T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NICHOLSON KURTÇUK MODELLERİNİN POZİTİF HEMEN HEMEN VE POZİTİF SÖZDE HEMEN HEMEN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Şahap ÇETİN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NICHOLSON KURTÇUK MODELLERİNİN POZİTİF HEMEN HEMEN VE POZİTİF SÖZDE HEMEN HEMEN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Şahap ÇETİN

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, Prof.Dr. Cemil TUNÇ'un danışmanlığında Şahap ÇETİN tarafından sunulan "Nicholson kurtçuk modellerinin pozitif hemen hemen ve sözde hemen hemen periyodik çözümleri üzerine" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 21/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza:

Üye: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ İmza:

Üye:Doç.Dr. Zeynep KAYAR İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19/07/2019 tarih ve 2019/39-5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Prof. Dr. Suat ŞENSOY

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şahap ÇETİN

ÖZET

NICHOLSON KURTÇUK MODELLERİNİN POZİTİF HEMEN HEMEN VE POZİTİF SÖZDE HEMEN HEMEN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

ÇETİN Şahap
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Haziran 2019, 69 sayfa

Bu tezin amacı, uygun şartlar altında, Lyapunov'un doğrudan metodu, üstel bölünme(exponentially dichotomy) ve sabit nokta teorisini kullanarak, farklı biçimdeki otonom olmayan hasat terimli ve gecikmeli Nicholson kurtçuk diferansiyel denklem modellerinin pozitif hemen hemen ve pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümlerin varlığı ve global üstel kararlılığı ile ilgili olarak literatürde yapılmış bulunan bazı çalışmaları araştırmacıların dikkatine sunmaktır. Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde tez konusu ile ilgili literatürde yer alan bazı bilgilere yer verildi. Tezin ikinci bölümünde literatürde yapılan bazı çalışmalar özet olarak verildi. Üçüncü bölümünde tezde kullanılacak materyal ve yöntem belirtildi. Tezin dördüncü bölümünde, tez konusuna ait temel kavramlar, tanım ve teoremler verildi. Tezin beşinci bölümünde çoklu gecikmeli ve lineer hasat terimli lineer olmayan bir Nicholson kurtçuk modelinin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı ve global üstel kararlılığı ile ilgili olarak literatürde yer alan bir çalışmadan bahsedildi. Tezin son ve altıncı bölümünde ise çoklu gecikmeli otonom olmayan farklı iki Nicholson kurtçuk diferansiyel denklem modelleri için pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı ve global üstel kararlılığı ile ilgili olarak literatürde yer alan bazı çalışmalardan bahsedildi. Bu tez orijinal hiçbir sonuç içermemektedir.

Anahtar kelimeler: Gecikmeli diferansiyel denklem,global üstel kararlılık, Lyapunov fonksiyonu, Nicholson'un kurtçuk modeli, pozitif hemen hemen periyodik çözüm, sözde hemen hemen periyodik çözüm ve sabit nokta teorisi.

ABSTRACT

ON THE OF POSITIVE ALMOST AND POSITIVE PSEUDO ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF NICHOLSON'S BLOWFLIES MODELS

ÇETIN Sahap
M. Sc. Thesis, Mathematics Department
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
June 2019, 69 pages

The aim of this thesis, under suitable conditions, is to present some scientific works in the relevant literature which are related to the the existence and globally exponentially stability of positive almost periodic and positive pseudo almost periodic solutions of non-autonomous delayed Nicholson's blowflies differential equation models with harvesting term, and they are proved by using Lyapunov's direct method, exponential dichotomy and fixed point theory. This thesis has six chapters. In the first chapter, some available information in the literature on the subject of the thesis is given. In the second chapter, some works which were obtained in the relevant literature related to the subject of the thesis were summarized. In third chapter of this thesis, the materials and methods used in the thesis were presented. In the fourth chapter, some basic concepts, basic definitions and fundamental theorems that are related to the content of thesis were introduced. In the fifth chapter, it was given a work which can be found in the relevant literature in relation to the existence and globally exponentially stability of positive almost periodic solutions of a non-linear Nicholson's blowflies model with linear harvesting term and multiple delays. In the final chapter of the thesis, in chapter 6, it was mentioned about the works which can be found in the relevant literature related to the existence and globally exponentially stability of positive pseudo almost periodic solutions of two different non-autonomous Nicholson's blowflies differantial equation models with harvesting term and multiple delays. This thesis does not include any original result.

Keywords: Delay differential equation, globally exponentially stability, Lyapunov function, Nicholson's blowflies model, positive almost periodic solution, positive pseudo almost periodic solution and fixed point theory.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve deneyimleriyle akademik açıdan beni yönlendiren ve yüksek lisans eğitimim süresince yol gösterici olan danışmanım sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a teşekkür eder, saygılarımı arz ederim. Ayrıca çok değerli eşime, aileme sabır ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim. Son olarak Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'ne destek ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

2019

Şahap ÇETİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
R	Reel sayılar
R^+	Negatif olmayan reel sayılar
R^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$C = C([-r,0],R)$	$[-r,0]$ dan R ye sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_+ = C([-r,0],(0,+\infty))$	$[-r,0]$ dan R^+ yasürekli fonksiyonlar uzayı
BC	Sınırlı ve sürekli fonksiyonlar kümesi
C^*	C nin altcebiri
T	Daralma dönüşümü
$\lvert x\rvert$	x in mutlak değeri
$\lVert x\rVert$	x in öklid normu
$\lVert\cdot\rVert_\infty$ $\lVert f\rVert_\infty := \sup_{t\in R}\lvert f(t)\rvert$	
$AP(R,R)$	R den R ye tanımlı hemen hemen periyodik fonksiyonlarınkümesi
$PAP(R,R)$	R den R ye tanımlı sözde hemen hemen periyodik fonksiyonlarınkümesi

1. GİRİŞ

Hemen hemen periyodik fonksiyonların teorisi ilk olarak 1925'te Danimarkalı matematikçi Harald Bohr tarafından geliştirildi. Daha sonradan Bohr'un çalışmasına Bochner (1935), J.Favard (1927), A.Besicovitch (1954), J.von Neumann (1935) ve N.N.Bogolyubov (1961)tarafından çeşitli önemli katkılar yapıldı (Zhang,2003).Hemen hemen periyodiklik, periyodiklik kavramının genel bir ifadesi olup harmonik analiz, fizik, dinamik sistemler ve benzer çeşitli alanlarda çok önemli rol oynar. Bununla birlikte periyodik ve hemen hemen periyodik çözümlerin varlığı fonksiyonel ya da adi diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışlarında en dikkat çekici konulardandır. Bir diferansiyel denklem için periyodik çözümlerin varlığı çok önemli olmakla birlikte her zaman böyle düzgün çözümler bulmak mümkün olmayabilir. Bundan dolayı hemen hemen periyodik çözümlerin varlığını incelemek oldukça önem arz etmektedir. Diğer yandan ekolojik etkiler ve doğadaki çevresel çeşitlilikler matematiksel biyolojinin dinamik modellerinin çalışmalarında çok önemlidir.

Sözde hemen hemen periyodiklik hemen hemen periyodikliğin genel bir hali olup literatüre ilk olarak C.Zhang (1992)tarafından tanıtıldı. Bu kavramın literatüre girmesiyle birlikte birçok araştırmacı tarafından çalışılmaya başlandı. Bunların yanı sıra, birçok araştırmacı tarafından sözde hemen hemen periyodik katsayıları içeren kısmi ve birçok diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışlarını incelemede kullanılmıştır.

Literatürde yaptığımız araştırmalarda ele alınan diferansiyel denklemlerin bu tür çözümlerinin varlığını ve tekliğini bulmak için farklı yöntemler kullanılmıştır.

Periyodik çözümlerin varlığını bulmada kullanılan en yaygın metodlar Mawhin süreklilik teoremi, Schauder ve Brower'in sabit nokta teoremleri ve Krasnoselski'nin konide tanımladıkları sabit nokta teoremleridir. Bak Wang (2004), Yoshizawa, (1975).

Yakın zamanda literatürde birçok diferansiyel denklemlerin bu türden niteliksel davranışların incelendiği görülebilir. Bu tezde değişik fomdaki Nicholson kurtçuk diferansiyel denklem modellerininhemen hemen periyodik vesözde hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı, tekliği ve üstel kararlılığı gibi bir takım niteliksel davranışlar ele alınacaktır.

Ele alınacak niteliksel davranışlar için kullanılacak yöntemler Banach sabit nokta teoremi, Lyapunov’un doğrudan metodu metodu ve üstel bölünme ile ilgil teoremlerdir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Şimdi literatürde ele alınan ve tez konusuyla alakalı olan özellikle birinci yada ikinci mertebeden bazıdiferansiyel denklemlerin hemen hemen yada sözde hemen hemen periyodik çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili bazı çalışmalara özet olarak yer verilecektir.

Berger ve Chen (1992)

$$\ddot{x} - x - x^3 = h(t)$$

ve

$$\ddot{x} - ax - U^{'}(x) = h(t),\ a > 0$$

formundaki Duffing diferansiyel denklemlerini ele aldılar. Yazarlar, $h(t)$ nin hemen hemen periyodik bir fonksiyonolduğu durumda, bu denklemlerin tek bir düzgünhemen hemen periyodik $x(t)$ çözümüne sahip olduğunu incelediler.

Weiyao (1997)

$$x'' - x + x^3 = f(t)$$

Duffing diferansiyel denklemini ele aldı. Bu araştırmacı üstel bölünme teorisi ve Lyapunov fonksiyonu yardımıyla, bu denklemin hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı üzerinde bir çalışma yaptı.

Xiang (1999), $w(t)$ sürekli periyodik bir fonksiyon olmak üzere, birinci mertebeden,

$$x'(t) = w(t)(ax(t) - bx(x(t))), \qquad (a > b > 0)$$

iterative diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını ve periyodik çözümlerin davranışlarını inceledi.

Peng ve Wang (2010), lineer olmayan

$$\ddot{x} + c\dot{x} - ax + bx^m(t - \tau(t)) = p(t),\quad m > 1,$$

Duffing diferansiyel denkleminin hemen hemen pozitif periyodik çözümlerinin varlığını Lyapunov fonksiyonu ve eşitsizlikler yardımıyla incelediler.

Yang (2010)

$$x^{'}(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i(t)}{1 + x^n(t - \tau_i(t)}\quad , n \geq 0,$$

homotopi model denklem için hemen hemen periyodik çözümlerin varlık ve tekliğini inceledi.

Fang ve Yang (2011)

$$\begin{aligned} x'_{ij} = -a_{ij}x_{ij} + &\sum_{C_{kl}\in N_S(i,j)}^{m} C_{ij}^{kl}(t)\, f\big[x_{kl}\big(t-\tau(t)\big)\big]x_{ij}(t) \\ &- \sum_{C_{kl}\in N_S(i,j)}^{m} D_{ij}^{kl}(t)\, g\big[x'_{kl}\big(t-\sigma(t)\big)\big]x_{ij}(t) + I_{ij}(t), \\ &i = 1,2,\dots,n \text{ ve } j = 1,2,\dots,m \end{aligned}$$

biçimindeki manevra kısıtlayıcı hücresel sinirsel ağ (SICNN) diferansiyel denklem modelinin hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığını ve global üstel kararlılığına ait bazı sonuçları Leray-Schauder sabit nokta teoremini ve diferansiyel eşitsizlikleri uygulayarak elde etti.

Liu ve Chen (2011)

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=2}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))}$$

gecikmeliNicholson kurtçuk modelinin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin varlık ve üstel yakınsaklığını incelediler.

Long (2012) hasat terimli ve çoklu zaman gecikmeli genelleştirilmiş

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))} - H(t)x(t-\sigma(t))$$

Nicholson kurtçuk modelinin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerin varlığını ve bu çözümlerin üstel yakınsaklığını Lyapunov'un doğrudan yöntemi ve sabit nokta teorisi yardımıyla inceledi ve konuyla alakalı bir örnek verdi.

Ding ve Nieto (2013)

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))},\ t \in R,$$

Nicholson kurtçuk modelinin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığını inceledi.

Zhang ve ark (2013)

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i(t)}{1 + x^n(t - \tau_i(t)}\ ,n \geq 0$$

homotopi tipinde lineer olmayan diferansiyel denklemin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığını ve üstel yakınsaklığını incelediler. Araştımacılar Banach sabit nokta teoremi yardımıyla sonuçlar elde ettiler.

Cherif (2015) hasat terimli ve gecikmeli genelleştirilmiş

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))} - H(t)x(t-\sigma(t))$$

Nicholson kurtçuk modelinin pozitif sözdehemen hemen periyodik çözümlerinin varlığını inceledi. Uygun şartlar altında sabit nokta teoremini kullanarak pozitif sözdehemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı için yeter şartlar elde etti.

Liu (2015)

$$x'(t) = -a(t) + b(t)e^{-x(t)} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))},$$

Nichalson kurtçuk modeli denkleminin hemen hemen pozitif periyodik çözümlerinin varlığı ve global üstel kararlılığına ait bazı sonuçları nümerik simülasyonlarıyla beraber verdi.

Xu ve Liao (2015)

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)x(t-\tau)e^{-\lambda_i(t)x(t-\tau)} + h(t),$$
$$t \neq \theta_k, \qquad \Delta x(\theta_k) = \gamma_k x(\theta_k) + \delta_k, k\epsilon N$$

impalsif Nicholson kurtçuk denkleminin pozitif çözümlerin sınırlılığını ve üstel kararlılığını inceledi. Yazarlar, temel çözüm matrisi, bazı eşitsizlikler teknikleri ve Lyapunov metodu yardımıyla söz konusu problemeler ile ilgili olarak yeni kriterler oluşturdular.

Long (2016) otonom olmayan gecikmeli

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))}$$

Nicholson kurtçuk denkleminin çözümlerinin globalüstel yakınsaklığını eşitsizlikler yardımıyla inceledi.

Xu ve ark (2016) hasat terimli

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)x(t-\tau)e^{-\lambda_i(t)x(t-\tau)} + h(t)$$

Nicholson kurtçuk modelinin pozitif sözdehemen hemen periyodik çözümlerin varlığını ve üstel yakınsaklığını inceledi. Yazarlar, sabit nokta teoremi ve Lyapunov fonksiyonu yardımıyla bazı yeni sonuçlar elde etti.

Zhou ve Agarwal (2017) hasat terimli ve gecikmeli

$$x'(t) = -\delta x(t) + Px(t-\tau)e^{-\gamma x(t-\tau)} - Hx(t-\sigma), \ \ \delta, P, \sigma, H, \tau : R \to (0, +\infty).$$

Nicholson kurtçuk modelinin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığını ve global üstel kararlılığını incelediler. Konu ile ilgili olarak üstel bölünme (exponentially dichotomy) teorisini kullanarak bazı sonuçlar elde etti.

Benzer şekilde, Berezansky ve ark (2010), Besicovitch (1954), Bochner ve ark (1935), Bogoljubov ve ark (1961), Bohr (1925), Chen (2000;2003), Chen ve Liu (2011), Chen ve Wang (2012), Chen ve ark (2016), Chérif (2012;2015), Deng ve Liu (2013;2014;2015), Ding ve Nieto (2013), Ding ve Alzabut (2015), Ding ve Ji (2016), Duan ve Huang (2015), Faria (2017), Favard (1927), Huang (2014;2016), Jia (2012), Jiang (2014), Hou ve Duan (2012), Li ve ark (2007), Li ve Du (2008), Liu (2011), Liu ve Meng (2012), Liu ve Ding (2013), Liu ve ark (2017), Long ve Yang (2011), Long ve Liu (2012), Mohammed (2018), Padhi ve ark (2014), Pati ve ark (2017), Rihani ve ark (2016), Shao (2012), Tang (2015), Troib (2014), Tunç ve Liu (2016), Van Hien (2014), Wang (2004), Wang ve ark (2011), Wang (2012), Xiong (2016), Xu (2014), Yang (2011), Yao (2015), Yao ve Alzabut (2017), Yoshizawa(1975), Yu (2010), Zhang (2003), Zhang (2014), Zhao ve ark (2012), Zhou ve ark (2010), Zhou (2013) gibi araştırmacılar bu konular üzerinde çalışmalar yaptılar.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında kullanılan materyaller tez konusuyla ilgili literatürde geçen temel kaynaklar, kitaplar, makaleler ve benzer kaynaklardır. Yöntem olarak ise sabit nokta teorisi ışığında daralma dönüşümü, temel bazı eşitsizlikler, üstel bölünme ve Lyapunov'un doğrudan metodu kullanılmaktadır. Bu tezde, bazı diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışları ile ilgili temel kitaplar ve ilgili makaleler taranıp, konu ile ilgili çalışmalar incelenip Banach sabit nokta teoremi, daralma dönüşümü, üstel bölünme, Lyapunov fonsksiyoneli ve integral eşitsizliklerini kullanarak tezde verilen bazı diferansiyel denklemlerin pozitif hemen hemen ve pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı, gloabal kararlılığı ve üstel yakınsaklığıgibi niteliksel davranışları incelenmektedir.

4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, bu tezin daha sonraki bölümlerinde kullanılabilecek tez konusuyla ilgili bazı temel tanım, teorem, lemma ve örnekler ele alınacaktır.

Tanım 4.1.(Bihun,2010) X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to R$bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, (X, d)ikilisi aşağıdaki şartları sağlarsa bir metrik uzayı denir.

1.Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$,

2.Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

3.Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,(üçgen eşitsizliği)

4.Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

Örnek 4.1. $X = R, d: R \times R \to R^+$olmak üzere,$d(x, y) = |x - y|$mutlak değer fonksiyonu olmak üzere (X, d) bir metrik uzayıdır.

Tanım 4.2.(Bihun,2010)(X, d)bir metrik uzayı olsun. Eğer $d(T(x), T(y)) \leq \rho d(x, y)$eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan bir $\rho \leq 1$sabitivarsa o zaman $T: X \to X$ bir daralma dönüşümüdür. Eğer $T(x) = x$ oluyorsa , $x \in X$ noktasına$T$nin sabit noktası denir.

Örnek 4.2 $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $x \in X$ olmak üzere,

$T(x) = x^2$ fonksiyonunun sabit noktaları $x = 0$ ve $x = 1$dir.

Tanım4.3. (Yoshizawa,1975)Birinci mertebeden lineer olmayan

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \tag{4.1}$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $x, n -$boyutlu bir vektör, D, R^n de orijini içinede bulunduran açık bir cümledir. $I = [0, \infty)$olmak üzere,$F(t, x)$,fonksiyonu (t, x)bileşenlerine göre $I \times D$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca C, (4.1) in D de kalan çözümlerinin bir sınıfı ve $x_0(t), C$ nin bir elemanı olsun. $x = y + x_0(t)$dönüşümü yapılırsa (4.1) diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y + x_0(t) - F(t, x_0(t) \tag{4.2}$$

sistemine dönüşür. (4.2) nin sağ tarafına $G(t, y)$ denirse, $G(t, 0) \equiv 0$ olur ve (4.2) nin $y(t) \equiv 0$ sıfır çözümü, $x_0(t)$ ye karşılık gelir. Yani verilen sistemin sıfırdan farklı çözümleri uygun bir dönüşüm yardımıyla sıfır çözümüne indirgenebilir. Bu yüzden

$x_0(t)$ yerine (4.2) nin $y(t) \equiv 0$ sıfır çözümünün kararlı olduğunu incelemek yeterlidir.Bu nedenle genelliği bozmaksızın$F(t,0) \equiv 0$, $\|x\| < H, H > 0$, alınabilir.

Tanım 4.4.(Yoshizawa,1975) Her $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in I$ olmak üzere en az bir $\delta(t_0,\varepsilon) > 0$ var öyle ki $\|\mathrm{x}_0\| < \delta(t_0,\varepsilon)$ iken her $t \geq t_0$ için $\|x(t;\mathrm{x}_0,t_0)\| <$ εeşitsizliği sağlanıyor ise, o zaman (4.1) in $x(t) = 0$ çözümü kararlıdır denir.

Örnek 4.3.

$$\dot{x} + x = 0$$

$$x(0) = 0{,}1$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $x(t) = 0{,}1\exp(-t)$ olur. Her $\varepsilon \geq 0$ için $|0{,}1| < \delta$ iken $|0{,}1e^{-t}| < 0{,}1 < \delta = \varepsilon$ olur. Böylece kararlılık tanımını sağlayan en az bir δ pozitif sayısı bulmuş oluruz ki verilen başlangıç değer probleminin sıfır çözümü kararlı olur.

Tanım 4.5. (Yoshizawa,1975) (4.1) diferansiyel denklem sisteminin$x(t) = 0$ çözümü kararlı ve en az bir $\delta_0(t_0) > 0$ sayısı var öyle ki $\|\mathrm{x}_0\| < \delta_0(t_0)$ eşitsizliği sağlandığında $t \to \infty$ iken $x(t;\mathrm{x}_0,t_0) \to 0$ oluyor ise (4.1) in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 4.6. (Yoshizawa,1975) Her $\gamma > 0$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları için en az bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var öyle ki $\|\mathrm{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ iken ve $t \geq t_0$ için $\|x(t;\mathrm{x}_0,t_0)\| < \varepsilon.\exp[-\gamma(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)]$ eşitsizliği sağlanıyor ise o zaman (4.1) in $x(t) = 0$ sıfır çözümü üstel asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 4.7.

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{4.3}$$

iki boyutlu sistemi ele alınsın. Burada P ve Q fonksiyonları x ve y ye göre sürekli ve $P(0{,}0) = 0$, $Q(0{,}0) = 0$ ve $(0{,}0)$, (4.3) sisteminin bir izole kritik noktası olsun. Eğer her(x,y) için P ve Q fonksiyonları birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip, $E = E(x,y)$ fonksiyonu orijini içeren D bölgesinde her (x,y) için pozitif tanımlı ve bu fonksiyonun (4.3) sistemi boyunca her $(x,y) \in D$ için $E'(x,y)$ türevi negatif yarı tanımlı ise, bu takdirde E fonksiyonuna D bölgesinde (4.3) sistemi için Lyapunov fonksiyonu denir.

Tanım 4.8.(El'sgol'ts,1966) Eğer bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece bağımsız değişkene (ana bağlı) bağlı ve bu an denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bağlı bulunduğu bileşenlerinden daha küçük değilse bu tür bir denkleme gecikmeli diferansiyel denklem denir.

Örnek 4.4. Aşağıda verilen diferansiyel denklemler,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(\frac{t}{2})),$$

$$\tau(\frac{t}{2}) \geq 0,$$

$$x''(t) = f(t, x(\frac{t}{3}), x'(\frac{t}{3}), x(t), x'(t)),$$

$$t \geq 0,$$

birer gecikmeli diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 4.9. (Norkin,1973) $\tau > 0$ sabit olmak üzere birinci mertebeden sabit gecikmeli

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t - \tau)\big) \tag{4.4}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $t \in [t_0 - \tau, \infty), x \in R, R = (-\infty, \infty)$ ve f ise bağlı bulunduğu bileşenlerin sürekli bir fonksiyonudur.

$$x(t) = \varphi(t), \forall\, t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

başlangıç fonksiyonu ve t_0 başlangıç noktası olmak üzere, $t > t_0$ için (4.4) denkleminin sürekli bir $x(t)$çözümünün belirlenmesi problemine temel başlangıç problemi adı verilir. Başlangıç fonksiyonu için verilen $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ kapalı aralığına başlangıç kesiti denir ve E_{t_0} ile gösterilir. Genellikle $x(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$ olarak kabul edilir. Bazı kısıtlamalar altında bu başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı kurulacak olup bu çözüm $x_\varphi(t)$ ile gösterilir. (4.4) denkleminde ve başlangıç koşulu olan $x(t)$ fonksiyonunda f ve φ, vektör fonksiyonları olarak kabul edilirse denklemler sisteminin temel başlangıç değer problemleri elde edilir. (4.4) denkleminde $\tau = \tau(t) \geq 0$ değişken gecikmeli durumunda $t > t_0$ için t_0 noktasını ve $t \geq t_0$ için t_0 dan küçük olan $t - \tau(t)$ değerlerini içeren E_{t_0} başlangıç kümesinde bu denklemin bir çözümünü bulmak istenebilir.

Örnek 4.5.

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), x(t - cos^2(t))$$

gecikmeli diferansiyel denklemi göz önüne alalım. $\mathrm{t}_0 = 0$ için $\varphi(\mathrm{t})$ başlangıç fonksiyonu

$E_0 = [-1,0]$başlangıç aralığında verilmelidir.Ayrıca,

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), x(\frac{t}{2})$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. $\mathrm{t}_0 = 0$ için E_0 başlanıç kümesi sadece $\mathrm{t}_0 = 0$ noktasından oluşur. Fakat bu denklemde $\mathrm{t}_0 = 1$ için E_1 başlangıç kümesi $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$aralığıdır.

Teorem 4.1.(Norkin,1973) $\tau > 0$ reel bir sabit ve t_0 başlangıç noktası olmak üzere,

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t - \tau)\big)$$
$$x(t) = \varphi(t), \forall\, t \in [t_0 - \tau, t_0] \qquad (4.5)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Eğer f, φ ve τ sürekli fonksiyonlar ise o zaman (4.5) başlangıç değer probleminin en az bir çözümü vardır. Buna ek olarak,

$$F\big(t, x(t)\big) = f\big(t, x(t), \varphi(t - \tau)\big)$$

Lipschitz şartını sağlıyorsa, o zaman (4.5) probleminin çözümü tektir. Ayrıca,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial y}\right|, |\varphi'(t)| \text{ ve } \left|{\tau_x}'(t, x)\right|$$

türevlerinin sınırlı olması çözümün tekliği için bir yeter şarttır.

Tanım 4.10. (Norkin,1973)

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x\big(t - \tau_1(t)\big), \dots, x\big(t - \tau_m(t)\big)\right) \qquad (4.6)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi ele alınsın.

Her $\varepsilon > 0$için en az bir $\delta(\varepsilon) > 0$ var öyle ki $|\varphi(t) - \omega(t)| < \delta(\varepsilon)$ iken her $t \geq t_0$ için $|x_\varphi(t) - x_\omega(t)| < \varepsilon$eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman (4.6) denkleminin $x_\varphi(t)$ çözümü kararlıdır denir. Burada $\varphi(t)$ve $\omega(t)$ sürekli bir başlangıç fonksiyonlarıdır.

Tanım 4.11. (Burton,1985) Otonom olmayan

$$x' = F(t, x_t),\ x_t = x(t + \theta), -r \leq \theta \leq 0, t \geq 0, \qquad (4.7)$$

gecikmeli diferansiyel sistemini ele alalım. Burada $F: [0, \infty) \times C_H \to R^n$sürekli bir dönüşüm ve $F(t, 0) = 0$ dır. Ayrıca F nin kapalı ve sınırlı cümleleri R^n nin sınırlı cümlelerine dönüştürdüğü varsayılmaktadır. Burada $(C, \|.\|)$ ise supremum normlu sürekli $\varphi: [-r,\ 0] \to R^n$ fonksiyonun bir Banach uzayıdır. $r > 0$ olmak üzere, $C_H := \{\varphi \epsilon C([-r, 0], R^n): \|\varphi\| < H\}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Varlık ve teklik teorisi gösteriyor ki eğer $\varphi \in C_H$ ve $t \geq 0$ ise o zaman (4.7) denkleminin en az bir sürekli $x(t, t_0, \varphi)$çözümü vardır öyle ki $t > t_0$ için $x_t(t, \varphi)$ ve α pozitif bir sabit olmak üzere $[t_0,\ t_0 + \alpha)$ aralığında (4.7) denklemi sağlanır. Eğer kapalı bir $B \subset C_H$ alt kümesi var ve verilen çözüm B de kalırsa o zaman $\alpha = \infty$ olur. Ayrıca $|.|$ sembolü, $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ olmakla birlikte R^n de uygun normu temsil etmektedir. $C(t) = \{\varphi: [t - a, t] \to R^n, \varphi \text{ sürekli fonksiyon}\}$ ve $\|\varphi(t)\| = \max_{t-\alpha \leq s \leq t} |\varphi(t)|$ olduğu varsayılsın.

Tanım 4.12. (Burton,1985) Sürekli ve pozitif tanımlı bir $W: R^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu wedge olarak tanımlanır.

Tanım 4.13.(Burton,1985) $W: [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $W(0) = 0$, $s > 0$ olduğunda $W(s) > 0$ ve W kesin artan ise bu fonksiyona bir wedge denir.

Tanım 4.14. (Burton,1985) $0 \in D$ olmak üzere D, R^nde açık bir küme olsun. $V(t,0) = 0$ ve $V(t, x) \geq W_1(|x|)$, ifadesini sağlayan bir W_1 (wedge) varsa o zaman $V: [0, \infty) \times D \to [0, \infty)$ fonksiyonu pozitif tanımlı olarak adlandırılır. Ve $V(t, x) \leq W_2(|x|)$ şartını sağlayan bir W_2 (wedge) varsa, o zaman V ye azalandır denir.

Tanım 4.15. (Burton,1985) $\varphi \in C_H$ olmak üzere $t \geq 0$ için $V(t, \varphi)$ sürekli bir fonksiyonel olsun. (3.7) denkleminin çözümleri boyunca V nin türevi,V' ile gösterilir ve

$$\mathrm{V}'(t,\varphi) = \limsup_{h\to 0}\frac{V(t+h, x_{t+h}(t_0,\varphi)) - V(t, x_t(t_0,\varphi))}{h}$$

ile tanımlanır.Burada $x_{t_0}(t_0,\varphi) = \varphi$ olmak üzere, $x(t_0,\varphi)$, (4.7) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem4.2(Burton,1985) $x:[\alpha,t] \to R^n$fonksiyonu sürekli ve $D \le \infty$ için sınırlı ve $V(t,x_t)$ Lyapunov fonksiyoneli türevlenebilir ve x_t ye göre Lipschitz şartını sağlasın. Ayrıca $V(t,x_t)$ aşağıdaki şartlar sağlasın:

(i) $V(t,0)=0,\ W_1(|x(t)|) \le V(t,x_t), (W_1(r)$ bir wedge),

(ii) $\dot V(t,x_t) \le 0$,

O zaman (4.7)'in sıfır çözümü kararlıdır denir.

Teorem 4.3.(Burton,1985)Yukarıda verilen$V(t,x_t)$ Lyapunov fonksiyoneli aşağıdaki şartlar sağlasın:

(i) $V(t,0)=0,\ W_1(|\phi(0)|) \le V(t,\phi) \le W_2(|\phi|)$, ($W_1(r)$ ve $W_2(r)$ birer wedge),

(ii) $V'(t,\phi) \le 0$.

O zaman (4.7)'in sıfır çözümü düzgün kararlıdır denir.

Teorem 4.4.(Burton,1985) $M > 0$ bir sabit olmak üzere $t_0 \le t < \infty$ için$|F(t,x_t)| \le M$ olsun.Yukarıda verilen $V(t,x_t)$ Lyapunov fonksiyoneli aşağıdaki şartlar sağlasın:

(i) $W_1(|\phi(0)|) \le V(t,\phi) \le W_2(|\phi|)$, ($W_1(r)$ ve $W_2(r)$ birer wedge),

(ii) $V'(t,x_t) \le -W_3(|x(t)|)$.

O zaman (4.7)'in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır denir.

Tanım 4.16.(Zhang, 2003)

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$$

formundaki S fonksiyonuna trigonometrik polinom denir. Burada $\lambda_k \in R$ve $c_k \in C.$

Tanım 4.17.(Zhang, 2003) Her $\varepsilon > 0$ için$\|f - S_\varepsilon\| < \varepsilon$eşitsizliğini sağlayan bir $s_\varepsilon$trigonometrik polinomu varsa, $f \in C(R)$ fonksiyonuna hemen hemen periyodik fonksiyon denir. Böylefonksiyonların kümesi $AP(R)$ ile gösterilir.Yukarıdaki tanıma bakıldığında $AP(R)$ kümesi $C(R)$ de trigonometrik polinomların bir tamlamasıdır.

Örnek4.6.$f(x) = sin\sqrt{2}x + cos\sqrt{3}x$

fonksiyonu hemen hemen periyodik bir fonksiyondur.

Tanım 4.18.(Zhang, 2003)

$R_s f(t) = f(t+s)$fonksiyonuna her $t \in \mathbb{R}$ için f nin s ötelemesi denir. Burada $s \in R$ dir.

Tanım 4.19.(Zhang, 2003)

$f \in C(R)$bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir$L(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki uzunluğu $L(\varepsilon)$ olan her bir aralığa aiten az bir τ vardır öyle ki

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \quad t \in R$$

eşitsizliğisağlanır.Bu ifadeyi sağlayan f fonksiyonuna hemen hemen periyodik fonksiyon denir.

Örnek 4.7. $f(x) = cos\sqrt{3}x + cos\sqrt{2}x$

fonksiyonu hemen hemen periyodik bir fonksiyondur.

Konuyla bağlantılı olarak aynı şekilde sözde hemen hemen periyodiklik kavramı ilk olarak C. Zhang (1992) tarafından verildi. Bu özellik hemen hemen periyodikliğin genel bir halidir.

Tanım4.20.(Zhang, 2003) Eğer $h \in AP(R,R)$ ve $\varphi \in PAP_0(R,R)$ olmak üzere, bir f fonksiyonu $f = h + \varphi$ biçiminde ifade edilebiliyorsa, bu takdirde f fonksiyonuna sözde hemen hemen periyodik fonksiyon denir. Bu fonksiyonlar $PAP(R,R)$ şeklinde gösterilir. Burada, $PAP_0(R,R)$,

$$\left\{ f \in BC(R,R^n) \middle| \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(t)|\,dt = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Örnek 4.8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} + sinx + cos\sqrt{2}x$

fonksiyonu sözde hemen hemen periyodik fonksiyondur.

Lemma 4.1.(Tunç ve Liu, 2015)

$B^* = \{\varphi | \varphi \in PAP(R,R)\ \varphi,$ R de düzgün sürekli ve her $t \in R$ için $K_1 \leq \varphi(t) \leq K_2\}$ olsun. O zaman B^*, $PAP(R,R)$ kümesinin kapalı bir alt kümesi olur.

Lemma 4.2.(Zhang,2003)

$PAP(R)$, sabit fonksiyonları içeren $C(R)$ nin bir C^* invariantıdır (translation invariant). Ayrıca, $PAP(R) \big/ PAP_0(R) \cong AP(R)$ dır.

Lemma 4.3.(Zhang,2003)

$f \in PAP(\Omega \times R)$ fonksiyonunun Ω nın bütün kompakt K alt kümeleri için $Z \in K$ da sürekli ve $t \in R$ de düzgün olduğunu ve $F \in PAP(R)$ olmak üzere $F(R) \subset \Omega$ olduğunu varsayalım. O zaman $f \circ (F \times \iota) \in PAP(R)$ olur.

Şimdi, $A(t)$ R üzerinde sürekli $n \times n$ biçiminde sınırlı sürekli bir matris fonksiyonu olsun ve

$$\|A(t)\| = \sup_{t \in R} |A(t)|,$$

$$|A(t)| = \max_{\xi \in C^n, |\xi| = 1} |A(t)|\xi,$$

şeklinde tanımlansın.

$$Ly = y' + A(t)y \tag{4.8}$$

diferansiyel ifadesini ele alalım. Eğer $y \in C^1(R)$ ise, o zaman $Ly \in C(R)$ dir. Tersine eğer $f \in C(R)$ için $Ly = f$ olacak şekilde bir $y \in C(R)^n$ varsa, o zaman $y \in C^1(R)$ olur.

Loperatörü için

$$Ly = 0 \tag{4.9}$$

homojen sistemini ve

$$Ly = f \tag{4.10}$$

homojen olmayan sistemi alalım.

Tanım 4.21.(Zhang, 2003)

Eğer (4.8) denklemi $f \in C(R)$ için bir tek $y \in C^1(R)$ çözümüne sahip ise (4.8) deki L ye regüler operatör denir.

$$\begin{aligned}
Y_+ &= \{y : Ly = 0,\ y\ ,[0,\infty)\ da\ sınırlı\},\\
Y_- &= \{y : Ly = 0,\ y\ ,(-\infty,0]\ da\ sınırlı\},\\
E_+ &= \{y(0) \in C^n : y \in Y_+\},\\
E_- &= \{y(0) \in C^n : y \in Y_-\}
\end{aligned}$$

olmak üzere,otonom olmayan

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F \tag{4.11}$$

denklem sistemini ve bunun homojeni biçimi olan

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \tag{4.12}$$

sistemiele alınsın. Burada $A(t)$, R üzerinde sürekli $n \times n$ biçiminde bir matris ve $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$, C^n de bir kolon matrisidir. Eğer $A(t)$ hemen hemen periyodik bir matris ise bütün elemanları hemen hemen periyodik demektir.

Tanım 4.22.(Zhang, 2003)

Eğer homojen (4.9) sisteminin Y çözüm uzayı Y_+ ve Y_- nin toplamı şeklinde ise, o zaman bu ayrışımaya çözümlerin bölünmesi (dichotomy) denir. Eğer $y \in Y_+$ için

$$|y(t)| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}|y(s)|(s \leq t)$$

ve$y \in Y_-$ için

$$|y(t)| \geq k_2 e^{\alpha_2(t-s)}|y(s)|(s \leq t)$$

olacak şekilde pozitif k_i, α_i $i = 1{,}2$ sayıları varsa, o zaman çözümlerin bölünmesi üsteldir denir.

Tanım 4.23.(Zhang, 2003)

Bir Y temel çözüm matrisi için

$$|Y(t)PY^{-1}(s)| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}|y(s)|(s \leq t)$$

ve

$$|Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)| \leq k_2 e^{-\alpha_2(s-t)}|y(s)|(t \leq s)$$

olacak şekilde pozitif k_i, α_i $i = 1{,}2$, sayıları ve C üzerinde bir P izdüşüm operatörü varsa, o zaman (4.9) sistemi üstel bölünmeye (exponentially dichotomy) sahiptir denir.

Önerme 4.1. (Zhang, 1995)

ϕ , $U \subset C$ üzerine düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in \boldsymbol{R}$ için $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in PAP(R)$ fonksiyonu için $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in U$ oluyor ise, o zaman $\phi \circ f \in PAP(R)$ dir.

Teorem 4.5.(Zhang, 1995).

(3.11) sistemi üstel bir bölünmeye (exponentially dichotomy) sahip ve $F \in PAP_0(R)$ olsun. O zaman (4.10) denklem sistemi bir tek $Y \in PAP_0(R)$ sınırlı çözüme sahiptir.

Teorem 4.6.(Zhang, 1995)

(4.11) deki $A(t)$ hemen hemen periyodik ve (4.11) sistemi üstel bir bölünmeye (exponentially dichotomy) sahip olsun. O zaman, her $F \in PAP(R)$ için (4.10) denklem sistemi bir tek $Y_F \in PAP(R)$ sınırlı çözüme sahiptir.

5. LİNEER HASAT TERİMLİ NICHOLSON KURTÇUK MODELİ İÇİN POZİTİF HEMEN HEMEN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE GLOBAL ÜSTEL KARARLILIĞI

Zhang (2014),

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=2}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))} \tag{5.1}$$
$$+\beta_1(t)x(t-\tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x(t)} - H(t)x(t-\sigma(t))$$

diferansiyel denkleminin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin varlığı ve bu çözümlerin global üstel kararlılığı ilgili yeter şartlar oluşturdu ve konuyla alakalı bir örnek verdi. Burada $a,\ H,\sigma,\ \gamma_j : R \to (0,+\infty)$ ve $\beta_j, \tau_j : R \to [0,+\infty),\ j = 1,2,...,m$ fonksiyonları sınırlı ve süreklidir. Yukarıda verilen bilgilere ilave olarak da (5.1) denklemindeki fonksiyonlarla ilgili temel kabuller ve ihtiyaç duyulan bazı temel bilgiler ifade edilecektir.

$g,\ R$ desınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$g^{+} = \sup_{t\in R} |g(t)|,\ g^{-} = \inf_{t\in R} |g(t)|$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca,

$$\gamma_j^{-} \geq 1,\ j = 1,2,...,m,\ r = \max\left\{ \max_{1\leq j\leq m} \tau_j^{+}, \sigma^{+} \right\}.$$

olarak alınmaktadır.

$C = C([-r,0],R)$ ise supremumnormlu sürekli fonksiyonlar uzayı ve $C_{+} = C([-r,0],(0,+\infty))$ olsun. Eğer $x(t)$ fonksiyonu $[-r+t_0,\sigma),\ (t_0,\sigma \in \Re)$ aralığı üzerinde sürekli ve tanımlı ise, o zaman her $\theta \in [-r,0]$ için $x_t \in C$ olur. Burada $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ ile verilmektedir. Aynı zamanda,

$$x_{t_0} = \varphi, \quad \varphi \in C_+$$

başlangıç fonksiyonunu ele alalım. $x_t(t_0,\varphi)$ veya $x(t;t_0,\varphi)$ ifadesi, başlangıç değer probleminin kabul edilebilir bir çözümü olarak alınmaktadır. Ayrıca, $[t_0,\eta(\varphi))$ ifadesi ise $x_t(t_0,\varphi)$ çözümünün maximal sağ varlık aralığı olsun.

$\dfrac{1-x}{e^x}$ ile verilen fonksiyonun $[0,1]$ aralığında azalan olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\frac{1-K}{e^K} = \frac{1}{e^2}$$

ifadesini sağlayan tek bir $K \in (0,1)$ vardır. Açık bir şekilde,

$$\sup_{x \geq K} \left| \frac{1-x}{e^x} \right| = \frac{1}{e^2}$$

olduğu görülebilir. Bununla beraber, xe^{-x}, $[0,1]$ aralığında artan ve $[1+,\infty)$ aralığında azalan olduğu için $(1+,\infty)$ aralığında

$$Ke^{-K} = \tilde{K}e^{-\tilde{K}}$$

ifadesini sağlayan tek $\tilde{K}$ sayısı vardır. Teoremin ispatı için kullanılacak iki teorem ve lemmalar aşağıda verilecektir.

5.1. Hemen Hemen Periyodik Çözümlerin Varlığı ve Global Üstel Kararlılığı

Teorem 5.1. (Liu,2013) Her $t \in R$ için,

$$\inf_{t \in R} \left\{ \beta_1(t)e^{-\tilde{K}} - H(t) \right\} > 0 \text{ ve } \tau_1(t) \equiv \sigma(t) \tag{5.2}$$

olsun. O zaman her $t \in [t_0,\eta(\varphi)$ için $x_t(t_0,\varphi) \in C_+$ ve $\{x_t(t_0,\varphi) : t \in [t_0,\eta(\varphi))\}$ cümlesisınırlı ve $\eta(\varphi)$ =+∞ olur.

Teorem 5.2. (Liu,2013) Teorem 5.1 in bütün şartlarının sağlandığı kabul edilsin ve ayrıca,

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\left\{\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(t)}{a(t)}+\left[\frac{\beta_1(t)}{a(t)}-\frac{H(t)}{a(t)}\right]\right\}>1 \tag{5.3}$$

olsun. O zaman pozitif K_1 ve K_2 sabitleri vardır öyle ki,

$$K_1\le\lim_{t\to+\infty}\inf x(t;t_0,\phi)\le\lim_{t\to+\infty}\sup x(t;t_0,\phi)\le K_2$$

olur.

Lemma 5.1. (Jiang,2014)

$$\max_{1\le j\le m}\gamma_j^{+}\le\frac{\tilde{K}}{M} \tag{5.4}$$

ifadesini sağlayan pozitif bir M sabiti var ve

$$\sup_{t\in R}\left\{-a(t)+\frac{1}{eM}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)}\right\}<0$$

ve

$$\inf_{t\in R}\left\{-a(t)+e^{-K}\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)}\right\}>0 \tag{5.5}$$

olsun. O zaman, $\{x_t(t_0,\varphi):t\in[t_0,\eta(\varphi))\}$ cümlesi sınırlıdır ve $\eta(\varphi)=+\infty$ olur. Ayrıca, $t_\varphi>t_0$ olmak üzere,

$$K < x\left(t;\, t_0\,,\, \varphi\right) < M,\; t > t_{\phi} \tag{5.6}$$

olur.

Lemma 5.2. (Zhang,2014)Yukarıda verilen şartlar sağlansın ve

$$\sup_{t\in R}\left\{-a(t)+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\frac{1}{e^2}+\beta_1(t)e^{-K}(M+1)+H(t)\right\}<0. \tag{5.7}$$

olsun. Ayrıca $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$, (5.1) denkleminin bir çözümü ve φ', $[-r,0]$ aralığında sınırlı ve sürekli olsun. O zaman herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $l = l(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki her $[\alpha, \alpha + l]$ aralığı en az bir δ sayısı içerir ve $N > 0$ olmak üzere her $t > N$ için $|x(t+\delta)-x(t)| \le \varepsilon$ olur.

Teorem 5.3.(Zhang,2014) Lemma 5.2 in şartlarının sağlandığı varsayılsın. Bu takdirde, (5.1) denklemi en az bir pozitif hemen hemen periyodik $x^*(t)$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm global üstel kararlıdır. Yani her $t > t_{\varphi,x^*}$ için K_{φ,x^*} ve t_{φ,x^*} sabitleri vardır öyle ki,

$$\left|x(t;t_0,\varphi)-x^*(t)\right| < K_{\varphi,x^*}e^{-\lambda t}$$

olur.

İspat. $\vartheta(t)=\vartheta(t;t_0,\phi^{\vartheta})$, (5.1)denkleminin bir çözümü olsun. Her $t\in(-\infty, t_0-r]$ için $\vartheta(t)\equiv\vartheta(t_0-r)$ olsun.

$$\varepsilon(k,t) = -\left[a(t+t_k)-a(t)\right]\vartheta(t+t_k)$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\left[\beta_j(t+t_k)-\beta_j(t)\right]\vartheta(t+t_k-\tau_j(t+t_k))e^{-\gamma_j(t+t_k)\vartheta(t+t_k-\tau_j(t+t_k))}$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\Big[\vartheta(t+t_k-\tau_j(t+t_k))e^{-\gamma_j(t+t_k)\vartheta(t+t_k-\tau_j(t+t_k))}$$

$$-\vartheta(t-\tau_j(t)+t_k)e^{-\gamma_j(t+t_k)\vartheta(t-\tau_j(t)+t_k)}\Big]$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\Big[\vartheta(t-\tau_j(t)+t_k)e^{-\gamma_j(t+t_k)\vartheta(t-\tau_j(t)+t_k)}$$

$$-\vartheta(t-\tau_j(t)+t_k)e^{-\gamma_j(t)\vartheta(t-\tau_j(t)+t_k)}\Big]$$

$$+\left[\beta_1(t+t_k)-\beta_1(t)\right]\vartheta(t+t_k-\tau_1(t+t_k))e^{-\gamma_1(t+t_k)x(t+t_k)}$$

$$+\beta_1(t)\Big[\vartheta(t+t_k-\tau_1(t+t_k))e^{-\gamma_1(t+t_k)\vartheta(t+t_k)}-\vartheta(t-\tau_1(t)+t_k)e^{-\gamma_1(t)\vartheta(t+t_k)}\Big]$$

$$-\left[H(t+t_k)-H(t)\right]\vartheta(t+t_k)-\sigma(t+t_k))$$

$$-H(t)\left[\vartheta(t+t_k)-\sigma(t+t_k))-\vartheta(t-\sigma(t)+t_k)\right],\ t\in R \tag{5.8}$$

olur. Burada $\{t_k\}$ reel sayıların herhangi bir dizisidir. $\vartheta(t)$ çözümü sınırlı ve her $t\ge t_{\varphi,\vartheta}$ için

$$K<\vartheta(t)<M \tag{5.9}$$

yazılabilir. Bu nedenle (5.1) nin sağ kısmı da sınırlıdır ve $[t_0-r,+\infty)$ aralığı üzerinde $\vartheta'(t)$ türev fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olur. Bu yüzden $(-\infty,t_0-r]$ için $\vartheta(t)\equiv\vartheta(t_0-r)$ ifadesinden $\vartheta(t)$ nin R de düzgün sürekli olduğu elde edilir. O zaman $a,H,\sigma,\tau_j,\gamma_j$ ve β_j fonksiyonlarının hemen hemen periyodikliğinden her j,t için,

$$|a(t+t_k)-a(t)|\le\frac{1}{k},$$

$$|H(t+t_k)-H(t)|\le\frac{1}{k},$$

$$|\tau_j(t+t_k)-\tau_j(t)|\le\frac{1}{k},$$

$$|\sigma(t+t_k)-\sigma(t)|\le\frac{1}{k},$$

$$|\beta_j(t+t_k)-\beta_j(t)|\le\frac{1}{k},$$

$$|\gamma_j(t+t_k)-\gamma_j(t)|\le\frac{1}{k},$$

$$|\varepsilon(k,t)|\le\frac{1}{k} \tag{5.10}$$

ifadelerini sağlayan bir $\{t_k\}\to\infty$ dizisi seçilebilir. $\{\vartheta(t+t_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ ifadesi düzgün sınırlı olduğundan dolayı $\vartheta(t+t_{k_j})$ nin R nin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde sürekli bir $x^*(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsayacak şekilde $\{t_k\}$ nın bir $\left\{t_{k_j}\right\}$ alt dizisi seçilebilir ve her $t\in R$ için,

$$K\le x^*(t)\le M \tag{5.11}$$

olur.

Şimdi $x^*(t)$ ın (4.1) nin bir çözümü olduğu ispatlanacaktır. Gerçekte herhangi $t\ge t_0$ ve $\Delta t\in R$ için $t+\Delta t\ge t_0$ olmak üzere yukarıdaki bilgiler ışığında,

$$x^*(t+\Delta t)-x^*(t)$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left[\vartheta(t+\Delta t+t_k)-\vartheta(t+t_k)\right]$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\int_t^{t+\Delta t}\{-a(\mu+t_k)\vartheta(\mu+t_k)$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(\mu+t_k)\vartheta(\mu+t_k-\tau_j(\mu+t_k))e^{-\gamma_j(\mu+t_k)\vartheta(\mu+t_k-\tau_j(\mu+t_k))}$$

$$+\beta_1(\mu+t_k)\vartheta(\mu+t_k-\tau_1(\mu+t_k))e^{-\gamma_1(\mu+t_k)\vartheta(\mu+t_k)}$$

$$-H(\mu+t_k)\vartheta(\mu+t_k-\sigma(\mu+t_k))\}\,du$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \int_t^{t+\Delta t} \{-a(\mu)\vartheta(\mu + t_k)$$

$$+ \sum_{j=2}^{m} \beta_j(\mu)\vartheta(\mu + t_k - \tau_j(\mu))e^{-\gamma_j(\mu)\vartheta(\mu + t_k - \tau_j(\mu))}$$

$$+\beta_1(\mu + t_k)\vartheta(\mu + t_k - \tau_1(\mu + t_k))e^{-\gamma_1(\mu + t_k)\vartheta(\mu + t_k)}$$

$$-H(\mu)\vartheta(\mu - \sigma(\mu) + t_k) + \varepsilon(k,\mu)\} du$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \{-a(\mu)x^*(\mu) + \sum_{j=2}^{m} \beta_j(\mu)x^*(\mu - \tau_j(\mu))e^{-\gamma_j(\mu)x^*(\mu - \tau_j(\mu))}$$

$$+\beta_1(\mu)x^*(\mu - \tau_1(\mu))e^{-\gamma_1(\mu)x^*(\mu)} - H(\mu)x^*(\mu - \sigma(\mu))\} du$$

$$+ \lim_{k \to +\infty} \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon(k,\mu)d\mu$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \{-a(\mu)x^*(\mu) + \sum_{j=2}^{m} \beta_j(\mu)x^*(\mu - \tau_j(\mu))e^{-\gamma_j(\mu)x^*(\mu - \tau_j(\mu))}$$

$$+\beta_1(\mu)x^*(\mu - \tau_1(\mu))e^{-\gamma_1(\mu)x^*(\mu)} - H(\mu)x^*(\mu - \sigma(\mu))\} du \tag{5.12}$$

elde edilir. Sonuç olarak yukarıdaki bilgiler dikkate alındığında,

$$\frac{d}{dt}\{x^*(t)\} = -a(t)x^*(t) + \sum_{j=2}^{m} \beta_j(t)x^*(t - \tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x^*(t - \tau_j(t))}$$

$$+\beta_1(t)x^*(t - \tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x^*(t)} - H(t)x^*(t - \sigma(t)) \tag{5.13}$$

yazılabilir. Bu yüzden $x^*(t)$ (5.1) nin bir çözümüdür. İkinci olarak $x^*(t)$ nin (5.1) nin hemen hemen periyodik bir çözümü olduğu gösterilecektir. Lemma 5.2 den herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $l = l(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki her $[\alpha, \alpha + 1]$ aralığında en az bir δ vardır ve $N > 0$ olmak üzere her $t > N$ için

$$|\vartheta(t + \delta) - \vartheta(t)| \leq \varepsilon \tag{5.14}$$

olur. O zaman herhangi sabit $s \in R$ için yeterince büyük pozitif $N_1 > N$ tam sayısı bulunabilir ve herhangi bir $k > N_1$ için

$$s + t_k > N, \ |\vartheta(s + t_k + \delta) - \vartheta(s + t_k)| \leq \varepsilon \tag{5.15}$$

olur. Böylece $k \to +\infty$ için $|x^*(s+\delta) - x^*(s)| \leq \varepsilon$ elde edilir. Bu ise x^* ın (5.1) in hemen hemen periyodik bir çözümü olduğunu gösterir. Son olarak $x^*(t)$ nin global üstel kararlı olduğu ispatlanacaktır. $t \in [t_0 - r, +\infty)$ olmak üzere $x(t) = x(t; t_0, \phi)$ ve $y(t) = x(t) - x^*(t)$ olsun. O zaman,

$$y'(t) = -a(t)y(t)$$

$$+ \sum_{j=2}^{m} \beta_j(t)\left[x(t - \tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))} - x^*(t - \tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x^*(t-\tau_j(t))} \right]$$

$$+\beta_1(t)\left[x(t - \tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x(t)} - x^*(t - \tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x^*(t)} \right] - H(t)y(t - \sigma(t)) \tag{5.16}$$

olur. Lemma 5.2 ten bir $t_{\varphi,\varphi^*} > t_0$ sayısıvardır öyle ki her $t \in [t_{\varphi,\varphi^*} - r, +\infty)$ için

$$K \leq x(t), x^*(t) \leq M \tag{5.17}$$

olur.

$$V(t) = |y(t)|e^{\lambda t} \tag{5.18}$$

Lyapunov fonksiyonunu alalım. $y(t)$ çözümü boyunca $V(t)$ nin soldan türevi hesaplandığında her $t > t_{\varphi,\varphi^*}$ için,

$$D^-(V(t)) \leq -a(t)|y(t)|e^{\lambda t}$$

$$+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\left|x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))}-x^*(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x^*(t-\tau_j(t))}\right|e^{\lambda t}$$

$$+\beta_1(t)\left|x(t-\tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x(t)}-x^*(t-\tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x^*(t)}\right|e^{\lambda t}$$

$$+H(t)\left|y(t-\sigma(t))\right|e^{\lambda t}+\lambda\left|y(t)\right|e^{\lambda t} \qquad (5.19)$$

elde edilir. Her $t_* > t_{\varphi,\varphi^\cdot}$ için,

$$V(t)=\left|y(t)\right|e^{\lambda t}<e^{\lambda t_{\phi,\phi^*}}\left(\max_{t\in\left[t_0-r,t_{\phi,\phi^*}\right]}\left|x(t)-x^*(t)\right|+1\right)=:K_{\phi,\phi^*} \qquad (5.20)$$

olduğu iddia edilmektedir. Tersine, bunun doğru olmadığını varsayalım. Bu takdirde $t_* > t_{\varphi,\varphi^\cdot}$ sayısı vardır öyle ki her $t\in\left[t_0-r,t_*\right)$ için,

$$V(t_*)=K_{\varphi,\varphi^\cdot} \text{ ve } V(t)<K_{\varphi,\varphi^\cdot} \qquad (5.21)$$

olur.

$K\le\gamma_j(t_*)x(t_*-\tau_j(t_*)),\gamma_j(t_*)x^*(t_*-\tau_j(t_*))\le\gamma_J{}^{+}M\le\tilde{K},\ j=1,2,...,m$ olduğundan yukarıdaki ifadeler yardımıyla,

$$0\le D^-(V(t_*))$$

$$\le -a(t_*)\left|y(t_*)\right|e^{\lambda t_*}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t_*)\left|x(t_*-\tau_j(t_*))e^{-\gamma_j(t_*)x(t_*-\tau_j(t_*))}-x^*(t_*-\tau_j(t_*))e^{-\gamma_j(t_*)x^*(t_*-\tau_j(t_*))}\right|e^{\lambda t_*}$$

$$+\beta_1(t_*)\left|x(t_*-\tau_1(t_*))e^{-\gamma_1(t_*)x(t_*)}-x^*(t_*-\tau_1(t_*))e^{-\gamma_1(t_*)x^*(t_*)}\right|e^{\lambda t_*}$$

$$+H(t_*)\left|y(t_*-\sigma(t_*))\right|e^{\lambda t_*}+\lambda\left|y(t_*)\right|e^{\lambda t_*}$$

$$\leq -a(t_*)|y(t_*)|e^{\lambda t_*}+\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(t_*)}{\gamma_j(t_*)}\Big|\gamma_j(t_*)x(t_*-\tau_j(t_*))e^{-\gamma_j(t_*)x(t_*-\tau_j(t_*))}$$

$$-\gamma_j(t_*)x^*(t_*-\tau_j(t_*))e^{-\gamma_j(t_*)x^*(t_*-\tau_j(t_*))}\Big|e^{\lambda t_*}$$

$$+\beta_1(t_*)\left|x(t_*-\tau_1(t_*))e^{-\gamma_1(t_*)x(t_*)}-x(t_*-\tau_1(t_*))e^{-\gamma_1(t_*)x^*(t_*)}\right|e^{\lambda t_*}$$

$$+\beta_1(t_*)\left|x(t_*-\tau_1(t_*))e^{-\gamma_1(t_*)x^*(t_*)}-x^*(t_*-\tau_1(t_*))e^{-\gamma_1(t_*)x^*(t_*)}\right|e^{\lambda t_*}$$

$$+H(t_*)|y(t_*-\sigma(t_*))|e^{\lambda t_*}+\lambda|y(t_*)|e^{\lambda t_*}$$

$$\leq -[a(t_*)-\lambda]|y(t_*)|e^{\lambda t_*}+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t_*)\frac{1}{e^2}|y(t_*-\tau_j(t_*))|e^{\lambda t_*}$$

$$+\beta_1(t_*)M\left|e^{-\gamma_1(t_*)x(t_*)}-e^{-\gamma_1(t_*)x^*(t_*)}\right|e^{\lambda t_*}$$

$$+\beta_1(t_*)\left|x(t_*-\tau_1(t_*))-x(t_*-\tau_1(t_*))\right|e^{-\gamma_1(t_*)x^*(t_*)}e^{\lambda t_*}$$

$$+H(t_*)|y(t_*-\sigma(t_*))|e^{\lambda t_*}$$

$$\leq -[a(t_*)-\lambda]|y(t_*)|e^{\lambda t_*}+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t_*)\frac{1}{e^2}|y(t_*-\tau_j(t_*))|e^{\lambda(t_*-\tau_j(t_*))}e^{\lambda\tau_j(t_*)}$$

$$+\beta_1(t_*)Me^{-K}|y(t_*)|e^{\lambda t_*}$$

$$+\beta_1(t_*)e^{-K}|y(t_*-\tau_1(t_*))|e^{\lambda(t_*-\tau_1(t_*))}e^{\lambda\tau_1(t_*)}$$

$$+H(t_*)|y(t_*-\sigma(t_*))|e^{\lambda(t_*-\sigma(t_*))}e^{\lambda\sigma(t_*)}$$

$$\leq\left\{-[a(t_*)-\lambda]+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t_*)\frac{1}{e^2}e^{\lambda r}+\beta_1(t_*)e^{-K}(M+e^{\lambda r})+H(t_*)e^{\lambda r}\right\}K_{\phi,\phi^*}$$

elde edilir. Böylece,

$$0\leq -[a(t_*)-\lambda]+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t_*)\frac{1}{e^2}e^{\lambda r}+\beta_1(t_*)e^{-K}(M+e^{\lambda r})+H(t_*)e^{\lambda r}$$

ifadesi Lemma 5.2 deki şart ile çelişmiş olur. Bu çelişki (5.20) nin doğru olduğunu gösterir. Yani her $t > t_{\varphi,\varphi^*}$ için $|y(t)| < K_{\phi,\phi^*}e^{-\lambda t}$ olur. Bu sonuç ise Teorem 5.3 ün ispatını tamamlar.

Örnek5.1.(Zhang,2014)(5.1) denkleminin özel bir durumu olan hasat terimli aşağıdakiNicholson kurtçuk modelini göz önüne alalım.

$$x'(t) = -\frac{30+15|\cos t|}{100}x(t) + \frac{100-\sin\sqrt{2}t}{100+\sin\sqrt{2}t}x(t-2e^{\sin^4 t})e^{-x(t-2e^{\sin^4 t})}$$
$$+\frac{1}{100}(3+\cos^4\sqrt{3}t)x(t-2e^{\cos^4 t})e^{-x(t)}$$
$$-\frac{1}{100}(2+\cos^4\sqrt{3}t)x(t-2e^{\cos^4 t}). \tag{5.22}$$

Bu denklem, (5.1) denklemini ve teoremin şartları dikkate alındığında,

$a^+ = 0.45,\ a^- = 0.3,\ \beta_2^- = \frac{99}{101},\ \beta_2^+ = \frac{101}{99},$

$\gamma_i^+ = \gamma_i^- = 1, i = 1,2,\ \beta_1(t) = \frac{1}{100}(3+\cos^4\sqrt{3}t),\ H(t) = \frac{1}{100}(2+\cos^4\sqrt{3}t),$

$\tau_2(t) = 2e^{\sin^4 t},\ \tau_1(t) = \sigma(t) = 2e^{\cos^4 t},\ r = 2e$ dir. $K \approx 0.7215355$ ve $\tilde{K} \approx 1.342276$

elde edileblir. $M = 1.33$ olsun. O zaman $a^- M = 0.3\times 1.33 \approx 0.399,$

$\frac{\beta_2^+}{\gamma_2^-}\frac{1}{e} = \frac{101}{99}\frac{1}{e} \approx 0.3753113,\ \frac{\beta_1^+}{\gamma_1^-}\frac{1}{e} = \frac{101}{99}\frac{1}{e} \approx 0.016,$

$\frac{\beta_2^-}{\gamma_2^+}e^{-K} = \frac{99}{101}e^{-K} \approx \frac{99}{101}e^{-0.7215355} \approx 0.4763816,\ \beta_2^+\frac{1}{e^2} = \frac{101}{99}\frac{1}{e^2} \approx 0.1380693,$

$\beta_1^+ e^{-K}(M+1) + H^+ \approx 0.09$ olur.

Bu ifadeler ise verilen örneğin teoremin bütün şartlarını sağladığı dolayısıyla ele alınan (5.22) denkleminin tek bir pozitif hemen hemen periyodik $x^*(t)$ çözümüne sahip olduğu ve bu çözümün global üstel kararlı olduğu sonucuna varılır.

6. HASAT TERİMLİ NICHOLSON KURTÇUK MODELİ İÇİN POZİTİF SÖZDE HEMEN HEMEN PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL KARARLILIĞI

Berezansky ve ark.(2010) birçok biyolojik uygulamada ortaya çıkan sabit ve çoklu gecikmeli birinci mertebeden

$$x'(t) = -\delta(t) + Px(t-\tau)e^{-ax(t-\tau)} \tag{6.1}$$

Nicholson kurtçuk modelini ele aldı. Burada, $x(t)$, t anında popülasyonun büyüklüğü, P kişi başına düşen maksimum günlük yumurta üretimi, $\frac{1}{a}$ maksimum oranında üretilen popülasyonun büyüklüğü, δ günlük yetişkin ölüm oranı ve τ üretim zamanıdır. Bu araştırmacılar (6.1) diferansiyel denklemi için çözümlerin niteliksel davranışlarıyla ilgili literaratürde yapılmış olan çalışmaları özetledikten sonra bu denklemin farklı modelleri için çözümlerin niteliksel davranışlarıyla alakalı bazı sonuçları ispatladılar.

Daha sonradan Tunç ve Liu (2015), mevcut çalışmalardan esinlenerek otonom olmayan genelleştirilmiş

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=2}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))}$$

$$+\beta_1(t)x(t-\tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)x(t)} - H(t)x(t-\sigma(t)) \tag{6.2}$$

Nicholson kurtçuk modelinin pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümlerinin global üstel kararlılığını incelediler.

Burada $a,\ H, \sigma,\ \gamma_j\ :\ R \to (0,+\infty)$ ve $\beta_j, \tau_j : R \to [0,+\infty),\ j = 1,2,...,m$ fonksiyonları sınırlı ve süreklidir. Tunç ve Liu (2015) bu denklemin pozitif hemen hemen periyodik çözümlerinin üstel karalılığını daralma dönüşümü yardımıyla inceledi.

Yazarlar, sabit nokta teorisi yardımıyla (6.2) nin pozitif periyodik çözümlerinin varlığını garanti etmek için sabit nokta teoremini ve derece teorisini kullanarak bazı kriterler belirlediler. Tunç ve Liu (2015) aşağıda verilecek bazı kabuller altında (6.2) denklemiyle ilgili bazı sonuçlar verdiler.

Benzer biçimde Xiong (2016),

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)x(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))} \tag{6.3}$$

ile verilen denklemin pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümünün varlığını, global üstel kararlılığını ve $t \to \infty$ iken çözümlerin sıfıra yakınsadığını ispatladı. (6.2) denkleminin katsayıları ile ilgi yapılan kabuller aynı şekilde (6.3) denkleminin katsayıları için de geçerlidir.

Yukarıda verilen bilgilere ilave olarak da (6.2) ve (6.3) denklemlerindeki fonksiyonlarla ilgili temel kabuller ve ihtiyaç duyulan bazı temel bilgiler ifade edilecektir.

g, R de sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$g^+ = \sup_{t \in R} |g(t)|, \; g^- = \inf_{t \in R} |g(t)| \tag{6.4}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca,

$$\gamma_j^- \geq 1, \; j = 1,2,\ldots,m, \; r = \max\left\{ \max_{1 \leq j \leq m} \tau_j^+, \sigma^+ \right\} \tag{6.5}$$

$C = C([-r,0], R)$ ise supremum $\|.\|$ normlu sürekli fonksiyonlar uzayı ve $C_+ = C([-r,0],(0,+\infty))$ olsun. Eğer $x(t)$ fonksiyonu $[-r+t_0, \sigma)$, $(t_0, \sigma \in \Re)$ aralığı üzerinde sürekli ve tanımlı ise, o zaman her $\theta \in [-r,0]$ için $x_t \in C$ olur. Burada $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ ile verilmektedir. Aynı zamanda,

$$x_{t_0} = \varphi, \quad \varphi \in C_+ \tag{6.6}$$

başlangıç fonksiyonunu ele alalım. $x_t(t_0,\varphi)$ veya $x(t;t_0,\varphi)$ ifadesi, başlangıç değer probleminin kabul edilebilir bir çözümü olarak alınmaktadır. Ayrıca, $[t_0,\eta(\varphi))$ ifadesi ise $x_t(t_0,\varphi)$ çözümünün maximal sağ varlık aralığı olsun.

$\dfrac{1-x}{e^x}$ ile verilen fonksiyonun $[0,1]$ aralığında azalan olduğu açıktır. Dolaysıyla,

$$\frac{1-K}{e^K} = \frac{1}{e^2} \tag{6.7}$$

ifadesini sağlayan tek bir $K \in (0,1)$ vardır. Açık bir şekilde,

$$\sup_{x \geq K} \left| \frac{1-x}{e^x} \right| = \frac{1}{e^2} \tag{6.8}$$

olduğu görülebilir. Bununla beraber, xe^{-x}, $[0,1]$ aralığında artan ve $[1+,\infty)$ aralığında azalan olduğu için $(1+,\infty)$ aralığında

$$Ke^{-K} = \tilde{K}e^{-\tilde{K}} \tag{6.9}$$

ifadesini sağlayan tek $\tilde{K}$ sayısı vardır. Belirtelim ki, bu bölümde verilecek tüm sonuçlar Tunç ve Liu (2015) ve Xiong (2016) ’a aittir. Bu bölüm orijinal sonuç içermemektedir.

6.1.Nicholson Kurtçuk Modeli İçin Çözümlerin Bazı Niteliksel Davranışları

Bu kesimde Tunç ve Liu (2015) ve Xiong (2016) tarafından (6.2) ve (6.3) denklemlerinin çözümlerin varlığı, global üstel kararlılığı ve üstel yakınsaması ile ilgili sonuçlar ele alınacaktır.

Lemma 6.1.(Tunç ve Liu , 2015)

Her $t \in R$ için,

$$\inf_{t \in R} \left\{ \beta_1(t) e^{-\tilde{K}} - H(t) \right\} > 0 \text{ ve } \tau_1(t) \equiv \sigma(t) \qquad (6.10)$$

olsun. İlave olarak,

$$\max_{1 \le j \le m} \gamma_j^{+} \le \frac{\tilde{K}}{M} \qquad (6.11)$$

ifadesini sağlayan pozitif bir M sabitinin var ve

$$\sup_{t \in R} \left\{ -a(t) + \frac{1}{eM} \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)} \right\} < 0$$

ve

$$\inf_{t \in R} \left\{ -a(t) + e^{-K} \sum_{j=2}^{m} \frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)} \right\} > 0 \qquad (6.12)$$

sağlandığını kabul edelim. O zaman $\{x_t(t_0, \varphi) : t \in [t_0, \eta(\varphi))\}$ cümlesi sınırlıdır ve $\eta(\varphi)$ $=+\infty$ olur. Ayrıca, $t_\varphi > t_0$ olmak üzere her $t > t_\varphi$ için $K < x(t; t_0, \varphi) < M$ olur. Bu sonuç ise ispatı tamamlar.

Lemma 6.2.(Zhang, 1995)

ϕ , $U \subset C^n$ üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in R$ için $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in PAP(R)$ fonksiyonu için $(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in U$ oluyor ise o zaman $\phi \circ f \in PAP(R)$ dir.

Teorem 6.1.(Tunç ve Liu, 2015)

(6.9) ve (6.10) şartlarına ilaveten aşağıdaki şartların sağlandığı kabul edilsin.

$$\sup_{t\in R}\left\{-a(t)+\frac{1}{eM}\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)}+\frac{1}{M}\frac{\beta_1(t)}{\gamma_1(t)}\tilde{K}e^{-K}\right\}<0,$$

$$\inf_{t\in R}\left\{-a(t)+e^{-K}\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)}\right\}>0, \tag{6.13}$$

$$\sup_{t\in R}\left\{-a(t)+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\frac{1}{e^2}+\beta_1(t)e^{-K}(M+1)+H(t)\right\}<0. \tag{6.14}$$

O zaman,(5.2) Nicholson kurtçuk modelinin en az bir pozitif sözde hemen hemen periyodik $x^*(t)$ çözümü vardır ve bu çözüm global üstel kararlıdır.

İspat. (5.12) den dolayı,.

$$\sup_{t\in R}\left\{-a(t)+[\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\frac{1}{e^2}+\beta_1(t)e^{-K}(M+1)+H(t)]e^{\varsigma}\right\}<0 \tag{6.15}$$

şartını sağlayan bir $\varsigma\in(0,1)$ sabiti seçebiliriz. $B=\{\varphi|\varphi\in PAP(R,R)$ R'de düzgün sürekli fonksiyon, $K\le\varphi(t)\le M$ bütün $t\in R$ için$\}$ cümlesini tanımlayalım. B, $PAP(R,R)$ nin kapalı bir alt kümesidir. Ayrıca $\phi\in B$ ve $f(t,z)=\phi(t-z)$ olsun. Yukarıdak belirtilen şartlardan dolayı, ϕ nin düzgün sürekliliği, $f,z\in L$ de sürekli olmak üzere $f\in PAP(\Omega\times R)$ olmasını ve $\Omega\subset R$ nin bütün kompak L alt kümeleri için $t\in R$ de düzgünlüğünü gerektirir. Bu durum $\tau_i\in PAP(R,R)$ ve $\phi(t-\tau_i(t))\in PAP(\mathrm{R},R), i=1,2,....,m$ ifadesini ve benzer şekilde, $\varphi(t-\sigma(t))\in PAP(R,R)$ sonucunu verir. Sözde hemen hemen fonksiyonların bileşke teoremine göre,

$$\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\varphi(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)\varphi(t-\tau_j(t))}$$

$$+\beta_1(t)\varphi(t-\tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)\varphi(t)}-H(t)x(t-\sigma(t))\in PAP(R,R)$$

elde edilir.

$$x'(t)=-a(t)x(t)+\sum_{j=2}^{m}\beta_j(t)\varphi(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)\varphi(t-\tau_j(t))}$$

$$+\beta_1(t)\varphi(t-\tau_1(t))e^{-\gamma_1(t)\varphi(t)}-H(t)\varphi(t-\sigma(t)) \tag{6.16}$$

yardımcıdenklemini ele alalım. $M[a]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}a(s)ds>0$ eşitsizliğinden dolayı (6.16) tam olarak bir sözde hemen hemen periyodik

$$x^{\phi}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\int_s^t a(u)du}[\sum_{j=2}^{m}\beta_j(s)\phi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))}$$

$$+\beta_1(s)\phi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\phi(s)}-H(s)\phi(s-\sigma(s))]ds \tag{6.17}$$

çözümüne sahiptir.

$T:B\to PAP(R,R)$ olmak üzere $T(\varphi(t))=x^{\varphi}(t),\forall\varphi\in B$ dönüşümü tanımlansın. Yukarıdaki bilgiler ışığında ve her $s\in R$ için $\gamma_1(s)\varphi(s-\tau_1(s)),\ \gamma_1(s)\phi(s)\in[K,\tilde{K}]$ ifadesinden dolayı,

$$\beta_1(s)\varphi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\varphi(s)}=\frac{\beta_1(s)}{\gamma_1(s)}\gamma_1(s)\varphi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\varphi(s)}$$

$$\le\frac{\beta_1(s)}{\gamma_1(s)}\tilde{K}e^{-K} \tag{6.18}$$

ifadesi elde edilir. Herhangi bir $\phi\in B$ için (6.13) ve (6.18) ile birlikte $\sup_{u\ge0}ue^{-u}=\frac{1}{e}$ ifadesinden,

$$x^{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))} \right.$$

$$\left. +\beta_1(s)\varphi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\varphi(s)} - H(s)\varphi(s-\sigma(s)) \right] ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \frac{1}{e} + \frac{\beta_1(s)}{\gamma_1(s)} \tilde{K}e^{-\tilde{K}} \right] ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} a(s)Mds = M, \ t \in R, \qquad (6.19)$$

ifadesi elde edilir.

xe^{-x}, $[0,1]$ aralığında artan ve $[1+,\infty)$ aralığında azalan olduğundanve yukarıdakibağıntılar dikkate alındığında ve ayrıca her $t \in R,\ j = 2,3,...,m$ için,

$$Ke^{-K} = \tilde{K}e^{-\tilde{K}},\ K \leq \gamma_j(t)(\varphi(t-\tau_j(t)) \leq \gamma_j^{+}M \leq \tilde{K}, \qquad (6.20)$$

ifadelerinin gerçekliğinden dolayı,

$$x^{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))} \right.$$

$$\left. +\beta_1(s)\varphi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\varphi(s)} - H(s)\varphi(s-\sigma_1(s)) \right] ds$$

$$\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \left[\sum_{j=2}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))} \right.$$

$$+\beta_1(s)\varphi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\tilde{K}}-H(s)\varphi(s-\sigma_1(s))\Big]ds$$

$$\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du}\left[\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}Ke^{-K}\right]ds$$

$$\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} a(s)Kds = K,\ t\in R,$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki tartışmalar göz önüne alındığında kolaylıkla her $t\in R$ için,

$$K \leq x^{\phi}(t) \leq M \tag{6.21}$$

sonucuna varılabilir. Daha sonra (6.15) ten $(x^{\phi}(t))'$ ifadesinin her $t\in R$ için sınırlı olduğu ve $x^{\phi}\in PAP(R,R)$ ifadesinin R üzerinde düzgün sürekli olduğu elde edilir. Bu yüzden $x^{\phi}\in B$ ve T dönüşümü B den B ye bir dönüşümdür. Şimdi T dönüşümünün B üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. Gerçekte, φ,ψ için,

$$\|T(\phi)-T(\psi)\|_{\infty} = \sup_{t\in R}\Bigg|\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du}\Bigg\{\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\Big[\Big(\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))}$$

$$-\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))}\Big)\Big]$$

$$+\beta_1(s)\Big[\phi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\phi(s)}-\psi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\psi(s)}\Big]$$

$$-H(s)\big[\phi(s-\sigma(s))-\psi(s-\sigma(s))\big]\Bigg\}ds\Bigg|$$

$$\le \sup_{t\in R}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du}\left\{\sum_{j=2}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\left[\left|\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))}\right|\right]$$

$$+\beta_1(s)\left|\phi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\phi(s)}-\phi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\psi(s)}\right|$$

$$+\beta_1(s)\left|\phi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\psi(s)}-\psi(s-\tau_1(s))e^{-\gamma_1(s)\psi(s)}\right|$$

$$+H(s)\left|\phi(s-\sigma(s))-\psi(s-\sigma(s))\right|\Big\}\,ds \qquad (6.22)$$

yukarıdaki tartışmaların ışığında ve

$$\left|e^{-s}-e^{-t}\right|=e^{-(s+\theta(t-s))}\left|s-t\right|\le e^{-K}\left|s-t\right|,\ s,t\in[K,\tilde{K}],\ 0<\theta<1,$$

$$\left|se^{-s}-te^{-t}\right|=\left|\frac{1-(s+\theta(t-s))}{e^{(s+\theta(t-s))}}\right|\left|s-t\right|\le\frac{1}{e^2}\left|s-t\right|,\ s,t\in[K,+\infty),\ 0<\theta<1,$$

eşitsizliklerinden,

$$\left\|T(\phi)-T(\psi)\right\|_\infty$$

$$\le \sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du}\left\{\sum_{j=2}^{m}\left[\beta_j(s)\frac{1}{e^2}\left|\phi(s-\tau_j(s))-\psi(s-\tau_j(s))\right|\right]\right.$$

$$+\beta_1(s)\left|\phi(s-\tau_1(s))\right|\left|\gamma_1(s)\right|\left|e^{-K}\right|\left|\phi(s)-\psi(s)\right|$$

$$+\beta_1(s)e^{-\gamma_1(s)\psi(s)}\left|\phi(s-\tau_1(s))-\psi(s-\tau_1(s))\right|$$

$$\left.+H(s)\left|\phi(s-\sigma(s))-\psi(s-\sigma(s))\right|\right\}ds$$

$$\leq \|\phi-\psi\|_{\infty} \sup_{t\in R} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(u)du} \left\{ \sum_{j=2}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2} + \beta_1(s)e^{-K}(M+1) + H(s) \right\} ds$$

$$\leq \|\phi-\psi\|_{\infty} \sup_{t\in R} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(u)du} a(s)\frac{1}{e^{\zeta}} ds$$

$$\frac{1}{e^{\zeta}}\|\varphi-\psi\|_{\infty}$$

ifadesi elde edilir.

Burada $e^{-\zeta} < 1$ dir. Böylece T dönüşümü B üzerinde daralma dönüşümüdür. Böylece T dönüşümü birtek $\varphi^* \in B$ sabit noktasına (fixed point) sahip ve $T\varphi^* = \varphi^*$ olur. (6.16) ten dolayı φ^*, (6.3) denklemini sağlar. Böylece $\varphi^* \in B$ (6.2) nin pozitif sözde hemen hemen periyodik bir çözümü olur.

Son olarak Teorem 6.1 deki şartlardan, Lemma 6.1 deki bütün şartların sağlandığı gösterilebilir.

Örnek 6.1.(Tunç ve Liu,2015)

$$\begin{aligned} x'(t) = &-\frac{30+15|\cos t|}{100}x(t) + \frac{100-\sin\sqrt{2}t}{100+\sin\sqrt{2}t}\, x\left[t-(e^{\sin^4 t}+e^{-t^4\sin^2 t})\right] \\ &\times e^{-x(t-(e^{\sin^4 t}+e^{-t^4\sin^2 t})} \\ &+\frac{1}{100}(3+\cos^4\sqrt{3}t)x(t-2e^{\cos^4 t})e^{-x(t)} \\ &-\frac{1}{1000}(2+\cos^4\sqrt{3}t)x(t-2e^{\cos^4 t}) \end{aligned} \qquad (6.23)$$

lineer hasat terimli Nicholson kurtçuk modelini ele alalım.Açıkça görülüyor ki,

$$a^{+} = 0.45,\ a^{-} = 0.3,\ \beta_2^{-} = \frac{99}{101},\ \gamma_i^{+} = \gamma_i^{-} = 1, i = 1,2,$$

$$\beta_1(t)=\frac{1}{100}(3+\cos^4\sqrt{3}t),\; H(t)=\frac{1}{1000}(2+\cos^4\sqrt{3}t),$$

$$\tau_2(t)=(e^{\sin^4 t}+e^{-t^4\sin^2 t}),\; \tau_1(t)=\sigma(t)=2e^{\cos^4 t},\; r=2e \text{ dir.}$$

$$K\approx 0.7215355$$

ve

$$\tilde{K}\approx 1.342276$$

olduğunu not edelim. $M=1.33$ olsun. O zaman,

$$a^{-}M=0.3\times 1.33\approx 0.399,\; \frac{\beta_2^{+}}{\gamma_2^{-}}\frac{1}{e}=\frac{101}{99}\times\frac{1}{e}\approx 0.3753113,\; \frac{\beta_1^{+}}{\gamma_1^{-}}\frac{1}{e}=\frac{101}{99}\times\frac{1}{e}\approx 0.016,$$

$$\frac{\beta_2^{-}}{\gamma_2^{+}}e^{-K}=\frac{99}{101}\times e^{-K}\approx\frac{99}{101}\times e^{-0.7215355}\approx 0.4763816,\; \beta_2^{+}\frac{1}{e^2}=\frac{101}{99}\times\frac{1}{e^2}\approx 0.1380693,$$

$$\beta_1^{+}e^{-K}(M+1)+H^{+}\approx 0.09,\; \inf_{t\in R}\left\{\beta_1(t)e^{-\tilde{K}}-H(t)\right\}>0.001$$

olur. Bu ifadeler ise verilen örneğin Teorem 6.1 in bütün şartlarını sağladığı, dolayısıyla ele alınan (6.23) modelinin bir tek pozitif sözde hemen hemen periyodik $x^*(t)$ çözümüne sahip olduğu ve bu çözümün global üstel kararlı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi ise (Xiong ,2016) un elde ettiği sonuçlar verilecektir.

Lemma 6.3.(Xiong,2016) $a^*: R\to(0,+\infty)$ hemen hemen periyodik bir fonksiyon olsun. Ayrıca F^S, F^i, η^S, η^i ve M pozitif sabitler olmak üzere her $t,s\in R$ ve $t-s\geq 0$ için aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılsın:

$$F^i e^{-\int_s^t a^*(u)du}\leq e^{-\int_s^t a(u)du}\leq F^S e^{-\int_s^t a^*(u)du}, \tag{6.25}$$

$$-\eta^S=\sup_{t\in R}\left\{-a^*(t)M+\frac{F^S}{e}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)}\right\},$$

ve

$$\eta^{i} = \inf_{t\in R}\left\{-a^{*}(t)+F^{i}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)}{\gamma_j(t)}e^{-K}\right\}, \tag{6.26}$$

$$M > K, \qquad \max_{1\le j\le m}\gamma_j^{+} \le \frac{\tilde{K}}{M} \tag{6.27}$$

olur.Bu takdirde $\{x_t(t_0,\varphi): t\in[t_0,\eta(\varphi))\}$ cümlesi sınırlıdır ve $\eta(\varphi)=+\infty$ olur. Ayrıca, $t_\varphi > t_0$ olmak üzere her $t > t_\varphi$ için $K < x(t;\, t_0,\, \varphi) < M$ sağlanır.

İspat. $\varphi\in C_+$ olduğundan, Teorem 6.1 kullanılarak her $t\in[t_0,\eta(\varphi))$ için $x_t(t_0,\varphi)\in C_+$ yazılabilir. $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$ olsun. (6.3) nin her iki tarafı $\exp(\int_{t_0}^{t}a(v)dv)$ ile çarpılıp $[t_0,t]$ aralığında integrali alınırsa, $x(t_0)=\varphi(0)>0$ olduğu göz önüne alındığındaher $t\in[t_0,\eta(\varphi))$ için,

$$x(t)=e^{\int_{t_0}^{t}a(v)dv}x(t_0)$$
$$+\int_{t_0}^{t}e^{-\int_s^t a(v)dv}\sum_{j=1}^{m}\beta_j(s)x(s-\tau_j(s))\times e^{\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))}ds>0 \tag{6.28}$$

elde edilir.Yukarıda elde edilen ifadeler ve $\sup_{u\ge 0} ue^{-u}=\frac{1}{e}$ eşitliği dikkate alınırsa, her $t\in[t_0,\eta(\phi))$ için,

$$x(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}a(v)dv}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\int_s^t a(v)dv}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))\times e^{\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))}ds$$

$$\le F^{S}e^{-\int_{t_0}^{t}a^{*}(v)dv}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-\int_s^t a^{*}(v)dv}\times F^{S}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\frac{1}{e}ds$$

$$\leq F^S e^{-\int_{t_0}^{t} a^*(v)dv} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a^*(v)dv} \left[-\eta^S + a^*(s)M\right] ds$$

$$\leq F^S e^{-\int_{t_0}^{t} a^*(v)dv} x(t_0) + \sup_{t\in R} \frac{-\eta^S}{a^*(t)}[1-\exp(\int_{t_0}^{t}(a^*(v)dv)] + M\left[1-e^{-\int_{t_0}^{t} a^*(v)dv}\right]$$

$$:= A(t)$$

olur.

$A(t)$ nin sınırlılığından $\eta(\varphi) = +\infty$ elde edilir. Bununla beraber,her $t \in [t_1,+\infty)$ için

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = \sup_{t\in R} \frac{-\eta^S}{a^*(t)} + M < M$$

olduğu açıktır. Bu ifade ise $t_1 \in [t_0,+\infty)$ sayısının var olduğu öyle ki,

$$0 < x(t) < M$$

olur. Şimdi $l := \lim_{t\to+\infty} \inf x(t) > 0$ olduğu gösterilecektir. Tersine $l = 0$ olduğu kabul edilsin. Her $t \geq t_0$ için,

$$m(t) = \max\left\{\xi \,\middle|\, \xi \leq t,\ x(\xi) = \min_{t_0 \leq s \leq t} x(s)\right\}$$

tanımlansın.

$l = 0$ olduğundan $t \to +\infty$ iken $m(t) \to +\infty$ ve $\lim_{t\to+\infty} x(m(t)) = 0$ olur.

$m(t)$ nin tanımı dikkate alındığında, bir $t_2 > t_1 + r$ sayısı var öyle ki her $t \in [t_2,+\infty)$ için,

$$0 < x(m(t)) < K,\ m(t) > t_1 + r$$

ve

$$x(m(t)) \le \gamma_j(s)x(s-\tau_j(s)) \le \gamma_j^{+}M \le K$$

elde edilir. Burada $s \in [t_1 + r, m(t)]$, $t \in [t_2, +\infty)$, $j = 1,2,...,m$ dir.

xe^{-x}, $[0,1]$ aralığında artan, $[1,+\infty)$ aralığında azalan ve $Ke^{-K} = \tilde{K}e^{-\tilde{K}}$ olduğu biliniyor. Yukarıda elde edilen ifadelerle birlikte her $t \in [t_2, +\infty)$ için,

$$x(m(t)) = e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a(v)dv} x(t_1 + r)$$
$$+ \int_{t_1+r}^{m(t)} e^{-\int_{s}^{m(t)} a(v)dv} \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \gamma_j(s) \times x(s-\tau_j(s)) e^{\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))} ds$$
$$\ge F^i e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} x(m(t)) + \int_{t_1+r}^{m(t)} e^{-\int_{s}^{m(t)} a^*(v)dv} \times F^i \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} x(m(t)) e^{-x(m(t))} ds$$

ve

$$1 \ge F^i e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} + \int_{t_1+r}^{m(t)} e^{-\int_{s}^{m(t)} a^*(v)dv} F^i \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} e^{-x(m(t))} ds$$
$$\ge F^i e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} + \int_{t_1+r}^{m(t)} e^{-\int_{s}^{m(t)} a^*(v)dv} F^i \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} e^{-K} ds$$
$$\ge F^i e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} + \int_{t_1+r}^{m(t)} e^{-\int_{s}^{m(t)} a^*(v)dv} \left[\eta^i + a^*(s)\right] ds$$

$$\geq F^i e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} + \inf_{t \in R} \frac{-\eta^i}{a^*(t)} \left[1 - e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} \right] + \left[1 - e^{-\int_{t_1+r}^{m(t)} a^*(v)dv} \right] \tag{6.29}$$

eşitsizliklerin elde edilmesini sağlar. t $\to \infty$ için son eşitsizlikte $\inf_{t \in R} \frac{\eta^i}{a^*(t)} < 0$ ifadesi elde edilir. Bu da Lemma daki (6.26) şartile çelişir. Bu yüzden,

$$\lim_{t \to +\infty} \inf x(t) = l > 0$$

olur.

Şimdi, $\lim_{t \to +\infty} \inf x(t) = l > K$ olduğu ispat edilecektir. Yine çelişki yoluyla $l \leq K$ olduğu kabul edilsin. O zaman herhangi bir $\Lambda > K$ pozitif sabit sayısı için $t_3 > t_1 + r$ vardır öyle ki her $s \in [t_3, +\infty)$ için,

$$\begin{aligned} & l - \Lambda \leq x(s(\tau_j(s)) \\ & \leq \gamma_j(s) x(s(\tau_j(s)) \leq \gamma_j^{+} M \leq \tilde{K}, \qquad (j = 1,2,...,m), \end{aligned}$$

olur. xe^{-x}, $[0,1]$ aralığında artan ve $[1+, \infty)$ aralığında azalan olduğu için $Ke^{-K} = \tilde{K}e^{-\tilde{K}}$ olması nedeniyle, her $t \in [t_3, +\infty)$ için,

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\int_{t_3}^{t} a(v)dv} x(t_3) + \int_{t_3}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(v)dv} \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \gamma_j(s) x(s(\tau_j(s)) \\ \times e^{-\gamma_j(s) x(s - \tau_j(s))} ds \end{aligned}$$

$$\geq e^{-\int_{t_3}^{t} a(v)dv} x(t_3) + \int_{t_3}^{t} e^{-\int_s^t a(v)dv} \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} (l-\Lambda) e^{-(l-\Lambda)} ds$$

$$\geq e^{-\int_{t_3}^{t} a(v)dv} x(t_3) + \int_{t_3}^{t} e^{-\int_s^t a(v)dv} \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} (l-\Lambda) e^{-K} ds$$

$$\geq F^i e^{-\int_{t_3}^{t} a^*(v)dv} x(t_3) + F^i \int_{t_3}^{t} e^{-\int_s^t a^*(v)dv} \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} (l-\Lambda) e^{-K} ds$$

$$\geq F^i e^{-\int_{t_3}^{t} a^*(v)dv} x(t_3) + \int_{t_3}^{t} e^{-\int_s^t a^*(v)dv} \times (\eta^i + a^*(s))(l-\Lambda) ds$$

$$\geq F^i e^{-\int_{t_3}^{t} a^*(v)dv} x(t_3) + \inf_{t \in R} \frac{\eta^i}{a^*(t)} (l-\Lambda)[1 - e^{-\int_{t_3}^{t} a^*(v)dv}] + (l-\Lambda)[1 - e^{-\int_{t_3}^{t} a^*(v)dv}]$$

$$:= B(t)$$

Ve

$$\lim_{t \to +\infty} B(t) = \inf_{t \in R} \frac{\eta^i}{a^*(t)} (l-\Lambda) + (l-\Lambda) l.$$

Λ, keyfi bir sabit olduğundan,

$$l = \lim_{t \to +\infty} x(t) \geq \lim_{t \to +\infty} B(t)$$

ve

$$l \geq \inf_{t \in R} \frac{\eta^{i}}{a^{*}(t)} l > l$$

yazılabilir.Bu ise yapılan kabulle bir çelişkidir. Bu nedenle $l > K$ olur ve $t_4 \in [t_1 + r, +\infty)$ vardır öyle kiher $t \in [t_4, +\infty)$ için,

$$K < x(t) \tag{6.30}$$

olur. Yukarıda elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında $t_{\varphi} > t_4$ vardır öyle ki her $t \geq t_{\varphi}$ için,

$$K < x(t; t_0, \varphi) < M$$

olur. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

Lemma 6.4. (Zhang,2014)

$B^{*} = \{\varphi | \varphi \in PAP(R,R),\ R$ de düzgün süreklive her $t \in R$ için $K_1 \leq \varphi(t) \leq K_2\}$ olsun. O zaman, B^{*} cümlesi $PAP(R,R)$ kümesinin kapalı bir alt kümesi olur.

Teorem 6.2.(Xiong,2016)

$$\sup_{t \in R} \left\{ -a^{*}(t) + F^{S} \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t) \frac{1}{e^{2}} \right\} < 0 \tag{6.31}$$

olsun ve Lemma 6.3 in şartları sağlansın. O zaman (6.3) denkleminin en az bir pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümü vardır.

İspat. (6.31) dan,

$$\sup_{t \in R} \left\{ -a^{*}(t) + F^{S} \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t) \frac{1}{e^{2}} e^{\varsigma} \right\} < 0 \tag{6.32}$$

ifadesini sağlayan sabit bir $\varsigma \in (0,1)$ seçilebilir. $B = \{\varphi | \varphi \in PAP(R,R)$, R de düzgün süreklive her $t \in R$ için $K_1 \leq \varphi(t) \leq K_2\}$ kümesi tanımlansın. Lemma 6.3 ten B nin

$PAP(R,R)$ nin kapalı bir alt kümesi olduğu görülebilir. $\phi \in B$ ve $f(t,z)=\phi(t-z)$ olsun. ϕ nin düzgün sürekli olması $f \in PAP(R\times\Omega)$ olmasını, $\Omega \subset R$ nin her kompakt L alt kümesi için f nin $z \in L$ de sürekli olmasını ve $t \in R$ de düzgün olmasını gerektirir. Budurum $\tau_j \in PAP(R,R)$ olmak üzere,

$$\phi(t-\tau_j(t)) \in PAP(R,R), \quad j=1,2,...,m$$

olmasını sağlar. Sözde hemen hemen periyodik fonksiyonların bileşke teoremine göre,

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)\phi(t-\tau_j(t))e^{-\gamma_j(t)\phi(t-\tau_j(t))} \in PAP(R,R)$$

elde edilir.

$$x'(t)=-a(t)x(t)+\sum_{j=1}^{m} \beta_j(t)\varphi(t-\tau_j(t))\times e^{-\gamma_j(t)\varphi(t-\tau_j(t))} \qquad (6.33)$$

yardımcı denklemi ele alınsın. $M[a]>0$ olması nedeniyle (6.11) sistemi bir sözde hemen hemen periyodik

$$x^{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du}\left[\sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))}\right]ds \qquad (6.34)$$

çözümüne sahiptir. Herhangi bir $\phi \in B$ için $T{:}B \rightarrow PAP(R,R)$ olmak üzere,

$$T(\phi(t)) = x^{\phi}(t), \forall \phi \in B$$

dönüşümü tanımlansın. Herhangi bir $\phi \in B$ için, $\sup_{u \geq 0} ue^{-u} = \frac{1}{e}$ olması nedeniyle her $t \in R$ için,

$$x^{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(u)du}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))}\right]ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a^*(u)du}\left[F^{s}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\frac{1}{e}\right]ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a^*(u)du}\left[-\eta^{s}+a^*(s)M\right]ds \leq M \qquad (6.35)$$

elde edilir. xe^{-x} fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artan ve $[1+,\infty)$ aralığında ise azalandır. Yukarıdaki bağıntılarla birlikte ve her $t\in R,\ j=2,3,...,m$ için,

$$Ke^{-K}=\tilde{K}e^{-\tilde{K}},\ K\leq \gamma_j(t)(\varphi(t-\tau_j(t))\leq \gamma_j^{+}M\leq \tilde{K},$$

eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$x^{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(u)du}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\varphi(s-\tau_j(s))}\right]ds$$

$$\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a^*(u)du} F^{i}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)}Ke^{-K}ds$$

$$\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a^*(u)du}\left[\eta^{i}+a^*(s)\right]Kds \geq K \qquad (6.36)$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak,

$$K \leq x^{\varphi}(t) \leq M, t \in R \tag{6.37}$$

sonucuna varılabilir. Ayrıca , $\frac{d}{dt}(x^{\varphi}(t))$ ifadesinin her $t \in R$ için sınırlı olduğuve $x^{\phi} \in PAP(R,R)$ ifadesinin R üzerinde düzgün sürekli olduğu sonucuna varılır.Bu nedenle, $x^{\phi} \in B$ olur ve T nin ise B den B ye bir dönüşüm olduğu görülür. Şimdi T dönüşümünün B üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. O halde, her $\phi, \psi \in B$ için,

$$\|T(\phi)-T(\psi)\|_{\infty} = \sup_{t \in R}\left| \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \left(\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))} \right) \right] ds \right|$$

$$\leq \sup_{t \in R} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \left| \gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\phi(s-\tau_j(s))} \right.\right.$$

$$\left.\left. -\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)\psi(s-\tau_j(s))} \right| \right] ds \tag{6.38}$$

olur.

$$\sup_{K \leq u \leq \widetilde{K}} \left| \frac{1-u}{e^{u}} \right| = \frac{1}{e^{2}}$$

İfadesi,

$$\left|xe^{-x} - ye^{-y}\right| = \left|\frac{1-(x+\theta(y-x))}{e^{(x+\theta(y-x))}}\right|\left|x-y\right|$$

$$\leq \frac{1}{e^2}\left|x-y\right|,\ x,y \in [K,+\infty),\ 0<\theta<1, \tag{6.39}$$

eşitsizliği ve yukarıdaki ifadelerden,

$$\left\|T(\phi)-T(\psi)\right\|_\infty$$

$$\leq \sup_{t\in R} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a^*(u)du} F^S \sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2}\left|\phi(s-\tau_j(s))-\psi(s-\tau_j(s))\right|ds$$

$$\leq \left\|\phi-\psi\right\|_\infty \sup_{t\in R} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a^*(u)du} F^S \sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2}ds$$

$$\leq \left\|\phi-\psi\right\|_\infty \sup_{t\in R} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t a^*(u)du} a^*(s)\frac{1}{e^\zeta}ds$$

$$\leq \frac{1}{e^\zeta}\left\|\phi-\psi\right\|_\infty$$

bulunur. Burada $e^{-\zeta} < 1$ olduğu açıktır. Böylece T dönüşümü B üzerinde daralma dönüşümüdür. T dönüşümünün tek bir sabit $\varphi^* \in B$ noktasına sahip olduğu görülebilir. Burada $T\varphi^* = \varphi^*$ dır. Böylece φ^* (6.3) denklemini sağlar. Yani φ^*, B de (6.3) nin pozitif sözde hemen hemen periyodik bir çözümü olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 6.3.(Xiong,2016)Teorem 6.2 in bütün şartlarının sağlandığı kabul edilsin. $x^*(t)$, (6.3) nin pozitif sözde hemen hemen periyodik bir çözümü olsun.O zaman $x^*(t)$ çözümü global üstel kararlıdır. Yani (6.1) nin

$$x_{t_0} = \phi, \quad \varphi \in C_+, \; \phi(0) > 0$$

şartınısağlayan, $x(t;t_0,\varphi)$ çözümü, $t \to \infty$ iken $x^*(t)$ çözümüne üstel yakınsar.

İspat. $\lambda \in (0, \inf_{t \in R} a^*(t)]$ sabiti seçilsin öyle ki,

$$\sup_{t\in R}\left\{-a^*(t)+\lambda+F^s\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\frac{1}{e^2}e^{\lambda\tau_j^+}\right\}<0 \tag{6.40}$$

olur. $x^*(t)$, teoremdeki (6.1) nin pozitif sözde hemen hemen periyodik çözümü olsun. Teorem 6.3 yi ispat etmek için $x^*(t)$ için global üstel kararlılığı gösterilmelidir. $x(t) = x(t;t_0,\varphi)$ olsun. $t_\varphi \in [t_0,+\infty)$ vardır öyle ki,

$$K < x(t) < M, t \in [t_\phi, +\infty) \tag{6.41}$$

olur. $y(t) = x(t) - x^*(t)$ olsun. O zaman, $t \in [t_0,+\infty)$ olmak üzere,

$$y'(t) = -a(t)y(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)[x(t-\tau_j(t))\times e^{-\gamma_j(t)x(t-\tau_j(t))} - x^*(t-\tau_j(t))\times e^{-\gamma_j(t)x^*(t-\tau_j(t))}]$$

ve

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(v)dv} y(t_0)$$
$$+\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(v)dv} \sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \times[\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))}$$

$$-\gamma_j(s)x^*(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)x^*(s-\tau_j(s))}]ds \tag{6.42}$$

olur.

$$t_\xi = t_\varphi + r,\ K_\varphi = F^S + 1,\ \|y\|_\xi = \max_{t\in[t_0-r,t_\xi]} \left|x(t) - x^*(t)\right| \tag{6.43}$$

olsun. Sonuç olarak, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $t \in [t_0 - r, t_\xi]$ olmak üzere,

$$\left|y(t_\xi)\right| < \|y\|_\xi + \varepsilon,\ \left|y(t_\xi)\right| < K_\phi(\|y\|_\xi + \varepsilon)e^{\lambda t_\xi}e^{-\lambda t}$$

olduğu açıktır. Şimdi ise her $t > t_\xi$ için,

$$\|y(t)\| < K_\phi(\|y\|_\xi + \varepsilon)e^{\lambda t_\xi}e^{-\lambda t} \tag{6.44}$$

olduğu gösterilecektir. Tersine eğer bu eşitsizlik sağlanmaz ise $\theta > t_\xi$ olmalıdır öyle ki, $t \in [t_0 - r, \theta)$ için,

$$\begin{cases} \left|y(\theta)\right| < K_\varphi(\|y\|_\xi + \varepsilon)\,e^{\lambda t_\xi}\,e^{-\lambda\theta}, \\ \left|y(t)\right| < K_\varphi(\|y\|_\xi + \varepsilon)\,e^{\lambda t_\xi}\,e^{-\lambda t} \end{cases} \tag{6.45}$$

olur. Teoremin şartlarına bağlı olarak,

$$\left|y(\theta)\right| = e^{-\int_{t_\xi}^{\theta} a(v)dv}\left|y(t_\xi)\right|$$

$$+\int_{t_\xi}^{\theta} e^{-\int_{s}^{\theta} a(v)dv} \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j(s)}{\gamma_j(s)} \times \left|\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)x(s-\tau_j(s))}\right.$$

$$-\gamma_j(s)x^*(s-\tau_j(s))e^{-\gamma_j(s)x^*(s-\tau_j(s))}\Big|ds$$

$$\leq F^S e^{-\int_{t_\xi}^{\theta} a^*(v)dv}\left|y(t_\xi)\right| + \int_{t_\xi}^{\theta} e^{-\int_{s}^{\theta} a^*(v)dv} F^S \times \sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2}\left|y(s-\tau_j(s))\right|ds$$

$$\leq F^S e^{-\int_{t_\xi}^{\theta} a^*(v)dv}(\|y\|_\xi+\varepsilon)$$

$$+\int_{t_\xi}^{\theta} e^{-\int_{s}^{\theta} a^*(v)dv} F^S \times \sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2}K_\varphi(\|y\|_\xi+\varepsilon)e^{\lambda t_\xi}e^{-\lambda(s-\tau_j(s))}ds$$

$$\leq K_\varphi(\|y\|_\xi+\varepsilon)e^{\lambda t_\xi}e^{-\lambda\theta}$$

$$\left[\times\frac{F^S}{K_\varphi}e^{-\int_{t_\xi}^{\theta} a^*(v)dv} e^{\lambda(\theta-t_\xi)}\right.$$

$$+e^{\lambda\theta}\int_{t_\xi}^{\theta} e^{-\int_{s}^{\theta} a^*(v)dv} F^S$$

$$\left.\times\sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2}e^{\lambda t_j^+}e^{-\lambda s}ds\right]$$

$$=K_\varphi(\|y\|_\xi+\varepsilon)e^{\lambda t_\xi}e^{-\lambda\theta}\Big[\frac{F^S}{K_\varphi}e^{-\int_{t_\xi}^{\theta}(a^*(v)-\lambda)dv}$$

$$+\int_{t_\xi}^{\theta} e^{-\int_{s}^{\theta}(a^*(v)-\lambda)dv} F^S\sum_{j=1}^{m} \beta_j(s)\frac{1}{e^2}e^{\lambda t_j^+}ds\Big]$$

$$\le K_{\varphi}(\|y\|_{\xi}+\varepsilon)e^{\lambda t_{\xi}}e^{-\lambda\theta}[\frac{F^{S}}{K_{\varphi}}e^{-\int_{t_{\xi}}^{\theta}(a^{*}(v)-\lambda)dv}$$

$$+\int_{t_{\xi}}^{\theta}e^{-\int_{s}^{\theta}(a^{*}(v)-\lambda)dv}(a^{*}(s)-\lambda)ds]$$

$$\le K_{\varphi}(\|y\|_{\xi}+\varepsilon)e^{\lambda t_{\xi}}e^{-\lambda\theta}\times[1-(1-\frac{F^{S}}{K_{\varphi}})e^{-\int_{t_{\xi}}^{\theta}(a^{*}(v)-\lambda)dv}]$$

$$< K_{\phi}(\|y\|_{\xi}+\varepsilon)e^{\lambda t_{\xi}}e^{-\lambda\theta}$$

elde edilir. Bu sonuç verilen (5.45) teki iddiayla çelişir. O halde (5.44) doğrudur. $\varepsilon\to 0^{+}$ iken,her $t>\mathrm{t}_{\xi}$ için,

$$|y(t)|\le K_{\varphi}\|y\|_{\xi}\,e^{\lambda t_{\xi}}e^{-\lambda t}$$

elde edilir. Bu sonuç ispatı tamamlar.

Örnek 6.2.(Xiong, 2016)

$$x'(t)=-(0.4040326+\sin 200t)x(t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{100+\cos\sqrt{2}t}{100+\sin t}x\left[t-\sin^{2}t-e^{-t^{2}\sin^{4}t}\right]$$

$$\times e^{-x(t-\sin^{2}t-e^{-t^{2}\sin^{4}t})}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{100+\cos\sqrt{3}t}{100+\sin t}x(t-\cos^{2}t-e^{-t^{2}\sin^{4}t})$$

$$e^{-x(t-\cos^{2}t-e^{-t^{2}\sin^{4}t})} \tag{6.46}$$

salınımlı Nicholson kurtçuk modelini ele alalım.Bu denklem ile (6.3) karşılaştırıldığında,

$$a(t) = 0.4040326 + \sin 200t,\ a^*(t) = 0.4040326,\ F^S = e^{\frac{1}{100}},\ F^i = e^{-\frac{1}{100}},$$

her $t, s \in R$ ve $t - s \geq 0$ için $F^i e^{-\int_s^t a^*(u)du} \leq e^{-\int_s^t a(u)du} \leq F^S e^{-\int_s^t a^*(u)du}$

$$M[a] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(s)ds = 0.4040326 + \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{200T}$$

$$\times[\cos 200t - \cos 200(t+T)] = 0.4040326,$$

$$r = 2,\ \beta_i^- = \frac{1}{2}\frac{99}{101},\ \beta_j^+ = \frac{1}{2}\frac{101}{99},\ \gamma_1^- = \gamma_1^+ = 1,$$

$K \approx 0.7215355$ ve $\widetilde{K} \approx 1.342276$ olduğu görülür.

$M = 1.203432$ olsun. O zaman $a^* M = 0.4040326 \times 1.203432 \approx 0.4862258,$

$$F^S\left(\frac{\beta_1^+}{\gamma_1^-}\frac{1}{e} + \frac{\beta_2^+}{\gamma_2^-}\right)\frac{1}{e} = e^{\frac{1}{100}}\frac{101}{99}\frac{1}{e} \approx 0.37,$$

$$F^i\left(\frac{\beta_1^-}{\gamma_1^+} + \frac{\beta_2^-}{\gamma_2^+}\right)e^{-K} = e^{-\frac{1}{100}}\frac{99}{101}e^{-K} \approx \frac{99}{101}e^{-7215355} \approx 0.47,$$

$$F^S\left(\beta_1^+ + \beta_2^+\right)\frac{1}{e^2} = e^{\frac{1}{100}}\frac{101}{99}\frac{1}{e^2} \approx 0.13,$$

olur. Bu ifadeler ise verilen örneğin Teorem 6.3 nin bütün şartlarını sağladığı dolayısıyla ele alınan denklemin pozitif sözde hemen hemen periyodik $x^*(t)$ çözümüne sahipolduğu ve bu çözümün global üstel kararlı olduğu sonucuna varılır.

KAYNAKLAR

Berezansky, L.; Braverman, E.; Idels, L.,2010. Nicholson's blowflies differential equations revisited: main results and open problems. ***Appl. Math. Model.*****34**(6): 1405–1417.

Berger, M. S.; Chen, Y. Y., 1992. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations. ***Nonlinear Anal.*** **19**(3): 249–257.

Besicovitch., A. S. 1954. Parametric surfaces. III, I. Surfaces of minimum area. ***Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.*** A. ***Indagationes Math***.**16**:169–175.

Bihun, Oksana(1-CONC-CS); Chicone, Carmen(1-MO); Harris, Steven G.(1-STL-CS) 2010.Minimal distortion morphs generated by time-dependent vector fields. **J. Math. Anal. Appl. 364** (2): 324–340.

Bochner, S.; von N.,J.,1935.Almost periodic functions in groups. II. Trans. ***Amer. Math. Soc.*** **37** (1): 21–50.

Bogoljubov, N. N., Sadovnikov,.B. I.,1961. Periodic solutions of differential equations of the nth order with a small parameter. ***Ukrain. Mat. Ž.*****13** (3): 3–11.

Bohr, H,.1925. Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen. (German) II. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variabeln; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen. ***Acta Math.*** **46**(1): 101–214.

Burton, T. A. Stability by fixed point theory for functional differential equations. **Dover Publications, Inc.**, Mineola, NY, 2006.

Burton, T. A. Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Corrected version of the 1985 original. **Dover Publications, Inc.**, Mineola, NY, 2005.

Burton, T. A. Stability and periodic solutions of ordinary and functional-differential equations. **Mathematics in Science and Engineering, 178.** Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.

Chen,S.Y.,2000. Stability for Nicholson's model with time-delay. ***J. Northwest Univ.*****30 (**6): 483–486.

Chen, Y.,2003. Periodic solutions of delayed periodic Nicholson's blowflies models. ***Can. Appl. Math. Q.*** **11 (**1): 23–28.

Chen, W.; Liu, B., 2011. Positive almost periodic solution for a class of Nicholson's blowflies model with multiple time-varying delays. ***J. Comput. Appl. Math.*** **235**(8): 2090–2097.

Chen, W., Wang,L., 2012. Positive periodic solutions of Nicholson-type delay systems with nonlinear density-dependent mortality terms. ***Abstr. Appl. Anal.***, Art. ID 843178.

Chen, Y., Xiaoying; Shi, Chunling; Wang,.Y.,2016. Almost periodic solution of a discrete Nicholson's blowflies model with delay and feedback control.***Adv. Difference Equ.***,**185**

Chérif, F.,2012. Existence and global exponential stability of pseudo almost periodic solution for SICNNs with mixed delays. ***J. Appl. Math. Comput.*** **39 (**1-2): 235–251.

Chérif, F.,2015. Pseudo almost periodic solution of Nicholson's blowflies model with mixed delays. ***Appl. Math. Model.*** **39 (**17): 5152–5163.

Deng, T., Liu, F.,2005. New sufficient conditions on the existence of periodic solutions of delayed periodic Nicholson's blowflies models. ***Int. J. Appl. Math.***

17 (2): 201–208.
Ding, H.S.; Nieto, J., 2013. A new approach for positive almost periodic solutions to a class of Nicholson's blowflies model. ***J. Comput. Appl. Math***. **253** , 249–254.
Ding, H.S., Alzabut, J., 2015. Existence of positive almost periodic solutions for a Nicholson's blowflies model.***Electron. J. Differential Equations*** **180**
Ding, H.S., Ji, M.X., 2016. Pseudo-almost periodic solutions for a discrete Nicholson's blowflies model with harvesting term. ***Adv. Difference Equ.***,**289**
Duan, L., Huang, L.,2015. Pseudo almost periodic dynamics of delayNicholson's blowflies model with a linear harvesting term.***Math. Methods Appl.Sci.*** **38**(6): 1178–1189.
Èl′sgol′ts, L. È.Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments. Translated from the Russian by Robert J. McLaughlin Holden-Day, **Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam** 1966
Èl′sgol′ts, L. E.; Norkin, S. B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. Translated from the Russian by John L. **Casti. Mathematics in Science and Engineering., 105**. Academic Press [A of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973.
Fang, Z.; Yang, Y., 2011. Existence of almost periodic solution for SICNN with a neutral delay. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ***.,**30**(12).
Faria, T.,2017. Periodic solutions for a non-monotone family of delayed differential equations with applications to Nicholson systems. ***J. Differential Equations*** **263**(1):509–533.
Favard, J.,1927. Sur les fonctions harmoniques presque périodiques. **108**.
Gaines, Robert E.; Mawhin, Jean L. Coincidence degree, and nonlinear differential equations. Lecture Notes in Mathematics, **568. Springer-Verlag,** Berlin-New York, 1977.
Hale, Jack K.; Verduyn Lunel, Sjoerd M. Introduction to functional-differential equations. **Applied Mathematical Sciences, 99**. Springer-Verlag, New York,1993.
Huang, Z.,2014.New results on global asymptotic stability for a class of delayed Nicholson's blowflies model.***Math. Methods Appl. Sci.*** **37** (17): 2697–2703.

Huang, Z.,2016. Da Positive pseudo almost periodic solutions for delayed Nicholson's blowflies model with a feedback control. ***Acta Math. Sci. Ser. A*** **36** (3): 558–568.
Jia, R., 2012. Positive almost periodic solution for a delayed Nicholson's blowflies model with feedback control. ***J. Adv. Res. Dyn. Control Syst.*****4**(2): 29–41.

Jiang, A.,2014. Global exponential stability of periodic solutions for a Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. ***Appl. Math. Inf. Sci.*** **8**(5): 2645–2651.
Hou, X; Duan, L.,2012. New results on periodic solutions of delayed Nicholson's blowflies models. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.***,**24**, 11.
Li -Jing-W.; Cheng, S.; Jiang, Y.,2007. A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a Nicholson's blowflies model. ***Bol. Soc. Mat. Mexicana*** (3) **13**(1): 103–110.
Li, J.; Du, C.; 2008. Existence of positive periodic solutions for a generalized Nicholson's blowflies model. ***J. Comput. Appl. Math.*****221** (1): 226–233.

Liu, B.,2011. The existence and uniqueness of positive periodic solutions of Nicholson-type delay systems. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*12** (6): 3145–3151.

Liu, X.; Meng, J.,2012. The positive almost periodic solution for Nicholson-type delay systems with linear harvesting terms. ***Appl. Math. Model.*36** (7): 3289–3298.

Liu, L; Ding, H.,2013. Existence of positive almost-periodic solutions for a Nicholson's blowflies model. ***Electron. J. Differential Equations***, **56** (9).

Liu, B.,2013. Global dynamic behaviors for a delayed Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.***,**45** (13).

Liu, B., 2014. Global exponential stability of positive periodic solutions for a delayed Nicholson's blowflies model.***J. Math. Anal. Appl.*** **412**(1), 212–221.

Liu, B.,2014. Positive periodic solutions for a nonlinear density-dependent mortality Nicholson's blowflies model. ***Kodai Math. J.*** **37** (1): 157–173.

Liu, B.,2014. Almost periodic solutions for a delayed Nicholson's blowflies model with a nonlinear density-dependent mortality term. ***Adv.Difference Equ***. ,**2014**:72,16.

Liu, B.,2015. New results on global exponential stability of almost periodic solutions for a delayed Nicholson blowflies model.***Ann. Polon. Math.*** **113** (2):191–208.

Liu, P; Zhang, L; Liu, S; Zheng, L.,2017. Global exponential stability of almost periodic solutions for Nicholson's blowflies system with nonlinear density-dependent mortality terms and patch structure. ***Math. Model. Anal.*** **22** (4): 484–502.

Long, F; Yang, M.,2011. Positive periodic solutions of delayed Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.***,**41** (11).

Long, F; Liu, B., 2012. Existence and uniqueness of positive periodic solutions of delayed Nicholson's blowflies models. ***Ann. Polon. Math.*103** (3):217– 228.

Long, F.,2012. Positive almost periodic solution for a class of Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*13** (2): 686–693

Long, Z.,2016. Exponential convergence of a non-autonomous Nicholson's blowflies model with an oscillating death rate. ,***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.***, **41**.

Mohammed , T.;2018. Global stability for a class of functional differential equations (Application to Nicholson's blowflies and Mackey-Glass models). ***Discrete Contin. Dyn. Syst.*** **38** (9): 4391–4419.

Padhi, S.; Pati, S.; Kumar, R., 2014. Positive periodic solutions of Nicholson's blowflies model with harvesting. ***PanAmer. Math. J.*** **24** (3): 15–26.

Pati, S.; Padhi, S.; Vijayalakshmi, S.,2017. Dynamics of periodic Nicholson's blowflies model with delay and harvesting. ***Funct. Differ. Equ.*** **24** (1-2): 45–55.

Peng, L.,Wang, W., 2010. Positive almost periodic solutions for a class of nonlinear Duffing equations with a deviating argument. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ***.,**6** (12).

Rihani, S; Kessab, A; Chérif, F.,2016. Pseudo almost periodic solutions for a Lasota-Wazewska model. ***Electron. J. Differential Equations*** .,**62** (17).

Shao, J.,2012. Global exponential stability of non-auonomous Nicholson-type delay systems. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*13** (2): 790–793.

Smith, Hal(1-AZS-SMS) An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. **Texts in Applied Mathematics, 57**. Springer, New York, 2011.

Tang, Y.,2015. Global asymptotic stability for Nicholson's blowflies model with a nonlinear density-dependent mortality term. ***Appl. Math. Comput.*** **250** , 854–859.

Troib, L.,2014. Periodic solutions of Nicholson-type delay differential systems. ***Funct. Differ. Equ.*** **21** (3-4): 171–187.

Tunç, C; Liu, B.,2016. Global stability of pseudo almost periodic solutions for a Nicholson's blowflies model with a harvesting term. ***Vietnam J. Math.*** **44** (3): 485–494.

Van Hien, L., 2014. Global asymptotic behaviour of positive solutions to a non-autonomous Nicholson's blowflies model with delays. ***J. Biol. Dyn.*** **8** (1):135–144.

Wang, G.,2004. Existence theorem of periodic solutions for a delay nonlinear differential equation with piecewise constant arguments. ***J. Math. Anal. Appl.*** **298** (1): 298–307.

Wang, W; Wang, L; Chen,Wei.,2011. Existence and exponential stability of positive almost periodic solution for Nicholson-type delay systems. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*** **12** (4): 1938–1949.

Wang, W.,2012. Positive periodic solutions of delayed Nicholson's blowflies models with a nonlinear density-dependent mortality term. ***Appl. Math. Model.*****36** (10): 4708–4713

Weiyao, Z; Jinlin, S.; Zhensheng, L.; Debnath, L., 1997. Almost periodic solutions for Abel equations. ***Internat. J. Math. Math. Sci.*****20** (4): 727–735.

Xiang, X. F.; Ge, W. G., 1999. On the periodic solution of the differential-iterative equation $x'(t)=\omega(t)(ax(t)-bx(x(t)))$ $(a>b>0)$. ***J. Systems Sci. Math. Sci.*****19** (4): 457–464.

Xiong, W.,2016. New results on positive pseudo-almost periodic solutions for a delayed Nicholson's blowflies model.***Nonlinear Dynam.*** **85** (1): 563–571.

Xu, Y.,2014. Existence and global exponential stability of positive almost periodic solutions for a delayed Nicholson's blowflies model. ***J. Korean Math. Soc.*** **51** (3): 473–493.

Xu, C; Liao, M.,2015. Boundedness and exponential stability of positive solutions for Nicholson-type delay system. ***IAENG Int. J. Appl. Math.*** **45** ,151–157.

Xu, C; Liao, M; Pang, Y.,2016. Existence and convergence dynamics of pseudo almost periodic solutions for Nicholson's blowfliesmodel with time-varying delays and a harvesting term. ***Acta Appl. Math.*** **146**, 95–112.

Yang, X., 2010. Existence and global attractivity of unique positive almost periodic solution for a model of hematopoiesis. ***Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B25*** (1): 25–34.

Yang, M.,2011. Exponential convergence for a class of Nicholson's blowflies model with multiple time-varying delays. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*****12** (4): 2245–2251.

Yao, Z.,2015. Existence and exponential stability of the unique positive almost periodic solution for impulsive Nicholson's blowflies model with linear harvesting term. ***Appl.Math. Model.*** **39** (23-24): 7124–7133.

Yao, Z; Alzabut, J.,2017. Dynamics of almost periodic Nicholson's blowflies model with nonlinear density-dependent mortality term.***Ital***. ***J. Pure Appl. Math.***,**38** , 218–234.

Yoshizawa, T. 1975. Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. ***Applied Mathematical Sciences,*14**. Springer-Verlag,New York-Heidelberg.

Yu, S.,2010. Bin Almost periodic solution of Nicholson's blowflies model with feedback control. ***J. Fuzhou Univ. Nat. Sci. Ed.*** **38** (4): 481–485

Zhang, C.,2003. Almost periodic type functions and ergodicity. ***Science Press Beijing, Beijing; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht***.

Zhang, H.; Yang, M.; Wang, L., 2013. Existence and exponential convergence of the positive almost periodic solution for a model of hematopoiesis. ***Appl. Math. Lett.*26**(1): 38–42.

Zhang, A., 2014. New results on almost periodic solutions for a Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.***,**37** (14).

Zhao, W; Zhu, C; Zhu, H.,2012. On positive periodic solution for the delay Nicholson's blowflies model with a harvesting term. ***Appl. Math. Model.*36** (7):3335–3340.

Zhou, H; Wang, W; Zhang, H.,2010. Convergence for a class of non-autonomous Nicholson's blowflies model with time-varying coefficients and delays. ***Nonlinear Anal. Real World Appl.*11**(5): 3431–3436.

Zhou, Q.,2013. The positive periodic solution for Nicholson-type delay system with linear harvesting terms. ***Appl. Math. Model.*** **37** (8): 5581–5590.

Zhou, H; Agarwal, P.,2017. Existence of almost periodic solution for neutral Nicholson blowflies model. ***Adv. Difference Equ.***,**329**,.

ÖZ GEÇMİŞ

Şahap ÇETİN 10.10.1989 tarihinde Erzurum Horasan'da doğdu. İlk, Orta ve Lise eğitimini Horasan'da tamamladı. Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik (ing) Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. Eylül 2014'te Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında başladığı Yüksek Lisans eğitimine devam etmektedir.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 19/07/2019

Tez Başlığı / Konusu:

Nıcholson Kurtçuk Modellerinin Pozitif Hemen Hemen Ve Pozitif Sözde Hemen Hemen Periyodik Çözümleri Üzerine

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 68 sayfalık kısmına ilişkin, 19/072019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNİTİN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 11 (On Bir) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

19.07.2019
Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Şahap ÇETİN

Öğrenci No: 149102016

Anabilim Dalı: Matematik AnaBilim Dalı

Programı:

Statüsü: Y. Lisans X Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

(Prof.Dr. Cemil TUNÇ)

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof.Dr.Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü