

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDSİLİĞİ ANABİLİM DALI

**DOĞRUSAL OLMAYAN RLC DEVRELERİNİN KARARLILIK VE PASİFLİK
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Nezir KADAH
DANIŞMAN: Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDSİLİĞİ ANABİLİM DALI

**DOĞRUSAL OLMAYAN RLC DEVRELERİNİN KARARLILIK VE PASİFLİK
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Nezir KADAH

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ danışmanlığında, Nezir KADAH tarafından sunulan "DOĞRUSAL OLMAYAN RLC DEVRELERİNİN KARARLILIK VE PASİFLİK ANALİZİ" isimli bu çalışma, Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 21/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mehmet Emin MERAL

İmza:

Üye: Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/07/2019 tarih ve 2019/37-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nezir KADAH

ÖZET

DOĞRUSAL OLMAYAN RLC DEVRELERİNİN KARARLILIK VE PASİFLİK ANALİZİ

KADAH, Nezir

Yüksek Lisans Tezi, Elektrik-Elektronik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

Temmuz 2019, 85 sayfa

Bu tez çalışmasında, sistemlerin kararlılığı ve pasifliği hem teorik açıdan hem de uygulamalı olarak kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Literatürde yer alan bazı nonlineer (doğrusal olmayan) elektrik devreleri ve mekanik sistemler uygulama olarak seçilerek; bu sistemlerin kararlılık, global asimptotik kararlılık (GAS) ve pasiflik durumları Lyapunov'un ikinci (direct) metodu kullanılarak incelenmiştir. İncelenen her bir nonlineer sistem için uygun bir Lyapunov fonksiyonu inşa edilmiştir. Ayrıca sistemlerin enerjileri ile pasiflikleri arasındaki ilişki, Lyapunov fonksiyonları kullanılarak gösterilmiştir. Dahası, farklı türdeki dinamik sistemlerin matematiksel olarak elektrik devrelerine modellenerek kararlılık ve pasiflik analizlerinin yapılabileceği ispat edilmiştir.

Analiz edilen her bir sistem için, MATLAB programı kullanılarak sonuçlara ait benzetim çalışmaları elde edilmiştir ve elde edilen bu benzetim çalışmaları teorik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Denge noktaları, Kararlılık, Lyapunov fonksiyonu, Nonlineer sistemler, Pasiflik.



ABSTRACT

STABILITY AND PASSIVITY ANALYSIS OF NONLINEAR RLC CIRCUITS

KADAH, Nezir

M. Sc. Thesis, Electrical-Electronics Engineering

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ATEŞ

July 2019, 85 pages

In this study, the stability and passivity of the systems are discussed in detail both in theory and in practice. Some nonlinear electrical circuits and mechanical systems in the literature have been selected as applications; stability, global asymptotic stability (GAS) and passivity of these systems have been examined by using Lyapunov's second (direct) method. A convenient Lyapunov function was constructed for each nonlinear system examined. In addition, the relationship between the energies and passivity of the systems has been demonstrated using Lyapunov functions. Moreover, it has been proved that stability and passivity analyzes can be performed by modeling mathematical models of different types of dynamic systems to electrical circuits.

For each system analyzed, simulations of the results were obtained by using MATLAB program and these simulations were compared with the theoretical results.

Keywords: Equilibrium points, Lyapunov function, Nonlinear systems, Passivity, Stability.



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ'e ve tez jürimde bulunan değerli hocalarıma katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca eğitim hayatım boyunca her zaman desteklerini hissettiğim aileme ve manevi desteklerini benden esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

2019

Nezir KADAH



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	7
2.1. Nonlinear Denklem Sistemleri	7
2.1.1 Kararlılık (Stability)	8
2.1.2. Denge noktaları ve kararlılık	9
2.1.2.1. Denge noktalarının kararlılık incelemesi.....	10
2.1.2.2. Kararlılık ve faz düzlemi	13
2.1.2.2.1. Faz portreleri (phase portraits)	14
2.1.2.3. Asimptotik kararlılık (AS).....	16
2.1.2.4. Kararlılık şartları.....	18
2.1.3. Nonlinear sistemlerin modellenmesi	18
2.2. Lyapunov Fonksiyonu ve Kararlılık.....	20
2.2.1. Gradyan ve skaler potansiyel.....	21
2.2.2. Lipschitz koşulu.....	23
2.2.3. Gronwall-Bellman eşitsizliği.....	24
2.2.4. Lyapunov kararlılığı	24
2.2.5. Lyapunov fonksiyonu	26
2.2.5.1. Lyapunov fonksiyonlarının tanımlanması	27
2.2.6. Lyapunov'un ikinci (Direct) metodu.....	30
2.2.6.1. Lyapunov anlamında kararlılık.....	31
2.2.6.2. Global asimptotik kararlılık (GAS)	32

	Sayfa
2.2.6.3. LaSalle değişmezlik ilkesi	34
2.3. Pasiflik	40
2.3.1. Pasiflik koşulları	41
2.3.1.1. Memoryless fonksiyonu	42
2.3.1.2. Depolama (storage) fonksiyonu	43
2.3.1.2.1. Lyapunov enerji fonksiyonu ve pasiflik	44
2.3.1.2.2. Supply rate fonksiyonu	46
2.3.2. Pasiflik ve kararlılık	49
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	53
3.1. Tunnel Diyot Devresi	53
3.2. Nonlinear RC Devresi	57
3.3. Metal Oksit Parafudr Devresi	60
3.3. Josephson Junction Devresi	62
3.4. Nonlinear Sarkaç	64
3.5. Kütle-Yay-Amortisör Sistemi	69
3.6. Pasiflik Teoremi	75
4. SONUÇ	79
KAYNAKLAR	81
ÖZ GEÇMİŞ	85

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 1. Mekanik-elektrik sistemlerin modellenmesi	20
Çizelge 2. Lyapunov fonksiyonlarının tanımları.....	28
Çizelge 3. Eş. 2.28'de verilen Lyapunov fonksiyonunun tanımları	29
Çizelge 4. Memoryless fonksiyonunun pasiflik tanımları.....	43
Çizelge 5. Depolama fonksiyonunun Pasiflik tanımları.....	45
Çizelge 6. Supply rate fonksiyonunun pasiflik tanımları	47



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Eş. 2.4'e ait denge noktaları faz diyagramı	10
Şekil 2.2. Eş. 2.4'e ait denge noktaları eğrileri	11
Şekil 2.3. "dfield" yazılımı kullanılarak elde edilen çözüm eğrileri	12
Şekil 2.4. Çözüm eğrilerinin sınırları	15
Şekil 2.5. "pplane" yazılımı kullanılarak elde edilen faz düzlem portresi	16
Şekil 2.6. Eş. 2.12'ye ait faz düzlem portresi	17
Şekil 2.7. Lyapunov kararlılığı	26
Şekil 2.8. Eş. 2.28'de verilen Lyapunov fonksiyonunun grafiği	29
Şekil 2.9. Kararlı bir cismin hareketi	32
Şekil 2.10. Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılık sınıflandırmaları	34
Şekil 2.11. Eş. 2.34'e ait faz düzlem portresi	38
Şekil 2.12. Durum değişkenlerinin zamana göre davranışı	39
Şekil 2.13. "odesolve" yazılımı ile elde edilen çözüm eğrisinin faz düzlem portresi	39
Şekil 2.14. Nonlineer elektrik devresi modeli	41
Şekil 2.15. Nonlineer direnç karakteristiği	43
Şekil 2.16. Eş. 2.43'ün nonlineer elektrik devresine modellenmesi	48
Şekil 3.1. Nonlineer tunnel diyot devresi	53
Şekil 3.2. Faz düzlem portresi, denge noktaları ve $v_R - i_R$ karakteristiği	55
Şekil 3.3. Tunnel diyot devresi durum değişkenlerinin zamana göre davranışı	57
Şekil 3.4. Nonlineer RC devresi	57
Şekil 3.5. Nonlineer RC devresi çözüm eğrilerinin faz düzlem portresi	59
Şekil 3.6. Metal oksit Parafudr devresi	60
Şekil 3.7. Metal oksit parafudr devresi çözüm eğrilerinin faz düzlem portresi	61
Şekil 3.8. Nonlineer Josephson junction devresi	62
Şekil 3.9. Josephson junction devresi durum değişkenlerinin zamana göre davranışı ...	64
Şekil 3.10. Nonlineer sarkaç modeli	65
Şekil 3.11. Sürtünmesiz nonlineer sarkaç faz düzlem portresi	67
Şekil 3.12. Sürtülmeli nonlineer sarkaç faz düzlem portresi	68

	Sayfa
Şekil 3.13. Nonlineer kütle-yay-amortisör sistemi.....	70
Şekil 3.14. Çözüm eğrilerinin faz düzlem portresi.....	72
Şekil 3.15. Durum değişkenlerinin zamana göre davranışı.....	73



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

V	Lyapunov fonksiyonu
t	Zaman değişkeni
t_0	Başlangıç zamanı
R	Direnç
L	Endüktans
C	Kapasitans
m	Kütle
l	Uzunluk
k	Yay sabiti
μ	Sürtünme katsayısı
x_e, y_e, z_e	Denge noktaları
x_0, y_0, z_0	Başlangıç noktaları
$\ \cdot \ $	Norm
∇	Gradyan
\square	Nonlinear devre elemanı

Kısaltmalar

Açıklama

AS	Asimptotik kararlılık
LAS	Yerel (locally) asimptotik kararlılık
GAS	Global asimptotik kararlılık
PDF	Pozitif tanımlı fonksiyon
ADD	Adi diferansiyel denklem



1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Direnç, bobin ve kapasitör gibi elektrik-elektronik devre elemanlarının seri veya paralel olarak bağlanmasıyla oluşan devreler, RLC devreleri olarak adlandırılır. RLC devreleri, özellikle elektronikte oldukça ilgi duyulan bir konu olmakla beraber, bu alanda geçmişte çok fazla çalışma yapılmış olup hala yapılmaya devam edilmektedir. Çünkü bu sistemler ile mekanik, yapay sinir ağları, haberleşme gibi farklı birçok alandaki sistemler arasında matematiksel olarak büyük benzerlikler mevcuttur. RLC devrelerinin matematiksel çözümü sonucunda lineer veya nonlineer diferansiyel denklemler oluşur. Bu nedenle, farklı türdeki dinamik sistemlerin yerine RLC devre sistemleri rahatlıkla inşa edilebilir. Ayrıca RLC devre sistemlerinin davranışlarını incelemek hem daha kolay, hem daha ucuz ve hem de daha az tehlikelidir.

Günlük yaşamda karşılaşılan ve kullanılan hemen hemen bütün sistemler (mekanik, elektrik, elektronik, haberleşme, yapay sinir ağları, vb.) veya kullandığımız cihazlar, bu devre elemanlarını içerisinde barındırırlar ve genellikle tasarlanma aşamasında matematiksel olarak da incelenirler. Ancak bu sistemlerin matematiksel çözümü sonucunda bir veya daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemler ortaya çıkmaktadır ve çoğunlukla bu denklemler nonlineer türdedir. Bu nedenle, verilen bir sistemin model denklemlerinin çözümüne veya sonucuna ulaşmak her zaman mümkün olmayabilir (Zergeroğlu ve ark., 2006). Fakat gelişen teknoloji sayesinde, bilgisayar programları ve gelişmiş hesaplama araçları oldukça zor matematiksel işlemleri bile basitleştirmiştir.

Nonlineer denklemlerin belirli bir tanımı olmamakla beraber lineer sistemlerin aksine matematiksel çözümlerinde de belirli bir yaklaşım veya evrensel bir metodoloji yoktur (Vidyasagar, 2002). Bunun yanı sıra, neredeyse doğadaki bütün sistemler veya olaylar nonlineer türdedir ve birçok sistem, matematiksel olarak analiz edilemeyecek kadar karmaşıktır veya gerçek çözüme sahip değildir. Ancak bir sistemin karakteristiği, davranışları veya işleyiş süreçleri matematiksel olarak ifade edildikten sonra çözümü, sistem hakkında öngörülebilir bulunmak ve yaklaşık sonuçlar bulmak açısından çok önemlidir. Bu yüzden karmaşık sistemleri anlamak ve kontrol etmek için, bu sistemlerin değişkenleri arasındaki ilişkileri analiz etmek ve bir matematiksel model

elde etmek gereklidir (Dorf ve Bishop, 2011). Çünkü model denklemleri incelemek ve tasarlamak, hem deneysel hem de teorik ölçümler yapmayı kolaylaştırır.

Matematiksel modelleme, mühendislik, fizik, istatistik, ekonomi, biyoloji, coğrafya, vb. birçok bilim alanında yoğun olarak kullanılır ve sistemlerin matematiksel olarak ifade edilip başka sistemlere benzetimi olarak düşünülebilir. Bu benzetim genellikle diferansiyel denklemler aracılığıyla yapılır. Bu nedenle, matematiksel modelleme ile bilgisayar destekli sayısal analizler, sistemleri incelemede büyük kolaylıklar ve tasarruflar sağlar. Özellikle matematikte bilgisayar kullanımının gelişmesiyle beraber, kompleks matematiksel işlemler çok daha kısa sürede ve daha kolay yapılabilmektedir. Ayrıca karmaşık sistemlerin çözümü yapılmadan bilgisayar programları aracılığıyla, sistemlerin davranışları kolaylıkla görselleştirilebilir ve yorumlanabilir.

Nonlinear sistemlerin matematiksel çözümünün bilinen yöntemlerle imkânsız olması durumunda bu sistemlerin davranışları (qualitative analysis) hakkında bilgi elde etmek mümkündür. Bu durumda kullanılacak en etkili metot, Lyapunov'un ikinci metodudur (Yoshizawa, 1966). Lyapunov'un ikinci metodu, dinamik sisteme ait diferansiyel denklemin çözümünü yapmaksızın sistemin kararlılığını inceleme olanağı verir ve kesin çözümlerine ulaşılamayan nonlinear sistemlerin kararlılık analizinde kullanılacak en uygun metottur. Ancak nonlinear sistemlerin kararlı olduklarını kanıtlamak imkansız değilse bile çok zor olabilir. Fakat bu sistemlerin pasif olduklarını kanıtlamak ve pasifliği sağlayan kontrolörleri tasarlamak çok daha kolaydır. Üstelik Lyapunov'un ikinci metodu ile sisteme ait enerji veya depolama fonksiyonu kullanılarak sistemlerin pasifliği analiz edilebilir (Moyle, 2014).

Literatürde kararlılık ve pasiflik konularıyla ilgili; Wyatt ve ark. (1981), Chua ve ark. (1986), Kennedy (1994), Jeltsema ve ark. (2003a; 2003b; 2003c), Zergeroğlu ve ark. (2006), Çifçi ve ark. (2011), Yang ve ark. (2012), Zhang ve Yu (2013), Kocamaz ve Uyaroğlu (2014) ve Ateş ve Laribi (2018) gibi eserler mevcuttur.

Lyapunov kararlılığı, pasiflik ve nonlinear sistemler ile ilgili uygulama alanı çok geniş olmakla beraber bu alanda yayımlanan birçok yayın da bulunmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

Wyatt ve ark. (1981), literatürde yer alan pasiflik tanımları arasındaki çelişkileri örneklerle incelemişlerdir. İncelenen bütün örnekler nonlinear RLC devrelerinden oluşmakla beraber, bu devrelerin durum denklemlerini de vermişlerdir. Ayrıca pasiflik tanımları için sistemin enerjisine dayanan fonksiyonlar kullanmışlardır.

Rao (1984), hem lineer hem de nonlinear sistemleri incelemiş olup, özellikle ikinci dereceden diferansiyel denklemler hakkında detaylı analizler yapmıştır. Lyapunov fonksiyonlarının tanımlarının yanı sıra, Lyapunov'un ikinci metodunu da kapsamlı olarak incelemiştir. Ayrıca Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılık analizleri ile ilgili çok sayıda örnek uygulama da yapmıştır.

Chua ve ark. (1987), temelden başlayarak hem lineer hem de nonlinear elektrik-elektronik devrelerini ve devre elemanlarını incelemişlerdir. Bunun yanı sıra, nonlinear elektrik devrelerinin durum denklemleri, karakteristikleri, enerjileri, kararlılıkları, farklı sistemlere modellenmeleri gibi çok geniş bir alanda teorik ve uygulamalı analizlere yer vermişlerdir. Ek olarak, kitaplarındaki her bölümde örnek uygulamalar ile teorik sonuçları değerlendirmişlerdir ve sistemlerin davranışlarını, çözüm eğrileri veya faz portreleri gibi şekillerle yorumlamışlardır.

Sastry (1999), hem nonlinear analiz ve kontrol alanlarında hem de nonlinear dinamik sistem teorisinde kapsamlı bir çalışma yapmıştır. Nonlinear sistemleri birçok örnek ve uygulama ile geniş bir matematik çerçevesinde incelemiştir. Gerek teorik gerekse uygulamalı olarak incelenen sistemler ile ilgili simülasyonlara ve görsellere yer vermiştir. Ayrıca lineer ve nonlinear sistemleri karşılaştırmalı olarak ele almasının yanı sıra, bu sistemlerin kararlılıkları hakkında detaylı bilgiler de vermiştir. Özellikle denge noktaları ve Lyapunov teoremlerini matematiksel olarak ifade edip, farklı türde birçok uygulama ile de zenginleştirmiştir.

Vidyasagar (2002), çeşitli durumlarda nonlinear kontrol sistemlerinin davranışlarının titiz bir matematiksel analizini sunar. Lineer kontrol teorisinde yaygın olarak kullanılan çok sayıda teknik ve yöntemin, nonlinear genellemelerini geliştirmiştir. Kitabında Lyapunov kararlılığı, input-output kararlılığı ve diferansiyel geometrik kontrol teorisinin işlenmesi konularında üç ana bölüm bulunmaktadır. Ayrıca nonlinear sistemlerin kararlılıklarıyla ilgili oldukça detaylı bilgiler bulunmaktadır.

Jeltsema ve ark. (2003a; 2003b; 2003c), RLC devrelerinin enerji fonksiyonları yardımıyla kararlılık ve pasiflik analizlerini yapmışlardır. Devrelerin enerji fonksiyonları ile pasiflik arasında güçlü bağlantılar kurmuşlardır.

Bayır (2003), kontrol sistemleri tasarlanırken dinamik sistemin modellenmesinde başlangıçta belirsiz olan parametreler olabileceğini vurgulamıştır. Giriş kanalında belirsizlik bulunan dinamik sistemlerin, sınırlı kontrol işareti ile kontrolü için gerekli metodu, Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak elde etmiştir.

Khalil (2002; 2015), kitaplarında nonlinear sistemleri matematiksel olarak detaylı bir şekilde incelemiştir. Sistemlerin denge noktaları, Lyapunov anlamında kararlılıkları ve pasiflikleri hakkında hem teorik hem de uygulamalı oldukça detaylı çalışmalar yapmış olmakla beraber, uygulamalı olarak incelenmiş her bir sistemin davranışlarıyla ilgili yorumlar da yapmıştır. Ayrıca Lyapunov fonksiyonları ile beraber bu fonksiyonların sistem enerjisi ile olan ilişkisini de tanımlamıştır ve pasifliğin kararlılık ile olan ilişkisini belirtmiştir.

Zergeroğlu ve ark. (2006), sistem model denkleminin çözümünü gerektirmeyen, buna karşın parametrik belirsizlikler de içerebilen kontrollerin tasarım yöntemlerini incelemiştir. İncelenen bütün denetleyicilerin Lyapunov tarzı analizler ışığında kararlılık durumları da detaylı olarak verilmiştir.

Bao ve Lee (2007), pasifliğin nonlinear kontrol teorisindeki önemini vurgulamışlardır. Pasifliğe dayalı sistem analizi ve kontrolü için kavramsal çerçeve ve pratik araçlar sunmaktadırlar. Ayrıca pasif sistemlerin sistem enerjisi ve kararlılık ile olan ilişkisini Lyapunov fonksiyonlarıyla incelemiştir.

Haddad ve Chellaboina (2008), bu kitapta kararlılığın dinamik sistem teorisindeki ve bu sistemlerin kontrolündeki önemini belirtmişlerdir. 14 bölümden oluşan bu çalışmada; Lyapunov tabanlı yöntemlere vurgu yaparak, nonlinear dinamik sistemlerin kararlılık analizi ve kontrol tasarımının kapsamlı bir incelemesini sunarlar ve geliştirirler. Ek olarak, hem teorik hem de geniş bir uygulama literatürü sunarak geometrik yorumlara da yer vermişlerdir.

Edwards ve Penny (2009; 2011), kitaplarında diferansiyel denklemlerin bilgisayar temelli matematiksel analizlerini yapmışlardır. Hem mekanik hem de elektrik sistemlerini matematiksel olarak analiz edip sistemlere ait simülasyonlara ve görsellere

yer vermişlerdir. Bu sistemlerin matematiksel olarak bir birilerine modellenebileceklerini göstermelerinin yanı sıra, denge noktaları ve kararlılıkları hakkında da geniş bilgiler sunmuşlardır. Ayrıca çeşitli örneklere ve uygulamalara yer vererek bilgisayar destekli simülasyonları yoğun kullanmışlardır. Sistemlere ait yön alanlarını, çözüm eğrilerini ve faz diyagramlarını kullanarak, sayısal analizler ile elde edilen sonuçlar ile sistemlerin bilgisayar destekli davranışlarını karşılaştırmalı olarak yorumlamışlardır.

Çifçi ve ark. (2011), Lyapunov'un ikinci metodunu basit bir elektrik güç sistemine uygulayarak sistemin enerji fonksiyonunu oluşturmuş ve böylece sistemdeki enerji seviye değişikliklerinin sistemin kararlılığına etkisini incelemiştir.

Yang ve ark. (2012), yapmış oldukları çalışmada nonlinear tanımlayıcı (descriptor) sistemler için Lyapunov kararlılığı ve güçlü pasiflik durumlarını tanımlanmaktadır. Sistemlerin global asimptotik kararlı olması için yeterli şartı açıklayan bir Lyapunov kararlılığı teoremi türetmişlerdir. Lyapunov kararlılık teoremi ile Lyapunov kararlılığı ve güçlü pasiflik arasında bağlantı kurmuşlardır. Ayrıca geri bildirim sistemlerinin güçlü pasifliğini tartışarak iki adet pasiflik teoremi vermişlerdir. Son olarak, elde edilen yöntemlerin avantajlarını ve etkinliğini göstermek için iki adet örnek kullanmışlardır.

Kocamaz ve Uyaroğlu (2014), aynı iki Vilnius kaotik osilatörünün senkronizasyonu için aktif ve pasif kontrol teknikleri uygulamışlardır. Vilnius osilatörünün diferansiyel denklemlerini devre modeline göre açıklamışlardır. Lyapunov fonksiyonuna dayanarak aktif ve pasif denetleyicileri, Vilnius kaotik sistemlerinin senkronizasyonunu gerçekleştirmek için kullanmışlardır. Ayrıca önerilen kontrol tekniklerinin etkinliğini doğrulamak ve karşılaştırmak için sayısal simülasyonlar da vermişlerdir.

Moylan (2014), torik arka planı oldukça güçlü olan bu çalışmada, pasifliğin elektrik devreleri ve devre elemanları bağlamında ortaya çıkışını vurgulayarak birçok sistemin modellemeler aracılığıyla pasiflik analizlerinin yapılabileceğini belirtmiştir. Pasifliğin sistem enerjisi ve gücü ile olan ilişkisini inceleyerek depolama ve model enerji fonksiyonlarını tanımlamıştır. Ayrıca pasifliğin tarihsel gelişimini ve kararlılık ile olan ilişkisini enerji fonksiyonları yardımıyla incelemiştir.

Ateş ve Laribi (2018), nonlinear RLC devrelerinin global asimptotik kararlılığını, devrenin toplam enerjisini temsil edecek Lyapunov fonksiyonları tanımlayarak Lyapunov'un ikinci metoduna göre incelemişlerdir. İncelemiş oldukları her bir sistemin kararlılığını sağlayacak teoremler tanımlamışlardır.

Bu tez çalışmasında literatürde yer alan; nonlinear oscillation (salınım), elektronik triode, Lienard ve Van der Pol denklemleri ile benzer bazı nonlinear elektrik devrelerinin ve mekanik sistemlerin kararlılıkları ve pasiflikleri incelenecektir. Uygulama olarak seçilecek her bir sistem için durum denklemlerinin çıkarımı yapılarak uygun enerji fonksiyonu (Lyapunov fonksiyonu) inşa edilecektir. Bu fonksiyonlar yardımıyla, her bir sistem için minimum sayıda ve özgün kriterler tanımlanarak kararlılıkları, Lyapunov'un ikinci metoduna göre incelenecektir. Daha sonra, sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan Lyapunov fonksiyonları kullanılarak tüm sistemler için tek bir pasiflik teoremi yazılacaktır. Ayrıca incelenecek her bir nonlinear sistem için, bilgisayar programları yardımıyla sistemlerin davranışları görselleştirilerek teorik sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Üstelik farklı sistemlerin matematiksel olarak elektrik devrelerine modellenebileceği de ispat edilecektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Lineer denklemlerin aksine nonlinear denklemlerin matematiksel çözümlerine ilişkin belirli bir yöntem bulunmadığından, bu denklemlerin çözüm davranışlarını yorumlayabilmek için çoğu zaman doğrusallaştırılmış modeller kullanılmaktadır veya doğrusallaştırma yapılmaktadır (Bayır, 2003). Bu doğrusallaştırma işlemi ise sistemin denge noktalarına (equilibrium point) göre yapılır. Denge noktaları çevresinde doğrusallaştırılmış nonlinear sistemler, bu noktada lineer sistem gibi davranır ve bu işlem, sistemin yerel kararlılığıyla ilgilidir (Şamlı, 2006; Çetintaş, 2016). Fakat bu şekilde çözümler yetersiz veya yanlış olabilmektedir. Buna karşın, nonlinear sistemlerin *qualitative* (nitel) analizleri bilim ve mühendislikte çok önemli bir seçenek olarak görülmektedir. Bu tez çalışması da, genelde nonlinear sistemlerin *qualitative* analizleri üzerine olacaktır.

2.1. Nonlinear Denklem Sistemleri

Vidyasagar (2002), nonlinear bir sistem için yaygın olarak kullanılan matematiksel modelin eş. 2.1'deki gibi olduğunu belirtir. Bu tür sistemlerde $u \neq 0$ ise girişi (input) olan veya *forced* (zorlanmış) sistem olarak adlandırılır. Aksi durumda ise ($u = 0$) *unforced* (zorlanmamış) sistem olarak adlandırılır.

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

Bu modelde (2.1) $t \in \mathcal{R}_+$ zamanı, $x \in \mathcal{R}^n$ sistemin durum değişkenini ve $u \in \mathcal{R}^m$ giriş veya kontrol fonksiyonunu belirtir. Ayrıca $f : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$ Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyondur. Eş. 2.1'deki ifade, diferansiyel denklem sistemlerin genel formu olduğundan lineer, nonlinear, autonomous (zamanla değişmez-time invariant), non-autonomous (time varying) ve homojen denklemler bu eşitlikten türetilir.

Tanım 2.1: Eş. 2.1'deki sistemde, f açıkça birinci değişkene (t) bağlı değilse autonomous sistem olarak adlandırılır ve eş. 2.2'deki gibi ifade edilir. Aksi durumda ise non-autonomous sistemdir.

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2)$$

2.1.1. Kararlılık (Stability)

Kararlılık teorisi, diferansiyel denklemlerin ve dinamik sistemlerin denge durumlarına yakın başlangıç durumları için sistem yörüngelerinin davranışlarını inceler. Ayrıca bozucu etkiler ve sistem bileşenlerindeki belirsizlikler her gerçek sistemde mevcut olduğundan, kararlılık teorisi, dinamik sistemlerin kontrolünde oldukça önemli bir yer tutar (Haddad ve Chellaboina, 2008). Çünkü başlangıç koşullarındaki küçük değişimlere karşı, sistem yörüngelerinin denge durumuna göre davranışları sistemin kararlılığı hakkında bilgi verir.

Bu teori, matematik ve mühendislik alanında oldukça merkezi bir rolü olan önemli konulardan biridir ve dinamik sistemlerin kararlılıklarının incelenmesinde farklı kararlılık türleri olmakla beraber, nonlinear sistemlerin kararlılık analizinde genellikle Lyapunov fonksiyonları ile karakterize edilen denge noktalarının kararlılığı incelenir (Khalil, 2002; 2015).

Kararlılık, en basit ifadeyle sistemin istenilen bir değere (denge konumu) ulaşması ya da belli bir durumu koruyabilmesi olarak adlandırılabilir. Lineer veya nonlinear sistemlerin kararlılık incelenmesinde genel olarak, asimptotik anlamda kararlılık ve sınırlı giriş-sınırlı çıkış kararlılık olmak üzere iki tip kararlılıktan söz edilir (Çetintaş, 2016).

Sisteme giren (input) sinyalin sınırlı (genliği) olması ya da sınırlarının belirlenebiliyor olması durumunda $t \rightarrow \infty$ için, sistemden çıkan sinyalin de sınırlı olması gerekir. Yani bir sistemin hem giriş hem de çıkış sinyalinin matematiksel olarak her hangi bir değerden küçük olduğu ifade edilebiliyorsa, bu sistemler için *sınırlı giriş-sınırlı çıkış kararlıdır* denebilir. Bu yüzden kararlı sistemlerin çözümleri her zaman sınırlıdır. Ancak bu giriş ve çıkış sınırlarının aynı değerde olacağı anlamına gelmez.

Önemli olan sistemin hem giriş hem de çıkış fonksiyonun üst sınır değerlerinin belirlenebiliyor olmasıdır. *Asimptotik anlamda kararlılık* ise dinamik sistemlere hiçbir giriş uygulanmadığı halde, denge durumuna yeterince yakın bir başlangıç koşulundan $t \rightarrow \infty$ için, çıkışın kararlı bir denge durumuna yakınsamasıdır.

Nonlinear sistemlerin kararlılık analizi, sistemin giriş enerjisinin sıfır olduğu durumda yapılır. Yani sistemi besleyen kaynak, giriş veya kuvvet kesilerek (sıfırlanarak) kararlılık analizi yapılır. Eş. 2.2’de verilen autonomous nonlinear sistemin kararlılığı, giriş değişkeni sıfır ($u = 0$) olduğundaki doğal tepkisi ile ilgilidir (Bao ve Lee, 2007) ve eş. 2.3’deki gibi ifade edilir.

$$x'(t) = f(x(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

Kararlı sistemlerin enerjileri zamanla azalma eğilimindedir. Bu da kararlı sistemleri kontrol edilebilme olanağı sağlamaktadır. Kararlı sistemlere bozucu bir etki yapılsa bile, sistem zamanla kendiliğinden denge durumuna döner. Çünkü bu sistemler belli bir durumu (denge) koruma eğilimindedirler. Ancak kararsız sistemlerin kontrol edilebilme ihtimali olmamakla beraber bu sistemler zararlıdır da. Fiziksel olarak, çözümü veya hareketi sınırsız olan kararsız sistemler kendilerine, etrafındaki araç gereçlere veya insanlara zarar verebilirler. Örneğin bir sinyalin gücü zamanla azalmasaydı bomba etkisi yaratırdı. Benzer şekilde yıldırım gibi doğal afetler de kararsız olduğundan düştükleri yerlere ciddi zararlar verirler.

2.1.2. Denge noktaları ve kararlılık

Bir sistemin zamanla değişmeyen hareketinin (çözümünün) ve diferansiyel denklemler için de sabit çözümün olduğu noktalar, *denge (sabit, kritik) noktalarıdır*. Sistemin denge noktası, aynı zamanda sistemin kararlı veya kararsız olduğu noktadır ve denge noktalarına göre kararlılık analizi genellikle Lyapunov teoremleri kullanılarak karakterize edilir. Sistemin kararlılığı da çözüm eğrilerinin bu denge noktalarından uzaklaşması veya denge noktalarına yakınlaşması durumunda neler olduğunu ifade eder. Kararlı bir sisteme yapılacak en ufak bir müdahale dengenin bozulmasına yol açar ve

yeni bir denge sağlanana kadar sistem kendi içinde düzenlemeler yapar. Eğer bir sistemin çözüm eğrileri zamanla denge noktasına yöneliyorsa kararlı (stable), ancak zamanla denge noktasından uzaklaşıyorsa kararsız (unstable) olarak tanımlanır (Khalil, 2002).

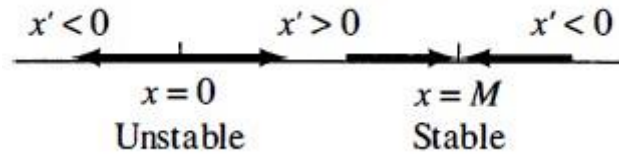
Tanım 2.2: Eş. 2.3'deki zorlanmamış sistemin denge noktası $x_e \in \mathfrak{R}^n$ ise $f(x_e) = 0$ olmalıdır. Yani $x'(t) = f(x(t)) = 0$ çözümün olduğu nokta/noktalar denge noktasıdır.

2.1.2.1. Denge noktalarının kararlılık incelemesi

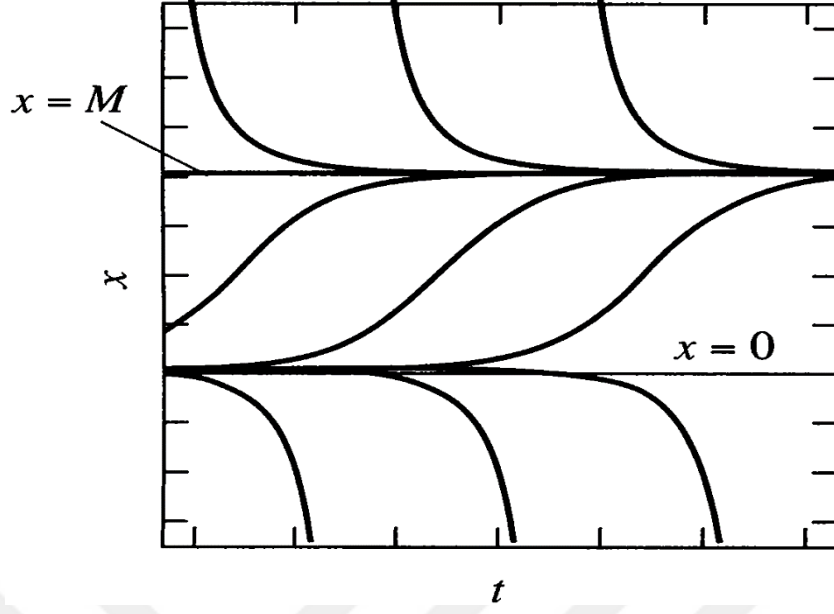
Lineer sistemlerden farklı olarak nonlineer sistemler, bazıları kararlı ve bazıları kararsız olan birden fazla denge noktasına sahip olabilirler (Bao ve Lee, 2007). Eş. 2.4'te verilen sistem dikkatle incelendiğinde ($k > 0$ ve $M > 0$, sabit sayılar), sistemin " M " ve " 0 " olmak üzere iki adet denge noktasının olduğu matematiksel işlemler ile bulunabilir (Edwards ve Penny, 2009; 2011). Ayrıca bu sisteme ait çözüm eğrilerinin zamana göre hareketi incelenerek denge noktalarının kararlılıkları ile ilgili değerlendirmeler yapılabilir (Şekil 2.1; 2.2):

Sistem yörüngeleri zamanla " M " noktasına yöneldiğinden " M " noktasının sistemin kararlı denge noktası olduğu söylenebilir. Ancak " 0 " noktasıysa çözüm eğrilerinin zamanla uzaklaştığı nokta olduğundan kararsız denge noktasıdır (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

$$x'(t) = kx(M - x) \quad (2.4)$$



Şekil 2.1. Eş. 2.4'e ait denge noktaları faz diyagramı (Edwards ve Penny, 2009; 2011).



Şekil 2.2. Eş. 2.4'e ait denge noktaları eğrileri (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

Denge noktalarına göre davranışı (Şekil 2.1; 2.2) verilen sistem (2.4) yorumlanarak her hangi bir sistemin için, denge noktalarına göre kararlılığın genel ifadesi tanımlanabilir:

Tanım 2.3: x_e noktası, eş. 2.3'teki sisteme ait denge noktası ve $x(t_0) = x_0$ noktası, denge noktasına yeterince yakın bir başlangıç noktası olsun. $\forall t \geq 0$ için, $x(t)$ çözümleri x_e noktasına yakın kalıyorsa x_e kararlı denge noktasıdır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ değeri için $\forall t \geq 0$ olmak şartıyla,

$$|x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \varepsilon \quad (2.5)$$

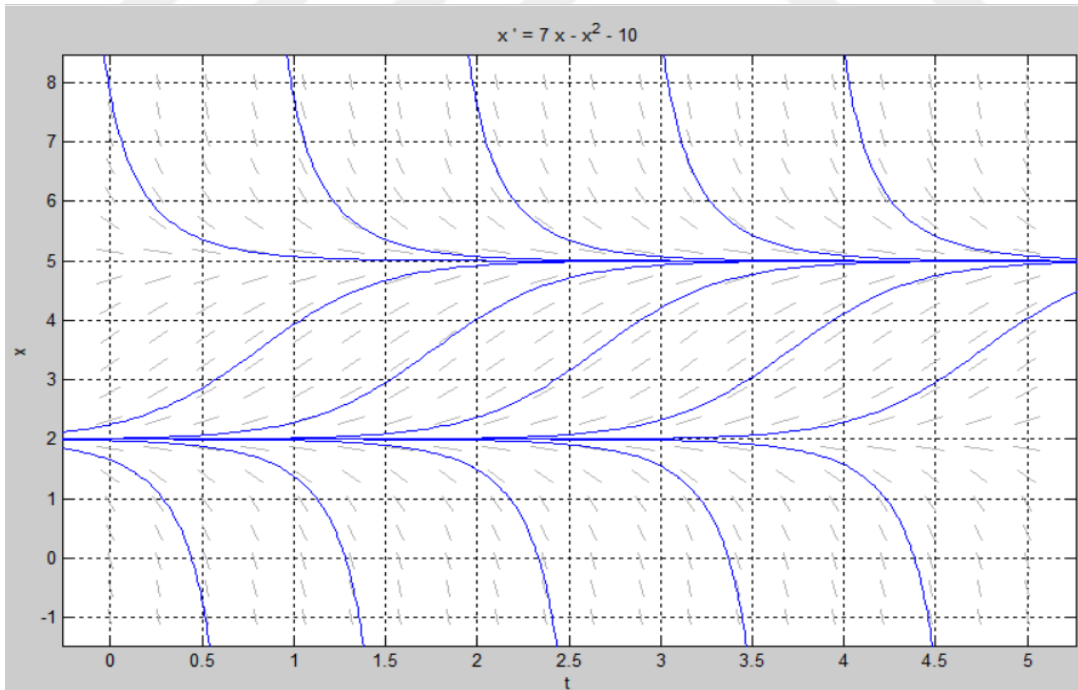
koşulunu (2.5) sağlayan bir $\delta > 0$ mevcut ise x_e kararlı denge noktasıdır (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

Örnek 2.1: Aşağıda matematiksel ifadesi verilen sistemin (2.6), bilgisayar programları yardımıyla denge noktalarına göre kararlılığı ve çözüm eğrileri incelenecektir.

$$x'(t) = 7x - x^2 - 10 \quad (2.6)$$

Öncelikle sisteme ait denge noktalarının bulunması gerekmektedir. Sistem ikinci dereceden olduğundan iki adet kökü, yani denge noktası mevcuttur. Matematiksel olarak sistem denkleminin çözümü yapılabileceği gibi John C. Polking tarafından yazılan, eğitim kurumlarınca kar amacı gütmeksizin, eğitim amaçlı ücretsiz olarak kullanılabilen ve kullanımı oldukça basit olan “dfield” Matlab programı da kullanılabilir (Polking, 2002). Bu program ile ADD’lerin çözümünü yapmadan denge noktalarına göre davranışları incelenebilir ve sistem denklemini, değer aralığı, varsa parametreleri ve zaman aralığı girilerek istenilen zaman aralığında fonksiyonun çözüm eğrilerinin davranışları elde edilir.

Matlab “dfield” programı kullanılarak elde edilen çözüm eğrileri (Şekil 2.3) dikkatle incelenirse, sisteme ait eğriler zamanla $x=5$ noktasına yaklaşırlarken $x=2$ noktasından ise uzaklaşmaktadırlar. Bu durumda $x=5$ noktasına kararlı, $x=2$ noktasına ise kararsız denge noktası denebilir.



Şekil 2.3. “dfield” yazılımı kullanılarak elde edilen çözüm eğrileri.

2.1.2.2. Kararlılık ve faz düzlemi

Önceki bölümde (2.1.2.1) denge noktalarının kararlılık incelemesi yapılırken bir boyutlu sistemler göz önüne alındı. Ancak doğal olayların birçoğu bu basitlikte olmamakla beraber genellikle iki boyutlu birinci mertebeden sistemlerdir.

Eş. 2.7’de verilen sistem, iki boyutlu bir autonomous sistemin genel ifadesidir. f ve g fonksiyonlarının xy düzleminin \mathfrak{R} bölgesinde sürekli ve diferansiyellenebildiği kabul edilirse bu düzlem, eş. 2.8’deki sistemin faz düzlemidir. Faz düzlemleri av-avcı modelleri, yay salınımları gibi fiziksel sistemlerin davranışını görselleştirmek açısından oldukça kullanışlıdır (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (2.7)$$

İncelenen sistemin (2.7) başlangıç zamanında (t_0) başlangıç değerleri (x_0, y_0) bu düzlemde yer almalıdır. Ayrıca bu sistem eş. 2.7’de yer alan iki farklı denklem sisteminden oluşmaktadır. Her iki eşitliği sıfır yapan $(x' = 0, y' = 0)$ ortak çözümler bu sistemin denge noktalarını (x_e, y_e) verir.

$$y'(t) = f(x(t), y(t)), \quad x'(t) = g(x(t), y(t)). \quad (2.8)$$

İki boyutlu sistemlere ait denge noktalarının kararlılık incelemesi tıpkı bir boyutlu sistemlerde olduğu gibidir. Yani eğer sisteme ait yörüngeler, zamanla denge noktasına yöneliyorsa bu denge noktaları için *kararlı*, ancak eğer zamanla denge noktasından uzaklaşıyorsa bu denge noktaları için *kararsız* denge noktaları denebilir.

Tanım 2.4: Edwards ve Penny (2009; 2011)’ye göre eş. 2.5’te verilen kararlılık koşulu iki boyutlu sistemler (2.8) için, $z(t) = (x(t), y(t))$, $z_0 = (x_0, y_0)$ başlangıç ve $z_e = (x_e, y_e)$ denge noktaları olmak üzere eş. 2.9’daki gibi genelleştirilebilir.

$$|z_0 - z_e| < \delta \text{ olduğunda } |z(t) - z_e| < \varepsilon \text{ olur.} \quad (2.9)$$

2.1.2.2.1. Faz portreleri (phase portraits)

Faz portreleri, başlangıç değerleri denge noktaları olmamak koşuluyla, bir dinamik sistemin aynı faz düzleminde farklı başlangıç koşullarına karşılık gelen çoklu faz eğrilerinin bir resmidir. *Yön alanı okları* ise $(x(t), y(t))$ noktalarına karşılık gelen yörüngelerin xy düzleminde oluşturduğu eğrilerin hareket yönünü temsil eder. Faz portrelerinde eksenler durum değişkenleri ile temsil edilirken, $(x(t), y(t))$ noktalarına ait eğriler zamana göre davranışlar sergiler (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

Örnek 2.2: $x'' + f(x, x') = 0$ formatında verilen ve $x'' + 4x + x^3 = 0$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemi ile ifade edilen nonlinear kütle-yay sisteminin denge noktalarının kararlılığı, çözüm eğrisi ve faz portresi incelenecektir.

Zorlanmamış (dış kuvvet yok) sistemlerde nonlinear bir yaya (k yay sabiti) bağlı m kütleli bir cismin her hangi bir t anındaki konumu $x(t)$ olmak üzere, nonlinear yayın basit matematiksel modeli $F(x) = -kx + \beta x^3$ ve kütlelin hareket denklemi ise $mx'' = -kx + \beta x^3$ şeklinde ifade edilir (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

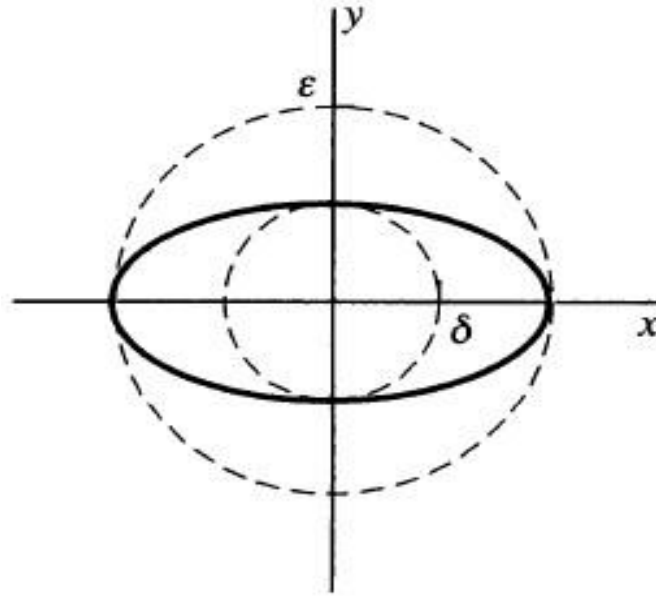
Bu diferansiyel denklem $x'(t) = y(t)$ ve $y' = -f(x, y)$ dönüşümü ile eş. 2.10'da yer alan eşdeğer nonlinear sistem olarak ifade edilebilir.

$$x'(t) = y, y'(t) = -(x^3 + 4x). \quad (2.10)$$

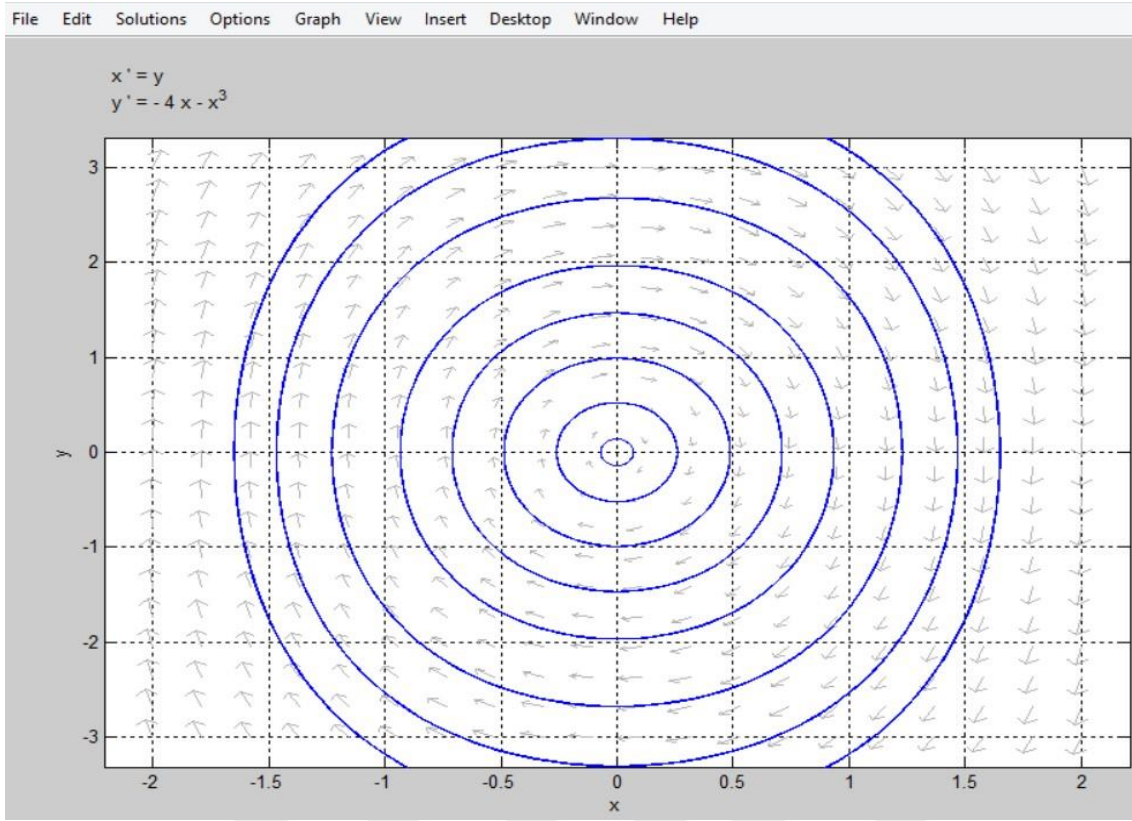
Sistemimin matematiksel olarak çözümü yapılabileceği gibi, John C. Polking tarafından yazılan ve eğitim kurumlarınca kar amacı gütmeksizin eğitim amaçlı ücretsiz olarak kullanılabilen “pplane” Matlab programı da kullanılabilir (Polking, 2002). Bu program da “dfield8” programına benzer olarak, ADD'lerin çözümünü yapmadan sistem yörüngelerinin denge noktalarına göre davranışlarını faz düzleminde inceleme

olanağı verir ve ek olarak, bu yörüngelerin denge noktalarına göre yönelimlerini yön oklarıyla gösterir. Ayrıca bu program ile çizilen her hangi bir faz düzlem grafiğinin menüleri kullanılarak sisteme ait denge noktaları da listelenip sınıflandırılabilir. Bu program, hem kullanışlılığı hem de çıktıları bakımından sistem davranışları hakkında oldukça faydalı sonuçlar elde edilmesini sağlar.

Matlab “pplane” programı kullanılarak elde edilen faz düzlem portresi (Şekil 2.5) incelendiğinde sisteme ait eğrilerin; faz düzlemi üzerinde merkezi orijin $(0,0)$ olan saat yönündeki eğriler olduğu, hem rastgele çizilen eğri grafiklerinden hem de yön oklarından da anlaşılabilir. Edwards ve Penny (2009; 2011)’nin belirttiğine göre sistemin başlangıç noktaları (x_0, y_0) yarıçapı δ olan bir çember içerisinde ve çözüm eğrileri $(x(t), y(t))$ ise yarıçapı ε olan bir alan içerisinde (Şekil 2.4). Bu durumda, sistemin çözüm eğrileri sınırlandırıldığından dolayı orijini için karalı denge noktası denebilir. Ancak sisteme ait eğriler, zamanla denge noktası olan orijine yaklaşmak yerine orijinin etrafını saran kapalı yörüngeler şeklindedirler (Şekil 2.5). Bu tür periyodik çözümlerin kapalı yörüngeleri tarafından çevrelenen denge noktaları, kararlılık şartlarını yerine getirdiğinden kararlı denge noktalarıdır (Edwards ve Penny, 2009; 2011).



Şekil 2.4. Çözüm eğrilerinin sınırları (Edwards ve Penny, 2009; 2011).



Şekil 2.5. “pplane” yazılımı kullanılarak elde edilen faz düzlem portresi.

2.1.2.3. Asimptotik kararlılık (AS)

Tanım 2.5: Eş. 2.3’teki sisteme ait denge noktası kararlı ve bu denge noktasına yakın bir x_0 başlangıç değerinden başlayan tüm yörüngelerin $t \rightarrow \infty$ giderken bu denge noktasına varması durumunda, x_e noktasının asimptotik kararlı denge noktası olduğu söylenebilir (Edwards ve Penny, 2009; 2011). Yani asimptotik olarak kararlı bir sistemde, tüm yörüngeler zamanla denge noktasına doğru hareket ederler. Bu durumda

$$|x_0 - x_e| < \delta \text{ olduğunda } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e \quad (2.11)$$

koşulunu (2.11) sağlayacak bir $\delta > 0$ mevcut olmalıdır.

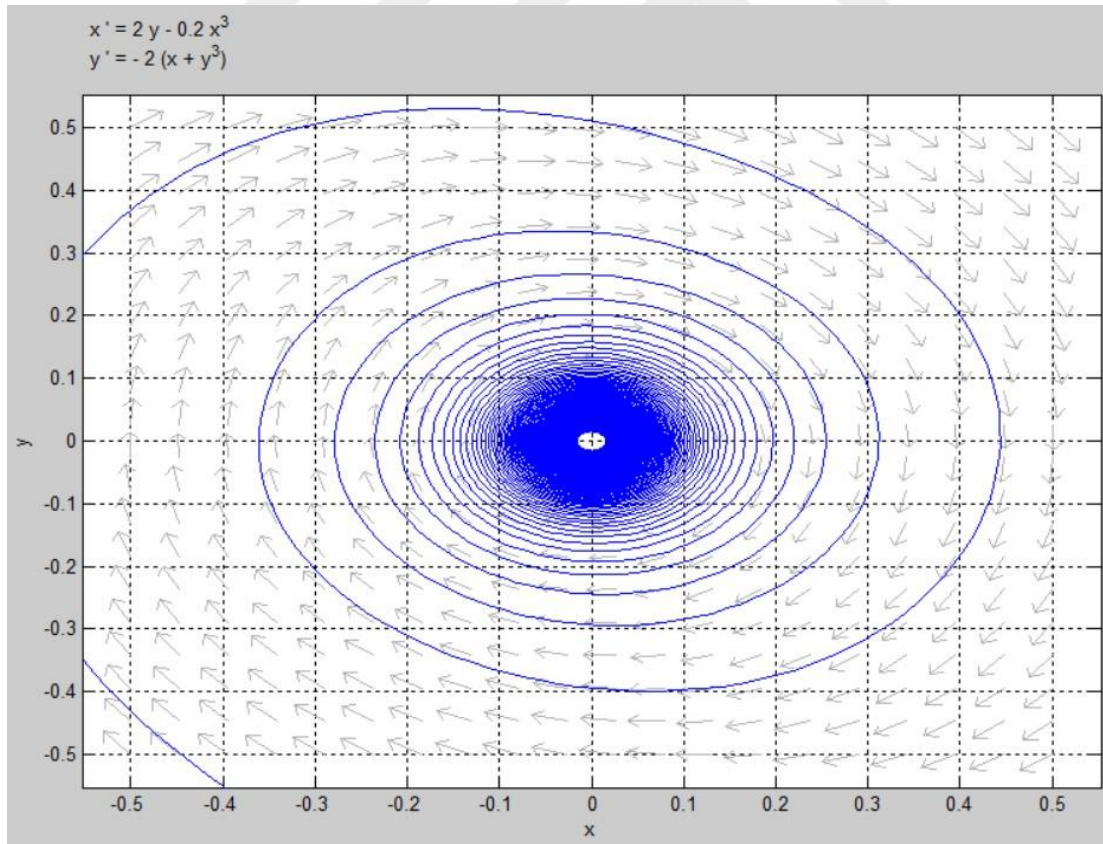
Somutlaştırmak gerekirse, örnek 2.2’de kararlılığı incelenen sisteme ait yörüngelerin denge noktasına varmadığı fark edilecektir. Yörüngeler sadece denge

noktasının etrafında hareket ederler ve ne kadar küçülseler de asla denge noktasına varmazlar (Şekil 2.5). Bu nedenle sistemin orijini her ne kadar kararlı olsa da AS değildir. Bundan dolayı da AS olma koşulu, kararlı olma koşulundan daha güçlü ve kapsamlı bir durumdur (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

Örnek 2.3: Matematiksel ifadesi verilen sistemin (2.12) denge noktalarının asimptotik kararlılığı ve sistem davranışları bilgisayara programları aracılığıyla incelenecektir.

$$x'(t) = 2y - 0.2x^3, \quad y'(t) = -2(x + y^3). \quad (2.12)$$

Sistemin kararlılığının incelenebilmesi için öncelikle denge noktalarının bulunması gerekmektedir. Nonlineer sistem iki boyutlu olduğundan dolayı denge noktaları da (x, y) ikilisi şeklinde olacaktır.



Şekil 2.6. Eş. 2.12'ye ait faz düzlem portresi.

Matematiksel işlemler yapılarak veya Matlab “ppplane” programı kullanılarak sisteme ait denge noktasının orijin $(0,0)$ olduğunu kolaylıkla bulunabilir. Ayrıca sistemin çözüm eğrileri, faz düzlemi üzerinde $t \rightarrow \infty$ iken zamanla orijine vardığından $(0,0)$ noktasının AS denge noktası olduğu söylenebilir (Şekil 2.6).

2.1.2.4. Kararlılık şartları

Eş. 2.3’te verilen sistemin denge noktası x_e ve f bu denge noktasında türevli bir fonksiyon olmak üzere, sisteme ait denge noktasının kararlı, kararsız veya AS olarak adlandırılabilmesi için aşağıda belirtilen şartları yerine getirmesi gerekir:

- Sistemin çözüm eğrileri, zamanla denge noktasına varmamak koşuluyla yaklaşıyorsa veya yakın kalıyorsa *kararlıdır* ($f'(x_e) < 0$).
- Sistemin çözüm eğrileri, zamanla denge noktasından uzaklaşıyorsa *kararsızdır* ($f'(x_e) > 0$).
- Sistemin çözüm eğrileri, eğer zaman sonsuza giderken denge noktasına geri dönüyorsa AS’dır.

2.1.3. Nonlineer sistemlerin modellenmesi

Günlük yaşantıda kullanılan ve yaşamı oldukça kolaylaştıran araç gereçlerin, cihazların veya sanayi sektöründe kullanılan makinelerinin tümü piyasaya sürülmeden önce tasarlanıp bir dizi testlerden geçirilirler. Ancak bu fiziksel sistemlerin tasarlanması oldukça maliyetli olduğundan ve zaman gerektirdiğinden üretilmeden önce sistem davranışlarını inceleyebilmek, performanslarını ölçmek ve düzgün çalışıp çalışmadıklarını anlayabilmek için, öncelikle bu sistemlerin karakteristiğini temsil eden matematiksel denklemler oluşturulur.

Fiziksel sistemler genellikle nonlineer ve karmaşık yapılardan oluşurlar ve farklı bileşenlerin veya parçaların bir birleşimidirler. Sistemi oluşturan parçalar açıkça veya belirsiz bir şekilde tanımlanabilir (Haddad ve Chellaboina, 2008). Mekanik, elektrik,

ısı, vb. birçok yapı aynı fiziksel sistem içerisinde bulunabilirler. Bu nedenle de bu sistemlere ait matematiksel denklemlerin analitik çözümleri çok zordur. Bu tür karmaşık yapıları sistemlerde, her bir sistemin enerjisi düşünülerek modelleme yapılır. Enerjinin dönüşümü ilkesi göz önüne alınarak karmaşık yapı tek bir sistem türüne indirgenerek çözüme ulaşılmaya çalışılır. Bunun için en uygun sistem türü ise elektrik sistemleridir. Daha önce de belirtildiği üzere, elektrik sistemleri ile diğer sistemlerin matematiksel denklemleri arasında büyük benzerlikler mevcuttur. Üstelik nonlinear sistemler için uygun bir matematiksel model kurulduktan sonra, sistemlerin kararlılıkları ve davranışları matematiksel çözümler yerine bilgisayar programları aracılığıyla çok daha kolay incelenebilir.

Matematiksel modelleme, mühendislikte oldukça yaygın kullanılmakla beraber aynı zamanda farklı sistemlerin matematiksel olarak bir birleri ile ilişkilendirilebileceğini söyler.

Tanım 2.6: Tongren (2007)'e göre ikinci dereceden nonlinear diferansiyel denklem,

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = p(t) \quad (2.13)$$

eşitliği (2.13) ile ifade edilir. x' ve x'' , x 'in zamana bağlı birinci ve ikinci türevleridir.

İkinci dereceden nonlinear sistemlere ait model (2.13) denklemde $f(x, x')$ terimi, sistemde sönüme (damping) neden olan fonksiyondur ve RLC devrelerindeki direnç olarak düşünülebilir.

Daha önce doğal olayların matematiksel ifadesinin ikinci dereceden nonlinear diferansiyel denklemler ile ifade edildi belirtilerek bir örnek üzerinden de incelenmişti (Örnek 2.2). Eş. 2.14'te verilen kütle-yay sistemi ile eş. 2.15 ve 2.16'da verilen seri bağlı RLC devresinin matematiksel denklemleri arasındaki benzerlik rahatlıkla fark edilebilir. Bu durum mekanik sistemlerin elektrik devrelerine matematiksel olarak modellenebileceğinin göstergesidir (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

$$mx'' + \mu x' + kx = F(t) \quad (2.14)$$

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (2.15)$$

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \quad (2.16)$$

Josephson junction devresi ile nonlinear sarkaç (Chua ve ark., 1987) ve Rayleigh ile Van der Pol denklemleri (Edwards ve Penny, 2009; 2011) gibi uygulamalar bu benzerliğe örneklerdir. Mekanik sistemlerde yer alan değişkenleri karakteristik olarak elektrik sistemlerinde karşılayan parametreler kullanarak modelleme yapmak, matematiksel modellemeyi çok daha basite indirgeyecektir (Çizelge 1).

Çizelge 1. Mekanik-elektrik sistemlerin modellemesi (Chua ve ark., 1987; Edwards ve Penny, 2009, değiştirilerek alınmıştır)

<i>Mekanik</i>	<i>Elektrik</i> (<i>Kuvvet-Gerilim</i>)	<i>Elektrik</i> (<i>Kuvvet-Akım</i>)
Kütle (m)	Endüktans (L)	Kapasitans (C)
Sürtünme katsayısı (μ)	Direnç (R)	Direnç (R)
Yay sabiti (k)	Kapasitans ($1/C$)	Endüktans ($1/L$)
Hız (V)	Akım (I)	Gerilim (E)
Kuvvet (F)	Gerilim (E)	Akım (I)
Yer değiştirme (x)	Yük (Q)	$\int E dt$

2.2. Lyapunov Fonksiyonu ve Kararlılık

Dinamik sistemlerin kararlılığının incelenmesi çok zengin bir geçmişe sahiptir ve mühendislik alanında da oldukça popüler bir konudur. Tarih boyunca pek çok uzman (matematikçi, fizikçi, mühendis, vb.) özellikle kararlılık kavramı üzerine çalıştı. Resmi olarak, “*en az enerji*” ilkesinden ilk kez Torricelli (1608-1647) söz etmiştir. Ona göre eğer bir cismin toplam enerjisinin minimum olduğu bir noktası var ise bu nokta, cismin kararlı denge noktasıdır. Daha sonra bilim adamları bu ilkeyi daha da geliştirerek sistemin konservatif (enerji kaybı yok) olması halinde, sıfır kinetik enerji ve minimum

potansiyel enerjiye karşılık gelen durumun kararlı bir denge noktası olduğunu söylemişlerdir. Buna karşılık, bazı bilim adamları bu ilkeyi dağınık sistemler için de inceleyerek aynı zamanda sistemlerin dağınık olduğu durumlarda da toplam enerjinin sistemin yörüngeleri boyunca azaldığını göstermişlerdir (Sastry, 1999). Bununla beraber, konservatif veya dağınık sistemlerin kararlılık karakterizasyonu üzerine, geneli ihmal etmeksizin ilk olarak Rus matematikçi/mühendis Lyapunov çalışmalar yapmıştır (Lyapunov, 1992). Sistemlerin kararlılığını araştırmak için kendisine ait olan Lyapunov'un ikinci metodunu kullanmıştır. Lyapunov fonksiyonlarına dayanan bu metod, bilinen tüm sistemlere uygulanabileceği gibi zamana bağlı nonlinear sistemlerin kararlılık hallerinin incelenmesinde de kullanılabilir en genel metottur (Çifçi ve ark., 2011).

Günümüzde bu metod, dinamik sistemin kararlılık teorisinde, kontrol sistemlerinde, zaman gecikmeli sistemlerde, güç sistemi analizinde ve benzeri çalışmalarda mükemmel bir araç olarak kabul edilmektedir (Zhang ve Yu, 2013; Rao, 1981). Özellikle LaSalle ve Lefschetz'in çalışmalarından sonra büyük ilgi gören Lyapunov'un metotları, nonlinear kontrol teorisinde neredeyse vazgeçilmez bir araç olmuştur. Uzmanlar, Lyapunov fonksiyonlarının gerçek hayat uygulamalarının daha anlaşılır kılınması ve metotları daha da güçlendirmek adına, Lyapunov fonksiyonlarının enerji fonksiyonları veya depolama fonksiyonları gibi temel işlevlerini kullanmışlardır (Rouche ve ark., 1977; Haddad ve Chellaboina, 2008). Lyapunov fonksiyonları, elektrik veya mekanik sistemlerde enerjinin ve ekonomi ve finans alanlarında ise maliyetin en aza indirgeme ifadesi olarak da düşünülebilir (Yerramalla ve ark., 2003). Ayrıca Lyapunov fonksiyonlarının kararlı sistemlerin performans analizi ve AS sistemlerin sürekli duruma erişme oranlarının tahmin edilmesi gibi kullanım alanları olmakla beraber bu fonksiyonlar, sadece kararlılık analizleri için kullanılmaz (Bayır, 2003).

2.2.1. Gradyan ve skaler potansiyel

Gradyan, skaler bir alanın artış gösterdiği yönü ve hızı bir vektör olarak veren işlemdir ve skaler bir fonksiyonun belirli bir bölgesine uygulandığında, fonksiyonun o bölgedeki hem büyüklüğünü hem de artış gösterdiği yönü verir. Çok boyutlu

fonksiyonların gradyanı, tüm kısmi türevlerin tek bir vektör alanında toplanmasıdır. Gradyan nabla (∇) operatörü ile gösterilir ve bir f fonksiyonun gradyanı “ ∇f ” veya “ $\text{grad } f$ ” şeklinde ifade edilir (MathWorld, 2018; Khanacademy, 2016).

(x, y, z) Kartezyen koordinatlar olmak üzere, $f(x, y, z)$ fonksiyonun gradyanı eş. 2.17’deki gibidir.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z \right) \quad (2.17)$$

Eğer f fonksiyonunun yaptığı iş yoldan bağımsız ise, yani bir noktadan başka bir noktaya hareket eden bir cisim üzerinde yaptığı iş hangi güzergahtan (yoldan) olursa olsun aynı ise “ f kuvveti” *konservatiftir* denir. Ancak hareket boyunca sürtünmeden veya başka bir etkenden kaynaklanan bir enerji kaybı var ise kuvvet konservatif olamaz, çünkü yapılan iş yola bağlıdır (Arfken ve Weber, 2005). Ayrıca konservatif fonksiyonlar aynı zamanda başka bir fonksiyonun skaleri olarak ifade edilebilmelidir.

Skaler potansiyel ise bir cismin iki farklı noktadaki potansiyel enerjilerinin yola değil konuma bağlı olduğu anlamına gelir. Eş. 2.3’te verilen sistemdeki f fonksiyonu, bir V skaler fonksiyonun gradyanı olarak eş. 2.18’deki tanımlanır. Bu eşitlikte (2.18), V skaler fonksiyonu sistemin potansiyel enerjisidir. Eş. 2.18’deki negatiflikse enerjinin minimum değerine olan yönelimi, yani enerjinin azaldığını ifade eder. Örneğin hareketi denge noktasına doğru olan cismin enerjisi bu denge noktasında minimumdur (Şekil 2.9). Bu nedenle enerji değişimi negatiftir.

$$x' = -\text{grad } f = -\nabla V \quad (2.18)$$

Arfken ve Weber (2005)’e göre skaler bir fonksiyonun negatif gradyanı (2.18) olarak tanımlanan f kuvveti, konservatiftir ve kapalı sistemlerin (başlangıç ve bitiş noktaları aynı) yaptığı iş sıfır olduğundan skaler potansiyelinin de sıfır olduğunu ifade eden eş. 2.19 ve 2.20 şartlarını yerine getirmelidir.

$$\nabla_x f = 0 \quad (2.19)$$

$$\oint f \cdot dr = 0 \quad (2.20)$$

Lyapunov fonksiyonları, bir sistemin enerjisindeki değişim fikrine dayandığından bu fonksiyonların yörüngeleri boyunca enerjideki değişim ve yön, gradyan kullanılarak gösterilebilir.

2.2.2. Lipschitz koşulu

Lipschitz koşulu, özellikle sistemlerinin kararlılık incelemesinde yoğun olarak kullanılan ve diferansiyel denklemlere çözüm olanağı sağlayan bir eşitsizliktir.

Tanım 2.7: $\frac{dy}{dx} = f(x, y): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ fonksiyonu, $f(x, y) = 0$ noktasını içine alan D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. Bu bölgede apsisi x ve ordinatları y_1 ve y_2 olacak şekilde seçilen her nokta çifti $((x, y_1), (x, y_2) \in D)$ için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < M |y_1 - y_2| \quad (2.21)$$

eşitsizliğini (2.21) sağlayan pozitif bir M sayısı varsa $f(x, y)$ fonksiyonu, D bölgesinde yerel olarak *Lipschitz Koşulu*'nu sağlamış olur (Aksoy ve Özkan, 2017). Ayrıca M sabit sayısına da *Lipschitz Sabiti* denir. Eğer $D = \mathfrak{R}^n$ ise f global olarak Lipschitz'tir.

Sastry (1999)'ye göre $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ise aynı zamanda *Lipschitz sürekliliği*'ni de sağlar. Diğer yandan eğer fonksiyon kısmi türevleri sınırlandırılmış ise *Lipschitz*'dir.

2.2.3. Gronwall-Bellman eşitsizliği

Yıllar boyunca bilim insanları Gronwall-Bellman eşitsizliğinin lineer ve nonlinear genellemelerini yapmışlardır. Bu eşitsizlik, integral ve diferansiyel denklemlerin kararlılığı, asimptotik davranışları ve sınırlılığı gibi özelliklerinin incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır (Pachpatte, 1973). Mühendislikte nonlinear sistemler, Lyapunov kararlılığı ve ADD'lerin varlık ve teklik teoremleri gibi konuların matematiksel arka planında Gronwall-Bellman eşitsizlikleri yoğun olarak kullanılmaktadır. Ancak her ne kadar Gronwall-Bellman eşitsizliklerinin farklı türleri olsa da bu tez çalışmasında, özellikle pasiflik analizlerinde, yaygın olarak bilinen integral eşitsizlikleri formunu kullanılacaktır.

Teorem 2.1 (Gronwall): $I = [0, \infty)$, u_0 negatif olmayan ($u_0 \geq 0$) bir sabit ve $t \in I$ olmak üzere,

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t f(s)u(s)ds \quad (2.22)$$

eşitsizliğinde (2.22) yer alan $u(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları, I üzerinde negatif olmayan sürekli birer fonksiyon olsun. Eşitsizlik (2.22), Gronwall eşitsizliği yardımıyla eş. 2.23'teki gibi ifade edilir.

$$u(t) \leq u_0 \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \quad (2.23)$$

2.2.4. Lyapunov kararlılığı

Lineer sistemlerin kararlılık durumlarının incelenmesi hem çok kolaydır ve hem de çoğu zaman Lyapunov'un teoremlerinin uygulanmasına ihtiyaç yoktur. Ancak Lyapunov kararlılık teorisi, nonlinear sistemlerin kararlılık analizi için uygun Lyapunov

fonksiyonlarının inşasında oldukça faydalıdır (Sastry, 1999). Üstelik Lyapunov teoremleri, nonlinear sistemlerin denge noktasının olmadığı durumlarda bile sisteme ait durum denklemlerinin çözümlerinin sınırlılığını inceleme olanağı sağlar (Khalil, 2002). Lyapunov kararlılık metotları, dinamik sistemlerin kararlılıklarını diferansiyel denklemlerinin çözümlerini açıkça hesaplamadan analiz etmeye yönelik sezgisel bir yaklaşımdır (Vidyasagar, 2002). Bu yöntemler, modern nonlinear kontrol teorisinin çoğunun temelini oluşturur ve ayrıca yerel linear kontrol tekniklerini kullanmak için teorik bir gerekçe sunar.

Lyapunov kararlılık teorileri denge noktalarının orijin ($x_e = 0$) olduğu sistemler ile ilgilenir ve başlangıç noktalarına göre kararlılığı tanımlar (Marquez, 2003; Yang ve ark., 2012). Ancak dinamik sistemlerin birden fazla denge noktası olabilir. İncelenmekte olan sistemin denge noktası orijin değilse genelliği kaybetmeden denge noktası orijin olacak şekilde, \mathfrak{R}^n üzerindeki koordinatlar yeniden tanımlanabilir veya değişkenler değiştirebilir (Marquez, 2003; Vidyasagar, 2002).

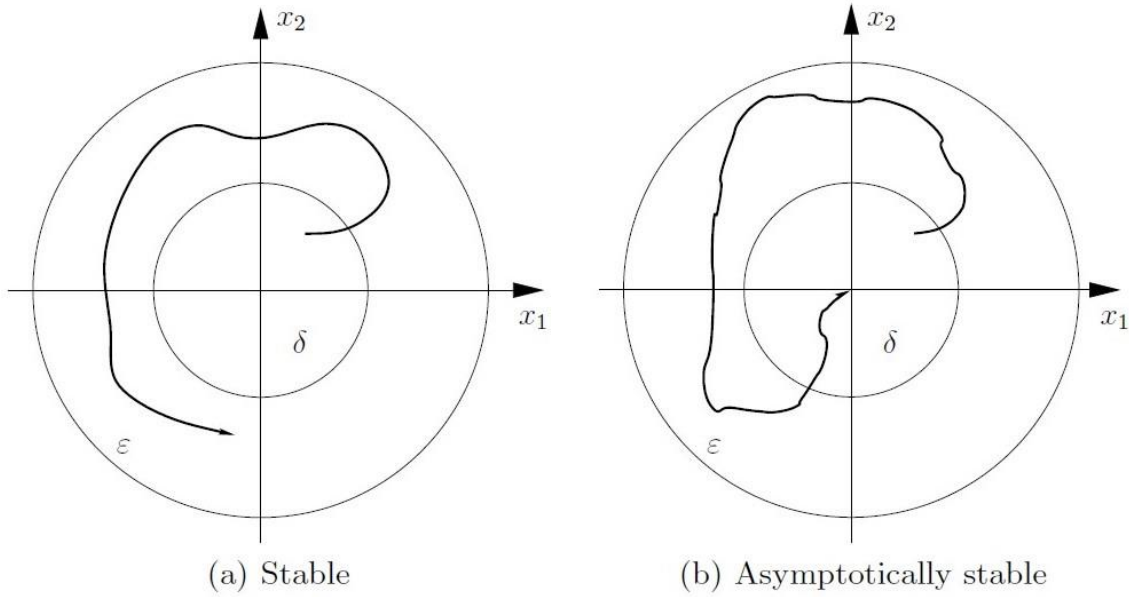
Tanım 2.8: $x_e \in D$ ve $f(x_e) = 0$ olmak üzere eş. 2.3'teki zorlanmamış ($u = 0$) sistem verilsin. $f : D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon ve $t \in [0, \infty)$. $\forall x \neq 0$ değeri için $f(x) \neq 0$ ve $f(0) = 0$ olsun.

Sistem eğer eşitsizlik 2.24'teki koşulu yerine getiriyorsa orijini *kararlıdır*. Orijini kararlı sistemlere ait yörüngelerin başlangıç noktaları, orijin çevresinde yarıçapı $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ olan bir bölge içerisindedir ve bu yörüngeler orijine yakınsamayıp yarıçapı ε olan bir bölge içerisinde sınırlanırlar (Şekil 2.7a). Ancak sistemin denge noktası kararlı ve δ , eşitsizlik 2.25'deki gibi seçilirse denge noktası yerel olarak AS/LAS olacaktır. AS sistemlerde, $t \rightarrow \infty$ iken sistemin tüm yörüngeleri zamanla orijine varır (Şekil 2.7b). Dahası, $\forall x_0 \in \mathfrak{R}^n$ noktaları için sistemin denge noktası kararlı ve eş. 2.26'daki koşulu yerine getiriyorsa orijini GAS'dir. Sistem eğer kararlı değilse o zaman *kararsızdır* (Haddad ve Chellaboina, 2008; Yang ve ark., 2012).

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (2.24)$$

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.25)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.26)$$



Şekil 2.7. Lyapunov kararlılığı a. kararlı, b. asimptotik kararlı (Bao ve Lee, 2007).

2.2.5. Lyapunov fonksiyonu

Lyapunov teoremlerinin temeli Torricelli ilkesine dayanır. Bu nedenle Lyapunov fonksiyonları için, denge noktaları civarında tanımlanan sistem enerjisinin genelleştirilmiş işlevidir denebilir. Ayrıca bu fonksiyonlar, dinamik sistemin enerjisinin sistemin yörüngeleri boyunca zamanla azalarak minimum değeri olan sifıra ulaştığı fikrini de verirler (Sastry, 1999). Çünkü bir sistemin enerjisi her zaman pozitif ve minimum değeri de sıfır olmalıdır. Ki bu da, Lyapunov enerji fonksiyonlarının zamanla azalarak denge noktası olan orijine yaklaştığı ve Lyapunov fonksiyonlarında denge noktasının her zaman orijin olduğu fikrini destekler. Lyapunov'un ikinci metodu ise bu enerji değişimine göre sistemin kararlılığını inceleme olanağı verir. Yani Lyapunov fonksiyonları, dinamik sistemin kararlılık durumunu inceleme olanağı veren skaler

fonksiyonlardır (Vidyasagar, 2002). Nonlinear RLC devrelerinin kararlılık incelemesinde ise devrelerin durum denklemlerinin matematiksel çözümünü yapmak yerine uygun Lyapunov veya enerji fonksiyonları ile denge noktalarının kararlılık durumları hakkında tahminler yapılabilir (Ateş ve Laribi, 2018).

2.2.5.1. Lyapunov fonksiyonlarının tanımlanması

Tanım 2.9: $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ Lyapunov fonksiyonu, orijini kapsayan $D \subset \mathfrak{R}^n$ açık kümesinde sürekli, pozitif tanımlı ve bu bölgenin her noktasında birinci dereceden kısmi türevleri olabilen skaler bir fonksiyon olsun. Eş. 2.3'teki sistemin denge noktasının orijin ($x_e = 0$) olduğu ve Lipschitz koşulunu sağladığı varsayalım. $f : D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $x_e \in D$ bölgesinde sürekli ve türevlenebilir ise V' , $f(x)$ 'in yörüngeleri boyunca eş. 2.27'deki gibi tanımlanabilir.

$$V'(x(t)) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla V \cdot f(x) \quad (2.27)$$

Dikkat edilirse sistemin yörüngeleri boyunca V' , sistemin denklemine bağlı olarak değişebilir. Bundan dolayı, farklı sistemler için $V'(x)$ de farklı olacaktır (Khalil, 2002; Vidyasagar, 2002). Ayrıca Lyapunov fonksiyonları sistemler için tanımlanan yerel fonksiyonlardır. Yani orijin etrafında tanımlanan yerel enerji fonksiyonlarıdır. Ancak $D = \mathfrak{R}^n$ ise Lyapunov fonksiyonu *global* olarak adlandırılır.

Pozitif tanımlı fonksiyon (PDF): $V(x)$ fonksiyonu, $V(0) = 0$ ve $x \neq 0$ iken $V(x) > 0$ koşullarını sağlıyorsa PDF olarak adlandırılır. Bunun anlamı fonksiyonun sadece " $x = 0$ " noktasında sıfır olacağı ve bunun dışındaki diğer tüm noktalarda pozitif değerde olacağıdır.

Pozitif yarı-tanımlı fonksiyon: $V(x)$ fonksiyonu, $V(0) = 0$ ve $x \neq 0$ iken $V(x) \geq 0$ koşullarını sağlıyorsa pozitif yarı-tanımlı fonksiyon olarak adlandırılır.

Negatif tanımlı fonksiyon: $V(x)$ fonksiyonu, $V(0)=0$ ve $x \neq 0$ iken $V(x) < 0$ koşullarını sağlıyorsa negatif tanımlı fonksiyon olarak adlandırılır.

Negatif yarı-tanımlı fonksiyon: $V(x)$ fonksiyonu, $V(0)=0$ ve $x \neq 0$ iken $V(x) \leq 0$ koşullarını sağlıyorsa negatif yarı-tanımlı fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanımlanan Lyapunov fonksiyonları, $V(0)=0$ iken $x \neq 0$ değeri için $V(x)$ fonksiyonunun değerine göre global veya yerel pozitif yarı-tanımlı, negatif tanımlı ve negatif yarı-tanımlı olabilirler (Sastry, 1999). Bu tanımlardan yola çıkarak, $V(0)=0$ olmak koşuluyla, $V(x)$ fonksiyonuna ait tanımlar aşağıdaki gibi yapılabilir (Çizelge 2).

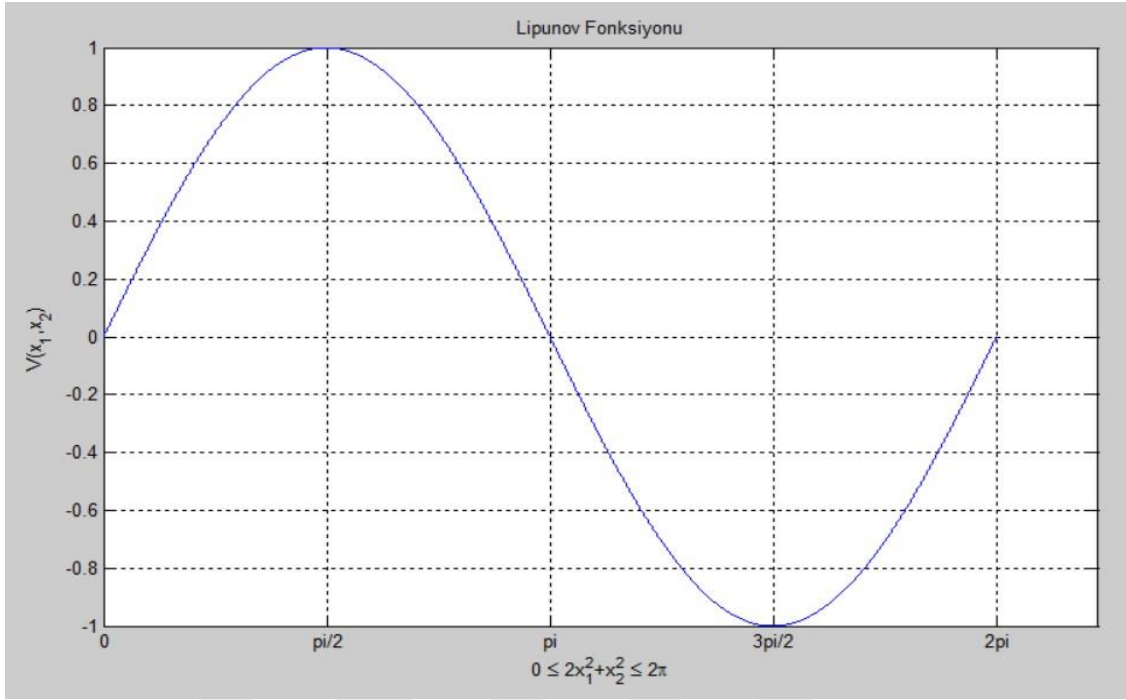
Çizelge 2. Lyapunov fonksiyonlarının tanımları

<i>Lyapunov Fonksiyonu</i>	<i>Tanım</i>
$V(x) > 0, x \neq 0$	Pozitif tanımlı fonksiyon
$V(x) \geq 0, x \neq 0$	Pozitif yarı-tanımlı fonksiyon
$V(x) < 0, x \neq 0$	Negatif tanımlı fonksiyon
$V(x) \leq 0, x \neq 0$	Negatif yarı-tanımlı fonksiyon

Lyapunov fonksiyonlarının tanımlarına dikkat edilirse, pozitif/negatif yarı tanımlı fonksiyonlar $x \neq 0$ iken $V(x) = 0$ olabilmektedir.

Örnek 2.4: Eş. 2.28'deki Lyapunov fonksiyonu ve bu fonksiyonun $[0, 2\pi]$ aralığındaki davranışı verilsin (Şekil 2.8). Bu fonksiyonun grafiğinden yararlanılarak çizelge 2'de belirtilen Lyapunov fonksiyonlarının tanımlarından (yerel olarak) hangisine uyduğu belirlenecektir.

$$V(x_1, x_2) = \sin(2x_1^2 + x_2^2) \quad (2.28)$$



Şekil 2.8. Eş. 2.28’de verilen Lyapunov fonksiyonunun grafiği.

Eş. 2.28’de verilen Lyapunov fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiği incelendiğinde, “ $2x_1^2 + x_2^2$ ” toplamının “0”, “ π ” ve “ 2π ” olduğu değerlerde $V(x_1, x_2) = 0$ olmaktadır. Ancak Lyapunov fonksiyonları, orijin dışındaki hiçbir noktada sıfır olmamalıdır (Çizelge 2). Bu nedenle, yalnızca “ $2x_1^2 + x_2^2$ ” toplamının negatif olması durumunda (yani sol yarı düzlemde bulunması) Lyapunov fonksiyonu (2.28) negatif yarı-tanımlı olmaktadır (Şekil 2.8). Ancak bu toplamın matematiksel olarak negatif olma ihtimali bulunmadığından fonksiyon negatif yarı-tanımlı olma koşulunu sağlamayacaktır (Çizelge 3).

Çizelge 3. Eş. 2.28’de verilen Lyapunov fonksiyonunun tanımları

<i>Değer Aralığı</i>	<i>Tanım (Yerel olarak)</i>
$0 < 2x_1^2 + x_2^2 < \pi$	Pozitif tanımlı fonksiyon
$0 \leq 2x_1^2 + x_2^2 < \pi$	Pozitif yarı-tanımlı fonksiyon
$\pi < 2x_1^2 + x_2^2 < 2\pi$	Negatif tanımlı fonksiyon
—	Negatif yarı-tanımlı fonksiyon

Örnek 2.5: Aşağıda bazı Lyapunov fonksiyonları ve tanımları örnek olarak verilmiştir.

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1- $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$ | Pozitif tanımlı fonksiyon |
| 2- $V(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 - 7x_3^2$ | Negatif tanımlı fonksiyon |
| 3- $V(x_1, x_2) = (2x_1^2 - x_2^2)^4$ | Pozitif yarı tanımlı fonksiyon |
| 4- $V(x_1, x_2) = -(x_1^2 - 3x_2^2)^2$ | Negatif yarı tanımlı fonksiyon |
| 5- $V(x_1, x_2) = 1 - \cos(\ x_1 + x_2\)$ | Yerel pozitif tanımlı fonksiyon |

2.2.6. Lyapunov'un ikinci (Direct) metodu

Lyapunov'un ikinci metodu, Lyapunov fonksiyonunu, orijini denge noktası olan dinamik sistemlerin enerji veya depolama fonksiyonu olarak tanımlayarak bu sistemlerin kararlılığını inceleme olanağı sağlar. Bu metodunun amacı, sistemi tanımlayan diferansiyel denklemleri çözmeden ve sistemi besleyen kaynak, input veya kuvvet sıfır iken nonlinear bir sistemin denge noktasının kararlılık özelliklerini belirlemektir. Ayrıca bu metoda ek teoremler ile bir sistemin GAS olup olmadığı da belirlenebilir.

Teorem 2.2: Eş. 2.3'teki sistemin denge noktası orijin ($x_e = 0$), $D \subset \mathfrak{R}^n$ orijini kapsayan bir bölge ve $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ olarak tanımlanan sürekli ve türevlenebilir Lyapunov fonksiyonu PDF olsun. $u \equiv 0$ olmak üzere Lyapunov fonksiyonu,

$$V'(x) \leq 0, x \in D \quad (2.29)$$

koşulunu (2.29) sağlıyorsa sistemin (2.3) orijini *kararlıdır*. Eğer

$$V'(x) < 0, x \in D - \{0\} \quad (2.30)$$

koşulunu (2.30) sağlıyorsa sistemin (2.3) orijini AS olacaktır. Ancak eğer $V'(x)$, PDF ise orijin kararsızdır.

Bu teoreme göre nonlinear bir sitem için tanımlanan sürekli ve pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi negatif-yarı tanımlı ise sistemin orijini kararlıdır. Fakat tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun türevi negatif tanımlı ise sistemin orijini AS'dir (Haddad ve Chellaboina, 2008).

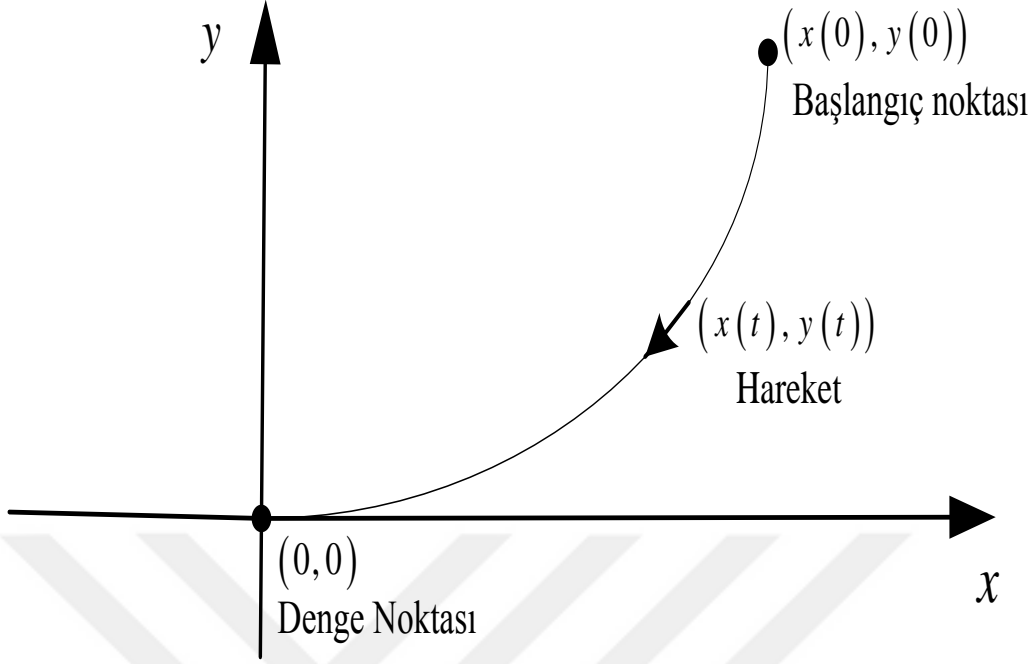
Orijini kararlı fakat asimptotik kararlı olmayan sistemlerin birden fazla denge noktası olabilir. Bu durumda başlangıç koşullarına bağlı olarak sistem yörüngeleri, denge noktalarından her hangi birine yakınsayabilir (Şamlı, 2006).

2.2.6.1. Lyapunov anlamında kararlılık

Eş. 2.3'teki nonlinear sistem için tanımlanan ve Lyapunov'un ikinci metodunda belirtilen kararlılık koşullarını yerine getiren "V" Lyapunov fonksiyonu, sisteme ait enerjinin daima pozitif ve enerji değişiminin negatif olduğunu ifade eder. Bu durum, enerji fonksiyonun PDF olduğu ve sistem enerjisinin zamanla azaldığı anlamına gelir. Çünkü sistem yörüngeleri zamanla denge noktası olan orijine yaklaşır. Denge noktasında sistemin potansiyel enerjisi minimum değilse o zaman denge noktası da kararlı değildir (Salle ve Lefschetz, 1961).

Lyapunov kararlılığı, belirli bir noktadan harekete başlayarak yol boyunca ilerleyen ve her hangi bir şekilde yakıt takviyesi yapmayan bir araç-yakıt örneği ile somutlaştırılabilir. Bu aracın deposundaki mevcut yakıt, aracın enerjisi olarak düşünülebilir. Aracın yakıtı zamanla azalacak ve tamamen tükendiğinde ise araç duracaktır. Bu aracın durduğu nokta orijin olarak görülebilir. Çünkü bu nokta, aracın enerjisinin sıfır olduğu noktadır.

Lyapunov fonksiyonları yukarıda verilen araç-yakıt örneğine benzer bir enerji fikrine dayanır. Kararlı bir cismin hareketi ile enerjisi arasındaki ilişki: Orijinin, cismin enerjisinin minimum (sıfır) olduğu nokta olmasıdır (Şekil 2.9).



Şekil 2.9. Kararlı bir cismin hareketi.

2.2.6.2. Global asimptotik kararlılık (GAS)

Orijini GAS olan sistemlerin çözüm eğrileri $t \rightarrow \infty$ iken tekrar denge noktasına yakınsar. Yani her hangi bir başlangıç noktası için, sistem yörüngeleri denge noktasına geri dönüyordur. Eğer Lyapunov fonksiyonu sistemin enerji fonksiyonu olarak düşünülürse orijinin GAS olduğu sistemlerde, enerji daima sifira (orijine) yakınsar veya orijin dışındaki her noktada enerji harcanır. Ancak Lyapunov'un ikinci metodunda belirtilen kararlılık teoremi, orijinin GAS olup olmadığı üzerine her hangi bir bilgi vermez.

Teorem 2.3 (Barbashin-Krasovskii): Eş. 2.3'teki sistemin denge noktası orijin $(x_e = 0)$ ve $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ olarak tanımlanan sürekli ve türevlenebilir Lyapunov fonksiyonu PDF olsun. $u \equiv 0$ olmak üzere Lyapunov fonksiyonu, Lyapunov'un ikinci metoduna göre AS olma şartlarını ve eş. 2.31'deki koşulu yerine getiriyorsa sistemin (2.3) orijini GAS'dir.

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (2.31)$$

Tanım 2.10: Lyapunov'un ikinci metoduna göre AS olma koşullarına ek olarak orijinal metodun genişletilmiş halini sunan eş. 2.31'deki koşul, *radially unbounded* olarak tanımlanır. Metodun bu genişletilmiş hali ise sıklıkla *Barbashin-Krasovskii* teoremi olarak adlandırılır (Khalil, 2002).

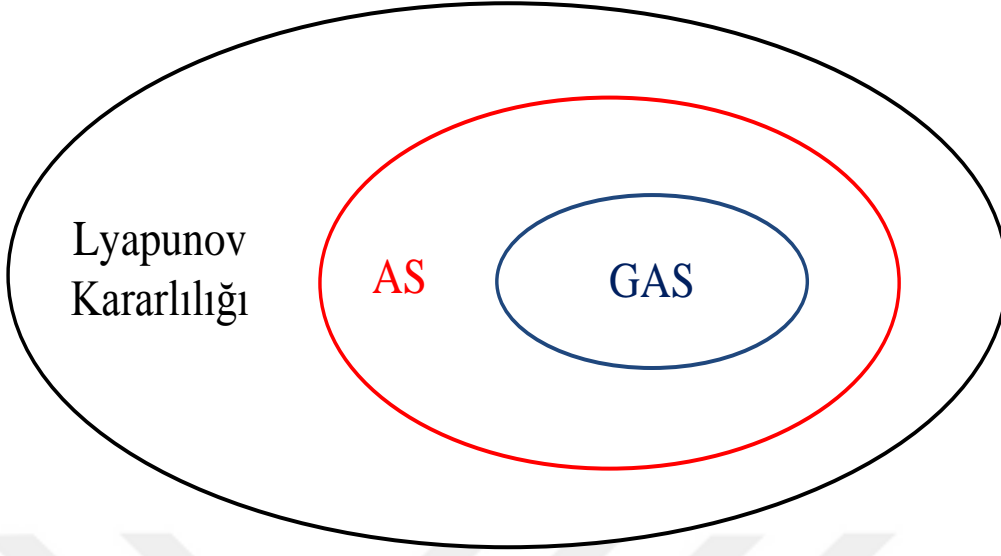
GAS ile AS arasındaki kayda değer fark; GAS, herhangi bir başlangıç noktasından itibaren herhangi bir yörüngeyi, verilen çözüme asimptotik olarak yaklaştığını ima etmesidir (Yerramalla ve ark., 2003). Bu durumda global kararlılık, nonlinear bir sistemin her noktada lineer sistemle aynı sonuçları andırması olarak düşünülebilir (Şamlı, 2006).

Orijini GAS olan sistemlerde orijinin sisteme ait tek denge noktası olması gerekir. Eğer sistemin birden fazla denge noktası var ve sistem yörüngeleri zamanla orijine yakınsamıyorsa bu durum orijinin GAS olma iddiasıyla çelişir. Bu nedenle, GAS çoklu dengeli sistemler için uygulanamaz (Khalil, 2015).

Yukarıda tanımlanan her üç kararlılık tipi için,

$$\text{GAS} \Rightarrow \text{AS} \Rightarrow \text{Liapunov Kararlılığı}$$

şeklinde bir koşul oluşturularak kararlılık dereceleri yazılabilir. Özetlemek gerekirse, Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlı denge noktalarının kapsamı bir Venn Şeması kullanılarak aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir (Şekil 2.10).



Şekil 2.10. Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılık sınıflandırmaları.

2.2.6.3. LaSalle değişmezlik ilkesi

Lyapunov kararlılık teoremlerinden farklı olarak LaSalle teoremlerinde, Lyapunov fonksiyonun PDF olması zorunlu değildir. Ancak PDF fonksiyonlar için radially unbounded koşulunu sağlamak çok daha kolaydır (Şamlı, 2006).

LaSalle's değişmezlik ilkesi, Lyapunov'un ikinci metodunda belirtildiğinin aksine, Lyapunov fonksiyonunun türevinin ($V'(x)$) negatif tanımlı ($V'(x) < 0$) olmadığı durumlarda da bir sistemin asimptotik kararlılığını sonuçlandırmaya olanak verir. Ancak bunun için ilgili fonksiyonun türevi negatif yarı-tanımlı ($V'(x) \leq 0$) olmalıdır. Ayrıca bu ilke yalnızca autonomous sistemler için geçerlidir.

LaSalle değişmezlik ilkesiyle Lyapunov fonksiyonlarının yakınsamalarını garantilemek mümkündür (Yerramalla ve ark., 2003). Dahası, belirli bir bölgede başlayan diferansiyel denklemlerin yörüngelerinin o bölgede birçok denge noktasından birine yaklaştığı bu ilke yardımıyla kanıtlanabilir (Sastry, 1999; Khalil, 2002).

Teorem 2.4: Sistemin (2.3) denge noktası orijin ($x_e = 0$), $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ olarak tanımlanan sürekli ve türevlenebilir Lyapunov fonksiyonu PDF ve $V'(x) \leq 0$ olsun.

$S = \{x \in D : V'(x) = 0\}$ olmak üzere, $x(t) \equiv 0$ çözümü (sıfır çözüm) dışında hiçbir çözüm S kümesinde kalmıyorsa sistemin orijini AS'dır.

Teorem 2.5: Sistemin (2.3) denge noktası orijin ($x_e = 0$) ve $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $\forall x \in \mathfrak{R}^n$ değeri için $V'(x) \leq 0$ olan sürekli türevlenebilir ve radially unbounded bir PDF olsun. $S = \{x \in \mathfrak{R}^n : V'(x) = 0\}$ olmak üzere, $x(t) \equiv 0$ çözümü (sıfır çözüm) dışında hiçbir çözüm S kümesinde kalmıyorsa sistemin orijini GAS'dır.

Bu teoremin (2.5) yardımıyla Barbashin-Krasovskii teoreminde (2.3) belirtilen GAS koşulları, eş. 2.32'de olduğu gibi genişletebilir. Bu koşulları sağlayan sistemin (2.3) denge noktası orijin olmakla beraber aynı zamanda orijini GAS'dır.

$$\begin{aligned}
 V(0) &= 0 \\
 V(x) &> 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad x \neq 0 \\
 V'(x) &\leq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n \\
 \|x\| \rightarrow \infty &\Rightarrow V(x) \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Örnek 2.6: Eş. 2.33'te verilen (Khalil, 2002) zorlanmamış nonlineer sistem için uygun bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak denge noktasının kararlılık durumu, Lyapunov'un ikinci metoduna göre incelenecektir. a, b, m ve n parametreleri daha sonra belirlenmek üzere, bu tür üstel formlarda verilen sistemlerin (2.33) Lyapunov fonksiyonu genellikle $V(x_1, x_2) = mx_1^a + nx_2^b$ şeklinde tanımlanır.

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1^3 - x_2^3. \tag{2.33}$$

Sistemin denge noktasının orijin $(0,0)$ olduğu matematiksel olarak belirlenebilir. Denge noktası belirledikten sonra, Lyapunov fonksiyonunun türevi bulunarak uygun parametre değerleri seçilecektir.

$$V'(x_1, x_2) = max_1^{a-1} x_1' + nbx_2^{b-1} x_2'$$

$$V'(x_1, x_2) = max_1^{a-1} x_2 + nbx_2^{b-1} (-x_1^3 - x_2^3)$$

$$V'(x_1, x_2) = max_1^{a-1} x_2 - nbx_2^{b-1} x_1^3 - nbx_2^{b+2}$$

$a = 4$, $b = 2$, $m = 1$ ve $n = 2$ olarak verilsin veya seçilsin. Bu durumda Lyapunov fonksiyonunun türevi,

$$V'(x_1, x_2) = 4x_1^3 x_2 - 4x_2 x_1^3 - 4x_2^4$$

$$V'(x_1, x_2) = -4x_2^4$$

negatif yarı-tanımlı ($V'(x_1, x_2) \leq 0$) olmaktadır. Parametre değerleri, tanımlanan Lyapunov fonksiyonunda yerine yazılırsa $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ olacaktır. Dikkat edilirse, Lyapunov fonksiyonu radially unbounded ve PDF'dir. Ayrıca $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$ iken $V(x_1, x_2) \rightarrow \infty$ ve $V(\infty) = 0$. Bu nedenle bu sistemin tüm çözümleri; $t \rightarrow \infty$ iken sınırlandırılmıştır, tüm yörüngeler faz düzleminde orijine yaklaşmaktadır ve sistem için orijin $(0,0)$ tek değişmez alt kümedir. Bu durumda, Lyapunov fonksiyonu eş. 2.32'de belirtilen koşulların (Teorem 2.5) tümünü sağladığından zorlanmamış nonlineer sistemin (2.33) orijini için GAS denebilir.

Örnek 2.7: Matematiksel ifadesi verilen nonlineer sistemin (2.34) kararlılığı Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak ve sitem davranışları ise bilgisayar programları aracılığıyla incelenecektir.

$$x' = -2(x - 2y), y' = -2(x + y^3). \quad (2.34)$$

Öncelikle sisteme ait denge noktalarının bulunması gerekmektedir. Matlab "ppplane" programı kullanılarak veya matematiksel işlemler yapılarak sistemin tek denge

noktasının orijin $(0,0)$ olduğu bulunabilir. Ayrıca aynı program aracılığıyla sisteme ait eğrilerin faz düzlemi üzerinde $t \rightarrow \infty$ koşuluyla zamanla denge noktası olan orijine vardığı görülebilir (Şekil 2.11).

Radially unbounded ve pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu, $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ olarak verilsin. Bu durumda, sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi,

$$V'(x, y) = 2xx' + 4yy'$$

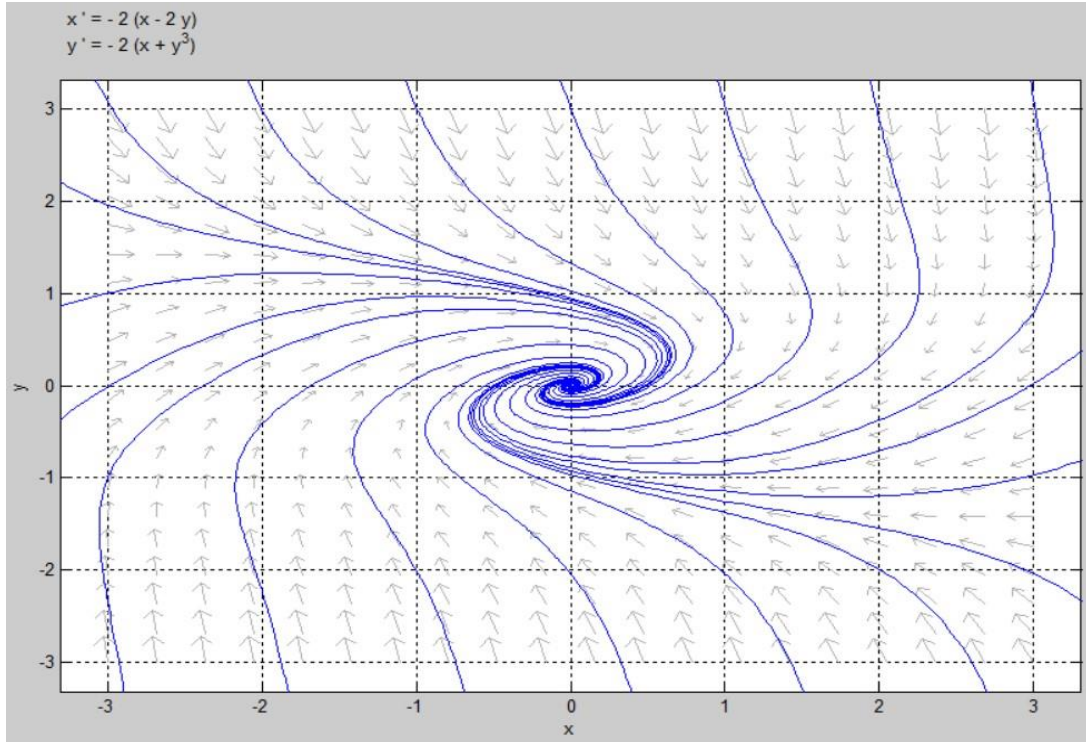
$$V'(x, y) = 2x(-2x + 4y) + 4y(-2x - 2y^3)$$

$$V'(x, y) = -4x^2 + 8xy - 8xy - 8y^4$$

$$V'(x, y) = -4x^2 - 8y^4$$

$$V'(x, y) = -4(x^2 + 8y^4)$$

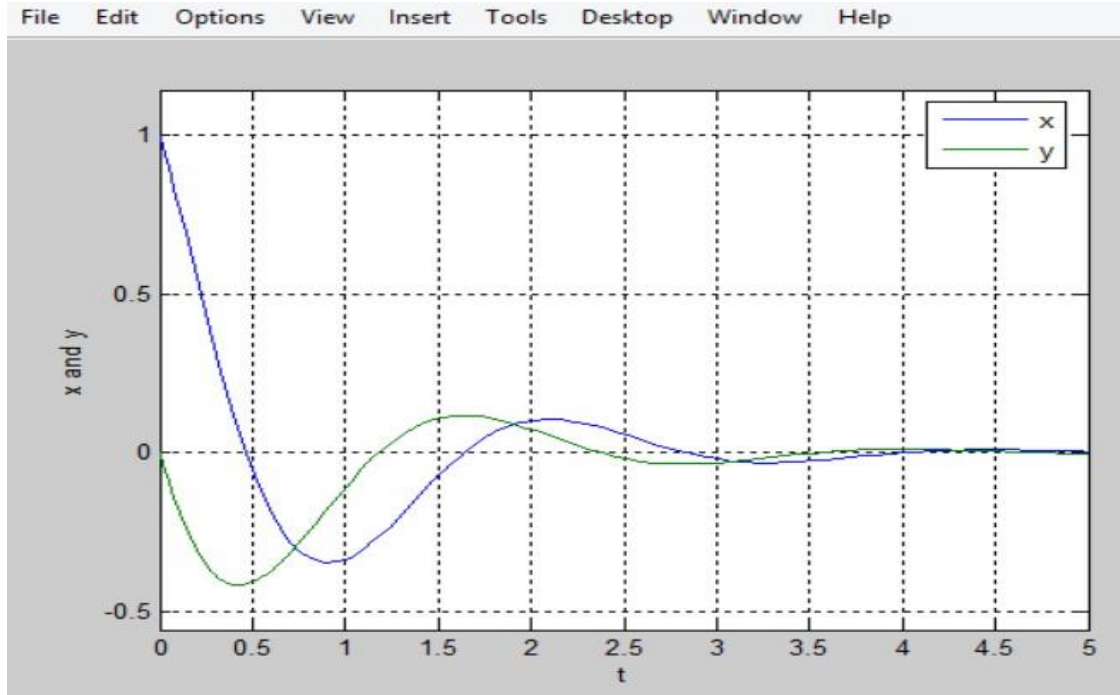
olacaktır. Yani Lyapunov fonksiyonunun türevi $V'(x, y) \leq 0$ olmaktadır. Ayrıca $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ iken $V(x, y) \rightarrow \infty$ ve $V(\infty) = 0$. Bu nedenle sistemin tüm çözümleri; $t \rightarrow \infty$ iken sınırlandırılmıştır ve bu sistem için orijin $(0,0)$ tek değişmez alt kümedir. Bu durumda, Lyapunov fonksiyonu eş. 2.32'de belirtilen koşulların (Teorem 2.5) tümünü sağladığından nonlinear sistemin (2.34) orijini GAS'dir.



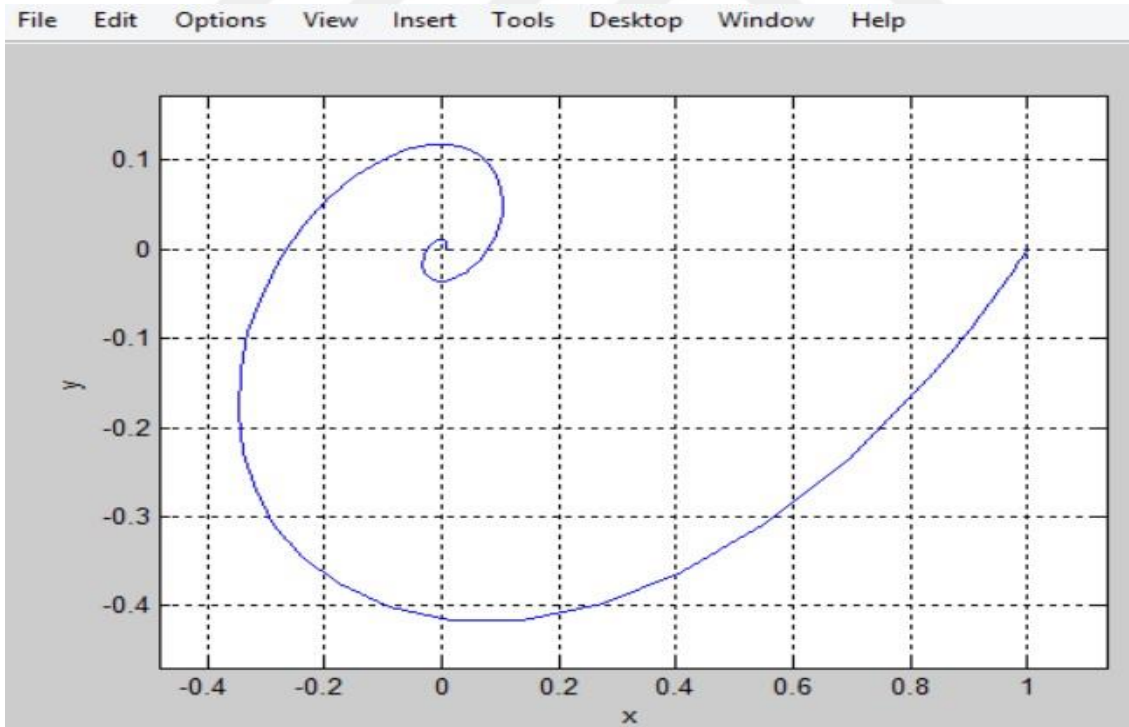
Şekil 2.11. Eş. 2.34'e ait faz düzlem portresi.

Lyapunov fonksiyonu ve “pplane” programı yardımıyla denge noktalarına göre kararlılığı incelenen sistemin (2.34) matematiksel olarak çözümü yapılabileceği gibi “odesolve” programı da kullanılabilir. Bu program da yine John C. Polking tarafından yazılmış olup eğitim kurumlarınca kar amacı gütmeksizin eğitim amaçlı ücretsiz olarak kullanılabilir (Polking, 2002). “odesolve” programı, ADD’lerin çözümünü yapmadan başlangıç değeri belli olan her hangi bir çözüm eğrisinin faz düzlemindeki davranışını inceleme olanağı verir ve ek olarak sistem değişkenlerinin zamana göre çözüm eğrilerini de çizer. Üstelik bu program çok değişkenli nonlinear sistemlere de uygulanabilir.

Matlab “odesolve” programı kullanılarak eş. 2.34’teki sisteme ait (1,0) başlangıç noktasına sahip durum değişkenlerinin zamanla orijine (0,0) vardığı görülebilir (Şekil 2.12). Ayrıca yine bu program aracılığıyla sisteme ait (1,0) başlangıç noktasına sahip çözüm eğrisinin faz düzlemi üzerinde denge noktası olan orijine (0,0) vardığı da belirlenebilir (Şekil 2.13).



Şekil 2.12. Durum değişkenlerinin zamana göre davranışı.



Şekil 2.13. “odesolve” yazılımı ile elde edilen çözüm eğrisinin faz düzlem portresi.

2.3. Pasiflik

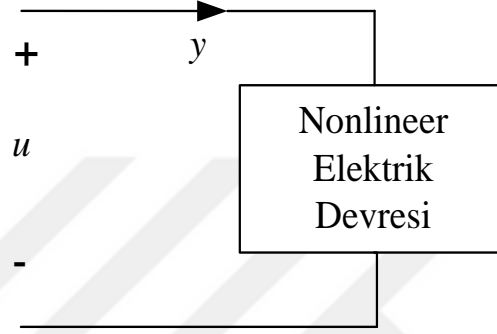
Pasiflik, lineer veya nonlinear sistemlerin analizi ve sentezi için kullanılabilen dinamik sistemlerin enerji bazlı özelliğidir ve elektrik devrelerinin analizi bağlamında ortaya çıkmıştır (Laori, 2001). Ancak birçok dinamik sistem, elektrik devrelerine modellenemediğinden bu sistemlerin pasiflik analizlerini modellemeler aracılığıyla yapmak çok daha kolaydır. Üstelik pasiflik birbirine bağlı çoklu sistemlerin analizleri için de değerli sonuçlar verir. Çünkü İki pasif sistemin geri besleme bağlantısı, pasif bir sistem sağlar (Laori, 2001).

Pasiflik analizi sisteme giren ve sistemde depolanan enerji fikrine dayanır ve pasif sistemler, sisteme sağlanan enerjiyi depolayan veya serbest bırakan sistemler olarak düşünülebilir. Ayrıca bu sistemler, sisteme sağlanan enerjiden daha fazlasını depolayamaz. Bu nedenle bir sistem pasif olduğunda; bu sistemin enerji üretmediği, sadece enerjiyi depoladığı veya enerjiyi doğrudan geçirdiği anlamına gelir. Bu nedenle bir sistemin pasifliğinin gösterilebilmesi, sisteme ait enerji depolama fonksiyonu bulmayı gerektirir ve bu fonksiyonunu doğrudan devrede bulunan güçle ilgilidir (Jeltsema ve ark., 2003c). Ancak bir sistemin enerji depolama fonksiyonu bulma, tıpkı Lyapunov fonksiyonlarında olduğu gibi genel olarak zorlu bir işlemdir. Ama sistemin enerjisini temsil edecek bir Lyapunov veya model enerji fonksiyonu belirlenebilir ve bu fonksiyon ile hem sistemin kararlılığı hem de pasifliği analiz edilebilir.

Pasiflik, sistemin enerji dengesini nitelendiriyor olması anlamında doğal bir giriş-çıkış (input-output) özelliğidir ve giriş-çıkış enerjisi bağlamında kararlılık özelliği ile ilişkilidir. Yani sisteme verilen “giriş enerjisi” sınırlanmışsa sınırlı çıkış enerjisi elde edildiğinden sistemin kararlı olduğu söylenebilir. Bu durum Lyapunov kararlılığının aksine sistemin iç kararlılığıyla, yani bir sistemin durumunun istenen bir değerden (çalışma noktasından) ne kadar uzakta olduğu ile ilgilidir. Başka bir deyişle, bir sistemin istenen performansa göre ne kadar farklı davrandığıyla ilgilidir. Bu yüzden matematiksel olarak, pasiflikte enerji veya depolama fonksiyonunun sınırları belirlenir (Laori, 2001). Çünkü pasif sistemlerin çözümleri sınırlı olmalıdır. Ayrıca sistemlerin pasiflikleri incelenirken sisteme ait enerji veya depolama fonksiyonlarının integral alınabilir ve sınırlarının belirlenebilir olması gerekir.

2.3.1. Pasiflik koşulları

Pasif bir devre yalnızca pasif devre bileşenlerinden oluşur. Ancak pasiflik, sistem elemanlarının öznel değerine bağlı değildir. Pasiflik sistemin genel bir özelliğidir. Bununla birlikte, Kirchhoff yasalarından yararlanılarak, pasif bileşenlerden oluşan her hangi bir devrenin aynı zamanda pasif olacağı söylenebilir (Moylan, 2014).



Şekil 2.14. Nonlinear elektrik devresi modeli.

Nonlinear elektrik devreleri, u giriş voltajına ve y çıkış akımına sahip bir sistem olarak düşünülerek devrenin pasiflik durumu incelenir (Şekil 2.14). Sistemlerin pasiflik analizi kararlılığın aksine yük altında incelenir. Yani verilen bir sistemin pasifliği, sistemi besleyen enerji kaynağı kesilmeden ($u \neq 0$) yapılır.

Nonlinear elektrik devresinin (Şekil 2.14) gücü p ve enerjisi w olmak üzere, güç ile enerji arasındaki ilişki $w(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt$ şeklinde ifade edilir. Eğer $w(t) > 0$ ise

devre bir direnç elemanı gibi davranarak enerji harcar, ancak $w(t) < 0$ ise devre bir depolama elemanı gibi davranarak sisteme enerji verir (Marquez, 2003).

Devre teorisinde kendi enerjisini üretemeyen elemanlar pasiftir ve pasif elemanların enerjileri $w(t) = \int_{-\infty}^t v(t)i(t) dt \geq 0$ olmalıdır. Dirençler, kapasitörler ve indüktörler bu koşulu sağladığından pasif elemanlar olarak adlandırılır (Marquez, 2003).

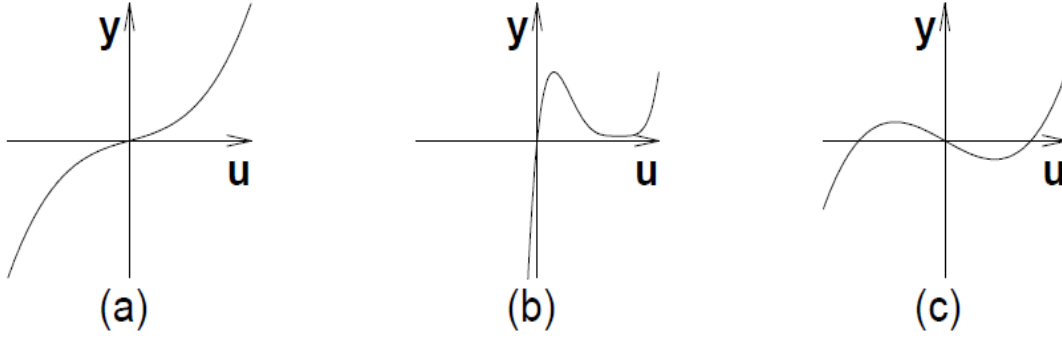
Dirençler, elektrik enerjisi tüketirler ve bu enerjiyi çoğu zaman ısı gibi elektriksel olmayan formlara dönüştürler. Asla enerji üretemezler. İndüktörler ve kapasitörler ise enerjiyi depolayabilir ve daha sonra serbest bırakabilirler ama depolanan enerjiden daha fazlasını serbest bırakamazlar. Ancak negatif değerli kapasitörler ve indüktörler pasif değildir, çünkü bu elemanlar negatif enerji depolayabilirler (Moylan, 2014). Bu tür durumlar için ise literatürde kullanılan farklı özellikler bulunur.

Pasiflik, devre ve sistem teorisindeki birçok önemli gelişme için temel bir yapı oluşturan dinamik sistemlerin temel bir özelliğidir (Jeltsema ve ark., 2003a; 2003b). Pasif devrelerde, devre hem iç bileşenlere hem de harici bağlantı noktalarına sahip bir sistem olarak modellenir. Her portun bir voltajı ve porta gelen bir akımı vardır. Voltaj ve akım kullanılarak her bir porta giren güç elde edilebilir. Bu işlem tüm bağlantı noktalarına uygulanarak tüm portlardaki enerjinin toplamı ile zamana bağlı olarak devreye giren toplam güç bulunabilir. Bu gücün integrali, başlangıçta sistemde depolanmış enerji olmadığı varsayarsak sisteme giren toplam enerjidir (Moylan, 2014).

2.3.1.1. Memoryless fonksiyonu

Nonlineer elektrik devresinin (Şekil 2.14) yalnızca nonlineer dirençten oluştuğu ve Memoryless fonksiyonunun $h \in [0, \infty)$ olmak üzere, $y = h(t, u)$ şeklinde tanımlandığını varsayalım. Ancak h , her zaman bir fonksiyon olmak zorunda değildir, aynı zamanda gerçek sayılar arasındaki ilişkiyi temsil edebilir.

Sisteme giren güç uy , tüm (u, y) noktaları için daima negatif değilse ($uy \geq 0$) direnç elemanı pasiftir. Yani $(0, 0)$ noktası dışındaki bütün noktalarda pozitif olmalıdır (Khalil, 2002; 2015). Bu da, geometrik olarak $u - y$ eğrisinin koordinat düzleminde sadece birinci ve üçüncü bölgede olabileceği anlamına gelir (Şekil 2.15a; 2.15b) ve pasif dirençler her zaman sistemden enerji çeker.



Şekil 2.15. Nonlinear direnç karakteristiği a. pasif, b. pasif, c. pasif olmayan (Khalil, 2002; 2015).

Tanım 4.1: u ve y vektörlerinin olduğu çok parçalı sistemlerin toplam gücü, $u^T y = \sum_{i=1}^m u_i y_i = \sum_{i=1}^m u_i h_i(u)$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda, $\forall u \neq 0$ iken $u^T \varphi(u) > 0$ ve $\forall y \neq 0$ iken $y^T \rho(y) > 0$ olmak üzere, $y = h(t, u)$ 'nin pasiflik tanımları ile sistemin toplam gücü arasındaki ilişki daha detaylı olarak belirlenebilir (Çizelge 4).

Çizelge 4. Memoryless fonksiyonunun pasiflik tanımları

<i>Sistemin Gücü</i>	<i>Tanım</i>
$u^T y \geq 0$	Pasif
$u^T y = 0$	Kayıpsız
$u^T y \geq u^T \varphi(u)$	Giriş kesinlikle pasif
$u^T y \geq y^T \rho(y)$	Çıkış kesinlikle pasif

2.3.1.2. Depolama (storage) fonksiyonu

Nonlinear RLC devresinin (Şekil 2.14) lineer indüktör ve kapasitör gibi enerji depolayan ve nonlinear direnç gibi enerji tüketen devre elemanlarından oluştuğu varsayalım. Bu sistemin durum denklemlerinin ise eş. 2.35'teki gibi olduğu verilsin.

Tanım 4.2: $n \geq m$ ve $t \in [0, \infty)$ olmak üzere $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ durum, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ giriş ve $y(t) \in \mathfrak{R}^m$ çıkış vektörleridir. $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ Lipschitz ve H sürekli bir fonksiyondur. $\forall x \neq 0$ değeri için $f(x, 0) \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ ve $H(0, 0) = 0$ olsun.

$$x' = f(x, u), y = H(x, u). \quad (2.35)$$

2.3.1.2.1. Lyapunov enerji fonksiyonu ve pasiflik

Sistemin enerji fonksiyonu kullanılarak pasifliğini kanıtlamak fikri, Lyapunov'un ikinci metoduna dayanır (Moylan, 2014). Lyapunov fonksiyonu aynı zamanda sistemin enerji fonksiyonu olarak düşünülerek pasiflik analizi yapılır. Bu sayede sistemin pasifliği ve Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılık durumu arasında ilişki kurulabilir.

Tanım 2.13: Eş. 2.35'teki sistem için eş. 2.36'daki gibi sürekli diferansiyellenebilir bir $V(x)$ (depolama fonksiyonu) pozitif yarı-tanımlı Lyapunov enerji fonksiyonu tanımlanabiliyorsa sistem *pasiftir*.

$$u^T y \geq V' = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u). \quad (2.36)$$

Pasif sistemlerde herhangi bir zaman aralığında $[0, t]$ sistem tarafından çekilen enerji, aynı periyotta sistemde depolanan enerjideki artıştan büyük veya eşittir. Diğer bir ifadeyle, sistemin enerji değişimi eğer sistemin toplam gücünden küçük ise sistem *pasiftir*. Bu ifade, sistemde depolanan enerjinin veya sisteminin çıkış enerjisinin sisteme verilen toplam enerjiden fazla olamayacağı anlamına gelir (Khalil, 2002; 2015). Pasif sistemin depoladığı enerji ile sistem tarafından çekilen enerji arasındaki ilişki,

$$\int_0^t u(s)y(s)ds \geq V(x(t)) - V(0) \quad (2.37)$$

eşitsizliği (2.37) ile ifade edilebilir. Sistem tarafından çekilen enerji ile depolanan enerjideki artış arasındaki fark dirençlerde harcanan enerji olmalıdır. Eşitsizlik (2.37), daha da genişletilerek sisteme giden güç akışının sistemde depolanan enerjinin değişim hızından daha büyük veya ona eşit olması gerektiği eş. 2.38'deki gibi ifade edilebilir (Khalil, 2002; 2015).

$$u(t)y(t) \geq V'(x(t), u(t)) \quad (2.38)$$

Ayrıca Lyapunov enerji (depolama) fonksiyonu yardımıyla sistemin pasiflik tanımları, $\psi(x)$ pozitif tanımlı olmak üzere aşağıdaki gibi genişletilebilir (Çizelge 5).

Çizelge 5. Depolama fonksiyonunun pasiflik tanımları

<i>Sistemin Gücü</i>	<i>Tanım</i>
$u^T y = V'$	Kayıpsız
$u^T y = V' + \psi(x)$	Kesinlikle pasif
$u^T y \geq u^T \varphi(u) + V'$	Giriş kesinlikle pasif
$u^T y \geq y^T \rho(y) + V'$	Çıkış kesinlikle pasif

Kayıpsız (Lossless) Sistem: Sistemde depolanan enerji ile sisteme aktarılan enerjinin eşit olduğu sistemlerdir. Her hangi bir şekilde sistemde enerji kaybı olmamaktadır.

Giriş Kesinlikle Pasif Sistem: Giriş $(u(t))$ sıfır olmadıkça her hangi bir zaman aralığında $[0, t]$ sistem tarafından çekilen enerji, aynı zaman aralığında sistemde depolanan enerjinin artışından daha büyük olduğu sistemlerdir.

Çıkış Kesinlikle Pasif Sistem: Çıkış $(y(t))$ sıfır olmadıkça her hangi bir zaman aralığında $[0, t]$ sistem tarafından çekilen enerji, aynı zaman aralığında sistemde depolanan enerjinin artışından daha büyük olduğu sistemlerdir.

Kesinlikle Pasif Sistem: $x(t)$ sıfır olmadıkça her hangi bir zaman aralığında $[0, t]$ sistem tarafından çekilen enerji, aynı zaman aralığında sistemde depolanan enerjinin artışından daha büyük olduğu sistemlerdir.

2.3.1.2.2. Supply rate fonksiyonu

Giriş ve çıkış ürününün gücü temsil ettiği birçok fiziksel sistem (dönen bir makinenin torku ve hızı gibi) vardır. Bu sistemler potansiyel olarak elektrik devrelerine modellenebilir. Bu nedenle, bu model sistemin enerjisini temsil eden ve fiziksel sistemin gerçek enerjisine karşılık gelen matematiksel bir enerji fonksiyonu türetilebilir (Moylan, 2014). Sisteme verilen toplam enerjinin modellendiği bu fonksiyona, Supply rate fonksiyonu denir (Moylan, 2014; Bao ve Lee, 2007).

Tanım 4.4: $\mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^m$ üzerinde her hangi u ve $y = H(x, u)$ için eş. 2.35'teki sisteme ait supply rate fonksiyonu, $r(t) = r(u(t), y(t)) = \sum_{i=1}^m u_i y_i$ olarak tanımlanabilir (Bao ve Lee, 2007). O halde sisteme verilen toplam enerji, $r(0, 0) = 0$ ve $t_1 \geq t_0 \geq 0$ olmak üzere eş. 2.39'daki gibi olacaktır.

$$\int_{t_0}^{t_1} \|r(t)\| dt < \infty \quad (2.39)$$

Bu durumda, eş. 2.35'teki sistem için sürekli diferansiyellenebilir bir $V(t)$ pozitif yarı-tanımlı Lyapunov enerji fonksiyonu eş. 2.40'daki gibi tanımlanırsa, bu sistem *pasiftir*.

$$V'(t) \leq r(u, y) \quad (2.40)$$

Yukarıdaki koşul (2.40), depolanan enerjinin değişim hızının sisteme verilen toplam enerji miktarından daha büyük olmadığını söylemektedir. Ancak $V(t)$ eş. 2.41'deki tanımlanırsa sistem (2.35) *kayıpsızdır*.

$$V'(t) = r(u, y) \quad (2.41)$$

Dahası, $\psi(y)$ PDF ve eğer $V(t)$ eş. 2.42'deki gibi tanımlanırsa sistem (2.35) *kesinlikle pasiftir*.

$$V'(t) + \psi(y) \leq r(u, y) \quad (2.42)$$

Lyapunov ve supply rate fonksiyonları kullanılarak nonlinear RLC devrelerinin pasiflik tanımları, $\psi(y)$ PDF olmak üzere aşağıdaki ifade edilir (Çizelge 6).

Çizelge 6. Supply rate fonksiyonunun pasiflik tanımları

<i>Sistemin Gücü</i>	<i>Tanım</i>
$V'(t) \leq r(u, y)$	Pasif
$V'(t) = r(u, y)$	Kayıpsız
$V'(t) + \psi(y) \leq r(u, y)$	Kesinlikle pasif

Örnek 2.8: Eş. 2.43'te durum denklemleri verilen dinamik sistemin depolama fonksiyonu tanımlanarak pasifliği incelenecektir. Sistemin toplam gücünü temsil eden uygun depolama fonksiyonu tanımlandıktan sonra pasiflik tanımı kolaylıkla belirlenebilir. Ayrıca bu sistemin durum denklemleri kullanılarak nonlinear bir elektrik devresine de modellenebilir.

$$x' = v, \quad y = x + h(v). \quad (2.43)$$

Sistemin (2.43) u giriş voltajına ve y çıkış akımına sahip bir nonlinear elektrik devresini temsil ettiği düşünülebilir. Bu durumda, sistemde birer adet enerji depolayan ve tüketen devre elemanı bulunacaktır. y akımı temsil ettiğinden ve $x' = v$ olduğundan depolama elemanının indüktör olduğu düşünülerek sistem modellenir.

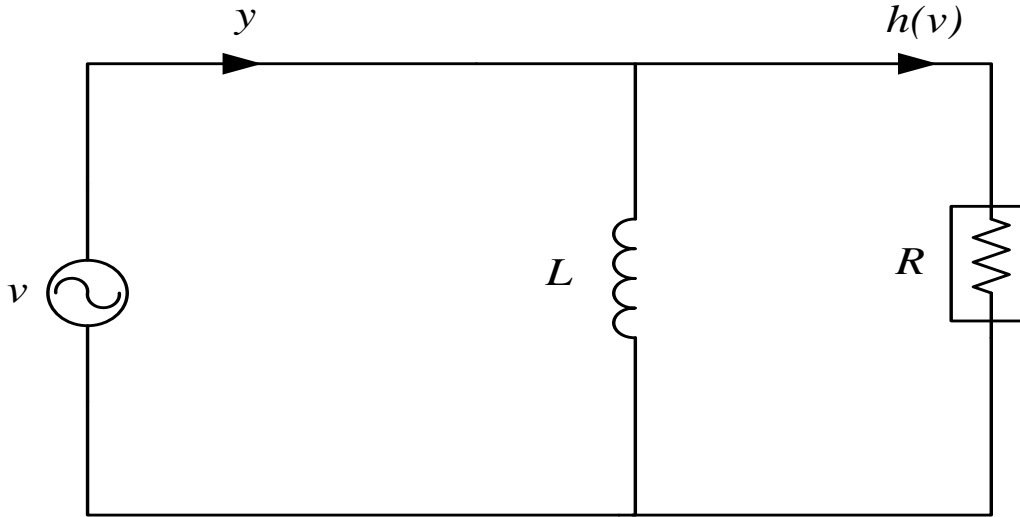
Depolama fonksiyonu $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ olarak verilsin. Bu durumda;

$$vy = xx' + x'h(v)$$

$$V'(x) = 3xx'$$

$$vy = V' + x'h(v) = V' + vh(v) \text{ olacaktır.}$$

$h \in [0, \infty]$ olduğunda sistem *pasiftir*. Ancak tüm $v \neq 0$ değerleri için $vh(v) > 0$ olduğunda ise depolama fonksiyonun pasiflik tanımlarına (Çizelge 5) göre sistem *giriş kesinlikle pasiftir*. Ayrıca bu sistem, paralel bağlı birer adet voltaj kaynağından, lineer indüktörden ve nonlinear dirençten oluşan elektrik devresini temsil eder (Şekil 2.16).



Şekil 2.16. Eş. 2.43'ün nonlinear elektrik devresine modellenmesi.

2.3.2. Pasiflik ve kararlılık

Pasiflik, sistemin kendini kararlı hale getirebilmek için verdiği doğal tepki olarak görülebilir. Bir sistemin pasif olması kararlılık için yeterli bir koşuldur ve pasif olan sistemler aynı zamanda kararlıdır. Ancak tüm kararlı sistemler pasif değildir.

Tanım 2.15: Eş. 2.35'te verilen sistem pozitif tanımlı $V(x)$ depolama fonksiyonuyla pasif ise $x' = f(x, 0)$ fonksiyonunun orijini kararlıdır. Eğer depolama fonksiyonu aynı zamanda sisteme ait Lyapunov fonksiyonu olarak kabul edilirse eş. 2.44'te belirtildiği üzere $V' \leq 0$ olacaktır.

$$u^T y \geq V' = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x, 0) \leq 0 \quad (2.44)$$

Ancak $x' = f(x, 0)$ fonksiyonunun orijinin AS olduğunu göstermek için $V' < 0$ olmalıdır veya değişmezlik prensibinin (Teorem 2.4) uygulanması gerekir. Değişmezlik prensibi, $y = 0$ iken $V' = 0$ olan bir durum göz önünde bulundurularak uygulanır. $u = 0$ olduğunda sistemin (2.35) tüm çözümleri için,

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$$

koşulu sağlanıyorsa sistem (2.35) zero-state observable olarak adlandırılır.

Tanım 2.16 (zero-state observable): $x' = f(x, 0)$ fonksiyonu için $y = 0$ iken $x = 0$ ise sistem (2.35), *zero-state observable* olarak adlandırılır. Bu durumda, $S = \{x \in \mathcal{R}^n \mid h(x, 0) = 0\}$ kümesinde $x(t) \equiv 0$ çözümü dışında hiçbir çözüm aynı değildir.

Tanım 2.17: Eş. 2.35'te verilen sistem pozitif tanımlı $V(x)$ depolama fonksiyonuyla

- kesinlikle pasif veya
- çıkış kesinlikle pasif ve zero-state observable ise

$x' = f(x, 0)$ fonksiyonunun orijini AS'dir (Khalil, 2002; 2015). Depolama fonksiyonunun aynı zamanda sistemin Lyapunov fonksiyonu olduğu kabul edilirse V' eş. 2.45'teki gibi olacaktır.

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + \psi(x) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x, 0) \leq -\psi(x) \quad (2.45)$$

Dahası, eğer depolama fonksiyonu radially unbounded ise $x' = f(x, 0)$ eşitliğinin orijini GAS'dir.

Örnek 2.9: Daha önce kararlılığı incelenen nonlineer sistemin Lyapunov fonksiyonu kullanılarak pasiflik analizi yapılacaktır (örnek 2.6). $c > 0$, $a > 0$, $u(t) \in \mathfrak{R}$ giriş ve $y(t) \in \mathfrak{R}$ çıkış vektörleri olmak üzere, sistemin durum denklemlerinin eş. 2.46'daki gibi olduğu varsayalım.

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1^3 - x_2^3 + cu, \quad y = x_2. \quad (2.46)$$

Önceki bölümde, sistemin Lyapunov enerji fonksiyonu tanımlanarak $u(t) = 0$ durumunda sistemin kararlılığı incelenmişti. $V(x_1, x_2) = a[x_1^4 + 2x_2^2]$ enerji fonksiyonunun aynı zamanda sistemin depolama fonksiyonu olduğu düşünülebilir. $V(x_1, x_2)$, \mathfrak{R}^2 uzayının tamamında bir fonksiyon olmak üzere $V'(x_1, x_2)$,

$$V'(x_1, x_2) = a \left[4x_1^3 x_1' + 4x_2 x_2' \right]$$

$$V'(x_1, x_2) = a \left[4x_1^3 x_2 + 4x_2 (-x_1^3 - x_2^3 + cu) \right]$$

$$V'(x_1, x_2) = a \left[-4x_2^4 + 4cx_2 u \right]$$

olacaktır. $a = 1/4c$ olarak seçilirse,

$$V'(x_1, x_2) = -\frac{y^4}{c} + yu$$

$$yu - V'(x_1, x_2) = \frac{y^4}{c} \geq 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda, $uy = V' + y\rho(y)$ formunda olacağından pasiflik tanımlarına göre sistem, çıkış kesinlikle pasiftir (Çizelge 5). Dahası $u = 0$ iken

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t \equiv 0) \Rightarrow x_1^3(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

olduğundan dolayı, bu sistem zero-state observable ve Lyapunov fonksiyonu ise radially unbounded olma koşulunu sağlar. Bu nedenle nonlinear sistemin orijini GAS'dir.

Örnek 2.10: Daha önce kararlılığı incelenen bir başka nonlinear sistem verilsin (Örnek 2.7). $c > 0$, $a > 0$, $u(t) \in \mathfrak{R}$ giriş ve $y(t) \in \mathfrak{R}$ çıkış vektörleri olmak üzere, sistemin durum denklemlerinin eş. 2.47'deki gibi olduğu varsayılınsın.

$$x' = -2(x - 2y), \quad y' = -2(x + y^3) + cu. \quad (2.47)$$

$V(x, y) = a[x^2 + 2y^2]$ enerji fonksiyonu, aynı zamanda sistemin depolama fonksiyonu olarak düşünülebilir. $V(x, y)$, \mathfrak{R}^2 uzayının tamamında bir fonksiyon olmak üzere $V'(x, y)$,

$$V'(x, y) = a[2xx' + 4yy']$$

$$V'(x, y) = a[-4x^2 + 8xy - 8xy - 8y^3 + 4ycu]$$

$$V'(x, y) = a[-4x^2 - 8y^3 + 4cyu]$$

olacaktır. $a = 1/4c$ olarak seçilirse,

$$uy - V'(x, y) = \frac{1}{c}(x^2 + 2y^3) \geq 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda, $uy = V' + \psi(x, y)$ formunda olacağından pasiflik tanımlarına göre bu sistem, kesinlikle pasiftir (çizelge 5). Dahası $u = 0$ iken

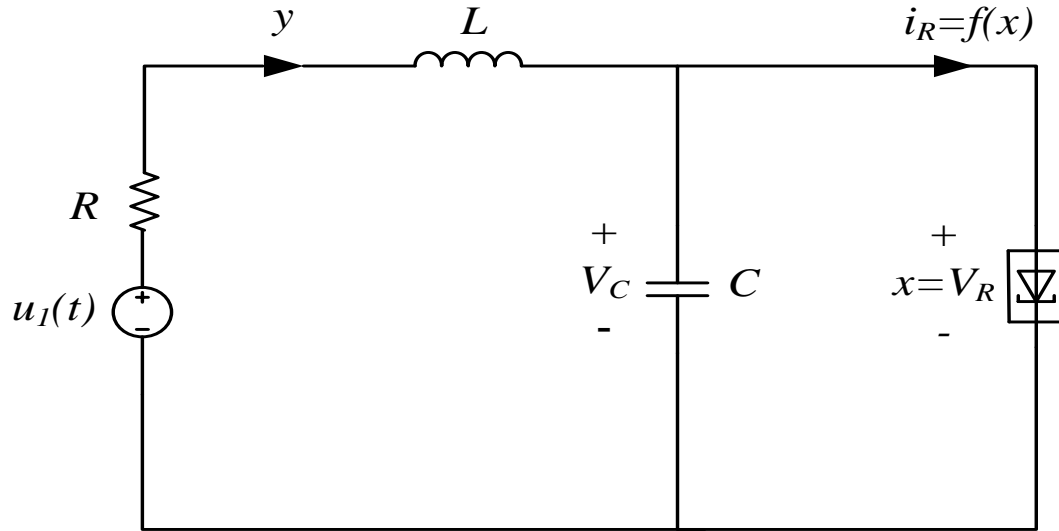
$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

olduğundan dolayı, sistem zero-state observable ve Lyapunov fonksiyonu ise radially unbounded olma koşulunu sağlar. Bu nedenle nonlinear sistemin orijini GAS'dir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, zamanla değişmez (time invariant) devre elemanlarından oluşan belirli nonlinear RLC devrelerin ve nonlinear mekanik sistemlerin $u = 0$ (zorlanmamış) için kararlılık ve $u \neq 0$ (zorlanmış) durumu için ise pasiflik analizleri yapılacaktır. Lyapunov'un ikinci metodu ile sistemlerin enerji fonksiyonu kullanılarak sistemlerin sıfır çözümünün (denge noktasının) kararlılığı ispat edilecektir. Sistemlerin kararlılığında elde edilen sonuçlar kullanılarak Gronwall eşitsizliği yardımıyla bu sistemlerin pasifliği ve çözümlerinin veya hareketinin sınırlılığı ispat edilecektir. Kararlılığı incelenen sistemlerin pasifliği için tek bir teorem yazılarak enerji fonksiyonlarının sınırları belirlenecektir. Ayrıca sistemlere ait kararlılık durumlarının bilgisayar programları yardımıyla çizilen benzetimleri ile matematiksel analizleri yorumlanacaktır.

3.1. Tunnel Diyot Devresi



Şekil 3.1. Nonlinear tunnel diyot devresi (Chua ve ark., 1987).

Teorem 3.1: Nonlineer tunnel diyot devresinin durum değişkenleri x ile y ve tunnel diyot üzerinden geçen akım $i_R = f(x)$ olarak verilsin (Şekil 3.1). Bu devre, $u_1(t) = 0$ durumunda aşağıdaki koşulları (3.1) yerine getiriyorsa orijini $(0,0)$ GAS'dir.

$$f(0) = 0, x \neq 0 \text{ iken } f(x)x > 0. \quad (3.1)$$

İspat: Devrenin durum değişkenlerinin x ve y olduğu farz edilirse durum denklemleri, Kirchhoff akım kanunları yardımıyla eş. 3.2'deki gibi elde edilir.

$$x' = \frac{1}{C} [y - f(x)], y' = \frac{1}{L} [u_1(t) - Ry - x]. \quad (3.2)$$

Öncelikle nonlineer sistemin (3.2) denge noktaları belirlenmelidir. Denge noktalarını bulmak için durum denklemlerinin matematiksel çözümü yapılırsa

$f(x) = \left(\frac{u_1(t) - x}{R} \right)$ eşitliğinin kökleri, sistemin denge noktaları olacaktır. Bu durumda

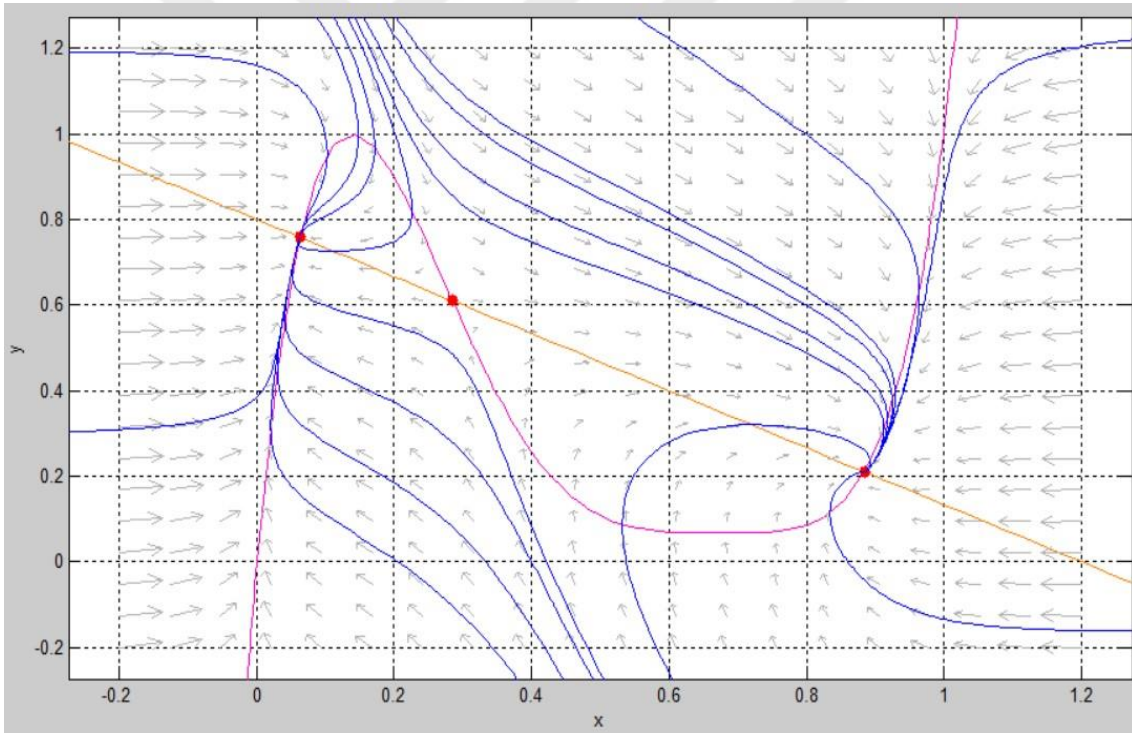
denge noktalarının sayısı u_1 değerine göre değişiklik gösterecektir.

Chua ve ark. (1987), tunnel diyot karakteristiğini, $f(x) = 17.76x - 103.79x^2 + 229.62x^3 - 226.31x^4 + 83.72x^5$ fonksiyonunu kullanarak tanımlamışlardır. Bu nedenle tunnel diyot üzerinden geçen akım için bu fonksiyon kullanılabilir. Ayrıca devrenin parametreleri, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $R = 1.5 \text{ k}\Omega$ ve $u_1 = 1.2 \text{ V}$ olarak seçilerek devrenin faz portresi çizilip çözüm eğrilerinin denge noktasına göre davranışları ve tunnel diyot karakteristiği incelenebilir (Şekil 3.2).

Seçilen parametre değerleri ve $f(x)$ fonksiyonu kullanılarak sistemin denge noktaları, $(0.063, 0.758)$, $(0.285, 0.61)$ ve $(0.0884, 0.21)$ olarak bulunur. Sistemin faz düzlem portreleri incelendiğinde ise $(0.285, 0.61)$ denge noktasının kararsız olduğu, çünkü iki özel yörünge dışında sistem yörüngelerinin tamamının $(0.063, 0.758)$ ve $(0.0884, 0.21)$ noktalarına yaklaştığı görülecektir (Şekil 3.2). Bu nedenle tunnel diyot devresi için sadece $(0.063, 0.758)$ ve $(0.0884, 0.21)$ denge noktaları asimptotik olarak

kararlıdır. Çünkü sistem yörüngeleri $t \rightarrow \infty$ iken bu iki denge noktasına yaklaşır (Chua ve ark., 1987).

Dinamik sistemlerde, bu tür iki kararlı denge noktasına sahip olan sistemler “bistable” olarak adlandırılır (Khalil, 2002). Aslında bu durum, sistemin iki adet yerel minimum enerjiye sahip denge noktası olduğu anlamına gelir ve bu iki nokta arasında enerjinin maksimum olduğu bir kararsız denge noktası olduğu fikrini destekler. Bistable sistemler, özellikle elektronik cihazlarda (bilgisayarlar) yaygın bir kullanım alanına sahip olan flip-flop devreleridir. Bu devrelerde iki adet kararlı denge noktası “0” ve “1” olmak üzere iki bit veriyi ifade eder. Denge noktalarından birinin “0” olduğu durumda diğeri “1” olur ve birinden diğere geçiş kararsız denge noktası üzerinden olur (Chua ve ark., 1987). Bu nedenle kararsız denge noktasından iki özel sistem yörüngesi geçer.



Şekil 3.2. Faz düzlem portresi, denge noktaları ve $v_R - i_R$ karakteristiği.

$u_1(t) \neq 0$ iken sistemin üç adet denge noktasının olduğu matematiksel olarak ispat edildi. Ancak denge noktalarına göre kararlılık analizi sistemi besleyen enerji

kaynağı kesilerek yapıldığından, $u_1 = 0$ iken sistemin tek denge noktası orijin $(0,0)$ olacaktır.

$u_1 = 0$ durumunda denge noktası belirlenen sistemin yörüngeleri boyunca enerji değişimi ve Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılık durumu tanımlanan Lyapunov fonksiyonu ile incelenir. Sisteme ait enerji veya Lyapunov fonksiyonu eş. 3.3'teki gibi yazılabilir. Bununla birlikte, $V_1(t)$ enerji fonksiyonu \mathfrak{R}^2 'de PDF'dir.

$$V_1(t) = V_1(x, y) = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2}Ly^2 \quad (3.3)$$

$$V_1(x, y) \geq \frac{1}{2}Ly^2 \quad (3.4)$$

Sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi, yani sistemin enerji değişimi ise aşağıda görüldüğü üzere negatif yarı-tanımlı ($V_1'(t) \leq 0$) olmaktadır.

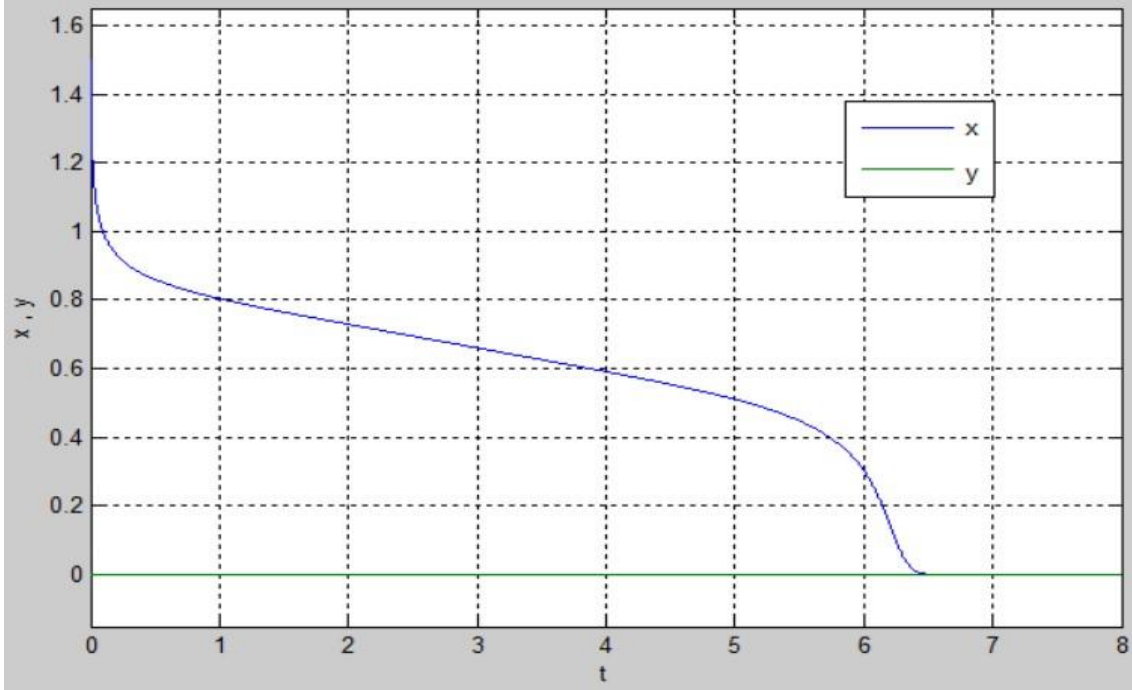
$$V_1'(t) = -f(x)x - Ry^2$$

$$V_1'(t) \leq -f(x)x \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2.$$

Dolayısıyla, $t \rightarrow \infty$ gittiğinde sistemin çözümü veya hareketi $(x(t), y(t)) \rightarrow (0,0)$ olur (Şekil 3.3). Buna ek olarak, $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ olduğunda $V_1(x, y) \rightarrow \infty$. Bu nedenle, "LaSalle Değişmezlik İlkesi"ne (Teorem 2.5) göre nonlineer tunnel diyot devresinin orijini $(0,0)$ izole edilmiş (invariant) denge noktası olduğundan GAS'dir.

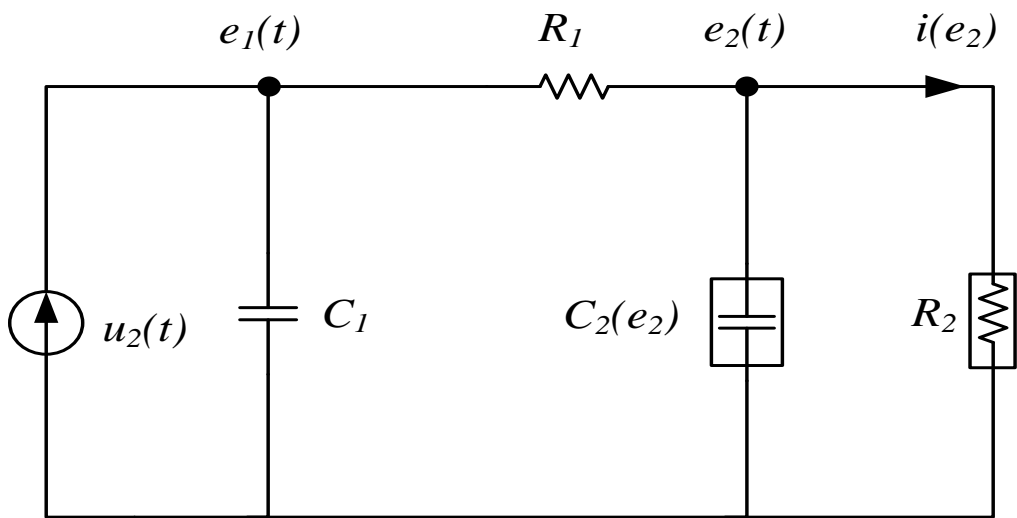
Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılığı incelenen sistemin pasifliği, daha sonra tanımlanacak olan bir teorem ile gösterilecektir. Ancak Memoryless fonksiyonları tanımlanırken kullanılan pasif nonlineer direnç karakteristiği (Şekil 2.15b) dikkatle incelendiğinde, $u - y$ eğri grafiğinin tunnel diyot karakteristiğini yansıttığı fark

edilecektir (Şekil 3.2). Bu nedenle, nonlinear tunnel diyot devresinin geometrik olarak pasif olacağı söylenebilir.



Şekil 3.3. Tunnel diyot devresi durum değişkenlerinin zamana göre davranışı.

3.2. Nonlinear RC Devresi



Şekil 3.4. Nonlinear RC devresi (Chua ve ark., 1987).

Teorem 3.2: Nonlinear Devrenin durum değişkenleri $e_1 = y$ ile $e_2 = x$ ve nonlinear direnç üzerinden geçen akım $i(e_2) = f(x)$ olarak verilsin (Şekil 3.4). Bu devre, $u_3(t) = 0$ durumunda teorem 3.1'in koşullarını sağlıyorsa orijini GAS'dir.

İspat: Devrenin durum değişkenlerinin $e_1 = y$ ve $e_2 = x$ olduğu farz edilirse durum denklemleri, Kirchhoff akım kanunları yardımıyla eş. 3.5'deki gibi elde edilir.

$$x' = \frac{1}{C_2(x)} \left[\frac{(y-x)}{R_1} - f(x) \right], y' = \frac{1}{C_1} \left[u_3(t) - \frac{(y-x)}{R_1} \right]. \quad (3.5)$$

$u_2 = 0$ iken $x = y$ ve $f(x) = 0$ olduğundan orijin $(0,0)$, sistemin tek denge noktasıdır. Denge noktası belirledikten sonra sisteme ait Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak sistemin kararlılığı incelenebilir. Sistemin toplam enerji (Lyapunov) fonksiyonu eş. 3.6'daki tanımlanabilir ve bu fonksiyon, \mathfrak{R}^2 'de PDF'dir.

$$V_2(t) = V_2(x, y) = \frac{1}{2} C_1 y^2 + \frac{1}{2} C_2(x) x^2 \quad (3.6)$$

$$V_2(t) \geq \frac{1}{2} C_2(x) x^2 \quad (3.7)$$

Sistem yörüngeleri boyunca enerji değişimi hesaplanırken $C_2(x)$ zamanla değişmez olduğundan $C_2'(x) = 0$ alınmalıdır. Bu durumda Lyapunov fonksiyonunun türevi,

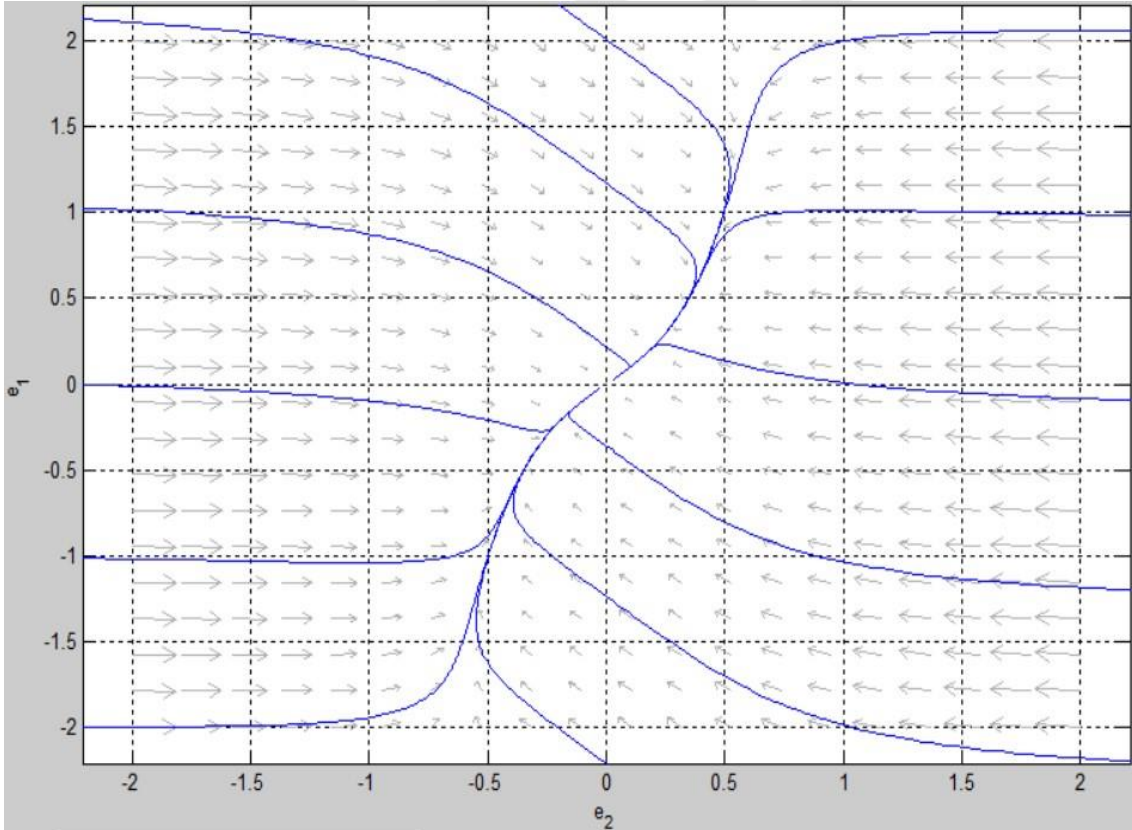
$$V_2'(t) = C_1 y y' + \frac{1}{2} \left[C_2'(x) x' x^2 + 2C_2(x) x x' \right]$$

$$V_2'(t) = -\frac{1}{R_1} (y-x)^2 - f(x) x$$

$$V_2'(t) \leq -f(x) x \leq 0, \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2$$

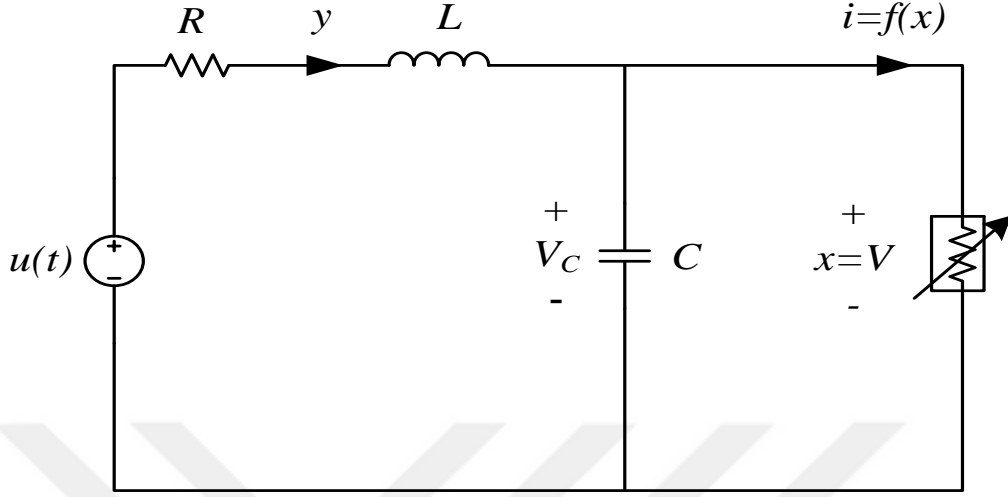
yapılan işlemler sonucunda negatif yarı-tanımlı ($V_2'(t) \leq 0$) olacaktır. “LaSalle Değişmezlik İlkesi”ne (Teorem 2.5) göre sistemin orijini $(0,0)$ izole edilmiş (invariant) denge noktasıdır ve $V_2'(t) \leq 0$ eşitsizliği, sistem enerjisinin zamanla azaldığını ifade etmektedir. Dolayısıyla, $t \rightarrow \infty$ iken sistemin çözümü veya hareketi $(x(t), y(t)) \rightarrow (0,0)$ ve $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ olduğundaysa $V_2(x, y) \rightarrow \infty$ olur. Bu nedenle, nonlinear RC devresinin orijini $(0,0)$ GAS'dir.

Devrenin parametreleri $f(x) = 5x^3$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ ve $C_1 = C_2 = 1 F$ olarak seçilip Matlab “pplane” yardımıyla faz düzlem portresini çizilebilir (Şekil 3.5). Faz düzlem portresinden de görüleceği üzere sistemin çözüm eğrileri denge noktası olan orijine yönelmektedir.



Şekil 3.5. Nonlinear RC devresi çözüm eğrilerinin faz düzlem portresi.

3.3. Metal Oksit Parafudr Devresi



Şekil 3.6. Metal oksit parafudr devresi.

Nonlinear metal oksit direnç barındıran RLC devresinin durum değişkenleri x ile y ve nonlinear direnç üzerinden geçen akım $i = f(x)$ olarak verilsin (Şekil 3.6). Bu durumda devreye ait durum denklemleri, Kirchhoff akım kanunları yardımıyla eş. 3.8'deki gibi elde edilir.

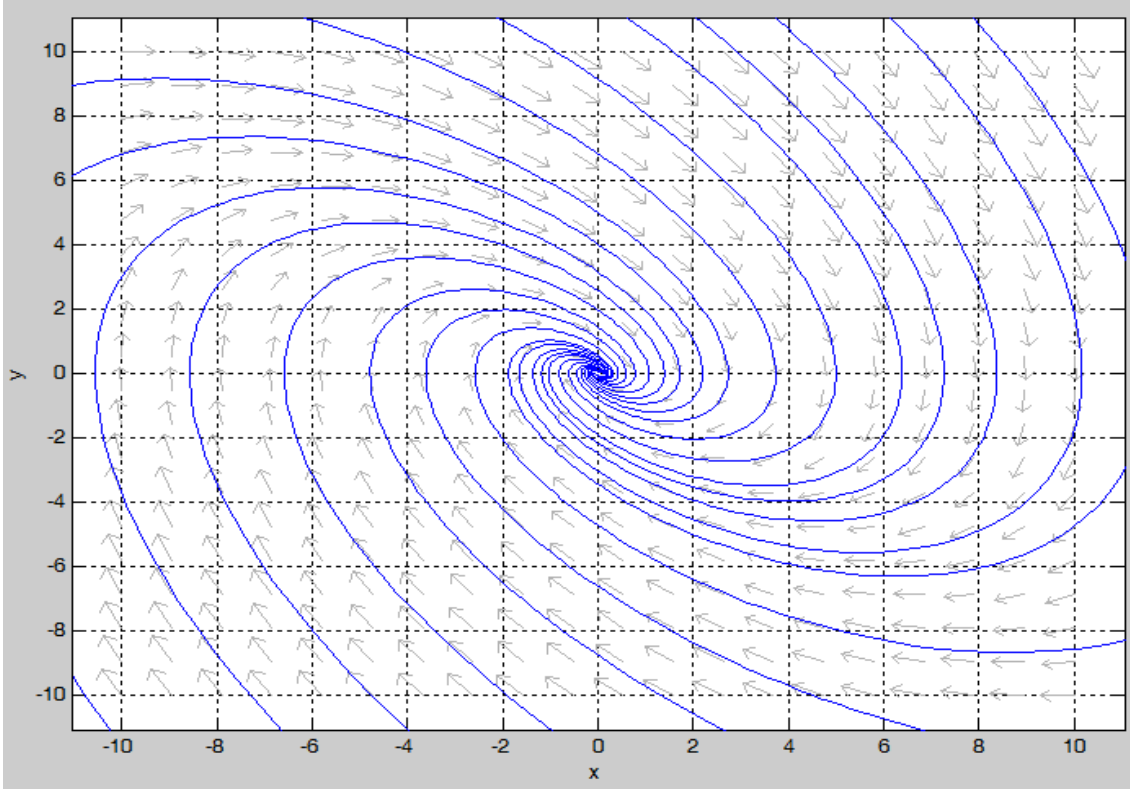
$$x' = \frac{1}{C} [y - f(x)], \quad y' = \frac{1}{L} [u(t) - Ry - x]. \quad (3.8)$$

Bu devrenin durum denklemleri, nonlinear tunnel diyot devresinin durum denklemleri (3.2) ile örtüşmektedir. Bu nedenle, tunnel diyot devresi için tanımlanan kararlılık koşulları (Teorem 3.1) ve Lyapunov fonksiyonu (3.3) bu sistem için de doğru sonuçları verecektir ve sistemin (3.8) orijini GAS olacaktır. Benzer şekilde, bu sistem için Lyapunov fonksiyonun sınırları da, devreyi besleyen kaynağın ve devre elemanlarının sayısal değeri dışında tunnel diyot devresi ile aynı olacaktır. Bu yüzden bu uygulama için tekrar kararlılık ve pasiflik analizinin yapılmasına gerek yoktur. Çünkü tunnel diyot için tanımlanan teorem (3.1) ve yapılan kararlılık analizi bu devre için de geçerli olacaktır.

Parafudrlar, yıldırım veya sistemde meydana gelen gerilim darbeleri gibi ani yüksek gerilimlere karşı enerji tesislerini veya hatlarını koruyan, yapısal olarak yalıtkan ve devreye paralel bağlanan elemanlardır.

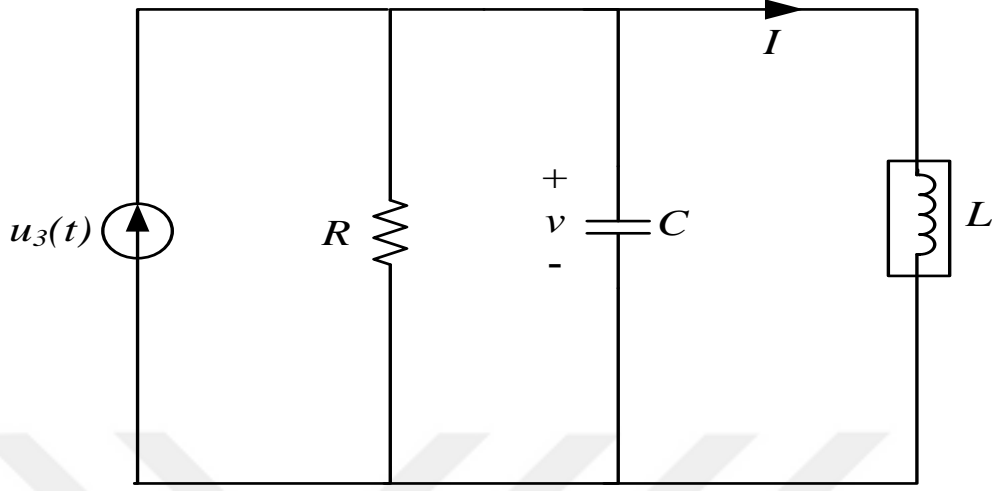
Metal oksit parafudrlar ise metal oksit malzemelerden üretilen nonlinear direnç elemanlarını kullanan parafudr türleridir ve çok daha yüksek gerilimlere dayanabilirler. Üstelik normal çalışma gerilimlerinde yüksek empedanslar, aşırı gerilim koşullarında ise düşük empedanslar olarak işlev görürler. Bu nedenle yüksek değerli akım altında iletken duruma geçerek devreyi korurlar (Christodoulou ve ark., 2008).

K_p bir sabit ve $\alpha > 1$ nonlinearlık katsayısı olmak üzere metal oksit direncin karakteristiği, $f(x) = K_p x^\alpha$ fonksiyonu kullanılarak tanımlanmıştır (Christodoulou ve ark., 2008). Devrenin parametreleri, $K_p = 8 \times 10^{-25}$, $\alpha = 9$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ ve $R = 1 \Omega$ olmak üzere sistemin çözüm eğrileri, faz düzleminde denge noktası olan orijine yönelmektedir (Şekil 3.7)



Şekil 3.7. Metal oksit parafudr devresi çözüm eğrilerinin faz düzlem portresi.

3.4. Josephson Junction Devresi



Şekil 3.8. Nonlineer Josephson junction devresi (Chua ve ark., 1987).

Teorem 3.3: $I = I_0 \sin(p\phi)$ ile tanımlanan nonlineer indüktör barındıran devrenin durum değişkenleri, ϕ ve v olarak verilsin (Şekil 3.8). $u_3(t)$ devreyi besleyen kaynak, ϕ manyetik akı, p ve I_0 ise pozitif sabit değerlerdir (Chua ve ark., 1987).

$u_3(t) = 0$ durumunda $(\phi, v) = (\phi, 0) \in \mathfrak{R}^2$ noktaları, sistemin denge noktalarıdır ve $-\pi < \phi < \pi$ aralığında, bu sistem eş. 3.9'daki koşulu yerine getiriyorsa orijini $(0, 0)$ LAS'dir.

$$p\phi = n\pi, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

İspat: Devredeki direnç, kapasitör ve indüktör paralel bağlı olduğundan her üç devre elemanının da voltajı bir birine eşit olmalıdır. Bu nedenle $v = pLI_0 \cos(p\phi)\phi'$ olacaktır.

Ayrıca Kirchhoff akım kanunu uygulanarak, verilen devreden $u_3(t) = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} + I$ şeklinde bir eşitlik elde edilir. Bu durumda nonlineer devrenin durum değişkenleri ϕ ve v olmak üzere, devreye ait durum denklemleri eş. 3.10'daki gibi elde edilir.

$$\phi' = \frac{v}{pLI_0 \cos(p\phi)}, \quad v' = \frac{1}{C} \left[u_3(t) - \frac{pLI_0 \cos(p\phi) \phi'}{R} - I_0 \sin(p\phi) \right]. \quad (3.10)$$

$u_3(t) = 0$ durumunda $n \in Z$ için $(n\pi, 0) \in \mathfrak{R}^2$ noktaları, sistemin (3.10) denge noktalarıdır. Ancak bir sistem hem kararsız hem de kararlı denge noktalarına sahip olabilir. Denge noktası belirledikten sonra Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak Lyapunov'un ikinci metoduna göre sistemin kararlılığı incelenir. Sistemin Lyapunov fonksiyonu, denge noktası civarında eş. 3.11'deki gibi tanımlanabilir. Bununla birlikte, $-\pi < \phi < \pi$ aralığında $V_3(t)$ fonksiyonu, yerel olarak PDF'dir.

$$V_3(t) = V_3(\phi, v) = \frac{1}{2} L (I_0 \sin(p\phi))^2 + \frac{1}{2} C v^2 \quad (3.11)$$

$$V_3(t) \geq \frac{1}{2} C v^2 \quad (3.12)$$

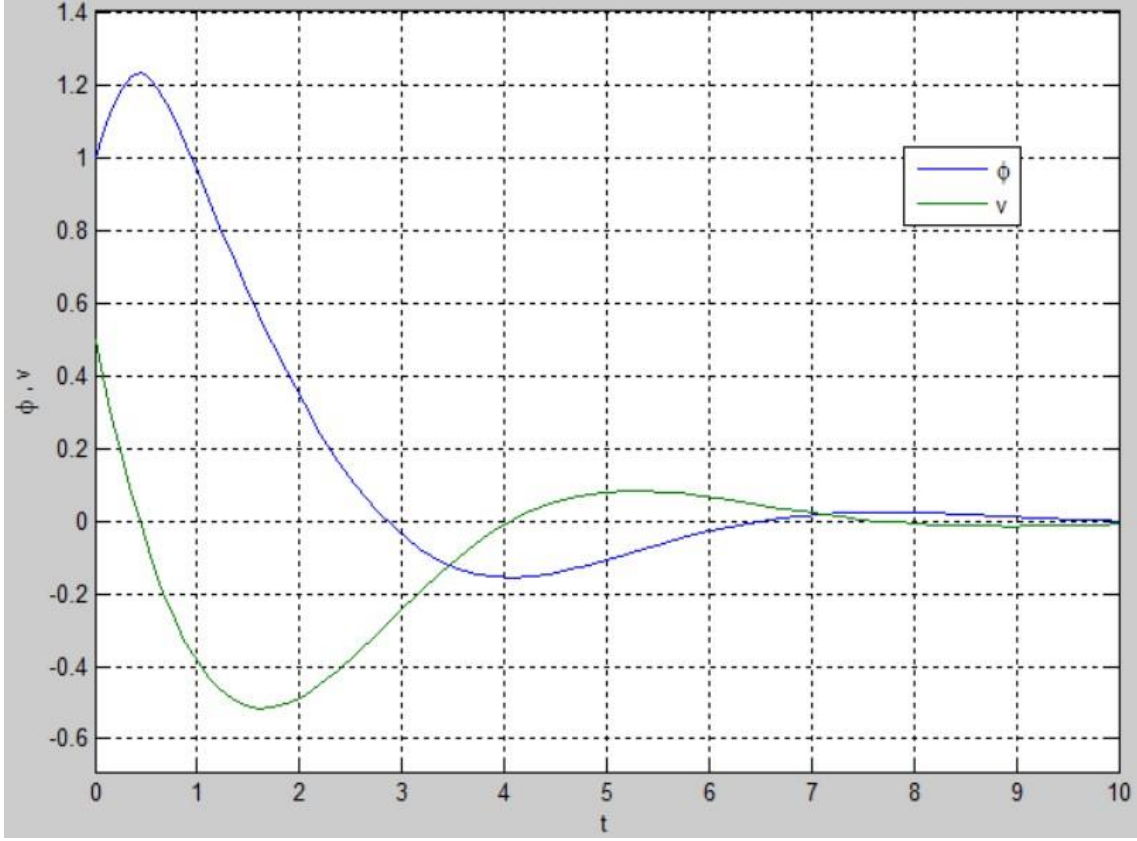
Sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi, yani sistemin enerji değişimi ise

$$V_3'(t) = -\frac{1}{R} v^2 \leq 0, \quad \forall (\phi, v) \in \mathfrak{R}^2$$

negatif yarı-tanımlı olacaktır.

$\phi \in (-\pi, \pi)$ olmak üzere, $V_3'(\phi, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ ve $v = 0 \Rightarrow v' = 0$ olmaktadır. Ayrıca $v' = 0$ iken $\phi = 0$ olacağı ise, sistemin durum denklemlerinden elde edilir. $S = \{(\phi, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathfrak{R} : V_3'(\phi, v) = 0\}$ kümesi, $(\phi, v) = (0, 0)$ yörüngesi dışında sistemin hiçbir yörüngesini içermez. Bu nedenle, "LaSalle Değişmezlik İlkesi"ne göre (Teorem 2.4) sistemin orijini, $-\pi < \phi < \pi$ aralığında izole edilmiş (invariant) denge noktası olduğundan (yerel olarak) AS/LAS'dir.

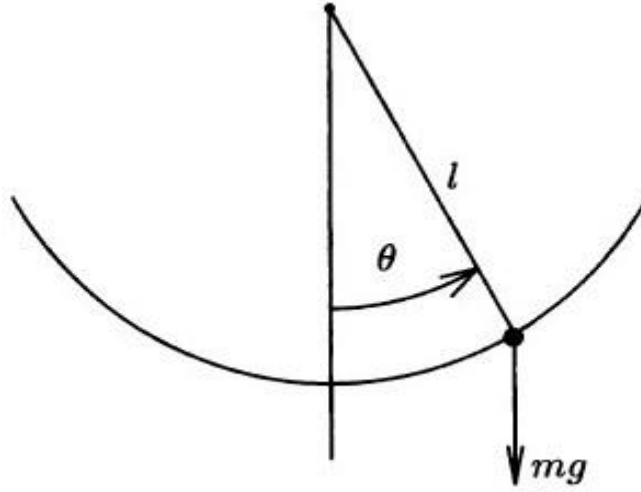
Devrenin parametreleri $R=1 \Omega$, $C=1 \text{ F}$, $L=1 \text{ H}$, $p=1$ ve $I_0=1$ olmak üzere, Matlab “odesolve” programı kullanılarak $(1,0.5)$ başlangıç noktasına ait durum değişkenlerinin zamanla orijine vardığı görülecektir (Şekil 3.9).



Şekil 3.9. Josephson junction devresi durum değişkenlerinin zamana göre davranışı.

3.5. Nonlineer Sarkaç

Nonlineer sarkaç, l uzunluğunda kütsüz bir ipin veya çubuğun ucuna bağlı, ileri geri sallanan/hareket eden m kütleli bir cisimden oluşmaktadır (Şekil 3.10). İpin veya çubuğun dikey eksenle yaptığı açı her hangi bir zamanda θ , yer çekimi g ve θ açısı yönünde pivot (sarkacın döndüğü veya salındığı merkezi nokta) noktasına uygulanan tork kuvveti $T(t)$ olarak verilsin (Khalil, 2015). Ayrıca sarkacın hareketini yavaşlatan bir sürtünme kuvveti de var olsun.



Şekil 3.10. Nonlinear sarkaç modeli (Khalil, 2002; 2015).

İkinci dereceden nonlinear denklemlere ait model denklemden (2.13) ve Newton'un ikinci hareket kanunundan faydalanılarak nonlinear sarkacın hareket denklemi eş. 3.13'teki modellenenir.

$$ml^2\theta'' + f(\theta, \theta')\theta' + mgl \sin \theta = T(t) \quad (3.13)$$

Ek olarak, Nonlinear Josephson Junction devresinin durum denklemleri (3.10) ile nonlinear sarkacın eş. 3.15'teki durum denklemleri matematiksel olarak benzerlik göstermektedir (Chua ve ark., 1987). Katsayıların veya durum değişkenlerinin değiştirilmesi ile her iki sistem bir birine kolaylıkla modellenenir. Bu durum, mekanik ve elektrik sistemlere ait matematiksel denklemler arasındaki benzerliğe işaret eder.

Teorem 3.4: Nonlinear sarkacın durum değişkenleri $(x, y) = (\theta, \theta')$ olsun. $m > 0$, $l > 0$ ve $g > 0$ olmak üzere, $T(t) = 0$ iken $(x, y) = (x, 0) \in \mathfrak{R}^2$ noktaları sistemin denge noktalarıdır. $-\pi < x < \pi$ aralığında $x = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) iken sistem eş. 3.14'teki koşulları yerine getiriyorsa orijini $(0, 0)$ LAS'dir.

$$f(0, 0) = 0, (x, y) \neq (0, 0) \text{ iken } f(x, y)y^2 > 0. \quad (3.14)$$

İspat: Nonlineer sistemin durum değişkenleri $(x, y) = (\theta, \theta')$ olarak belirlenip durum denklemleri eş. 3.15'teki gibi ifade edilebilir.

$$x' = y, y' = \frac{1}{ml^2}(T - f(x, y)y - mgl \sin x). \quad (3.15)$$

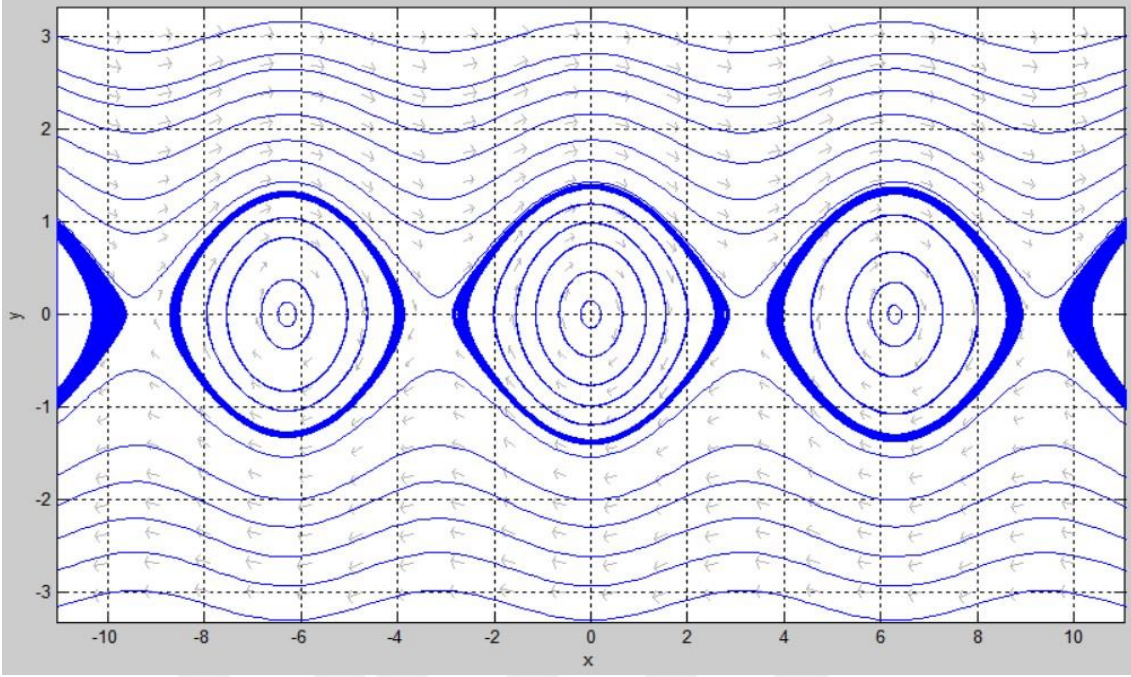
$T(t) = 0$ durumunda $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için $(n\pi, 0)$ noktaları, sistemin (3.15) denge noktalarıdır. Ancak fiziksel olarak bu sistemin $(\pi, 0)$ ve $(0, 0)$ olmak üzere iki adet denge noktası olacaktır ve bu iki denge noktası arasındaki fark, karşılık özellikleridir (Khalil, 2015).

Sarkacın $[0, t]$ zaman aralığındaki hızı, yay üzerinde aldığı yolun $(l\theta)$ türevidir ve yüksekliği ise $h = l(1 - \cos \theta)$ olacaktır. Sürtünmesiz ($f(x, y) = 0$) ortamda ve $T(t) = 0$ iken toplam kinetik (E_k) ve potansiyel (E_p) enerjinin sabit olduğunu belirten enerjinin korunumu yasası ile sarkacın toplam kinetik enerjisi eş. 3.16'daki ve toplam potansiyel enerjisi eş. 3.17'deki gibi yazılabilir (Edwards ve Penny, 2009; 2011).

$$E_k = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (3.16)$$

$$E_p = mgl(1 - \cos x) \quad (3.17)$$

Faz portresi verilen sistemde sürtünmeden kaynaklı enerji kaybı olmadığından sistem konservatiftir (Şekil 3.11). Ayrıca kinetik ile potansiyel enerjinin bir birine dönüşümü ile sarkaç sonsuza kadar salınım yapmaya devam eder (Khalil, 2002; 2015). Fakat sürtünmesiz olan bu sistem çok da gerçekçi değildir. Çünkü gerçek hayatta sistemde sürtünmeden dolayı enerji kaybı olacaktır.



Şekil 3.11. Sürtünmesiz nonlinear sarkaç faz düzlem portresi.

Denge noktaları belirledikten sonra sisteme ait Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak sistemin kararlılığı incelenebilir. Sistem zorlanmamış olduğundan (dış kuvvet yok) Lyapunov fonksiyonu, sistemin toplam enerjisi kullanılarak denge noktası civarında eş. 3.18'deki gibi inşa edilebilir. Bununla birlikte, $-\pi < x < \pi$ aralığında $V_4(t)$ fonksiyonu, yerel olarak PDF'dir.

$$V_4(t) = V_4(x, y) = \frac{1}{2}ml^2y^2 + mgl(1 - \cos x) \quad (3.18)$$

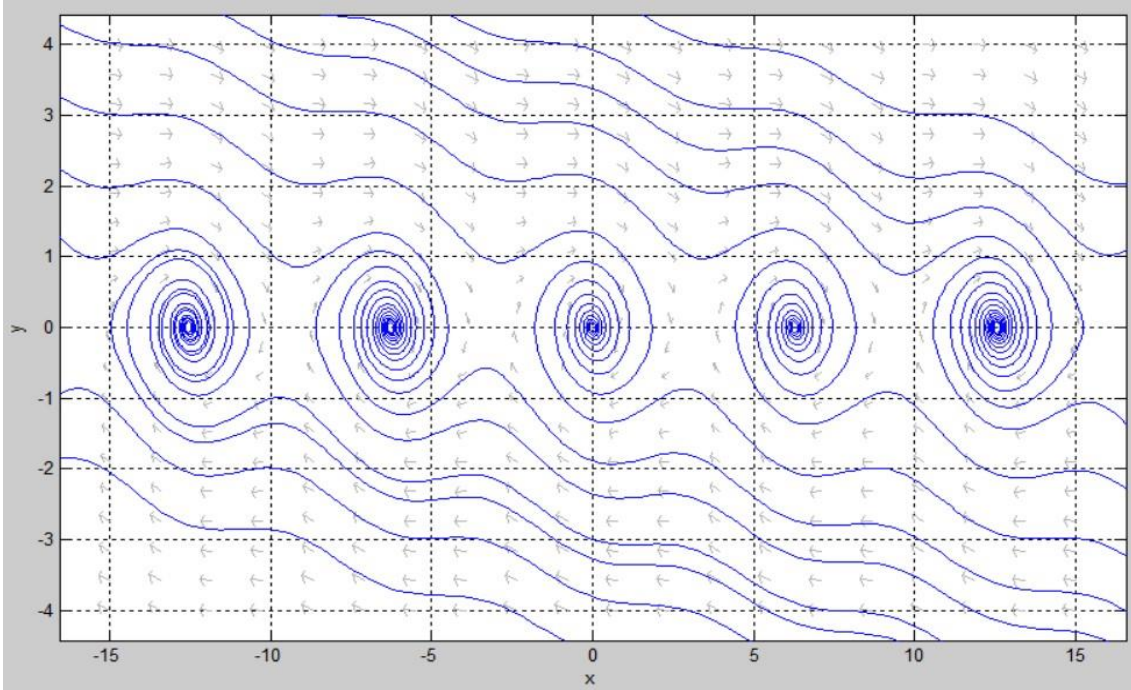
$$V_4(t) \geq \frac{1}{2}ml^2y^2 \quad (3.19)$$

Sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$V_4'(t) = -f(x, y)y^2 \leq 0, \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2.$$

Sisteme her hangi bir sürtünme kuvvetinin ($f(x, y) = 0$) etki etmediği düşünülürse $V_4'(t) = 0$ olacaktır. Üstelik $V_4'(t) \equiv 0$ olduğundan orijinin, $-\pi < x < \pi$ aralığında kararlı olacağı sonucuna varılabilir (Khalil, 2002).

Sürtünmeli ortamda ($f(x, y) > 0$) ise nonlinear sarkaçta hareket süresince enerji kaybı olmaktadır ve sistem yörüngeleri boyunca $V_4'(t) \leq 0$ olacaktır. Ancak sistemin faz portreleri incelendiğinde yörüngelerin AS olarak denge noktasına yöneldiği açıkça görülmektedir. (Şekil 3.12). Buna rağmen $V_4'(t)$ negatif tanımlı değildir. Bu durumda, sürtünme var iken sistem Lyapunov'un ikinci metoduna göre AS olma şartını yerine getirmemektedir ve tanımlanan Lyapunov fonksiyonu bu sistem için doğru sonuçları vermemektedir. Fakat doğru Lyapunov fonksiyonunun bulunamaması, orijinin kararsız olduğu anlamına gelmez. Çünkü x değerinden bağımsız olarak sadece $y = 0$ değer için $V_4'(x, y) = 0$ ve diğer tüm değerler için negatif olmaktadır (Khalil, 2002).



Şekil 3.12. Sürtünmeli nonlinear sarkaç faz düzlem portresi.

$x \in (-\pi, \pi)$ olmak üzere, $V_4'(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$ ve $y = 0 \Rightarrow y' = 0$ olmaktadır. $y' = 0$ iken ise $x = 0$ olduğu, sistemin durum denklemlerinden elde edilir. $S = \{(x, y) \in (-\pi, \pi) \times \mathfrak{R} : V_4'(x, y) = 0\}$ kümesi $(x, y) = (0, 0)$ yörüngesi dışında, sistemin hiçbir yörüngesini içermez. Yani $-\pi < x < \pi$ aralığında, sadece $(x, y) = (0, 0)$ özel şartında sistemin denge noktası orijin olmaktadır. Bu nedenle, “LaSalle Değişmezlik İlkesi”ne göre (Teorem 2.4) sistemin orijini (yerel olarak) AS/LAS’dır.

$T(t)$ giriş vektörü ve y çıkış vektörü olmak üzere, kararlılığı incelenen sistemin pasifliği, Lyapunov fonksiyonu aynı zamanda depolama fonksiyonu olarak düşünülerek incelenebilir. $V_4(x, y)$, \mathfrak{R}^2 uzayının tamamında bir fonksiyon olarak düşünüldüğünde orijin dışındaki noktalarda da sıfır olduğundan pozitif yarı-tanımlıdır (Khalil, 2002; 2015). O halde,

$$Ty - V_4'(x, y) = Ty - \left[y(T - f(x, y)) - mgl \sin x + (mgl \sin x)y \right]$$

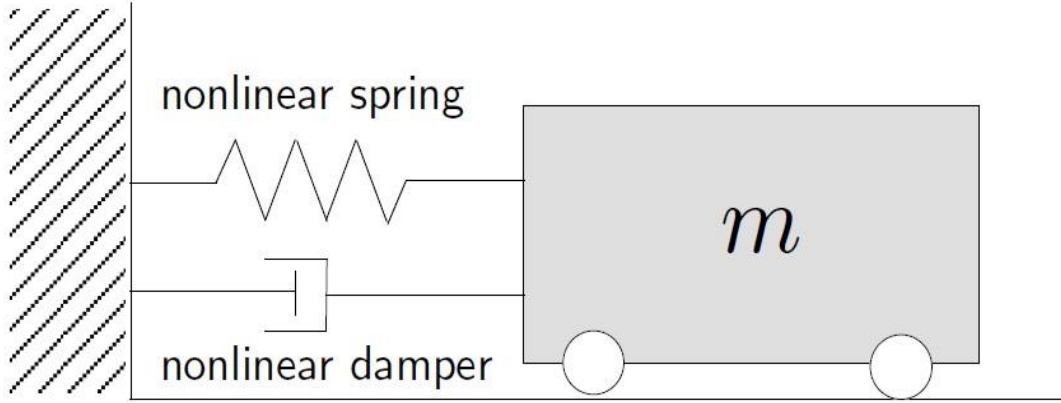
$$Ty - V_4'(x, y) = f(x, y)y^2 \geq 0 \text{ olacaktır.}$$

Yapılan işlemler sonucunda depolama fonksiyonunun pasiflik tanımlarına (çizelge 5) göre $f(x, y) = 0$ olduğunda sistem *pasif* ve $f(x, y) > 0$ olduğunda ise sistem *çıkış kesinlikle pasif* olmaktadır. Ayrıca $T = 0$ durumunda, $y = 0$ iken $x = 0$ olduğundan bu sistem *zero-state observable* koşulunu da sağlar. Bu durumda, sürtünmeli ortamda nonlinear sarkaç zero-state observable ve çıkış kesinlikle pasif olma koşullarını sağladığından orijini (yerel olarak) AS’dır (Tanım 2.17).

3.5. Kütle-Yay-Amortisör Sistemi

Önceki bölümlerde sürtünmesiz ortamda sadece nonlinear yaya bağlı bir cismin kararlılık durumu ve matematiksel olarak elektrik devre sistemlerine modellenebileceği incelenmişti (Örnek 2.2). Bu uygulamada ise her hangi bir dış kuvvet olmaksızın

($u = 0$), nonlinear bir yaya ve x' hızıyla orantılı bir direnç yaratan amortisöre bağlı m kütleli bir cismin kararlılığı incelenecektir (Şekil 3.13).



Şekil 3.13. Nonlinear kütle-yay-amortisör sistemi.

k yay sabiti, μ amortisörün yarattığı direnç sabiti ve cismin her hangi bir t anındaki konumu $x(t)$ olmak üzere, zorlanmış kütle-yay-amortisör sisteminin matematiksel modeli $F(t) = mx'' + \mu x' + kx$ şeklinde ifade edilir. Bu modelden ve nonlinear yayın matematiksel denkleminde (örnek 2.2) yararlanılarak kütleli hareket denklemini $mx'' = -\mu x' - kx + \beta x^3$ olarak düşünülebilir (Edwards ve Penny, 2009; 2011). Bu denklemlerde yer alan m , k , μ , ve β sabit değerlerdir.

Teorem 3.4: $x'(t) = y(t)$ ve nonlinear sistemin durum değişkenleri ise x ve y olarak verilsin. $m > 0$, $k > 0$, $\mu > 0$ ve $\beta > 0$ iken sistemin orijini GAS'dir.

İspat: $x'(t) = y(t)$ (cismin hızı konumun bir fonksiyonu) olmak üzere sistemin durum denklemleri, eş. 3.20'de yer alan eşdeğer nonlinear sistem olarak ifade edilir.

$$x' = y, y' = \frac{1}{m}(-kx - \mu y + \beta x^3). \quad (3.20)$$

Sistemin (3.20) matematiksel çözümü yapıldığında, sisteme ait tek denge noktasının orijin $(0,0)$ olduğu açıkça görülecektir.

Yaya bağlı ve hızı y olan cismin kinetik enerjisi (E_k) ve yayın potansiyel enerjisi (E_p) bu sistemin toplam enerjisidir (Edwards ve Penny, 2009; 2011). Dikkat edilirse, kütlelin hareketi nonlinear terimdeki β sabitine göre değişkenlik gösterecektir. Ancak m , k , μ ve β değerleri açık bir şekilde bilinmeden de depolanan enerjinin değişim oranından sistemin kararlı olduğu tespit edilebilir. Kütle, sıfır olmayan başlangıç koşullarından salındığında enerji, yay ile kütle arasında aktarılır (çünkü yay kuvveti kütlelin yer değiştirmesine karşıdır). Ancak depolanan toplam enerji, sönümlenme kuvvetinden (amortisör) dolayı zaman içinde monotonik olarak azalır.

$$E_k = \frac{1}{2}my^2 \quad (3.21)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 \quad (3.22)$$

Toplam kinetik (3.21) ve potansiyel (3.22) enerji bulunduktan sonra, $\beta < 0$ olmak üzere sistem için uygun Lyapunov fonksiyonu, sistemin toplam enerjisi kullanılarak denge noktası yakınında eş. 3.23'teki gibi inşa edebilir. Bununla birlikte, $V_5(t)$ fonksiyonu, \mathfrak{R}^2 'de PDF'dir.

$$V_5(t) = V_5(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 \quad (3.23)$$

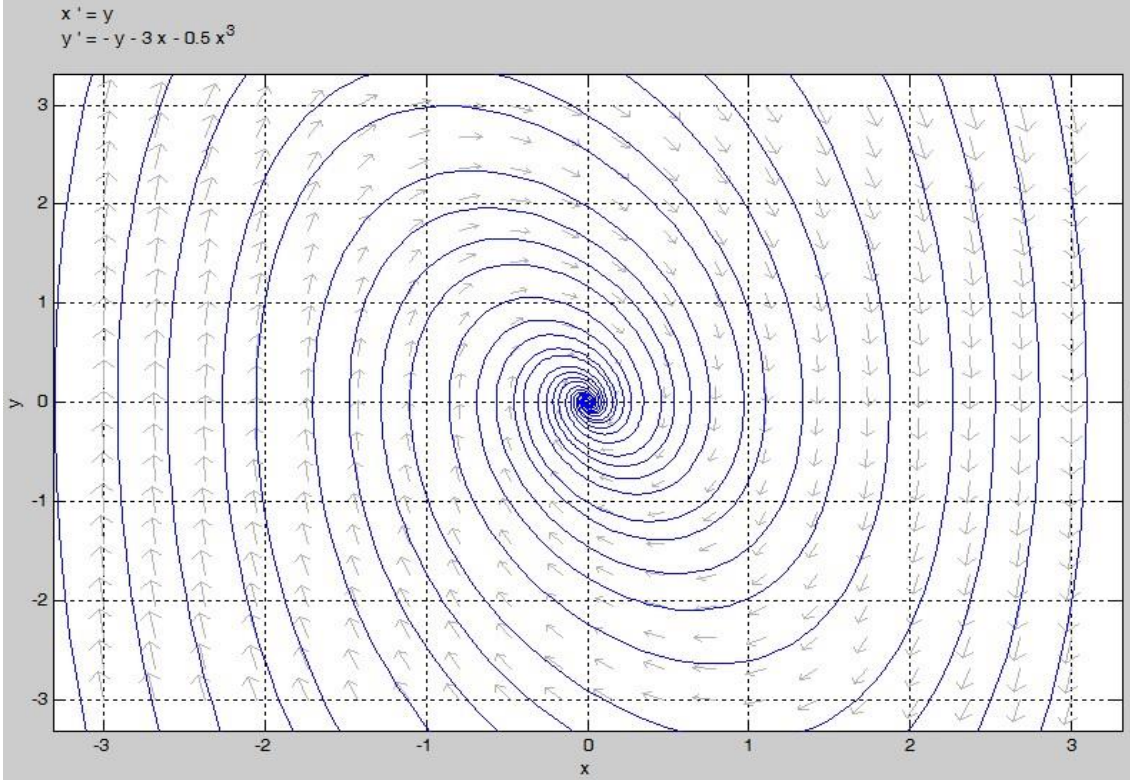
$$V_5(t) \geq \frac{1}{2}my^2 \quad (3.24)$$

Sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi, yani sistemin enerji değişimi ise aşağıda belirtildiği üzere negatif yar-tanımlı olacaktır.

$$V_5'(t) = -\mu y^2 \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

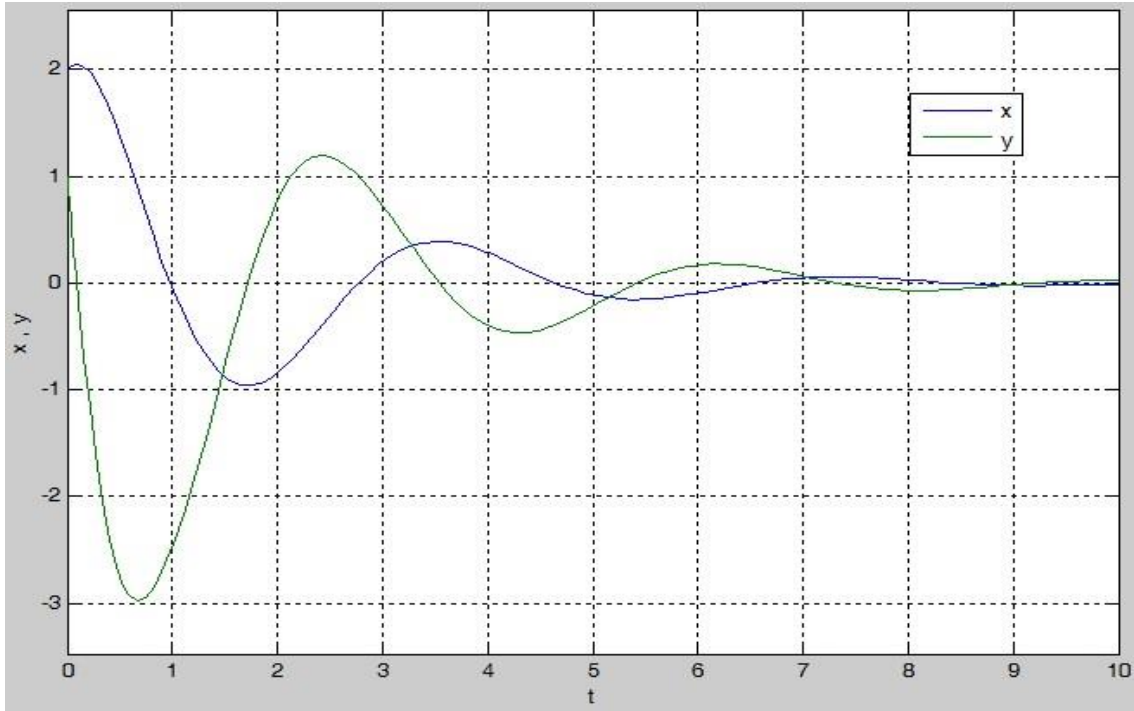
Ancak faz portrelerinden de görüleceği üzere çözüm eğrileri, $\beta < 0$ olduğunda orijine asimptotik olarak yakınsarlar (Şekil 3.14). $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V_5(x) \rightarrow \infty$ ve $V_5(\infty) = 0$ olmaktadır. Bu nedenle, tüm çözümler $t \rightarrow \infty$ iken sınırlandırılmıştır ve sistemin orijini $(0,0)$, tek değişmez alt kümedir. “LaSalle Değişmezlik İlkesi” şartları (Teorem 2.5) incelendiğinde, sistemin orijinin GAS olduğu kolaylıkla söylenebilir (Şekil 3.14). Ek olarak, μ değeri artırıldığında çözümler daha hızlı bir şekilde denge noktasına gidecektir. Ayrıca $y=0$ iken $x=0$ olduğundan sistem, *zero-state observable* olma koşullarını da sağlar. Aynı zamanda, sistemin sonsuzda kayıpsız olacaktır.

Sistem (3.20) parametreleri $m=1$, $\mu=1$, $k=3$ ve $\beta=-0.5$ olarak seçilsin. Matlab “ppplane” yardımıyla çizilen faz düzlem portresinden de görüleceği üzere çözüm eğrileri, denge noktası olan orijine yönelmektedir (Şekil 3.14).



Şekil 3.14. Çözüm eğrilerinin faz düzlem portresi.

Ayrıca aynı parametre değerleri ve (2,1) başlangıç değerleri için Matlab “odesolve” kullanılarak çizilen durum değişkenlerinin de zamanla orijine (0,0) vardığı görülebilir (Şekil 3.15).



Şekil 3.15. Durum değişkenlerinin zamana göre davranışı.

Nonlinear kütle-yay-amortisör sisteminin $mx'' = -\mu x' - kx + \beta x^3$ olan hareket denklemi, daha genel bir formda yazılarak seri bağlı lineer indüktör, nonlinear kapasitör ve nonlinear dirençten oluşan RLC elektrik devresine modellenebilir.

Durum değişkenleri $(x, y) = (z, z')$ olmak üzere bu sistem, $z'' + f(z') + g(z) = 0$ ikinci dereceden nonlinear diferansiyel denklemi ile ifade edilir (Haddad ve Chellaboina, 2008; Sastry, 1999). $f(z')$ nonlinear direnci ve $g(z)$ nonlinear kapasitörü temsil eden sürekli birer fonksiyon olarak verilsin. $z'' + f(z') + g(z)$ nonlinear denklemi,

$$\begin{cases} f(0) = 0, \forall z' \neq 0 \text{ için } z'f(z') > 0 \\ g(0) = 0, \forall z \neq 0 \text{ için } zg(z) > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

koşulu (3.25) için, RLC elektrik devrelerinin durum denklemleri ile matematiksel olarak benzerlik göstermektedir.

Model denklemin denge noktasının $(z, z') = (0, 0)$ olduğu matematiksel olarak kolayca belirlenebilir. Bu sistem için denge noktasına yakın, PDF ve sistemin toplam enerjisini (kinetik ve potansiyel) temsil eden Lyapunov fonksiyonu, eş. 3.26'daki gibi inşa edilebilir. Bu fonksiyonda birinci terim indüktörde ikinci terim ise kapasitörde depolanan enerjiyi temsil eder (Sastry, 1999).

$$V_6(z, z') = \frac{(z')^2}{2} + \int_0^z g(y) dy \quad (3.26)$$

Bu durumda, sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi,

$$V_6'(z, z') = -z'f(z')$$

olacaktır. Bu durum Lyapunov'un ikinci metoduna göre sistemin kararlı olacağını belirtir ancak sezgisel olarak sistem asimptotik kararlıdır. "LaSalle's Değişmezlik İlkesi"ne (Teorem 2.4) göre sistemin orijini $(0, 0)$ izole edilmiş (invariant) denge noktasıdır. Bu nedenle, sistemin değişmeyen denge noktası $(0, 0)$ AS'dir. Ek olarak,

$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z g(y) dy = \infty$ ise Lyapunov fonksiyonu radially unbounded ve dolayısıyla sistemin

orijini GAS olacaktır.

3.6. Pasiflik Teoremi

Bu bölümde, Lyapunov'un ikinci metoduna göre kararlılıkları incelenen ve kararlı olma koşulları belirlenen nonlinear RLC devrelerinin ve mekanik sistemlerin pasiflikleri incelenecektir. Tanımlanan tek bir teorem (3.5) ile tüm uygulamaların pasiflikleri, Lyapunov fonksiyonları kullanarak belirlenecektir. Üstelik bu teorem ile tüm sistemlerin çözümleri sınırlandırılarak aynı zamanda pasiflikleri de ispat edilecektir. İlk olarak nonlinear tunnel diyot devresinin pasifliği incelenecektir. Diğer uygulamaların Lyapunov fonksiyonları ise tunnel diyot devresi için yapılan analizlerden yola çıkılarak sınırlandırılacaktır.

Teorem 3.5: $T(t) = u_4(t)$ nonlinear sarkaca ve $u_5(t)$ nonlinear kütle-yay-amortisör sistemine etki eden dış kuvvetler ve K ise pozitif bir sabit olarak verilsin. $u_1(t) > 0$, $u_2(t) > 0$, $u_3(t) > 0$, $u_4(t) > 0$ ve $u_5(t) > 0$ sürekli pozitif fonksiyonlar ve $t \geq t_0 \geq 0$ iken bu fonksiyonlar,

$$\max \left\{ \int_{t_0}^t u_1(s) ds, \int_{t_0}^t u_2(s) ds, \int_{t_0}^t u_3(s) ds, \int_{t_0}^t u_4(s) ds, \int_{t_0}^t u_5(s) ds \right\} \leq K < \infty \quad (3.27)$$

koşulu (3.27) ile sınırlandırılmışlar ise eş. 3.2, 3.5, 3.10, 3.15 ve 3.20 ile ifade edilen sistemlerin tüm çözümleri sınırlandırılmıştır veya sistemler kesinlikle pasiftir.

İspat: Pasiflik tanımında da belirtildiği üzere kararlılığın aksine pasiflik analizi, sistemi besleyen enerji kaynağı kesilmeden ($u_1(t) \neq 0$) yapılır. Bu durumda, nonlinear tunnel diyot devresi için tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun ($V_1(t)$) türevi,

$$V_1'(t) \leq -Ry^2 + yu_1(t)$$

$$V_1'(t) + Ry^2 \leq yu_1(t)$$

şeklinde bir eşitsizlik ile ifade edilecektir. O halde bu sistem (3.2), supply rate fonksiyonunun pasiflik tanımlarına göre kesinlikle *pasiftir* (çizelge 6).

Pasif sistemlerin enerji fonksiyonlarının aynı zamanda sınırlandırılabilir olması gerekmektedir. Çünkü pasif sistemlere giren ve çıkan enerji sınırlı olmalıdır (Bölüm 2.3). Bundan dolayı sistemin (3.2) enerjisini temsil eden Lyapunov fonksiyonun sınırları belirlenmelidir. Yukarıdaki eşitsizlikten yararlanılarak $V_1(t)$ 'nin " $(1+y^2)u_1(t)$ " ifadesinden küçük veya eşit olduğu söylenebilir. O halde eşitsizliğin son hali,

$$V_1'(t) \leq yu_1(t) \leq (1+y^2)u_1(t)$$

olacaktır. " $yu_1(t)$ " ifadesi, daha büyük bir üst sınır belirlendiğinden dolayı rahatlıkla ihmal edilebilir. Bu durumda eş. 3.4 kullanılarak,

$$V_1'(t) \leq u_1(t) + \frac{2}{L}V_1u_1(t)$$

$$V_1(t) \leq V_1(t_0) + \int_{t_0}^t u_1(s)ds + \frac{2}{L} \int_{t_0}^t V_1(s)u_1(s)ds$$

$$V_1(t) \leq V_1(t_0) + K + \frac{2}{L} \int_{t_0}^t V_1(s)u_1(s)ds$$

biçiminde bir eşitsizlik elde edilir. Bu eşitsizlik, $K_1 = V_1(t_0) + K$ eşitliği ile aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$V_1(t) \leq K_1 + \frac{2}{L} \int_{t_0}^t V_1(s)u_1(s)ds$$

Son olarak, Gronwall eşitsizliği (Teorem 2.1) kullanılarak sisteme (3.2) ait Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki eşitsizlikte (3.28) olduğu gibi sınırlandırılır.

$$V_1(t) \leq K_1 \exp\left(\frac{2}{L} \int_{t_0}^t u_1(s) ds\right) \quad (3.28)$$

Bu eşitsizlik (3.28) ile enerji fonksiyonunun üst sınırı belirlenmiş oldu. Benzer şekilde $V_2(t)$, $V_3(t)$, $V_4(t)$ ve $V_5(t)$ enerji fonksiyonlarının da üst sınırları, $K_2 = V_2(t_0) + K$, $K_3 = V_3(t_0) + K$, $K_4 = V_4(t_0) + K$ ve $K_5 = V_5(t_0) + K$ olmak üzere eş. 3.29, 3.30, 3.31 ve 3.32'deki gibi yazılabilir.

$$V_2(t) \leq K_2 \exp\left(\frac{2}{C_2(x)} \int_{t_0}^t u_2(s) ds\right) \quad (3.29)$$

$$V_3(t) \leq K_3 \exp\left(\frac{2}{C} \int_{t_0}^t u_3(s) ds\right) \quad (3.30)$$

$$V_4(t) \leq K_4 \exp\left(\frac{2}{ml^2} \int_{t_0}^t u_4(s) ds\right) \quad (3.31)$$

$$V_5(t) \leq K_5 \exp\left(\frac{2}{m} \int_{t_0}^t u_5(s) ds\right) \quad (3.32)$$

Son olarak da bu fonksiyonların alt sınırlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için ise eş. 3.4 ile 3.28, eş. 3.7 ile 3.29, eş. 3.12 ile 3.30, eş. 3.19 ile 3.31 ve eş. 3.24 ile 3.32 arasındaki bağlantılardan faydalanılarak, sistemlere ait Lyapunov enerji fonksiyonları sınırlandırılır.

$$\frac{1}{2}Ly^2 \leq V_1(t) \leq K_1 \exp\left(\frac{2}{L} \int_{t_0}^t u_1(s) ds\right) \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{2}C_2(x)x^2 \leq V_2(t) \leq K_2 \exp\left(\frac{2}{C_2(x)} \int_{t_0}^t u_2(s) ds\right) \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2}Cv^2 \leq V_3(t) \leq K_3 \exp\left(\frac{2}{C} \int_{t_0}^t u_3(s) ds\right) \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{2}ml^2y^2 \leq V_4(t) \leq K_4 \exp\left(\frac{2}{ml^2} \int_{t_0}^t u_4(s) ds\right) \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{2}my^2 \leq V_5(t) \leq K_5 \exp\left(\frac{2}{m} \int_{t_0}^t u_5(s) ds\right) \quad (3.37)$$

Yukarıdaki eşitsizliklerden (3.33, 3.34, 3.35, 3.36, 3.37) de görüleceği üzere, sistemlerin (3.2, 3.5, 3.10, 3.15 ve 3.20) toplam gücü sisteme aktarılan enerjiden büyük veya eşittir. Bu nedenle, bu sistemler supply rate fonksiyonunun pasiflik tanımlarına (çizelge 6) göre *kesinlikle pasiftir*.

Sonuç olarak, pasiflik analizleri için tanımlanan teorem (3.5) matematiksel olarak da ispat edilmiş olup sistemlerin Lyapunov fonksiyonları da sınırlandırılmıştır. Ayrıca bu teorem ile pasifliğin hem sistem enerjisi ile hem de kararlılığı ile olan ilişkisi matematiksel olarak ispat edilmiştir.

4. SONUÇ

Dinamik sistemlerin davranışları (qualitative analysis), mühendislik ve matematikte merkezi bir role sahip olmakla beraber oldukça eski bir tarihe dayanmaktadır. Ayrıca gelişen teknoloji ile bu konunun önemi ve uygulama alanları da gün geçtikçe artmaktadır. Bu çalışmada, sistemlerin kararlılığı ve pasifliği hem teorik açıdan hem de uygulamalı olarak incelenmiştir. Literatürde yer alan bazı nonlinear sistemler (elektrik, mekanik) uygulama olarak seçilerek, teorik açıdan ele alındıktan sonra bilgisayar programları aracılığıyla davranışları; yön alanları, çözüm eğrileri ve faz diyagramları ile görselleştirilmiştir. Daha sonra teorik sonuçlar ile görselleştirilen sistem davranışları yorumlanmıştır. Bu sayede de sistemler, matematiksel olarak analiz edilmeden önce sistemlerin karakteristikleri ile ilgili ön bilgi edinilmiştir. Ayrıca her bir sistem için minimum kriterler kullanılarak kararlılık ve pasiflik koşulları belirlenmiştir.

Nonlinear denklemlerin belirli bir tanımı olmamakla beraber matematiksel çözümlerinde de belirli bir yaklaşım yoktur. Ancak kontrol teorisinde çok önemli bir araç olan Lyapunov'un direk metodu kullanılarak, matematiksel olarak bilinen yöntemlerle çözülemeyen dinamik sistemlerin davranışları ve çözümleri hakkında yaklaşık çözümler üretilerek öngörülerde bulunmak mümkündür. Bu çalışmanın temeli olan Lyapunov'un direk metodu ve fonksiyonları tanımlanarak bu fonksiyonların sistem enerjisi ile olan ilişkisi ve önemi vurgulanmıştır. Daha sonra Lyapunov fonksiyonları kullanılarak sistemlerin matematiksel çözümü yapılmadan kararlılıkları incelenmiştir. Sistemler için GAS olma koşulları, LaSalle değişmezlik ilkesi ve Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak tek bir teorem (3.16) formunda yazılmıştır. Bu sayede uygulamaların global asimptotik kararlılığını Lyapunov fonksiyonları yardımıyla garantilemek mümkün olmuştur. Dahası, Lyapunov fonksiyonlarının pasiflik analizlerinde sistemin enerji veya depolama fonksiyonu olarak kullanılabilmesi gösterilmiştir. Ayrıca sistemlerin enerjileri ile pasiflikleri arasında güçlü matematiksel bağlantılar kurularak, farklı sistemlerin matematiksel olarak elektrik devrelerine modellenebileceği gösterilmiştir. Pasif sistemlerin aynı zamanda kararlı oldukları ve sınırlı çözümlere sahip olmaları gerektiği de matematiksel olarak ispatlanmıştır. Üstelik seçilen uygulamalar için özgün kriterler tanımlanarak kararlılıkları ve pasiflikleri ispat

edilmiştir. Son olarak da, bu uygulamaların pasiflikleri tek bir teorem ile açıklanarak literatüre büyük bir katkı sunmuştur.

Bu tez çalışması, nonlinear sistemlerin (elektrik, mekanik, haberleşme vb.) niteliksel davranışları, kararlılıkları ve pasiflikleri ile ilgili gelecekte yapılacak hem lisans hem de lisansüstü çalışmalar için bir temel oluşturmaktadır. Nonlinear sistemlerin hem teorik hem de uygulamalar aracılığıyla detaylı bir şekilde analiz edilmesi, bu tezi daha da anlamlı kılmaktadır. Ayrıca Lyapunov kararlılığının bilgisayar programları ile incelenmesi ve sistemlerin kararlılık davranışları ile ilgili benzetim çalışmalarının yapılması, gelecekte bu hesaplama yöntemlerinin daha da yaygınlaşmasını sağlayacak ve önemini arttıracaktır. Dahası, bu çalışmada bilgisayar destekli modern hesaplama yöntemlerinin kullanılması, sistem davranışları ile ilgili öngörüle bulunmanın önemini ortaya koymaktadır.

KAYNAKLAR

- Aksoy, Y., Özkan, E.M., 2017. **Diferansiyel Denklemler, Cilt 2.** <http://www.ek.yildiz.edu.tr/images/images/difdenk.pdf>. Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, Elektronik Kaynaklar, İstanbul. Erişim tarihi: 28.06.2018.
- Arfken, G.B., Weber H.J., 2005. **Mathematical Methods for Physicists**. Sixth Edition. ISBN. 0-12-059876-0, Elsevier, Inc., Academic Press, U.S.A. 1182.
- Ateş, M., Laribi, S., 2018. New Results on the Global Asymptotic Stability of Certain Nonlinear RLC Circuits. **Turk J Elec Eng & Comp Sci, January, 26:** 434-441.
- Bayır, İ., 2003. **Belirsizlik İçeren Dinamik Sistemlerin Lyapunov Metoduyla Kontrolü**, (yüksek lisans tezi, basılmış). Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Bao, J., Lee, P.L., 2007. **Process Control: The Passive System Approach**. ISBN. 978-1-84628-892-0, Springer, London, U.K. 253.
- Christodoulou, C.A., Assimakopoulou, F.A., Gonos, I.F., Stathopoulos, I.A., 2008. Simulation of Metal Oxide Surge Arresters Behavior. **Conference Paper in PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference**. 15-19 June 2008, Rhodes, Greece.
- Chua, L.O., Komuro, M., Matsumoto, T., 1986. The Double Scroll Family. **IEEE Transactions on Circuits Systems, November, 33** (11): 1072-1118.
- Chua, L.O., Desoer, C.A, Kuh, E.S., 1987. **Linear and Nonlinear Circuits**. ISBN. 0-07-010898-6, McGraw-Hill, Inc., U.S.A. 839.
- Çetintaş, G., 2016. **Zaman Gecikmeli Sistemlerin Kararlılık ve Çatallaşma Analizi**, (yüksek lisans tezi, basılmış). Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Çifçi, A., Uyaroğlu, Y., Hocoğlu, T., 2011. Energy Function Analysis of a Single-Machine Infinite-Bus Power System. **Proceedings of the World Congress on Engineering 2011 (WCE 2011)**, 6-8 July 2011, London, U.K.
- Dorf, R.C., Bishop, R.H., 2011. **Modern Control Systems**. Twelfth Edition. ISBN. 0-13-602458-0, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, U.S.A. 1082.
- Edwards, C.H., Penny D.E., 2009. **Elementary Differential Equations With Boundary Value Problems**. Sixth Edition. ISBN. 0-13-239730-7, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, U.S.A. 623.
- Edwards, C.H., Penny D.E., 2011. **Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri** (Ömer Akın). Üçüncü Baskıdan Çeviri. ISBN. 0-13-065245-8, Palme Yayıncılık, Ankara. 787.
- Haddad, W.M., Chellaboina, V., 2008. **Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach**. ISBN. 978-0-69-113329-4, Princeton University Press, U.K. 948.
- Jeltsema, D., Ortega, R., Scherpen, J.M.A., 2003a. A Novel Passivity Property of Nonlinear RLC Circuits. **Proceedings of the 4th Mathmod Symposium, ARGESIM Report 24**. 5-7 February 2003, Vienna, Austria. 845-853.
- Jeltsema, D., Ortega, R., Scherpen, J.M.A., 2003b. On Passivity and Power-Balance Inequalities of Nonlinear RLC Circuits. **IEEE Transactions on Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications, September, 50** (9): 1174-1179.

- Jeltsema, D., Ortega, R., Scherpen, J.M.A., 2003c. Stabilization of Nonlinear RLC Circuits: Power Shaping and Passivation. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. 9-12 December 2003, Hawaii, U.S.A. 5597-5602.
- Kennedy, M.P., 1994. Chaos in the Colpitts Oscillator. *IEEE Transactions on Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications*, November, **41** (11): 771-774.
- Khalil, H.K., 2002. *Nonlinear Systems*. Third Edition. ISBN. 0-13-067389-7, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, U.S.A. 750.
- Khalil, H.K., 2015. *Nonlinear Control*. Global Edition. ISBN. 1-292-06050-6, Pearson Education, Inc., Edinburgh Gate, Harlow, U.K. 400.
- Khanacademy, 2016. Gradyan. <https://tr.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/partial-derivative-and-gradient-articles/a/the-gradient>. Khan Academy, U.S.A. Erişim tarihi: 06.06.2018.
- Kocamaz, U.E., Uyaroğlu, Y., 2014. Synchronization of Vilnius chaotic oscillators with active and passive control. *Journal of Circuit, Systems and Computers*, 19 May, **23** (7): 1-17.
- Laori, A., 2001. Passivity in Control systems. *In Proc. International Congress on Computation*, Mexico City, Mex.
- Lyapunov, A.M., 1992. *The General Problem of the Stability of Motion*. ISBN. 0-748-40062-1, Taylor&Francis, Inc., London, U.K. 270.
- Marquez, H.J., 2003. *Nonlinear Control Systems*. ISBN. 0-471-42799-3, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, U.S.A. 352.
- MathWorld, 2018. Gradyan. <http://mathworld.wolfram.com/Gradient.html>. Wolfram Research, Inc., U.S.A. Erişim tarihi: 06.06.2018.
- Moylan, P.J., 2014. *Dissipative Systems and Stability*. <http://www.pmoylan.org/pages/research/DissBook.html>. University of Newcastle, Newcastle, NSW, Australia. Erişim tarihi: 14.02.2019.
- Pachpatte, B.G., 1973. A note on Gronwall-Bellman Inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, December, **44**(3): 758-762.
- Polking, J.C., 2002. ODE Software for MATLAB. <http://math.rice.edu/~dfield/#sqwave>. Rice University, Department of Mathematics, Houston, U.S.A. Erişim tarihi: 10.11.2017.
- Rao, M.R.M., 1981. *Ordinary Differential Equations Theory and Applications*. ISBN. 0-7131-3452-6, Edward Arnold, Inc., London, U.K. 266.
- Rouche, N., Habets, P., Laloy, M., 1977. *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*. Springer-Verlag, New York, U.S.A. 396.
- Salle, J.L., Lefschetz S., 1961. *Stability by Lyapunov's direct method with applications*. Academic Press, New York, U.S.A. 134.
- Sastry, S., 1999. *Nonlinear Systems, Analysis, Stability, and Control*. ISBN. 0-387-98513-1, Springer, New York, U.S.A. 667.
- Şamlı, R., 2006. *Çift Yönlü Çağrışumlu Bellek Yapay Sinir Ağları'nın Kararlılık Analizi*, (yüksek lisans tezi, basılmış). İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Tongren, D., 2007. *Approaches to the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations Dynamical Systems and Nonlinear Oscillations*. World Scientific Publishing Company, Peking University Series in Mathematics-Vol. 3, Peking, China. 383.

- Vidyasagar, M., 2002. *Nonlinear Systems Analysis*. Second Edition. ISBN. 0-89871-526-1, Prentice Hall, Inc., SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, U.S.A. 498.
- Wyatt, J.L., Chua, L.O., Gannett, J.W., Goknar, I.C., Green, D.N., 1981. Energy Concepts in the State-Space Theory of Nonlinear n-Ports: Part I-Passivity. *IEEE Transactions on Circuits Systems, January, 28* (1): 48-61.
- Yang, C., Sun, J., Zhang, Q., Ma, X., 2012. Lyapunov Stability and Strong Passivity Analysis for Nonlinear Descriptor Systems. *IEEE Transactions on Circuits Systems I: Regular Papers, April, 60* (4): 1003-1012.
- Yerramalla, S., Fuller, E., Mladenovski, M. ve Cukic, B., 2003. Lyapunov Analysis of Neural Network Stability in an Adaptive Flight Control System. <https://jacobi.math.wvu.edu/~ef/preprints/LyapNeuralNetsLNCSFormatted.pdf>. West Virginia University, U.S.A.. Erişim tarihi: 02.10.2018.
- Yoshizawa, T., 1966. *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan. 223.
- Zergeroğlu, E., Kandemir, İ., Şeker, M., Eroğlu, E., 2006. Kontrol Sistemlerinde Belirsizlikle Baş Etme Yöntemleri: Lyapunov Tarzı Yaklaşımlar. *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 21* (3): 588.
- Zhang, L., ve Yu, L., 2013. Global Asymptotic Stability of Certain Third-Order Nonlinear Differential Equations. *Mathematic Methods in the Applied Sciences, September, 36* (14): 1845-1850.



ÖZ GEÇMİŞ

1989 yılının Eylül ayında Adana'nın Seyhan ilçesinde doğdu. Üniversite öncesi öğretimini Adana'da tamamladıktan sonra 2007-2012 yılları arasında Mersin Üniversitesi'nde Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümünü okudu. 2009 yılı yazında henüz öğrenci iken "Work and Travel" programı ile yaz süresince ABD'de çalıştı. 2012 yılında üniversite eğitimini tamamlayarak yaklaşık bir yıl kadar TEİAŞ İzmir Grup Müdürlüğü bünyesinde bulunan 154 kV (yüksek gerilim) enerji iletim hatlarının bakım ve onarım çalışmalarını yürüttü. 2013 yılında Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) Van Bölge Müdürlüğü'ne Mühendis olarak atanınca bu görevinden istifa ederek Van ilinde çalışmaya başladı. Halen de TÜİK'te Bilgi İşlem biriminde mühendis olarak çalışmaktadır.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 01/07/2019

Tez Başlığı / Konusu: Doğrusal Olmayan RLC Devrelerinin Kararlılık ve Pasiflik Analizi

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 28 sayfalık kısmına ilişkin, 01/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNITIN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %4 (dört) tür.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

01/07/2019

Adı Soyadı: Nezir KADAH

Öğrenci No: 139101090

Anabilim Dalı: Elektrik-Elektronik Mühendisliği

Programı: Elektrik-Elektronik Mühendisliği

Statüsü: Y. Lisans Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

(Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ)

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof.Dr.Suat SENSÖY
Enstitü Müdürü

(Unvan, Ad Soyad, İmza)