

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBELİ TÜREV İÇEREN BAZI KISMİ TÜREVLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT
UZAYI METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN : Onur SALDIR
DANIŞMAN : Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN
İKİNCİ DANIŞMAN : Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

VAN-2018

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBELİ TÜREV İÇEREN BAZI KISMİ TÜREVLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT
UZAYI METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Onur SALDIR

VAN-2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN ve Doç. Dr. Mehmet Giyas SAKAR danışmanlığında, Onur SALDIR tarafından sunulan "**KESİR MERTEBELİ TÜREV İÇEREN BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 01/08/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hasan BULUT

İmza:

Üye: Prof. Dr. Alaattin ESEN

İmza:

Üye: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

İmza:

Üye: Prof. Dr. Harun AKKUŞ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN

İmza:

03-08-2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

2018/36-I

Prof. Dr. Senay SENSOY
Enstitü Müdürü

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Onur SALDIR

ÖZET

KESİR MERTEBELİ TÜREV İÇEREN BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

SALDIR, Onur

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

İkinci Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

Ağustos 2018, 87 Sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kesir mertebeli türev ve doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu hakkında tarihsel gelişim ve literatür bildirisi verilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım, teorem ve ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren değişken katsayılı lineer olmayan Burgers denkleminin nümerik çözümleri doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılarak elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Caputo kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan Adveksiyon denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılmıştır.

Beşinci bölümde, Caputo kesir mertebeli lineer olmayan Kawahara denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılmıştır. Son bölüm, tezin değerlendirildiği tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Advection denklemi, Burgers denklemi, Doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu, Kawahara denklemi.



ABSTRACT

INVESTIGATION OF NUMERICAL SOLUTIONS BY REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE METHOD FOR SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

SALDIR, Onur

Ph.D. Thesis, Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

2nd Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Giyas SAKAR

August 2018, 87 Pages

This thesis comprise of six chapters. In the first chapter, fractional order derivative and historical advances in literature about reproducing kernel Hilbert space were given in some detail. In the second chapter, some definitions, theorems and preliminaries are given for use the following chapters.

In the third chapter, numerical solution of nonlinear Burgers equation with Caputo derivative is obtained by using reproducing kernel Hilbert space method.

In the fourth chapter, reproducing kernel Hilbert space method is used for obtain numerical solution of nonlinear Advection equation with Caputo derivative.

In the fifth chapter, reproducing kernel Hilbert space method is used to achieve numerical solution of nonlinear Kawahara equation with Caputo derivative. Finally, last chapter is consist of discussion and conclusion which is an evaluation of the thesis.

Keywords: Advection equation, Burgers equation, Reproducing kernel Hilbert space method, Kawahara equation.



ÖN SÖZ

Tez çalışmasında, araştırma konusunun belirlenmesi ve tez haline gelmesinde bana yol gösteren, tez esnasında her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN'a ve Sayın Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR'a, tez izleme komitesinin değerli üyelerine her zaman yanımda olan çok değerli aileme, doktora eğitimi süresince bana destek veren Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

2018

Onur SALDIR



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER.....	5
2.1. Caputo Kesir Mertebeli Türev Hakkında Bazı Temel Bilgiler.....	5
2.2. Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu İçin Gerekli Bazı Temel Bilgiler.....	6
2.3. $W_2^m[a, b]$ Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu.....	13
2.4. $W_2^m[a, b]$ Uzayında Doğuran Çekirdek Fonksiyonu $K_x(\xi)$ 'nin Bulunması.....	16
3. BURGERS DENKLEMİ.....	19
3.1. Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar.....	20
3.2. YaklaşıkÇözümün İnşası.....	24
3.3. İteratif Süreç ve Sürecin Yakınsaklığı.....	28
3.4. Örnekler ve Nümerik Sonuçlar.....	31
4. ADVEKSİYON DENKLEMİ.....	39
4.1. Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar.....	40
4.2. YaklaşıkÇözümün İnşası.....	43
4.3. İteratif Süreç ve Sürecin Yakınsaklığı.....	47
4.4. Örnekler ve Nümerik Sonuçlar.....	50
5. KAWAHARA DENKLEMİ.....	57
5.1. Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar.....	58
5.2. YaklaşıkÇözümün İnşası.....	62
5.3. İteratif Süreç ve Sürecin Yakınsaklığı.....	66
5.4. Örnekler ve Nümerik Sonuçlar.....	70

	Sayfa
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	79
KAYNAKLAR.....	81
ÖZ GEÇMİŞ.....	87



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Örnek 3.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	32
Çizelge 3.2. Örnek 3.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	33
Çizelge 3.3. Örnek 3.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	33
Çizelge 3.4. Örnek 3.2’de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	35
Çizelge 3.5. Örnek 3.2’de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	35
Çizelge 3.6. Örnek 3.2’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	36
Çizelge 4.1. Örnek 4.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	51
Çizelge 4.2. Örnek 4.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	52
Çizelge 4.3. Örnek 4.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	52
Çizelge 5.1. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	71
Çizelge 5.2. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	71
Çizelge 5.3. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)	71

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Örnek 3.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	33
Şekil 3.2. Örnek 3.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	34
Şekil 3.3. Örnek 3.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	34
Şekil 3.4. Örnek 3.2’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	36
Şekil 3.5. Örnek 3.2’de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	36
Şekil 3.6. Örnek 3.2’de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	37
Şekil 4.1. Örnek 4.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	52
Şekil 4.2. Örnek 4.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	53
Şekil 4.3. Örnek 4.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	53
Şekil 4.4. Örnek 4.1’de $\alpha = 1$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	54
Şekil 4.5. Örnek 4.1’de $\alpha = 1$ değeri için kesin çözüm grafiği.....	54
Şekil 4.6. Örnek 4.1’de $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.....	55
Şekil 5.1. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.....	72
Şekil 5.2. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	72
Şekil 5.3. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için kesin çözüm grafiği.....	73
Şekil 5.4. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için mutlak hata grafiği.....	73
Şekil 5.5. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	74
Şekil 5.6. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için kesin çözüm grafiği.....	74
Şekil 5.7. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.....	75
Şekil 5.8. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	75
Şekil 5.9. Örnek 5.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için kesin çözüm grafiği.....	76

Şekil	Sayfa
Şekil 5.10. Örnek 5.1’de $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.....	76
Şekil 5.11. Örnek 5.1’de $\alpha = 1$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.....	77
Şekil 5.12. Örnek 5.1’de $\alpha = 1$ değeri için kesin çözüm grafiği.....	77



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
α	Kesir parametresi
$\langle . \rangle$	İç Çarpım fonksiyonu
$\ . \ $	Norm fonksiyonu
\perp	Diklik sembolü
$K_x(\xi)$	Doğuran çekirdek fonksiyonu
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi



1. GİRİŞ

Bu doktora tez çalışmasında, lineer olmayan bazı kesir mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılarak bulunması amaçlanmıştır. Kesir mertebeli türev kavramı ilk olarak 1695 de Leibniz'in L'hospital'e yazmış olduğu mektupta türev operatörünün mertebesinin 1/2 olmasının ne anlama geldiğini sorduğunda ortaya çıkmıştır. Kesir mertebeli türev kavramı üzerine detaylı çalışmalar yapan Liouville, Grünwald, Letnikov ve Riemann sayesinde teori gelişmiştir. Fizik, mühendislik, akışkanlar dinamiği, kontrol teorisi, dinamik sistemler, akışkanlar mekaniği, petrol sanayi, ısı transferi gibi birçok alanda yapılan kesir mertebeli modellemelerin, bilinen adi türev ile yapılan modellemelere göre süreci daha iyi tanımladığı görülmüştür. Kesir mertebeli türev ve integral üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Kesir mertebeden türev içeren adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleriyle alakalı genel bir metot olmamasına rağmen bu konu üzerindeki çalışmalar devam etmektedir.

Çekirdek fonksiyonu kavramı, ilk olarak Hilbert'in pozitif tanımlı integral operatörlerin sürekli çekirdek fonksiyonları üzerine yaptığı çalışmada karşımıza çıkmaktadır. Hilbert in yaptığı çalışmalar üzerine Mercer (1909, 1911) bu teoriyi pozitif tanımlı çekirdekler adı altında genişletti ve integral denklemlerin sürekli çekirdekleri için

$$\sum_{i,j=1}^n K(y_i, y_j) \bar{\xi}_i \xi_j \geq 0 \quad (1.1)$$

eşitsizliğini buldu. Moore (1916, 1939) Mercerin yaptığı çalışmaları ilerletip bu çekirdekleri pozitif hermityen matrisi adı altında çalıştı ve integral denklemlerin genelleştirilmiş bir haline uyguladı. Moore araştırmaları sonucunda herbir hermityen matrisine bir Hilbert uzayının karşılık geldiğini ve çekirdek fonksiyonunun

$$f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle \quad (1.2)$$

doğuran özelliğine sahip olduğunu gösterdi. Çekirdek fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalara Mercer'in ardından Bochner devam etti. Bochner (1932) pozitif tanımlı fonksiyonlar adı altında Fourier dönüşümü teorisinde uygulama yapmak amacıyla, x

değişkenine bağlı $\emptyset(x)$ sürekli fonksiyonunu ele alarak (1.1) şartını sağlayan $K(x, y) = \emptyset(x - y)$ çekirdeğini kullandı.

Teorinin gelişmesine katkıda bulunan önemli isimlerden bir diğeri Zaremba'dır. Zaremba sınır değer problemlerinin çözümünü çekirdek fonksiyonunu kullanarak bulmayı amaçlıyordu. Bu maksatla çalışmalarını harmonik ve biharmonik fonksiyonların sınır değer problemleri üzerine yoğunlaştırdı. Çekirdek fonksiyonunun bir fonksiyon sınıfına karşılık geldiğini ve çekirdeğin doğuran özelliğe sahip olduğunu ilk olarak Zaremba (1907,1908) gösterdi. Zaremba çalışmalarını daha fazla ilerletmedi. Ardından Bergman (1922) teori üzerine çalışmalarını ilerleterek çekirdek fonksiyonlarının bir yada daha fazla değişkenli analitik ve harmonik fonksiyonların sınıfına karşılık geldiğini gösterdi.

Aronszajn (1950) genel doğuran çekirdek teorisini bir araya topladı. 1964 de geliştirilmiş fonksiyonlar (distribution) teorisinin kurucusu ve Field madalya sahibi Schwartz (1964) bu teoriyi ciddi anlamda genişletti.

Yang ve Cui (2006) lineer olmayan integro diferansiyel denklem için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullanarak yaklaşık çözüm elde etti. Yu-lan ve Lu (2008) değişken katsayılı kısmi türevli diferansiyel denkleme doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu uyguladılar. İteratif süreci oluşturup yakınsama için gerekli teoremleri verdiler. Yang ve Lin (2008) ikinci mertebeden lineer hiperbolik başlangıç sınır değer problemini doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullanarak çözdüler. Metodun alt yapısını oluşturmak için gerekli uzayları tanımlayıp, çekirdek fonksiyonunun elde edilmesini detaylı bir şekilde verdiler. Mu ve Du (2008) lokal olmayan sınır şartlarına sahip parabolik denklem için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar. Doğuran çekirdek fonksiyonlarını tanımlayıp, iteratif sürecin yakınsaklık analizini yaptılar. Li ve Cui (2009) bir boyutlu değişken katsayılı Burgers denkleminin nümerik çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile araştırdılar. Probleme ait başlangıç ve sınır koşullarını göz önünde bulundurarak gerekli uzayları tanımladılar. İteratif süreci oluşturmak için lineer operatörü oluşturup yakınsaklık analizi ve hata değerlendirmesini yaptılar.

Lin ve Zhou (2009) lokal olmayan sınır şartları ve başlangıç şartına sahip reaksiyon-difüzyon denklemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar. Başlangıç ve sınır şartlarını göz önüne olarak çekirdek fonksiyonunu

tanımladılar. Şartların homojenleştirilmesini yapıp yaklaşık çözümün yakınsamasını gösterdiler. Zhou ve ark. (2009) klasik olmayan şartlara sahip parabolik problem için doğuran çekirdek uzayını inşa ettiler. Başlangıç ve sınır şartlarını homojenleştirip yakınsaklık analizini yaptılar. Yao (2010) integral sınır şartlı lineer olmayan hiperbolik telgraf denkleminin yaklaşık çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile elde etti. Jiang ve Lin (2010) kesir mertebeli adveksiyon-dispersiyon denklemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayında temsili seri çözümü elde ettiler. Jiang ve Lin (2011) zaman kesir mertebeli telgraf denklemi için kesin çözümün temsilini elde ettiler. Mohammadi ve Mokhtari (2011) genelleştirilmiş regüler uzun dalga denkleminin yaklaşık çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert metodu ile elde etti. İnşa edilen seri formundaki yaklaşık çözümün kesin çözüme yakınsadığını gösterdi. Wang ve ark. (2011) doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu singüler pertürbe kısmi türevli denkleme uyguladı ve metodun etkisini inceledi.

Inc ve ark. (2012) başlangıç şartlı telgraf denkleminin yaklaşık çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile elde etti. Inc ve ark. (2013) KdV denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek amacıyla doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu uyguladı. Li ve Wu (2013) lokal olmayan sınır şartlarına sahip parabolik problem için doğuran çekirdekli Hilbert metodunu kullanarak yaklaşık çözümler elde ettiler. Wang ve ark. (2013) klasik olmayan şartlara sahip kesir mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde inşa ettiler. Mohammadi ve Mokhtari (2014) doğuran çekirdekli Hilbert uzayında lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem için yaklaşık çözüm inşa ettiler. Wang ve ark. (2014) singüler pertürbe kısmi türevli diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü için pertürbasyon metodu ve doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar. Akgül ve ark. (2016) bir boyutlu sine-Gordon denkleminin yaklaşık çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde inşa ettiler. Li ve Wu (2017) doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullanarak değişken kesir mertebeli fonksiyonel sınır değer probleminin nümerik çözümlerini elde ettiler. Arqub (2017) başlangıç ve Neumann sınır şartlı bazı kesir mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullanarak inceledi. Al-Smadi (2017) zaman kesir mertebeli sınır değer problemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandı ve hata değerlendirmesi yaptı. Li ve Wu (2018) lineer olmayan uzay kesirli

difüzyon denklemi için iteratif bir metot olarak doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu önerdi. Arqub (2018) başlangıç ve Robin sınır şartı içeren zaman kesir mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu uyguladı.

Geng ve ark. (2018) singüler pertürbe parametresi içeren bir boyutlu başlangıç sınır değer problemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar. Mei ve ark. (2018) gecikmeli impulsif diferansiyel denkleme doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu uyguladı. Arqub ve Maayah (2018) zaman kesirli Bagley-Torvik ve Painleve denklemleri için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullanarak iteratif süreç oluşturdu ve hata değerlendirmesi yaptı. Khaleghi ve ark. (2018) singüler iki nokta sınır değer problemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandı. Wang ve ark. (2018) başlangıç şartı içeren zaman kesirli telgraf denklemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandı.

2. TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ve kesir mertebeli türev ile ilgili bazı temel kavramlar ve önbilgiler verilecektir. Ayrıca doğuran çekirdek fonksiyonu kavramı ve doğuran çekirdek fonksiyonunun elde edilmesini detaylı olarak sunulacaktır.

2.1 Caputo Kesir Mertebeli Türev Hakkında Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.1. $\alpha > 0$ olmak üzere $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir (Oldham ve Spanier, 1974).

Tanım 2.2. Adi diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahip olan e^x üstel fonksiyonunun bir parametrelili genelleştirmesi olan Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0$$

olarak tanımlanır. İki parametrelili genelleştirmesi ise

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0$$

olarak ifade edilir (Podlubny,1999).

Tanım 2.3. $f \in C[a, b]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$J_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < x < b$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville integrali denir (Podlubny,1999; Diethelm,2010).

Tanım 2.4. $f \in C^n[a, b]$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D_{*a}^{\alpha} f(x) = J_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Caputo türevi denir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.5. t zaman değişkeni ve $m - 1 < \alpha \leq m$ olmak üzere Caputo zaman kesir mertebeli türevi

$$D_{*t}^{\alpha} y(x, t) = \frac{\partial^{\alpha} y(x, t)}{\partial t^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{\partial^m y(x, t)}{\partial t^m}, & \alpha = m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} \frac{\partial^m y(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & m - 1 < \alpha < m \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Kilbas ve ark., 2006).

2.2 Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu İçin Gerekli Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.6. E bir kompleks vektör uzayı olsun. $\langle ., . \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu eğer $\forall x, y, z \in E$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

şartlarını sağlıyorsa $\langle ., . \rangle$ iç çarpım olarak adlandırılır. Eğer bir vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış ise bu vektör uzayı iç çarpım uzayı olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.7. Bir iç çarpım uzayı kendi normu üzerinden indirgenen metriğe göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Moore ve Cloud, 2007).

Tanım 2.8. Bir iç çarpım uzayında herhangi iki x ve y vektörü için $\langle x, y \rangle = 0$ ise bu iki vektör ortogonal denir ve $x \perp y$ ile gösterilir (Debnath ve Mikusinski, 2005).

Tanım 2.9. H_1 ve H_2 Hilbert uzayları ve $P: H_1 \rightarrow H_2$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için P 'nin Hilbert adjoint operatörü $S: H_2 \rightarrow H_1$ olmak üzere

$\langle Px, y \rangle_{H_1} = \langle x, Sy \rangle_{H_2}$ olacak şekilde tek bir S operatörü vardır. Eğer $S = P$ ise P 'ye öz eşlenik (self-adjoint) operatör denir ve $S = P^*$ olarak gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.10. Hilbert uzayında birbirine ortogonal olan birim vektörlerin $\{e_i\}$ dizisine ortonormal dizi denir. Yani $i \neq j$ için $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ ve $\forall i$ için $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ dir (Moore ve Cloud, 2007).

Tanım 2.11. Bir Hilbert uzayındaki ortonormal dizinin tam olması için gerek ve yeter şart dizideki tüm vektörlere sıfırdan farklı ortogonal olan vektör olmamasıdır. Dolayısıyla $\{e_i\}$ tam ortonormal dizi ve $\forall i$ için $\langle x, e_i \rangle = 0$ ise $x = 0$ dir (Moore ve Cloud, 2007).

Tanım 2.12. Bir normlu lineer uzay üzerinde tanımlanmış reel veya kompleks değerli dönüşüme fonksiyonel denir. Eğer bu dönüşüm lineer ise lineer fonksiyonel olarak adlandırılır (Moore ve Cloud, 2007).

Tanım 2.13. H bir fonksiyonel Hilbert uzayı olmak üzere $E_x: H \rightarrow \mathbb{F}$ lineer hesaplama fonksiyoneli (evaluation functional) $E_x(f) = f(x)$ olarak tanımlanır (Paulsen and Raghupathi, 2016).

Teorem 2.1. (Riezs temsil teoremi) f , H Hilbert uzayında bir sınırlı lineer fonksiyonel olsun. O halde H' de f 'nin temsili olarak adlandırılan tek bir h_f elemanı vardır öyle ki $\forall x \in H$ için $f(x) = \langle x, h_f \rangle$ dir (Moore ve Cloud, 2007).

Tanım 2.14. (Gram-Schmidt Süreci) Bir iç çarpım uzayında lineer bağımsız vektörlerin (y_n) dizisi verilsin.

$$w_1 = y_1$$

$$x_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

$$w_k = y_k - \sum_{n=1}^{k-1} \langle y_k, x_n \rangle x_n$$

$$x_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}, k = 2, 3, \dots$$

şeklinde elde edilen (w_n) dizisinin ortonormal olduğu tümevarım ile gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \langle w_2, w_1 \rangle &= \langle y_2 - \langle y_2, x_1 \rangle y_1, y_1 \rangle \\ &= \langle y_2, y_1 \rangle - \langle y_2, x_1 \rangle \langle x_1, y_1 \rangle \\ &= \langle y_2, y_1 \rangle - \frac{\langle y_2, y_1 \rangle \langle y_1, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} = 0. \end{aligned}$$

w_1, w_2, \dots, w_{k-1} vektörlerinin ortogonal olduklarını varsayalım. Herhangi bir $m < k$ için

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_m \rangle &= \langle y_k, w_m \rangle - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \langle y_k, w_n \rangle \langle w_n, w_m \rangle}{\|w_m\|^2} \\ &= \langle y_k, w_m \rangle - \frac{\langle y_k, w_m \rangle \langle w_m, w_m \rangle}{\|w_m\|^2} = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla w_1, w_2, \dots, w_k vektörleri ortogondur. Tümevarımdan (w_n) dizisi ortogonal yani (x_n) dizisi ortonormaldir (Debnath ve Mikusinski, 2005).

Tanım 2.15. Y, X metrik uzayının alt kümesi olsun. $\bar{Y} = X$ ise Y, X de yoğundur denir. Yani X ' in her noktası ya Y ' nin de noktasıdır veya Y ' nin limit noktasıdır (Ponnusamy, 2002).

Tanım 2.16. Sayılabilir yoğun bir alt kümeyle sahip uzaya ayrılabilir denir (Ponnusamy, 2002).

Tanım 2.17. $1 \leq p < \infty$ için $l_p = \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ olarak tanımlanır. $(x_n) \in l_p$ için $\|x_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ ile tanımlı $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu l_p üzerinde bir normdur ve standart norm olarak adlandırılır. (Sen, 2013).

Tanım 2.18. $1 \leq p < \infty$ için $X = [a, b]$ olmak üzere $L^p[a, b]$ uzayı

$$L^p(X) = \left\{ f: f \text{ Lebesgue ölçülebilir ve } \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır ve $f \in C[a, b]$ için $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ şeklindedir (Sen, 2013).

Teorem 2.2. (Rellich Kondrachov) D , \mathbb{R}^n de koni şartını sağlayan açık bir bölge, $D_0 \subset D$, sınırlı bir bölge olsun. Ayrıca D_0^k , D_0 ' in \mathbb{R}^n de k boyutlu yüzeylerinin kesişimi olsun. $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki kompakt gömülmeler geçerlidir.

1. $mp < n$ ise $1 \leq q < kp/(n - mp)$ ve $0 < n - mp < k \leq n$ için

$$W_p^{j+m}(D) \hookrightarrow W_q^j(D_0^k)$$

dır.

2. $mp = n$ ise $1 \leq k \leq n$ ve $1 \leq q < \infty$ için

$$W_p^{j+m}(D) \hookrightarrow W_q^j(D_0^k)$$

dır.

3. $mp > n$ ise

$$W_p^{j+m}(D) \hookrightarrow C_B^j(D_0)$$

$$W_p^{j+m}(D) \hookrightarrow W_q^j(D_0^k) \quad (1 \leq q < \infty \text{ için})$$

dır (Adams ve Fournier, 2003).

Teorem 2.3. Her H Hilbert uzayı yansımalıdır(reflexive) (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.19. X bir soyut küme(abstract set) ve

$$H = \{f(\xi) | f(\xi) \text{ reel yada kompleks değerli fonksiyon, } \xi \in X\}$$

kümesi, $\langle f(\xi), g(\xi) \rangle_H$ iç çarpımı ile tanımlı bir Hilbert uzayı olsun. Eğer herbir sabit $x \in X$ ve herbir $f(\xi) \in H$ için $\langle f(\xi), K_x(\xi) \rangle_H = f(x)$ eşitliğini sağlayan $K_x(\xi) \in H$ varsa $K_x(\xi)$ fonksiyonuna H Hilbert uzayının doğuran çekirdeği ve H Hilbert uzayında doğuran çekirdekli Hilbert uzayı denir (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.4. H doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayı olmak üzere H 'nin doğuran çekirdeği simetrik eşleniktir. Yani $K_x(\xi) = \overline{K_\xi(x)}$ dir (Paulsen ve Raghupathi, 2016).

İspat. İç çarpım ve doğurma özelliği kullanılarak,

$$K_x(\xi) = \langle K_x(\cdot), K_\xi(\cdot) \rangle_H = \overline{\langle K_\xi(\cdot), K_x(\cdot) \rangle_H} = \overline{K_\xi(x)}$$

eşitliği elde edilir (Paulsen ve Raghupathi, 2016).

Teorem 2.5. Doğuran çekirdekli H Hilbert uzayının doğuran çekirdeği iç çarpıma göre tektir (Istratescu, 1987).

İspat. $K_x(\xi)$ ve $R_x(\xi)$, H Hilbert uzayının farklı iki doğuran çekirdeği olsun. Bu takdirde

$$R_x(\xi) = \langle R_x(\cdot), K_\xi(\cdot) \rangle_H = \overline{\langle K_\xi(\cdot), R_x(\cdot) \rangle_H} = \overline{K_\xi(x)} = K_x(\xi)$$

eşitliğinden ispat tamamlanır.

Teorem 2.6. $K_x(\xi)$ H Hilbert uzayının doğuran çekirdeği olsun. $\forall \xi \in X$ için $K_\xi(\xi) \geq 0$ dir. Ayrıca $K_\xi(\xi) = 0 \Leftrightarrow H = \{0\}$ (Cui ve Lin, 2009).

İspat. Doğuran çekirdek fonksiyonu tanımından

$$K_\xi(\xi) = \langle K_\xi(\cdot), K_\xi(\cdot) \rangle_H = \|K_\xi(\cdot)\|^2$$

olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 2.7. $K_x(\xi)$ doğuran çekirdeği yarı pozitif tanımlı çekirdek olsun. Bu durumda keyfi $\xi_i \in X$ için,

$$\sum_{i,j=1}^n K_{\xi_i}(\xi_j) \bar{\beta}_i \beta_j \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

olur. Burada β_i ler kompleks sayılardır (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.8. \mathbf{I} , H Hilbert uzayının hesaplama fonksiyoneli olmak üzere H Hilbert uzayının doğuran çekirdekli bir uzay olması için gerek ve yeter şart en az bir $\xi \in X$ için $|\mathbf{I}(f)| = |f(\xi)| < M$ olmasıdır (Cui ve Lin, 2009).

Tanım 2.20. $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel yada kompleks değerli bir fonksiyon ve $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ikişer ikişer ayrık(mutually disjoint) $(a_i, b_i) \subset [a, b]$ açık aralıklarının kümesi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ için $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ şartını sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir (Sen, 2013).

Tanım 2.21. $D = \{[a, b] \times [c, d]\} \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D üzerinde bir $f(x, y)$ fonksiyonu verilsin. $\{I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n$ ikişer ikişer ayrık(mutually disjoint) $I_k \subset D$

bölgelerinin kümesi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $\sum_{i=1}^n |I_i| < \delta$ için $\sum_{i=1}^n |f(I_i)| < \varepsilon$ dir. Burada

$$f(I_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) + f(a_i, c_i)$$

ve $f(x, c)$, $g(a, y)$ fonksiyonları sırasıyla x ve y ye göre mutlak süreklidir. Bu durumda $f(x, y)$, D üzerinde tamamen süreklidir denir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.1. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde tamamen sürekli olsun. O halde herbir sabit $y \in [c, d]$ için $f(x, y)$ fonksiyonu x değişkenine göre $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak süreklidir. Yine benzer şekilde herbir sabit $x \in [a, b]$ için $f(x, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre $[c, d]$ aralığı üzerinde mutlak süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.2. $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen sürekli ise D bölgesinde süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.3. Eğer $(x, y) \in D$ için $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde integrallenebilir ise $\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.4. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli ise D bölgesi üzerinde tamamen süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.5. $f(x)$ ve $g(y)$ fonksiyonları sırasıyla $[a, b]$ ve $[c, d]$ üzerinde mutlak sürekli olsunlar. O halde $f(x)g(y)$ fonksiyonu D üzerinde tamamen süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Tanım 2.22. İki değişkenli $W_2^{(m,n)}(D)$ uzayı

$$W_2^{(m,n)}(D) = \left\{ f(x, y) \mid \frac{\partial^{m+n-2} f(x, y)}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \text{ } D \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \in L^2(D) \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve uzayımıza ait iç çarpım

$$\langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{W_2^{(m,n)}} = \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a, y) \right] dy$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(x, c) \right\rangle_{W_2^m} \\
& + \int_c^d \int_a^b \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) \right] dx dy
\end{aligned}$$

dir (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.9. $W_2^{(m,n)}(D)$ fonksiyon uzayı Hilbert uzayıdır (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.10. $f(x, y), g_1(x)g_2(y) \in W_2^{(m,n)}(D)$ olsun. O halde

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}} = \langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{W_2^m}, g_2(y) \rangle_{W_2^n}$$

dir (Cui ve Lin, 2009).

Sonuç 2.1. $f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \in W_2^{(m,n)}(D)$ olsun. O halde

$$\langle f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}} = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle_{W_2^m} \langle f_2(y), g_2(y) \rangle_{W_2^n}$$

eşitliği yazılır (Cui ve Lin, 2009).

Sonuç 2.2. $f(x) \in W_2^m[a, b]$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $\|f(x)\|_{W_2^m} = \|f(x)\|_{W_2^{(m,n)}}$ eşitliği yazılabilir (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.11. $W_2^{(m,n)}(D)$ bir doğuran çekirdekli uzay olsun. $R_\xi(x)$ ve $Q_\eta(y)$ sırasıyla $W_2^m[a, b]$ ve $W_2^n[c, d]$ uzaylarının doğuran çekirdek fonksiyonları olmak üzere $W_2^{(m,n)}(D)$ uzayına ait doğuran çekirdek fonksiyonu $K_{(\xi, \eta)}(x, y) = R_\xi(x)Q_\eta(y)$ olarak verilir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.6. $[a, b]$ aralığında tanımlı mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Önerme 2.7. $f(\xi)$, $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Keyfi $\xi \in [a, b]$ için $|f'(\xi)| \leq L$ ise $f(\xi)$ fonksiyonu mutlak süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

İspat. Keyfi $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ olsun. $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ (a_k, b_k) açık aralıklarının kümesi olsun. Burada $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ özelliği sağlansın.

$$|f(b_k) - f(a_k)| = |f'(t_k)|(b_k - a_k) < L(b_k - a_k), t_k \in (b_k, a_k) \subset [a, b]$$

olur. Buradan

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < L \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3. $f'(\xi)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise $f(\xi)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.12. Eğer $[a, b]$ aralığında $f(\xi)$ fonksiyonun integrallenebilirse, $[a, b]$ kapalı aralığında $\int_a^\xi f(t)dt$ fonksiyonu mutlak süreklidir (Cui ve Lin, 2009).

İspat. İntegral ifadesinin mutlak sürekliliğinden ve keyfi $\varepsilon > 0$ için $m(E) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayı vardır öyle ki $\int f(t)dt < \varepsilon$ dır. $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ kümesi ikişer ikişer ayrık $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ özelliğini sağlayan $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ aralıklarının bir kümesi olsun.

Bu durumda

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_a^{b_k} f(t)dt - \int_a^{a_k} f(t)dt \right| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f(t)| dt$$

$$= \int_{\cup_{k=1}^n (a_k, b_k)} |f(t)| dt < \varepsilon \quad (2.1)$$

olur ki ispat tamamlanır.

2.3 $W_2^m[a, b]$ Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu

$$W_2^m[a, b] = \{f(\xi) | f^{(m-1)}(\xi) \text{ mutlak sürekli}, f^{(m)}(\xi) \in L^2[a, b], \xi \in [a, b]\} \quad (2.2)$$

ile verilen fonksiyon uzayı üzerinde tanımlanan iç çarpım ve norm herhangi $f(\xi), g(\xi) \in W_2^m[a, b]$ için,

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(\xi)g^{(m)}(\xi)d\xi \quad (2.3)$$

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^m}} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla yukarıdaki iç çarpım ile $W_2^m[a, b]$ uzayı bir iç çarpım uzayıdır (Cui ve Lin, 2009).

Teorem 2.13. $W_2^m[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır (Cui ve Lin, 2009).

İspat. $n = 1, 2, \dots$ için $f_n(\xi)$ fonksiyon dizisi $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$$\|f_{n+p} - f_n\|_{W_2^m}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} [f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(\xi) - f_n^{(m)}(\xi)]^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

olur. Yukarıdaki ifadeden,

$$f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

ve

$$\int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(\xi) - f_n^{(m)}(\xi)]^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

elde edilir. Yani $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere her i ($0 \leq i \leq m-1$) için $f_n^{(i)}(a)$, \mathbb{R} de bir Cauchy dizisidir ve $f_n^{(i)}(a)$ dizisi de $L^2[a, b]$ uzayında bir Cauchy dizisidir. O zaman λ_i reel sayıları için bir tek $h(\xi) \in L^2[a, b]$ fonksiyonu vardır öyle ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(i)}(a) \rightarrow \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n^{(m)}(\xi) - h(\xi)]^2 d\xi \rightarrow 0$$

olur. Şimdi

$$g(\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{i!} (\xi - a)^i + \int_a^\xi \int_a^\xi \dots \int_a^\xi h(\xi) (d\xi)^m$$

olduğunu varsayalım. $h(\xi) \in L^2[a, b]$ olduğundan

$$g^{(m-1)}(\xi) = \lambda_{m-1} + \int_a^\xi h(\xi) d\xi$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir ve

$$g^{(m)}(\xi) = h(\xi) \in L^2[a, b]$$

dir. Bu eşitlik $[a, b]$ aralığının hemen hemen her yerinde doğrudur. Burada $g(\xi) \in W_2^m[a, b]$ ve $g^{(i)}(a) = \lambda_i$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|f_n(\xi) - g(\xi)\|_{W_2^m}^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(\xi) - g^{(m)}(\xi)]^2 d\xi \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - \lambda_i]^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(\xi) - h(\xi)]^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden görülür ki, $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı Hilbert uzayıdır.

Teorem 2.14. $W_2^m[a, b]$ uzayı bir doğuran çekirdek uzayıdır (Cui ve Lin, 2009).

İspat. $\xi \in [a, b]$ olmak üzere $I(f) = f(\xi)$, $W_2^m[a, b]$ uzayında bir hesaplama fonksiyoneli olsun. Bu durumda

$$f^{(m-1)}(\xi) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^\xi f^{(m)}(\xi) d\xi$$

ve

$$|f^{(m-1)}(\xi)| \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^\xi |f^{(m)}(\xi)| d\xi \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^b |f^{(m)}(\xi)| d\xi$$

ve her bir i ($0 \leq i \leq m-1$) için

$$\begin{aligned} \int_a^b |f^{(m)}(\xi)| d\xi &\leq \left[(b-a) \int_a^b |f^{(m)}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = M_0 \left[\int_a^b |f^{(m)}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_0 \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = M_0 \|f\|_{W_2^m} \end{aligned}$$

eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$|f^{(i)}(a)| \leq \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{W_2^m} \quad (2.5)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla,

$$|f^{(m-1)}(\xi)| \leq M_1 \|f\|_{W_2^m} \quad (2.6)$$

$$|f^{(m-2)}(\xi)| \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^x |f^{(m-1)}(\xi)| d\xi \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(\xi)| d\xi$$

İfadesi elde edilir. (2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden faydalanılarak

$$|f^{(m-2)}(\xi)| \leq \|f\|_{W_2^m} + (b-a)M_1\|f\|_{W_2^m} = M_2\|f\|_{W_2^m} \quad (2.7)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$|I(f)| = |f(\xi)| \leq M_m\|f\|_{W_2^m}$$

olur. I , $W_2^m[a, b]$ uzayında sınırlı olduğundan Teorem 2.8 gereğince $W_2^m[a, b]$ doğuran çekirdekli uzaydır.

2.4 $W_2^m[a, b]$ Uzayında Doğuran Çekirdek Fonksiyonu $K_x(\xi)$ 'nin Bulunması

$K_x(\xi)$ fonksiyonu $W_2^m[a, b]$ uzayının doğuran çekirdek fonksiyonu olsun. Her bir $x \in [a, b]$ ve her bir $f(\xi) \in W_2^m[a, b]$ için,

$$\langle f(\xi), K_x(\xi) \rangle_{W_2^m} = f(x) \quad (2.8)$$

özelliği sağlanır. $W_2^m[a, b]$ üzerinde tanımlanan iç çarpımdan

$$\langle f(\xi), K_x(\xi) \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i K_x(a)}{\partial \xi^i} + \int_a^b f^{(m)}(\xi) \frac{\partial^m K_x(\xi)}{\partial \xi^m} d\xi$$

şeklinindedir. Eşitliğin sağ tarafındaki integral ifadesi

$$\int_a^b f^{(m)}(\xi) \frac{\partial^m K_x(\xi)}{\partial \xi^m} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(\xi) \frac{\partial^{m+i} K_x(\xi)}{\partial \xi^{m+i}} + (-1)^m \int_a^b f(\xi) \frac{\partial^{2m} K_x(\xi)}{\partial \xi^{2m}} d\xi$$

olarak yazılabilir. Burada değişken dönüşümü yapılarak,

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(\xi) \frac{\partial^{m+i} K_x(\xi)}{\partial \xi^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(\xi) \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(\xi)}{\partial \xi^{2m-i-1}}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \langle f(\xi), K_x(\xi) \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i K_x(a)}{\partial \xi^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(a)}{\partial \xi^{2m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(b)}{\partial \xi^{2m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(\xi) \frac{\partial^{2m} K_x(\xi)}{\partial \xi^{2m}} d\xi \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $W_2^m[a, b]$ nin doğuran çekirdeği $K_x(\xi)$ aşağıdaki genelleştirilmiş diferansiyel denklemin çözümünden elde edilecektir.

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{2m} K_x(\xi)}{\partial \xi^{2m}} = \delta(\xi - x), \\ \frac{\partial^i K_x(a)}{\partial \xi^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(a)}{\partial \xi^{2m-i-1}} = 0 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(b)}{\partial \xi^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.9)$$

$\xi \neq x$ iken $K_x(\xi)$, aşağıdaki sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} K_x(\xi)}{\partial \xi^{2m}} = 0 \quad (2.10)$$

çözümüdür. Sınır şartları;

$$\begin{cases} \frac{\partial^i K_x(a)}{\partial \xi^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(a)}{\partial \xi^{2m-i-1}} = 0 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} K_x(b)}{\partial \xi^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.11)$$

olarak alınır. (2.10) denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^{2m} = 0$ ve $\lambda = 0$ öz değeri $2m$ katlı köktür. Dolayısıyla (2.9) denkleminin genel çözümü

$$K_x(\xi) = \begin{cases} lK_x(\xi) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(x) \xi^{i-1}, & \xi < x \\ rK_x(\xi) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(x) \xi^{i-1}, & \xi > x \end{cases} \quad (2.12)$$

dir. Bu denklemler oluşturulduktan sonra $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ katsayıları hesaplanır.

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} K_x(\xi)}{\partial \xi^{2m}} = \delta(\xi - x)$$

olup

$$\frac{\partial^i lK_x(x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial^i rK_x(x)}{\partial \xi^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2 \quad (2.13)$$

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} rK_x(x^+)}{\partial \xi^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} lK_x(x^-)}{\partial \xi^{2m-1}} \right) = 1 \quad (2.14)$$

olur. (2.13) ve (2.14) deki $2m$ denklem, (2.12) denklemindeki $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ katsayılarının bulunması için $2m$ tane şart sağlar. (2.11) denkleminin $2m$ tane sınır şartı sağlandığında toplam $4m$ denkleme sahip olunur. Bu $4m$ denklem değişkenleri $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ olan lineer denklemlerdir. $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ katsayıları bulunduğunda $K_x(\xi)$ doğuran çekirdeğinin ifadesi (2.12) denklemi yardımıyla elde edilir (Cui ve Lin, 2009).



3. BURGERS DENKLEMİ

Bu bölümde kesir mertebeli türev içeren değişken katsayılı Burgers denkleminin nümerik çözümleri doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile bulunacaktır. Nümerik çözümler elde edilmeden önce iteratif süreci oluşturmak için doğuran çekirdekli uzaylar ve bu uzayların ürettiği çekirdekler verilecektir. İteratif süreç oluşturulduktan sonra metodun yakınsaklık analizi yapılacaktır. Ardından metodun etkisini göstermek amacıyla model problemler çözülecek ve elde edilen sonuçlar tablo ve grafik ile verilecektir. Bu kısımda tanım, teorem ve lemmalar içerisinde ifade edilen uzaylar ve çekirdek fonksiyonlarının elde edilmesinde (Cui ve Lin, 2009) kaynağından yararlanılmıştır. Ayrıca çalışılan uzaya ait çekirdek fonksiyonunu elde etme süreci 2. bölümde detaylı olarak verilmiştir.

Burgers denklemi, akışkanlar mekaniği ve akışkanlar dinamiğinde konveksiyon-difüzyon arasındaki etkileşimi açıklayan temel model denklemlerden birisidir. Bu model 1939 yılında Hollandalı fizikçi J. M. Burgers tarafından Navier-Stokes denklemiindeki basınç terimi kaldırılarak tanımlanmıştır. Navier-Stokes denklemi, bir kanalda meydana gelen konveksiyon ve difüzyon olaylarının ters etkileşimi sonucu oluşan türbülans olayına karşılık gelir. Burgers (1939); Burgers denkleminin varlık, teklik ve kararlılık incelemesini yapmıştır. Navier-Stokes denklemi üzerinde yapılan değişiklik ile elde edilen Burgers denklemi üzerindeki çalışmaların sonucu Burgers (1948) tarafından sunulmuştur. Son yıllarda birçok bilim insanı tarafından farklı metotlar kullanılarak Burgers denklemi üzerine çalışmalar yapılmıştır. Kutluay ve ark. (1999) bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümü için sonlu fark metodunu kullandılar. Kutluay ve Esen (2004) bir boyutlu Burgers denklemi için lineerleştirilmiş şebeke uyguladılar. Bahadır ve Sağlam (2005) sonlu fark ve sınır elemanlar metotlarını kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümünü araştırdılar. Ramadan ve El-Danaf (2005) modifiye edilmiş Burgers denklemi için quintic (beşinci dereceden) spline metodunu kullandılar. Dağ ve ark. (2005) bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümü için kübik B-spline metodunu kullandılar. Li ve Cui (2009) bir boyutlu değişken katsayılı Burgers denkleminin nümerik çözümünü doğuran çekirdekli Hilbert

uzayı metodunu kullanarak araştırdılar. Mohammadi ve ark. (2013) iki boyutlu lineer olmayan coupled Burgers denklemi için Galerkin-doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu geliştirdiler. Oruç ve ark. (2015) Burgers denklemi için Haar-wavelet ve sonlu fark metodunu kullandılar. Esen ve Tasbozan (2016) zaman kesir mertebeli Burgers denklemi için kübik B-spline sonlu elemanlar metodunu kullandılar. Mohammadi ve ark. (2016) Burgers denklemi için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar.

$$D_{\eta}^{\alpha}y(\xi, \eta) + k_1(\xi, \eta)y_{\xi\xi}(\xi, \eta) + k_2(\xi, \eta)y(\xi, \eta) + k_3(\xi, \eta)y_{\xi}(\xi, \eta) + k_4(\xi, \eta)y(\xi, \eta)y_{\xi}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad (3.1)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$$

Yukarıda (3.1) denklemi ile verilen Caputo anlamında kesirli türev içeren bir boyutlu değişken katsayılı Burgers denklemini göz önüne alalım. Burada D_{η}^{α} , η zaman değişkenine göre α mertebeden Caputo kesirli türev operatörüdür. Ayrıca $k_1(\xi, \eta)$, $k_2(\xi, \eta)$, $k_3(\xi, \eta)$, $k_4(\xi, \eta)$ ve $f(\xi, \eta)$ sürekli fonksiyonlardır. Denkleminize ait başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(\xi, 0) &= 0 \\ y(0, \eta) &= y(1, \eta) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak alınacaktır.

3.1 Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar

Bu kısımda (3.1) denkleminin zaman ve uzay değişkenine göre en yüksek mertebeden türevleri esas alınarak, doğuran çekirdek uzayları ve bu uzaylara ait çekirdek fonksiyonları elde edilecektir.

Tanım 3.1. $H_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı

$$H_2^1[0,1] = \{y(\eta) | y [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $H_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{H_2^1} = y(0)v(0) + \int_0^1 y'(\eta)v'(\eta)d\eta, \quad y, v \in H_2^1[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{H_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{H_2^1}}, \quad y \in H_2^1[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 3.1. $H_2^1[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_t^{\{1\}}(\eta) = \begin{cases} 1 + \eta, & \eta \leq t \\ 1 + t, & t < \eta \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.2. $R_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^1[0,1] = \{y(\xi) | y [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^1} = y(0)v(0) + \int_0^1 y'(\xi)v'(\xi)d\xi, \quad y, v \in R_2^1[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^1}}, \quad y \in R_2^1[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 3.2. $R_2^1[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_x^{\{1\}}(\xi) = \begin{cases} 1 + \xi, & \xi \leq x \\ 1 + x, & x < \xi \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3. $R_2^2[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^2[0,1] = \{y(\eta) | y, y' [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y'' \in L^2[0,1], y(0) = 0\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^2[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^2} = y(0)v(0) + y'(0)v'(0) + \int_0^1 y''(\eta)v''(\eta)d\xi, \quad y, v \in R_2^2[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^2} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^2}}, \quad y \in R_2^2[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 3.3. $R_2^2[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_t^{\{2\}}(\eta) = \begin{cases} \eta t + \frac{1}{2} t \eta^2 - \frac{1}{6} \eta^3, & \eta \leq t \\ t \eta + \frac{1}{2} \eta t^2 - \frac{1}{6} t^3, & t < \eta \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.4. $R_2^3[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^3[0,1] = \{y(\xi) | y, y', y'' [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y^{(3)} \in L^2[0,1], y(0) = y(1) = 0\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^3[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^3} = y(0)v(0) + y'(0)v'(0) + y(1)v(1) + \int_0^1 y^{(3)}(\xi)v^{(3)}(\xi)d\xi, \quad y, v \in R_2^3[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^3} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^3}}, \quad y \in R_2^3[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 3.4. $R_2^3[0,1]$ Hilbert uzayı, doğuran çekirdekli bir uzaydır ve uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_x^{\{3\}}(\xi) =$$

$$\begin{cases} \frac{-1}{120} (x-1)\xi(\xi x^4 - 4\xi x^3 + 6\xi x^2 + x\xi^4 - 5x\xi^3 - 120x\xi + 120x + \xi^4), & \xi \leq x \\ \frac{-1}{120} (\xi-1)x(x\xi^4 - 4x\xi^3 + 6x\xi^2 + \xi x^4 - 5\xi x^3 - 120\xi x + 120\xi + x^4), & x < \xi \end{cases}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.5. $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayı iki değişkenli çekirdek üreten uzay olup $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$W_2^{(3,2)}(D) = \left\{ y(\xi, \eta) \mid \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^2 \partial \eta}, D \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^5 y}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} \in L^2(D), y(\xi, 0) = y(0, \eta) = y(1, \eta) = 0 \right\}$$

olarak tanımlanır. $y(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ olmak üzere bu uzaya ait iç çarpım

$$\begin{aligned}
\langle y, v \rangle_{W_2^{(3,2)}} &= \sum_{i=0}^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} y(0, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} v(0, \eta) \right] d\eta \\
&+ \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} y(1, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(1, \eta) d\eta \\
&+ \sum_{j=0}^1 \langle \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} y(\xi, 0), \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} v(\xi, 0) \rangle_{W_2^3} \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} y(\xi, \eta) \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve uzayın normu

$$\|y\|_{W_2^{(3,2)}}^2 = \langle y, y \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

ile ifade edilir.

Lemma 3.5. $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ fonksiyonu $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayının çekirdeği olsun. $K_x^{\{3\}}(\xi)$ ve $K_t^{\{2\}}(\eta)$ fonksiyonları sırasıyla $R_2^3[0,1]$ ve $R_2^2[0,1]$ uzaylarının çekirdek fonksiyonu olsunlar. Buradan $K_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_x^{\{3\}}(\xi)K_t^{\{2\}}(\eta)$ olarak ifade edilir. Herhangi bir $y(\xi, \eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ fonksiyonu için

$$y(x, t) = \langle y(\xi, \eta), K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

eşitliği yazılabilir ve $K_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_{(\xi,\eta)}(x, t)$ dir.

Tanım 3.6. $W_2^{(1,1)}(D)$ uzayı iki değişkenli çekirdek üreten uzay olup $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$W_2^{(1,1)}(D) = \left\{ y(\xi, \eta) \mid y, D \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \in L^2(D) \right\}$$

olarak tanımlanır. $y(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \in W_2^{(1,1)}(D)$ olmak üzere bu uzaya ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{W_2^{(1,1)}} = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} y(0, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} v(0, \eta) \right] d\eta + \langle y(\xi, 0), v(\xi, 0) \rangle_{W_2^1}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} y(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta$$

şeklinde tanımlanır ve uzayın normu

$$\|y\|_{W_2^{(1,1)}}^2 = \langle y, y \rangle_{W_2^{(1,1)}}$$

ile ifade edilir.

Lemma 3.6. $W_2^{(1,1)}(D)$ uzayı doğuran çekirdekli bir uzay olup bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu $\tilde{K}_{(x,t)}(\xi, \eta)$ olsun. $K_x^{\{1\}}(\xi)$ ve $K_t^{\{1\}}(\eta)$ çekirdek fonksiyonları $R_2^1[0,1]$ uzayının çekirdekleri olmak üzere

$$\tilde{K}_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_x^{\{1\}}(\xi) K_t^{\{1\}}(\eta)$$

olarak ifade edilir.

3.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Bu kısımda yaklaşık çözüm elde etmek amacıyla (3.1) denkleminde ait lineer operatör tanımlanacaktır. Tanımlanan lineer operatör ve üzerinde çalıştığımız uzaya ait çekirdek fonksiyonu yardımıyla $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayının ortonormal tabanı elde edilip yaklaşık çözümün ifadesi verilecektir. Öncelikle lineer $L: W_2^{(3,2)}(D) \rightarrow W_2^{(1,1)}(D)$ operatörünü

$$Ly(\xi, \eta) = D_\eta^\alpha y(\xi, \eta) + k_1(\xi, \eta) y_{\xi\xi}(\xi, \eta) + k_2(\xi, \eta) y(\xi, \eta) + k_3(\xi, \eta) y_\xi(\xi, \eta)$$

olarak yazabiliriz. $F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), y_\xi(\xi, \eta)) = f(\xi, \eta) - k_4(\xi, \eta) y(\xi, \eta) y_\xi(\xi, \eta)$ olarak alınırsa denklemimiz

$$\begin{cases} Ly(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), y_\xi(\xi, \eta)), \xi \in [0,1], \eta \in [0,1] \\ y(\xi, 0) = y(0, \eta) = y(1, \eta) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi sayılabilir $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty \in D$ yoğun dizisini seçelim ve $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunu, L lineer operatörü ve $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ çekirdek fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$\begin{aligned}
\psi_i(\xi, \eta) &= L_{(x,t)}K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\
&= \left\{ D_t^\alpha K_{(x,t)}(\xi, \eta) + k_1(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{(x,t)}(\xi, \eta) + k_2(x, t) K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right. \\
&\quad \left. + k_3(x, t) \frac{\partial}{\partial x} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right\} \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta_i} \frac{\partial_r K_{(\xi, r)}(\xi, \eta)}{(\eta_i - r)^\alpha} dr + k_1(\xi_i, \eta_i) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) \\
&\quad + k_2(\xi_i, \eta_i) K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) + k_3(\xi_i, \eta_i) \frac{\partial}{\partial x} K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Teorem 3.1. $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(3,2)}(D), i = 1, 2, \dots$

İspat. Öncelikle $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayının tanımından hareketle, $\frac{\partial^5 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} \in L^2(D)$ ve $\frac{\partial^3 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta}$ fonksiyonunun tamamen sürekli olduğunu göstereceğiz. Ardından $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunun başlangıç ve sınır şartlarını sağladığını göstereceğiz. $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ çekirdek fonksiyonunun özelliğinden yararlanarak

$$\partial_{x^2 \xi^3 \eta^2}^7 K_{(x,t)}(\xi, \eta) = \partial_{x^2 \xi^3}^5 R_x^{\{3\}}(\xi) \partial_{\eta^2}^2 R_t^{\{2\}}(\eta)$$

eşitliğini yazabiliriz. $\partial_{x^2 \xi^3}^5 R_x^{\{3\}}(\xi)$ ve $\partial_{\eta^2}^2 R_t^{\{2\}}(\eta)$ fonksiyonları $[0,1]$ aralığı üzerinde süreklidirler. Kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan $M_1 > 0$ olmak üzere

$$\left| \partial_{x^2 \xi^3 \eta^2}^7 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_1$$

yazılabilir. Benzer düşünüşle M_2, M_3 ve M_4 pozitif sabitler olmak üzere

$$\left| \partial_{t \xi^3 \eta^2}^6 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_2$$

$$\left| \partial_{\xi^3 \eta^2}^5 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_3$$

$$\left| \partial_{x \xi^3 \eta^2}^6 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_4$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.4) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^5 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} \right| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta_i} \frac{M_2}{(\eta_i - r)^\alpha} dr + k_1(\xi_i, \eta_i) M_1 + k_2(\xi_i, \eta_i) M_3 \right. \\
&\quad \left. + k_3(\xi_i, \eta_i) M_4 \right| \\
&\leq \frac{M_2}{\Gamma(2-\alpha)} \eta_i^{1-\alpha} + |k_1(\xi_i, \eta_i)| M_1 + |k_2(\xi_i, \eta_i)| M_3 + |k_3(\xi_i, \eta_i)| M_4
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu bize $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\frac{\partial^5 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} \in L^2(D)$ dir. D bölgesi kapalı olduğundan, $\frac{\partial^3 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta}$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen süreklidir.

Ayrıca $K_{(x,t)}(\xi, 0) = 0$ ve $K_{(x,t)}(0, \eta) = K_{(x,t)}(1, \eta) = 0$ olduğundan $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonu başlangıç ve sınır koşullarını sağlar. Bu bulgular doğrultusunda $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ olduğu görülür.

Hatırlatma 3.1. $D = [0,1] \times [0,1]$ bölgesinin, $\{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots\}$ sayılabilir yoğun dizisini ele alalım. L operatörünün adjointi L^* olmak üzere $\varphi_i(\xi, \eta) = \tilde{K}_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta)$, $\psi_i(\xi, \eta) = L^* \varphi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayının $\{\bar{\psi}_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sistemi, $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ sisteminin Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden elde edilerek

$$\bar{\psi}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(\xi, \eta)$$

şeklinde bulunur. Burada ki β_{ik} katsayıları ortogonalizasyon katsayılarıdır. Ayrıca $\beta_{ii} > 0$ dir.

Teorem 3.2. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi D bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ sistemi $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayında tam sistemdir ve $\psi_i(\xi, \eta) = L_{(x,t)} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)}$ dir.

İspat. $(\xi, \eta) \in D$ için

$$\begin{aligned}
\psi_i(\xi, \eta) &= (L^* \varphi_i)(\xi, \eta) = \langle (L^* \varphi_i)(x, t), K_{(\xi, \eta)}(x, t) \rangle_{W_2^{(3,2)}} \\
&= \langle \varphi_i(x, t), L_{(x,t)} K_{(\xi, \eta)}(x, t) \rangle_{W_2^{(1,1)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_{(x,t)}K_{(\xi,\eta)}(x,t)\Big|_{(x,t)=(\xi_i,\eta_i)} \\
&= L_{(x,t)}K_{(x,t)}(\xi,\eta)\Big|_{(x,t)=(\xi_i,\eta_i)}
\end{aligned}$$

elde edildiğinden, $\psi_i(\xi,\eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ olduğu görülür. Her bir $y(\xi,\eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ için $\langle y(\xi,\eta), \psi_i(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}(D)} = 0, i = 1, 2, \dots$ ise bu takdirde

$$\langle y(\xi,\eta), (L^*\varphi_i)(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} = \langle Ly(\xi,\eta), \varphi_i(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} = (Ly)(\xi_i,\eta_i) = 0, i = 1, 2, \dots$$

bulunur. $\{(\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun olduğundan, $Ly(\xi,\eta) = 0$ olur ki L^{-1} in varlığından $y(\xi,\eta) = 0$ olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.3. Eğer $\{(\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D bölgesinde yoğun ise (3.3) denkleminin çözümü

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k)) \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

olarak ifade edilir.

İspat. $y(\xi,\eta)$, (3.3) denkleminin çözümü olsun. Teorem 3.2 den $\{\psi_i(\xi,\eta)\}_{i=1}^{\infty}$ sisteminin $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayında tam olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
y(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle y(\xi,\eta), \bar{\psi}_i(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(\xi,\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle y(\xi,\eta), \psi_k(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(\xi,\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle y(\xi,\eta), L^*\varphi_k(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} \bar{\psi}_i(\xi,\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Ly(\xi,\eta), \varphi_k(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(\xi,\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Ly(\xi,\eta), \tilde{K}_{(\xi_k,\eta_k)}(\xi,\eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(\xi,\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} Ly(\xi_k, \eta_k) \bar{\psi}_i(\xi, \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

$y(\xi,\eta)$ çözümünün sonlu n teriminden $y_n(\xi,\eta)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Yani

$$y_n(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y(\xi_k, \eta_k)) \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$$

olarak ifade edilir. Ele alınan denklem lineer ise yaklaşık çözüm buradan bulunur. Ele alınan denklem lineer değil ise aşağıdaki iteratif süreç kurulacak ve yakınsaklığı incelenecektir.

3.3 İteratif Süreç ve Sürecin Yakınsaklığı

Bu kısımda lineer olmayan (3.1) denklemi için iterasyon süreci ifade edilip sürecin yakınsaklığını göstermek amacıyla bazı teoremler verilecektir. Modelimize ait iterasyon sürecini sabit bir $y_0(\xi, \eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ olarak

$$y_n(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (3.6) denklemindeki B_i katsayıları

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta_{11} F(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y_{k-1}(\xi_k, \eta_k)) \\ B_2 &= \sum_{k=1}^2 \beta_{2k} F(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y_{k-1}(\xi_k, \eta_k)) \\ &\vdots \\ B_i &= \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y_{k-1}(\xi_k, \eta_k)) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla $B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y(\xi_k, \eta_k))$ olmak üzere (3.5) ifadesinde ki $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ şeklinde ifade edilebilir. Şimdi $y_n(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümümüzün analitik çözüme yakınsadığını gösterelim.

Lemma 3.7. $F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), \partial_\xi y(\xi, \eta))$ sürekli fonksiyon, $\|y_n\|$ sınırlı ve $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_n \rightarrow \hat{y}$ olsun. Bu durumda

$$F(\xi_n, \eta_n, y_{n-1}(\xi_n, \eta_n), \partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n)) \rightarrow F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_\xi \hat{y}(x, t))$$

İspat. Doğrulan çekirdeğin temel özelliğinden faydalanarak

$$y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

$$y_{n-1}(x, t) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \hat{y}(x, t)| &= |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t) + y_{n-1}(x, t) - \hat{y}(x, t)| \\ &\leq |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| + |y_{n-1}(x, t) - \hat{y}(x, t)| \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki terimi inceleyelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| &= |\langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle| \\ &\leq \|y_{n-1}(\xi, \eta)\| \|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta)\| \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $y_{n-1}(\xi, \eta)$ nın yakınsaklığından, öyle bir M sayısı vardır ki $n \geq M$ için

$$\|y_{n-1}(\xi, \eta)\|_{W_2^{(3,2)}} \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(3,2)}}$$

yazılabilir. Eşitsizliğimizin yeni hali

$$|y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(3,2)}} \|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta)\|$$

şeklinde olur. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ olduğundan $\|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta)\| \rightarrow 0$ olur ki $|y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \hat{y}(x, t)$ olur.

Şimdi de $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olduğunu görelim. Yine doğurulan çekirdeğin temel özelliğinden

$$\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

$$\partial_\xi y_{n-1}(x, t) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Şimdi de yakınsama için

$$\begin{aligned} &|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \\ &= |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t) + \partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \\ &\leq |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| + |\partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki terimi inceleyelim.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| &= |\langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_\xi K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle| \\ &\leq \|y_{n-1}(\xi, \eta)\| \|\partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_\xi K_{(x,t)}(\xi, \eta)\| \end{aligned}$$

elde edilir. $n \geq M$ için $\|y_{n-1}(\xi, \eta)\|_{W_2^{(3,2)}} \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(3,2)}}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ olduğundan $\|\partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_\xi K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \rightarrow 0$ olur ki $|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| \rightarrow 0$ dir. Diğer taraftan, $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_{n-1} \rightarrow \hat{y}$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $\partial_\xi y_{n-1}(x, t) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olur ki $|\partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla $|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olduğu görülür. F fonksiyonunun sürekliliğinden $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için

$$F\left(\xi_n, \eta_n, y_{n-1}(\xi_n, \eta_n), \partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n)\right) \rightarrow F\left(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_\xi \hat{y}(x, t)\right)$$

olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 3.4. Kabul edelim ki (3.3) deki $\|y_n(\xi, \eta)\|$ sınırlı olsun ve (3.6) bir tek çözüme sahip olsun. Eğer $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi D de yoğun ise, y_n yaklaşık çözümü y kesin çözümüne yakınsar ve $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ olarak ifade edilir.

İspat. İlk olarak $y_n(\xi, \eta)$ nin yakınsaklığını inceleyelim. (3.6) denklemden

$$y_{n+1}(\xi, \eta) = y_n(\xi, \eta) + B_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(\xi, \eta)$$

yazılabilir. $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^\infty$ nin ortonormalliğinden yararlanarak,

$$\|y_{n+1}\|^2 = \|y_n\|^2 + B_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^2 \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir. (3.7) ifadesinden $\|y_{n+1}\| > \|y_n\|$ eşitsizliği yazılır ki bu $\|y_n\|$ nin monoton artan olduğunu gösterir. Ayrıca $\|y_n\|$ sınırlı olduğundan yakınsaktır ve $\sum_{i=1}^\infty B_i^2 = c$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. Dolayısıyla $\{B_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ dir.

Eğer $m > n$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|y_m - y_{m-1} + y_{m-1} - y_{m-2} + y_{m-2} + \dots + y_{n+1} - y_n\|^2 \\ &= \|y_m - y_{m-1}\|^2 + \|y_{m-1} - y_{m-2}\|^2 + \dots + \|y_{n+1} - y_n\|^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\|y_m - y_{m-1}\|^2 = B_m^2$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $\|y_m - y_n\|^2 = \sum_{l=n+1}^m B_l^2 \rightarrow 0$ olur. $W_2^{(3,2)}(D)$ uzayı tam olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $y_n \rightarrow \hat{y}$ olur. Şimdi \hat{y} nin temsili çözüm olup (3.3) denklemini sağladığını gösterelim. (3.6) ifadesinin her iki yanının $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak, $\hat{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ elde edilir. Ayrıca belirtelim ki, $(L\hat{y})(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i L\bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ dir. Buradan hareketle, (ξ, η) noktası yerine (ξ_l, η_l) noktasını kullanırsak;

$$\begin{aligned}
(L\hat{y})(\xi_l, \eta_l) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i L\bar{\psi}_i(\xi_l, \eta_l) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle L\bar{\psi}_i(\xi, \eta), \varphi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), L^* \varphi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \psi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^i \beta_{il} (L\hat{y})(\xi_l, \eta_l) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \sum_{l=1}^i \beta_{il} \psi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \bar{\psi}_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} = B_l
\end{aligned}$$

elde edilir ki $B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k))$ ifadesinden

$$L\hat{y}(\xi_l, \eta_l) = F(\xi_l, \eta_l, y_{l-1}(\xi_l, \eta_l), \partial_{\xi} y_{l-1}(\xi_l, \eta_l))$$

yazılabilir. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun olduğundan ve her $(x, t) \in D$ için $\{(\xi_{n_j}, \eta_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır öyle ki $j \rightarrow \infty$ için $(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) \rightarrow (x, t)$ dir. O halde

$$L\hat{y}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) = F(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}, y_{n_j-1}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}), \partial_{\xi} y_{n_j-1}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}))$$

yazılabilir. $j \rightarrow \infty$ için F fonksiyonunun sürekliliği ve Lemma 3.7 den yararlanarak

$$L\hat{y}(x, t) = F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_{\xi} \hat{y}(x, t))$$

yazılabilir. Bu bize $\hat{y}(\xi, \eta)$ nın (3.3) denklemini sağladığını gösterir ki ispat tamamlanır.

Bu bölüme kadar (3.1) denklemini için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılarak yaklaşık çözümün inşası ve iteratif sürecin yakınsaklığı incelendi. Şimdi yaptığımız çalışmanın nümerik incelemesini yapmak amacıyla örnekler üzerinde uygulamasını vereceğiz.

3.4 Örnekler ve Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, kesin çözümleri kesir parametresi içeren sabit ve değişken katsayılı olmak üzere iki örnek çözüldü. α kesir mertebesinin farklı değerleri için mutlak hata

değerleri tablolar halinde verildi. Yine α parametresinin farklı değerleri için yaklaşık çözüm grafikleri verildi.

Örnek 3.1.

$$D_{\eta}^{\alpha}y + (1 + \xi\eta)y_{\xi\xi} + \xi^2y + (\xi + 1)y_{\xi} - \eta\sin(\xi)yy_{\xi} = f(\xi, \eta)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{(\xi^2 - \xi)\eta\pi}{\sin(\alpha\pi)\Gamma(-\alpha - 1)} + 2\eta^{1+\alpha}(1 + \xi\eta) + (\xi^4 - \xi^3)\eta^{1+\alpha} \\ + (1 + \xi)(2\xi - 1)\eta^{1+\alpha} - \eta\sin(\xi)(\xi^2 - \xi)(2\xi - 1)\eta^{2+2\alpha}$$

lineer olmayan Burgers denklemini ele alalım. Denkleminize ait başlangıç ve sınır şartları

$$y(\xi, 0) = 0$$

$$y(0, \eta) = y(1, \eta) = 0$$

olarak alınacaktır. İncelediğimiz denkleme ait kesin çözüm $y(\xi, \eta) = (\xi^2 - \xi)\eta^{1+\alpha}$ dır. $n = p \times q$ olmak üzere $\xi_i = \frac{i}{p}$, ($i = 1, 2, \dots, p$) ve $\eta_i = \frac{i}{q}$, ($i = 1, 2, \dots, q$) olarak alınmıştır. $p = 5$ ve $q = 5$ olmak üzere $n = 25$ nokta alınarak $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için mutlak hata tabloları verilmiştir. Yine $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözüm grafiği verilmiştir.

Çizelge 3.1 Örnek 3.1'de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

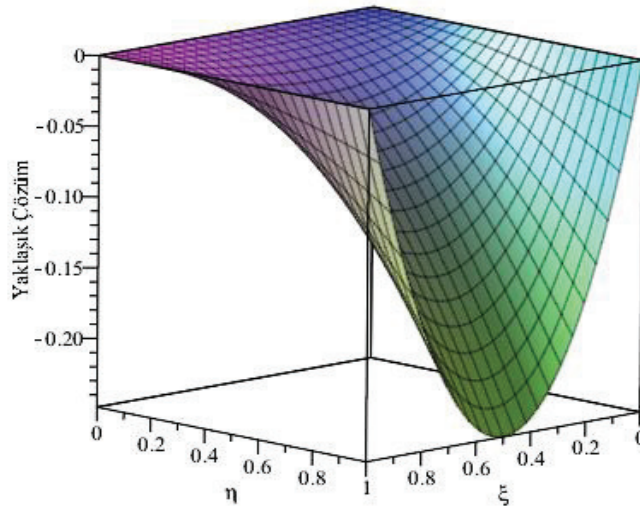
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	2.39E-4	2.26E-5	3.74E-5	5.31E-5	4.92E-5	7.43E-5	4.87E-5	9.56E-5	1.52E-4
0.2	4.25E-4	4.23E-5	7.26E-5	1.05E-4	1.05E-4	1.60E-4	1.28E-4	1.11E-4	1.88E-4
0.3	5.58E-4	5.78E-5	1.01E-4	1.48E-4	1.53E-4	2.33E-4	2.02E-4	9.36E-5	1.68E-4
0.4	6.37E-4	6.53E-5	1.16E-4	1.71E-4	1.80E-4	2.77E-4	2.54E-4	6.54E-5	1.18E-4
0.5	6.62E-4	6.74E-5	1.21E-4	1.79E-4	1.89E-4	2.95E-4	2.82E-4	2.86E-5	4.44E-5
0.6	6.33E-4	6.10E-5	1.11E-4	1.65E-4	1.73E-4	2.77E-4	2.74E-4	2.14E-6	2.40E-5
0.7	5.52E-4	5.06E-5	9.32E-5	1.37E-4	1.42E-4	2.34E-4	2.38E-4	1.75E-5	7.99E-5
0.8	4.18E-4	3.43E-5	6.43E-5	9.51E-5	9.54E-5	1.64E-4	1.71E-4	1.85E-5	9.73E-5
0.9	2.34E-4	1.72E-5	3.27E-5	4.80E-5	4.58E-5	8.33E-5	8.97E-5	1.21E-5	7.48E-5

Çizelge 3.2 Örnek 3.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

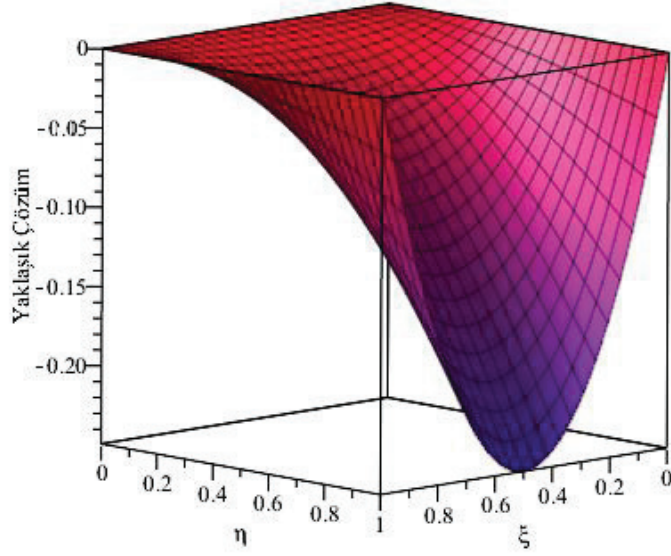
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	2.46E-4	1.09E-5	1.47E-5	1.97E-5	1.14E-5	5.62E-5	4.30E-5	2.95E-5	1.15E-5
0.2	4.39E-4	1.54E-5	3.50E-5	4.96E-5	4.19E-5	1.31E-4	1.19E-4	5.58E-6	5.78E-5
0.3	5.78E-4	1.54E-5	5.50E-5	7.80E-5	7.29E-5	1.97E-4	1.91E-4	5.57E-5	1.45E-4
0.4	6.62E-4	1.46E-5	6.81E-5	9.58E-5	9.22E-5	2.38E-4	2.40E-4	9.92E-5	2.25E-4
0.5	6.91E-4	1.07E-5	7.71E-5	1.05E-4	1.02E-4	2.57E-4	2.65E-4	1.33E-4	2.92E-4
0.6	6.64E-4	8.35E-6	7.53E-5	1.00E-4	9.47E-5	2.44E-4	2.55E-4	1.41E-4	3.23E-4
0.7	5.83E-4	4.23E-6	6.81E-5	8.67E-5	7.89E-5	2.08E-4	2.20E-4	1.33E-4	3.18E-4
0.8	4.44E-4	2.72E-6	5.03E-5	6.06E-5	5.07E-5	1.46E-4	1.56E-4	9.81E-5	2.60E-4
0.9	2.50E-4	5.91E-7	2.81E-5	3.16E-5	2.35E-5	7.56E-5	8.10E-5	5.28E-5	1.56E-4

Çizelge 3.3 Örnek 3.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

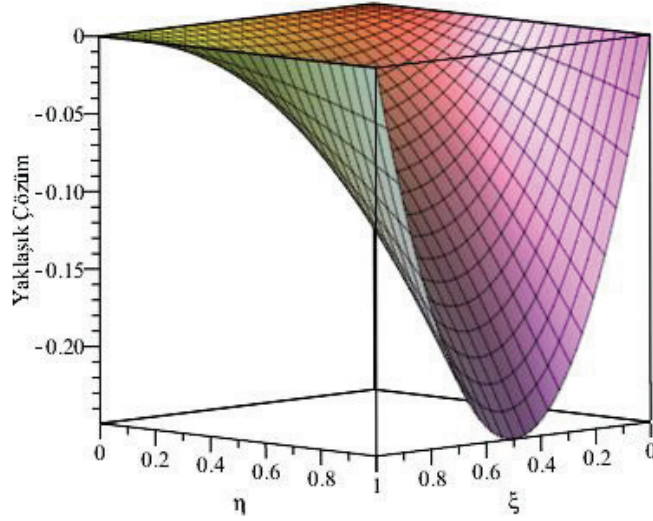
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	2.66E-4	3.77E-5	1.28E-6	1.21E-6	1.63E-5	2.90E-5	1.17E-5	1.61E-5	4.78E-5
0.2	4.75E-4	6.11E-5	9.13E-6	1.95E-5	4.18E-6	8.61E-5	6.64E-5	3.04E-5	1.61E-4
0.3	6.26E-4	7.33E-5	2.33E-5	4.07E-5	1.48E-5	1.40E-4	1.22E-4	8.70E-5	2.76E-4
0.4	7.18E-4	7.78E-5	3.53E-5	5.63E-5	2.95E-5	1.77E-4	1.64E-4	1.33E-4	3.67E-4
0.5	7.52E-4	7.27E-5	4.66E-5	6.75E-5	4.03E-5	1.97E-4	1.87E-4	1.65E-4	4.28E-4
0.6	7.25E-4	6.32E-5	5.03E-5	6.69E-5	3.91E-5	1.90E-4	1.83E-4	1.70E-4	4.41E-4
0.7	6.39E-4	4.78E-5	5.02E-5	6.07E-5	3.38E-5	1.64E-4	1.60E-4	1.55E-4	4.11E-4
0.8	4.90E-4	3.21E-5	4.01E-5	4.34E-5	1.95E-5	1.18E-4	1.13E-4	1.13E-4	3.22E-4
0.9	2.77E-4	1.48E-5	2.44E-5	2.35E-5	7.95E-6	6.20E-5	5.84E-5	6.14E-5	1.86E-4



Şekil 3.1: Örnek 3.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 3.2: Örnek 3.1'de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 3.3: Örnek 3.1'de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.

Örnek 3.2.

$$D_{\eta}^{\alpha} y - y_{\xi\xi} - yy_{\xi} = f(\xi, \eta)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{4^{\alpha} \eta^{\alpha} \sin(\xi\pi) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} + \sin(\xi\pi) \pi^2 \eta^{2\alpha} \sin(\pi\xi) \cos(\pi\xi) \eta^{4\alpha} \pi$$

lineer olmayan Burgers denklemini ele alalım. Denkleminize ait başlangıç ve sınır şartları

$$y(\xi, 0) = 0$$

$$y(0, \eta) = y(1, \eta) = 0$$

olarak alınacaktır. İncelediğimiz denkleme ait kesin çözüm $y(\xi, \eta) = \sin(\pi\xi)\eta^{2\alpha}$ dır. $n = p \times q$ olmak üzere $\xi_i = \frac{i}{p}$, ($i = 1, 2, \dots, p$) ve $\eta_i = \frac{i}{q}$, ($i = 1, 2, \dots, q$) olarak alınmıştır. $p = 10$ ve $q = 10$ olmak üzere $n = 100$ nokta alınarak $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için mutlak hata tabloları verilmiştir. Yine $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözüm grafiği verilmiştir.

Çizelge 3.4 Örnek 3.2'de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

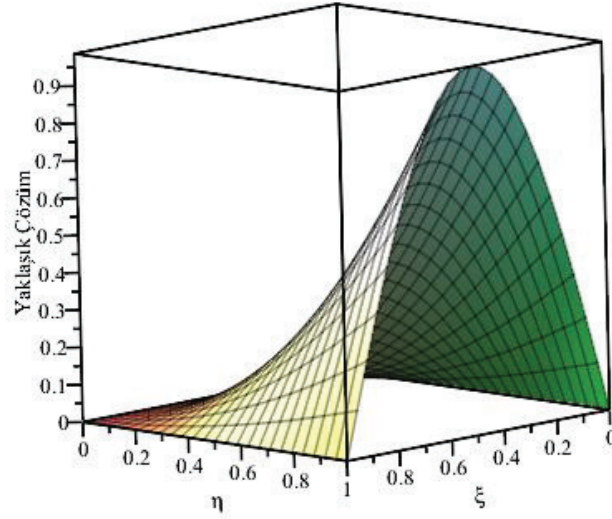
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	2.50E-3	1.57E-3	5.40E-4	6.93E-5	2.01E-5	9.54E-5	3.82E-4	7.89E-4	8.37E-4
0.2	4.63E-3	2.70E-3	4.81E-4	7.72E-4	1.37E-3	1.66E-3	1.70E-3	1.57E-3	2.18E-3
0.3	6.28E-3	3.58E-3	4.21E-4	1.44E-3	2.45E-3	3.05E-3	3.33E-3	3.33E-3	4.47E-3
0.4	7.32E-3	4.13E-3	3.64E-4	1.89E-3	3.15E-3	3.94E-3	4.35E-3	4.51E-3	5.83E-3
0.5	7.67E-3	4.30E-3	3.11E-4	2.08E-3	3.43E-3	4.29E-3	4.73E-3	4.89E-3	6.26E-3
0.6	7.30E-3	4.07E-3	2.64E-4	2.02E-3	3.30E-3	4.10E-3	4.50E-3	4.62E-3	5.87E-3
0.7	6.23E-3	3.46E-3	2.18E-4	1.72E-3	2.80E-3	3.46E-3	3.77E-3	3.83E-3	4.84E-3
0.8	4.55E-3	2.53E-3	1.62E-4	1.24E-3	2.01E-3	2.48E-3	2.68E-3	2.69E-3	3.39E-3
0.9	6.23E-3	1.33E-3	8.92E-5	6.45E-4	1.04E-3	1.28E-3	1.38E-3	1.37E-3	1.73E-3

Çizelge 3.5 Örnek 3.2'de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

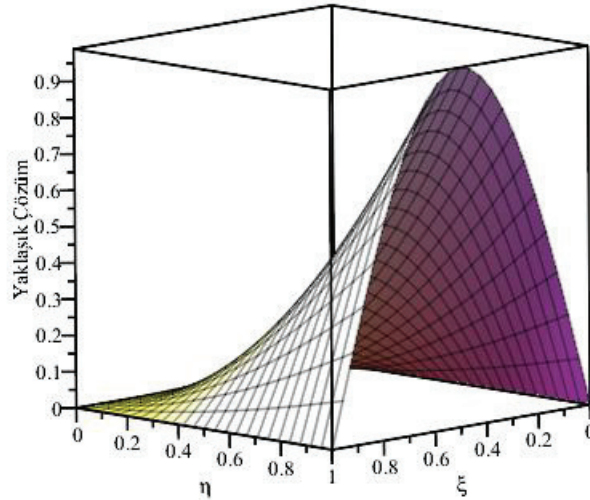
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	2.09E-3	7.98E-4	1.20E-4	8.39E-5	1.77E-4	2.77E-4	4.19E-4	6.79E-4	9.02E-4
0.2	3.81E-3	1.15E-3	4.53E-4	9.29E-4	1.20E-3	1.52E-3	1.82E-3	1.93E-3	2.16E-3
0.3	5.16E-3	1.43E-3	9.12E-4	1.74E-3	2.31E-3	2.95E-3	3.58E-3	3.97E-3	4.53E-3
0.4	6.01E-3	1.59E-3	1.22E-3	2.28E-3	3.04E-3	3.89E-3	4.71E-3	5.27E-3	6.00E-3
0.5	6.29E-3	1.63E-3	1.36E-3	2.51E-3	3.35E-3	4.28E-3	5.17E-3	5.76E-3	6.53E-3
0.6	5.98E-3	1.53E-3	1.33E-3	2.45E-3	3.25E-3	4.14E-3	4.98E-3	5.52E-3	6.20E-3
0.7	5.10E-3	1.29E-3	1.15E-3	2.10E-3	2.78E-3	3.52E-3	4.22E-3	4.65E-3	5.19E-3
0.8	3.72E-3	9.43E-4	8.43E-4	1.52E-3	2.01E-3	2.54E-3	3.04E-3	3.33E-3	3.70E-3
0.9	1.96E-3	4.97E-4	4.42E-4	8.00E-4	1.05E-3	1.33E-3	1.58E-3	1.72E-3	1.91E-3

Çizelge 3.6 Örnek 3.2’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

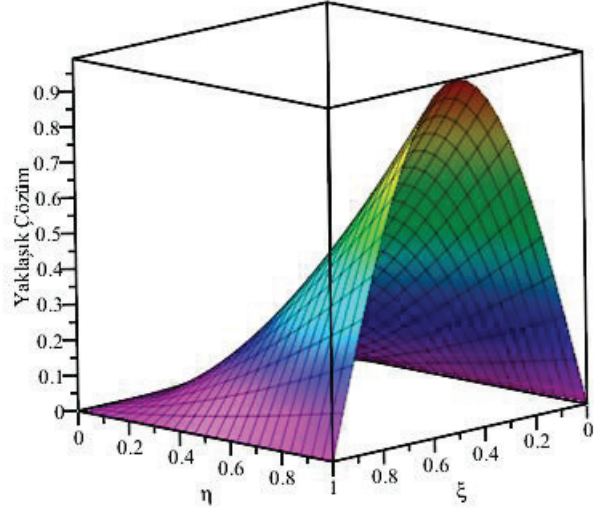
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	1.52E-3	2.87E-4	1.56E-4	3.31E-4	4.56E-4	5.71E-4	6.90E-4	8.63E-4	1.09E-3
0.2	2.69E-3	7.72E-5	5.72E-4	6.69E-4	8.89E-4	1.73E-3	1.48E-3	1.72E-3	1.88E-3
0.3	3.62E-3	8.15E-5	1.15E-3	1.46E-3	1.96E-3	2.55E-3	3.19E-3	3.74E-3	4.19E-3
0.4	4.20E-3	1.89E-4	1.53E-3	2.00E-3	2.68E-3	3.46E-3	4.31E-3	5.04E-3	5.65E-3
0.5	4.39E-3	2.50E-4	1.71E-3	2.26E-3	3.00E-3	3.87E-3	4.78E-3	5.57E-3	6.21E-3
0.6	4.17E-3	2.67E-4	1.68E-3	2.22E-3	2.94E-3	3.77E-3	4.64E-3	5.37E-3	5.96E-3
0.7	3.55E-3	2.41E-4	1.46E-3	1.92E-3	2.53E-3	3.23E-3	3.96E-3	4.56E-3	5.03E-3
0.8	2.58E-3	1.81E-4	1.07E-3	1.40E-3	1.85E-3	2.35E-3	2.86E-3	3.29E-3	3.60E-3
0.9	1.36E-3	9.69E-5	5.66E-4	7.40E-4	9.71E-4	1.23E-3	1.50E-3	1.71E-3	1.87E-3



Şekil 3.4: Örnek 3.2’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 3.5: Örnek 3.2’de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 3.6: Örnek 3.2'de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



4. ADVEKSİYON DENKLEMİ

Bu bölümde kesir mertebeli türev içeren Adveksiyon denkleminin nümerik çözümleri doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile bulunacaktır. Nümerik çözümler elde edilmeden önce iteratif süreci oluşturmak için doğuran çekirdekli uzaylar ve bu uzayların ürettiği çekirdekler verilecektir. İteratif süreç oluşturulduktan sonra metodun yakınsaklık analizi yapılacaktır. Ardından metodun etkisini göstermek amacıyla model problem çözülecek ve elde edilen sonuçlar tablo ve grafik ile verilecektir. Bu kısımda tanım, teorem ve lemmalar içerisinde ifade edilen uzaylar ve çekirdek fonksiyonlarının elde edilmesinde (Cui ve Lin, 2009) kaynağından yararlanılmıştır. Ayrıca çalışılan uzaya ait çekirdek fonksiyonunu elde etme süreci 2. bölümde detaylı olarak verilmiştir.

Akışkan moleküller arasındaki ısı transferi konveksiyon olarak adlandırılır. Bu durum iki farklı mekanizmdan elde edilir. Enerji transferi rastgele moleküller arasında gerçekleşirse ve kütle hareketi yoksa konveksiyona difüzyon denir. Eğer enerji transferi kütle hareketi tarafından gerçekleştirilirse bu durumda konveksiyon adveksiyon olarak adlandırılır.

Adveksiyon denklemi akışkanlar mekaniği, yoğun madde fiziği, soliton fiziği, kuantum alan teorisi gibi fizik, mühendislik ve uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarında karşımıza çıkar. Bu denklemin çözümlerinin varlık ve tekliği için Ellison (1971) ve Caughey ve Ellison (1975) referans olarak gösterilebilir. Wazwaz (2009) adveksiyon denklemine Adomian ayrışım metodu uygulayarak kuvvet serisi çözümlerini elde etmiştir. Jiang ve Lin (2010) zaman-uzay kesir mertebeli değişken katsayılı adveksiyon-dispersiyon denkleminin nümerik nümerik çözümü için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar. Mohyud-Din ve ark. (2018) zaman kesirli adveksiyon-difüzyon denkleminin nümerik çözümünü sonlu fark şeması kullandılar.

$$D_{\eta}^{\alpha}y(\xi, \eta) + y(\xi, \eta)y_{\xi}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad (4.1)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$$

Yukarda (4.1) denklemi ile verilen Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan adveksiyon denklemini göz önüne alalım. Burada D_{η}^{α} , η zaman

değişkenine göre α mertebeden Caputo kesirli türev operatörüdür. Ayrıca $f(\xi, \eta)$ sürekli fonksiyondur. Denkleminize ait başlangıç koşulu

$$y(\xi, 0) = h(\xi) \quad (4.2)$$

olarak alınacaktır.

4.1 Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar

Bu kısımda (4.1) denkleminin zaman ve uzay değişkenine göre en yüksek mertebeden türevleri esas alınarak, doğuran çekirdek uzayları ve bu uzaylara ait çekirdek fonksiyonları elde edilecektir.

Tanım 4.1. $H_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı

$$H_2^1[0,1] = \{y(\eta) | y [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $H_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{H_2^1} = y(0)v(0) + \int_0^1 y'(\eta)v'(\eta)d\eta, \quad y, v \in H_2^1[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{H_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{H_2^1}}, \quad y \in H_2^1[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 4.1. $H_2^1[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_t^{\{1\}}(\eta) = \begin{cases} 1 + \eta, & \eta \leq t \\ 1 + t, & t < \eta \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.2. $R_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^1[0,1] = \{y(\xi) | y [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^1} = y(0)v(0) + \int_0^1 y'(\xi)v'(\xi)d\xi, \quad y, v \in R_2^1[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^1}}, \quad y \in R_2^1[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 4.2. $R_2^1[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_x^{\{1\}}(\xi) = \begin{cases} 1 + \xi, & \xi \leq x \\ 1 + x, & x < \xi \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.3. $R_2^2[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^2[0,1] = \{y(\eta) | y, y' [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y'' \in L^2[0,1], y(0) = 0\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^2[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^2} = y(0)v(0) + y'(0)v'(0) + \int_0^1 y''(\eta)v''(\eta)d\xi, \quad y, v \in R_2^2[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^2} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^2}}, \quad y \in R_2^2[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 4.3. $R_2^2[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_t^{\{2\}}(\eta) = \begin{cases} \eta t + \frac{1}{2}t\eta^2 - \frac{1}{6}\eta^3, & \eta \leq t \\ \eta t + \frac{1}{2}\eta t^2 - \frac{1}{6}t^3, & t < \eta \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.4. $R_2^2[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^2[0,1] = \{y(\xi) | y, y' [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y'' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^2[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^2} = y(0)v(0) + y'(0)v'(0) + \int_0^1 y''(\xi)v''(\xi)d\xi, \quad y, v \in R_2^2[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^2} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^2}}, \quad y \in R_2^2[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 4.4. $R_2^2[0,1]$ Hilbert uzayı, doğuran çekirdekli bir uzaydır ve uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_x^{\{2\}}(\xi) = \begin{cases} 1 + \xi x + \frac{1}{2} x \xi^2 - \frac{1}{6} \xi^3, & \xi \leq x \\ 1 + \xi x + \frac{1}{2} \xi x^2 - \frac{1}{6} x^3, & x < \xi \end{cases}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 4.5. $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayı iki değişkenli çekirdek üreten uzay olup $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$W_2^{(2,2)}(D) = \left\{ y(\xi, \eta) \mid \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}, D \text{ bölgesinde tamamen süreklil, } \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \in L^2(D), y(\xi, 0) = 0 \right\}$$

olarak tanımlanır. $y(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D)$ olmak üzere bu uzaya ait iç çarpım

$$\begin{aligned} \langle y, v \rangle_{W_2^{(2,2)}} &= \sum_{i=0}^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} y(0, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} v(0, \eta) \right] d\eta \\ &+ \sum_{j=0}^1 \langle \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} y(\xi, 0), \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} v(\xi, 0) \rangle_{W_2^2} \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} y(\xi, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve uzayın normu

$$\|y\|_{W_2^{(2,2)}}^2 = \langle y, y \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

ile ifade edilir.

Lemma 4.5. $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ fonksiyonu $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayının çekirdeği olsun. $K_x^{\{2\}}(\xi)$ ve $K_t^{\{2\}}(\eta)$ fonksiyonları sırasıyla $R_2^2[0,1]$ uzaylarının çekirdek fonksiyonu olsunlar. Buradan $K_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_x^{\{2\}}(\xi) K_t^{\{2\}}(\eta)$ olarak ifade edilir. Herhangi bir $y(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D)$ fonksiyonu için

$$y(x, t) = \langle y(\xi, \eta), K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

eşitliği yazılabilir ve $K_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_{(\xi,\eta)}(x, t)$ dir.

Tanım 4.6. $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $W_2^{(1,1)}(D)$ uzayı iki değişkenli çekirdek üreten uzay olup

$$W_2^{(1,1)}(D) = \left\{ y(\xi, \eta) \mid y, D \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \in L^2(D) \right\}$$

olarak tanımlanır. $y(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \in W_2^{(1,1)}(D)$ olmak üzere bu uzaya ait iç çarpım

$$\begin{aligned} \langle y, v \rangle_{W_2^{(1,1)}} &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} y(0, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} v(0, \eta) \right] d\eta + \langle y(\xi, 0), v(\xi, 0) \rangle_{W_2^1} \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} y(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve uzayın normu

$$\|y\|_{W_2^{(1,1)}}^2 = \langle y, y \rangle_{W_2^{(1,1)}}$$

ile ifade edilir.

Lemma 4.6. $W_2^{(1,1)}(D)$ uzayı doğuran çekirdekli bir uzay olup bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu $\tilde{K}_{(x,t)}(\xi, \eta)$ olsun. $K_x^{\{1\}}(\xi)$ ve $K_t^{\{1\}}(\eta)$ çekirdek fonksiyonları $R_2^1[0,1]$ uzayının çekirdekleri olmak üzere

$$\tilde{K}_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_x^{\{1\}}(\xi) K_t^{\{1\}}(\eta)$$

olarak ifade edilir.

4.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Bu kısımda yaklaşık çözüm elde etmek amacıyla (4.1) denkleminde ait lineer operatör tanımlanacaktır. Tanımlanan lineer operatör ve üzerinde çalıştığımız uzaya ait çekirdek fonksiyonu yardımıyla $W_2^{(2,2)}$ uzayının ortonormal tabanı elde edilip yaklaşık çözümün ifadesi verilecektir. (4.2) şartının homojenleştirilmesinden sonra lineer operatörümüz

$$\begin{aligned} L: W_2^{(2,2)}(D) &\rightarrow W_2^{(1,1)}(D) \\ Ly(\xi, \eta) &= D_\eta^\alpha y(\xi, \eta) + h(\xi)y_\xi(\xi, \eta) + h'(\xi)y(\xi, \eta) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), y_\xi(\xi, \eta)) = f(\xi, \eta) - h'(\xi)h(\xi) - y(\xi, \eta)y_\xi(\xi, \eta)$ alındığında denklemimiz

$$\begin{cases} Ly(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), y_\xi(\xi, \eta)), \xi \in [0,1], \eta \in [0,1] \\ y(\xi, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi sayılabilir $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty \in D$ yoğun dizisini seçelim ve $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunu, L lineer operatörü ve $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ çekirdek fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$\begin{aligned} \psi_i(\xi, \eta) &= L_{(x,t)}K_{(x,t)}(\xi, \eta)\Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\ &= \left\{ D_t^\alpha K_{(x,t)}(\xi, \eta) + h(x) \frac{\partial}{\partial x} K_{(x,t)}(\xi, \eta) + h'(x) K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right\}\Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta_i} \frac{\partial_r K_{(\xi,r)}(\xi, \eta)}{(\eta_i - r)^\alpha} dr + h(\xi_i) \frac{\partial}{\partial x} K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) + h'(\xi_i) K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Teorem 4.1. $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D), i = 1, 2, \dots$

İspat. Öncelikle $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayının tanımını kullanarak, $\frac{\partial^4 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \in L^2(D)$ ve $\frac{\partial^2 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}$ fonksiyonunun tamamen sürekli olduğunu göstereceğiz. Ardından $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunun başlangıç şartını sağladığını göstereceğiz. $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ çekirdek fonksiyonunun özelliğinden yararlanarak

$$\partial_{x\xi^3\eta^2}^5 K_{(x,t)}(\xi, \eta) = \partial_{x\xi^2}^3 R_x^{\{2\}}(\xi) \partial_{\eta^2}^2 R_t^{\{2\}}(\eta)$$

eşitliğini yazabiliriz. $\partial_{x\xi^2}^3 R_x^{\{2\}}(\xi)$ ve $\partial_{\eta^2}^2 R_t^{\{2\}}(\eta)$ fonksiyonları $[0,1]$ aralığı üzerinde süreklidir. Kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan $M_1 > 0$ olmak üzere

$$\left| \partial_{x\xi^3\eta^2}^5 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_1$$

yazılabilir. Benzer düşünüşle M_2 ve M_3 pozitif sabitler olmak üzere

$$\left| \partial_{t\xi^2\eta^2}^5 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_2$$

$$\left| \partial_{\xi^2\eta^2}^4 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_3$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.4) denklemini kullanarak

$$\left| \frac{\partial^4 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right| \leq \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta_i} \frac{M_2}{(\eta_i - r)^\alpha} dr + h(\xi_i)M_1 + h'(\xi_i)M_3 \right|$$

$$\leq \frac{M_2}{\Gamma(2-\alpha)} \eta_i^{1-\alpha} + |h(\xi_i)|M_1 + |h'(\xi_i)|M_3$$

elde edilir ki bu bize $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\frac{\partial^4 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \in L^2(D)$ dir. D bölgesi kapalı olduğundan, $\frac{\partial^2 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen süreklidir. Ayrıca $K_{(x,t)}(\xi, 0) = 0$ olduğundan $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonu başlangıç koşulunu sağlar. Bu bulgular doğrultusunda $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D)$ olduğu görülür.

Hatırlatma 4.1. $D = [0,1] \times [0,1]$ bölgesinin, $\{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots\}$ sayılabilir yoğun dizisini ele alalım. L operatörünün adjointi L^* olmak üzere $\varphi_i(\xi, \eta) = \tilde{K}_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta)$, $\psi_i(\xi, \eta) = L^* \varphi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayının $\{\bar{\psi}_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ orthonormal sistemi, $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ sisteminin Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden elde edilerek

$$\bar{\psi}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(\xi, \eta)$$

şeklinde bulunur. Burada ki β_{ik} katsayıları ortogonalizasyon katsayılarıdır. Ayrıca $\beta_{ii} > 0$ dir.

Teorem 4.2. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi D bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ sistemi $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayında tam sistemdir ve $\psi_i(\xi, \eta) = L_{(x,t)} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)}$ dir.

İspat. $(\xi, \eta) \in D$ için

$$\begin{aligned} \psi_i(\xi, \eta) &= (L^* \varphi_i)(\xi, \eta) = \langle (L^* \varphi_i)(x, t), K_{(\xi, \eta)}(x, t) \rangle_{W_2^{(2,2)}} \\ &= \langle \varphi_i(x, t), L_{(x,t)} K_{(\xi, \eta)}(x, t) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \\ &= L_{(x,t)} K_{(\xi, \eta)}(x, t) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\ &= L_{(x,t)} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \end{aligned}$$

elde edildiğinden, $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D)$ olduğu görülür. Her bir $y(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D)$ için $\langle y(\xi, \eta), \psi_i(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}(D)} = 0, i = 1, 2, \dots$ ise bu takdirde

$$\langle y(\xi, \eta), (L^* \varphi_i)(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} = \langle Ly(\xi, \eta), \varphi_i(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} = (Ly)(\xi_i, \eta_i) = 0, i = 1, 2, \dots$$

bulunur. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun olduğundan, $Ly(\xi, \eta) = 0$ olur ki L^{-1} in varlığından $y(\xi, \eta) = 0$ olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. Eğer $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D bölgesinde yoğun ise (4.3) denkleminin çözümü

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k)) \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (4.5)$$

olarak ifade edilir.

İspat. $y(\xi, \eta)$, (4.3) denkleminin çözümü olsun. Teorem 4.2 den $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^{\infty}$ sisteminin $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayında tam olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle y(\xi, \eta), \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle y(\xi, \eta), \psi_k(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle y(\xi, \eta), L^* \varphi_k(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Ly(\xi, \eta), \varphi_k(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} Ly(\xi_k, \eta_k) \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k)) \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

$y(\xi, \eta)$ çözümünün sonlu n teriminden $y_n(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Yani

$$y_n(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k)) \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$$

olarak ifade edilir. Ele alınan denklem lineer ise yaklaşık çözüm buradan bulunur. Ele alınan denklem lineer değil ise aşağıdaki iteratif süreç kurulacak ve yakınsaklığı incelenecektir.

4.3 İteratif Süreç ve Sürecin Yakınsaklığı

Bu kısımda lineer olmayan (4.1) denklemi için iterasyon süreci ifade edilip sürecin yakınsaklığını göstermek amacıyla bazı teoremler verilecektir. Modelimize ait iterasyon sürecini sabit bir Modelimize ait iterasyon sürecini sabit bir $y_0(\xi, \eta) \in W_2^{(2,2)}(D)$ olarak

$$y_n(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (4.6) denklemindeki B_i katsayıları

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta_{11} F(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y_{k-1}(\xi_k, \eta_k)) \\ B_2 &= \sum_{k=1}^2 \beta_{2k} F(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y_{k-1}(\xi_k, \eta_k)) \\ &\vdots \\ B_i &= \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y_{k-1}(\xi_k, \eta_k)) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla $B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y(\xi_k, \eta_k))$ olmak üzere (4.5) ifadesinde ki $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ olarak ifade edilebilir. Şimdi $y_n(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümümüzün analitik çözüme yakınsadığını gösterelim.

Lemma 4.7. $F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), \partial_\xi y(\xi, \eta))$ sürekli fonksiyon, $\|y_n\|$ sınırlı ve $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_n \rightarrow \hat{y}$ olsun. Bu durumda

$$F(\xi_n, \eta_n, y_{n-1}(\xi_n, \eta_n), \partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n)) \rightarrow F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_\xi \hat{y}(x, t)) \text{ dir.}$$

İspat. Doğurulan çekirdeğin temel özelliğinden faydalanarak

$$y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

$$y_{n-1}(x, t) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \hat{y}(x, t)| &= |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t) + y_{n-1}(x, t) - \hat{y}(x, t)| \\ &\leq |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| + |y_{n-1}(x, t) - \hat{y}(x, t)| \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki terimi inceleyelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| &= |\langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x, t)}(\xi, \eta) \rangle| \\ &\leq \|y_{n-1}(\xi, \eta)\| \|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $y_{n-1}(\xi, \eta)$ nın yakınsaklığından, öyle bir M sayısı vardır ki $n \geq M$ için

$$\|y_{n-1}(\xi, \eta)\|_{W_2^{(2,2)}} \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(2,2)}}$$

yazılabilir. Eşitsizliğimizin yeni hali

$$|y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(2,2)}} \|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x, t)}(\xi, \eta)\|$$

şeklinde olur. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ olduğundan $\|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \rightarrow 0$ olur ki $|y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \hat{y}(x, t)$ olur. Şimdi de $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olduğunu görelim. Yine doğurulan çekirdeğin temel özelliğinden

$$\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

$$\partial_\xi y_{n-1}(x, t) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(x, t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Şimdi de yakınsama için

$$\begin{aligned} &|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \\ &= |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t) + \partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \\ &\leq |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| + |\partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki terimi inceleyelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| &= |\langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_\xi K_{(x, t)}(\xi, \eta) \rangle| \\ &\leq \|y_{n-1}(\xi, \eta)\| \|\partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_\xi K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \end{aligned}$$

elde edilir. $n \geq M$ için $\|y_{n-1}(\xi, \eta)\|_{W_2^{(2,2)}} \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(2,2)}}$ olduğunu biliyoruz.

Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ olduğundan $\|\partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_\xi K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \rightarrow$

0 olur ki $|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| \rightarrow 0$ dir. Diğer taraftan, $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_{n-1} \rightarrow \hat{y}$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $\partial_\xi y_{n-1}(x, t) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olur ki $|\partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla $|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olduğu görülür. F fonksiyonunun sürekliliğinden $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için

$$F\left(\xi_n, \eta_n, y_{n-1}(\xi_n, \eta_n), \partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n)\right) \rightarrow F\left(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_\xi \hat{y}(x, t)\right)$$

olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 4.4. Kabul edelim ki (4.3) deki $\|y_n(\xi, \eta)\|$ sınırlı olsun ve (4.6) bir tek çözüme sahip olsun. Eğer $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi D de yoğun ise, y_n yaklaşık çözümü y kesin çözümüne yakınsar ve $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ olarak ifade edilir.

İspat. İlk olarak $y_n(\xi, \eta)$ nin yakınsaklığını inceleyelim. (4.6) denklemden

$$y_{n+1}(\xi, \eta) = y_n(\xi, \eta) + B_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(\xi, \eta)$$

yazılabilir. $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^\infty$ nin ortonormalliğinden yararlanarak,

$$\|y_{n+1}\|^2 = \|y_n\|^2 + B_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^2 \quad (4.7)$$

olarak ifade edilir. (4.7) ifadesinden $\|y_{n+1}\| > \|y_n\|$ eşitsizliği yazılır ki bu $\|y_n\|$ nin monoton artan olduğunu gösterir. Ayrıca $\|y_n\|$ sınırlı olduğundan yakınsaktır ve $\sum_{i=1}^\infty B_i^2 = c$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. Dolayısıyla $\{B_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ dir.

Eğer $m > n$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|y_m - y_{m-1} + y_{m-1} - y_{m-2} + y_{m-2} + \dots + y_{n+1} - y_n\|^2 \\ &= \|y_m - y_{m-1}\|^2 + \|y_{m-1} - y_{m-2}\|^2 + \dots + \|y_{n+1} - y_n\|^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\|y_m - y_{m-1}\|^2 = B_m^2$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $\|y_m - y_n\|^2 = \sum_{l=n+1}^m B_l^2 \rightarrow 0$ olur. $W_2^{(2,2)}(D)$ uzayı tam olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $y_n \rightarrow \hat{y}$ olur. Şimdi \hat{y} nin temsili çözüm olup (4.3) denklemini sağladığını gösterelim. (4.6) ifadesinin her iki yanının $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak, $\hat{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ elde edilir. Ayrıca belirtelim ki, $(L\hat{y})(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^\infty B_i L\bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ dir. Buradan hareketle, (ξ, η) noktası yerine (ξ_l, η_l) noktasını kullanırsak;

$$\begin{aligned} (L\hat{y})(\xi_l, \eta_l) &= \sum_{i=1}^\infty B_i L\bar{\psi}_i(\xi_l, \eta_l) = \sum_{i=1}^\infty B_i \langle L\bar{\psi}_i(\xi, \eta), \varphi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \\ &= \sum_{i=1}^\infty B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), L^* \varphi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \psi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^i \beta_{il} (L\hat{y})(\xi_l, \eta_l) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \sum_{l=1}^i \beta_{il} \psi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \bar{\psi}_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(2,2)}} = B_l \end{aligned}$$

elde edilir ki $B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_\xi y(\xi_k, \eta_k))$ ifadesinden

$$L\hat{y}(\xi_l, \eta_l) = F(\xi_l, \eta_l, y_{l-1}(\xi_l, \eta_l), \partial_\xi y_{l-1}(\xi_l, \eta_l))$$

yazılabilir. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun olduğundan ve her $(x, t) \in D$ için

$\{(\xi_{n_j}, \eta_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır öyle ki $j \rightarrow \infty$ için $(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) \rightarrow (x, t)$ dir. O halde

$$L\hat{y}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) = F(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}, y_{n_j-1}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}), \partial_\xi y_{n_j-1}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}))$$

yazılabilir. $j \rightarrow \infty$ için F fonksiyonunun sürekliliği ve Lemma 4.7 den yararlanarak

$$L\hat{y}(x, t) = F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_\xi \hat{y}(x, t))$$

yazılabilir. Bu bize $\hat{y}(\xi, \eta)$ nın (4.3) denklemini sağladığını gösterir ki ispat tamamlanır.

Bu bölüme kadar (4.1) denklemini için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılarak yaklaşık çözümün inşası ve iteratif sürecin yakınsaklığı incelendi. Şimdi yaptığımız çalışmanın nümerik incelemesini yapmak amacıyla bir örnek üzerinde uygulamasını vereceğiz.

4.4 Örnekler ve Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde kesin çözümü kesir parametresi içeren sabit katsayılı bir örnek çözüldü. Ele alınan problemin başlangıç fonksiyonu homojenleştirildikten sonra doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu probleme uygulandı. α kesir mertebesinin farklı değerleri için mutlak hata değerleri tablo olarak verildi. Yine α ' nın farklı değerleri için yaklaşık çözüm, kesin çözüm ve mutlak hata grafikleri verildi.

Örnek 4.1.

$$D_{\eta}^{\alpha}y + yy_{\xi} = f(\xi, \eta)$$

$$y(\xi, 0) = 2\eta$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$$

lineer olmayan adveksiyon denklemini ele alalım. Denkleme ait başlangıç şartını homojenleştirdiğimizde

$$D_{\eta}^{\alpha}y + 2\xi y_{\xi} + 2y + yy_{\xi} = f(\xi, \eta)$$

$$y(\xi, 0) = 0$$

elde edilir. Probleme ait kesin çözüm

$$y(\xi, \eta) = \xi\eta^{\alpha+1}$$

ve denkleme ait homojen olmayan kısım

$$f(\xi, \eta) = (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)\xi\eta + 4\xi\eta^{\alpha+1} + \xi\eta^{2\alpha+2}$$

dir. $n = p \times q$ olmak üzere $\xi_i = \frac{i}{p}$, ($i = 1, 2, \dots, p$) ve $\eta_i = \frac{i}{q}$, ($i = 1, 2, \dots, q$) olarak alınmıştır. $p = 7$ ve $q = 7$ olmak üzere $n = 49$ nokta alınarak $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için mutlak hata tabloları ve yaklaşık çözüm grafikleri verilmiştir. Yine $\alpha = 1$ değeri için $p = 15$ ve $q = 15$ olmak üzere $n = 225$ nokta alınarak yaklaşık çözüm, mutlak hata ve kesin çözüme ait grafikler verilmiştir.

Çizelge 4.1 Örnek 4.1'de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

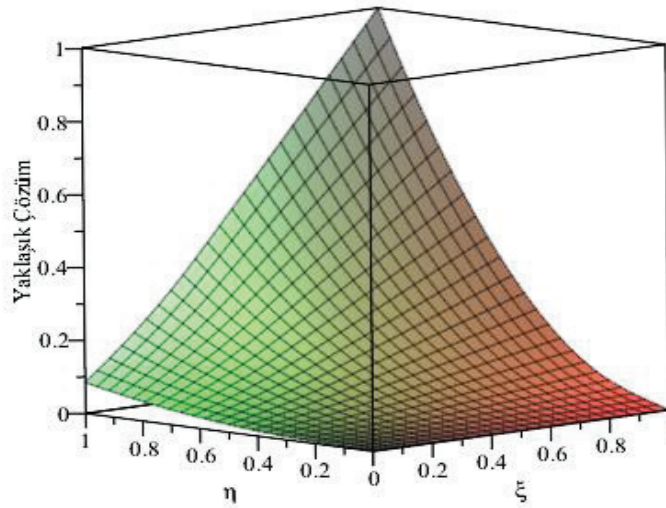
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	1.23E-3	1.48E-3	2.25E-3	3.58E-3	5.45E-3	7.89E-3	1.09E-2	1.46E-2	1.91E-2
0.2	1.55E-3	8.30E-4	4.79E-4	4.98E-4	8.06E-4	1.42E-3	2.39E-3	3.76E-3	5.58E-3
0.3	2.33E-3	1.22E-3	5.03E-4	1.32E-4	4.72E-5	3.93E-5	2.00E-4	6.98E-4	1.50E-3
0.4	3.16E-3	1.74E-3	8.52E-4	3.62E-4	4.17E-5	1.43E-4	1.53E-4	2.47E-5	4.37E-4
0.5	3.95E-3	2.23E-3	1.18E-3	6.28E-4	2.54E-4	3.71E-6	1.12E-4	6.49E-5	1.83E-4
0.6	4.73E-3	2.69E-3	1.46E-3	8.74E-4	4.37E-4	1.43E-4	1.34E-5	2.86E-5	1.41E-4
0.7	5.51E-3	3.14E-3	1.72E-3	1.03E-3	5.86E-4	2.67E-4	8.43E-5	3.55E-5	1.65E-4
0.8	6.29E-3	3.58E-3	1.97E-3	1.19E-3	7.08E-4	3.67E-4	1.68E-4	1.00E-4	2.13E-4
0.9	7.06E-3	4.01E-3	2.21E-3	1.34E-3	8.14E-4	4.48E-4	2.40E-4	1.60E-4	2.67E-4

Çizelge 4.2 Örnek 4.1’de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

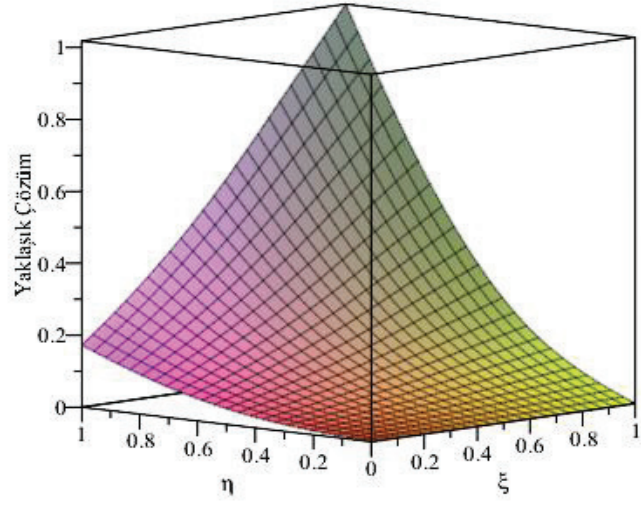
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	1.15E-3	1.14E-3	2.38E-3	3.92E-3	5.96E-3	8.54E-3	1.16E-2	1.54E-2	1.98E-2
0.2	1.34E-3	5.21E-4	3.75E-4	6.01E-4	1.08E-3	1.86E-3	2.96E-3	4.41E-3	6.28E-3
0.3	1.99E-3	6.83E-4	1.89E-4	2.78E-5	8.67E-6	1.75E-4	5.43E-4	1.12E-3	2.03E-3
0.4	2.71E-3	1.02E-3	3.99E-4	1.50E-4	4.55E-6	3.22E-5	9.07E-5	3.53E-4	9.00E-4
0.5	3.40E-3	1.32E-3	5.78E-4	2.98E-4	9.12E-5	1.43E-5	2.21E-6	1.19E-4	5.18E-4
0.6	4.07E-3	1.60E-3	7.28E-4	4.19E-4	1.87E-4	4.24E-5	7.43E-6	3.89E-5	3.68E-4
0.7	4.73E-3	1.87E-3	8.60E-4	5.14E-4	2.58E-4	8.90E-5	5.14E-6	1.01E-5	2.77E-4
0.8	5.41E-3	2.13E-3	9.88E-4	6.03E-4	3.20E-4	1.37E-4	3.49E-5	2.77E-5	2.50E-4
0.9	6.08E-3	2.40E-3	1.11E-3	6.85E-4	3.74E-4	1.73E-4	5.64E-5	1.91E-5	2.42E-4

Çizelge 4.3 Örnek 4.1’de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri ($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

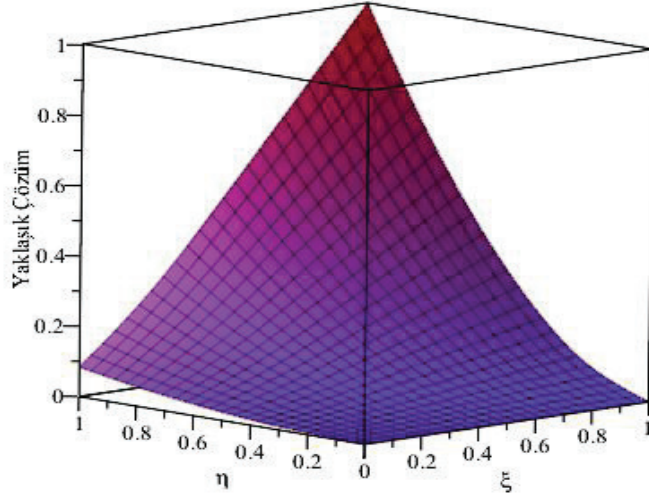
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	1.11E-3	1.44E-3	2.63E-3	4.35E-3	6.52E-3	9.20E-3	1.23E-2	1.60E-2	2.03E-2
0.2	1.18E-3	3.51E-4	4.41E-4	8.39E-4	1.45E-3	2.36E-3	3.55E-3	5.02E-3	6.90E-3
0.3	1.73E-3	3.32E-4	9.89E-5	1.91E-4	4.84E-4	9.47E-4	1.57E-3	2.53E-3	3.77E-3
0.4	2.36E-3	5.42E-4	2.19E-4	1.49E-4	9.92E-5	1.94E-4	4.29E-4	7.39E-4	1.37E-3
0.5	2.94E-3	6.91E-4	2.95E-4	2.14E-4	1.00E-4	1.09E-4	2.37E-4	3.96E-4	9.01E-4
0.6	3.53E-3	8.34E-4	3.60E-4	2.68E-4	1.32E-4	9.43E-5	1.32E-4	2.36E-4	6.86E-4
0.7	4.11E-3	9.70E-4	4.16E-4	3.09E-4	1.45E-4	8.09E-5	8.27E-5	8.95E-5	4.99E-4
0.8	4.70E-3	1.11E-3	4.82E-4	3.62E-4	1.72E-4	1.00E-4	8.93E-5	1.67E-5	4.36E-4
0.9	5.28E-3	1.25E-3	5.42E-4	4.09E-4	1.96E-4	1.03E-4	7.03E-5	1.68E-5	3.91E-4



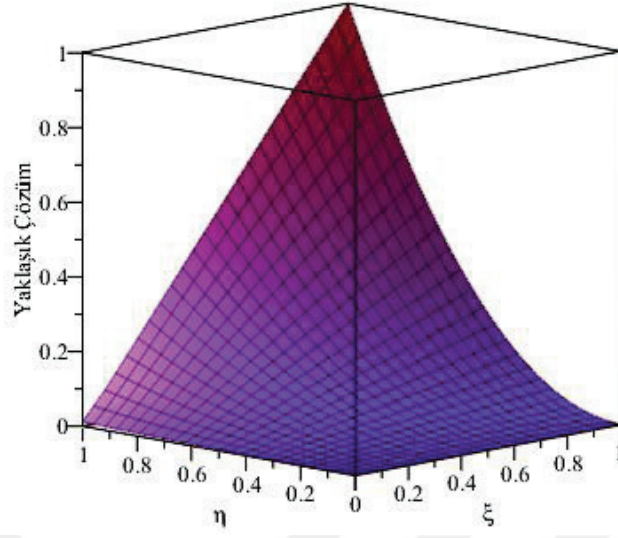
Şekil 4.1: Örnek 4.1’de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



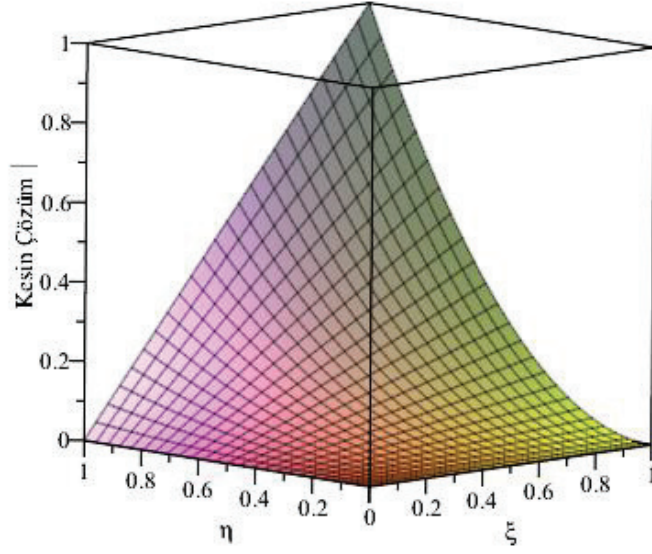
Şekil 4.2: Örnek 4.1'de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



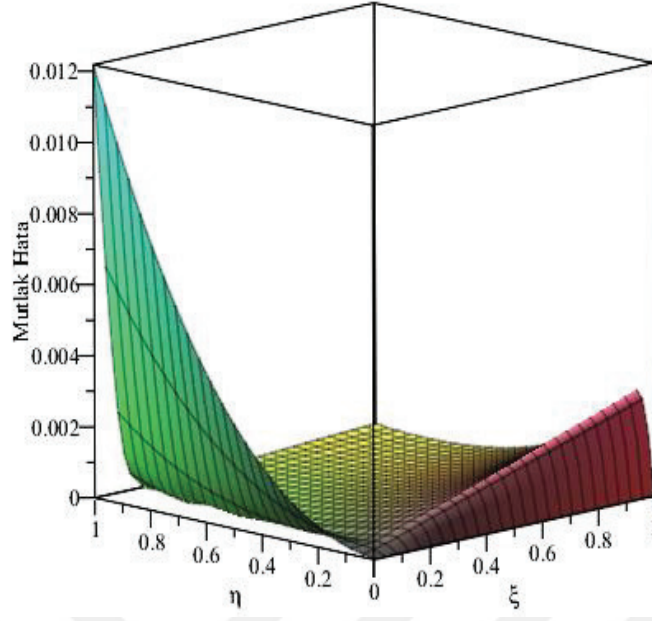
Şekil 4.3: Örnek 4.1'de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 4.4: Örnek 4.1'de $\alpha = 1$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 4.5: Örnek 4.1'de $\alpha = 1$ değeri için kesin çözüm grafiği.



Şekil 4.6: Örnek 4.1'de $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.



5. KAWAHARA DENKLEMİ

Bu bölümde kesir mertebeli türev içeren değişken katsayılı Kawahara denkleminin nümerik çözümleri doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile bulunacaktır. İteratif süreci oluşturmak için doğuran çekirdekli uzaylar ve bu uzayların ürettiği çekirdekler verilecektir. İteratif süreç oluşturulduktan sonra metodun yakınsaklık analizi yapılacaktır. Ardından metodun etkisini göstermek amacıyla model problem çözülecek ve elde edilen sonuçlar tablo ve grafik ile verilecektir. Bu kısımda tanım, teorem ve lemmalar içerisinde ifade edilen uzaylar ve çekirdek fonksiyonlarının elde edilmesinde (Cui ve Lin, 2009) kaynağından yararlanılmıştır. Ayrıca çalışılan uzaya ait çekirdek fonksiyonunu elde etme süreci 2. bölümde detaylı olarak verilmiştir.

Kawahara denklemi plazma dalgalarını, sıvı akışındaki uzun dalgaların dinamiğini modeller. Bu model yüzey gerilimli sıg su dalgaları teorisi, plazmanın manyeto-akustik dalgaları teorsisi, akışkanlar mekaniği, astrofizik, katıhal fiziği, plazma fizik, plazma dalgaları, kimyasal kinematik, fiberoptik, jeokimya gibi alanlarda karşımıza çıkar.

Beşinci mertebeden KdV denklemi olarak da bilinen bu model, Kawahara tarafından 1972 de nümerik olarak çalışıldı. Kawahara (1972) yaptığı araştırma sonucunda bu modelin hem salınımlı hemde monoton tekil (solitary) dalga çözümüne sahip olduğunu gördü. Bu denklem için varlık teklik çalışmaları Tao ve Cui (2005), Larkin ve Doronin (2007), Larkin ve Simoes (2013) tarafından incelenmiştir. Son yıllarda bilim insanları bu model üzerine çeşitli araştırmalar yaptı. Polat ve ark. (2006) Adomian ayrışım (decomposition) metodunu kullanarak modifiye edilmiş Kawahara denklemi için nümerik çözüm araştırdılar. Lu (2008) Kawahara denklemi için varyasyonel iterasyon metodunu ve homotopi pertürbasyon metodunu kullandı. Bibi ve ark. (2011) Kawahara tipi denklemler için radyal baz fonksiyonlarına dayalı metot uyguladı. Dereli ve Dağ (2012) Kawahara, KdV-Kawahara ve modifiye edilmiş Kawahara denklemleri için şebekesiz bir metot kullandı. Zarebnia ve Aghili (2016) modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik çözümü için radyal baz fonksiyonlarını kullanarak şebekesiz metot kullandılar. Safavi ve Khajehnasiri (2016)

zaman ve uzay kesir mertebeli modifiye edilmiş Kawahara denklemi için Adomian ayrışım (decomposition) metodunu kullandı. Bagherzadeh (2017) Kawahara ve modifiye edilmiş Kawahara denklemi için düzgün şebeke üzerinde altıncı derece B-spline metodunu kullandı.

$$D_{\eta}^{\alpha}y(\xi, \eta) - \partial_{\xi^5}^5 y(\xi, \eta) + \partial_{\xi^3}^3 y(\xi, \eta) + y(\xi, \eta)y_{\xi}(\xi, \eta) + g_1(\xi, \eta)y_{\xi}(\xi, \eta) + g_2(\xi, \eta)y(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad (5.1)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$$

Yukarıda (5.1) denklemi için Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren bir boyutlu değişken katsayılı Kawahara denklemini göz önüne alalım. Burada D_{η}^{α} , η zaman değişkenine göre α mertebeden Caputo kesirli türev operatörüdür. Ayrıca $g_1(\xi, \eta)$, $g_2(\xi, \eta)$ ve $f(\xi, \eta)$ sürekli fonksiyonlardır. Denkleminize ait başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(\xi, 0) &= 0 \\ y(0, \eta) &= y_{\xi}(0, \eta) = 0 \\ y(1, \eta) &= y_{\xi}(1, \eta) = y_{\xi\xi}(1, \eta) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

olarak alınacaktır.

5.1 Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar

Bu kısımda (5.1) denkleminin zaman ve uzay değişkenine göre en yüksek mertebeden türevleri esas alınarak, doğuran çekirdek uzayları ve bu uzaylara ait çekirdek fonksiyonları elde edilecektir.

Tanım 5.1. $H_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı

$$H_2^1[0,1] = \{y(\eta) | y [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $H_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{H_2^1} = y(0)v(0) + \int_0^1 y'(\eta)v'(\eta)d\eta, \quad y, v \in H_2^1[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{H_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{H_2^1}}, \quad y \in H_2^1[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 5.1. $H_2^1[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_t^{\{1\}}(\eta) = \begin{cases} 1 + \eta, & \eta \leq t \\ 1 + t, & t < \eta \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir (Cui ve Lin, 2009).

Tanım 5.2. $R_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^1[0,1] = \{y(\xi) | y [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y' \in L^2[0,1]\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^1} = y(0)v(0) + \int_0^1 y'(\xi)v'(\xi)d\xi, \quad y, v \in R_2^1[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^1}}, \quad y \in R_2^1[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 5.2. $R_2^1[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_x^{\{1\}}(\xi) = \begin{cases} 1 + \xi, & \xi \leq x \\ 1 + x, & x < \xi \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.3. $R_2^2[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^2[0,1] = \{y(\xi) | y, y' [0,1] \text{ üzerinde mutlak sürekli, } y'' \in L^2[0,1], y(0) = 0\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^2[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^2} = y(0)v(0) + y'(0)v'(0) + \int_0^1 y''(\xi)v''(\xi)d\xi, \quad y, v \in R_2^2[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^2} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^2}}, \quad y \in R_2^2[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 5.3. $R_2^2[0,1]$ uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_t^{\{2\}}(\eta) = \begin{cases} \eta t + \frac{1}{2} t \eta^2 - \frac{1}{6} \eta^3, & \eta \leq t \\ \eta t + \frac{1}{2} \eta t^2 - \frac{1}{6} t^3, & t < \eta \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.4. $R_2^6[0,1]$ Hilbert uzayı

$$R_2^6[0,1] = \{y(\xi) | y, y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)} [0,1] \text{ üzerinde mutlak süreklili, } y^{(6)} \in L^2[0,1], y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = 0\}$$

olarak tanımlanır. $R_2^6[0,1]$ uzayına ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{R_2^6} = \sum_{i=0}^5 y^{(i)}(0) v^{(i)}(0) + \int_0^1 y^{(6)}(\xi) v^{(6)}(\xi) d\xi, \quad y, v \in R_2^6[0,1]$$

ve norm

$$\|y\|_{R_2^6} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{R_2^6}}, \quad y \in R_2^6[0,1]$$

olarak ifade edilir.

Lemma 5.4. $R_2^3[0,1]$ Hilbert uzayı, doğuran çekirdekli bir uzaydır ve uzaya ait çekirdek fonksiyonu

$$K_x^{\{6\}}(\xi) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{12} c_i(x) \xi^{i-1}, & \xi \leq x \\ \sum_{i=1}^{12} d_i(x) \xi^{i-1}, & x < \xi \end{cases}$$

olarak ifade edilir. $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ katsayıları çekirdek fonksiyonu elde edilmişinden bulunur. Çekirdek fonksiyonunun elde edilmesi ikinci bölümde detaylı bir şekilde verilmiştir.

Tanım 5.5. $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayı iki değişkenli çekirdek üreten uzay olup $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$W_2^{(6,2)}(D) = \left\{ y(\xi, \eta) \mid \frac{\partial^6 y}{\partial \xi^5 \partial \eta}, D \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^8 y}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} \in L^2(D), \right. \\ \left. y(\xi, 0) = y(0, \eta) = y'(0, \eta) = y(1, \eta) = y'(1, \eta) = y''(1, \eta) = 0 \right\}$$

olarak tanımlanır. $y(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \in W_2^{(6,2)}(D)$ olmak üzere bu uzaya ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{W_2^{(6,2)}} = \sum_{i=0}^5 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} y(0, \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} v(0, \eta) \right] d\eta \\ + \sum_{j=0}^1 \left\langle \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} y(\xi, 0), \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} v(\xi, 0) \right\rangle_{W_2^6} \\ + \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^6}{\partial \xi^6} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} y(\xi, \eta) \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta$$

şeklinde tanımlanır ve uzayın normu

$$\|y\|_{W_2^{(6,2)}}^2 = \langle y, y \rangle_{W_2^{(6,2)}}$$

ile ifade edilir.

Lemma 5.5. $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ fonksiyonu $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayının çekirdeği olsun. $K_x^{\{6\}}(\xi)$ ve $K_t^{\{2\}}(\eta)$ fonksiyonları sırasıyla $R_2^6[0,1]$ ve $R_2^2[0,1]$ uzaylarının çekirdek fonksiyonu olsunlar. Buradan $K_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_x^{\{6\}}(\xi)K_t^{\{2\}}(\eta)$ olarak ifade edilir. Herhangi bir $y(\xi, \eta) \in W_2^{(6,2)}(D)$ fonksiyonu için

$$y(x, t) = \langle y(\xi, \eta), K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}}$$

eşitliği yazılabilir ve $K_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_{(\xi, \eta)}(x, t)$ dir.

Tanım 5.6. $W_2^{(1,1)}(D)$ uzayı iki değişkenli çekirdek üreten uzay olup $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere

$$W_2^{(1,1)}(D) = \left\{ y(\xi, \eta) \mid y, D \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \in L^2(D) \right\}$$

olarak tanımlanır. $y(\xi, \eta), v(\xi, \eta) \in W_2^{(1,1)}(D)$ olmak üzere bu uzaya ait iç çarpım

$$\langle y, v \rangle_{W_2^{(1,1)}} = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} y(0, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} v(0, \eta) \right] d\eta + \langle y(\xi, 0), v(\xi, 0) \rangle_{W_2^1}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} y(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} v(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta$$

şeklinde tanımlanır ve uzayın normu

$$\|y\|_{W_2^{(1,1)}}^2 = \langle y, y \rangle_{W_2^{(1,1)}}$$

ile ifade edilir.

Lemma 5.6. $W_2^{(1,1)}(D)$ uzayı doğuran çekirdekli bir uzay olup bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu $\tilde{K}_{(x,t)}(\xi, \eta)$ olsun. $K_x^{\{1\}}(\xi)$ ve $K_t^{\{1\}}(\eta)$ çekirdek fonksiyonları $R_2^1[0,1]$ uzayının çekirdekleri olmak üzere

$$\tilde{K}_{(x,t)}(\xi, \eta) = K_x^{\{1\}}(\xi) K_t^{\{1\}}(\eta)$$

olarak ifade edilir.

5.2 Yaklaşık Çözümün İnşası

Bu kısımda yaklaşık çözüm elde etmek amacıyla (5.1) denkleminde ait lineer operatör tanımlanacaktır. Tanımlanan lineer operatör ve üzerinde çalıştığımız uzaya ait çekirdek fonksiyonu yardımıyla $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayının ortonormal tabanı elde edilip yaklaşık çözümün ifadesi verilecektir. Öncelikle lineer $L: W_2^{(6,2)}(D) \rightarrow W_2^{(1,1)}(D)$ operatörünü

$$Ly(\xi, \eta) = D_\eta^\alpha y(\xi, \eta) - \partial_{\xi^5}^5 y(\xi, \eta) + \partial_{\xi^3}^3 y(\xi, \eta) + g_1(\xi, \eta) y_\xi(\xi, \eta) + g_2(\xi, \eta) y(\xi, \eta)$$

olarak yazabiliriz. $F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), y_\xi(\xi, \eta)) = f(\xi, \eta) - y(\xi, \eta) y_\xi(\xi, \eta)$ olarak alınırsa denkleminiz

$$\begin{cases} Ly(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, y(\xi, \eta), y_\xi(\xi, \eta)), \xi \in [0,1], \eta \in [0,1] \\ y(\xi, 0) = 0 \\ y(0, \eta) = y_\xi(0, \eta) = 0 \\ y(1, \eta) = y_\xi(1, \eta) = y_{\xi\xi}(1, \eta) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi sayılabilir $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty} \in D$ yoğun dizisini seçelim ve $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunu, L lineer operatörü ve $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ çekirdek fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$\begin{aligned}
\psi_i(\xi, \eta) &= L_{(x,t)} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\
&= \left\{ D_t^\alpha K_{(x,t)}(\xi, \eta) - \frac{\partial^5}{\partial x^5} K_{(x,t)}(\xi, \eta) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} K_{(x,t)}(\xi, \eta) + g_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right. \\
&\quad \left. + g_2(x, t) K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right\} \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta_i} \frac{\partial_r K_{(\xi, r)}(\xi, \eta)}{(\eta_i - r)^\alpha} dr - \frac{\partial^5}{\partial x^5} K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) \\
&\quad + \frac{\partial^3}{\partial x^3} K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) + g_1(\xi_i, \eta_i) \frac{\partial}{\partial x} K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) + g_2(\xi_i, \eta_i) K_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Teorem 5.1. $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(6,2)}(D), i = 1, 2, \dots$

İspat. Öncelikle $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayının tanımından faydalanarak, $\frac{\partial^3 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} \in L^2(D)$ ve $\frac{\partial^6 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^5 \partial \eta}$ fonksiyonunun tamamen sürekli olduğunu göstereceğiz. Ardından $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunun başlangıç ve sınır şartlarını sağladığını göstereceğiz. $K_{(x,t)}(\xi, \eta)$ çekirdek fonksiyonunun özelliğinden yararlanarak

$$\partial_{x^5 \xi^6 \eta^2}^{13} K_{(x,t)}(\xi, \eta) = \partial_{x^5 \xi^6}^{11} R_x^{\{6\}}(\xi) \partial_{\eta^2}^2 R_t^{\{2\}}(\eta)$$

eşitliğini yazabiliriz. $\partial_{x^5 \xi^6}^{11} R_x^{\{6\}}(\xi)$ ve $\partial_{\eta^2}^2 R_t^{\{2\}}(\eta)$ fonksiyonları $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli dirler. Kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan $M_1 > 0$ olmak üzere

$$\left| \partial_{x^5 \xi^6 \eta^2}^{13} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_1$$

yazılabilir. Benzer düşünüşle M_2, M_3, M_4 ve M_5 pozitif sabitler olmak üzere

$$\left| \partial_{t \xi^6 \eta^2}^9 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_2$$

$$\left| \partial_{x^3 \xi^6 \eta^2}^{11} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_3$$

$$\left| \partial_{x \xi^6 \eta^2}^9 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_4$$

$$\left| \partial_{\xi^6 \eta^2}^8 K_{(x,t)}(\xi, \eta) \right| \leq M_5$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.4) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^8 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} \right| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta_i} \frac{M_2}{(\eta_i - r)^\alpha} dr - M_1 + M_3 + g_1(\xi_i, \eta_i) M_4 + g_2(\xi_i, \eta_i) M_5 \right| \\ &\leq \frac{M_2}{\Gamma(2-\alpha)} \eta_i^{1-\alpha} + M_1 + M_3 + |g_1(\xi_i, \eta_i)| M_4 + |g_2(\xi_i, \eta_i)| M_5 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bize $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonunun L lineer operatörü altında sınırlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\frac{\partial^8 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} \in L^2(D)$ dir. D bölgesi kapalı olduğundan, $\frac{\partial^6 \psi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi^5 \partial \eta}$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen süreklidir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} K_{(x,t)}(\xi, 0) &= 0 \\ K_{(x,t)}(0, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} K_{(x,t)}(0, \eta) = 0 \\ K_{(x,t)}(1, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} K_{(x,t)}(1, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K_{(x,t)}(1, \eta) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\psi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonu başlangıç ve sınır koşullarını şartlarını sağlar. Bu bulgular doğrultusunda $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(6,2)}(D)$ olduğu görülür.

Hatırlatma 5.1. $D = [0,1] \times [0,1]$ bölgesinin, $\{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots\}$ sayılabilir yoğun dizisini ele alalım. L operatörünün adjointi L^* olmak üzere $\varphi_i(\xi, \eta) = \tilde{K}_{(\xi_i, \eta_i)}(\xi, \eta)$, $\psi_i(\xi, \eta) = L^* \varphi_i(\xi, \eta)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayının $\{\bar{\psi}_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sistemi, $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ sisteminin Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden elde edilerek

$$\bar{\psi}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(\xi, \eta)$$

şeklinde bulunur. Burada ki β_{ik} katsayıları ortogonalizasyon katsayılarıdır. Ayrıca $\beta_{ii} > 0$ dir.

Teorem 5.2. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^\infty$ dizisi D bölgesinde yoğun olsun. Bu durumda $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^\infty$ sistemi $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayında tam sistemdir ve $\psi_i(\xi, \eta) = L_{(x,t)} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)}$ dir.

İspat. $(\xi, \eta) \in D$ için

$$\begin{aligned}
\psi_i(\xi, \eta) &= (L^* \varphi_i)(\xi, \eta) = \langle (L^* \varphi_i)(x, t), K_{(\xi, \eta)}(x, t) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \\
&= \langle \varphi_i(x, t), L_{(x,t)} K_{(\xi, \eta)}(x, t) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \\
&= L_{(x,t)} K_{(\xi, \eta)}(x, t) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)} \\
&= L_{(x,t)} K_{(x,t)}(\xi, \eta) \Big|_{(x,t)=(\xi_i, \eta_i)}
\end{aligned}$$

elde edildiğinden, $\psi_i(\xi, \eta) \in W_2^{(6,2)}(D)$ olduğu görülür. Her bir $y(\xi, \eta) \in W_2^{(6,2)}(D)$ için $\langle y(\xi, \eta), \psi_i(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} = 0, i = 1, 2, \dots$ ise bu takdirde

$$\langle y(\xi, \eta), (L^* \varphi_i)(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} = \langle Ly(\xi, \eta), \varphi_i(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} = (Ly)(\xi_i, \eta_i) = 0, i = 1, 2, \dots$$

bulunur. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun olduğundan, $Ly(\xi, \eta) = 0$ olur ki L^{-1} in varlığından $y(\xi, \eta) = 0$ olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 5.3. Eğer $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D bölgesinde yoğun ise (5.3) denkleminin çözümü

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k)) \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (5.5)$$

olarak ifade edilir.

İspat. $y(\xi, \eta)$, (5.3) denkleminin çözümü olsun. Teorem 5.2 den $\{\psi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^{\infty}$ sisteminin $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayında tam olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle y(\xi, \eta), \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle y(\xi, \eta), \psi_k(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle y(\xi, \eta), L^* \varphi_k(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Ly(\xi, \eta), \varphi_k(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Ly(\xi, \eta), \tilde{K}_{(\xi_k, \eta_k)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} Ly(\xi_k, \eta_k) \bar{\psi}_i(\xi, \eta)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F \left(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k) \right) \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

$y(\xi, \eta)$ çözümünün sonlu n teriminden $y_n(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Yani

$$y_n(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F \left(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k) \right) \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$$

olarak ifade edilir. Ele alınan denklem lineer ise yaklaşık çözüm buradan bulunur. Ele alınan denklem lineer değil ise aşağıdaki iteratif süreç kurulacak ve yakınsaklığı incelenecektir.

5.3 İteratif Süreç ve Sürecin Yakınsaklığı

Bu kısımda lineer olmayan (5.1) denklemi için iterasyon süreci ifade edilip sürecin yakınsaklığını göstermek amacıyla bazı teoremler verilecektir. Modelimize ait iterasyon sürecini sabit bir $y_0(\xi, \eta) \in W_2^{(3,2)}(D)$ olarak

$$y_n(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta) \quad (5.6)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (5.6) denklemindeki B_i katsayıları

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta_{11} F \left(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y_{k-1}(\xi_k, \eta_k) \right) \\ B_2 &= \sum_{k=1}^2 \beta_{2k} F \left(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y_{k-1}(\xi_k, \eta_k) \right) \\ &\vdots \\ B_i &= \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F \left(\xi_k, \eta_k, y_{k-1}(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y_{k-1}(\xi_k, \eta_k) \right) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla $B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F \left(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k) \right)$ olarak alınırsa (5.5) ifadesinde ki $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ olarak ifade edilebilir. Şimdi $y_n(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümümüzün kesin çözüme yakınsadığını gösterelim.

Lemma 5.7. $F \left(\xi, \eta, y(\xi, \eta), \partial_{\xi} y(\xi, \eta) \right)$ sürekli fonksiyon, $\|y_n\|$ sınırlı ve $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_n \rightarrow \hat{y}$ olsun. Bu durumda

$F(\xi_n, \eta_n, y_{n-1}(\xi_n, \eta_n), \partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n)) \rightarrow F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_\xi \hat{y}(x, t))$ dir.

İspat. Doğurulan çekirdeğin temel özelliğinden faydalanarak

$$y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}}$$

$$y_{n-1}(x, t) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \hat{y}(x, t)| &= |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t) + y_{n-1}(x, t) - \hat{y}(x, t)| \\ &\leq |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| + |y_{n-1}(x, t) - \hat{y}(x, t)| \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki terimi inceleyelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| &= |\langle y_{n-1}(\xi, \eta), K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle| \\ &\leq \|y_{n-1}(\xi, \eta)\| \|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta)\| \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $y_{n-1}(\xi, \eta)$ nın yakınsaklığından, öyle bir M sayısı vardır ki $n \geq M$ için

$$\|y_{n-1}(\xi, \eta)\|_{W_2^{(6,2)}} \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(6,2)}}$$

yazılabilir. Eşitsizliğimizin yeni hali

$$|y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - y_{n-1}(x, t)| \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(6,2)}} \|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta)\|$$

şeklinde olur. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ olduğundan $\|K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - K_{(x,t)}(\xi, \eta)\| \rightarrow 0$ olur ki $|y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \hat{y}(x, t)$ olur. Şimdi de $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \partial_\xi \hat{y}(x, t)$ olduğunu görelim. Yine doğurulan çekirdeğin temel özelliğinden

$$\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}}$$

$$\partial_\xi y_{n-1}(x, t) = \langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_\xi K_{(x,t)}(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Şimdi de yakınsama için

$$\begin{aligned} &|\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \\ &= |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t) + \partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \\ &\leq |\partial_\xi y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_\xi y_{n-1}(x, t)| + |\partial_\xi y_{n-1}(x, t) - \partial_\xi \hat{y}(x, t)| \end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Eşitsizliğin sağ tarafındaki her iki terimi inceleyelim.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} |\partial_{\xi} y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_{\xi} y_{n-1}(x, t)| &= |\langle y_{n-1}(\xi, \eta), \partial_{\xi} K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_{\xi} K_{(x, t)}(\xi, \eta) \rangle| \\ &\leq \|y_{n-1}(\xi, \eta)\| \|\partial_{\xi} K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_{\xi} K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \end{aligned}$$

elde edilir. $n \geq M$ için $\|y_{n-1}(\xi, \eta)\|_{W_2^{(6,2)}} \leq M \|\hat{y}(x, t)\|_{W_2^{(6,2)}}$ olduğunu biliyoruz.

Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ olduğundan $\|\partial_{\xi} K_{(\xi_n, \eta_n)}(\xi, \eta) - \partial_{\xi} K_{(x, t)}(\xi, \eta)\| \rightarrow 0$ olur ki $|\partial_{\xi} y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_{\xi} y_{n-1}(x, t)| \rightarrow 0$ dir. Diğer taraftan, $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $y_{n-1} \rightarrow \hat{y}$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $\partial_{\xi} y_{n-1}(x, t) \rightarrow \partial_{\xi} \hat{y}(x, t)$ olur ki $|\partial_{\xi} y_{n-1}(x, t) - \partial_{\xi} \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla $|\partial_{\xi} y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) - \partial_{\xi} \hat{y}(x, t)| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için $\partial_{\xi} y_{n-1}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \partial_{\xi} \hat{y}(x, t)$ olduğu görülür. F fonksiyonunun sürekliliğinden $(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (x, t)$ için

$$F(\xi_n, \eta_n, y_{n-1}(\xi_n, \eta_n), \partial_{\xi} y_{n-1}(\xi_n, \eta_n)) \rightarrow F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_{\xi} \hat{y}(x, t))$$

olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 5.3. Kabul edelim ki (5.3) deki $\|y_n(\xi, \eta)\|$ sınırlı olsun ve (5.6) bir tek çözüme sahip olsun. Eğer $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun ise, y_n yaklaşık çözümü y kesin çözümüne yakınsar ve $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ olarak ifade edilir.

İspat. İlk olarak $y_n(\xi, \eta)$ nin yakınsaklığını inceleyelim. (5.6) denklemden

$$y_{n+1}(\xi, \eta) = y_n(\xi, \eta) + B_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(\xi, \eta)$$

yazılabilir. $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ nin ortonormalliklerinden yararlanarak,

$$\|y_{n+1}\|^2 = \|y_n\|^2 + B_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^2 \quad (5.7)$$

olarak ifade edilir. (5.7) ifadesinden $\|y_{n+1}\| > \|y_n\|$ eşitsizliği yazılır ki bu $\|y_n\|$ nin monoton artan olduğunu gösterir. Ayrıca $\|y_n\|$ sınırlı olduğundan yakınsaktır ve $\sum_{i=1}^{\infty} B_i^2 = c$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. Dolayısıyla $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$ dir.

Eğer $m > n$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|y_m - y_{m-1} + y_{m-1} - y_{m-2} + y_{m-2} + \dots + y_{n+1} - y_n\|^2 \\ &= \|y_m - y_{m-1}\|^2 + \|y_{m-1} - y_{m-2}\|^2 + \dots + \|y_{n+1} - y_n\|^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\|y_m - y_{m-1}\|^2 = B_m^2$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $\|y_m - y_n\|^2 = \sum_{l=n+1}^m B_l^2 \rightarrow 0$ olur. $W_2^{(6,2)}(D)$ uzayı tam olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $y_n \rightarrow \hat{y}$ olur. Şimdi \hat{y} nin temsili çözüm olup (5.3) denklemini sağladığını gösterelim. (5.6) ifadesinin her iki yanının $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak, $\hat{y}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ elde edilir. Ayrıca belirtelim ki,

$(L\hat{y})(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i L\bar{\psi}_i(\xi, \eta)$ dir. Buradan hareketle, (ξ, η) noktası yerine (ξ_l, η_l) noktasını kullanırsak;

$$\begin{aligned} (L\hat{y})(\xi_l, \eta_l) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i L\bar{\psi}_i(\xi_l, \eta_l) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle L\bar{\psi}_i(\xi, \eta), \varphi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(1,1)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), L^* \varphi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \psi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^i \beta_{il} (L\hat{y})(\xi_l, \eta_l) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \sum_{l=1}^i \beta_{il} \psi_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(6,2)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(\xi, \eta), \bar{\psi}_l(\xi, \eta) \rangle_{W_2^{(3,2)}} = B_l \end{aligned}$$

elde edilir ki $B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(\xi_k, \eta_k, y(\xi_k, \eta_k), \partial_{\xi} y(\xi_k, \eta_k))$ ifadesinden

$L\hat{y}(\xi_l, \eta_l) = F(\xi_l, \eta_l, y_{l-1}(\xi_l, \eta_l), \partial_{\xi} y_{l-1}(\xi_l, \eta_l))$ yazılabilir. $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi D de yoğun olduğundan ve her $(x, t) \in D$ için $\{(\xi_{n_j}, \eta_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır öyle ki $j \rightarrow \infty$ için $(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) \rightarrow (x, t)$ dir. O halde

$$L\hat{y}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}) = F(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}, y_{n_j-1}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}), \partial_{\xi} y_{n_j-1}(\xi_{n_j}, \eta_{n_j}))$$

yazılabilir. $j \rightarrow \infty$ için F fonksiyonunun sürekliliği ve Lemma 5.7 den yararlanarak

$$L\hat{y}(x, t) = F(x, t, \hat{y}(x, t), \partial_{\xi} \hat{y}(x, t))$$

yazılabilir. Bu bize $\hat{y}(\xi, \eta)$ nın (5.3) denklemini sağladığını gösterir ki ispat tamamlanır.

Bu bölüme kadar (5.1) denklemini için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılarak yaklaşık çözümün inşası ve iteratif sürecin yakınsaklığı incelendi. Şimdi yaptığımız çalışmanın nümerik incelemesini yapmak amacıyla bir örnek üzerinde uygulamasını vereceğiz.

5.4 Örnekler ve Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde kesin çözümü kesir parametresi içeren değişken katsayılı bir örnek doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile çözüldü. α kesir mertebesinin farklı değerleri için mutlak hata değerleri tablo olarak verildi. Yine α 'nın farklı değerleri için yaklaşık çözüm, mutlak hata ve kesin çözüm grafikleri verildi.

Örnek 5.1.

$$D_{\eta}^{\alpha}y - \partial_{\xi^5}^5y + \partial_{\xi^3}^3y + yy_{\xi} + (\xi^2\eta + 1)y_{\xi} + (\xi - \eta)y = f(\xi, \eta)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \alpha \leq 1$$

lineer olmayan Kawahara denklemini ele alalım. Denkleminize ait başlangıç ve sınır şartları

$$\begin{cases} y(\xi, 0) = 0 \\ y(0, \eta) = y_{\xi}(0, \eta) = 0 \\ y(1, \eta) = y_{\xi}(1, \eta) = y_{\xi\xi}(1, \eta) = 0 \end{cases}$$

olarak alınacaktır. İncelediğimiz denkleme ait kesin çözüm

$y(\xi, \eta) = \xi^2\eta^{1+\alpha}(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} - \frac{1}{6})$ dir. Burada

$$f(\xi, \eta) = \frac{5}{36}\eta^{2\alpha+2}\xi^9 - \frac{3}{4}\eta^{2\alpha+2}\xi^8 + \frac{5}{3}\eta^{2\alpha+2}\xi^7 + \frac{1}{6}\eta^{\alpha+1}\xi^6 + \frac{5}{6}\eta^{\alpha+2}\xi^6 - \frac{35}{18}\eta^{2\alpha+2}\xi^6$$

$$+ \frac{1}{6}\Gamma(\alpha + 2)\eta\xi^5 - \frac{1}{2}\eta^{\alpha+1}\xi^5 - \frac{13}{6}\eta^{\alpha+2}\xi^5 + \frac{5}{4}\eta^{2\alpha+2}\xi^5$$

$$- \frac{1}{2}\Gamma(\alpha + 2)\eta\xi^4 + \frac{4}{3}\eta^{\alpha+1}\xi^4 + 2\eta^{\alpha+2}\xi^4 - \frac{5}{12}\eta^{2\alpha+2}\xi^4$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma(\alpha + 2)\eta\xi^3 - \frac{13}{6}\eta^{\alpha+1}\xi^3 - \frac{5}{6}\eta^{\alpha+2}\xi^3 + \frac{1}{18}\eta^{2\alpha+2}\xi^3$$

$$- \frac{1}{6}\Gamma(\alpha + 2)\eta\xi^2 + \frac{23}{2}\eta^{\alpha+1}\xi^2 + \frac{1}{6}\eta^{\alpha+2}\xi^2 - \frac{37}{3}\eta^{\alpha+1}\xi - 17\eta^{\alpha+1}$$

şeklinde elde edilir. $n = p \times q$ olmak üzere $\xi_i = \frac{i}{p}$, ($i = 1, 2, \dots, p$) ve $\eta_i = \frac{i}{q}$, ($i = 1, 2, \dots, q$) olarak alınmıştır. $p = 5$ ve $q = 5$ olmak üzere $n = 25$ nokta alınarak $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ ve $\alpha = 0.9$ değerleri için mutlak hata tabloları ile birlikte yaklaşık çözüm, kesin çözüm ve mutlak hata grafikleri verilmiştir. Yine $p = 8$ ve $q = 8$ olmak üzere $n = 64$ nokta alınarak $\alpha = 1$ değeri için yaklaşık çözüm, kesin çözüm ve mutlak hata grafikleri verilmiştir.

Çizelge 5.1: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.9$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri
($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

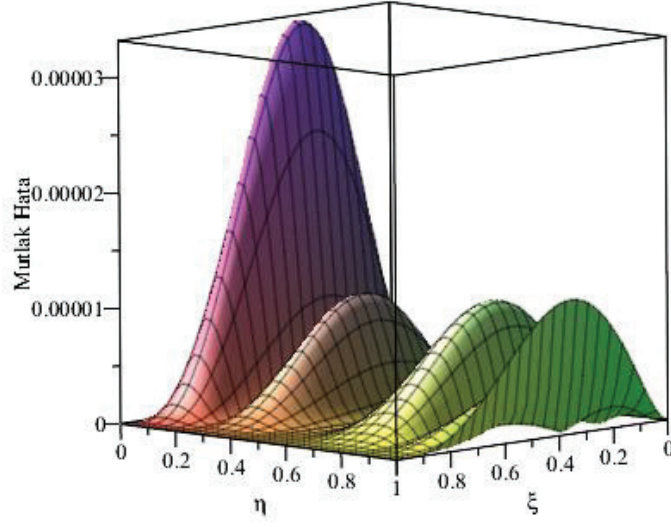
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	4.92E-6	1.76E-7	1.79E-6	6.77E-7	4.07E-7	1.45E-6	3.06E-6	2.51E-6	6.78E-7
0.2	1.38E-5	3.95E-7	4.83E-6	1.53E-6	5.75E-7	3.28E-6	7.52E-6	5.67E-6	3.64E-6
0.3	2.09E-5	5.16E-7	7.10E-6	2.00E-6	4.06E-7	4.29E-6	1.04E-5	7.42E-6	6.91E-6
0.4	2.34E-5	5.21E-7	7.83E-6	2.03E-6	1.27E-7	4.34E-6	1.11E-5	7.51E-6	8.74E-6
0.5	2.12E-5	4.34E-7	7.00E-6	1.69E-6	1.03E-7	3.62E-6	9.62E-6	6.26E-6	8.57E-6
0.6	1.56E-5	2.98E-7	5.11E-6	1.16E-6	2.07E-7	2.48E-6	6.84E-6	4.29E-6	6.72E-6
0.7	8.99E-6	1.60E-7	2.91E-6	6.25E-7	1.84E-7	1.33E-6	3.80E-6	2.30E-6	4.05E-6
0.8	3.48E-6	5.80E-8	1.11E-6	2.26E-7	9.47E-8	4.83E-7	1.43E-6	8.36E-7	1.64E-6
0.9	5.51E-7	8.62E-9	1.75E-7	3.37E-8	1.83E-8	7.18E-8	2.19E-7	1.24E-7	2.69E-7

Çizelge 5.2: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.8$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri
($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

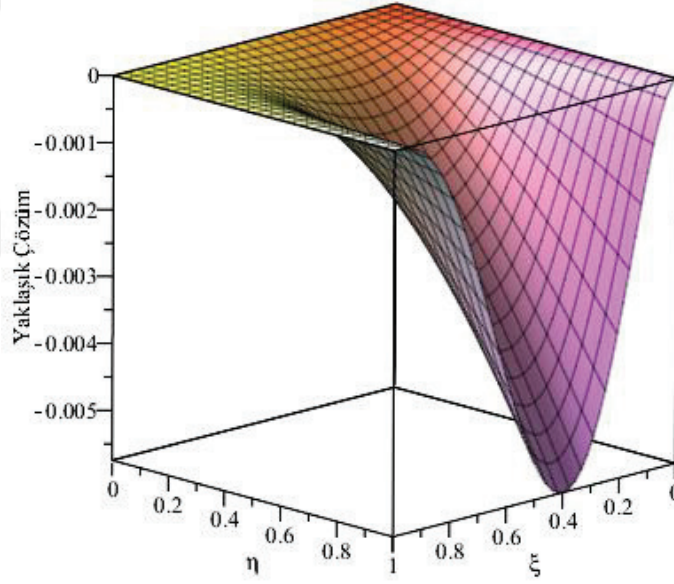
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	5.66E-6	2.07E-7	2.03E-6	7.40E-7	4.73E-7	1.52E-6	2.98E-6	2.56E-6	5.45E-8
0.2	1.59E-5	4.66E-7	5.47E-6	1.67E-6	7.19E-7	3.44E-6	7.26E-6	5.78E-6	1.91E-6
0.3	2.41E-5	6.08E-7	8.05E-6	2.19E-6	5.89E-7	4.51E-6	1.00E-5	7.57E-6	4.30E-6
0.4	2.70E-5	6.14E-7	8.87E-6	2.21E-6	3.08E-7	4.56E-6	1.06E-5	7.66E-6	5.83E-6
0.5	2.44E-5	5.11E-7	7.93E-6	1.84E-6	4.46E-8	3.80E-6	9.17E-6	6.38E-6	5.95E-6
0.6	1.80E-5	3.50E-7	5.79E-6	1.26E-6	1.08E-7	2.60E-6	6.50E-6	4.37E-6	4.79E-6
0.7	1.03E-5	1.88E-7	3.30E-6	6.81E-7	1.32E-7	1.40E-6	3.60E-6	2.35E-6	2.95E-6
0.8	4.00E-6	6.83E-7	1.26E-6	2.47E-7	7.60E-8	5.07E-7	1.35E-6	8.52E-7	1.21E-6
0.9	6.34E-7	1.01E-8	1.99E-7	3.66E-8	1.55E-8	7.53E-8	2.07E-7	1.26E-7	2.02E-7

Çizelge 5.3: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.7$ değeri için hesaplanan mutlak hata değerleri
($0.1 \leq \xi, \eta \leq 0.9$)

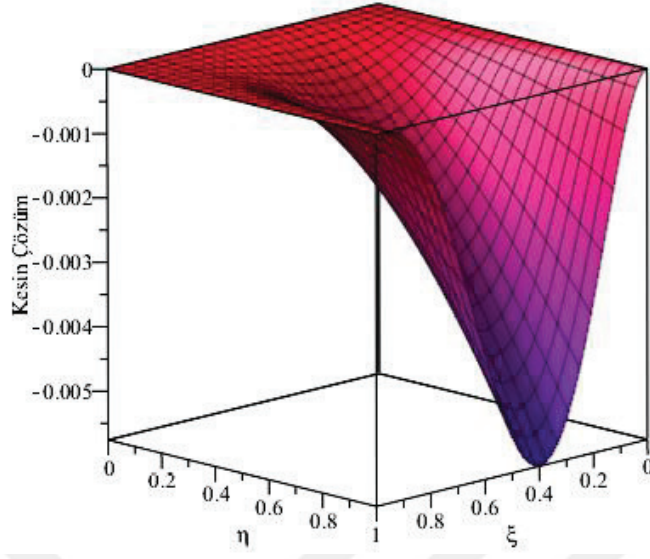
ξ/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	6.36E-6	2.44E-7	2.26E-6	8.08E-7	5.44E-7	1.60E-6	2.92E-6	2.61E-6	5.26E-7
0.2	1.79E-5	5.49E-7	6.07E-6	1.82E-6	8.76E-7	3.62E-6	7.05E-6	5.90E-6	2.99E-7
0.3	2.70E-5	7.17E-7	8.94E-6	2.39E-6	7.91E-7	4.73E-6	9.69E-6	7.72E-6	1.89E-6
0.4	3.03E-5	7.24E-7	9.85E-6	2.41E-6	5.09E-7	4.79E-6	1.01E-5	7.81E-6	3.14E-6
0.5	2.74E-5	6.03E-7	8.80E-6	2.01E-6	2.09E-7	3.99E-6	8.76E-6	6.51E-6	3.52E-6
0.6	2.02E-5	4.13E-7	6.43E-6	1.38E-6	3.30E-9	2.73E-6	6.19E-6	4.46E-6	3.00E-6
0.7	1.16E-5	2.22E-7	3.66E-6	7.42E-7	7.32E-8	1.47E-6	3.42E-6	2.39E-6	1.93E-6
0.8	4.50E-6	8.05E-8	1.40E-6	2.69E-7	5.49E-8	5.32E-7	1.27E-6	8.68E-7	8.19E-7
0.9	7.12E-7	1.19E-8	2.20E-7	3.99E-8	1.25E-8	7.91E-8	1.95E-7	1.29E-7	1.39E-7



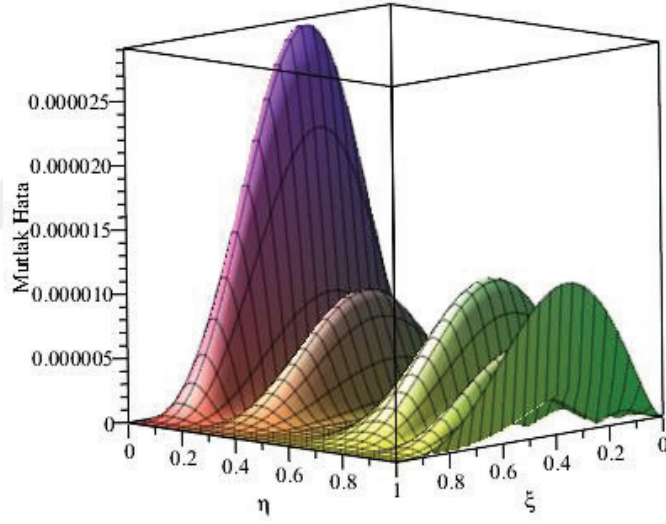
Şekil 5.1: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.



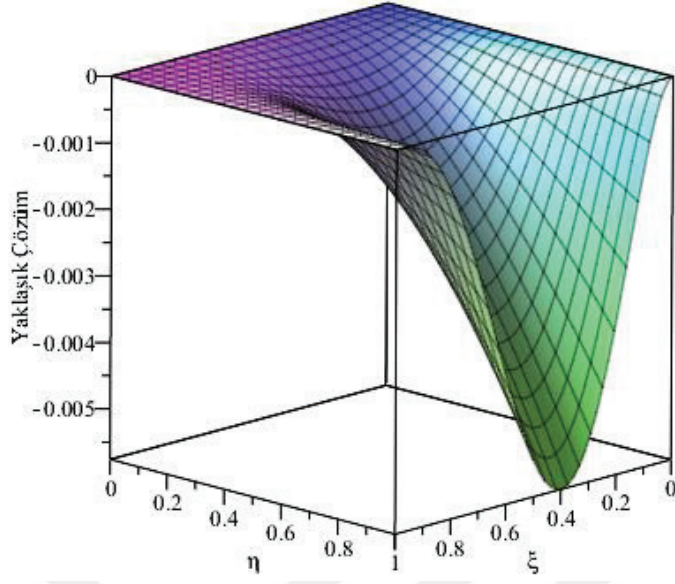
Şekil 5.2: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.7$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



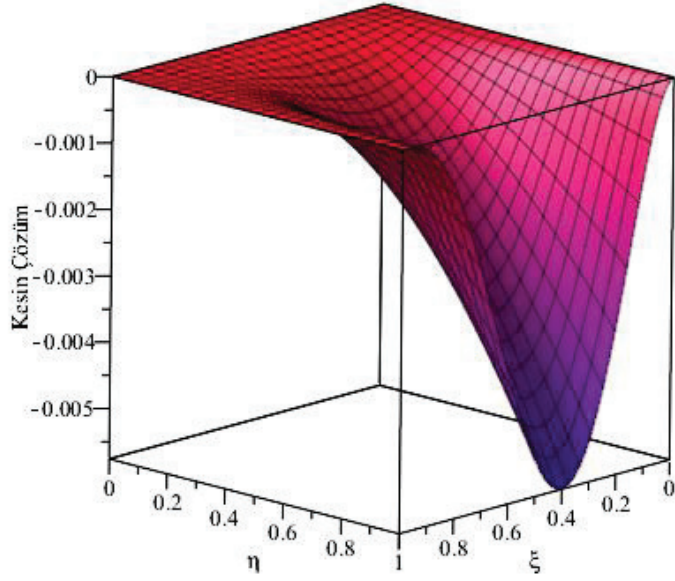
Şekil 5.3: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.7$ değeri için kesin çözüm grafiği.



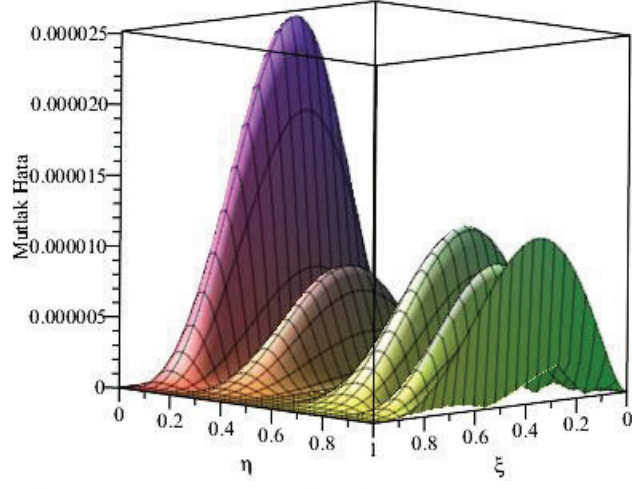
Şekil 5.4: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.8$ değeri için mutlak hata grafiği.



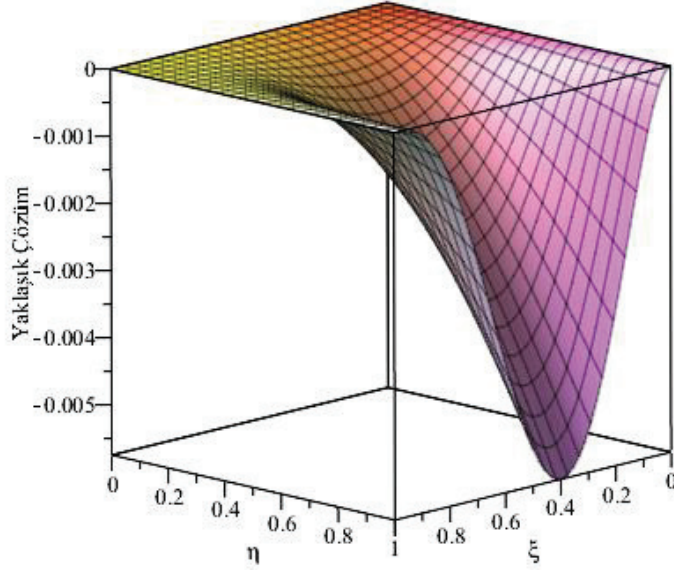
Şekil 5.5: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.8$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



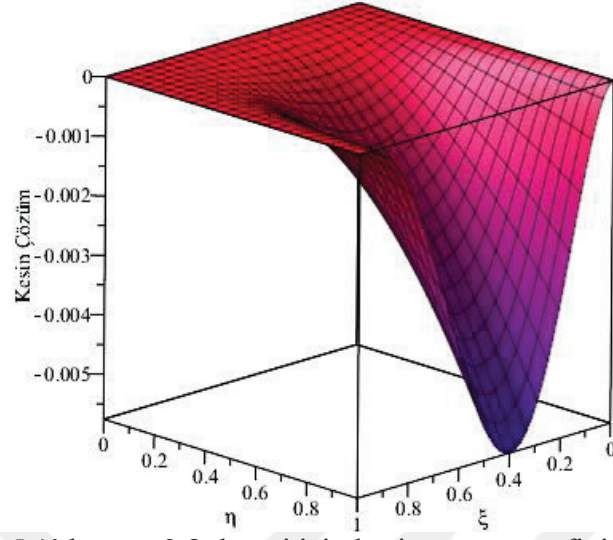
Şekil 5.6: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.8$ değeri için kesin çözüm grafiği.



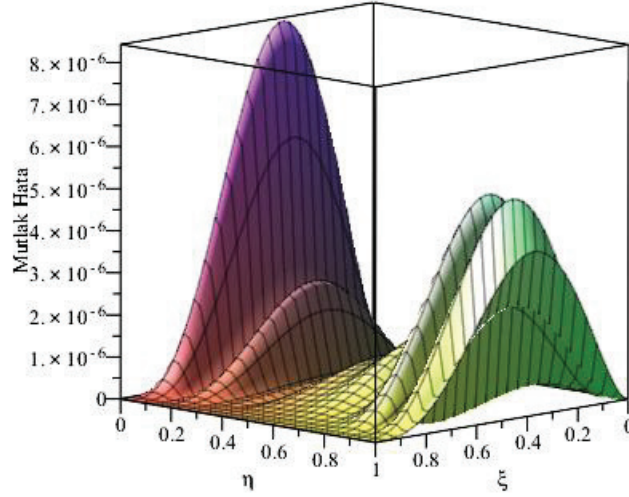
Şekil 5.7: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.



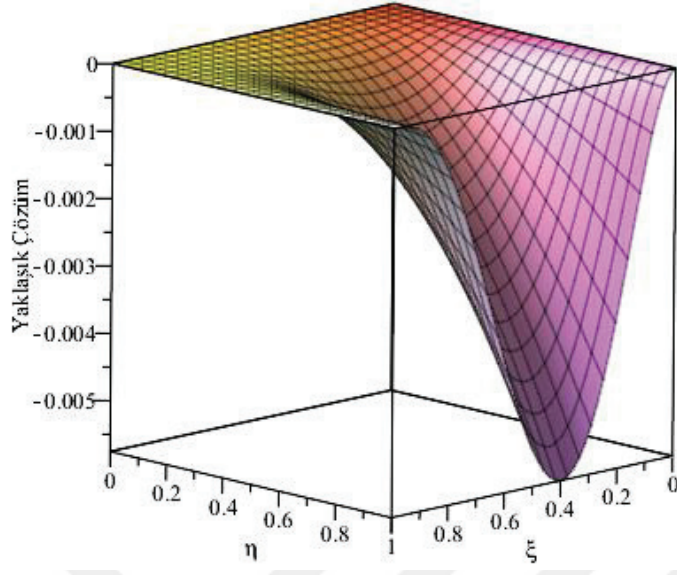
Şekil 5.8: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.9$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



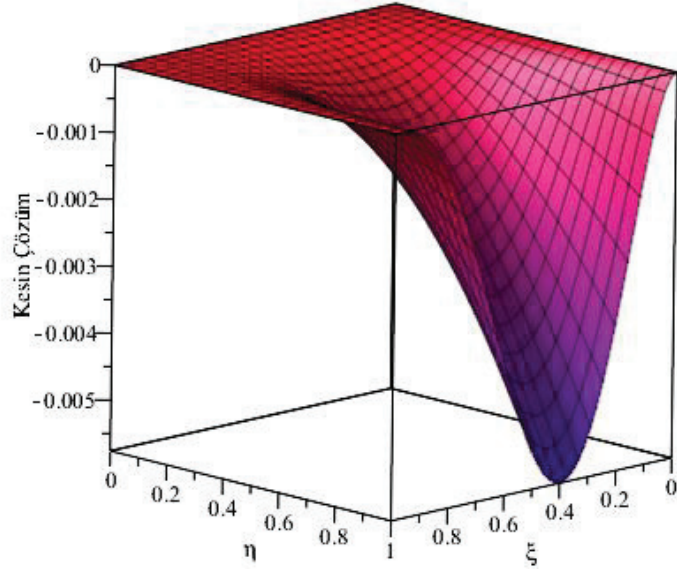
Şekil 5.9: Örnek 5.1'de $\alpha = 0.9$ değeri için kesin çözüm grafiği.



Şekil 5.10: Örnek 5.1'de $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 5.11: Örnek 5.1'de $\alpha = 1$ değeri için yaklaşık çözüm grafiği.



Şekil 5.12: Örnek 5.1'de $\alpha = 1$ değeri için kesin çözüm grafiği.



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fizik, mühendislik, akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniği, kontrol teorisi, biyoloji, finans gibi uygulamalı bilimlerde, süreçlerin matematiksel modellemeleri sonucunda kesir türevli lineer yada lineer olmayan adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler ortaya çıkmaktadır.

Kesirli türev içeren kısmi türevli denklemler için değişik nümerik ve analitik metotlar mevcuttur. Sonlu fark metodu, sonlu elemanlar metodu, diferansiyel dönüşüm metodu, diferansiyel kuadratur metodu en çok bilinen metotlardandır. Bu tez çalışmasında derin bir teorik yapıya sahip doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılmıştır. Metot, Caputo anlamında kesirli türev içeren ve lineer olmayan bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Üçüncü bölümde değişken katsayılı Burgers denklemi ele alınmıştır. Denklemin bağımsız değişkenlerinin en yüksek türev mertebeleri göz önüne alınarak doğuran çekirdekli uzaylar ve bu uzaylara ait çekirdek fonksiyonları elde edilmiştir. Ardından denkleme ait lineer operatör tanımlandıktan sonra lineer operatör ve çekirdek fonksiyonu yardımı ile uzaya ait tam ortonormal sistem elde edilmiştir. Temsili çözüm, tam ortonormal sistem yardımıyla ifade edilip iteratif süreç kurulmuştur. Metodun yakınsaklık analizi yapıldıktan sonra değişken ve sabit katsayılı iki örnek çözülmüştür. Örneklerde düşük nokta alınarak iyi sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanında nokta sayısının artırılarak daha iyi sonuçlar elde edileceği gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçlara nokta sayısının yanı sıra denklemin homojen olmayan kısmı, kesin çözümünün içerdiği fonksiyon türü ve lineer operatörün de etki ettiği gözlemlenmiştir. Dördüncü bölümde başlangıç şartı homojen olmayan adveksiyon denklemi ele alınmıştır ve başlangıç şartının homojenleştirilmesinden sonra metodun uygulanabilmesi için gerekli olan süreçler aynı şekilde takip edilip bir örnek problem çözülmüştür. Beşinci bölümde başlangıç ve sınır şartları homojen olan Kawahara denklemi ele alınmıştır. Metodun uygulanabilmesi için gerekli olan süreç takip edilmiş ve bir örnek çözülmüştür. Elde edilen sonuçların iyi olduğu gözlemlenmiştir. Alınan her üç model denklemin kesin çözümleri kesir parametresi içerdiğinden ve literatürde bu tarz bir çalışma olmadığından dolayı hata değerleri üzerinde karşılaştırma yapmak mümkün olmamıştır.

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde kullanılan metodun kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanışlı ve etkin bir yöntem olduğu görülmüştür. Kesirli mertebeden türev içeren lineer ve lineer olmayan adi, kısmi ve integro diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için uygulanabilir bir metottur.



KAYNAKLAR

- Adams, R. A., Fournier, J. J. F., 2003. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Elsevier, New York.
- Akgül, A., Inc, M., Kilicman, A., Baleanu, D., 2016. A new approach one-dimensional sine-Gordon equation. *Advances in Difference Equations*, **8**: 1-20.
- Al-Smadi, M., 2017. Simplified iterative reproducing kernel method for handling time-fractional BVPs with error estimation. *Ain Shams Engineering Journal*, <https://doi.org/10.1016/j.asej.2017.04.006>
- Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Trans. Am. Math. Soc.*, **68**: 337-404.
- Arqub, O. A., 2017. Fitted reproducing kernel Hilbert space method for the solutions of some certain classes of time-fractional partial differential equations subject to initial and Neumann boundary conditions. *Computers and Mathematics with Applications*, **73**(6): 1243-1261.
- Arqub, O. A., 2018. Numerical solutions for the Robin time-fractional partial differential equations of heat and fluid flows based on the reproducing kernel algorithm. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **28**(4): 828-856.
- Arqub, O. A., Maayah, B., 2018. Solutions of Bagley-Torvik and Painleve equations of fractional order using iterative reproducing kernel algorithm with error estimates. *Neural Comput & Applic*, **29**(5): 1465-1479.
- Bagherzadeh, A. S., 2017. B-spline collocation method for numerical solution of nonlinear Kawahara and modified Kawahara equations. *TWMS J. App. Eng. Math.*, **7**(2): 188-199.
- Bahadir, A. R., Saglam, M., 2005. A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers' equation. *Appl. Math. Comp.*, **160**: 663-673.
- Bergman, S., 1922. Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.*, **86**: 238-271.
- Bibi, N., Tirmizi, S. I. A., Haq, S., 2011. Meshless method of lines for numerical solution of Kawahara type equations. *Applied Mathematics*, **2**(5): 608-618.
- Bochner, S., 1932. *Vorlesungen ueber Fouriersche Integrale*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
- Burgers, J. M., 1939. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. *Verh. Kon, Nerderl. Akad. Weten-Schappen Amsterdam, Afdeel Natuurkunde*, **17**(2): 1-53.
- Burgers, J. M., 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, **1**: 171-199.
- Caughey, T. K., Ellison, J., 1975. Existence, uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **51**(1): 1-32.
- Cui, M., Lin, Y., 2009. *Nonlinear Numerical Analysis in Reproducing Kernel Space*. Nova Science Publishers, Inc., New York.
- Dag, I., Irk, D., Saka, B., 2005. A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines. *Appl. Math. Comp.*, **163**: 199-211.

- Debnath, L., Mikusinski, P., 2005. *Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Academic Press, Amsterdam.
- Dereli, Y., Dağ, I., 2012. Numerical solutions of the Kawahara type equations using radial basis functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **28**(2): 542-553.
- Diethelm, K., 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer, Berlin, Germany, 247.
- Ellison, J. A., 1971. *Existence, uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations*. California Institute of Technology, Pasadena California.
- Esen, A., Tasbozan, O., 2016. Numerical solution of time fractional Burgers equation by cubic B-spline finite elements. *Mediterr. J. Math.*, **13**(3): 1325-1337.
- Geng, F., Tang, Z., Zhou, Y., 2018. Reproducing kernel method for singularly perturbed one-dimensional initial-boundary value problems with exponential initial layers. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **17**(1): 177-187.
- Inc, M., Akgül, A., Kiliçman, A., 2012. Explicit solution of telegraph equation based on reproducing kernel method. *Journal of Function Spaces and Applications*, **2012**: 1-23.
- Inc, M., Akgül, A., Kiliçman, A., 2013. A novel method for solving KdV equation based on reproducing kernel Hilbert space method. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**: 1-11.
- Istratescu, V. I., 1987. *Inner Product Structures*. D. Reidel Publishing Company, Tokyo.
- Jiang, W., Lin, Y., 2010. Approximate solution of the fractional advection-dispersion equation. *Computer Physics Communications*, **181**(3): 557-561.
- Jiang, W., Lin, Y., 2011. Representation of exact solution for the time-fractional telegraph equation in the reproducing kernel space. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **16**(9): 3639-3645.
- Kawahara, T., 1972. Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media. *Journal of Physical Society of Japan*, **33**(1): 260-264.
- Khaleghi, M., Moghaddam, M. T., Babolian, E., Abbasbandy, S., 2018. Solving a class of singular two-point boundary value problems using new effective reproducing kernel technique. *Applied Mathematics and Computation*, **331**(15): 264-273.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations (North-Holland Mathematics Studies 204)*. Elsevier Inc. USA.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley&Sons. Inc. New York, Santa Barbara.
- Kutluay, S., Bahadır, A. R., Özdeş, A., 1999. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **103**(2): 251-261.
- Kutluay, S., Esen, A., 2004. A linearized numerical scheme for Burgers-like equations. *Applied Mathematics and Computation*, **156**(2): 295-305.
- Larkin, N. A., Doronin, G. G., 2007. Kawahara equation in a quarter-plane and in a finite domain. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, **25**(1-2): 9-16.

- Larkin, N. A., Simoes, M. H., 2013. General boundary conditions for the Kawahara equation on bounded intervals. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2013**(159): 1-21.
- Li, F., Cui, M., 2009. A best approximation for the solution of one-dimensional variable-coefficient Burgers' equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **25**(6): 1353-1356.
- Li, X. Y., Wu, B. Y., 2018. Iterative reproducing kernel method for nonlinear variable-order space fractional diffusion equations. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**(6-7): 1210-1221.
- Li, X., Wu, B., 2013. New algorithm for nonclassical parabolic problems based on the reproducing kernel method. *Mathematical Sciences*, **7**(4): 1-5.
- Li, X., Wu, B., 2017. A new reproducing kernel method for variable order fractional boundary value problems for functional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **311**: 387-393.
- Lin, Y., Zhou, Y., 2009. Solving the reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions based on reproducing kernel space. *Numerical methods for Partial Differential Equations*, **25**(6): 1468-1481.
- Lu, J., 2008. Analytical approach to Kawahara equation using variational iteration method and homotopy perturbation method. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **31**: 287-293.
- Mei, L., Jia, Y., Lin, Y., 2018. Simplified reproducing kernel method for impulsive delay differential equations. *Applied Mathematics Letter*, **83**: 123-129.
- Mercer, J., 1909. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **209**: 415-446.
- Mercer, J., 1911. Sturm-Louville series of normal functions in the theory of integral equations. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **211**: 111-198.
- Mohammadi, M., Mokhtari, R., 2011. Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**(14): 4003-4014.
- Mohammadi, M., Mokhtari, R., 2014. A reproducing kernel method for solving a class of nonlinear systems of PDEs. *Mathematical Modelling and Analysis*, **19**(2): 180-198.
- Mohammadi, M., Mokhtari, R., Panahipour, H., 2013. A Galerkin-reproducing kernel method: Application to the 2D nonlinear coupled Burgers equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37**: 1642-1652.
- Mohammadi, M., Zafarghandi, F. S., Babolian, E., Jvadi, S., 2016. A local reproducing kernel method accompanied by some different edge improvement techniques: application to the Burgers' equation. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, **42**(2): 857-871.
- Mohyud-Din, S. T., Akram, T., Abbas, M., Ismail, A. I., Ali, N. H. M., 2018. A fully implicit finite difference scheme based on extended cubic B-splines for time fractional advection-diffusion equation. *Advances in Difference Equations*, **109**: 1-17.
- Moore, E. H., 1916. On properly positive Hermitian matrices. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **23**: p.59

- Moore, E. H., 1939. *General Analysis*. Memoirs of the American Philosophical Society. Part I, 1935, Part II, 1939.
- Moore, R. E., Cloud, M. J., 2007. *Computational Functional Analysis*. Horwood Publishing Chichester, UK.
- Mu, L., Du, H., 2008. The solution of parabolic differential equation with non-local boundary conditions in the reproducing kernel space. *Applied Mathematics and Computation*, **202**(2): 708-714.
- Oldham K. B., Spanier, J., 1974. *Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, Inc., New York, USA, 234.
- Oruç, Ö., Bulut, F., Esen, A., 2015. A Haar wavelet-finite difference hybrid method for the numerical solution of the modified Burgers' equation. *Journal of Mathematical Chemistry*, **53**(7): 1592-1607.
- Paulsen, V. I., Raghupathi, M., 2016. *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. Cambridge University Press, United Kingdom, 152.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations: An introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solutions and Some of Their Applications*. Academic Press, California, USA.
- Polat, N., Kaya, D., Tutar, H. I., 2006. A analytic and numerical solution to a modified Kawahara equation and a convergence analysis of the method. *Applied Mathematics and Computation*, **181**: 193-199.
- Ponnusamy, A., 2002. *Foundations of Functional Analysis*. Alpha Science International Ltd., Pangbourne, England.
- Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S., 2005. Numerical treatment for the modified Burgers equation. *Math. Comput. Simul.*, **70**: 90-98.
- Safavi, M., Khajehnasiri, A. A., 2016. Solutions of the modified Kawahara equation with time-and space- fractional derivatives. *Journal of Modern Methods in Numerical Mathematics*, **7**(1): 10-18.
- Schwartz, L., 1964. Sous-espaces hilbertines d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associes (noyaux reproduisants). *J. Anal. Math.*, **13**: 115-256.
- Sen, R., 2013. *A First Course in Functional Analysis*. Anthem Press, London.
- Shuangping, T., Shuangbini C., 2002. Existence and uniqueness of solutions to nonlinear Kawahara equations. *Chin. Ann. Math. Ser A*, **23**: 221-228.
- Tao, S. P., Cui, S. B., 2005. Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **21**(5): 1035-1044.
- Wang, Y. L., Du, M. J., Temuer, C. L., Tian, D., 2018. Using reproducing kernel for solving a class of time-fractional telegraph equation with initial value conditions. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**(8): 1609-1621.
- Wang, Y. L., Yu, H., Tan, F. G., Qu, S., 2014. Solving a class of singularly perturbed partial differential equation by using the perturbation method and reproducing kernel method. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**: 1-5.
- Wang, Y., Du, M., Tan, F., Li, Z., Nie, T., 2013. Using reproducing kernel for solving a class of fractional partial differential equation with non-classical conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **219**(11): 5918-5925.

- Wang, Y., Su, L., Cao, X., Li, X., 2011. Using reproducing kernel for solving a class of singularly perturbed problems. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**(2): 421-430.
- Wazwaz, A. M., 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Nonlinear Physical Science, Higher Education Press, Springer New York.
- Yang, L. H., Lin, Y., 2008. Reproducing kernel methods for solving linear initial-boundary-value problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2008**(29): 1-11.
- Yang, L., Cui, M., 2006. New algorithm for a class of nonlinear integro-differential equations in the reproducing kernel space. *Applied Mathematics and Computation*, **174**(2): 942-960.
- Yao, H., 2010. Reproducing kernel method for the solution of nonlinear hyperbolic telegraph equation with integral condition. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **27**(4): 867-886.
- Yu-lan, W., Lu, C., 2008. Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, **29**(1): 129-137.
- Zarebnia, M., Aghili, A., 2016. A new approach for numerical solution of the modified Kawahara equation. *Journal Nonlinear Analysis and Application*, **2016**(2): 48-59.
- Zaremba, S., 1907. L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. *Bulletin International de l'Academie des Sciences de Cracovie*, **1907**: 147-196.
- Zaremba, S., 1908. Sur le calcul numerique des fonctions demandees dans le probleme de Dirichlet et le probleme hydrodynamique. *Bulletin International de l'Academie des Sciences de Cracovie*, **1908**: 125-195.
- Zhou, Y., Cui, M., Lin, Y., 2009. Numerical algorithm for parabolic problems with non-classical conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **230**(2): 770-780.



ÖZ GEÇMİŞ

1988 yılında Ankara'nın Polatlı ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Polatlı'da orta öğrenimini Iğdır'da tamamladı. Lisans öğrenimine 2006 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümün'de başladı ve 2010 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Yüksek lisans öğrenimine 2010 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalın'da başladı ve 2012 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2012 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalın'da doktora öğrenimine başladı. Halen matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.



YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 09/08/2018

Tez Başlığı / Konusu: **KESİR MERTEBELİ TÜREV İÇEREN BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam ...**87**... sayfalık kısmına ilişkin, **09/08/2018** tarihinde şahsım tarafından **TURKİTAN**...intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % ...**12**... (**oniki**...) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimededen daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

09.08.2018
[İmza]

Adı Soyadı: Onur SALDIR

Öğrenci No: 12911120294

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: Y.Lisans Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR
Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

[İmza]
(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

[İmza]
Prof. Dr. Suat SENSİY
(Unvan, Ad Soyad, İmza)
Enstitü Müdürü