tau| < \varphi_4,
\end{aligned} \tag{4.60}
$$

$\overline{S}(t)$, $\overline{I}(t)$, $\overline{R}(t)$, $\overline{A}(t)$ vardır öyleki;

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(t) =& \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_1(t, \overline{S}(t)) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_1(\tau, \overline{S}(\tau))d\tau, \\
\overline{I}(t) =& \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_2(t, \overline{I}(t)) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_2(\tau, \overline{I}(\tau))d\tau, \\
\overline{R}(t) =& \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_3(t, \overline{R}(t)) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_3(\tau, \overline{R}(\tau))d\tau, \\
\overline{A}(t) =& \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}\kappa_4(t, \overline{A}(t)) + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \\
&\times \int_0^t (t-\tau)^{(\vartheta-1)}\kappa_4(\tau, \overline{A}(\tau))d\tau,
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

Teorem 4.4 *(4.4) sistemi H varsayımı ile Hyers-Ulam a göre kararlıdır.*

İspat Teorem (4.3) da $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, $A(t)$ nin tek çözümü olduğu gösterilmiştir. Şimdi $\overline{S}(t)$, $\overline{I}(t)$, $\overline{R}(t)$, $\overline{A}(t)$ (4.3) sisteminin bir çözümü olmak üzere; (4.18) denklem sistemini sağlar. Buradan;

$$
\begin{aligned}
||S(t)-\overline{S}(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_1(t,S(t))-\kappa_1(t,\overline{S}(t))|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}||\kappa_1(\tau,S(\tau))-\kappa_1(\tau,\overline{S}(\tau))||d\tau \\
\leq & \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t\right)\zeta_1||S-\overline{S}||
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Burada $\varphi_1=\zeta_1$ ve $\Delta_1=\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t$ alınırsa;

$$
||S(t)-\overline{S}(t)|| \leq \varphi_1\Delta_1
$$

yazılabilir. (Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki $||S(t)-\overline{S}(t)||$ çok küçük bir sayı olduğundan ihmal edilmiştir yani yazılmamıştır.) Benzer şekilde;

$$
\begin{aligned}
||I(t)-\overline{I}(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_2(t,I(t))-\kappa_2(t,\overline{I}(t))|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}||\kappa_2(\tau,I(\tau))-\kappa_2(\tau,\overline{I}(\tau))||d\tau \\
\leq & \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t\right)\zeta_2||I-\overline{I}||
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

Burada $\varphi_2=\zeta_2$ ve $\Delta_2=\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t$ alınırsa;

$$
||I(t)-\overline{I}(t)|| \leq \varphi_2\Delta_2
$$

yazılabilir. (Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki $||I(t)-\overline{I}(t)||$ çok küçük bir sayı olduğundan ihmal edilmiştir yani yazılmamıştır.)

Benzer şekilde;

$$
\begin{aligned}
||R(t)-\overline{R}(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}||\kappa_3(t,R(t))-\kappa_3(t,\overline{R}(t))|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1} \\
& \times ||\kappa_3(\tau,R(\tau))-\kappa_3(\tau,\overline{R}(\tau))||d\tau \\
\leq & \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t\right)\zeta_3||R-\overline{R}||
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Burada $\varphi_3=\zeta_3$ ve $\Delta_3=\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}t$ alınırsa;

$$||R(t) - \overline{R}(t)|| \leq \varphi_3 \Delta_3$$

yazılabilir. (Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki $||R(t) - \overline{R}(t)||$ çok küçük bir sayı olduğundan ihmal edilmiştir yani yazılmamıştır.)
Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
||A(t) - \overline{A}(t)|| \leq & \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} \\
& \times ||\kappa_4(t, A(t)) - \kappa_4(t, \overline{A}(t))|| \\
& + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1} \\
& \times ||\kappa_4(\tau, A(\tau)) - \kappa_4(\tau, \overline{A}(\tau))|| d\tau \\
\leq & \left(\frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} t \right) \zeta_4 ||A - \overline{A}||
\end{aligned} \tag{4.65}$$

olur. Burada $\varphi_4 = \zeta_4$ ve $\Delta_4 = \frac{1-\vartheta}{B(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{B(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} t$ alınırsa;

$$||A(t) - \overline{A}(t)|| \leq \varphi_4 \Delta_4$$

olur.(Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki $||A(t) - \overline{A}(t)||$ çok küçük bir sayı olduğundan ihmal edilmiştir yani yazılmamıştır.) Böylece, teorem kanıtlanmış olur. Yani (4.4) denklem sistemi Hyers Ulam a göre kararlıdır.

4.5. Nümerik Çözüm Yöntemi

Atangana ve Owolabi (2018) kesirli diferansiyel denklemlerin ayrılması için yeni Caputo kesirli türevini kullanarak yeni bir sayısal yaklaşım bulmuşlardır. Öncelikle aşağıdaki diferansiyel denklem düşünülmüştür.

$${}_0^{ABC}\mathfrak{D}_t^{\vartheta} x(t) = (f(t, x(t))), \tag{4.66}$$

Analizin temel teoremi kullanarak yukarıdaki denklem düzenlenirse,

$$x(t) - x(0) = \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} f(t, x(t)) + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \tag{4.67}$$

olur. Sonuç olarak,

$$x(t_{n+1}) - x(0) = \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} f(t_n, x_n) + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \times \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1} f(t, x(t)) dt, \tag{4.68}$$

ve t_n için;

$$x(t_n) - x(0) = \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} f(t_{n-1}, x_{n-1}) + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \times \int_0^{t_n} (t_n-t)^{\vartheta-1} f(t, x(t)) dt, \tag{4.69}$$

dir. (4.68) ve (4.69) denklem sistemlerinden

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) = & \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} \{f(t_n, x_n) - f(t_{n-1}, x_{n-1})\} \\ & + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1} f(t, x(t)) dt \\ & - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \int_0^{t_n} (t_n-t)^{\vartheta-1} f(t, x(t)) dt \end{aligned} \tag{4.70}$$

yazılır. Böylece,

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} \{f(t_n, x_n) - f(t_{n-1}, x_{n-1})\} + A_{\vartheta,1} - A_{\vartheta,2} \tag{4.71}$$

genelliğini kaybetmeden,

$$\begin{aligned} A_{\vartheta,1} = & \frac{\vartheta f(t_n, x_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} \right\} \\ & - \frac{\vartheta f(t_{n-1}, x_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h} \left\{ \frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} \right\} \end{aligned} \tag{4.72}$$

yazılır ve benzer şekilde,

$$A_{\vartheta,2} = \frac{\vartheta f(t_n, x_n)}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left\{\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right\} - \frac{f(t_{n-1}, x_{n-1})}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h} \tag{4.73}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)&\left\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h}\left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right. \\ &\left. - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right\} + f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ &\times\left\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)} - \frac{\vartheta}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{t^{\vartheta+1}}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.74}$$

dır.

Yukarıdaki denkleme, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi için iki aşamalı Adams-Bashforth şeması denir.

Teorem 4.5 *$x(t)$ aşağıdaki denklemin çözümü olmak üzere;*

$${}_0^{ABC}D_t^{\vartheta}x(t) = f(t, x(t)), \tag{4.75}$$

f fonksiyonu sürekli ve sınırlıdır, $x(t)$ sayısal çözümü ise;

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)&\left\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h}\left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right. \\ &\left. - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right\} + f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ &\times\left\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)} - \frac{\vartheta}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{t^{\vartheta+1}}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right]\right\} + R_{\vartheta} \end{aligned} \tag{4.76}$$

şeklindedir. Buradan $||R_{\vartheta}||_{\infty} < M$ olur.

4.5.1. SIRA Modelinin Nümerik Çözümü

Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi ile bilgisayar virüsleri için genişletilmiş epidemiyolojik matematiksel model (4.4) sisteminde tanıtılmıştır. Sistem (4.5) temel analiz teoremi ile yeniden düzenlendiğinde, $\kappa_i, i = 1, 2, 3, 4$ çekirdekleri için bir sonraki denklem sistemi;

$$\begin{aligned}
S(t) - S(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_1(t, S(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}\kappa_1(\tau, S(\tau))d\tau, \\
I(t) - I(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_2(t, I(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}\kappa_2(\tau, I(\tau))d\tau, \\
R(t) - R(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_3(t, R(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}\kappa_3(\rho, R(\tau))d\tau, \\
A(t) - A(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_4(t, A(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^t (t-\tau)^{\vartheta-1}\kappa_4(\tau, A(\tau))d\tau.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) - S(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_1(t_n, S_n(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_1(t, S(t))dt, \\
I_{n+1}(t) - I(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_2(t_n, I_n(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_2(t, I(t))dt, \\
R_{n+1}(t) - R(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_3(t_n, R_n(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_3(t, R(t))dt, \\
A_{n+1}(t) - A(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_4(t_n, A_n(t)) \\
&\quad + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_4(t, A(t))dt.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

ve t_n için

$$\begin{aligned}
S_n(t) - S(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_1(t_{n-1}, S_{n-1}(t)) \\
&+ \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n - t)^{\vartheta-1}\kappa_1(t, S(t))dt, \\
I_n(t) - I(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_2(t_{n-1}, I_{n-1}(t)) \\
&+ \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n - t)^{\vartheta-1}\kappa_2(t, I(t))dt, \\
R_n(t) - R(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_3(t_{n-1}, R_{n-1}(t)) \\
&+ \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n - t)^{\vartheta-1}\kappa_3(t, R(t))dt, \\
A_n(t) - A(0) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\kappa_4(t_{n-1}, I_{n-1}(t)) \\
&+ \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n - t)^{\vartheta-1}\kappa_4(t, A(t))dt,
\end{aligned} \tag{4.79}$$

olur. (4.78) ve (4.79)' denklem sistemlerinden,

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}(t)-S_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{\kappa_1(t_n,S_n(t))-\kappa_1(t_{n-1},S_{n-1}(t))\}\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_1(t,S(t))dt,\\
&-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}\kappa_1(t,S(t))dt,\\
I_{n+1}(t)-I_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{\kappa_2(t_n,I_n(t))-\kappa_2(t_{n-1},I_{n-1}(t))\}\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_2(t,I(t))dt,\\
&-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}\kappa_2(t,I(t))dt,\\
R_{n+1}(t)-R_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{\kappa_3(t_n,R_n(t))-\kappa_3(t_{n-1},R_{n-1}(t))\}\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_3(t,R(t))dt,\\
&-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}\kappa_3(t,R(t))dt,\\
A_{n+1}(t)-A_n(t) &= \frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}\{\kappa_4(t_n,A_n(t))-\kappa_4(t_{n-1},A_{n-1}(t))\}\\
&+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_{n+1}}(t_{n+1}-t)^{\vartheta-1}\kappa_4(t,A(t))dt,\\
&-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\int_0^{t_n}(t_n-t)^{\vartheta-1}\kappa_4(t,A(t))dt,
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

olur.

Teorem (4.5) e göre;

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n &+ \kappa_1(t_n,S_n(t))\left\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)}+\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h}\right.\\
&\times\left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]-\frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left.\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\right\}\\
&+\kappa_1(t_{n-1},S_{n-1}(t))\left\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)}-\frac{\vartheta}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right.\\
&\times\left.\left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta}-\frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}+\frac{t^{\vartheta+1}}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right]\right\}+{}^1\mathfrak{R}_{\vartheta}.
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

yazılır. Buradan $||^1\mathfrak{R}_{\vartheta}||_{\infty} < M$ olur.

Benzer şekilde,

$$I_{n+1} = I_n + \kappa_2(t_n, I_n(t))\Bigg\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h} \times \left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right] - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\Bigg\} + \kappa_2(t_{n-1}, I_{n-1}(t))\Bigg\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)} - \frac{\vartheta}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \times \left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} + \frac{t^{\vartheta+1}}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right]\Bigg\} + {}^2\mathfrak{R}_{\vartheta} \tag{4.82}$$

yazılır. Buradan $||{}^2\mathfrak{R}_{\vartheta}||_{\infty} < M$ dir.

Benzer şekilde,

$$R_{n+1} = R_n + \kappa_3(t_n, R_n(t))\Bigg\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h} \times \left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right] - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\Bigg\} \times +\kappa_3(t_{n-1}, R_{n-1}(t))\Bigg\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)} - \frac{\vartheta}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \times \left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} + \frac{t^{\vartheta+1}}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right]\Bigg\} + {}^3\mathfrak{R}_{\vartheta} \tag{4.83}$$

olup $||{}^3\mathfrak{R}_{\vartheta}||_{\infty} < M$ yazılabilir.

Son olarak;

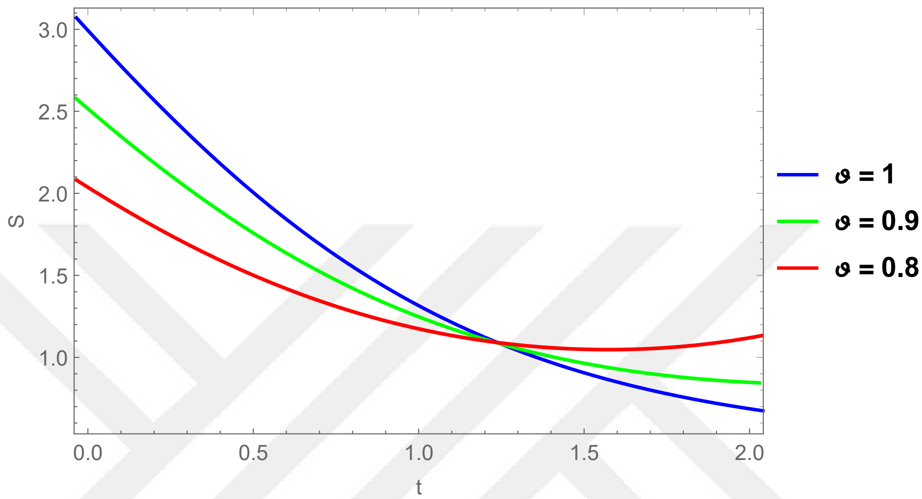
$$A_{n+1} = A_n + \kappa_4(t_n, A_n(t))\Bigg\{\frac{1-\vartheta}{ABC(\vartheta)} + \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)h} \times \left[\frac{2ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right] - \frac{\vartheta}{ABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)h}\left[\frac{ht_n^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_n^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}\right]\Bigg\} + \kappa_4(t_{n-1}, A_{n-1}(t))\Bigg\{\frac{\vartheta-1}{ABC(\vartheta)} - \frac{\vartheta}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)} \times \left[\frac{ht_{n+1}^{\vartheta}}{\vartheta} - \frac{t_{n+1}^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} + \frac{t^{\vartheta+1}}{hABC(\vartheta)\Gamma(\vartheta)}\right]\Bigg\} + {}^4\mathfrak{R}_{\vartheta} \tag{4.84}$$

olup $||{}^4\mathfrak{R}_{\vartheta}||_{\infty} < M$ dir.

(4.4) sistemin sayısal simülasyonları aşağıdaki her fonksiyon için gerçekleştirilmiştir. Modelin davranışı, farklı ϑ değerlerine sahip kesirli sıra türevi kullanılarak ayrıntılı olarak analiz edilir. Simülasyonda kullanılan parametreler $\rho_{SA} = 0.025, \alpha = 0.1, \gamma = 0.8$, $\rho_{IA} = 0.25, \sigma = 0.005$ olup $S(0) = 3, I(0) = 100, R(0) = 0, A(0) = 0$ başlangıç koşulları kullanılmıştır.

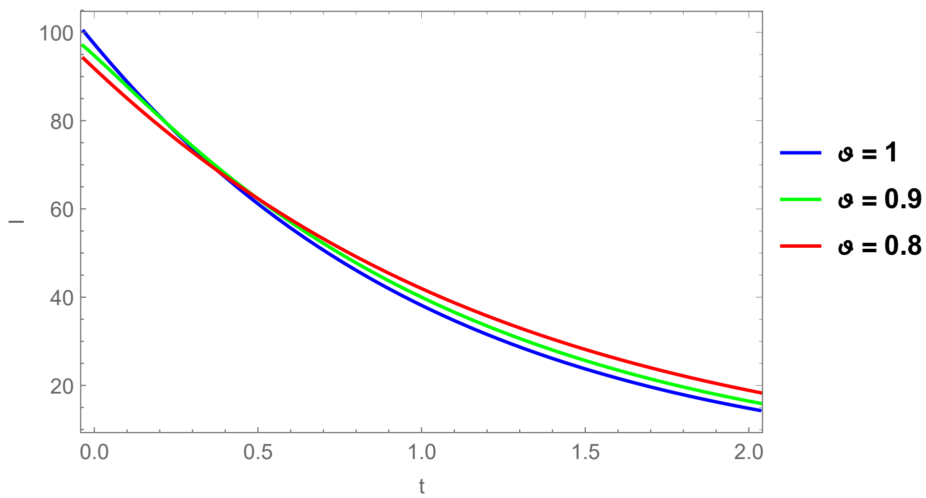
Şekil (4.1)-(4.4)'teki verilen sayısal sonuçlar, (4.4) denklem sisteminin ϑ nın farklı değerleri için modelin spesifik çözümünün sayısal simülasyonlarını göstermektedir.

Sayısal sonuçlar yinelemeli pertürbasyon yöntemi ile elde edilmiştir. Şekil (4.5) ve (4.6), ϑ=1 ve $\vartheta = 0.90$ değerleri için kendi aralarında S, I, R ve A varyasyonlarını da gösterir. Ayrıntılı bir analizden sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



Şekil 4.1. S **ile verilen epidemiyolojik modelin** ϑ**'nın farklı değerleri için simülasyonu**

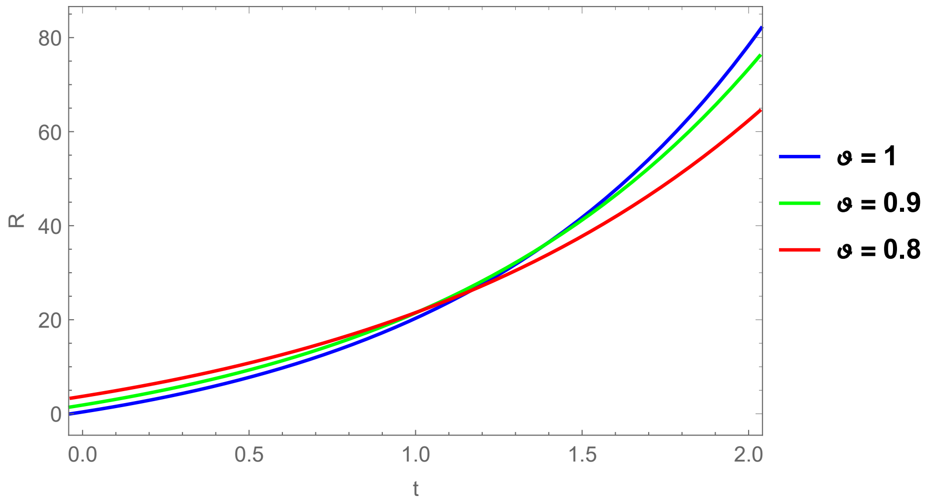
Şekil (4.1), her $\vartheta-$ değeri için S bulaşma olasılığı olan enfekte olmamış bir grup bilgisayarın azaldığını göstermektedir. Bununla birlikte, belirli bir t değerinden sonra, indirgeme katsayıları arasında ters orantı olduğu gözlenmiştir.



Şekil 4.2. I **ile verilen epidemiyolojik modelin** ϑ**'nın farklı değerleri için simülasyonu**

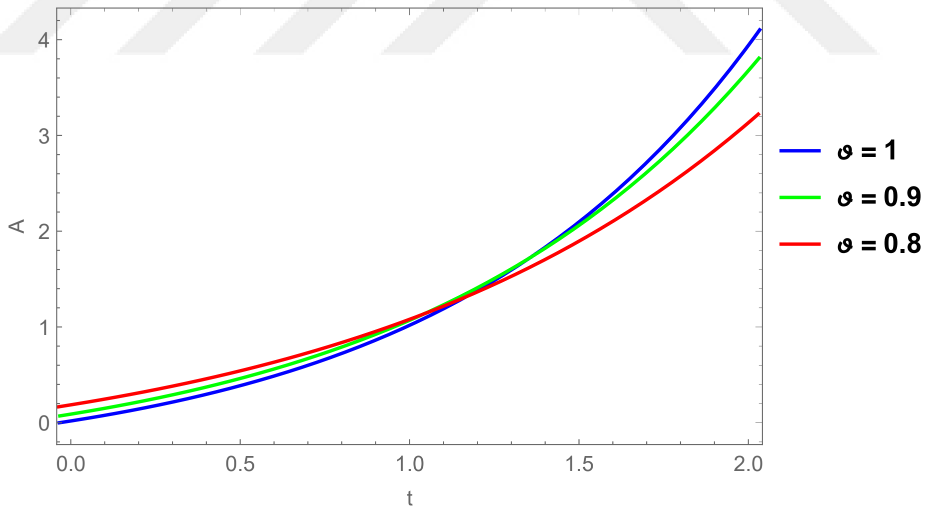
Şekil (4.2)'den, virüslü bilgisayarların I grubunun her $\vartheta-$ değeri için azaldığı görülebilir.

Bununla birlikte, belirli bir t değerinden sonra azalma katsayıları arasında küçük bir ters oranın olduğu gözlenmiştir.



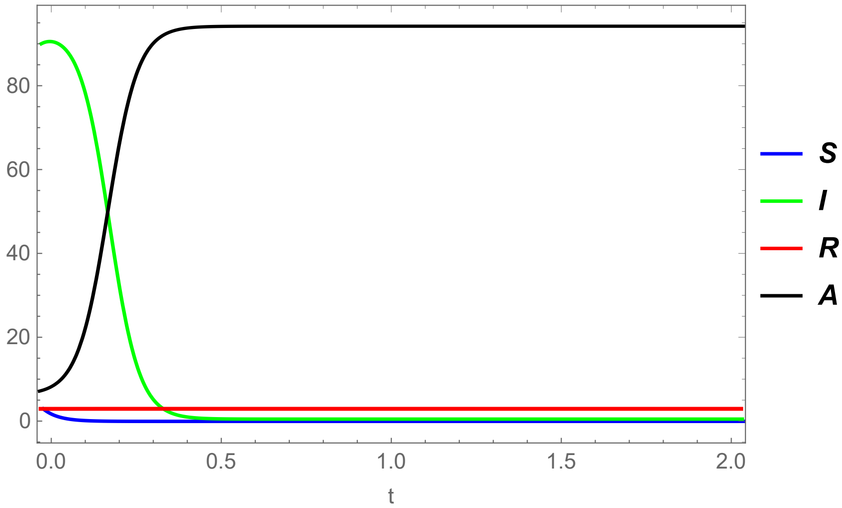
Şekil 4.3. R **ile verilen epidemiyolojik modelin** ϑ**'nın farklı değerleri için simülasyonu**

Şekil (4.3)'te R grubuna ait virüsten kurtarılan bilgisayar sayısının her ϑ değeri için arttığı görülebilir. Ancak, belirli bir t değerinden sonra artış katsayıları arasında ters orantı olduğu gözlenmiştir.

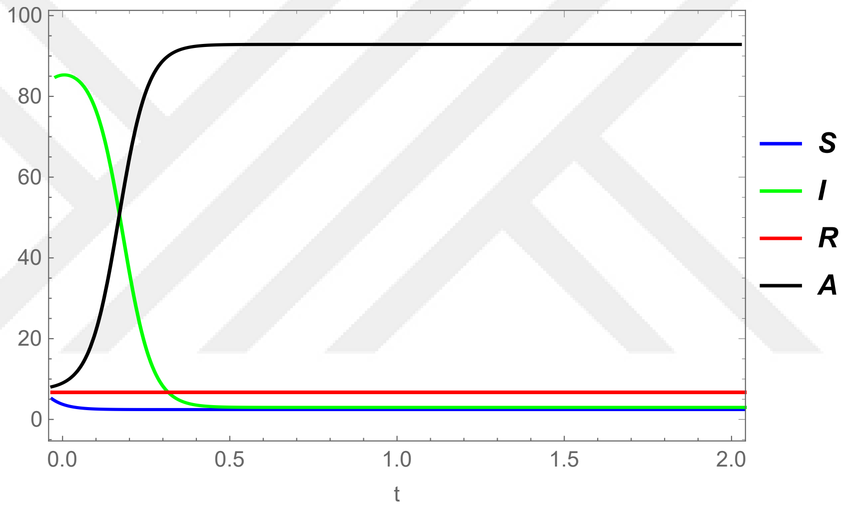


Şekil 4.4. A **ile verilen epidemiyolojik modelin** ϑ**'nın farklı değerleri için simülasyonu**

Şekil (4.4)'ten antivirüs A içeren virüssüz bilgisayar grubunun her ϑ değeri için arttığı görülebilir. Ancak, belirli bir t değerinden sonra artış katsayıları arasında ters orantı olduğu gözlenmiştir.



Şekil 4.5. S, I, R, A **ile verilen epidemiyolojik modelin** $\vartheta = 1$ **değeri için simülasyonu**



Şekil 4.6. S, I, R, A **ile verilen epidemiyolojik modelin** $\vartheta = 0.9$ **için simülasyonu**

Şekil (4.5) ve (4.6), kendi aralarında $\vartheta = 1$ ve $\vartheta = 0.9$ için S, I, R ve A varyasyonlarını göstermektedir. Matematiksel modeller, bilgisayar virüsü yayılma dinamiklerini araştırmak ve tahmin etmek için kullanışlıdır. Sonuçlar, kısmi sıralamanın model üzerindeki etkisi hakkında tam sayı sıralı türevlere sahip klasik model olan ρ 'dan daha fazla bilgi sağladığını göstermiştir. Tekil olmayan ve yerel olmayan çekirdek yeni model, bu tür virüs modellerinin yayılmasını daha iyi anlamayı sağlar. Elde edilen rakamlar, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle tanımlanan salgın modellerinin zengin dinamiklere sahip olduğunu ve biyolojik sistemleri geleneksel tamsayı düzen modellerinden daha iyi tanımladığını göstermektedir.

KAYNAKLAR

Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.

Atangana, A. ve Owolabi, K. M. (2018). New numerical approach for fractional differential equations. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1):3.

Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.

Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.

Hristov, J. (2015a). Approximate solutions to time-fractional models by integral-balance approach. In *Fractional dynamics*, s. 78–109.

Hristov, J. (2015b). Diffusion models of heat and momentum with weakly singular kernels in the fading memories: How the integral-balance method can be applied? *Thermal Science*, 19(3):947–957.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier.

Letnikov, A. (1868). Theory of differentiation of fractional order. *Mat. Sb*, 3(1):1868.

Losada, J. ve Nieto, J. J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.

Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, vol. 198 of mathematics in science and engineering.

Singh, J., Kumar, D., Hammouch, Z., ve Atangana, A. (2018). A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative. *Applied Mathematics and Computation*, 316:504–515.

Yaprakdal, P. (2019). Kesirli basamaktan diferensiyel denklemler ve sıtr modeli üzerine. *Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*.

ÖZGEÇMİŞ

1991'de Çorlu TEKİRDAĞ' da doğdu. İlk ve ortaokulu Çorlu 75. yıl Bedia Süleyman Serpicioğlu ilköğretim Okulu'nda, liseyi Çorlu Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi'nde okudu. 2011'de Balikesir Üniversitesi'nde başladığı Lisans öğrenimini 2016 yılında tamamladı. 2018 yılında Ağrı İbrahim Çeçen üniversitesi Uygulamalı matematik bölümünde tezli yüksek lisans öğrenimine başladı. Şu an Ağrı Şinasi Ünsal Kız Anadolu İmam-hatip Lisesinde öğretmen olarak görev yapmakta.

Cansu YILDIRIM