T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP HALKALARINDA NİLPOTENT, İDEMPOTENT VE BİRİMSEL ELEMANLAR

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Ömer KÜSMÜŞ
DANIŞMAN: Doç. Dr. İ. Hakkı DENİZLER

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP HALKALARINDA NİLPOTENT, İDEMPOTENT VE BİRİMSEL ELEMANLAR

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Ömer KÜSMÜŞ

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. İ. Hakkı DENİZLER danışmanlığında, Ömer KÜSMÜŞ tarafından sunulan "Grup Halkalarında Nilpotent, İdempotent ve Birimsel Elemanlar" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince …../...../........ tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:....................................... İmza:

Üye:... İmza:

Üye:... İmza:

Üye:... İmza:

Üye:... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./..../…... tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

…………….………..

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ömer KÜSMÜŞ

ÖZET

GRUP HALKALARINDA NİLPOTENT, İDEMPOTENT VE BİRİMSEL ELEMANLAR

KÜSMÜŞ, Ömer
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. İ. Hakkı DENİZLER
Ağustos 2019, 101 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sonraki bölümler için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler sunulmuştur. İkinci bölümde, literatürdeki ilgili çalışmalar geniş bir şekilde sunulmuştur. Üçüncü bölümde, tezde kullanılan materyal ve yöntem verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tezde orijinal olarak elde edilen sonuçlar, tanımlar ve teoremler bulgular başlığıyla üç alt bölüm şeklinde verilmiştir. Bu alt bölümlerin ilkinde, bazı direkt çarpım gruplarının değişmeli grup halkalarındaki tüm normallenmiş birimsel elemanların $G \times H$-nilpotent birimsel elemanlar olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

İkinci alt bölümde, bazı direkt çarpım gruplarının değişmeli grup halkasında idempotent birimsel elemanları tanımlanmış ve direkt çarpım gruplarının bazılarının değişmeli grup halkasındaki her bir normallenmiş birimsel elemanın bir idempotent birimsel eleman olabilmesi için bazı gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir.

Üçüncü alt bölümde, S_3, 6 mertebeli bir simetrik grup ve C_3, 3 mertebeli bir devirli grup olmak üzere S_3 grubunun burulmasız normal tümleyeni cinsinden $S_3 \times C_3$ direkt çarpım grubunun integral grup halkasının birimsel grubu karakterize edilmiştir. Beşinci ve son bölüm sonuçlar, tez üzerine tartışma ve bazı açık problemler üzerine öneriler içermektedir.

Anahtar kelimeler: Birimsel eleman, Direkt çarpım, Grup halkası, İdempotent, İntegral grup halkası, Nilpotent.

ABSTRACT

NILPOTENTS, IDEMPOTENTS AND UNITS IN GROUP RINGS

KÜSMÜŞ, Ömer
Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. İ. Hakkı DENİZLER
August 2019, 101 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, some basic definitions and theorems which are necessary for next chapters, are introduced. In the second chapter, some related studies in the literature are given widely. In the third chapter, materials and methods which are used in the thesis are given.

In the fourth chapter, some results, definitions and theorems which are originally found are introduced by findings as three subsections. In the first of these subsections, some necessary and sufficient conditions for all the normalized units in commutative group rings of some direct product groups to be $G \times H$-nilpotent units are given.

In the second subsection, idempotent units are defined in the commutative group rings of some direct product groups and some necessary and sufficient conditions for every normalized unit in commutative group rings of some direct product groups to be an idempotent unit are obtained.

In the third subsection, unit group of integral group ring of the direct product group $S_3 \times C_3$ is characterized in terms of the torsion-free normal complement of S_3, where S_3 is a symmetric group of order 6 and C_3 is a cyclic group of order 3. Fifth and the last chapter comprises of results, discussion on the thesis and suggestions on some open problems.

Keywords: Unit, Direct product, Group ring, Idempotent, Integral group ring, Nilpotent.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. İ. Hakkı DENİZLER’e ve bölüm başkanımız Prof. Dr. Cemil TUNÇ’a, yazım sürecinde bana her türlü ilgi ve fedakârlığı sabırla gösteren eşim Gülşen İlçi Küsmüş’e, manevi desteklerini esirgemeyen annem, babam ve kardeşlerime, maddi olarak 2211-E destek programıyla beni destekleyen TÜBİTAK’a teşekkürlerimi sunarım.

2019
Ömer KÜSMÜŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\Delta_R(G)}$	Artımın çekirdeği
$\oplus$	Direkt toplam
$\times$	Direkt çarpım
$\prod$	Eş toplam sembolü
$\coprod$	Eş çarpım sembolü
$\boldsymbol{RG}$	Bir R halkası ve G grubuyla elde edilen grup halkası
$\boldsymbol{\widehat{H}}$	H deki elemanların toplamı
$\mathbb{Z}\boldsymbol{G}$	Bir G grubunun integral grup halkası
$\boldsymbol{C_n}$	n mertebeli çarpımsal devirli grup
$\boldsymbol{C_\infty}$	Sonsuz mertebeli çarpımsal devirli grup
$\boldsymbol{D_n}$	$2n$ mertebeli dihedral grup
$\boldsymbol{S_n}$	$n!$ mertebeli simetrik grup
$\boldsymbol{T_n}$	$4n$ mertebeli ikili dihedral grup
$\boldsymbol{G \rtimes H}$	G ve H gruplarının yarı direkt çarpımları
$\boldsymbol{H \leq G}$	H, bir G grubunun altgrubudur.
$\boldsymbol{I \leq R}$	I, bir R halkasının idealidir.
$\lhd$	Normal alt grup
$\sum$	Toplam sembolü
$\lvert X \rvert$	Bir X kümesinin kardinali

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{|G|}$	Bir G grubunun mertebesi
$\boldsymbol{o(x)}$	Bir $x \in G$ elemanının mertebesi

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
$\wp$	Tüm asal sayıların kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
Ker *f*	*f* homomorfizmasının çekirdeği
Im *f*	*f* dönüşümünün görüntüsü
det (*A*)	Bir *A* kare matrisinin determinantı
$\boldsymbol{U_1(RG)}$	*RG* grup halkasının artımı 1 olan birimsellerinin grubu
$\boldsymbol{U(RG)}$	*RG* grup halkasının tüm birimsellerinin grubu
$\boldsymbol{V(RG)}$	*RG* grup halkasının normallenen birimsellerinin grubu
$\boldsymbol{\exp(G)}$	Bir G grubunun üssü
kar R	Bir *R* halkasının karakteristiği
$\boldsymbol{\mathcal{Z}(G)}$	Bir G grubunun merkezi
$\boldsymbol{p_{\pm}^{1+2n}}$	$G/\mathcal{Z}(G)$ elementer Abel *p*-grup olan ekstra özel G grubu

1. GİRİŞ

Bu bölümde; grup, halka ve modül teorisine dair bazı temel tanım ve teoremler verilerek grup halkaları ve grup halkalarındaki bazı özel elemanların yapısı incelenmiştir. Bu bölümde değinilen temel bilgilere, detaylı olarak Fraleigh (2002), Hungerford (1974) ve Sehgal' in (1993) kaynaklarından ulaşılabilir.

1.1. Direkt ve Yarı-Direkt Çarpım Grupları ve Serbest Gruplar

Tanım 1.1.1. G_1 ve G_2 birer grup olmak üzere, $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2): g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ kartezyen çarpımı üzerinde bir $*$ işlemi şu şekilde tanımlansın:

$$(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2 \Longrightarrow (g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

Bu durumda $(G_1 \times G_2, *)$ bir gruptur. Bu gruba G_1 ve G_2 nin $dış\ direkt\ çarpım\ grubu$ denir (Hungerford, 1974).

Teorem 1.1.2. G_1 ve G_2 iki grup ve $G_1 \times G_2$ dış direkt çarpım grubu olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

$i)$ $|G_1 \times G_2| = |G_1|.|G_2|$;

$ii)$ $1_{G_1 \times G_2} = (1_{G_1}, 1_{G_2})$, $G_1 \times G_2$ grubunun birimi;

$iii)$ $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \Longrightarrow (g_1, g_2)^{-1} = ({g_1}^{-1}, {g_2}^{-1})$;

$iv)$ $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$;

$v)$ $G_1 \times G_2$ Abeldir $\Leftrightarrow$ G_1 ve G_2 Abeldir.

$vi)$ $G' = G_1 \times \{1_{G_2}\}, H' = \{1_{G_1}\} \times G_2$ ise $G', H' \lhd G_1 \times G_2$ (Hungerford, 1974).

Teorem 1.1.3. $G, G_1, G_2, \ldots, G_n$ ler birer grup ve $G = G_1 G_2 \ldots G_n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

$a)$
$$\begin{array}{rcl} f:\ G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n & \longrightarrow & G \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 x_2 \ldots x_n \end{array}$$

dönüşümü bir izomorfizmadır.

b) $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ için $G_i \lhd G$ olup $\forall x \in G$, $\exists x_i \in G_i$, $x = x_1x_2 \dots x_n$ yazılışı tek türlüdür.

c) $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ ve $\forall x_i \in G_i$ için $G_i \lhd G$ olup, $x_1x_2 \dots x_n = 1 \Longrightarrow x_i = 1$ dir.

d) $\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ için $G_i \lhd G$ olup, $G_j \cap \left(G_1 \times \dots \times G_{j-1} \times G_{j+1} \times \dots \times G_n\right) = \{1\}$

(Hungerford, 1974).

Tanım 1.1.4. Bir önceki teoremde ifadelerden birinin sağlanması durumunda G ye $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplarının *iç direkt çarpımı* denir. Bu durumda

$$|G| = |G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n|$$

olur. Eğer G toplamsal ise bu durumda G grubu $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplarının *direkt toplamıdır* denir ve $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ biçiminde ifade edilir (Fraleigh, 2002).

Sonuç 1.1.5. Bir önceki tanımda $n = 2$ için direkt çarpım şu şekilde ifade edilir: G bir grup ve $G_1, G_2 \leq G$ olsun. Eğer, aşağıdakiler sağlanıyorsa G, G_1 ve G_2 nin direkt çarpım grubudur.

1) $G = G_1G_2$;

2) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$;

3) $G_1, G_2 \lhd G$ (Fraleigh, 2002).

Örnek 1.1.6. $C_m = \langle a : a^m = 1 \rangle$ ve $C_n = \langle x : x^n = 1 \rangle$ iki devirli alt grup olmak üzere

$$C_m \times C_n = \langle a \rangle \times \langle x \rangle = \{(a^i, x^j) : ax = xa, 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\}$$

bir direkt çarpım grubudur.

Tanım 1.1.7. G bir grup ve $G_1, G_2 \leq G$ olsun. Eğer, aşağıdakiler sağlanıyorsa G grubuna G_1 ve G_2 nin *yarı direkt çarpım grubu* denir ve $G = G_1 \rtimes G_2$ ile gösterilir.

1) $G = G_1G_2$;

2) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$;

3) $G_1 \lhd G$ (Milies ve Sehgal, 2002).

Örnek 1.1.8. $D_n = \langle x, y : x^n = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{n-1} \rangle$, $2n$ mertebeli bir dihedral grup olmak üzere, $yxy^{-1} = x^{n-1}$ eşitliği ile $\langle x : x^n = 1 \rangle \lhd D_n$ olup $D_n = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle$ olduğu görülebilir (Hungerford, 1974).

Tanım 1.1.9. G, G_1 ve G_2 birer grup olmak üzere G grubundan G_2 grubuna bir φ epimorfizması var ve çekirdeği G_1 ise bu durumda, G grubuna G_1 ile G_2 gruplarının bir *genişlemesi* denir. Eğer bir $\psi : G_2 \longrightarrow G$ homomorfizması var ve $\varphi \circ \psi$ bileşkesi birim dönüşüm ise bu durumda bu genişlemeye *ayrışım genişlemesi* adı verilir (Hungerford, 1974).

Serbest Gruplar

Gruplarda üreteç ve bağıntı kavramlarına dayalı olarak serbest objeler (serbest gruplar) inşa edilebilir. Bu kısımda, gruplar kategorisinde serbest çarpımların nasıl elde edilebileceği araştırılmıştır. Serbestlik kavramı kategori teorisinde aşağıdaki gibi verilebilir. Bir kategorinin; $A, B, C, \ldots$ olarak isimlendirilen objelerin ve A dan B ye tanımlanan morfizmaların kümesi şeklinde ifade edilen $Hom(A, B)$ kümesi ile oluşturulduğu bilinmektedir. $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$ ve $h \in Hom(C, D)$ olmak üzere,

$$Hom(B, C) \times Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$$

dönüşümünde, $(g, f) \mapsto g \circ f$ işlemiyle,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $f \in Hom(A, B)$ ve $g \in Hom(B, C)$ için, $1 \circ f = f$ ve $g \circ 1 = g$ olacak şekilde $1 : B \to B$ birim morfizması vardır (Hungerford, 1974).

Tanım 1.1.10. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ birer obje olsun. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $i : X \longrightarrow F_1$ eşleme olmak üzere eğer $f : X \longrightarrow F_2$ eşlemesi için tek türlü $g : F_1 \longrightarrow F_2$ var öyle ki $g \circ i = f$ ise bu durumda, *$F_1 \in \mathcal{C}$ objesi X kümesi üzerinde serbesttir* denir (Hungerford, 1974).

Örneğin, $X = \{a, b\}$ için, $F = \langle a, b \rangle$ olarak ele alındığında, $\sigma: X \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ dönüşümü $\sigma(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ile tek bir $\varphi: F \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ dönüşümü

$$\varphi\left(a^{i_i} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_s} b^{j_s}\right) = \sigma(a)^{i_1} \sigma(b)^{j_1} \sigma(a)^{i_2} \sigma(b)^{j_2} \dots \sigma(a)^{i_s} \sigma(b)^{j_s}$$

olduğundan $F = \langle a, b \rangle$, X üzerinde serbesttir.

X üzerindeki bir $(a_1, a_2, \dots)$ dizisi kelime olarak adlandırılır. Burada $\forall i \in \{1,2, \dots\}$ için $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$, $X \cap X^{-1} = \emptyset$, $|X| = |X^{-1}|$ ve $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq n$ için $a_k = 1$ olarak alınır. Sabit $(1,1, \dots)$ dizisine *boş kelime* denir ve 1 ile gösterilir.

Tanım 1.1.11. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(a_1, a_2, \dots)$ dizisine *X üzerinde bir indirgenmiş kelime* denir.

$i)$ $\forall x \in X, \forall i \in \mathbb{N}$ için $a_i = x$ ise $a_{i+1} \neq x^{-1}$ ($a_i = x^{-1}$ ise $a_{i+1} \neq x$),

$ii)$ $a_k = 1$ eşitliği $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 1$ olmasını gerektirir.

Boştan farklı bir indirgenmiş kelime $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1,1, \dots)$ formunda yazılır öyle ki $n \in \mathbb{N}, x_i \in X$ ve $\lambda_i = \pm 1$. Bu gösterimde x^1 aslında x olarak görülebilir. Kolaylık açısından $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1,1, \dots)$ indirgenmiş kelimesi $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ şeklinde ifade edilecektir. Böylece, iki indirgenmiş kelime $x = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ ve $y = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$ olmak üzere x ve y kelimelerinin birbirine eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart ya ikisinin de 1 olması ya da $m = n$ ve $\forall i \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\lambda_i = \delta_i$ ve $x_i = y_i$ olmasıdır.

Bir X kümesi üzerindeki tüm indirgenmiş kelimelerin kümesi $F(X)$ olmak suretiyle, $X \subseteq F(X)$ olur. $F = F(X)$ üzerinde boş kelime (1) birim eleman olarak etki eder yani $\forall w \in F$ için $1w = w1 = w$ eşitliği geçerlidir. $F = F(X)$ üzerinde bir ikili işlem aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}\right)\left(y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}\right) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$$

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus eşitliğin sağ tarafındaki kelimenin indirgenmiş olmak zorunda olmadığıdır. Örneğin, $x_n^{\lambda_n} = y_1^{-\delta_1}$ ise söz konusu kelime

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$$

biçimde ifade edilir.

Daha genel olarak, eğer $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ ve $y_1^{\delta_1}y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$ X üzerinde tanımlı boştan farklı iki kelime, $n \le m$ ve k, $(0 \le k \le n)$ ve $x_{n-j}^{\lambda_{n-j}} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ $(j = 0,1,\dots,k-1)$ olacak şekildeki en büyük tamsayı ise

$$\left(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}\right)\left(y_1^{\delta_1}y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}\right) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2} \dots x_{n-k}^{\lambda_{n-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} \dots y_m^{\delta_m}, & k < n \\ y_{n+1}^{\delta_{n+1}} \dots y_m^{\delta_m}, & k = n < m \\ 1, & k = n = m \end{cases}$$

eşitliği geçerlidir (Hungerford, 1974).

Teorem 1.1.12. Eğer X boştan farklı bir küme ve $F = F(X)$ tüm indirgenmiş kelimelerin kümesi ise, F bir serbest gruptur ve $F = \langle X \rangle$ ile gösterilir (Hungerford, 1974).

Tanım 1.1.13. X boştan farklı bir küme ve $F = \langle X \rangle$ bir serbest grup olmak üzere, X kümesine *üreteç kümesi* ya da *taban* ve $|X|$ kardinaline de F *serbest grubunun rankı* denir (Hungerford, 1974).

Örnek 1.1.14. $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ bir serbest Abel gruptur. Bu grup için $\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$ bir tabandır. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}^n$ rankı n olan bir serbest gruptur.

1.2. Halkalar ve Halkalarda İdempotent ve Nilpotent Elemanlar

Tanım 1.2.1. $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalar olmak üzere,

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) : r_i \in R_i, 1 \le i \le n\}$$

bileşenler üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemi ile bir *direkt toplam* halkasıdır (Milies ve Sehgal, 2002).

Tanım 1.2.2. Birimli bir R halkasında eğer, $a \in R$ elemanı $\exists x \in R$ için, $xa = 1$ eşitliğini sağlarsa bu durumda, $a \in R$ elemanına *sol birimsel eleman*, $ax = 1$ eşitliğini sağlaması durumunda *sağ birimsel eleman* ve eğer hem sol hem de sağ birimsel elemansa kısaca *birimsel eleman* olarak adlandırılır (Hungerford, 1974).

Tanım 1.2.3. Birimli bir R halkasında sıfırdan farklı her eleman sol veya sağ birimsel eleman olma özelliği taşıyorsa bu durumda R ye *bölümlü halka* denir (Fraleigh, 2002).

Bu tanımla, her cismin değişmeli bir bölüm halkası olduğu kolayca anlaşılabilir.

Tanım 1.2.4. Bir R halkasında $\forall r \in R$ için $cr = 0$ olacak şekildeki en küçük c pozitif tamsayısına R halkasının *karakteristiği* denir ve $kar\ R$ ile gösterilir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa bu durumda $kar\ R = 0$ olur (Hungerford, 1974).

Tanım 1.2.5. R bir halka olmak üzere, $e^2 = e$ eşitliğini sağlayan her bir $e \in R$ elemanına idempotent eleman denir.

Lemma 1.2.2. R birimli bir halka olmak üzere, $e \in R$ bir idempotent eleman ise $1_R - e$

de bir idempotent elemandır (Hungerford, 1974).

Tanım 1.2.3. Bir R halkasının her elemanı ile değişmeli olan idempotent elemanlarına *merkezi idempotent elemanlar* denir (Hungerford, 1974).

Lemma 1.2.4. R bir halka ve $e, f \in R$ iki merkezi idempotent eleman olsun. Bu taktirde,

$$ef$$

elemanı da idempotent olur (Hungerford, 1974).

Sonuç 1.2.5. R birimli bir halka ve $e, f \in R$ iki merkezi idempotent eleman olsun. Bu taktirde,

$$(1-e)f,\ \ (1-f)e\,,(1-e)(1-f)$$

elemanları da birer merkezi idempotent elemandır (Hungerford, 1974).

Tanım 1.2.6. R bir halka ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ kümesi, e_i ler idempotent eleman olmak üzere, R nin bir alt kümesi olsun. Eğer, $i \neq j$ için $e_i e_j = 0$ oluyorsa $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ye $ortogonal\ idempotent\ elemanlar$ denir (Ferraz ve Milies, 2007).

Teorem 1.2.7. $R, S_1, S_2, \ldots, S_n$ birimli değişmeli halkalar olmak üzere, aşağıdakiler ifadeler birbirine denktir.

$i)$ $R \cong S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

$ii)$ $R, \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ şeklinde, ortogonal ve merkezi idempotent elemanların bir tam kümesini barındırır öyle ki $1_R = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ ve her bir i için, $Re_i \cong S_i$.

$iii)$ $R = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ideallerin bir direkt çarpımı şeklinde ifade edilebilir öyle ki her bir i için, $A_i \cong S_i$ (Hungerford, 1974).

Tanım 1.2.8. Eğer bir R halkasında aşikar olmayan idempotent eleman yoksa bu takdirde R ye *ayrışamaz halka* denir (Danchev, 2010a).

Tanım 1.2.9. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ için $a^k = 0$ oluyorsa, a elemanına *nilpotent eleman* denir (Milies ve Sehgal, 2002).

1.3. *R*-Modüller

Tanım 1.3.1. R bir halka ve $M \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, eğer

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (s, m) & \mapsto & sm \end{array}$$

işlemi iyi tanımlı ve aşağıdaki şartların sağlanması durumunda, M ye bir *sol R-modül* denir (Hungerford, 1974).

$i)$ $(M, +)$ bir Abel grup

$ii)$ $\forall s \in R$ ve $\forall a, b \in M$ için, $s(a + b) = sa + sb$

$iii)$ $\forall s, t \in R$ ve $\forall a \in M$ için $(s + t)a = sa + ta$

$iv)$ $\forall s, t \in R$ ve $\forall a \in M$ için,$(st)a = s(ta)$

R birimli ise,

$v)$ $\forall a \in M$ için, $1_R a = a$.

Benzer şekilde, R nin M üzerine sağdan etkimesi durumunda M ye bir *sağ R-modül* denir.

Tanım 1.3.2. A ve B, bir R halkası üzerinde R-modüller olsun. Bu durumda, $f: A \to B$ tanımlı fonksiyonu, $\forall a, b \in A$ ve $s \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(sa) = sf(a)$$

eşitliklerini sağlarsa f ye R-*modül homomorfizması* denir.

$$Ker\ f := \{a \in A : f(a) = 0\}$$

kümesine f R-*modül homomorfizmasının çekirdeği* ve

$$Imf := \{f(a) : a \in A\}$$

kümesine de f R-*modül homomorfizmasının görüntüsü* denir (Hungerford, 1974).

Tanım 1.3.3. R bir halka, A, B ve C birer R-modül ve f ve g birer R-modül homomorfizması olsun. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dizisinde eğer $Imf = Ker\ g$ ise *dizi tamdır* denir (Hungerford, 1974). Benzer şekilde A_i ler birer R-modül ve f_i ler birer R-modül homomorfizması olmak üzere

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \ \dots \ A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

sonlu dizisinde $i = 1,2, \dots, n-1$ için $Imf_i = Ker\ f_{i+1}$ ise *bu sonlu dizi tamdır* denir (Hungerford, 1974).

Tanım 1.3.4. R bir halka, f ve g birer R-modül homomorfizması olmak üzere

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

tam dizisinde eğer $Imf = Ker\ g$ ise verilen diziye *kısa tam dizi* denir. Bu durumda f birebir, g örten ve $gof = 0$ olur (Hungerford, 1974).

Lemma 1.3.5. (Kısa Beş Lemması) R bir halka, A, B, C, A', B', C' R-modüller ve $f, g, f', g', \alpha, \beta$ ve γ, R-modül homomorfizmaları olmak üzere,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow_{\alpha} & & \downarrow_{\beta} & & \downarrow_{\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

kısa tam dizilerinin değişmeli diyagramı için, aşağıdakiler sağlanır.

1) α ve γ birebir $\Longrightarrow$ β birebirdir.

2) α ve γ örten $\Longrightarrow$ β örtendir.

3) α ve γ izomorfizma $\Longrightarrow$ β izomorfizmadır (Hungerford, 1974).

Lemma 1.3.6. R bir halka, A_1, A_2 ve B birer R-modül ve $f: A_1 \longrightarrow B$ ile $g: B \longrightarrow A_2$ birer R-modül homomorfizması olsun. O zaman,

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi için aşağıdakiler birbirine denktir:

1) $gh = 1_{A_2}$ olacak şekilde bir $h: A_2 \longrightarrow B$ vardır;

2) $kf = 1_{A_1}$ olacak şekilde bir $k: B \longrightarrow A_1$ vardır;

3) π_1 ve π_2 birer R-modül homomorfizması olmak üzere verilen dizi

$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\pi_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \longrightarrow 0$ dizisine izomorf olup özellikle $B \simeq A_1 \oplus A_2$ dir (Hungerford, 1974).

Tanım 1.3.7. Lemma 1.3.6. nın şartlarından birini sağlaması durumunda B ye A_1 ve A_2 nin *açılım genişlemesi* denir (Hungerford, 1974).

1.4. Grup Halkaları ve Özel Elemanlar

G bir grup ve R bir halka olmak üzere, RG grup halkası, elemanları

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g$$

sonlu toplamlarından oluşan ve G grubunun elemanlarını taban kabul eden bir R-modül yapısındaki küme şeklinde tanımlanır. Burada, $\alpha_g \in R$ dir. RG halkası üzerindeki işlemler aşağıdaki gibidir. $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ ve $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g$ için,

Toplama İşlemi:

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

Çarpma İşlemi:

$$\alpha\beta = \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{g \in G} \beta_g g\right)$$

$$= \sum_{g,h\in G}(\alpha_g\beta_h)gh$$

$$= \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G}\alpha_g\,\beta_h)gh$$

$g = gh^{-1}$ ile $\alpha.\beta = \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G}\alpha_{gh^{-1}}\,\beta_h)g$ olur.

Grup halkalarında iki elemanın eşitliği üzerinde

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g = \sum_{g\in G}\beta_g g \Leftrightarrow \ \forall g\in G\,, \alpha_g = \beta_g$$

çift gerektirmesi geçerlidir. R halkası ile, üzerinde tanımlanan RG grup halkası arasında aşağıdaki gibi bir örten halka homomorfizması tanımlanabilir:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon \ : RG & \longrightarrow & R \\ \sum_{g\in G}\alpha_g g & \mapsto & \sum_{g\in G}\alpha_g \end{array}$$

Bu durumda ε halka homomorfizmasına *artım eşlemesi* adı verilir. Çekirdeği;

$$Ker\ \varepsilon = \{\alpha = \sum_{g\in G}\alpha_g g : \ \varepsilon(\alpha) = 0\}$$

$$= \{\alpha = \sum_{g\in G}\alpha_g g : \ \sum_{g\in G}\alpha_g = 0\}$$

$$= \{\sum_{g\in G}\alpha_g g - \sum_{g\in G}\alpha_g : \ \alpha_g \in R, g\in G\}$$

$$= \{\sum_{g\in G}\alpha_g(g-1) : \ \alpha_g \in R, g\in G\}$$

$$= \langle g-1\rangle_R$$

olarak tanımlanıp $\Delta_R(G) \coloneqq Ker\ \varepsilon$ ile gösterilir (Sehgal, 1993).

Lemma 1.4.1. $\Delta_R(G)$, RG grup halkasının bir idealidir (Sehgal, 1993).

Tanım 1.4.2. $\Delta_R(G)$ ye *artım ideali* denir (Sehgal, 1993).

R birimli bir halka olmak üzere, G grubu RG grup halkasının içine

$$\begin{array}{rcl} i: \ G & \longrightarrow & RG \\ g & \mapsto & 1_R.g \end{array}$$

ile gömülebilirdir ve bu, $G \hookrightarrow RG$ ile gösterilir. Benzer şekilde R halkası da

$$\begin{array}{rccc} \vartheta: & R & \longrightarrow & RG \\ & r & \mapsto & r.e_G \end{array}$$

ile RG grup halkasına gömülebilirdir ki bu $R \hookrightarrow RG$ ile gösterilir.

Önerme 1.4.3.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & R \times RG & \longrightarrow & RG \\ & \left(\alpha, \sum \alpha_g g\right) & \mapsto & \sum (\alpha\alpha_g) g \end{array}$$

işlemiyle RG, bir sol (sağ) R-modül teşkil eder (Sehgal, 1993).

Lemma 1.4.4. RG grup halkasının değişmeli olabilmesi için gerek ve yeter şart R halkasının değişmeli olması ve G grubunun bir Abel grup olmasıdır. Benzer şekilde, RG grup halkasının birimli olabilmesi için gerek ve yeter şart R nin birimli olmasıdır (Sehgal, 1993).

Grup Halkalarında İdempotent Elemanlar

G sonlu bir grup, $(RG, +, .)$ grup halkası ve $H \leq G$ olsun. G sonlu olduğundan,

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$$

sonludur.

$$\widehat{H} = \sum_{j=0}^{m-1} h_j = h_1 + h_2 + \cdots + h_m$$

olarak tanımlansın. Açıkça görülür ki $e = |H|^{-1}\widehat{H}$, $\mathbb{Q}G$ nin bir elemanı ve üstelik her bir $i \in \{1,2, \dots, m\}$ için, $h_i\widehat{H} = \widehat{H}$ olduğundan,

$$e^2 = \left(|H|^{-1}\widehat{H}\right)^2 = |H|^{-2}\widehat{H}(h_1 + h_2 + \cdots + h_m) = \frac{(h_1\widehat{H} + h_2\widehat{H} + \cdots h_m\widehat{H})}{|H|^2} = e$$

yani e bir idempotent elemandır (Ferraz ve Milies, 2007).

Tanım 1.4.5. $\forall \alpha \in RG$ için $e\alpha = \alpha e$ ve $e^2 = e$ eşitliğini sağlayan $e \in RG$ elemanlarına *merkezi idempotent elemanlar* denir (Ferraz ve Milies, 2007).

Lemma 1.4.6. G herhangi bir sonlu grup ve $H \lhd G$ ise $e = \frac{\hat{H}}{|H|} \in \mathcal{Z}(\mathbb{Q}G)$ (Ferraz ve Milies, 2007).

Sonuç 1.4.7. Değişmeli bir $\mathbb{Q}G$ grup halkasının tüm idempotent elemanları merkezidir.

Tanım 1.4.8.

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şeklindeki elemanlara *ortogonal idempotent elemanlar* denir.

$\{1\} = H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_m = G$; bir G sonlu grubunun alt grup ailesinin bir zinciri olsun. Bu durumda, her bir $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ için $e_i = \frac{\hat{H}_i}{|H_i|}$ olmak üzere, ${e_i}^2 = e_i$ yani birer idempotent olur. Eğer, $f_m = e_m$ ve $i = 1,2,\ldots,m-1$ için, $f_i = e_i - e_{i+1}$ seçilirse

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$$

RG grup halkasınının ortogonal idempotent elemanlarının bir tam kümesini oluşturur yani $\sum_{i=1}^{m-1} f_i = 1$ eşitliği geçerlidir (Ferraz ve Milies, 2007).

Örnek 1.4.9. $C_9 = \langle a : a^9 = 1 \rangle$, $H_0 = \{1\}$, $H_1 = \langle a^3 \rangle$ ve $H_2 = C_9$ olsun. O zaman,

$$\{1\} \lhd \langle a^3 \rangle \lhd \langle a \rangle$$

olduğu kolayca görülür. Bu durumda, $i = 0, 1, 2$ için $e_i = \frac{\hat{H}_i}{|H_i|}$ idempotent elemanları,

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = \frac{1 + a^3 + a^6}{3}$$

$$e_2 = \frac{\hat{a}}{9}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$f_2 = e_2 = \frac{\hat{a}}{9}$$

$$f_1 = e_1 - e_2 = \frac{(2 - a - a^2)\widehat{a^3}}{9}$$

$$f_0 = e_0 - e_1 = \frac{2 - a^3 - a^6}{3}$$

elemanlarına bakılırsa görülür ki $i = 0, 1, 2$ için $f_i f_j = \begin{cases} f_i , i = j \\ 0 , i \neq j \end{cases}$

ve $f_0 + f_1 + f_2 = 1$ yani $\{f_0 , f_1 , f_2\}$ ortogonal idempotent elemanların bir tam kümesidir.

Grup Halkalarında Nilpotent Elemanlar

G bir sonlu grup ve F bir cisim olmak üzere, FG grup cebirinde aşikar olmayan nilpotent elemanların bulunup bulunmaması durumuna göre sınıflandırmalar yapılabilir. Eğer $kar\ F = p \neq 0$ ve G içinde bir p-eleman mevcut ise $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$(g-1)^{p^n} = g^{p^n} - 1 = 0$$

olacağından $g - 1$ elemanının bir nilpotent elemandır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.4.10. F bir cisim ve $kar\ F = p \neq 0$ olsun. G grubu, p-eleman içermek üzere, FG grup cebirinde nilpotent eleman mevcuttur (Milies ve Sehgal, 2002).

Burada, $g - 1$ elemanının nilpotentlik indeksinin p^n olduğu açıktır. Kabul edelim ki FG de nilpotent elemanlar bulunmasın. $e \in FG$ ve e bir idempotent eleman olsun. Keyfi bir $\alpha \in FG$ için $\sigma = e\alpha(1-e)$ elemanı için $\sigma^2 = 0$ ve kabulden dolayı $\sigma = 0$ olacağından,

$$e\alpha(1-e) = e\alpha - e\alpha e = 0 \Longrightarrow e\alpha = e\alpha e$$

olur. Benzer şekilde, $\sigma' = (1-e)\alpha e$ şeklinde oluşturulursa ${\sigma'}^2 = 0$ yani $\sigma' = 0$ olur ki böylece

$$(1-e)\alpha e = \alpha e - e\alpha e = 0 \Longrightarrow \alpha e = e\alpha e$$

yani $e\alpha = \alpha e$ olup, e elemanının bir merkezi idempotent eleman olduğu sonucu elde edilir. Keyfi bir $g \in G$ için bu idempotent eleman,

$$e = \frac{1}{o(g)} \sum_{i=1}^{o(g)} g^i$$

şeklinde elde edilebileceğinden $e \in FG$ nin merkezi idempotent eleman olmasıyla birlikte $\langle g \rangle \lhd G$ ve böylece G grubunun bir Abel grup ya da Hamilton grubu olduğu gerçeğine ulaşılır.

Önerme 1.4.11. F bir cisim ve $kar\ F = p \neq 0$ ve G sonlu bir grup olsun. Eğer FG grup cebirinde aşikar olmayan nilpotent eleman mevcut değilse bu durumda FG nin tüm idempotent elemanları merkezi olup, G Abel bir grup ya da her alt grubu normal olan bir grup (Hamilton grubu) olmalıdır. (Milies ve Sehgal, 2002).

Grup Halkalarında Birimsel Elemanların Çarpımsal Grubu

Tanım 1.4.12. R birimli bir halka olsun.

$$U(RG) = \{\alpha \in RG \mid \alpha\beta = 1_{RG}\ ,\ \exists \beta \in RG\}$$

kümesi, RG grup halkasının birimsel elemanlar grubu olarak adlandırılır (Sehgal, 1993).

Lemma 1.4.13. $U_1(RG) := \{u \in U(RG) : \varepsilon(u) = 1\}$, $U(RG)$ nin normal alt grubudur (Sehgal, 1993).

Lemma 1.4.14. $U(RG) = U(R) \times U_1(RG)$ (Sehgal, 1993).

İspat. $u \in U(RG)$ alınsın. $\varepsilon(u) = r \in U(R)$ dir. O zaman,

$$u = rr^{-1}u = r(r^{-1}u) \Longrightarrow \varepsilon(r^{-1}u) = \varepsilon(r^{-1})\varepsilon(u) = r^{-1}r = 1$$

$$\Longrightarrow r \in U(R)\ ,\ r^{-1}u \in U_1(RG)$$

$$\Longrightarrow U(RG) = U(R)U_1(RG)$$

$$r \in U(R) \cap U_1(RG) \Longrightarrow r \in U(R) \text{ ve } r \in U_1(RG)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(r) = r \text{ ve } \varepsilon(r) = 1$$

$$\Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow U(R) \cap U_1(RG) = \{1\}$$

olduğundan $U(RG) = U(R) \times U_1(RG)$ sonucuna ulaşılır. ■

Tanım 1.4.15. $R = \mathbb{Z}$ olursa, $\mathbb{Z}G$ yapısına *integral grup halkası* denir (Sehgal, 1993).

Sonuç 1.4.16. $\mathbb{Z}G$ değişmelidir $\Leftrightarrow$ G Abel gruptur.

Tanım 1.4.17. R bir halka ve G sonlu bir grup olmak üzere,

$$U(R)G = \{rg : r \in U(R), g \in G\} \subseteq U(RG)$$

alt grubuna *aşikar birimseller grubu* denir (Sehgal, 1993).

Böylece kolayca görülebilir ki, $\mathbb{Z}G$ integral grup halkasının aşikar birimseller grubu $\pm G$ dir:

$$g \in G \Rightarrow (-g)(-g^{-1}) = (g)(g^{-1}) = 1_R e_G = 1_{RG}$$

Sonuç 1.4.18. $U(\mathbb{Z}G) = \pm U_1(\mathbb{Z}G)$

$\mathbb{Z}G$ integral grup halkasının tüm birimsellerini araştırma problemi, özel olarak $U_1(\mathbb{Z}G)$ birimseller grubunu araştırmaya denktir.

Lemma 1.4.19. G sonlu olmak üzere, $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\mathbb{Z}G$ integral grup halkasının sonlu mertebeli bir birimsel elemanı olsun. O zaman $g \in \mathcal{Z}(G)$ (merkezi) olmak üzere

$$\alpha = \pm g$$

yani aşikar birimsel formundadır (Higman, 1940a; 1940b).

Sonuç 1.4.20. A sonlu bir Abel grup olmak üzere, $\mathbb{Z}A$ integral grup halkasındaki sonlu mertebeli birimseller $g \in A$ için $\pm g$ formundadır (Higman, 1940a; 1940b).

Buradan, bir A sonlu grubunun $\mathbb{Z}A$ integral grup halkasındaki aşikar olmayan birimsel elemanların ya sonsuz mertebeli ya da merkezi olmadığı sonucuna varılır. Şimdi, sonlu Abel grupların integral grup halkalarının birimseller grubu ile ilgili Higman'ın sonuçları verilebilir.

Teorem 1.4.21. A sonlu Abel grubunun $\mathbb{Z}A$ integral grup halkasının birimseller grubu;

$$U(\mathbb{Z}A) = \pm A \times F$$

dir öyle ki burada F bir serbest grup olup rankı

$$\rho = \frac{1}{2}(|A| + n_2 + 1 - 2l)$$

ile belirlidir. Burada n_2, A daki 2 mertebeli elemanların sayısını ve l de grubun birbirinden farklı devirli alt gruplarının sayısını gösterir (Higman, 1940a; 1940b).

Teorem 1.4.22. G sonlu bir Abel grup olmak üzere

$$U(\mathbb{Z}G) = \pm G \Longrightarrow U(\mathbb{Z}[G \times C_2]) = \pm(G \times C_2)$$

eşitliği sağlanır. (Higman, 1940a; 1940b).

Unipotent Birimsel Elemanlar

R birimli bir halka olmak üzere eğer $\eta \in R$ ve $\eta^2 = 0$ ise $(1-\eta)(1+\eta) = 1$ olacağından hem $1+\eta$ hem de $1-\eta$ birimsel elemanlardır. Dolayısıyla aynı yolla, $\exists\eta \in R$ ve $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ için $\eta^k = 0$ mevcut ise

$$(1-\eta)(1+\eta+\eta^2+\cdots+\eta^{k-1}) = 1-\eta^k = 1$$

$$(1+\eta)(1-\eta+\eta^2-\cdots-\eta^{k-1}) = 1-\eta^k = 1$$

eşitliklerinden dolayı $1 \pm \eta$, R halkasının birimsel elemanları olurlar. Bu birimsel elemanlara *unipotent birimsel elemanlar* denir (Milies ve Sehgal, 2002). FG grup cebirinde, $kar\ F = p \neq 0$ olmak üzere, $g \in G$ ve $o(g) = p^n$ için $(1-g)^{p^n} = 0$ olacağından $\eta = 1 - g$ bir nilpotent elemandır. Bu durumda, $1 - \eta = g$ aşikar birimsel eleman olur. Ancak $1 + \eta = 2 - g$, $kar\ F \neq 2$ iken aşikar olmayan bir birimsel eleman olarak elde edilir. Buna ek olarak, $g - g^2 = g(1-g)$ de nilpotent eleman olduğundan $g^2 \neq 1$ yani $p \neq 2$ olmak üzere $u = 1 + g - g^2$ aşikar olmayan bir unipotent birimsel elemandır (Milies ve Sehgal, 2002).

İki-devirli Birimsel Elemanlar

Unipotent birimsel elemanları oluştururken halkadaki nilpotent elemanların kullanıldığı yukarıda verilmişti. Şimdi, halkanın daha özel bir formda oluşturulan nilpotent elemanları yardımıyla birimsel eleman elde etmenin bir diğer yolu araştırılacaktır. R bir halka, x ve y sıfır bölen elemanlar (Milies ve Sehgal, 2002) olsun. Keyfi bir $t \in R$ elemanı göz önüne alınsın. Böylece, $\eta = ytx$ elemanı için $\eta^2 = 0$ olduğundan $1 + \eta$ elemanının bir birimsel eleman teşkil ettiği görülmüştü. Aynı yolla, $\exists a \in G$ için, $o(a) < \infty$ yani sonlu mertebeli bir eleman olmak üzere, $(a - 1)$ elemanı $(a - 1)\left(1 + a + \cdots + a^{o(a)-1}\right) = 0$ eşitliği ile bir sıfır bölen elemandır. Bununla birlikte keyfi bir $b \in G$ ile

$$u_{a,b} = 1 + (a - 1)b(1 + a + \cdots + a^{o(a)-1})$$

formunda birimsel elemanlar oluşturulabilir ki $u_{a,b}$ ye *iki-devirli birimsel eleman* denir (Milies ve Sehgal, 2002).

Sonuç 1.4.23. G bir Abel grup ise bu durumda RG içinde iki-devirli birimsel eleman sadece $u_{a,b} = 1$ aşikar birimsel elemanıdır (Milies ve Sehgal, 2002).

Daha genel olarak iki-devirli bir birimsel elemanın aşikar olabilmesi için bir gerek ve yeter şart aşağıda verilmiştir.

Önerme 1.4.24. G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $o(a) = n < \infty$ olmak üzere, $u_{a,b}$ iki-devirli birimsel elemanının aşikar birimsel olabilmesi için gerek ve yeter şart $b \in G$ elemanının $\langle a \rangle$ devirli grubunu normallemesidir. Yani, $\exists j \in \mathbb{Z}^+$ için $ab = ba^j$ olmasıdır (Milies ve Sehgal, 2002).

Bir $\mathbb{Z}G$ integral grup halkasının tüm iki-devirli birimsel elemanlarının üretmiş olduğu altgrup $\mathcal{B}_2$ ile gösterilebilir (Milies ve Sehgal, 2002). Bu gösterim ve Önerme 1.4.24. yardımıyla aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 1.4.25. G Abel olmayan bir grup olmak üzere, $\mathcal{B}_2 = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şart G nin bir Hamilton grubu olmasıdır (Milies ve Sehgal, 2002).

Önerme 1.4.26. Bir $\mathbb{Z}G$ integral grup halkasında birimden farklı tüm iki-devirli birimsel elemanlar sonsuz mertebelidir (Milies ve Sehgal, 2002).

Bass Devirli Birimsel Elemanlar

Bu kesimde; ϕ, Euler ϕ-fonksiyonu ve Euler'in Teoremi gereğince $(i,n)=1$ olmak üzere $i^{\phi(n)} \equiv 1\ (mod\, n)$ denkliği ile bir $\mathbb{Z}G$ integral grup halkasında özel formdaki bir diğer birimsel eleman aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 1.4.27. G bir grup, $x \in G$ ve $o(x)=n$ olsun. Her bir $1 < i < n-1$ ve $(i,n)=1$ için $\hat{x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ olmak üzere,

$$\mu_i = (1 + x + \cdots + x^{i-1})^{\phi(n)} + \frac{1 - i^{\phi(n)}}{n} \langle x \rangle \in \mathbb{Z}G$$

birimsel elemanlarına *Bass devirli birimsel elemanlar* denir ki $ik \equiv 1\ (mod\, n)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu_i^{-1} = (1 + x^i + \cdots + x^{i(k-1)})^{\phi(n)} + \frac{1 - k^{\phi(n)}}{n} \langle x \rangle \in \mathbb{Z}G$$

(Milies ve Sehgal, 2002).

Önerme 1.4.28. G bir grup ve $x \in G$, n mertebeli bir eleman olsun. Yukarıdaki tanımla oluşturulan bir

$$\mu_j = (1 + x + \cdots + x^{j-1})^{\phi(n)} + \frac{1 - j^{\phi(n)}}{n} \langle x \rangle \in \mathbb{Z}G$$

Bass devirli birimsel eleman sonsuz mertebelidir (Milies ve Sehgal, 2002).

Aşikar Birimsel Elemanlar

Eğer $r \in U(R), g \in G$ ise $rg \in RG$ elemanı tersi $r^{-1}g^{-1}$ ile birlikte bir birimsel elemandır ki Tanım 1.4.17'de aşikar birimsel eleman olarak adlandırılmıştı. Bir integral grup halkası $\mathbb{Z}G$ içinde aşikar birimsel elemanların $\pm g$, ve F bir cisim olmak üzere FG grup cebirinde aşikar birimsel elemanların da $\alpha \in F \backslash \{0\}$ olmak üzere, αg formunda olduğu sonucuna kolayca varılabilir. Genel olarak, bir grup halkasında aşikar olmayan birimsel eleman mevcut olmayabilir. Aşağıdaki önerme, aşikar olmayan birimsel elemanın bir grup halkasında hangi şartlarda mevcut olmayacağı üzerine büyük bir önem arz etmektedir.

Önerme 1.4.29. G sonlu ve sonsuz mertebeli elemanlar içerebilen bir grup ve F de $kar\ F > 0$ olan bir cisim olmak üzere $U(FG)$ birimsel elemanlar grubunun sadece aşikar birimsel elemanlardan oluşabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

$i)$ $F = F_2,\ G = C_2$ veya $G = C_3$,

$ii)$ $F = F_3, G = C_3$

(Milies ve Sehgal, 2002).

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Grup halkalarının temelleri oldukça eski tarihlere dayanır. İlk olarak Cayley' in (1854) soyut grup tanımını verdiği makalenin son kısımlarına doğru üstü kapalı bir şekilde ele alınmış olan konu, Molien' in makaleleri ile daha belirgin bir şekilde incelenmiştir (Molien, 1893; 1897). Noether ve Brauer' in (1927), Brauer'in (1929) ve Noether' in (1929) çalışmalarıyla grup halkalarının temsil teorisi ve cebirler ile aralarındaki bağ daha fazla derinlik kazanmıştır.

G, H iki grup ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere G grubu verildiğinde $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$ olacak şekilde H grubunu belirleme ya da kısaca literatürde izomorfizma problemi olarak bilinen ve hala açık olarak günümüze kadar gelmiş olan problem Higman'ın doktora tezinde (1940b) bazı grup türleri için ele alınmıştır. Daha sonra aynı problem $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası yerine bir K cismi için incelenmiştir (Milies ve Sehgal, 2002). Kaplansky' nin (1970) meşhur problemler listesiyle beraber konunun aslında birçok teoriyle kesiştiği ve birçok alana uygulama sahası açabildiği daha net anlaşılmıştır. Grup, halka ve modül teorisiyle çok yakından ilişkili olduğu için grup halkaları daha sonraları araştırmacılar tarafından kendi alanlarını ilgilendiren yönleriyle ele alınmış ve çalışılmıştır. Örneğin, Connell (1963) grup halkalarının halka teorik yönlerini ele alan bir çalışma yayınlamıştır. Daha sonra Ribenboim (1969) ve Lambeck (1996) tarafından halkalar ve modüller üzerine yayınlanan çalışmalar, grup halkalarının cebirsel özellikleri üzerine Passman (1977) ve Sehgal (1978) tarafından yayınlanan çalışmalar ile beraber literatüre girmiştir.

Grup halkaları, üzerinde tanımlandığı halkanın özelliğine göre değişiklik arz eder. Örneğin, $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı bir grup halkasına integral grup halkası denir. İntegral grup halkaları cebirsel sayılar teorisi, homolojik cebir, cebirsel topoloji ve cebirsel K-teorisi ile de yakından ilgili olduğundan birçok araştırmacı için özel olarak incelenen bir alan haline gelmiştir. Ayrıca konunun uygulama anlamında disiplinler arası olarak kriptografi ve kodlama teorisi ile de yakın bir ilişkisi bulunmaktadır. Hurley (2011) tarafından yayınlanan çalışma ile grup halkalarındaki birimsel elemanların kriptografik sistemlerin oluşturulmasında etkin bir biçimde kullanılabileceği görülmüştür.

Grup halkalarında birimsel elemanlar gibi kendine has özellikler taşıyan başka elemanlar da vardır. Bunların başında nilpotent elemanlar ve idempotent elemanlar gelmektedir. Her ikisi ile de birimsel elemanlar elde edilebileceğinden bu özel elemanlar birbirleriyle yakından ilişkilidir.

Birimsel elemanlar grubu, literatürde çok geniş yer tutan çalışma alanlarından biri olmuştur. Özellikle, Sehgal' in (1993) birimsel elemanlar üzerine yapılan kapsamlı çalışması araştırmacılar için çok önemli bir kaynak haline gelmiştir.

Aleev ve Panina (1999), 7 ve 9 mertebeli devirli grupların grup halkalarındaki birimsel elemanların üreteçler bakımından bir karakterizasyonunu vermiştir.

Allen ve Hobby (1980), A_4 alterne grubunun integral grup halkasının birimsel elemanlar grubunun belirlenmesi üzerine çalışma yapmıştır.

Allen ve Hobby (1987), ayrıca S_3 simetrik grubunun integral grup halkasının birimsel elemanlar grubunun üreteçlerini elde etmişlerdir.

Arı (2003), Milies ve Sehgal' in (2002) C_8 devirli grubunun integral grup halkasının birimsel grubuna yönelik çalışmasında Fibre çarpım ile elde ettiği sonucu cebirsel sayılar teorisi kullanarak farklı bir bakış açısı ile elde etmiştir.

Milies (1973), D_4 dihedral grubunun integral grup halkasının birimsel elemanları üzerine sonuçlar elde etmiştir.

Bilgin (2004), C_{12} devirli grubunun integral grup halkasındaki birimsel elemanları epimorfizmalarla altgruplara taşıyarak elde etmiş ve $C_{12} = \langle x \rangle$ olmak üzere, $U_1(\mathbb{Z}C_{12}) = C_{12} \times \langle u \rangle$ içindeki $\langle u \rangle$ devirli grubunun,

$$u = 3 + 2x + x^2 - x^4 - 2x^5 - 2x^6 - 2x^7 - x^8 + x^{10} + 2x^{11}$$

ile üretilebildiğini göstermiştir.

Bilgin ve ark., (2016) $T = \langle a, b \colon a^6 = 1, a^3 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, 12 mertebeli Abel olmayan grubu ve C_2 devirli grubu için, $U_1(\mathbb{Z}[T \times C_2])$ birimsel grubunun yapısını; F_r, r ranklı serbest grubu göstermek üzere

$$U_1(\mathbb{Z}[T \times C_2]) = (F_{97} \rtimes F_5) \rtimes (T \times C_2)$$

şeklinde karakterize etmiştir.

Jespers (1995), D_{12} dihedral grubunun integral grup halkasının birimsel elemanlar grubunun $U_1(\mathbb{Z}D_{12}) = V \rtimes D_{12}$ şeklinde ifade edilebildiğini göstermiştir öyle ki $V = F_5 \rtimes F_3$, iki-devirli birimsel elemanlar tarafından üretilebilen serbest grupların yarı direkt çarpım grubudur.

Benzer şekilde Jespers (1995), $D_8 \times C_2$ direkt çarpımının integral grup halkası için

$$U_1(\mathbb{Z}D_{12}) = (F_9 \rtimes F_3) \rtimes D_{12}$$

olduğunu göstermiştir.

Jespers ve Leal (1991), Abel olmayan bazı 2-grupların integral grup halkalarının birimsel elemanlar grubunun yapısını da benzer şekilde karakterize etmiştir.

Jespers ve Parmenter (1992), $S_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1 \rangle$ olmak üzere, $U_1(\mathbb{Z}S_3)$ birimsel grubunun yapısını, iki-devirli birimsel elemanlar cinsinden

$$U_1(\mathbb{Z}S_3) = \langle u_{b,a}, u_{ba,a}, u_{ba^2,a} \rangle \rtimes S_3$$

şeklinde elde etmiştir.

Jespers ve Parmenter (1993), 16 mertebeli aşağıdaki grupların integral grup halkalarındaki birimsel elemanları, matrisler cinsinden elde etmişlerdir.

$$P = \langle x, y : x^4 = y^4 = 1, yx = x^3 y \rangle,$$
$$Q_{16} = \langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^2, yx = x^7 y \rangle,$$
$$D = \langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^4 = 1, xz = zx, yz = zy, yx = z^2 xy \rangle,$$
$$D_{16}^+ = \langle x, y : x^8 = y^2 = 1, yx = x^5 y \rangle,$$
$$D_{16}^- = \langle x, y : x^8 = y^2 = 1, yx = x^3 y \rangle,$$
$$D_{16} = \langle x, y : x^8 = y^2 = 1, yx = x^7 y \rangle,$$
$$H = \langle x, y : x^4 = y^4 = (xy)^2 = (x^2, y) = 1 \rangle$$

Ayrıca, Q kuaterniyon grubu olmak üzere, $Q \times C_2$ ve $D_8 \times C_2$ gruplarının integral grup halkalarının birimsel grubu da karakterize edilmiştir (Jespers ve Parmenter, 1993).

Küsmüş ve Denizler (2014), 24 mertebeli devirli grubun integral grup halkasındaki normallenmiş birimsel elemanlar grubunun üreteçlerini karakterize etmiştir.

Küsmüş (2015), $C_n \times C_6$ grubunun integral grup halkasının birimsel elemanlar grubunu ayrışım genişlemeleri cinsinden belirlemiştir.

Li (1998), $G \times C_2$ grubunun bazı Abel G grupları için integral grup halkasının birimsel grubunu araştırmıştır. Bu araştırmada; Li

$K = \{1 + \alpha(1 - x) : 1 + 2\alpha \in U(\mathbb{Z}G)\}$ ve $C_2 = \langle x \rangle$ olmak üzere,

$$U(\mathbb{Z}[G \times C_2]) = G \times C_2 \times K$$

olduğunu göstermiştir (Li, 1998).

A_5 alterne grubunun integral grup halkasındaki merkezi birimsel elemanlar grubunun sonsuz mertebeli bir devirli grup olduğu gösterilerek üreteci karakterize edilmiştir (Li ve Parmenter, 1997).

Low (2008), p asal olmak üzere $G \times C_p$ grubunun integral grup halkasının birimsel elemanlar grubunun yapısını tam diziler ve ayrışım genişlemeleri yardımıyla bazı G grupları için incelemiştir. Bu karakterizasyonda Low, ω birimin p. ilkel kökü olmak suretiyle $U(\mathbb{Z}[\omega])$ birimsel grubunun yapısını bir konjektür olarak vermiş ve bulgularını kapalı olarak sunmuştur.

Ferraz (2009), $\mathbb{Z}C_p$ integral grup halkasının karakterizasyonunu, Low' un yukarıda bahsedilen konjektürüne bir çözüm olarak sunmuştur. Ferraz (2009), ω birimin p. ilkel kökü olmak üzere göstermiştir ki

$$S_\omega = \{1+\omega, 1+\omega+\omega^2, \dots, 1+\omega+\cdots+\omega^{(p-3)/2}\}$$

kümesi $U(\mathbb{Z}[\omega])$ birimsel elemanlar grubunu üretir. Hatta, $C_p = \langle x \rangle$, t mod p' de ilkel kök ve $1 \leq i \leq (p-3)/2$ için, $\mathbb{Z}C_p$ içinde r; $tr \equiv 1 \, mod \, p$ olan en küçük pozitif tamsayı ve $k = \frac{tr-1}{p}$ olmak üzere

$$u_i = \left(\sum_{j=0}^{r-1} x^{jt}\right)\left(\sum_{j=0}^{t-1} x^{jt^i}\right) - k\hat{x}$$

$$= \left(1 + x^t + \cdots x^{t(r-1)}\right)\left(1 + x^{t^i} + \cdots + x^{t^i(t-1)}\right) - k\hat{x}$$

Hoechsmann birimsel elemanlarıyla oluşturulan

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_{(p-3)/2}\}$$

çarpımsal bağımsız kümesi ile birlikte $U(\mathbb{Z}C_p) = \langle x \rangle \times S$ eşitliği geçerlidir (Ferraz ve Kitani, 2015).

Aynı çalışmada, $\phi(p^n) \leq 66$ olan p^n sayıları için $U(\mathbb{Z}C_{p^n})$ birimsel grubu açık bir şekilde karakterize edilmiştir (Ferraz ve Kitani, 2015).

Tanım 2.1. Eğer, ω birimin p. ilkel kökü ve $\lambda_i = 1 + \omega + \cdots + \omega^{i-1}$ ise, $\langle 1, \omega, \lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{p-3}{2}} \rangle$, $U(\mathbb{Z}[\omega])$ birimsel grubunu üretir ve aşağıdaki şartlardan biri sağlanırsa bu durumda p ye *hoş asal sayı* denir (Ferraz ve Kitani, 2015).

i) $U(\mathbb{Z}_p) = \langle \bar{2} \rangle$;

ii) $U(\mathbb{Z}_p)^2 = \langle \bar{2} \rangle$ ve $\overline{-1} \notin U(\mathbb{Z}_p)^2$

Ayrıca, $C_p \times C_2$ ve $C_p \times C_2 \times C_2$ grupları için de sırasıyla aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 2.2. p bir hoş asal sayı olsun.

$$w_i = x^{\frac{(p-1)}{2}.2^{i-1}}\left(1 + x^{2.2^{i-1}} + x^{4.2^{i-1}} + \cdots + x^{(p-1).2^{i-1}}\right)\left(1 + x^{2^i}\right) - \hat{x}$$

ve

$$\rho(w_i) = x^{\frac{(p-1)}{2}.2^{i-1}}\left(\bar{1} + x^{2.2^{i-1}} + x^{4.2^{i-1}} + \cdots + x^{(p-1).2^{i-1}}\right)\left(\bar{1} + x^{2^i}\right) + \hat{x}$$

olmak üzere, $o\big(\rho(w_1)\big) = 2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ için,

$$U\left(\mathbb{Z}\big(C_p \times C_2\big)\right) = \langle -1\rangle \times \langle x, a\rangle \times \langle\{w_i : i \in I\}\rangle \times \langle\{u_i(a) : i \in I\}\rangle$$

öyle ki burada

$u_i(a) = 1 - \beta_i + \beta_i a,\ \beta_1 = \frac{1-w_1^2 w_2^{-1}}{2},\quad \beta_i = \delta^{i-1}(\beta_1),\ \delta : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow \mathbb{Z}C_p, \delta(x) = x^2$ ve indis kümesi

$$I = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq (p-3)/2\}$$

(Ferraz ve Marcuz, 2016).

Teorem 2.3. $i = 1{,}2$ için, $C_2 = \langle a_i\rangle$ ve p bir *hoş asal say*ı olmak üzere $C_p = \langle g\rangle$ olsun. Eğer,

$$H = C_p \times C_2 \times \ldots \times C_2 = C_p \times C_2^m$$

olmak üzere,

ϕ_m: $\mathbb{Z}(C_p \times H) \longrightarrow \mathbb{Z}_2(C_p \times H)$ şeklinde tanımlanır, $\phi_n = \phi|_{U(\mathbb{Z}(C_p \times H))}$ kısıtlanışını gösterir ve $ord\big(\phi_2(w_1)\big) = 2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ise

$$w_i = x^{\frac{(p-1)}{2}.2^{i-1}}\left(1 + x^{2.2^{i-1}} + x^{4.2^{i-1}} + \cdots + x^{(p-1).2^{i-1}}\right)\left(1 + x^{2^i}\right) - \hat{x}$$

$$u_i\big(a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_m}\big) = 1 - \beta_i + \beta_i a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_m}$$

$\beta_1 = \frac{1-w_1^2 w_2^{-1}}{2},\ \beta_i = \delta^{i-1}(\beta_1),\ \delta : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow \mathbb{Z}C_p, \delta(x) = x^2$ ve indis kümesi

$$I = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq \frac{p-3}{2}\}$$

ve $\left\{\phi_2(\beta_1), \phi_2(\beta_2), \ldots, \phi_2(\beta_{\frac{p-3}{2}})\right\}$ bağımsız kümesi ile birlikte

$$U\left(\mathbb{Z}\big(C_p \times C_2 \times C_2\big)\right)$$
$$= \langle -1\rangle \times \langle x, a_1, a_2\rangle \times \langle w_i, \ldots, w_{\frac{p-3}{2}}\rangle \times \langle u_i(a_1), u_i(a_2), u_i(a_1a_2)\rangle$$

dır (Ferraz ve Marcuz, 2016).

Benzer şekilde, Ferraz ve Simon (2008), bir metadevirli grubun integral grup halkasındaki merkezi birimsel elemanların altgrubunun rankını belirlemiştir.

$C_{p,q} := C_p \rtimes C_q$ olmak üzere Ferraz ve Simon (2016), $U(\mathbb{Z}C_{p,q})$ içindeki normallenmiş merkezi birimsel elemanların bir karakterizasyonunu vermiştir. Bu karakterizasyonda,

$$\mathcal{Z}\left(U_1(\mathbb{Z}C_{p,q})\right) = W_1 \times W_2$$

olarak elde edilmiş ve W_1, W_2 sırasıyla birinci tip ve ikinci tip birimsel elemanlar olarak tanımlanmıştır (Ferraz ve Simon, 2016).

Herman ve ark. (2005), üssü 2, 3 ve 4 olan Abel gruplar ile kuaterniyon gruplarının G-uyarlanmış halkalar üzerinde tanımlı grup halkalarının aşikar birimsel elemanlarının karakterizasyonunu ve bu grup halkalarının tüm birimsel elemanlarının aşikar olması için gerek ve yeter şartlar elde etmiştir.

Kelebek ve Bilgin (2014),

$$C_n \times K_4 = \langle a, b, c: a^n = b^2 = c^2 = 1, ab = ba, bc = cb, ac = ca\rangle$$

olmak üzere, $\mathbb{Z}(C_n \times K_4)$ integral grup halkasının birimsel elemanlar grubunu,

$$V\big(\mathbb{Z}(C_n \times K_4)\big) = C_n \times K_4 \times V(1 + K_1) \times V(1 + K_2) \times V(1 + K_3)$$

şeklinde karakterize etmişlerdir. Burada,

$V(1 + K_1) = \{1 + P(b - 1): 1 + 2P \in V(\mathbb{Z}C_n)\}$

$V(1 + K_2) = \{1 + R(c - 1): 1 + 2R \in V(\mathbb{Z}C_n)\}$

$V(1 + K_3) = \{1 + S(b - 1)(c - 1): 1 + 4S \in V(\mathbb{Z}C_n)\}$ olarak elde edilmiştir.

Kelebek ve Bilgin (2013), bazı Abel grupların integral grup halkalarının burulmalı olmayan birimsel elemanlar grubunun rankını hesaplamanın bir yöntemini vermiştir. Bu yöntemle, q asal olmak üzere, $C_q = \langle a_i\rangle$ devirli grubu ile

$$G = C_q \times C_q \times \ldots \times C_q = C_q^k$$

grubu için $V(\mathbb{Z}G) = G \times F$ öyle ki F nin rankı,

$$\frac{q-3}{2}(q^{k-1} + q^{k-2} + \cdots + q + 1)$$

şeklinde elde edilmiştir.

G bir Abel grup ve K, p asal karakteristikli bir cisim olmak üzere, KG grup cebirinde normallenmiş birimsel elemanlar grubu için $V_p(KG)$ p-burulmalı kısım olmak üzere

$$V(KG) = GV_p(KG)$$

eşitliğinin sağlanması için Danchev tarafından bir gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Ayrıca söz konusu çalışmada, $V(KG) = G$ olması için özel olarak şartlar ele alınmıştır (Danchev, 2005a; 2005b).

K bir cisim olsun. Bir G Abel grubu için, $V(KG)$ normallenmiş birimsel elemanlar grubundaki aşikar birimsellerin $\alpha \in K^*$ ve $g \in G$ olmak üzere, αg formunda olduğu gerçeğiyle (Danchev, 2005a; 2005b), $V(KG) = G$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şartlar belirlemiş ve göstermiştir ki $V(KG) = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır.

$i)$ G burulmalı olmayan bir grup,

$ii)$ $|K| = 2, |G| = 2$,

$iii)$ $|K| = 2, |G| = 3$,

$iv)$ $|K| = 3, |G| = 2$.

Danchev (2008c), G bir Abel grup ve S bir birimli ve değişmeli halka olmak üzere, G nin burulmalı olan kısmı $t(G)$ için,

$$V(SG) = GV(St(G))$$

eşitliğinin sağlanması üzerine gerek ve yeter şartları belirlemiştir.

Danchev (2008c), bir G Abel grubu ve karakteristiği sonlu ve $kar\ R > 1$ olan birimli değişmeli bir R halkası için $V(RG) = G$ eşitliğinin sağlanmasına yönelik gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Bu çalışmaya göre, tüm normellenen birimsel elemanların aşikar olabilmesi için gerek ve yeter şart R nin ayrışamaz ve indirgenmiş olması ve aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$i)$ $G_t = \{e_G\}$,

$ii)$ $|G| = 2$ ve eğer $(x, y) \in R \times R$ olmak üzere

$$x^2 - y^2 \in U(R) \Rightarrow (x, y) = (1,0) \ \vee (x, y) = (0,1)$$

$iii)$ $|G| = 3$ ve eğer $(x, y) \in R \times R$ olmak üzere

$$1 + 3(x^2 + y^2 + xy - x - y) \in U(R) \Rightarrow (x, y) = (0,0) \vee (x, y) = (1,0) \ \vee (x, y) = (0,1)$$

$iv)$ $|G| = |R| = 2$

Danchev, K bir cebirsel sayı cisminin tamsayılar halkası olmak üzere değişmeli KG grup cebirinde, $V(KG) = G$ olması için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Buna göre, $G \neq 1$ ve Abel grup olmak üzere, $V(KG) = G$ olması için gerek ve yeter şart, aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$i)$ $G_0 = \{e_G\}$;

$ii)$ $G_0 \neq \{e_G\}$ ve

$a)$ $\exp(G_0) = 2$ ve $K = \mathbb{Q}$ veya $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Burada $d = 1$ veya kare olmayan bir pozitif tamsayı,

$b)$ $\exp(G_0) = 4$ ve $K = \mathbb{Z}$ veya $K = \mathbb{Z}(\sqrt{-1})$;

$c)$ $\exp(G_0) = 3$ veya $\exp(G_0) = 6$ ve $K = \mathbb{Z}$ veya $K = \mathbb{Z}(\omega_3)$. Burada,

$$\omega_3 = e^{2\pi i/3}$$

(Danchev, 2009a).

Benzer şekilde, $|G_0| < \infty$ olan bir Abel grup; K, $kar\,K = 0$ olan bir tamlık bölgesi ve $supp(G) \cap inv(K) = \emptyset$ olmak üzere, $V(KG) = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şartlar belirlenmiştir (Danchev, 2009a), (Ritter ve Sehgal, 2005). Buna göre, $V(KG) = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şartlar, aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$i)$ $G_0 = \{e_G\}$,

$ii)$ $G_0 \neq \{e_G\}$,

$a)$ $\exp(G_0) = 2$ ve $K_2^* = \{\alpha \in K^* : \alpha \equiv 1\ mod\ 2\}$ burulmalı,

$b)$ $\exp(G_0) = 3$ ve

$$K_3^* = \{\alpha + \beta\omega_3 \in K[\omega_3] : \alpha + \beta\omega_3 \equiv 1\ mod\ (\omega_3 - 1), \alpha^2 + \beta^2 - ab \in K^*\}$$

burulmalı,

$c)$ $\exp(G_0) = 4$ ve

$$K_4^* = \{\alpha + \beta\omega_4 \in K[\omega_4] : \alpha + \beta\omega_4 \equiv 1\ mod\ (\omega_4 - 1), \alpha^2 + \beta^2 \in K^*\}$$

burulmalı,

$d)$ $\exp(G_0) = 6$ ve K_2^* ile K_3^* burulmalı (Danchev, 2009a), (Ritter ve Sehgal, 2005).

Danchev (2011) tarafından, değişmeli grup halkalarında idempotent-burulmalı normallenmiş birimsel eleman kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, bir p asal karakteristikli birimli ve değişmeli R halkası üzerinde tanımlı değişmeli bir RG grup halkasında normallenen birimsel elemanlar grubunun yalnızca idempotent birimsel elemanlardan oluşabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir (Danchev, 2009b; 2010a). Bu şartlar belirlenirken, $|G| < 4$ durumu incelenmiştir.

Danchev (2010a), idempotent birimsel elemanlar üzerine yaptığı bir çalışmasının sonuna doğru iki açık problem belirlemiştir. Bu problemlerden ilki,

$$V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartlar ve ikincisi de

$$V(RG) = id(RG) \times (1 + I(N(R)G; G))$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartların araştırılması olarak verilmiştir.

Yukarıda bahsedilen problemlerden ilki olan $V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$ eşitliğinin sağlanması yani tüm normallenen birimsel elemanların G-nilpotent olabilmesi için bazı gerek ve yeter şartlar Danchev (2012) tarafından verilmiştir.

Ferraz,

$$K_8 = \langle a, b : a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

ve $C_p = \langle c : c^p = 1 \rangle$ olmak üzere, $K_8 \times C_p$ grubunun integral grup halkasında serbest grup üreten birimsel elemanlar elde etmiştir (Ferraz, 2003). Böylece, $p = 3$ için

$$u = u(a, c) = (1 + ac + a^2c^2 + a^3 + c)^4 - 52(\widehat{ac})$$

ve

$$v = v(b, c) = (1 + bc + b^2c^2 + b^3 + c)^4 - 52(\widehat{bc})$$

olmak üzere u ve v, $\mathbb{Z}[K_8 \times C_3]$ integral grup halkasında serbest grup üretir. Benzer şekilde,

$p \neq 3$ için,

$$\bar{u} = \bar{u}(a, c) = (1 + ac + a^2c^2)^{\phi(4p)} - k\widehat{ac}$$

ve

$$\bar{v} = \bar{v}(b, c) = (1 + bc + b^2c^2)^{\phi(4p)} - k\widehat{bc}$$

olmak üzere, $\bar{u}$ ve $\bar{v}$, $\mathbb{Z}[K_8 \times C_p]$ integral grup halkasında serbest grup üretir (Ferraz, 2003).

Burada, ϕ Euler ϕ-fonksiyonu, $\widehat{ac} = \sum_{i=0}^{11}(ac)^i$ ve $\widehat{bc} = \sum_{i=0}^{11}(bc)^i$ biçimindedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tezde, materyal olarak birinci ve ikinci bölümlerde grup, halka ve modül teorisine dair verilen cebirsel yapılar, tam diziler ve ayrışım genişlemeleri kullanılmıştır. Yöntem olarak, değişmeli ve birimli bir halka üzerinde tanımlı değişmeli grup halkaları üzerinde bazı halka homomorfizmaları kurulmuş ve bu halka homomorfizmalarının birimsel elemanlar grubuna kısıtlanışlarıyla birimsel elemanlar grubu üzerinde direkt ve yarı-direkt çarpımlar bakımından bir karakterizasyon verilmiştir.

Ayrıca, grup halkalarının keyfi seçilen bir elemanının birimsel eleman olabilmesi için gerekli olan şartlarla elde edilen denklem sistemleri matrislerle ifade edilmiş ve bu matrislerin tersinir olabilmesi için gerek ve yeter şartlar kurulmuştur.

Grup halkalarında özel yapıda olan nilpotent ve idempotent birimsel elemanların tanımı verilmiş ve tüm birimsel elemanların nilpotent ve idempotent birimsel elemanlardan ibaret olabilmesi için gerek ve yeter şartlar sunulmuştur. Üstelik, değişmeli olmayan bir direkt çarpım grubunun integral grup halkasındaki birimsel elemanlar grubunun yarı-direkt çarpım grubu bakımından karakterizasyonu elde edilmiştir. Bu karakterizasyonda ilgili grup halkaları, bazı epimorfizmalar yardımıyla ideallerine parçalanmış ve o idealler üzerinden birimsel elemanlar elde edilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. Direkt Çarpım Gruplarının Değişmeli Grup Halkalarındaki $G \times H$- Nilpotent Birimsel Elemanlar

Bu bölümde G ve H Abel grupları için, R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere $R(G \times H)$ grup halkasındaki nilpotent elemanlar yardımıyla elde edilen birimsel elemanlar tanımlanacaktır.

RG bir G grubunun R üzerindeki grup halkası olmak üzere, $S \leq R$ için, $I(SG;G)$, SG grup alt halkasının esas idealini ve $H \leq G$ olmak üzere, $I(RG;H)$ de RG grup halkasının göreceli artım idealini temsil etmektedir (Danchev, 2012). Ayrıca, bir R halkasındaki idempotent elemanların kümesinin $id(R) = \{e \in R: e^2 = e\}$, asal tamsayıların tersinir olanlarının kümesinin $inv(R) = \{p: p \in U(R)\}$ ve asal tamsayı formundaki sıfır bölenlerin kümesinin $zd(R) = \{p: pr = 0, \exists r \in R\}$ şeklinde tanımlandığını hatırlayarak (Danchev, 2012) G-nilpotent birimsel elemanları tanıyalım.

Tanım 4.1.1. R değişmeli, birimli bir halka, G Abel grup olmak üzere, normallenmiş bir birimsel eleman $v \in V(RG)$, eğer $x \in G$ ve $w \in 1 + I(N(R)G; G)$ için $v = xw$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $v \in V(RG)$ birimsel elemanına bir *G-nilpotent birimsel eleman* denir (Danchev, 2012).

Önerme 4.1.2. Bir R halkası için, $N(R) = \{r \in R: \exists m \in \mathbb{N}, r^m = 0\}$ nil-radikali olmak üzere,

$$U(R/N(R)) = \{r + N(R): r \in U(R)\}$$

eşitliği söz konusudur (Danchev, 2012).

Önerme 4.1.3. Bir R halkası için $inv(R) = inv(R/N(R))$ dir (Danchev, 2012).

Tanım 4.1.4. R bir halka ve $N(R)$ nil-radikali olsun. Bu durumda,

$$np(R) = \{p \in \wp: \exists s \in R/N(R), ps \in N(R)\}$$

dir (Danchev, 2012).

Lemma 4.1.5. R halka ve $N(R)$ nil-radikali için $zd(R) = \{p \in \wp: pr = 0, \forall r \in R\}$ olmak üzere, $np(R) = zd(R/N(R))$ dir (Danchev, 2012).

Lemma 4.1.6. Değişmeli bir R halkasında aşikar olmayan idempotent elemanların mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart $R/N(R)$ de aşikar olmayan idempotent elemanların bulunmasıdır (Danchev, 2012).

İspat. (Bourbaki, 1989) çalışmasıyla aslında idempotent elemanların $N(R)$ nil-radikalinden taşınabileceği söylenebilir. Yani $R/N(R)$ aşikar olmayan idempotent elemanlara sahipse o zaman R içinde aşikar olmayan idempotent eleman mevcuttur. Gerçekten de $a = r + N(R)$ elemanının $R/N(R)$ de aşikar olmayan idempotent eleman kabul edilmesiyle $r^2 - r \in N(R)$ ve böylece $\exists n \in \mathbb{N}$ için $(r - r^2)^n = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu durumda,

$$r^n - r^{n+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} r^{j-1} = 0$$

açılımında $t = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} r^{j-1}$ gösterimi yapılırsa bu durumda $r^n = tr^{n+1}$ elde edilir. Burada $tr = rt$ söz konusu olup, $e = (rt)^n$ tayiniyle

$$e = (rt)^n = r^n t^n = (tr^{n+1})t^n = r^{n+1}t^{n+1} = \cdots = (rt)^{2n} = e^2$$

olacağını görmek zor değildir (Anderson ve Frank, 1992). Öte yandan, $r^2 + N(R) = r + N(R)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$r + N(R) = r^n + N(R) = tr^{n+1} + N(R) = \big(t + N(R)\big)\big(r^{n+1} + N(R)\big) = tr + N(R)$$

olup,

$$a = r + N(R) = r^n + N(R) = (tr + N(R))^n = e + N(R) \in id(R/N(R))$$

elde edilir. Dolayısıyla, iddia edildiği gibi $id(R) = \{0,1\} \Leftrightarrow id\left(\frac{R}{N(R)}\right) = \{0,1\}$ geçerlidir. ■

Normallenmiş birimsel elemanlar grubunda aşikar birimsel elemanlar incelenirken yukarıdaki tanımda $w = 1$ olacağını görmek zor değildir. Yani, G-nilpotent birimsel elemanlar

$$V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$$

eşitliğini sağlarken aşikar birimsel elemanlar $V(RG) = G$ eşitliğiyle ifade edilir.

Bir normallenmiş birimsel elemanlar grubunun aşikar olmayan kısım içermemesine ilişkin bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.7. $|G| = 3$ olan bir Abel grup ve $kar\ R = 2$ olan değişmeli ve birimli bir R halkası için $V(RG) = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $U(R) = \{1\}$ ve

$$r^2 + s^2 + rs + r + s = 0$$

denkleminin R halkasında sadece $(0,0), (1,0)$ ve $(0,1)$ şeklinde çözümlerinin mevcut olmasıdır (Danchev, 2008c).

İspat. $\Rightarrow$: $V(RG) = G$ olsun. $1 \neq r \in U(R)$ bulunsun. Bu durumda, basit bir şekilde kontrol edilebilir ki

$$u(r) = 1 + (1 + r)x + (1 + r)x^2 \in V(RG) - G$$

ve tersi $u^{-1}(r) = 1 + (1 + r^{-1})x + (1 + r^{-1})x^2$ yine aşikar olmayan normallenmiş bir birimsel eleman olarak ortaya çıkar ki bu çelişkiden $U(R) = \{1\}$ olması gerektiği anlaşılır.

Diğer yandan $G = \langle x : x^3 = 1\rangle$ olmak suretiyle RG grup halkasında normallenmiş bir birimsel eleman kanonik formda $u = 1 + r + s + rx + sx^2$ şekilde ifade edilebileceğinden,

$$\begin{aligned}(1 + r + s + rx + sx^2)&(1 + r + s + sx + rx^2)\\ &= 1 + (r^2 + s^2 + rs + r + s)(x + x^2) = 1\end{aligned}$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart açıkça $r^2 + s^2 + rs + r + s = 0$ olmasıdır. $kar\ R = 2$ olduğundan, $(r, s) = (0,0), (0,1)$ ya da $(1,0)$ şeklinde çözümler elde edilir.

$\Leftarrow$: Tersine, eğer $U(R) = \{1\}$ ve $r^2 + s^2 + rs + r + s = 0$ denkleminin R halkasında $(0,0), (1,0)$ ve $(0,1)$ şeklinde çözümleri varsa bu durumda önceki adımlar takip edilerek kanonik formdaki bir $u = 1 + r + s + rx + sx^2$ birimsel eleman için $u \in G$ olması gerektiği sonucuna varılır. ■

Eğer $|G| = 3$ ve $kar\ R = 2$ ise bu durumda bir $u = 1 + r + s + rx + sx^2$ birimseli için $\omega = e^{2\pi i/3}$ olmak üzere

$$\frac{RG}{\langle 1 + x + x^2 \rangle} \simeq R[\omega]$$

izomorfizması altında u birimselinin görüntüsü $\bar{u} = 1 + r + (r - s)\omega$ olur ki birimsellik yapısından dolayı $\exists v = u^{-1} \in V(R[\omega])$ öyle ki $v = a + b\omega$ ve

$$\bar{u}v = (1 + r + (r - s)\omega)(a + b\omega) = 1$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} (1 + r)a + (r + s)b &= 1 \\ (r + s)a + (1 + s)b &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir ve çözümün tekliği sistemin determinantının tersinirliğini gerektireceğinden,

$$1 + r + s + rs + r^2 + s^2 \in U(R) = \{1\}$$

ve dolayısıyla $r + s + rs + r^2 + s^2 = 0$ denklemine ulaşılır. Bu denklemin de çözümü ispatta belirtildiği gibidir.

Teorem 4.1.8. Bir G Abel grubu, R değişmeli ve birimli halkası $supp(G) \cap inv(R) \neq \emptyset$ özelliğini sağlasın. Bu durumda, $V(RG) = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şart R nin ayrışamaz ve indirgenmiş olması ve aşağıdakilerinden birinin sağlanmasıdır.

(i) $|G| = |U(R)| = 2$

(ii) $|G| = 3, U(R) = \{1\}, kar\ R = 2$ ve $a^2 + b^2 + ab + 1 = 0$ denkleminin R de sadece aşikar çözümleri mevcuttur (Danchev, 2012).

İspat. $V(RG) = G$ ve R ayrışabilir bir halka olarak ele alınırsa, $e \notin \{0,1\}$ ve $e^2 = e$ idempotenti mevcut olur ki böylece, $g \in G$ için, $u(e) = 1 - e + eg \in V(RG) - G$ birimsel elemanı elde edilir. Burada $u^{-1}(e) = 1 - e + eg^{-1}$ olduğu kolayca kontrol edilebilir. Dolayısıyla, $id(R) = \{0,1\}$ olması gerektiği sonucuna varılır. Benzer şekilde, eğer R indirgenmiş olmayan bir halka olarak göz önüne alınırsa $0 \neq \exists r \in N(R)$ mevcut olacağından $r(1-g) \in N(R)G$ elemanının nilpotent olduğu ve dolayısıyla

$$u(r) = 1 + r - rg \in 1 + N(R)G \subseteq 1 + N(RG) \subseteq V(RG) - G$$

aşikar olmayan birimsel elemanının bulunabileceği sonucuyla elde edilen çelişki yardımıyla R nin indirgenmiş bir halka olması gerektiği anlaşılır. Yani, $N(R) = 0$ olmalıdır.

G grubu sonsuz mertebeli bir grup olsa $\exists p \in supp(G) \cap inv(R)$ için, $G_p \neq 1$ ve $p^{-1} \in U(R)$ olacağından $\exists F \leq G_p$ sonlu altgrubu ve $x \in F$ için $e = e(p,x) \in RF$ idempotent elemanı mevcut olmasından dolayı yukarıdaki gibi aşikar olmayan bir birimsel eleman $g \in G \backslash F$ için $u(e) = (1-e) + eg$ şeklinde mevcut olur ki söz konusu bu çelişkiden G nin kendisi ve birimden farklı altgrup içermeyen sonlu bir grup olması gerektiği sonucu çıkar. Şimdi, $|G| \geq 5$ olamayacağını, $|G| = 2$ veya 3 olması gerektiğini gösterelim. $|G| = p \geq 5$ olsa, $p^{-1} \in U(R)$ olduğundan, $u(p,g) \notin G$ olacak şekilde Bass devirli birimsel elemanı oluşturulabilir ki $u(p,g) \notin G$ olduğundan aşikar olmayan bir birimsel elemanın mevcut olduğu görülebilir. Böylece $|G| = p = 2$ ya da 3 olabilir.

Durum 1: $G = \langle x : x^2 = 1 \rangle$ ise $2 \in U(R)$ olduğundan, keyfi bir $r \in U(R)$ için

$$u(r,x) = \frac{1}{2} - \frac{r}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{r}{2})x$$

birimsel elemanı ve tersi

$$u^{-1}(r,x) = \frac{1}{2} - \frac{r^{-1}}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{r^{-1}}{2})x$$

şeklinde elde edilir ve

$$u(r,x) \in G \Leftrightarrow r \in \{-1,1\}$$

çift gerektirmesi yazılabilir ki buradan $U(R) = \{-1,1\}$ yani $|U(R)| = 2$ sonucu elde edilir.

Durum 2: $|G| = 3$, $kar\ R = 2$ ve $|U(R)| = 1$ durumu (Karpilovsky, 1983a; 1983b) tarafından ispatlanmıştır. ∎

Önerme 4.1.9. R bir halka ve $\varphi: R \longrightarrow R/N(R)$ doğal eşleme olmak üzere, lineer olarak $\varphi\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g\in G} \varphi(\alpha_g) g$ şeklinde genişletilen $\varphi: RG \longrightarrow (R/N(R))G$ eşlemesi normallenmiş birimsel grubuna kısıtlandığında

$$\varphi_V: V(RG) \longrightarrow V(R/N(R)G)$$

elde edilir ve aşağıdakiler geçerlidir.

(a) φ_V örtendir;

(b) $Ker\ \varphi = N(R)G$ ve $Ker\ \varphi_V = 1 + I(N(R)G; G)$ (Danchev, 2012).

G-nilpotent birimsel elemanların altgrubunun yapısının; aslında R üzerinde tanımlı bir kanonik homomorfizmanın RG grup halkasına lineer olarak genişletilmesiyle elde edilen bir kanonik halka homomorfizması yardımıyla elde edilişi ve $R/N(R)$ üzerinde tanımlı grup halkasının aşikar birimsel elemanlarıyla tespit edilebilmesine dair önerme, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Önerme 4.1.10.

$$V(RG) = G \times \left(1 + I(N(R)G; G)\right) \Leftrightarrow V\left((R/N(R))G\right) = G$$

dir. Yani, $V(RG)$ deki tüm birimsel elemanların G-nilpotent birimsel elemanlar olması $(R/N(R))G$ grup althalkasının aşikar birimsel elemanlarıyla belirlenir (Danchev, 2012).

Böylece, bir grup halkasında, üzerinde tanımlandığı grup G olmak üzere, G-nilpotent birimsel elemanların araştırılması ya da tüm normellenmiş birimsel elemanların yalnızca G-nilpotent birimsel eleman olabilmesi üzerine gerek ve yeter şartların elde edilebilmesi için $R/N(R)$ üzerinde G grubunun grup halkasının tüm normallenmiş birimsel elemanlarının aşikar olup olmadığı kontrol edilmelidir.

Ele alınan G grubunun mertebesine bağlı olarak, G-nilpotent birimsel elemanların karakterizasyonuna dair önemli bir teorem, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 4.1.11. $|G| = 2$ ve R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler birbirine denktir:

$i)$ $V(RG) \neq G \times (1 + I(N(R)G; G))$

$ii)$ $\exists x, y \in R/N(R) - \{0\},\ x^2 - y^2 \in U(R/N(R))$

$iii)$ $\exists x \in R/N(R) - \{0,1\}, 2x - 1 \in U(R/N(R))$ (Danchev, 2012), (Herman ve ark., 2005).

Benzer şekilde, G bir Klein-4 grubu olmak üzere, G-nilpotent birimsel elemanların belirlenişine dair aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.12. $G = \langle x, y : x^2 = y^2 = 1, xy = yx \rangle$ olmak suretiyle aşağıdakiler birbirine denktir.

$i)$ $V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$

$ii)$ $V\left(\frac{R}{N(R)}\langle x \rangle\right) = \langle x \rangle$

İspat. Bir φ_y halka homomorfizması,

$$\varphi_y : \frac{R}{N(R)}G \longrightarrow \frac{R}{N(R)}\langle x \rangle$$

öyle ki $\varphi_y\left(\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1}\alpha_k\, x^i y^j\right) = (\alpha_0 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3)x$ biçiminde tanımlansın. Böylece, $Ker\ \varphi_y = \{1 + (1 - y)P : P \in \frac{R}{N(R)}\langle x \rangle\}$ olur ki, $\frac{R}{N(R)}\langle x \rangle \hookrightarrow \frac{R}{N(R)}G$ olduğundan φ_y nin tersi olarak gömme fonksiyonu ele alınabileceğinden,

$$Ker\ \varphi_y \xrightarrow{i} \frac{R}{N(R)}G \xrightarrow{\varphi_y} \frac{R}{N(R)}\langle x \rangle$$

tam dizisi tanımlanabilir ve üstelik bu tam dizide ayrışım genişlemesi mevcuttur. Bu durumda, yukarıdaki tam dizi birimsel elemanlar grubuna taşındığında,

$$V(1 + Ker\ \varphi_y) \xrightarrow{i} V(\frac{R}{N(R)}G) \xrightarrow{\varphi_y} V(\frac{R}{N(R)}\langle x\rangle)$$

ve

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G\right) = V(1 + Ker\ \varphi_y) \times V(\frac{R}{N(R)}\langle x\rangle)$$

olduğundan, $V\left(\frac{R}{N(R)}G\right) = G$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$V\left(\frac{R}{N(R)}\langle x\rangle\right) = \langle x\rangle \text{ ve } V(1 + Ker\ \varphi_y) \simeq C_2$$

olmalıdır. Buradan,

$$V\big(1 + Ker\ \varphi_y\big) = \{1 + (1 - y)P \in V(R/N(R)G): 1 + 2P \in V(R/N(R)\langle x\rangle)\}$$

olup, $V\big(1 + Ker\ \varphi_y\big) \simeq C_2$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $P = 0$ veya $P = -1$ olması gerekir. Bu durumda, $1 + 2P = 1_{\frac{R}{N(R)}}$ veya $-1_{\frac{R}{N(R)}}$ elde edilir ki $V\left(\frac{R}{N(R)}\langle x\rangle\right) \simeq C_2$ olduğundan,

$$V\big(1 + Ker\ \varphi_y\big) \simeq C_2$$

sonucuna ulaşılır. İspatın diğer yönünün geçerliliği benzer yolla gösterilebilir. ■

Şimdi, G ve H birer Abel grup olmak üzere, $G \times H$ direkt çarpımı üzerinde tanımlı grup halkasındaki $G \times H$-nilpotent birimsel elemanlara dair bazı tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 4.1.13. G ve H Abel gruplar olsun. O zaman,

$$supp_C(G \times H) = \{pq: G_p \times H_q \neq 1\}$$

ile gösterilen kümeye $G \times H$ *direkt çarpım grubunun desteği* denir.

Tanım 4.1.14. R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, $inv_C(R) = \{pq: pq \in U(R)\}$ kümesine R *deki bileşik tersinir sayıların kümesi* denir.

Tanım 4.1.15. $zd_C(R) = \{pq: 0 \neq \exists r \in R, pqr = 0\}$ kümesine R *deki bileşik sıfır bölenlerin kümesi* denir.

Teorem 4.1.16. R birimli ve değişmeli bir halka, G ve H birer Abel grup olmak üzere,

$$V\big(R(G \times H)\big) = G \times H \times (1 + I(N(R)G \times H; G \times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart R' nin ayrışamaz ve indirgenmiş bir halka,

$V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right) = (G \times H)_0$ eşitliğinin ve aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

$i)$ $G \times H = (G \times H)_0$ (G ve H gruplarının her ikisi de burulmalı),

$ii)$ $G \times H \neq (G \times H)_0$ (G veya H grubundan en az biri burulmalı olmayan) ve

$$supp_C(G \times H) \cap [inv_C(R) \cup zd_C(R)] = \emptyset$$

İspat. $\Rightarrow$: Önce R'nin ayrışamaz ve indirgenmiş bir halka olduğunu ispatlayalım. Bunun için, ilk önce $r = r^2 \notin \{0,1\}$ ve $r \in R$ olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$u = u(r, g, h) = 1_{R/N(R)} - \big(r + N(R)\big) + \big(r + N(R)\big)gh \in V(\frac{R}{N(R)}G \times H)\backslash(G \times H)$$

için

$$u^{-1} = u^{-1}(r, g, h) = 1_{R/N(R)} - \big(r + N(R)\big) + \big(r + N(R)\big)(gh)^{-1} \in V(\frac{R}{N(R)}G \times H)$$

olduğu kolayca kontrol edilebilir. Yani, $V(\frac{R}{N(R)}G \times H) \neq G \times H$ çelişkisine ulaşılır. Öte taraftan, $\exists f \neq 0$, $f \in N(R)$ var ise bu durumda,

$$v = v(f, g, h) = 1_{\frac{R}{N(R)}} + \big(f + N(R)\big) - \big(f + N(R)\big)gh$$

$$= (1_{\frac{R}{N(R)}} + \big(f + N(R)\big))(1 - \big(1 + f + N(R)\big)^{-1}\big(f + N(R)\big)gh) \in V(\frac{R}{N(R)}G \times H)$$

olup $v \in V(\frac{R}{N(R)}G \times H)$ nin aşikar olmayan bir birimsel eleman olması çelişki olduğundan $N(R) = 0$ olmalıdır. Bilindiği üzere,

$$V\left(\frac{R}{N(R)}(G\times H)_0\right)\subseteq V\left(\frac{R}{N(R)}G\times H\right)=G\times H$$

ve

$$V\left(\frac{R}{N(R)}(G\times H)_0\right)=V\left(\frac{R}{N(R)}(G\times H)_0\right)\cap G\times H=(G\times H)_0$$

olduğundan eğer $G\times H=(G\times H)_0$ ise ispat biter. Şimdi, $G\times H\neq(G\times H)_0$ ve $supp_C(G\times H)\cap inv_C(R)\neq\emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\exists pq\in supp_C(G\times H)\cap inv_C(R)$ mevcut olup,

$$e=e(p,q,g,h)=\frac{1}{pq}\left(1+gh+\cdots+gh^{o(gh)-1}\right)=e^2\notin\{0,1\}$$

olur ve yukarıdaki işlemlerde olduğu gibi aşikar olmayan bir birimsel elemanın mevcut olması çelişkisi elde edilir. Buradan, $supp_C(G\times H)\cap inv_C(R)=\emptyset$ olması gerektiği sonucuna varılabilir.

Diğer taraftan, eğer $supp_C(G\times H)\cap zd_C(R)\neq\emptyset$ olursa, $\exists pq\in supp_C(G\times H)$ öyle ki $pqr=0$ ve $g_p\in G_p\leq G$ ve $h_q\in H_q\leq H$ için

$$\big(r+N(R)\big)\big(1-g_ph_q\big)^{pq}=0_{R/N(R)}$$

ve dolayısıyla

$$u=u\big(r,g_p,h_q\big)=1+\big(r+N(R)\big)(1-g_ph_q)\in V\big(R/N(R)(G\times H)\big)\backslash G\times H$$

bir çelişki olup, bu da $supp_C(G\times H)\cap zd_C(R)=\emptyset$ olmasını gerektirir.

$\Leftarrow$: İspatın diğer yönü için R nin ayrışamaz ve indirgenmiş bir halka olduğu kabulüyle $supp_C(G\times H)\cap inv_C(R)=\emptyset$ eşitliği söz konusu olduğundan

$$(G\times H)\cap V\left(\frac{R}{N(R)}(G\times H)_0\right)=(G\times H)_0$$

ve

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G\times H\right)=(G\times H)V\left(\frac{R}{N(R)}(G\times H)_0\right)$$

yazılabilir (May, 1976, s. 491). Nitekim, $\pi: G \times H \longrightarrow G \times H/(G \times H)_0$ kanonik izdüşümünün $R/N(R)$ üzerinde grup halkalarına $\pi: R/N(R)(G \times H) \longrightarrow R/N(R)(G \times H/(G \times H)_0)$ şeklinde lineer olarak genişletilmesiyle

$$\pi(V(R/N(R)(G \times H))) \subseteq V(R/N(R)(G \times H/(G \times H)_0))$$

kapsaması elde edilir. Ayrıca, (May, 1976) çalışmasındaki Lemma 4'e göre,

$$V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right) = \frac{G \times H}{(G \times H)_0}(1 + N(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right))^0)$$

yazılır. Burada, $N(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G\times H}{(G\times H)_0}\right))^0$, $\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G\times H}{(G\times H)_0}\right)$ grup halkasının, artımı 0 olan nilpotent elemanlarının oluşturduğu ideali temsil etmektedir. Öte yandan,

$$1 + N(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right))^0 = \pi(1 + N\left(\frac{R}{N(R)} G \times H\right)^0) \subseteq \pi(V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right))$$

olduğundan

$$\frac{G \times H}{(G \times H)_0}(1 + N\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right)^0) \subseteq \pi(\frac{G \times H}{(G \times H)_0})\pi(V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right))$$

yani

$$\frac{G \times H}{(G \times H)_0}(1 + N\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right)^0) \subseteq \pi(\frac{G \times H}{(G \times H)_0} V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right))$$

olup

$$\pi(V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right)) \subseteq \pi(\frac{G \times H}{(G \times H)_0} V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right))$$

kapsamasının geçerli olduğu görülür. Ters kapsamanın geçerliliği kolayca görülebilir ki böylece,

$$\pi\left(V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right)\right) = \pi(\frac{G \times H}{(G \times H)_0} V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{G \times H}{(G \times H)_0}\right)\right))$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$\pi(V\left(\frac{R}{N(R)}G \times H\right) - (G \times H)V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right)) = 0$$

olduğundan,

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G \times H\right) - (G \times H)V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right) \subseteq Ker\,\pi \subseteq V(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0)$$

kapsamasıyla

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G \times H\right) \subseteq (G \times H)V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right) + V(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0)$$

kapsamasının geçerli olduğu söylenebilir ki buradan

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G \times H\right) \subseteq (G \times H)V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right)$$

olur. Ters kapsamanın sağlandığı açık olup,

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G \times H\right) = (G \times H)V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca ispatın bu yönündeki hipotezden de

$$V\left(\frac{R}{N(R)}(G \times H)_0\right) = (G \times H)_0$$

olduğu bilindiğinden

$$V\left(\frac{R}{N(R)}G \times H\right) = (G \times H)(G \times H)_0 = (G \times H)$$

eşitliği gösterilmiş olur ki bu da Önerme 2. 10.’ dan,

$$V\big(R(G \times H)\big) = G \times H \times (1 + I(N(R)G \times H; G \times H))$$

olduğunun ispatını tamamlar. ∎

Teorem 4.1.17. R birimli ve değişmeli bir halka, G ve H Abel gruplar öyle ki $|H| = 3$ olmak üzere,

$$V(R(G \times H)) = G \times H \times (1 + I(N(R)G \times H; G \times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin her ikisinin de sağlanmasıdır.

$i)$ $V(R/N(R)G) = G,$

$ii)$ $1 + 3(a^2 + b^2 + ab + a + b) \in V(\frac{R}{N(R)}) \Leftrightarrow (a, b) \in \{(0,0), (-1,0), (0, -1)\}$

İspat. Verilen koşullar altında $V(R(G \times H)) = G \times H \times (1 + I(N(R)G \times H; G \times H))$ olması için $R/N(R)(G \times H)$ grup halkasındaki normallenmiş birimsel elemanların aşikar yani $G \times H$ olması, gerek ve yeter şart olduğundan ispatın geri kalanı için $V(R/N(R)G \times H) = G \times H$ olduğunu kabul edelim. Böylece, $|H| = 3$ olduğundan, söz konusu direkt çarpım grubu $G \times H = G \times \langle x: x^3 = 1\rangle$ olarak ifade edilebilir ve bir

$$\chi: G \times H \longrightarrow G, \chi(g, h) = g$$

grup epimorfizması lineer bir şekilde $\chi: R/N(R)(G \times H) \longrightarrow R/N(R)G$ halka epimorfizmasına taşınabilir ki bu durumda, $\chi_V: V(R/N(R)(G \times H)) \longrightarrow V(R/N(R)G)$ kısıtlanışı için

$$Ker\, \chi_V = V(1 + \Delta_{R/N(R)G}(H)) = (1 + \langle 1 - x, 1 - x^2\rangle_{\frac{R}{N(R)}G}) \cap V(R/N(R)(G \times H))$$

elde edilir. Birinci izomorfizma teoreminden,

$$\frac{V(R/N(R)(G \times H))}{V(1 + \Delta_{\frac{R}{N(R)}G}(H))} \simeq V(\frac{R}{N(R)}G)$$

olup,

$$V(1 + \Delta_{R/N(R)G}(H)) \xrightarrow{i} V(R/N(R)(G \times H)) \xrightarrow{\chi} V(R/N(R)G)$$

tam dizisinin ayrışır olmasından dolayı

$$V(R/N(R)(G \times H)) = V(1 + \Delta_{R/N(R)G}(H)) \times V(R/N(R)G)$$

elde edilir ki bu ifadeden, $V(R/N(R)(G \times H)) = G \times H$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın $V(R/N(R)G) = G$ ve $V(1 + \Delta_{R/N(R)G}(H)) = H$ olduğu açıktır. Şimdi ikinci kısım olan $V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))=H$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartları araştıralım. Aslında,

$$V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))=1+\Delta_{R/N(R)G}(H)\cap V(R/N(R)(G\times H))$$

olduğundan, bir $u=1+a(1-x)+b(1-x^2)\in V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))$ birimsel elemanının aşikar olması keyfi $a,b\in R/N(R)G$ için

$$u=1+a(1-x)+b(1-x^2)\in H=\langle x : x^3=1\rangle$$

olmasını gerektirdiğinden, bir $v=1+c(1-x)+d(1-x^2)\in V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))$ birimseli ele alındığında, $uv=1$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$uv=[1+a(1-x)+b(1-x^2)][1+c(1-x)+d(1-x^2)]$$

$$=1+(1-x)(a+c+2ac+bc+ad-bd)$$

$$+(1-x^2)(b+d-ac+bc+ad+2bd)=1$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} a+c+2ac+bc+ad-bd&=0\\ b+d-ac+bc+ad+2bd&=0\end{aligned}$$

sisteminin matris karşılığı olan

$$\begin{pmatrix}1+2a+b & a-b\\ b-a & 1+a+2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\ -b\end{pmatrix}$$

sisteminin yegane $\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ çözümünün mevcut olmasıdır. Bu ise sistemin determinantının RG grup halkasında tersinir olması ile mümkündür. Yani,

$$1+3(a^2+b^2+ab+a+b)\in V(R/N(R))$$

olmalıdır ki bu durumda $u=1,x$ veya x^2 olabilmesi için gerek ve yeter şart, hipotezde belirtildiği gibidir. ■

Sonuç 4.1.18. R birimli, değişmeli ve $kar\ R=3$ olan bir halka, G ve H Abel gruplar öyle ki $|H|=3$ olmak üzere,

$$V\big(R(G\times H)\big)=G\times H\times(1+I(N(R)G\times H;G\times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$V(RG)=G\times(1+I(N(R)G;G))$$

ve $Ker\,\chi=\langle 1-x,1-x^2\rangle_S$ öyle ki

$$S\times S=\{(0,\mu):\mu\in\mathbb{Z}_3\}\cup\{(\mu,0):\mu\in\mathbb{Z}_3\}$$

olmasıdır.

İspat. Önceki teoremin ispatında $V(RG)=G\times(1+I(N(R)G;G))$ olmasının yanı sıra keyfi $a,b\in R/N(R)G$ için $kar\ R=3$ olduğundan,

$$1+3(a^2+b^2+ab+a+b)=1_{R/N(R)}$$

olup

$$V(1+Ker\,\chi_V)=\{1+a(1-x)+b(1-x^2):a,b\in R/N(R)\}=H$$

olabilmesi için gerek ve yeter şartın $Ker\,\chi=\langle 1-x,1-x^2\rangle_S$ öyle ki

$$S\times S=\{(0,\mu):\mu\in\mathbb{Z}_3\}\cup\{(\mu,0):\mu\in\mathbb{Z}_3\}$$

olması gerektiği açıktır. ■

Benzer şekilde, bir $H=\langle x:x^4=1\rangle$ devirli grubu göz önüne alındığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.19. R değişmeli ve birimli bir halka, G ve H Abel gruplar öyle ki $|H|=4$ ve devirli olmak üzere,

$$V\big(R(G\times H)\big)\neq G\times H\times(1+I(N(R)G\times H;G\times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$V(R/N(R)G)\neq G \text{ veya } \exists a,b,c\in R/N(R)G$$

için

$$u(a,b,c) = (1+2a+2c)(1+2a^2+4b^2+2c^2+4ab+4bc+2a+4b+2c)$$

şeklinde $V(R/N(R)G)$ içinde aşikar olmayan bir birimsel elemanın mevcut olmasıdır.

İspat. R ve G hipotezde belirtildikleri gibi ve $H = \langle x : x^4 = 1 \rangle$ olsun. Bu durumda,

$$V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H)) \xrightarrow{i} V(R/N(R)(G\times H)) \xrightarrow{\chi} V(R/N(R)G)$$

ayrışım genişlemesini göz önüne aldığımızda,

$$V\big(R/N(R)(G\times H)\big) = V(R/N(R)G) \times V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))$$

eşitliği elde edilir ki böylece, $V\big(R/N(R)(G\times H)\big) \neq G\times H$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın $V(R/N(R)G) \neq G$ veya $V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H)) \neq H$ olduğu açıktır. Böylece, bir

$$u = 1 + a(1-x) + b(1-x^2) + c(1-x^3) \in V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))$$

için $uv = 1$ olacak şekilde bir

$$v = 1 + d(1-x) + e(1-x^2) + f(1-x^3) \in V(1+\Delta_{R/N(R)G}(H))$$

mevcut olsun. Bu durumda, $uv = 1$ yani

$$[1 + a(1-x) + b(1-x^2) + c(1-x^3)][1 + d(1-x) + e(1-x^2) + f(1-x^3)]$$
$$= 1 + (1-x)(a+d+2ad+bd+cd+ae-ce+af-bf)$$
$$+(1-x^2)(b+e-ad+bd+ae+2be+ce+bf-cf)$$
$$+(1-x^3)(c+f-bd+cd-ae+ce+af+bf+2cf) = 1$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} a+d+2ad+bd+cd+ae-ce+af-bf &= 0 \\ b+e-ad+bd+ae+2be+ce+bf-cf &= 0 \\ c+f-bd+cd-ae+ce+af+bf+2cf &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin $\{(d,e,f) : d,e,f \in R/N(R)G\}$ çözüm kümesinin tek olmasıdır. Bunun için,

$$\begin{pmatrix} 1+2a+b+c & a-c & a-b \\ b-a & 1+a+2b+c & b-c \\ c-b & c-a & 1+a+b+2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$$

sisteminin determinantının $R/N(R)$ de tersinir olması, gerek ve yeter şart olup,

$$(1+2a+2c)(1+2a^2+4b^2+2c^2+4ab+4bc+2a+4b+2c) \in V(R/N(R))$$

şeklinde aşikar olmayan birimsel elemanının varlığı elde edilebilir. ■

Sonuç 4.1.20. R değişmeli ve birimli bir halka ve $kar\ R = 2$, G ve H abel gruplar öyle ki $|H| = 4$ devirli bir grup olmak üzere,

$$V\big(R(G \times H)\big) \neq G \times H \times (1 + I(N(R)G \times H; G \times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$V(RG) \neq G \times (1 + I(N(R)G; G)$$

veya $Ker\ \chi = \langle 1-x, 1-x^2, 1-x^3 \rangle_{S'}$ öyle ki

$$S' \times S' \times S' = \{(a,b,c): a,b \text{ ve } c \text{ nin en az ikisi sıfırdan farklı}\} \subseteq \mathbb{Z}_3^3$$

olmasıdır.

Teorem 4.1.21. R değişmeli, birimli ve $kar\ R \neq 2$ olan bir halka ve

$$V(RC_3) = C_3 \times (1 + I(N(R)C_3; C_3))$$

olsun. Bu durumda $G = C_3 \times C_3 \times \cdots \times C_3$ (sonlu adette çarpım) olmak üzere,

$$V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$$

olur.

İspat. R hipotezdeki gibi bir halka olmak üzere, ispat G nin rankı olan r üzerinden tümevarımla yapılabilir (Herman ve ark., 2005). Eğer, $r = 1$ ise hipotezden bu durumun zaten aşikar olarak sağlandığı görülebilir. Eğer, $r \geq 2$ ise

$$G = G' \times \langle x \rangle \times \langle y \rangle$$

şeklinde ifade edildiğinde G' ya aşikar grup (yani $\{1\}$) veya $r-2$ rankına sahip bir elementer Abel 3-grup olur. Şimdi, $u \in V(R/N(R)G)$ olsun. Bu durumda,

$$V(R/N(R)[G/\langle y\rangle]) = G/\langle y\rangle$$

yani aşikar olur. Dolayısıyla,

$$u = 1 + (1-y)(a+by), \exists a, b \in R/N(R)[G' \times \langle x\rangle]$$

için $(a,b) \neq (0,0), (-1,0), (-1,-1)$ olması gerekir. Ayrıca, $a_i, b_i \in R/N(R)G'$ olmak üzere $a = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ve $b = b_0 + b_1x + b_2x^2$ yazılabilir. Burada benzer şekilde $R/N(R)\left[\frac{G}{\langle x\rangle}\right], R/N(R)\left[\frac{G}{\langle xy\rangle}\right]$ ve $R/N(R)\left[\frac{G}{\langle xy^2\rangle}\right]$ grup halkaları da sadece aşikar birimsel elemanları haiz olur. $u \in V(R/N(R)G)$ mod $\langle x\rangle$ alındığında,

$$u_x = (1 + a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2 - a_0 - a_1 - a_2)y + (-b_0 - b_1 - b_2)y^2$$

elde edilir ki artımı $\varepsilon(u_x) = 1$ ve $u_x \in \{1, y, y^2\}$ aşikar bir birimsel eleman olması gerektiğinden, burada mümkün olan 3 durum söz konusudur. Bu durumlar;

$i)$ $a_0 + a_1 + a_2 = b_0 + b_1 + b_2 = 0,$

$ii)$ $a_0 + a_1 + a_2 = b_0 + b_1 + b_2 = -1,$

$iii)$ $a_0 + a_1 + a_2 + 1 = b_0 + b_1 + b_2 = 0$

şeklindedir. Öte yandan, $u \in V(R/N(R)G)$ mod $\langle xy\rangle$ alındığında

$$u_{xy} = (1 + a_0 - a_1 + b_1 - b_2) + (-a_0 + a_2 + b_0 - b_1)y + (a_1 - a_2 - b_0 + b_2)y^2$$

ve mod $\langle x^2y\rangle$ alındığında da,

$$u_{x^2y} = (1 + a_0 - a_2 + b_1 - b_2) + (b_0 + b_1 - 2b_2)y + (-2b_0 + b_1 + b_2)y^2$$

yazılır. Her iki birimsel eleman için de katsayılardan ikisi 0 ve bir tanesi 1 olması istenen durumdur.

Şimdi, $u_{xy} = 1$ olduğunu kabul edelim. Böylece, $a_0 = a_2 + b_0 - b_1$ ve üstelik $a_1 = a_2 + b_0 - b_2$ eşitliği elde edilir ki bu eşitlikleri u_{x^2y} birimsel elemanının ifadesinde yerine yazmakla,

$$u_{x^2y} = (1 + b_0 - 2b_1 + b_2) + (b_0 + b_1 - 2b_2)y + (-2b_0 + b_1 + b_2)y^2$$

elde edilir. Eğer $b_0 + b_1 + b_2 = 0$ ise, bu durumda, $u_{x^2y} = (1 - 3b_1) - 3b_2y - 3b_0y^2$ olup b_i parametrelerinden en az biri sıfırdan farklı ise $3 \in V(R/N(R)G')$ veya $3 \in zd(R/N(R)G')$ olur ki bu durumlar (Herman ve ark., 2005) çalışmasındaki Önerme 3' e göre çelişki

($b_0 = b_2 = 0$ ve $b_1 = -3^{-1}$ için $u_{x^2y} = 0$, $b_1 = b_2 = 0$ ve $3b_0 = 0$ için $u_{x^2y} = 0$) olduğundan ancak $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ eşitliği geçerli olmaktadır. Bu da $u_{xy} = 1$ olduğundan, $a_0 = a_1 = a_2$ olmasını gerektirir. Böylece, $a_0 + a_1 + a_2 = -1$ ise bu durumda $3a_0 = -1$ olacaktır ki bu da yine $3 \in V(R/N(R)G')$ çelişkisini doğurmaktadır. Dolayısıyla, bu ancak ve ancak $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ eşitliği ile mümkündür. Bu ise $u = 1$ olduğunu gösterir. Öte yandan, $b_0 + b_1 + b_2 = -1$ ise,

$$u_{x^2y} = -3b_1 + (-1 - 3b_2)y + (-1 - 3b_0)y^2$$

olur ki $3 \in V(R/N(R)G')$ çelişkisi elde edilir. Benzer şekilde, $u_{xy} = b$ ise $u = b$ ve $u_{xy} = b^2$ ise $u = b^2$ aşikar birimselleri elde edilir. Dolayısıyla, $R/N(R)G$ deki tüm birimsel elemanlar aşikar olup

$$V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$$

elde edilir. ∎

Teorem 4.1.22. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bu taktirde,

$$V(RC_4) \neq C_4 \times (1 + I(N(R)C_4; C_4))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$V(RC_2) \neq C_2 \times (1 + I(N(R)C_2; C_2))$$

veya $\exists x, y \in \frac{R}{N(R)}, (x, y) \neq (0,0), (-1,0) : 2x^2 + 2y^2 + 2x = N(R)$ olmasıdır.

Burada, $C_4 = \langle a : a^4 = 1 \rangle$ ve $C_2 = \langle a^2 \rangle$.

İspat. $C_4 = \langle a : a^4 = 1 \rangle$ olmak üzere, $V(RC_4) \neq C_4 \times (1 + I(N(R)C_4; C_4))$ ifadesine ek olarak, $V(RC_2) = C_2 \times (1 + I(N(R)C_2; C_2))$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

Böylece, Önerme 4.1.10.'dan bilindiği gibi $V(R/N(R)C_4)$ içinde aşikar olmayan birimsel eleman mevcuttur. Yani $V(R/N(R)C_4) \neq C_4$. Şimdi, $\sigma(x) = x^2$ ile tanımlı bir

$$\sigma: R/N(R)C_4 \longrightarrow R/N(R)C_2$$

halka homomorfizması, $C_4 \longrightarrow C_2$ grup homomorfizmasının $R/N(R)$-lineer genişlemesi olmak suretiyle, $\exists u \in V(R/N(R)C_4)$ aşikar olmayan birimsel elemanı $(x,y) \neq (0,0), (-1,0)$ için $u = 1 + (1-a^2)(x+ya)$ şeklinde seçilsin (Herman ve ark, 2005). Bu durumda, $u^* = 1 + (1-a^2)(x+ya^3) = 1 + (1-a^2)(x-ya)$ için,

$$uu^* = 1 + (1-a^2)(2x^2+2y^2+2x) \in V(R/N(R)C_2) = C_2$$

olduğundan, $2x^2+2y^2+2x = 0$ veya $2x^2+2y^2+2x = -1$ eşitliklerinden biri geçerli olup, $2x^2+2y^2+2x = -1$ eşitliğinin söz konusu olduğu durumda

$$2 \in V(R/N(R)C_2) = C_2$$

olduğu için Teorem 4.1.11.'den dolayı bir çelişki doğar. Öte yandan 2, bir sıfır bölense, $(x,y) = (1,1)$ için $2x^2+2y^2+2x = 0$ denklemi sağlandığından $uu^* = 1$ olacak şekilde $R/N(R)C_4$ içinde aşikar olmayan bir birimsel elemanın mevcut olduğunu doğrular.

Tersine, $\exists x, y \in \frac{R}{N(R)}$, $(x,y) \neq (0,0), (-1,0):$ $2x^2+2y^2+2x = N(R)$ kabul edildiğinde, $u = 1 + (1-a^2)(x+ya)$ için

$$u^* = 1 + (1-a^2)(x+ya^3) = 1 + (1-a^2)(x-ya)$$

olmak üzere $uu^* = 1$ yani $R/N(R)C_4$ te aşikar olmayan birimsel elemanın varlığı gösterilmiş olur. ■

Önerme 4.1.23. R, birimli ve değişmeli bir halka, $R \neq \mathbb{Z}_2$ ve $kar\ R = 3$ olsun. $V(RC_2)$ ve $V(RG)$ sadece aşikar birimsel elemanlardan ibaretse, $V(R(G \times C_2))$ de sadece aşikar birimsel elemanlardan ibarettir (Herman ve ark., 2005).

Teorem 4.1.24. Eğer, $V(RC_4) = C_4 \times (1 + I(N(R)C_4; C_4))$ ise $G = \coprod_{i<\aleph_0} C_4$ için, $V(RG) = G \times (1 + I(N(R)G; G))$ eşitliği vardır.

İspat. Teorem 4.1.22. ile açıkça görülür ki $R = \mathbb{Z}_2$ veya $R = \mathbb{Z}_3$ söz konusu olur ise $(x, y) = (1_{\frac{R}{N(R)}}, 1_{\frac{R}{N(R)}})$ için $2x^2 + 2y^2 + 2x = N(R)$ ve dolayısıyla $V(R/N(R)C_4) \neq C_4$ olur. Yani $R/N(R)C_4$ aşikar olmayan birimseller içerir. Bu durumda, $kar\ R \neq 2, 3$ kabul edilebilir. C_4 devirli grubunun sonlu sayıda kopyası olan $G = \coprod_{i<\aleph_0} C_4$ grubunun üssü 4 olup ispat, r üzerinden tümevarımla yapılabilir. $r = 1$ durumu teoremin hipotezi olduğundan açık bir durumdur.

$r \geq 2$ ise, $G = G' \times \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ şeklinde ifade edilebilir öyle ki G' ya aşikar bir gruptur ($G' = \{1\}$) ya da $G' = \coprod_{i=1}^{r-2} C_4$ olarak C_4 gruplarının $r - 2$ adet kopyası şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda, tümevarım hipotezi ve Önerme 4.1.23.' ten $R/N(R)(G/\langle y^2 \rangle)$ sadece aşikar birimsel elemanlardan oluşur. $R/N(R)G$ grup halkasında keyfi bir birimsel eleman aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Herman ve ark., 2005).

$$u = 1 + (1 - y^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_0y + b_1xy + b_2x^2y + b_3x^3y)$$

$\exists a_i, b_i \in R/N(R)G'$.

Benzer biçimde, yine Önerme 4.1.23.'ten $R/N(R)(G/\langle x^2 \rangle)$' nin sadece aşikar birimsel elemanlardan oluştuğu gerçeğiyle, $b_2 = -b_0$, $b_3 = -b_1$, $a_3 = -a_1$ ve $a_2 = -a_0$ veya $a_2 = -a_0 - 1$. Öte taraftan, $R/N(R)(G/\langle x^2y^2 \rangle)$' nin de aynı özelliği taşımasından dolayı, $b_2 = b_0$, $b_3 = b_1$ ve $a_3 = a_1$ eşitlikleriyle beraber

$a_1 = a_2 = a_3 = b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ve $a_0 = 0$ veya $a_0 = -1$ parametreleriyle beraber, $u = 1$ veya $u = b^2$ aşikar olup $V\left(\frac{R}{N(R)}G\right) = G$ eşitliği elde edilir. ■

Teorem 4.1.25. R birimli değişmeli bir halka ve

$$G = Q_8 = \langle a, b \colon a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, ba = a^{-1}b \rangle$$

olmak üzere

$$V(RG) \neq G \times (1 + I(N(R)G; G))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart $V(RC_2) \neq C_2 \times (1 + I(N(R)C_2; C_2))$ veya

$\exists x, y, z, t \in R/N(R)$, $(x, y, z, t) \neq (0,0,0,0), (-1,0,0,0)$ öyle ki

$$x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = N(R)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Önerme 4.1.10.' dan dolayı araştırılması gereken $R/N(R)Q_8$ grup halkasındaki birimsel elemanlardır. Bu durumda, $R/N(R)Q_8$ içinde aşikar olmayan birimsel elemanın mevcut olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $R/N(R)C_2$ içinde sadece aşikar birimsel elemanların olduğu yani, $V\left(\frac{R}{N(R)}C_2\right) = C_2$ eşitliği kabul edilerek ispata devam edilirse,

$$R/N(R)(Q_8/\langle a^2\rangle) \simeq R/N(R)(C_2 \times C_2)$$

olduğundan, Önerme 4.1.23. yardımıyla

$$V\left(\frac{R}{N(R)}\left(\frac{Q_8}{\langle a^2\rangle}\right)\right) = \frac{Q_8}{\langle a^2\rangle}$$

elde edilir. Şimdi, $\frac{R}{N(R)}Q_8$ grup halkasında aşikar olmayan bir birimsel elemanın varlığını araştıralım. Bunun için,

$$u = 1 + (1 - a^2)(x + ya + zb + tab)$$

ve buna karşılık

$$u^* = 1 + (1 - a^2)(x - ya - zb - tab)$$

seçilirse,

$$uu^* = 1 + (1 - a^2)2(x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \in V\left(\frac{R}{N(R)}C_2\right) = C_2$$

olduğundan,

$$2(x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \in \{-1,0\}$$

olur. Eğer, $2(x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = -1$ olursa, $2 \in inv(R)$ elde edilir ki Teorem 4.1.11. ile aslında bunun bir çelişki olduğu görülebilir (Herman ve ark., 2005). Öte yandan, $2(x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 0$ ise bu durumda da $2 \in zd(R)$ olup sıfırdan farklı

(x, y, z, t) için $\frac{R}{N(R)}C_2$ içinde aşikar olmayan birimsel elemanın bulunması durumu elde edilir ki, bu da Teorem 4.1.11.' den dolayı çelişkidir (Herman ve ark., 2005). Dolayısıyla,

$$x + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

eşitliğinin sağlanması gereklidir. İspatın diğer yönündeki şart aslında

$$u = 1 + (1 - a^2)(x + ya + zb + tab)$$

ve $u^* = 1 + (1 - a^2)(x - ya - zb - tab)$ için $uu^* = 1$ eşitliğini sağladığı için

$$V(R/N(R)Q_8) \neq Q_8$$

eşitsizliği ile $V(RG) \neq G \times (1 + I(N(R)G; G))$ durumunu ispatlar. ■

4.2. Direkt Çarpım Gruplarının Değişmeli Grup Halkalarındaki İdempotent Birimsel Elemanlar

Bu bölümde, G ve H birer Abel grup olmak üzere, bir R değişmeli ve birimli halkası üzerinde tanımlanan $R(G \times H)$ grup halkası üzerinde önceki bölümde olduğu gibi özel yapılara sahip birimsel elemanlar tanımlanacaktır. Bunun için ilk önce R halkasındaki idempotent elemanların $id(R) = \{e \in R: e^2 = e\}$ kümesi içinde

$$id_0(R) = \{e_i \in id(R): e_i e_j = 0, i \neq j\}$$

kümesi ile *ortogonal idempotent elemanları* ve $id_C(R) = \{e_i \in id_0(R): \sum e_i = 1\}$

ile *ortogonal idempotent elemanların bir tam kümesini* tanımlayalım. Böylece, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.2.1. R değişmeli ve birimli bir halka ve G Abel grup olmak üzere,

$$id(RG) = \{e_1 g_1 + e_2 g_2 + \cdots + e_s g_s: g_1, \dots, g_s \in G, e_1, \dots, e_s \in id_C(R)\}$$

kümesine *idempotent birimsel elemanlar kümesi* denir (Danchev, 2009b; 2010a).

RG grup halkasında ortogonal idempotent elemanların bir tam kümesi ve G grubunun elemanları yardımıyla oluşturulan sonlu toplamların her birinin aslında $V(RG)$

normallenmiş birimsel grubunda bir birimsel eleman teşkil ettiği gerçeği aşağıdaki önerme ile görülebilir.

Önerme 4.2.2. Birimli ve değişmeli bir R halkası ve G abel grubu için, $id(RG) \leq V(RG)$ dir (Danchev, 2009b; 2010a).

Keyfi bir $u \in id(RG)$ alındığında, $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $u^n \in id(RG)$ olduğundan her bir idempotent birimsel eleman $id(RG)$ içinde bir üreteç olarak görülebileceğinden, idempotent birimsel elemanların altgrubunu

$$id(RG) = \langle e_1 g_1 + e_2 g_2 + \cdots + e_s g_s : g_1, \dots, g_s \in G, e_1, \dots, e_s \in id_C(R) \rangle$$

formuyla göstermek mümkündür.

G ve H birer Abel grup olsun. $\wp$ tüm asal tamsayıların kümesini göstersin. Ayrıca, $p, q \in \wp$ olmak üzere,

$$G_p = \{g \in G : o(g) = p^n, \exists n \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$H_q = \{h \in H : o(h) = q^m, \exists m \in \mathbb{N}\}$$

sırasıyla G ve H gruplarında p-primer ve q-primer bileşenler olsun. G ve H gruplarında maksimal burulmalı kısımlar sırasıyla $G_0 = \coprod_p G_p$ ve $H_0 = \coprod_q H_q$ şeklinde tanımlanır. Böylece, $G \times H$ direkt çarpımında maksimal burulmalı kısmı

$$(G \times H)_0 = \coprod_p \coprod_q G_p \times H_q = \coprod_q G_p \times \coprod_q H_q$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\forall p, q \in \wp$ için,

$$G_p \times H_q = \{(g, h) \in G \times H : \exists m, n \in \mathbb{N}, o(g) = p^m, o(h) = q^n\}$$

olur. Eğer G grubunda bir $p \in \wp$ için, p-primer bileşen yani G içinde mertebesi p asalının bir kuvveti şeklinde bir eleman yoksa bu durum $G_p = 1$ ile ifade edilecek olup, direkt çarpımda $G_p \times H_q = 1$ eşitliği ile $G_p = H_q = 1$ durumu gösterilir.

Tanım 4.2.3. $supp_C(G \times H) = \{pq: G_p \times H_q \neq 1\}$ kümesine $G \times H$ *direkt çarpımının desteği* denir.

Örnek 4.2.4. $G = \mathbb{Z}_4$ ve $H = \mathbb{Z}_9$ olsun. Bu durumda, $G_2 \neq 1$ veya $H_3 \neq 1$ olduğundan,

$$supp_C(\mathbb{Z}_{36}) = \{2p: p \in \wp\} \cup \{3p: p \in \wp\}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.2.5. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. $\exists 0 \neq r \in R$ için $pqr = 0$ eşitliğini sağlayan pq yapısındaki sayılara *bileşik yapıdaki sıfır bölenler* denir ve

$$zd_C(R) = \{pq: \exists 0 \neq r \in R, pqr = 0\}$$

ile gösterilir.

Doğal olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.6. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. Bu durumda, $kar\ R \in \wp$ ise,

$$zd_C(R) \neq \emptyset$$

Tanım 4.2.7. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. Bu durumda, $p, q \in \wp$ için pq formundaki tersinir elemanlara *bileşik tersinir elemanlar* denir ve

$$inv_C(R) = \{pq: pq.1 \in U(R)\}$$

kümesi ile gösterilir.

Şimdi, direkt çarpım gruplarının değişmeli grup halkalarındaki normallenmiş birimsel elemanlar grubunun, hangi şartlarda sadece idempotent birimsel elemanlardan ibaret olduklarını araştıralım. Yani, direkt çarpım gruplarının değişmeli grup halkalarında idempotent birimsel eleman şeklinde olmayan normallenen birimsel elemanların bulunmaması için gerek ve yeter şartları inceleyelim.

Teorem 4.2.8. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. G ve H Abel gruplar olmak üzere,

$$V\big(R(G \times H)\big) = id(R(G \times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart $N(R)=0$, $V(R((G\times H)_0) = id(R((G\times H)_0))$ ve aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

$i)$ $G\times H = (G\times H)_0$,

$ii)$ $G\times H \neq (G\times H)_0$ ve $supp_C(G\times H)\ \cap\ [inv_C(R)\ \cup zd_C(R)\,] = \emptyset$ dur.

İspat. $\Rightarrow$: Şimdi, $R(G\times H)$ grup halkasındaki tüm normallenen birimsel elemanların idempotent birimsel formunda olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(G\times H)_0 \subseteq G\times H$ kapsamasından

$$V(R((G\times H)_0) \hookrightarrow V\big(R(G\times H)\big) = id\big(R(G\times H)\big),$$

$$id(R(G\times H)_0) \subseteq V(R((G\times H)_0)$$

ve

$$V(R((G\times H)_0) \cap id\big(R(G\times H)\big) = id(R((G\times H)_0)$$

olduğundan

$$V(R((G\times H)_0) = id(R((G\times H)_0))$$

elde edilir. Yani, $G\times H$ direkt çarpımının maksimal burulmalı altgrubunun R üzerinde değişmeli grup halkasındaki tüm normallenen birimsel elemanlar idempotent birimsel formundadır. Burada,

$$V(R(G\times H))_0 = \coprod_{p\in\wp} V_p(R(G\times H))$$

ve

$$id(R(G\times H))_0 = \coprod_{p\in\wp} id_p(R(G\times H))$$

olduğundan, eğer $V\big(R(G\times H)\big) = id(R(G\times H))$ ise

$$V(R((G\times H)_0) = V\big(R(G_0\times H_0)\big) \cap V\big(R(G\times H)\big)$$

$$= V\big(R(G_0\times H_0)\big) \cap id\big(R(G\times H)\big) = id(R(G_0\times H_0))$$

olur ki böylece,

$$V(R\big((G\times H)\big)_0 = V\big(R(G_0\times H_0)\big) = id(R(\coprod_{p\in\wp} G_p \times \coprod_{q\in\wp} H_q))$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, $\exists k\in\mathbb{N}$ için $r^k=0$ olacak şekilde bir $r\in R$ seçelim. Bu durumda, $g\in G, h\in H$ olmak üzere $1+r(1-gh)$ elemanı için, $(rgh)^k=0$ olduğundan,

$$1-(rgh)^k = (1-rgh)(1+rgh+r^2g^2h^2+\cdots+r^{k-1}g^{k-1}h^{k-1}) = 1$$

olup $1-rgh$ bir birimsel eleman teşkil eder. Üstelik, $r\in R$ bir nilpotent eleman olduğundan,

$$1+r(1-gh) = 1+r-rgh \in V\big(R(G\times H)\big) = id(R(G\times H))$$

eşitliklerinden dolayı $r\in N(R)\cap id(R)$ ve dolayısıyla $N(R)=\{0\}$ olur.

Eğer, $G\times H$ burulmalı değilse yani $G\times H\neq (G\times H)_0$ ise, bu durumda hipotezin aksine $supp_C(G\times H\,)\cap inv_C(R)\neq\emptyset$ olursa, $\exists p,q\in\wp$ için, $pq\in supp_C(G\times H\,)\cap inv_C(R)$ olur ki, $G_p\times H_q\neq 1$ ve $g\in G_p$ ve $h\in H_q$ için,

$$e = e(p,q) = \frac{\widehat{(gh)}}{pq}$$

bir idempotent eleman olup, $\exists x\in G\backslash G_0$ ve $\exists y\in H\backslash H_0$ burulmalı olmayan elemanları ve $e=e(p,q)$ idempotent elemanı ile birlikte $1-e+exy$ elemanını göz önüne alalım. Burada,

$$e = e(p,q)\notin\{0,1\}$$

ve $exy\neq e$ olduğundan,

$$u = u(e,x,y) = 1-e+exy\in V\big(R(G\times H)\big)\backslash G\times H$$

aşikar olmayan birimsel elemanı elde edilir. Burada,

$$u^{-1} = u^{-1}(e,x,y) = 1-e+e(xy)^{-1}$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi, $e = e(p,q) = \frac{\widehat{(gh)}}{pq}$ olmak üzere,

$$1 - e + exy = 1 - p^{-1}q^{-1} - p^{-1}q^{-1}gh - \cdots - p^{-1}q^{-1}(gh)^{pq-1}$$
$$+p^{-1}q^{-1}xy + p^{-1}q^{-1}xygh + \cdots + p^{-1}q^{-1}xy(gh)^{pq-1}$$

eşitliği göz önüne alındığında görülecektir ki $1 = -1$ olduğu özel durumda bile ($\mathbb{Z}_2$ de) -1 ve 1 ortogonal idempotent elemanlar değildir. Bu durumda,

$$u = u(e,x,y) = 1 - e + exy \in V\big(R(G \times H)\big)\backslash id(R(G \times H))$$

elde edilir ki bu çelişkiden

$$supp_C(G \times H\ ) \cap inv_C(R) = \emptyset$$

olması gerektiği anlaşılır. Şimdi,

$$supp_C(G \times H) \cap\ zd_C(R) \neq \emptyset$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\exists pq \in supp_C(G \times H) \cap\ zd_C(R)$ ve $\exists 0 \neq r \in R$ için, $pqr = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu durumda, $\exists gh \in G_p \times H_q$ elemanı ile birlikte,

$$r(1 - gh)^{pq} = r\left(1 - \binom{pq}{1}gh + \cdots + \binom{pq}{pq-1}(gh)^{pq-1} - 1\right)$$
$$= pqr \sum n_i(p,q)\,(gh)^i = 0$$

olur. Burada, $n_i(p,q) \in \mathbb{N}$ dır.

Dolayısıyla, $(r(1-gh))^{pq} = r(1-gh)^{pq} = 0$ olduğundan, $r \neq \mp 1$ için

$$\omega = \omega(r,g,h) = 1 + r - rgh \in V\big(R(G \times H)\big)\backslash id(R(G \times H))$$

elde edilir ki bu çelişki ile

$$supp_C(G \times H\ ) \cap zd_C(R) = \emptyset$$

elde edilir. Böylece, $V\big(R(G \times H)\big) = id(R(G \times H))$ ve $G \times H \neq (G \times H)_0$ ise iddia edildiği gibi $supp_C(G \times H) \cap [inv_C(R) \cup zd_C(R)] = \emptyset$ olmalıdır. İspatın diğer yönü için,

$\Leftarrow$: $N(R) = 0$ ve $V(R((G \times H)_0) = id(R((G \times H)_0))$ olsun. Bu durumda,

$$G \times H = (G \times H)_0$$

olması durumunda,

$$V\big(R(G \times H)\big) = V(R((G \times H)_0) = id\big(R((G \times H)_0)\big) = id\big(R(G \times H)\big)$$

olacağı açıktır. Şimdi, $G \times H$ direkt çarpımının burulmalı olmayan kısmının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durum, $G \times H \neq (G \times H)_0$ ile ifade edilebilir. Verilen kabuller altında $R(G \times H)$ grup halkasındaki nilpotent elemanlara dair önerme aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Önerme 4.2.9. $N(R) = 0$ ve $supp_C(G \times H) \cap [inv_C(R) \cup zd_C(R)] = \emptyset$ olsun. Bu durumda, $N\big(R(G \times H)\big) = 0$ olur (Danchev, 2010a; 2010b).

Şimdi,

$$\begin{gathered} \phi_C: G \times H \longrightarrow G \times H/(G \times H)_0 \\ gh \longmapsto gh(G \times H)_0 \end{gathered}$$

şeklinde bir grup epimorfizması tanımlansın. ϕ_C grup epimorfizması lineer olarak grup halkalarına aşağıdaki şekilde taşınabilir. $\forall \alpha(g,h) \in R$ olmak üzere,

$$\begin{gathered} \phi_C: R(G \times H) \longrightarrow R(G \times H/(G \times H)_0) \\ \sum_{(g,h)\in G\times H} \alpha(g,h)gh \mapsto \sum_{(g,h)\in G\times H} \alpha(g,h)gh\,(G \times H)_0 \end{gathered}$$

şeklinde tanımlanan ϕ_C bir halka epimorfizması olup, birimsel gruplarına kısıtlandığında, örtenlik olmayabileceğinden,

$$\phi_C\left(V\big(R(G \times H)\big)\right) \subseteq V(R(G \times H/(G \times H)_0))$$

kapsaması elde edilir.

Önerme 4.2.10. Eğer $V(R(G \times H)_0) = id(R(G \times H)_0)$ ise,

$$V(R(G \times H/(G \times H)_0)) = id(R(G \times H/(G \times H)_0)).$$

İspat. $id(R(G \times H/(G \times H)_0)) \subseteq V(R(G \times H/(G \times H)_0))$ olduğu açıktır. Ters kapsama için, $V(R(G \times H/(G \times H)_0)$ içinde idempotent birimsel eleman formunda olmayan bir elemanın mevcut olduğu kabul edilsin. Yani,

$$\exists u \in V(R(G \times H/(G \times H)_0)) \backslash id(R(G \times H/(G \times H)_0))$$

olsun. Bu durumda, $\varepsilon: V(R(G \times H/(G \times H)_0)) \longrightarrow V(R(G \times H)_0) = id(R(G \times H)_0)$,

$$\varepsilon\left(\sum_{(g,h)\in G\times H} \alpha(g,h)gh\,(G \times H)_0\right) = \sum_{(g,h)\in G\times H} \alpha(g,h)\,(G \times H)_0$$

şeklinde tanımlanan bir grup homomorfizması altında,

$$\varepsilon(u) \in V(R(G \times H)_0) \backslash id(R(G \times H)_0)$$

çelişkisi elde edilir. Bu ise, $V(R(G \times H/(G \times H)_0)) = id(R(G \times H/(G \times H)_0))$ olması gerektiğini gösterir. Teorem 4.2.8.' in ispatına devam etmek adına, $id(R(G \times H))$ içindeki idempotent birimsel elemanların, $R(G \times H)$ grup halkasındaki sonlu toplamlarda katsayıların $id_C(R)$ kümesindeki elemanlarla oluşturulmasından yani idempotent birimsel elemanların $id(R(G \times H))$ altgrubunun, $R(G \times H)$ içindeki elemanların katsayılarının $id_C(R)$ kümesi ile yeniden dizayn edilerek elde edilmesinden dolayı,

$$\phi_C\left(id\big(R(G \times H)\big)\right) = id(R(G \times H/(G \times H)_0))$$

eşitliği yazılabilir. Böylece, aşikar olan $\phi_C\left(id\big(R(G \times H)\big)\right) \subseteq \phi_C\left(V\big(R(G \times H)\big)\right)$ kapsaması ve Önerme 4.2.10. ile birlikte,

$$\begin{aligned}\phi_C\left(V\big(R(G \times H)\big)\right) \subseteq V(R(G \times H/(G \times H)_0)) &= id(R(G \times H/(G \times H)_0)) \\ &= \phi_C\left(id\big(R(G \times H)\big)\right)\end{aligned}$$

kapsamasından,

$$\phi_C\left(V\big(R(G\times H)\big)\right)=\phi_C\left(id\big(R(G\times H)\big)\right)$$

eşitliği elde edilir. (Danchev, 2010a; 2010b) çalışmasının bir uygulaması olarak ϕ_C nin $V\big(R(G\times H)\big)$ üzerine kısıtlanışının çekirdeğinin $V(R(G\times H)_0)$ altgrubunda kapsanmasından dolayı, $\phi_C\left(V\big(R(G\times H)\big)\right)=\phi_C\left(id\big(R(G\times H)\big)\right)$ eşitliği ile beraber,

$$\phi_C\colon V\big(R(G\times H)\big)\longrightarrow V(R(G\times H/(G\times H)_0))$$

kısıtlanışına 1. izomorfizma teoremini uygulamakla,

$$\frac{V\big(R(G\times H)\big)}{Ker\phi_C\subseteq V(R(G\times H)_0)}\simeq\phi_C\left(id\big(R(G\times H)\big)\right)=\phi_C\left(V\big(R(G\times H)\big)\right)$$

ve Önerme 4.2.10.'dan,

$$\begin{aligned}V\big(R(G\times H)\big)&=Ker\phi_C.id(R(G\times H/(G\times H)_0))\\&\subseteq V(R(G\times H)_0)id(R(G\times H/(G\times H)_0))\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak

$$V(R(G\times H)_0)=id(R(G\times H)_0)$$

kabulüyle

$$V\big(R(G\times H)\big)\subseteq id(R(G\times H)_0)id(R(G\times H/(G\times H)_0))$$

ve dolayısıyla

$$V\big(R(G\times H)\big)\subseteq id\big(R(G\times H)\big)$$

kapsamasına ulaşılır. Bu kapsamanın tersi aşikar olduğundan,

$$V\big(R(G\times H)\big)=id\big(R(G\times H)\big)$$

elde edilir. ■

Tanım 4.2.11. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. G ve H birer Abel grup olmak üzere,

$G_i \leq G$ ve $H_j \leq H$ altgrupları için,

$$\varepsilon: R(G \times H) \longrightarrow R(G \times H/G_i \times H_j) \simeq R((G/G_i) \times (H/H_j))$$

homomorfizmasına *göreceli artım eşlemesi* denir (Danchev, 2010a; 2010b).

Tanım 4.2.12. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. G ve H birer Abel grup olmak üzere, $G_i \leq G$ ve $H_j \leq H$ altgrupları için,

$$Ker\ \varepsilon = I\big(R(G \times H); G_i \times H_j\big) = \langle \big(1 - g_i\,, 1 - h_j\big): g_i \in G_i, h_j \in H_j \rangle_R$$

idealine *göreceli artım ideali* denir (Danchev, 2010a; 2010b).

Önerme 4.2.13. R değişmeli ve birimli bir halka, G ve H birer Abel grup ve

$$supp_C(G \times H) \cap inv_C(R) = \emptyset$$

olsun. G_0 ve H_0 sırasıyla G ve H gruplarının maksimal burulmalı kısımları olmak üzere,

$$[1 + I(R(G \times H); G_0 \times H_0)] \cap V(R(G \times H)) \subseteq V(R(G_0 \times H_0) + N(R(G \times H)))$$

dır (Danchev, 2010a).

İspat. $\alpha \in V(R(G \times H))$ olsun. Şimdi, $\forall r_{i,j} \in R$ olmak üzere

$$\begin{gathered} \varphi: R(G \times H) \longrightarrow R((G/G_0) \times (H/H_0) \\ \sum_j \sum_i r_{i,j}(g_i h_j) \longmapsto \sum_j \sum_i r_{i,j}(g_i G_0, h_j H_0) \end{gathered}$$

epimorfizması altında $\varphi(\alpha) = 1$ olsun. $L = \langle r_{i,j} \rangle \leq R$ ve $F = \langle (g_i, h_j) \rangle \leq G \times H$ sonlu üretilmiş olup,

$$\alpha = \sum_j \sum_i r_{i,j}(g_i h_j) \in LF$$

olur. G ve H Abel gruplar olmak üzere, $G \times H$ direkt çarpımı, burulmalı ve burulmalı olmayan kısımlar cinsinden

$$G \times H = G_0 \times H_0 \times T_f$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada T_f nin burulmalı olmayan kısım olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece, son eşitliğin R üzerinde tanımlı grup halkalarına taşınmasıyla,

$$R(G \times H) = R\left(G_0 \times H_0 \times T_f\right) = R(G_0 \times H_0)T_f$$

elde edilir.

Burada, $R(G_0 \times H_0)T_f$ cebirsel yapısının; $G \times H$ direkt çarpımının burulmalı olmayan kısmının $R(G_0 \times H_0)$ grup halkası üzerinde tanımlı olduğu görülebilir. Dolayısıyla,

$$S \coloneqq R(G_0 \times H_0)$$

ile gösterildiğinde, $R(G \times H) = ST_f$ ve birimsel elemanlar grubunun da

$$U(R(G \times H)) = U(ST_f)$$

olacağı açık olup, (Karpilovsky, 1990) ile aşağıdakini elde edebiliriz.

$$\alpha \in U\left(ST_f\right) = U(S) \times id\left(ST_f\right) \times \left(1 + I\left(N(S)T_f; T_f\right)\right).$$

Burada, $N(S)$, $R(G_0 \times H_0)$ grup halkasının nil-radikali ve $I(N(S)T_f; T_f)$ ise

$$N(S)T_f = \{\sum_{s_g \in N(S)} s_g g : g \in T_f \subseteq G \times H\}$$

olmak üzere, $\varepsilon\left(\sum_{s_g \in N(S)} s_g g\right) = \sum_{s_g \in N(S)} s_g \, gT_f$ ile tanımlı

$$\varepsilon : N(S)T_f \longrightarrow N(S)\left({}^{T_f}\!/_{T_f}\right) = N(S)T_f$$

artım eşlemesinin çekirdeğidir. Dolayısıyla, $I\left(N(S)T_f; T_f\right) = Ker\ \varepsilon$ olur.

Böylece, $\alpha \in U\left(ST_f\right)$ nin bir çarpanı, $1 + \sum_{s_g \in N(S)} s_g(g-1)$ formunda olup, $\alpha = ca(1+b)$ yazılabilir öyle ki $c \in U(S) = U(R(G_0 \times H_0))$, $a \in id(ST_f)$ ve $b \in I\left(N(S)T_f; T_f\right)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\varepsilon(b) = 0$ elde edilir.

Tanım 4.2.14. R değişmeli ve birimli bir halka olsun. G ve H birer Abel grup olsun. Bu durumda,

$$G_0 \times H_0 = \coprod_p \coprod_q G_p \times H_q = \coprod_q G_p \times \coprod_q H_q$$

burulmalı kısım olmak üzere $R(G_0 \times H_0)$ a *tekil altcebir* denir (May, 1976).

Şimdi de ispatın geri kalanı için gerekli olan $id(ST_f)$ idempotent birimsel elemanlar grubunun yapısı ile ilgili teoremi ifade edelim.

Teorem 4.2.15. R ayrışamaz bir halka ve G Abel bir grup olmak üzere, RG deki her idempotent eleman, RG nin tekil altcebiri tarafından kapsanır. Yani, $id(RG) \subseteq id(RG_0)$ (May, 1976).

Böylece, $id(ST_f)$ nin elemanları $id(S) = id(R(G_0 \times H_0))$ ile belirlenir. Yani,

$$id(ST_f) \subseteq id(S).$$

(May, 1976) dan R ayrışamaz bir halka ve $supp_C(G \times H) \cap inv_C(R) = \emptyset$ olmak üzere, $R(G \times H)$ nin de ayrışamaz olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla,

$$\varphi(\alpha) = 1 = \varphi\big(ca(1+b)\big) = \varphi(c)\varphi(a)\big(1+\varphi(b)\big)$$

olur ki $\varphi(c) \in U(R) \subseteq U(S)$ dir. Burada $a \in id(ST_f) \subseteq id(S)$ olduğundan $\varphi(a) = a$ elde edilir. Ayrıca,

$$b \in I\big(N(S)T_f; T_f\big)$$

olduğundan, $\varphi(b)$ bir nilpotenttir. Dahası $c \in U(S)$ ve $S = Ker\ \varphi$ olduğundan dolayı $\varphi(c) = 1$ eşitliği söz konusudur ki

$$1 = 1a(1 + \varphi(b))$$

eşitliği ile $a^{-1} = id(ST_f) \cap \Big(1 + I\big(N(S)T_f; T_f\big)\Big) = 1$ yani $a = 1$ olup,

$$\alpha = c + cb \in V(R(G_0 \times H_0) + N\big(R(G \times H)\big))$$

sonucuna varılır. Böylece,

$$1 + I(R(G \times H); G_0 \times H_0) \cap V(R(G \times H)) \subseteq V(R(G_0 \times H_0) + N(R(G \times H)))$$

kapsamasının geçerli olduğu ispatlanmış olur. ■

Önerme 4.2.16. G bir Abel grup ve $|G| = 2$ olsun. R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, $V(RG) = id(RG)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$2r - 1 \in U(R) \Leftrightarrow r^2 = r$$

olmasıdır (Danchev, 2009b; 2010a).

Önerme 4.2.17. G Abel grup ve $|G| = 3$ olsun. R, birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, $V(RG) = id(RG)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall(r, f) \in R \times R$ için,

$$1 + 3r^2 + 3f^2 + 3rf - 3r - 3f \in U(R) \Leftrightarrow r, f \in id_0(R)$$

olmasıdır (Danchev, 2009b; 2010a).

İspat. Verilen şartlarla $V(RG) = id(RG)$ olsun.

$$1 + 3r^2 + 3f^2 + 3rf - 3r - 3f \in U(R)$$

olduğu kabulüyle birlikte $|G| = 3$ olduğundan, $G = \langle g : g^3 = 1 \rangle$ olup

$$v = 1 - r - f + rg + fg^2 \in V(RG)$$

birimsel elemanı için

$v^{-1} = (1 + 3r^2 + 3f^2 + 3rf - 3r - 3f)^{-1}[1 + r^2 + f^2 + rf - 2r - 2f + (r^2 + f^2 + rf - r)g + (r^2 + f^2 + rf - f)g^2]$

olur ki $r^2 = r$, $f^2 = f$ ve $rf = 0$ yani, $r, f \in id_0(R)$ yazılabilir.

Öte yandan, $g^3 = 1$ olmak üzere $V(RG)$ deki keyfi bir birimsel eleman

$$v = 1 - r - f + rg + fg^2$$

formunda olup ω, birimin 3. ilkel kökü olmak üzere $(1 + \omega + \omega^2 = 0)$, 1. izomorfizma teoreminden,

$$\frac{R\langle g \rangle}{\langle 1 + g + g^2 \rangle} \simeq R\langle \omega \rangle$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $v = 1 - r - f + rg + fg^2 \in V(RG)$ elemanının bu izomorfizma altındaki görüntüsü

$$w = 1 - r - f + r\omega + f(-1 - \omega) = 1 - r - 2f + (r - f)\omega \in V(R\langle\omega\rangle)$$

olur. Üstelik, w bir birimsel eleman olduğundan $\exists\ k + l\omega \in V(R\langle\omega\rangle)$ mevcut olup

$$w(k + l\omega) = 1$$

eşitliği sağlanır. Böylece,

$$(1 - r - 2f)k - (r - f)l + [(r - f)k + (1 - 2r - f)l]\omega = 1$$

eşitliği aşağıdaki matris sistemine taşınırsa,

$$\begin{pmatrix} 1 - r - 2f & -r + f \\ r - f & 1 - 2r - f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve $(1 - r - 2f)(1 - 2r - f) + (r - f)^2 = 1 + 3r^2 + 3f^2 + 3rf - 3r - 3f \in U(R)$ elde edilir ki bu ancak ve ancak $r^2 = r$, $f^2 = f$ ve $rf = 0$ durumunda sağlanacağından,

$$v = 1 - r - f + rg + fg^2 \in id(RG)$$

yani $V(RG) = id(RG)$ olur. ■

Şimdi, $G \times H \simeq K_4$ Klein 4- grubu olmak üzere, değişmeli ve birimli bir R halkası üzerindeki $R(G \times H)$ grup halkasındaki tüm birimsel elemanların, idempotent birimsel eleman formunda olabilmesi için R üzerinde bazı gerek ve yeter şartlar aşağıdaki gibi ifade ve ispat edilebilir.

Teorem 4.2.18. $G \times H \simeq K_4$ olsun. R, birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere,

$V\big(R(G \times H)\big) = id(R(G \times H))$ olabilmesi için gerek ve yeter şart R halkası üzerinde $r, s, f \in R$ olmak üzere,

$$1 - 4rs - 4rf - 4sf - 16rsf \in U(R) \Leftrightarrow\ r, s, f \in id_C(R).$$

şartının sağlanmasıdır. Burada, $K_4 = \langle g, h \colon g^2 = 1, h^2 = 1, gh = hg\rangle$.

İspat. $G \times H \simeq K_4$ olmak üzere, $RK_4 = \langle 1, g, h, gh\rangle_R$ olup

$$V(RK_4) = \{1 - (r + s + f) + rg + sh + fgh : r, s, f \in R\}$$

formunda normallenen birimsel elemanların grubundan

$$\exists u = 1 - (r_1 + s_1 + f_1) + r_1 g + s_1 h + f_1 gh$$

birimsel elemanını seçelim ve tersi

$$u^{-1} = 1 - (r_2 + s_2 + f_2) + r_2 g + s_2 h + f_2 gh \in V(RK_4)$$

olsun. Bu durumda,

$uu^{-1} =$

$$1 - (r_1 + s_1 + f_1 + r_2 + s_2 + f_2) + (r_1 + s_1 + f_1)(r_1 + s_1 + f_1) + r_1 r_2 + s_1 s_2 + f_1 f_2$$

$$+[r_2(1 - r_1 - s_1 - f_1) + r_1(1 - r_2 - s_2 - f_2) + s_1 f_2 + s_2 f_1]g$$

$$+[s_2(1 - r_1 - s_1 - f_1) + s_1(1 - r_2 - s_2 - f_2) + r_1 f_2 + r_2 f_1]h$$

$$+[f_2(1 - r_1 - s_1 - f_1) + f_1(1 - r_2 - s_2 - f_2) + r_1 s_2 + r_2 s_1]gh = 1$$

eşitliğinden,

$$(r_1 + s_1 + f_1 + r_2 + s_2 + f_2) - (r_1 + s_1 + f_1)(r_2 + s_2 + f_2) - r_1 r_2 - s_1 s_2 - f_1 f_2 = 0$$

$$r_2(1 - r_1 - s_1 - f_1) + r_1(1 - r_2 - s_2 - f_2) + s_1 f_2 + s_2 f_1 = 0$$

$$s_2(1 - r_1 - s_1 - f_1) + s_1(1 - r_2 - s_2 - f_2) + r_1 f_2 + r_2 f_1 = 0$$

$$f_2(1 - r_1 - s_1 - f_1) + f_1(1 - r_2 - s_2 - f_2) + r_1 s_2 + r_2 s_1 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu sistem düzenlenirse,

$$r_2(2r_1 + s_1 + f_1 - 1) + s_2(r_1 + 2s_1 + f_1 - 1) + f_2(r_1 + s_1 + 2f_1 - 1) = r_1 + s_1 + f_1$$

$$r_2(1 - 2r_1 - s_1 - f_1) + s_2(-r_1 + f_1) + f_2(-r_1 + s_1) = -r_1$$

$$r_2(-s_1 + f_1) + s_2(1 - r_1 - 2s_1 - f_1) + f_2(r_1 - s_1) = -s_1$$

$$r_2(s_1 - f_1) + s_2(r_1 - f_1) + f_2(1 - r_1 - s_1 - 2f_1) = -f_1$$

sistemine ulaşılır ki söz konusu denklemler, $[u^{-1}] := (r_2, s_2, f_2)^T$ ve

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r_1-s_1-f_1 & -r_1+f_1 & -r_1+s_1 \\ -s_1+f_1 & 1-r_1-2s_1-f_1 & r_1-s_1 \\ s_1-f_1 & r_1-f_1 & 1-r_1-s_1-2f_1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $A[u^{-1}] = [0]_{3\times 1}$ şeklinde ifade edilebilir. Söz konusu sistemde $[u^{-1}]$ matrisinin tekliğinden $\det(A) \in U(R)$ olması gerektiği bilinmektedir. Sadelik olması açısından $r_1 = r, s_1 = s$ ve $f_1 = f$ ataması yapılarak hesaplanan

$$det(A) = 1 - 4r + 4r^2 - 4s + 12rs - 8r^2s + 4s^2 - 8rs^2 - 4f + 12rf - 8r^2f + 12sf - 16rsf - 8s^2f + 4f^2 - 8rf^2 - 8sf^2$$

ifadesinde $r, s, f \in id_C(R)$ olarak seçildiğinden determinant

$$det(A) = 1 - 4rs - 4rf - 4sf - 16rsf \in U(R)$$

olarak elde edilir.

Böylece, iddia edildiği gibi $V(RK_4) = id(RK_4)$ ise $\exists r, s, f \in R$ için,

$$1 - 4rs - 4rf - 4sf - 16rsf \in U(R) \Leftrightarrow r, s, f \in id_C(R)$$

olur ki bu da istenendir. İspatın diğer yönü de benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 4.2.19. $G \times H \simeq K_4$ ve R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bu durumda,

$$V\big(R(G \times H)\big) = id(R(G \times H))$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$V\big(R(G \times H)\big) = \{1 - r - s - f + rg + sh + fgh : r, s, f \in R, G = \langle g \rangle, H = \langle h \rangle\}$$

için $r + f = 0$ ve $1 - 2(r + s) \in U(R) \Leftrightarrow r + s \in id(R)$ çift gerektirmesinin sağlanmasıdır.

İspat. $G = \langle g \rangle, H = \langle h \rangle, o(g) = o(h) = 2$ ve R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere $G \times H$ üzerinde bir $f: G \times H \to \langle \omega, h \rangle$ homomorfizması $f(g, h) = (\omega, h)$ şeklinde tanımlanabilir ki f homomorfizması, grup halkalarına $f: R(G \times H) \to R\langle \omega, h \rangle$ şeklinde taşınabilir. Burada f, $\omega = e^{i\pi}$ olup $R\langle \omega, h \rangle$ grup halkasındaki normallenen birimsel elemanlar grubuna aşağıdaki gibi kısıtlanabilir.

$$f: V\big(R(G \times H)\big) \to V(R\langle h\rangle) = V(RC_2)$$

Ayrıca, $f: R(G \times H) \to R\langle \omega, h\rangle$ nin çekirdeği olan $Ker\, f = \langle 1 + g,\ h^2\rangle_R$ ve 1. izomorfizma teoremi yardımıyla

$$\frac{R(G \times H)}{\langle 1 + g,\ h^2\rangle_R} \simeq R\langle h\rangle = RC_2$$

yazılabilir. Dolayısıyla, teoremin ifadesindeki yapıya sahip olan $V(R(G \times H))$ grubundan keyfi seçilen bir $u = 1 - r - s - f + rg + sh + fgh$ birimsel elemanı için,

$$f(u) = 1 - r - s - f - r + sh - fh = 1 - 2r - s - f + (s - f)h \in V(RH)$$

olur. $V(RH) = id(RH)$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\varepsilon(f(u)) = 1$ olduğundan $r + f = 0$ ve $1 - 2(r + s) \in U(R) \Leftrightarrow r + s \in id(R)$ olduğu görülür. Böylece, ispat tamamlanır. ■

Öte yandan,

$$f(u) = 1 - r - s - f - r + sh - fh = 1 - 2r - s - f + (s - f)h \in V(RH)$$

olduğundan $f(u)$ elemanının $V(RH)$ içinde $\exists v = f(u)^{-1} = k + lh$ formunda tersi mevcut olur ki $r + f = 0$ ile birlikte

$$f(u)v = [1 + r - s + (s - r)h][k + lh] = 1$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$k(1 - s + r) + k(s - r)h + l(1 - s + r)h + l(s - r) = 1$$

yani

$$[k(1 - s + r) + l(s - r)] + [k(s - r) + l(1 - s + r)]h = 1$$

denkleminin sağlanmasıdır ki bu da

$$\begin{gathered} k(1 - s + r) + l(s - r) = 1 \\ k(s - r) + l(1 - s + r) = 0 \end{gathered}$$

denklem sisteminin sağlanması ile mümkün olup $v \in V(RH)$ birimsel elemanının tekliğinden dolayı sistemin determinantı

$$(1-s+r)^2-(s-r)^2=(1-2s)(1+2r)\in U(R)$$

olmalıdır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 4.2.20. $G\times H\simeq K_4$ ve R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere,

$$V\big(R(G\times H)\big)=id\big(R(G\times H)\big)\Leftrightarrow \exists s,f\in id_C(R),(1-2s)(1+2f)\in U(R).$$

Teorem 4.2.21. $G=\langle g: g^3=1\rangle$ ve $H=\langle h: h^2=1\rangle$ olsun. R değişmeli ve birimli halkası üzerinde

$$V\big(R(G\times H)\big)=G\times id(RH)$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$1+3(r^2+f^2+rf+r+f)\in U(RH)\Leftrightarrow (r,f)\in\{(0,0),(0,-1),(-1,0)\}$$

ve

$$2r-1\in U(R)\Leftrightarrow r\in id(R)$$

olmasıdır.

İspat. G ve H teoremin hipotezindeki gibi gruplar olmak üzere, $G\times H$ üzerinde aşağıdaki grup epimorfizması tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}\rho_G: G\times H &\to H\\ (g,h)&\mapsto h\end{aligned}$$

R üzerinde grup halkalarına $\rho_G: R(G\times H)\to RH$ şeklinde taşınırsa söz konusu halka epimorfizmasının çekirdeği

$$\kappa_G\coloneqq Ker\,\rho_G=\langle 1-g,1-g^2\rangle_{RH}$$

olur. Böylece,

$$\kappa_G\xrightarrow{i}R(G\times H)\xrightarrow{\rho_G}RH$$

kısa tam dizisi ifade edilebilir. ρ_G halka epimorfizması birimsel elemanlar grubuna kısıtlandığında

$$\rho_G: V(R(G \times H)) \to V(RH)$$

ve gruplar düzeyinde aşağıdaki kısa tam dizi yazılabilir.

$$K_G \xrightarrow{i} V\big(R(G \times H)\big) \xrightarrow{\rho_G} V(RH).$$

Burada $V(R(G \times H))$, normallenen birimsel elemanlar grubu ve $\varepsilon(\kappa_G) = 0$ olduğu için,

$$K_G := (1 + \kappa_G) \cap V(R(G \times H))$$

şeklinde olur. Dolayısıyla, $\rho_G: V(R(G \times H)) \to V(RH)$ grup epimorfizmasında

$$V(RH) \hookrightarrow V(R(G \times H))$$

gömmesi söz konusu olduğundan, söz konusu kısa tam dizi açılım genişlemesine sahiptir. Yani,

$$V\big(R(G \times H)\big) = K_G \times V(RH)$$

eşitliği geçerlidir. Burada, $|H| = 2$ olduğundan Danchev' in (2010a) çalışmasıyla $V(RH) = id(RH)$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$2r - 1 \in U(R) \Leftrightarrow r \in id(R)$$

olduğu bilinmektedir.

Şimdi, K_G içinde aşikar olmayan birimsel elemanın mevcut olmaması için gerek ve yeter şartları araştıralım. Bu durumda,

$$K_G = (1 + \kappa_G) \cap V(R(G \times H))$$

olduğundan

$$K_G = \{u = 1 + r(1 - g) + f(1 - g^2) : r, f \in RH, u \in V(R(G \times H))\}$$

içerisinde,

$u = 1 + r(1 - g) + f(1 - g^2)$ için $\exists v = 1 + r'(1 - g) + f'(1 - g^2)$ alındığında

$$uv = 1 + [r + r' + 2rr' + rf' + fr' - r'f'](1 - g)$$

$$+[r' + f' - rr' + rf' + r'f + 2r'f'](1 - g^2) = 1$$

eşitliğinden

$$\begin{gathered} r + r' + 2rr' + rf' + fr' - r'f' = 0 \\ r' + f' - rr' + rf' + r'f + 2r'f' = 0 \end{gathered}$$

sistemi ile

$$\begin{pmatrix} 1 + 2r + r' & r - r' \\ -r + r' & 1 + r + 2r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \\ -f \end{pmatrix}$$

sisteminin determinantı, $r, f \in R$ için, $1 + 3(r^2 + f^2 + rf + r + f)$ olur ki $u \in U(RH)$ elemanının aşikar birimsel olması istendiğinden,

$$1 + 3(r^2 + f^2 + rf + r + f) \in U(RH) \Leftrightarrow (r, f) \in \{(0,0), (0, -1), (-1,0)\}$$

elde edilir. Böylece, verilen şartlarla

$$V\big(R(G \times H)\big) = K_G \times V(RH) = G \times id(RH)$$

eşitliklerine ulaşılır. İspatın diğer yönü benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.2.21.'e benzer şekilde; aşağıdaki teoremde de, ele alınan G ve H grupları ve R halkası üzerine verilen aynı şartlarla $V\big(R(G \times H)\big) = id(RG) \times H$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır.

Teorem 4.2.22. G ve H yukarıdaki teoremde verilen gruplar ve R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, $V\big(R(G \times H)\big) = id(RG) \times H$ olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin her ikisinin de sağlanmasıdır;

i) $1 + 2r \in U(RG) \Leftrightarrow r = 0$ veya $r = -1$;

ii) $1 + 3(r^2 + f^2 + rf - r - f) \in U(R) \Leftrightarrow r, f \in id_0(R)$.

İspat. $G = \langle g \colon g^3 = 1 \rangle$ ve $H = \langle h \colon h^2 = 1 \rangle$ olmak üzere, bir önceki teoremde oluşturulan grup epimorfizmasına benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \rho_H \colon G \times H &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \end{aligned}$$

epimorfizması tanımlanabilir ve grup halkalarına $\rho_H: R(G \times H) \to RG$ şeklinde taşınabilir. Dolayısıyla bu halka epimorfizmasının da çekirdeği,

$$\kappa_H \coloneqq Ker\,\rho_H = \langle 1-h \rangle_{RG}$$

olup, aşağıdaki kısa tam dizi oluşturulabilir.

$$\kappa_H \xrightarrow{i} R(G \times H) \xrightarrow{\rho_H} RG$$

ρ_H birimsel elemanlar grubuna kısıtlandığında

$$\rho_H: V(R(G \times H)) \to V(RG)$$

elde edilerek aşağıdaki kısa tam dizi yazılabilir.

$$K_H \xrightarrow{i} V(R(G \times H)) \xrightarrow{\rho_H} V(RG)$$

Yukarıdaki teoremdekine benzer şekilde $\varepsilon(\kappa_H) = 0$ olduğu için,

$$K_H := (1 + \kappa_H) \cap V(R(G \times H))$$

geçerlidir. Ayrıca, $\rho_H: V(R(G \times H)) \to V(RG)$ grup epimorfizmasında

$$V(RG) \hookrightarrow V(R(G \times H))$$

olduğundan, bu kısa tam dizinin açılım genişlemesi mevcuttur. Yani,

$$V\big(R(G \times H)\big) = K_H \times V(RG)$$

dir. Burada, $|G| = 3$ olduğunda $V(RG) = id(RG)$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$1 + 3(r^2 + f^2 + rf - r - f) \in U(R) \Leftrightarrow r, f \in id_0(R)$$

olduğunu biliyoruz (Danchev, 2009a; 2010a; 2010b).

Şimdi, K_H içinde sadece aşikar birimsel elemanların mevcut olması için gerek ve yeter şartları araştıralım.

$$K_H = (1 + \kappa_H) \cap V(R(G \times H)) = \{u = 1 + r(1-h) : r \in RG\}$$

olup K_H içinde aşikar olmayan bir $u = 1 + r(1-h)$ birimsel elemanı ve onun tersi $u^{-1} = 1 + r'(1-h)$ olarak alındığında,

$$uu^{-1} = 1 \Leftrightarrow 1 + 2r \in U(RG)$$

sonucu elde edilir. Böylece, K_H içinde aşikar olmayan birimsel elemanın mevcut olmaması için gerek ve yeter şart, $1 + 2r \in U(RG) \Leftrightarrow r = 0$ veya $r = -1$ olmasıdır ki elde edilen şartlarla,

$$V\big(R(G \times H)\big) = V(RG) \times K_H = id(RG) \times H$$

eşitliklerine ulaşılır. İspatın diğer yönü de benzer şekilde gösterilebilir. ■

Genel olarak, $\rho_G: G \times H \to H$ ve $\rho_H: G \times H \to G$ epimorfizmalarının grup halkalarına genişletilmesi ile elde edilen $\rho_G: R(G \times H) \to RH$ ve $\rho_H: R(G \times H) \to RG$ halka epimorfizmalarının çekirdekleri ve görüntüleriyle aşağıdaki kısa tam diziler oluşturulabilir.

$$\begin{array}{ccccc}
\kappa_G \cap \kappa_H & \overset{i}{\to} & \kappa_G = \Delta_{RH}(G) & \overset{\rho_H}{\to} & \Delta_R(G) \\
\downarrow_i & & \downarrow_i & & \downarrow_i \\
\kappa_H = \Delta_{RG}(H) & \overset{i}{\to} & R(G \times H) & \overset{\rho_H}{\to} & RG \\
\downarrow_{\rho_G} & & \downarrow_{\rho_G} & & \downarrow_{\rho_G} \\
\Delta_R(H) & \overset{i}{\to} & RH & \overset{\rho_H}{\to} & R
\end{array}$$

Normallenen birimsel elemanların gruplarına kısıtlandığında bu tam diziler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{array}{ccccc}
V(1 + (\kappa_G \cap \kappa_H)) & \overset{i}{\to} & V(1 + \kappa_G) & \overset{\rho_H}{\to} & V(1 + \Delta_R(G)) \\
\downarrow_i & & \downarrow_i & & \downarrow_i \\
V(1 + \kappa_H) & \overset{i}{\to} & V(R(G \times H)) & \overset{\rho_H}{\to} & V(RG) \\
\downarrow_{\rho_G} & & \downarrow_{\rho_G} & & \downarrow_{\rho_G} \\
V(1 + \Delta_R(H)) & \overset{i}{\to} & V(RH) & \overset{\rho_H}{\to} & U(R)
\end{array}$$

Burada, $R \hookrightarrow RH$ olduğu için $\Delta_R(G) \hookrightarrow \kappa_G$ ve dolayısıyla $V(1 + \Delta_R(G)) \hookrightarrow V(1 + \kappa_G)$ gömmesi söz konusudur. Benzer biçimde, $R \hookrightarrow RG$ olduğundan $\Delta_R(H) \hookrightarrow \kappa_H$ olup $V(1 + \Delta_R(H)) \hookrightarrow V(1 + \kappa_H)$ yazılabilir. ρ_G ve ρ_H birer epimorfizma ve ters yönleri olarak gömme fonksiyonları alınabileceğinden dolayı bu tam dizilerin ayrışım genişlemelerinin mevcut olduğu söylenebilir ki bu genişlemeler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$i)\ V\big(R(G \times H)\big) = V(1+\kappa_H) \times V(RG);$

$ii)\ V\big(R(G \times H)\big) = V(1+\kappa_G) \times V(RH);$

$iii)\ V(1+\kappa_G) = V(1+(\kappa_G \cap \kappa_H)) \times V(1+\Delta_R(G));$

$iv)\ V(1+\kappa_H) = V(1+(\kappa_G \cap \kappa_H)) \times V(1+\Delta_R(H));$

$v)\ V\big(R(G \times H)\big) = V(1+\Delta_R(H)) \times V(1+\Delta_R(G)) \times V(1+(\kappa_G \cap \kappa_H)) \times U(R);$

$i - v$ eşitlikleri ile anlaşılabileceği üzere, $V\big(R(G \times H)\big)$ normallenen birimsel elemanlar grubunun açık karakterizasyonu ancak ve ancak eşitliklerin sağ tarafındaki direkt çarpanların karakterizasyonuna bağlıdır. Ele alınan bir G Abel grubunun mertebesi asal ve $|G| = q \geq 5$ olmak üzere, $1 \neq x \in G$ için,

$$u = (1+x)^{q-1} - \frac{2^{q-1}-1}{q}(1+x+\cdots+x^{q-1})$$

aşikar olmayan bir normallenmiş Bass devirli birimsel elemandır ve $(1+x)^{q-1}$ ifadesindeki Newton binom formülündeki katsayılarla $\frac{2^{q-1}-1}{q}(1+x+\cdots+x^{q-1})$ terimindeki her bir x^i elemanının katsayıları gözönüne alındığında hiçbir katsayı R ye ait bir idempotent eleman olmadığından $u \notin id(RG)$ olduğu açıktır (Danchev, 2010a).

4.3. $\boldsymbol{U}(\mathbb{Z}(\boldsymbol{S_3} \times \boldsymbol{C_3}))$ Birimsel Grubunun Karakterizasyonu

Bu bölümde, $S_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, 6 mertebeli simetrik grup ve $C_3 = \langle x : x^3 = 1 \rangle$, 3 mertebeli bir devirli grup olmak üzere, S_3 ve C_3 gruplarının iç direkt çarpımları olan

$$S_3^* \coloneqq S_3 \times C_3 = \langle a, b, x : a^3 = b^2 = x^3 = 1, bab^{-1} = a^{-1}, ax = xa, bx = xb \rangle$$

grubunun $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının birimsel grubunun burulmalı olmayan alt grupları cinsinden bir karakterizasyonu verilecektir. Bu karakterizasyonda, S_3 simetri grubunun 2. dereceden bir temsili $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının bazı ideallerine lineer bir şekilde genişletilerek, $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının birimselleri matris temsillerinin birimsel elemanları üzerinden karakterize edilecektir. Öncelikle, $\mathbb{Z}S_3$ integral grup halkasının birimsel grubu üzerine aşağıdaki hatırlatmayı verelim.

Teorem 4.3.1. $U_1(\mathbb{Z}S_3)$' de, S_3 iki-devirli birimsellerden üretilen 3 ranklı serbest grup olan bir

$$V = \langle u_{b,a}, u_{ba,a}, u_{ba^2,a} \rangle$$

burulmalı olmayan normal tümleyenine sahiptir. Yani, $U_1(\mathbb{Z}S_3) = V \rtimes S_3$ öyle ki

$$u_{b,a} = 1 + (1-b)b(1+b)$$

$$u_{ba,a} = 1 + (1-ba)b(1+ba)$$

$$u_{ba^2,a} = 1 + (1-ba^2)b(1+ba^2)$$

iki-devirli birimsellerdir (Jespers ve Parmenter, 1992).

Şimdi, S_3 simetrik grubunun $\mathbb{Z}_3$ üzerinde grup halkasının birimsel grubuna yönelik aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 4.3.2. $S_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ olmak üzere,

$$U_1(\mathbb{Z}_3 S_3) \simeq (3_+^{1+2} \times C_3) \rtimes C_2$$

Burada 3_+^{1+2}, 27 mertebeli bir ekstra-özel 3-gruptur (Craven, 2008).

İspat. $N = \langle a \rangle$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Phi: S_3 &\longrightarrow (S_3/N) \\ g &\mapsto gN \end{aligned}$$

doğal izdüşümü tanımlansın. Bu doğal izdüşüm, $\mathbb{Z}_3$ üzerinde grup halkasına genişletildiğinde,

$$\overline{\Phi}\left(\sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i b a^i\right) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)N + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)bN$$

ile tanımlı $\overline{\Phi}: \mathbb{Z}_3 S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3\ (S_3/N)$ dönüşümü elde edilir. Birimsel grubuna kısıtlandığında

$$\widetilde{\Phi}: U_1(\mathbb{Z}_3 S_3) \longrightarrow U_1(\mathbb{Z}_3 C_2)$$

olup, bir $u = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i b a^i \in U_1(\mathbb{Z}_3 S_3)$ ise $U(\mathbb{Z}_3 C_2) = (\mathbb{Z}_3 \backslash \{0\}) C_2$ yani aşikar olduğundan dolayı $U_1(\mathbb{Z}_3 C_2) = C_2$

$$\widetilde{\Phi}(u) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)N + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)bN \in \langle bN \rangle$$

birimsel formuna ulaşılır ki buradan,

$$i)\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \ \wedge \ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0,$$
$$ii)\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \ \wedge \ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$$

parametrik denklem çiftleri elde edilir. Ayrıca,

$$Ker\ \widetilde{\Phi} = \{\sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i ba^i : \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ ,\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0; \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_3\}$$

$$= \{(1 - \alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + (-\beta_1 - \beta_2)b + \beta_1 ba + \beta_2 ba^2 : \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_3\}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada dikkat edilirse, $Ker\ \widetilde{\Phi}$ sonlu olup $\left|Ker\ \widetilde{\Phi}\right| = 81$ dir. $\langle a \rangle \subseteq Ker\ \widetilde{\Phi}$ olduğundan $Ker\ \widetilde{\Phi} = G' \times \langle a \rangle$ olacak şekildeki G' altgrubu belirlenmelidir.

$$\langle -1 + a + a^2 \rangle \subseteq G'$$

olduğunu görmek zor değildir. Üstelik, $G' = \langle -1 + a + a^2 \rangle \times \langle 1 - b\hat{a} \rangle \times H$ olup $\langle -1 + a + a^2 \rangle \simeq C_3$ ve G' içinde merkezidir. $|G'| = 27$ ve $\langle 1 - b\hat{a} \rangle \simeq C_3$ olduğundan $H \simeq C_3$ elde edilir. Dolayısıyla, $G'/\langle -1 + a + a^2 \rangle$ bir elementer Abel 3-gruptur. Böylece, G' altgrubu üssü 3 olan bir ekstra-özel gruptur ve 3_+^{1+2} ile gösterilir. Böylece,

$$Ker\ \widetilde{\Phi} \simeq 3_+^{1+2} \times C_3$$

yazılabilir.

Öte yandan, $Im\ \widetilde{\Phi} = U_1(\mathbb{Z}_3 C_2) = C_2$ olduğu açıktır. Burada, $C_2 = \{N, bN\} = \langle bN \rangle$ ve $\tau(bN) = b$ için $\widetilde{\Phi} \circ \tau = 1_{C_2}$ olur. Bu durumda,

$$Ker\ \widetilde{\Phi} \xrightarrow{i} U_1(\mathbb{Z}_3 S_3) \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} Im\ \widetilde{\Phi} = U_1(\mathbb{Z}_3 C_2) = C_2$$

bir tam dizidir ve ayrışım genişlemesine sahiptir. Buradan,

$$U_1(\mathbb{Z}_3 S_3) \simeq Ker\ \widetilde{\Phi} \rtimes Im\ \widetilde{\Phi}$$

eşitliğine ulaşılır. ■

$S_3^* = S_3 \times C_3$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının değişik formları aşağıdaki gibidir.

$i)$ $\mathbb{Z}S_3^* = (\mathbb{Z}S_3)C_3 = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 : c_i \in \mathbb{Z}S_3\}$;

$ii)$ $\mathbb{Z}S_3^* = (\mathbb{Z}C_3)S_3 = \{c_0' + c_1' a + c_2' a^2 + c_3' b + c_4' ba + c_5' ba^2 : c_i' \in \mathbb{Z}C_3\}$;

$iii)$ $\mathbb{Z}S_3^* = \mathbb{Z}[(C_3 \rtimes C_2) \times C_3] \simeq \mathbb{Z}[(C_3 \times C_3) \rtimes C_2] \simeq \{c_1'' + c_2'' b : c_i'' \in \mathbb{Z}(C_3 \times C_3)\}$.

Şimdi, bir $\pi_g : \mathbb{Z}S_3^* \longrightarrow \mathbb{Z}S_3^*$ doğal izdüşümü;

$$\pi_g(\alpha) = \alpha\ (mod\ g)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının yukarıda verilen i formu ile

$$\pi_x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + c_1 + c_2$$

şeklinde oluşturulan izdüşüm için

$$Ker\ \pi_x = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 : \pi_x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = 0, c_i \in \mathbb{Z}S_3\}$$

$$= \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 : c_0 + c_1 + c_2 = 0, c_i \in \mathbb{Z}S_3\}$$

$$= \{c_0 + c_1x + c_2x^2 : c_0 = -c_1 - c_2, c_i \in \mathbb{Z}S_3\}$$
$$= \{(-c_1 - c_2) + c_1x + c_2x^2 : c_i \in \mathbb{Z}S_3\}$$
$$= \{-c_1(1 - x) - c_2(1 - x^2) : c_i \in \mathbb{Z}S_3\}$$
$$= \mathbb{Z}S_3(1 - x) + \mathbb{Z}S_3(1 - x^2)$$

olur. Burada, $P \in \mathbb{Z}S_3(1 - x) \cap \mathbb{Z}S_3(1 - x^2)$ için, $P = P_0(1 - x) = P_1(1 - x^2)$ eşitliğinde,

$$P_0 - P_0x = P_1 - P_1x^2 \Leftrightarrow (P_0 - P_1) - P_0x + P_1x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow P_0 - P_1 = P_0 = P_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow P = 0$$

yani $\mathbb{Z}S_3(1 - x) \cap \mathbb{Z}S_3(1 - x^2) = \{0\}$ olur. Böylece,

$$Ker\ \pi_x = \mathbb{Z}S_3(1 - x) \oplus \mathbb{Z}S_3(1 - x^2)$$

olur. Benzer şekilde, $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının ii formundan faydalanarak

$$\pi_a : \mathbb{Z}S_3^* = (\mathbb{Z}C_3)S_3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Z}\langle b, x\rangle \simeq \mathbb{Z}(C_2 \times C_3)$$
$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i b a^i \quad \mapsto \quad \sum_{i=0}^{2} \alpha_i + \beta_i b$$

izdüşümü tanımlanabilir ki burada $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle x\rangle \simeq \mathbb{Z}C_3$ tür. Bu durumda,

$$Ker\ \pi_a = \{\lambda = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i b a^i : \pi_a(\lambda) = 0\}$$
$$= \{\lambda = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i b a^i : \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 0, \sum_{i=0}^{2} \beta_i = 0\}$$
$$= \{\lambda = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i a^i + \beta_i b a^i : \alpha_0 = -\alpha_1 - \alpha_2, \beta_0 = -\beta_1 - \beta_2\}$$
$$= \{(-\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + (-\beta_1 - \beta_2)b + \beta_1 ba + \beta_2 ba^2 : \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle x\rangle\}$$
$$= \{(-\alpha_1 - \beta_1 b)(1 - a) + (-\alpha_2 - \beta_2 b)(1 - a^2) : \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle x\rangle\}$$
$$= \mathbb{Z}\langle b, x\rangle(1 - a) + \mathbb{Z}\langle b, x\rangle(1 - a^2)$$

toplamı elde edilir.

$$P \in \mathbb{Z}\langle b, x\rangle(1 - a) \cap \mathbb{Z}\langle b, x\rangle(1 - a^2)$$

olsun. Bu durumda, $P = P_0(1 - a) = P_1(1 - a^2)$ olması için gerek ve yeter şart $P_0 = P_1 = 0$ olduğundan $P = 0$ olur. Yani, $\mathbb{Z}\langle b, x\rangle(1 - a) \cap \mathbb{Z}\langle b, x\rangle(1 - a^2) = \{0\}$ olup

$$Ker\ \pi_a = \mathbb{Z}\langle b,x\rangle(1-a) \oplus \mathbb{Z}\langle b,x\rangle(1-a^2)$$
$$\simeq \mathbb{Z}C_6(1-a) \oplus \mathbb{Z}C_6(1-a^2)$$

elde edilir. Eğer π_x, $Ker\ \pi_a$ çekirdeğine kısıtlanırsa, bir

$$\gamma = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)(1-a) + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)(1-a^2)$$

elemanının bu kısıtlanış altındaki görüntüsü

$$\pi_x\,|_{Ker\ \pi_a}(\gamma) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\,(1-a) + \sum_{i=0}^{2} \beta_i\,(1-a^2)$$

olur öyle ki burada $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle b\rangle$ dir. Bu kısıtlanışın çekirdeği ise $Ker\ \pi_x\,|_{Ker\ \pi_a}$

$$= \{\tau = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, x^i(1-a) + \sum_{i=0}^{2} \beta_i\, x^i(1-a^2):\ \pi_x\,|_{Ker\ \pi_a}(\tau) = 0, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle b\rangle\}$$

$$= \{\sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, x^i(1-a) + \sum_{i=0}^{2} \beta_i\, x^i(1-a^2):\ \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\,(1-a) + \sum_{i=0}^{2} \beta_i\,(1-a^2) = 0\}$$

$$= \{\sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, x^i(1-a) + \sum_{i=0}^{2} \beta_i\, x^i(1-a^2):\ \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = \sum_{i=0}^{2} \beta_i = 0,:\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle b\rangle\}$$

$$= \{[(-\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2](1-a) + [(-\beta_1 - \beta_2) + \beta_1 x + \beta_2 x^2](1-a^2)\}$$

$$= \{-\alpha_1(1-x)(1-a) - \alpha_2(1-x^2)(1-a) - \beta_1(1-x)(1-a^2)$$
$$-\beta_2(1-x^2)(1-a^2): \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}\langle b\rangle\}$$

dir. Yani, $\alpha_{ij} := (1-x^i)(1-a^j)$ için

$$Ker\ \pi_x\,|_{Ker\ \pi_a} = \prod_j \prod_i \mathbb{Z}\langle b\rangle\, \alpha_{ij}$$

elde edilir. Toplamın direkt olduğu, önceki işlemlere benzer şekilde gösterilebilir. Böylece, π_x ve π_a izdüşümlerinin, sırasıyla $Ker\ \pi_a$ ve $Ker\ \pi_x$ çekirdeklerine kısıtlanışlarına dair önerme aşağıdaki gibidir.

Önerme 4.3.3. Yukarıda tanımlanan π_a ve π_x izdüşümleri ve onların kısıtlanışlarıyla $Ker\ \pi_a\,|_{Ker\ \pi_x} = Ker\ \pi_x\,|_{Ker\ \pi_a}$ dır.

İspat. Söz konusu izdüşümlerle,

$$Ker\ \pi_a\,|_{Ker\ \pi_x} = \{w \in Ker\ \pi_x : \pi_a(w) = 0\}$$
$$= \{w \in \mathbb{Z}S_3^* : \pi_x(w) = 0, \pi_a(w) = 0\}$$
$$= Ker\ \pi_x \cap Ker\ \pi_a$$

olur. ■

Böylece, $Ker\ \pi_a\ |_{Ker\ \pi_x}$, bir $\mathbb{Z}C_2$-cebir veya bir $\mathbb{Z}$-cebir olarak sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$J_4 \coloneqq Ker\ \pi_a\ |_{Ker\ \pi_x} = Ker\ \pi_x\ |_{Ker\ \pi_a} = \langle \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} \rangle_{\mathbb{Z}C_2}$$
$$= \langle \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, b\alpha_{11}, b\alpha_{12}, b\alpha_{21}, b\alpha_{22} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Bu cebir üzerinde toplama ve skalerle çarpmanın tanımı kolayca görülür. Çarpma işlemi için de aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\alpha_{11}{}^2 = 4\alpha_{11} - 2\alpha_{12} - 2\alpha_{21} + \alpha_{22}$$
$$\alpha_{12}{}^2 = -2\alpha_{11} + 4\alpha_{12} + \alpha_{21} - 2\alpha_{22}$$
$$\alpha_{21}{}^2 = -2\alpha_{11} + \alpha_{12} + 4\alpha_{21} - 2\alpha_{22}$$
$$\alpha_{22}{}^2 = \alpha_{11} - 2\alpha_{12} - 2\alpha_{21} + 4\alpha_{22}$$
$$\alpha_{11}\alpha_{12} = \alpha_{12}\alpha_{11} = 2\alpha_{11} + 2\alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{22}$$
$$\alpha_{11}\alpha_{21} = \alpha_{21}\alpha_{11} = 2\alpha_{11} - \alpha_{12} + 2\alpha_{21} - \alpha_{22}$$
$$\alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{22}\alpha_{11} = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{22}$$
$$\alpha_{12}\alpha_{21} = \alpha_{21}\alpha_{12} = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{22}$$
$$\alpha_{12}\alpha_{22} = \alpha_{22}\alpha_{12} = -\alpha_{11} + 2\alpha_{12} - \alpha_{21} + 2\alpha_{22}$$
$$\alpha_{21}\alpha_{22} = \alpha_{22}\alpha_{21} = -\alpha_{11} - \alpha_{12} + 2\alpha_{21} + 2\alpha_{22}$$

Ayrıca,

$$b\alpha_{11} = \alpha_{12}b,\ b\alpha_{12} = \alpha_{11}b,\ b\alpha_{22} = \alpha_{21}b,\ b\alpha_{21} = \alpha_{22}b$$

eşitlikleriyle J_4 ün değişmeli yapıda olmadığı görülür.

Önerme 4.3.4. J_4 cebirinin merkezi,

$$\mathcal{Z}(J_4) = \langle (1-x)(a^2+a-2), (1-x^2)(a^2+a-2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

biçiminde bir altcebirdir.

İspat. $\gamma \in J_4$ için, $x\gamma = \gamma x$ olduğu açıktır. Şimdi, $b\gamma = \gamma b$ olacak şekilde $\gamma \in J_4$ elemanının formunu araştıralım. $\gamma \in J_4$ ise, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} b\gamma b &= b(\alpha_0 + \beta_0 b)(1-x)(1-a)b + b(\alpha_1 + \beta_1 b)(1-x^2)(1-a)b \\ &\quad + b(\alpha_2 + \beta_2 b)(1-x)(1-a^2)b + b(\alpha_3 + \beta_3 b)(1-x^2)(1-a^2)b \\ &= (\alpha_0 + \beta_0 b)(1-x)(1-a^2) + (\alpha_1 + \beta_1 b)(1-x^2)(1-a^2) \\ &\quad + (\alpha_2 + \beta_2 b)(1-x)(1-a) + (\alpha_3 + \beta_3 b)(1-x^2)(1-a) \\ &= \gamma \end{aligned}$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\alpha_0 + \beta_0 b = \alpha_2 + \beta_2 b \text{ ve } \alpha_1 + \beta_1 b = \alpha_3 + \beta_3 b$$

yani,

$$\alpha_0 = \alpha_2, \alpha_1 = \alpha_3, \beta_0 = \beta_2, \beta_1 = \beta_3$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Böylece,

$$\gamma = (\alpha_0 + \beta_0 b)(1 - x)(a^2 + a - 2) + (\alpha_1 + \beta_1 b)(1 - x^2)(a^2 + a - 2)$$

formundadır. Öte yandan, $(1 - a)\gamma = \gamma(1 - a)$ olabilmesi için gerek ve yeter şartları inceleyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(1 - a)\gamma &= (1 - a)(\alpha_0 + \beta_0 b)(1 - x)(a^2 + a - 2)\\ &+(1 - a)(\alpha_1 + \beta_1 b)(1 - x^2)(a^2 + a - 2)\\ &= (\alpha_0 + \beta_0 b - \alpha_0 a - \beta_0 ab)(1 - x)(a^2 + a - 2)\\ &+(\alpha_1 + \beta_1 b - \alpha_1 a - \beta_1 ab)(1 - x^2)(a^2 + a - 2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma(1 - a) &= (\alpha_0 + \beta_0 b)(1 - x)(a^2 + a - 2)(1 - a)\\ &+(\alpha_1 + \beta_1 b)(1 - x^2)(a^2 + a - 2)(1 - a)\\ &= (\alpha_0 + \beta_0 b - \alpha_0 a - \beta_0 ba)(1 - x)(a^2 + a - 2)\\ &+(\alpha_1 + \beta_1 b - \alpha_1 a - \beta_1 ba)(1 - x^2)(a^2 + a - 2)\end{aligned}$$

eşitlikleriyle $(1 - a)\gamma = \gamma(1 - a)$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\beta_0 = \beta_1 = 0$ olacağı açıktır. Böylece, J_4 cebirinde merkezi bir eleman

$$\gamma = \alpha_0(1 - x)(a^2 + a - 2) + \alpha_1(1 - x^2)(a^2 + a - 2)$$

formunda olur. ■

Önerme 4.3.5. $U_1(1 + \mathcal{Z}(J_4))$ içinde aşikar olmayan birimsel eleman yoktur.

İspat. Yukarıdaki önermeyle

$$\mathcal{Z}(J_4) = \langle (1 - x)(a^2 + a - 2), (1 - x^2)(a^2 + a - 2)\rangle$$

olduğu ispatlanmış olup $z_x \coloneqq (1 - x)(a^2 + a - 2)$ ve $z_{x^2} \coloneqq (1 - x^2)(a^2 + a - 2)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}{z_x}^2 &= -6z_x + 3z_{x^2},\\ z_x z_{x^2} = z_{x^2} z_x &= -3z_x - 3z_{x^2},\\ {z_{x^2}}^2 &= 3z_x - 6z_{x^2}\end{aligned}$$

işlemleriyle, $1 + \gamma = 1 + Pz_x + Qz_{x^2} \in U_1(1 + \mathcal{Z}(J_4))$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, öyle bir $1 + \delta = 1 + Rz_x + Sz_{x^2} \in U_1(1 + \mathcal{Z}(J_4))$ vardır ki $(1 + \gamma)(1 + \delta) = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}(1 + \gamma)(1 + \delta) &= (1 + Pz_x + Qz_{x^2})(1 + Rz_x + Sz_{x^2})\\ &= 1 + z_x[P + R - 6PR - 3QR - 3PS + 3QS]\\ &\quad +z_{x^2}[Q + S + 3PR - 3QR - 3PS - 6QS] = 1\end{aligned}$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$P + R - 6PR - 3QR - 3PS + 3QS = 0$$

$$Q + S + 3PR - 3QR - 3PS - 6QS = 0$$

olup

$$\begin{bmatrix} 1 - 6P - 3Q & -3P + 3Q \\ 3P - 3Q & 1 - 3P - 6Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ -Q \end{bmatrix}$$

sisteminin tek bir tamsayı çözümü mevcuttur. Bu ise,

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 6P - 3Q & -3P + 3Q \\ 3P - 3Q & 1 - 3P - 6Q \end{bmatrix}$$

matrisi için $\det(A) = 1$ olması ile mümkündür. Burada,

$$\det(A) = 1 + 27P^2 + 27Q^2 + 27PQ - 9P - 9Q$$

olup

$$\det(A) = 1 \Leftrightarrow 3P^2 + 3Q^2 + 3PQ - P - Q = 0$$

çift gerektirmesinden $3P^2 + 3Q^2 + 3PQ - P - Q = 0$ denkleminin tek tamsayı çözümü $P = Q = 0$ olur ki böylece $U_1\big(1 + \mathcal{Z}(J_4)\big) = \{1\}$ elde edilir. ■

Teorem 4.3.6. $\widetilde{J_4} = \langle (1 - b)(\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}) \rangle$ alt cebirini ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} U_1\big(1 + \widetilde{J_4}\big) &= \big(1 + \widetilde{J_4}\big) \cap U_1(\mathbb{Z}S_3^*) \\ &\supseteq \{u \in U_1(\mathbb{Z}S_3^*) : u^k = 1 + k\gamma, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \gamma \in \widetilde{J_4}\} \end{aligned}$$

kapsaması sağlanır.

İspat. ω, birimin 3. dereceden primitif kökü ve S_3^* grubunun bir temsili

$$\begin{array}{rccc} \rho: & S_3^* & \longrightarrow & GL(2, \langle \omega \rangle) \\ & a & \longmapsto & \rho(a) \\ & b & \longmapsto & \rho(b) \\ & x & \longmapsto & \rho(x) \end{array}$$

öyle ki

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, \rho(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \rho(x) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix} = \omega^2 I_2$$

olsun. Bu durumda, ρ temsili $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasına lineer bir şekilde genişletilirse, $A_i \in \mathbb{Z}S_3$ olmak üzere, $\bar{\rho}: \mathbb{Z}S_3^* \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}\langle \omega \rangle)$,

$$\bar{\rho}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = \rho(A_0) I_2 + \rho(A_1) \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix} + \rho(A_2) \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$$

temsili elde edilir.

$$J_4 = \langle \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, b\alpha_{11}, b\alpha_{12}, b\alpha_{21}, b\alpha_{22} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

olduğu hatırlanarak, J_4 ün açık formu olan

$$\{c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{12}+c_3\alpha_{21}+c_4\alpha_{22}+d_1b\alpha_{11}+d_2b\alpha_{12}+d_3b\alpha_{21}+d_4b\alpha_{22}: c_i,d_i\in\mathbb{Z}\}$$

kümesi ve $\bar{\rho}$ altındaki görüntüsü olan

$$\{3\begin{bmatrix}-c_3\omega^2-c_2\omega+c_1+c_4 & -d_1\omega^2-d_4\omega+d_2+d_3\\ -d_3\omega^2-d_2\omega+d_1+d_4 & -c_1\omega^2-c_4\omega+c_2+c_3\end{bmatrix}: \omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}; c_i,d_i\in\mathbb{Z}\}$$

yardımıyla, $\bar{\rho}(J_4)\subseteq\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ olması için gerek ve yeter şartın

$$c_1=c_4, c_2=c_3, d_1=d_4, d_2=d_3$$

olduğu açıktır. Bu durumda, bir $\overline{J_4}\subseteq J_4$ alt cebirini;

$$\{c_1(\alpha_{11}+\alpha_{22})+c_2(\alpha_{12}+\alpha_{21})+d_1(b\alpha_{11}+b\alpha_{22})+d_2(b\alpha_{12}+b\alpha_{21}): c_i,d_i\in\mathbb{Z}\}$$

şeklinde oluşturmak mümkündür ki $\bar{\rho}$ temsili altında görüntüsü

$$\bar{\rho}(\overline{J_4})=\{3\begin{bmatrix}-c_3\omega^2-c_2\omega+c_1+c_4 & -d_1\omega^2-d_4\omega+d_2+d_3\\ -d_3\omega^2-d_2\omega+d_1+d_4 & -c_1\omega^2-c_4\omega+c_2+c_3\end{bmatrix}:$$

$$\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}; c_1=c_4\,,\ c_2=c_3\,,\ d_1=d_4\,,\ d_2=d_3\,,\ c_i,d_i\in\mathbb{Z}\}$$

$$=\{3\begin{bmatrix}2c_1+c_2 & d_1+2d_2\\ 2d_1+d_2 & c_1+2c_2\end{bmatrix}: c_i,d_i\in\mathbb{Z}\}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, keyfi bir

$$\gamma=c_1(\alpha_{11}+\alpha_{22})+c_2(\alpha_{12}+\alpha_{21})+d_1(b\alpha_{11}+b\alpha_{22})+d_2(b\alpha_{12}+b\alpha_{21})\in\overline{J_4}$$

elemanı alınıp $u=1+\gamma\in U(1+\overline{J_4})$ kabul edildiğinde $\overline{J_4}$ üzerinde parametrik şartlar elde edilir. Bunun için,

$$\bar{\rho}(u)=I_2+\frac{3}{2}\begin{bmatrix}3(c_1+c_2)+(c_1-c_2) & 3(d_1+d_2)-(d_1-d_2)\\ 3(d_1+d_2)+(d_1-d_2) & 3(c_1+c_2)-(c_1-c_2)\end{bmatrix}$$

görüntüsü incelenmelidir. Böylece, det $\left(\bar{\rho}(u)\right)=1$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\left(1+\frac{9}{2}(c_1+c_2)+\frac{3}{2}(c_1-c_2)\right)\left(1+\frac{9}{2}(c_1+c_2)-\frac{3}{2}(c_1-c_2)\right)$$

$$-\left[\frac{81}{4}(d_1+d_2)^2-\frac{9}{4}(d_1-d_2)^2\right]=1$$

eşitliğinin sağlanmasıdır ki söz konusu denklem düzenlenirse,

$$c_1+c_2+9(c_1+c_2)^2+(d_1-d_2)^2=(c_1-c_2)^2+9(d_1+d_2)^2$$

elde edilir. Bu denklemin $c_1=-c_2=-d_1=d_2$ ile sağlandığını görmek zor değildir. Böylece, bu özel çözümle beraber,

$$\gamma\in\widetilde{J_4}:=\{\gamma\in\overline{J_4}: c_1=-c_2=-d_1=d_2\}$$

elemanı için

$$\gamma=c_1(1-b)(\alpha_{11}-\alpha_{12}-\alpha_{21}+\alpha_{22})\in\widetilde{J_4}$$

olup

$$\bar{\rho}(u) = \bar{\rho}(1+\gamma) = \begin{bmatrix} 1+3c_1 & 3c_1 \\ -3c_1 & 1-3c_1 \end{bmatrix}$$

ve tersi

$$\bar{\rho}(u)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-3c_1 & -3c_1 \\ 3c_1 & 1+3c_1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda, $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$\bar{\rho}(u)^k = \bar{\rho}(u^k) = \bar{\rho}(1+k\gamma) = \begin{bmatrix} 1+3kc_1 & 3kc_1 \\ -3kc_1 & 1-3kc_1 \end{bmatrix}$$

olur. $\bar{\rho}|_{U(1+\widetilde{J_4})}$ kısıtlanışı birebir olduğundan istenen elde edilir. Yani,

$$u^k = 1 + k\gamma \text{ }, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \gamma \in \widetilde{J_4}$$

olur. ■

Sonuç 4.3.7. $\widetilde{J_4}$ karakteristiği $kar\ R = k$ olan değişmeli ve birimli bir R halkası üzerinde tanımlanan bir cebir olmak üzere; $U_1(1+\widetilde{J_4})$, mertebesi k olan burulmalı birimsel elemanlar içerir.

Teorem 4.3.8. $J_2 = \mathbb{Z}\langle b\rangle(1-a) \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle(1-a^2)$ olmak üzere,

$$U_1(1+J_2) = (1+J_2) \cap U_1(\mathbb{Z}S_3^*)$$

içinde aşağıdaki formda bir altgrup vardır.

$$\langle 1 + (k_0 + k_1 b)(1-a) + (k_2 + k_3 b)(1-a^2) : k_i \in \mathbb{Z} \rangle$$

öyle ki ${k_0}^2 + {k_2}^2 - {k_1}^2 - {k_3}^2 + k_0 k_2 + k_0 + k_2 + k_1 k_3 = 0$.

İspat. Şimdi, $u = 1 + (k_0 + k_1 b)(1-a) + (k_2 + k_3 b)(1-a^2) \in U_1(1+J_2)$ şeklinde bir birimsel eleman alalım. $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{cccc} \rho : & S_3^* & \longrightarrow & GL(2, \langle\omega\rangle) \\ & a & \longmapsto & \rho(a) \\ & b & \longmapsto & \rho(b) \\ & x & \longmapsto & \rho(x) \end{array}$$

öyle ki

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, \rho(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \rho(x) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix} = \omega^2 I_2$$

temsilinin $\mathbb{Z}S_3^*$ üzerine lineer genişlemesi altında

$$\bar{\rho}(u) = \begin{bmatrix} 1 + k_0(1-\omega) + k_2(1-\omega^2) & k_1(1-\omega) + k_3(1-\omega^2) \\ k_1(1-\omega^2) + k_3(1-\omega) & 1 + k_0(1-\omega^2) + k_2(1-\omega) \end{bmatrix}$$

elde edilir ki,

$$\det\big(\bar{\rho}(u)\big) = 1 + 3({k_0}^2 + {k_2}^2 - {k_1}^2 - {k_3}^2 + k_0 k_2 + k_0 + k_2 + k_1 k_3) \in U(\mathbb{Z})$$

olduğundan $k_0{}^2 + k_2{}^2 - k_1{}^2 - k_3{}^2 + k_0k_2 + k_0 + k_2 + k_1k_3 = 0$ eşitliğini $\mathbb{Z}$ de sağlayan k_0, k_1, k_2 ve k_3 tamsayı değerleri aranmalıdır. ∎

Burada, aşikar olmayan tamsayı çözümlerden biri,

$$k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = -1$$

olduğundan,

$$u = 1 + (-1 - b)(1 - a) + (-1 - b)(1 - a^2)$$

formunda, burulmalı olmayan bir üreteç elde edilebileceği gözlemlenmelidir.

Teorem 4.3.9. $U_1(1 + J_2) \rtimes \langle b \rangle \simeq V \rtimes \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ öyle ki $V = \langle u_{b,a}, u_{ba,a}, u_{ba^2,a} \rangle$, S_3 grubunun burulmalı olmayan normal tümleyenidir.

İspat. $J_2 = \mathbb{Z}\langle b \rangle(1 - a) \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle(1 - a^2)$, $\pi_a : \mathbb{Z}S_3 \to \mathbb{Z}\langle b \rangle$, $\pi_a(a) = 1$ ile tanımlı homomorfizmanın çekirdeği olup,

$$U_1(1 + J_2) = (1 + J_2) \cap U_1(\mathbb{Z}S_3^*)$$

bu homomorfizmanın birimsel gruplarına kısıtlanışının çekirdeğidir. Böylece,

$$U_1(1 + J_2) \xrightarrow{i} U_1(\mathbb{Z}S_3) \xrightarrow{\pi_a} U_1(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$$

yazılabilir. $U_1(\mathbb{Z}\langle b \rangle) \hookrightarrow U_1(\mathbb{Z}S_3)$ olduğundan verilen tam dizi yarı direkt çarpım olarak

$$U_1(\mathbb{Z}S_3) = U_1(1 + J_2) \rtimes U_1(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$$

biçiminde ayrışım genişlemesine sahiptir. Dolayısıyla,

$$U_1(\mathbb{Z}S_3) = V \rtimes S_3$$

ve $U_1(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle$ olduğundan,

$$U_1(1 + J_2) \rtimes \langle b \rangle \simeq V \rtimes \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$$

izomorfizması elde edilir. ∎

Teorem 4.3.10. $J_3 = \mathbb{Z}\langle b \rangle(1 - x) \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle(1 - x^2)$ olmak üzere,

$$U_1(1 + J_3) = (1 + J_3) \cap U_1(\mathbb{Z}S_3^*) = \langle x \rangle \simeq C_3$$

tür.

İspat. $\langle b, x \rangle \simeq \langle bx \rangle \simeq C_6$ olduğundan, $\pi_x : \mathbb{Z}\langle bx \rangle \to \mathbb{Z}\langle b \rangle$ öyle ki

$$\pi_x\left(\sum_{i=0}^{5} c_i (bx)^i\right) = (c_1 + c_3 + c_5) + (c_0 + c_2 + c_4)b$$

ile tanımlı halka homomorfizmasının çekirdeğinin $Ker\,\pi_x = J_3$ olmasından dolayı π_x in birimsel gruplarına kısıtlanışı olan $\pi_x : U_1(\mathbb{Z}\langle bx \rangle) \to U_1(\mathbb{Z}\langle b \rangle)$ grup homomorfizmasının çekirdeğinin $U_1(1 + J_3) = (1 + J_3) \cap U_1(\mathbb{Z}\langle bx \rangle)$ olduğu görülebilir.

$$C_2 \simeq U_1(\mathbb{Z}\langle b \rangle) \hookrightarrow U_1(\mathbb{Z}\langle bx \rangle) \simeq U_1(\mathbb{Z}C_6) \simeq C_6$$

olduğundan

$$U_1(1+J_3) \xrightarrow{i} C_6 \xrightarrow{\pi_x} C_2$$

tam dizisinin ayrışım genişlemesi mevcuttur. Yani, $C_6 \simeq U_1(1+J_3) \times C_2$ olur. Buradan,

$$U_1(1+J_3) = \langle x \rangle \simeq C_3$$

elde edilir. Bu da $U_1(1+J_3)$ yapısının aşikar birimsel elemanlardan ibaret olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.3.11. Değişmeli ve $o(a) = o(x) = 3$ olan a, x üreteçleri için yukarıda gösterildiği gibi $\alpha_{ij} = (1-x^i)(1-a^j)$ olsun. Eğer bir $u \in U_1(1+J_4)$ için

$$u = \sum_{n=0}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} k_n \alpha_{ij}$$

ve $\forall n \in \{0,1,2,3\}$ için $k_n \in \Delta_{\mathbb{Z}}(C_2)$ ise bu durumda, $U_1(1+J_4)$ birimsel grubunda

$$\langle 1 + c_0 W_1 + c_1 W_2 : c_0, c_1 \in \mathbb{Z} \rangle$$

ve $u_{W_1,W_2} = 1 + W_1 \lambda W_2$ olmak üzere,

$$\langle u_{W_1,W_2} \rangle \simeq C_\infty$$

formunda burulmalı olmayan altgruplar mevcuttur. Burada,

$W_1 = (1-b)(1-x)(a^2-a)$, $W_2 = (1-b)(1-x^2)(a^2-a)$ ve $\lambda \in J_4$ olup $\lambda W_1 \neq W_1 \lambda$ ve $\lambda W_2 \neq W_2 \lambda$ dir.

İspat.

$$\begin{array}{rccc} \rho: & S_3^* & \longrightarrow & GL(2, \langle \omega \rangle) \\ & a & \longmapsto & \rho(a) \\ & b & \longmapsto & \rho(b) \\ & x & \longmapsto & \rho(x) \end{array}$$

öyle ki

$$\rho(a) = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, \rho(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \rho(x) = \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix} = \omega^2 I_2$$

temsili J_4 idealine kısıtlandığında,

$$\rho(\alpha_{11}) = \begin{bmatrix} 2(1-\omega) - (1-\omega^2) & 0 \\ 0 & (1-\omega) + (1-\omega^2) \end{bmatrix},$$

$$\rho(\alpha_{12}) = \begin{bmatrix} (1-\omega) + (1-\omega^2) & 0 \\ 0 & 2(1-\omega) - (1-\omega^2) \end{bmatrix},$$

$$\rho(\alpha_{21}) = \begin{bmatrix} (1-\omega) + (1-\omega^2) & 0 \\ 0 & -(1-\omega) + 2(1-\omega^2) \end{bmatrix},$$

$$\rho(\alpha_{12}) = \begin{bmatrix} -(1-\omega)+2(1-\omega^2) & 0 \\ 0 & (1-\omega)+(1-\omega^2) \end{bmatrix}$$

temsilleri elde edilir. Şimdi,,

$$u = 1 + k_0\alpha_{11} + k_1\alpha_{12} + k_2\alpha_{21} + k_3\alpha_{22} \in U_1(1+J_4)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\rho(u) = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$$

öyle ki

$$u_1 = 1 + (2k_0 + k_1 + k_2 - k_3)(1-\omega) + (-k_0 + k_1 + k_2 + 2k_3)(1-\omega^2)$$
$$u_2 = 1 + (k_0 + 2k_1 - k_2 + k_3)(1-\omega) + (k_0 - k_1 + 2k_2 + k_3)(1-\omega^2)$$

olmak üzere,

$$\rho(u)^{-1} = \begin{bmatrix} {u_1}^{-1} & 0 \\ 0 & {u_2}^{-1} \end{bmatrix}$$

tersine sahiptir. Burada,

$$u_1, u_2 \in U_1(\mathbb{Z}C_2\langle\omega\rangle)$$

ve $U_1(\mathbb{Z}\langle\omega\rangle) = \langle\omega\rangle$ olduğundan artım eşlemesi altında $\varepsilon(u_1), \varepsilon(u_2) \in \langle\omega\rangle$ olur. Ancak, $\forall\varepsilon(k_i) \in \mathbb{Z}$ olduğundan, $\varepsilon(u_1)$ veya $\varepsilon(u_2)$ kompleks değerli olamaz. Böylece,

$$\varepsilon(u_1) = 1 + \frac{3}{2}\big(\varepsilon(k_0) + 2\varepsilon(k_1) + 2\varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3)\big) + \frac{3}{2}\big(-\varepsilon(k_0) + \varepsilon(k_3)\big)\sqrt{-3} = 1$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\varepsilon(k_0) = \varepsilon(k_3) \text{ ve } \varepsilon(k_0) + \varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) = 0$$

şeklindedir. Benzer şekilde,

$$\varepsilon(u_2) = 1 + \frac{3}{2}\big(2\varepsilon(k_0) - \varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + 2\varepsilon(k_3)\big) + \frac{3}{2}(-\varepsilon(k_1) + 3\varepsilon(k_2))\sqrt{-3} = 1$$

eşitliğinin geçerli olması için de gerek ve yeter şart

$$\varepsilon(k_1) = 3\varepsilon(k_2) \text{ ve } \varepsilon(k_0) - \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3) = 0$$

olup, $\forall i \in \{0,1,2,3\}$ için $\varepsilon(k_i) = 0$ yani $k_i \in \Delta_{\mathbb{Z}}(C_2)$ durumu elde edilir. Dolayısıyla,

$$u = \sum_{n=0}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} k_n\alpha_{ij} = \sum_{n=0}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} c_n(1-b)\alpha_{ij}$$

formuyla ifade edilebilir. Burada, $\forall c_n \in \mathbb{Z}$ olup,

$$v_1 = (2c_0 + c_1 + c_2 - c_3)(1-\omega) + (-c_0 + c_1 + c_2 + 2c_3)(1-\omega^2)$$

ve

$$v_2 = (c_0 + 2c_1 - c_2 + c_3)(1-\omega) + (c_0 - c_1 + 2c_2 + c_3)(1-\omega^2)$$

olmak üzere

$$\rho(u) = \begin{bmatrix} 1+v_1 & -v_2 \\ -v_1 & 1+v_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir öyle ki

$$det(\rho(u)) = 1 + (3c_0 + 3c_1)(1-\omega) + (3c_2 + 3c_3)(1-\omega^2) \in U_1(\mathbb{Z}\langle\omega\rangle) = \langle\omega\rangle$$

olması için gerek ve yeter koşul $c_0 + c_1 = 0$ ve $c_2 + c_3 = 0$ olduğundan

$$W_1 = (1-b)(1-x)(a^2-a)$$

ve

$$W_2 = (1-b)(1-x^2)(a^2-a)$$

için $u = 1 + c_0W_1 + c_1W_2$ olur. Burada, W_1 ve W_2 iki indeksli nilpotent elemanlar ve $W_1W_2 = W_2W_1 = 0$ olduğundan $u^{-1} = 1 - c_0W_1 - c_1W_2$ biçimindedir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(1 + c_0W_1 + c_1W_2)^n = 1 + nc_0W_1 + nc_1W_2$$

eşitliği geçerli olduğundan $\langle 1 + c_0W_1 + c_1W_2 : c_0, c_1 \in \mathbb{Z}\rangle$ burulmalı olmayan bir altgruptur. Benzer şekilde, $W_1W_2 = W_2W_1 = 0$ olduğundan, keyfi bir $\lambda \in J_4$ için $W_1\lambda W_2$ de yine bir nilpotent eleman olup $\lambda \in J_4$ elemanının W_1 veya W_2 ile değişmeli olması durumunda,

$$W_1\lambda W_2 = 0$$

eşitliği ile sadece $u_{W_1,W_2} = 1 + W_1\lambda W_2 = 1$ aşikar birimsel elemanı elde edilebileceğinden dolayı W_1 veya W_2 ile değişmeli olmayan $\lambda \in J_4$ elemanlarıyla

$$u_{W_1,W_2} = 1 + W_1\lambda W_2$$

formunda aşikar olmayan birimsel elemanlar oluşturulabilir öyle ki tersinin

$${u_{W_1,W_2}}^{-1} = 1 - W_1\lambda W_2$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$${u_{W_1,W_2}}^{n} = 1 + nW_1\lambda W_2$$

olacağından,

$$\langle u_{W_1,W_2}\rangle \simeq C_\infty$$

olur. ■

W_1 veya W_2 ile değişmeli olmayan her bir $\lambda_i \in J_4$ için

$$C_\infty(\lambda_i) := \langle 1 + W_1\lambda_iW_2\rangle$$

ve

$$S := \{1 + W_1\lambda_iW_2 : \lambda_i \in J_4, \lambda_iW_1 \neq W_1\lambda_i, \lambda_iW_2 \neq W_2\lambda_i, (\lambda_i \neq 0 \Rightarrow W_1\lambda_iW_2 \neq 0)\}$$

olmak üzere, tabanı S olan

$$\langle S\rangle = \prod_{\lambda_i \in J_4} C_\infty(\lambda_i)$$

sonsuz devirli grupların serbest bir Abel grubu elde edilebilir.

Önerme 4.3.12. $T = \langle W_1\lambda W_2 : \lambda \in J_4, \lambda W_1 \neq W_1\lambda, \lambda W_2 \neq W_2\lambda, (\lambda \neq 0 \Rightarrow W_1\lambda W_2 \neq 0)\rangle$ olmak üzere toplamsal olarak $J_4 \simeq T$ dir.

İspat. $f: J_4 \to T, f(\lambda) = W_1\lambda W_2$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda, $\lambda_1, \lambda_2 \in J_4$ için,

$$f(\lambda_1 + \lambda_2) = W_1(\lambda_1 + \lambda_2)W_2 = W_1\lambda_1 W_2 + W_1\lambda_2 W_2 = f(\lambda_1) + f(\lambda_2)$$

olduğundan f bir grup homomorfizmasıdır.

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_2) \Rightarrow W_1\lambda_1 W_2 = W_1\lambda_2 W_2 \Rightarrow W_1(\lambda_1 - \lambda_2)W_2 = 0$$

olduğundan T nin tanımından dolayı $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ yani $\lambda_1 = \lambda_2$ olup f birebirdir. Ayrıca, yine T nin tanımından dolayı f nin örten olduğu da açıkça görülebilir ki $J_4 \simeq T$ dir. ■

Tanım 4.3.13. $1 + J_4$ üzerinde özel bir işlem aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\circledast : (1 + J_4) \oplus (1 + J_4) \longrightarrow (1 + J_4), (1 + \alpha) \circledast (1 + \beta) = 1 + (\alpha + \beta)$$

şeklindeki ikili işlemle,

$$U_1^{\circledast}(1 + J_4) = \{u \in U_1(1 + J_4) : \exists v \in U_1(1 + J_4), u \circledast v = 1\}$$

kümesine $U_1(1 + J_4)$ deki $\circledast$-*birimsel elemanların kümesi* denir.

Önerme 4.3.14. $U_1^{\circledast}(1 + J_4) \simeq \langle S\rangle$ dur.

İspat. $g: U_1^{\circledast}(1 + J_4) \longrightarrow \langle S\rangle$ öyle ki $g(1 + \lambda) = 1 + W_1\lambda W_2$ şeklinde tanımlansın. g nin iyi tanımlı olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g\big((1 + \alpha) \circledast (1 + \beta)\big) &= g\big(1 + (\alpha + \beta)\big) \\ &= 1 + W_1(\alpha + \beta)W_2 \\ &= 1 + (W_1\alpha W_2 + W_1\beta W_2) \\ &= (1 + W_1\alpha W_2)(1 + W_1\beta W_2) \\ &= g(1 + \alpha)g(1 + \beta) \end{aligned}$$

olduğundan g bir grup homomorfizmasıdır. $1 + W_1\lambda_1 W_2 = 1 + W_1\lambda_2 W_2$ olduğu kabul edildiğinde $W_1\lambda_1 W_2 = W_1\lambda_2 W_2$ ve böylece $W_1(\lambda_1 - \lambda_2)W_2 = 0$ olup $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ yani $\lambda_1 = \lambda_2$ eşitliği elde edilir. Bu da g nin birebir olduğunu gösterir. $\langle S\rangle$ nin tanımı, g nin örtenliğini doğrudan vereceğinden g bir izomorfizmadır. Böylece $U_1(1 + J_4)$ birimsel grubu ile $U_1^{\circledast}(1 + J_4)$ arasında tanımlanacak birim dönüşümle $\mathbb{Z}$-modüller bakımından

$$U_1(1 + J_4) \simeq U_1^{\circledast}(1 + J_4) \simeq \langle S\rangle$$

yazılır.

Böylece, halka düzeyinde aşağıdaki tam dizilerin değişmeli diyagramı yazılabilir.

$$\begin{array}{ccccc}
J_4 & \overset{i}{\rightarrow} & \mathbb{Z}\langle b,x\rangle(a-1)\oplus\mathbb{Z}\langle b,x\rangle(a^2-1) & \overset{\pi_x}{\rightarrow} & J_2 \\
\downarrow_i & & \downarrow_i & & \downarrow_i \\
\mathbb{Z}S_3(x-1)\oplus\mathbb{Z}S_3(x^2-1) & \overset{i}{\rightarrow} & \mathbb{Z}{S_3}^* & \overset{\pi_x}{\rightarrow} & \mathbb{Z}S_3 \\
\downarrow_{\pi_a} & & \downarrow_{\pi_a} & & \downarrow_{\pi_a} \\
J_3 & \overset{i}{\rightarrow} & \mathbb{Z}\langle b,x\rangle & \overset{\pi_x}{\rightarrow} & \mathbb{Z}\langle b\rangle
\end{array}$$

Burada, π_a ve π_x izdüşümlerinin tersi olarak gömme fonksiyonu düşünüldüğünde her satır ve sütunda ayrışım genişlemeleri mümkündür. Elde edilen bu tam diziler birimsel gruplarına kısıtlandığında grup düzeyinde aşağıdaki tam diziler yazılır.

$$\begin{array}{ccccc}
U_1(1+J_4) & \overset{i}{\rightarrow} & \cdots & \overset{\pi_x}{\rightarrow} & U_1(1+J_2) \\
\downarrow_i & & \downarrow_i & & \downarrow_i \\
\cdots & \overset{i}{\rightarrow} & U_1(\mathbb{Z}{S_3}^*) & \overset{\pi_x}{\rightarrow} & U_1(\mathbb{Z}S_3) \\
\downarrow_{\pi_a} & & \downarrow_{\pi_a} & & \downarrow_{\pi_a} \\
U_1(1+J_3) & \overset{i}{\rightarrow} & U_1(\mathbb{Z}\langle b,x\rangle) & \overset{\pi_x}{\rightarrow} & U_1(\mathbb{Z}\langle b\rangle)
\end{array}$$

Sonuç 4.3.15. Aşağıdaki ayrışım genişlemeleri geçerlidir.

$U_1(\mathbb{Z}{S_3}^*) = U_1(1+[\mathbb{Z}S_3(x-1)\oplus\mathbb{Z}S_3(x^2-1)]) \rtimes U_1(\mathbb{Z}S_3)$;

$U_1(\mathbb{Z}{S_3}^*) = U_1(1+[\mathbb{Z}\langle b,x\rangle(a-1)\oplus\mathbb{Z}\langle b,x\rangle(a^2-1)]) \rtimes U_1(\mathbb{Z}\langle b,x\rangle)$;

$U_1(1+[\mathbb{Z}S_3(x-1)\oplus\mathbb{Z}S_3(x^2-1)]) = U_1(1+J_4) \rtimes U_1(1+J_3)$;

$U_1(\mathbb{Z}S_3) = U_1(1+J_2) \rtimes U_1(\mathbb{Z}\langle b\rangle)$;

$U_1(1+[\mathbb{Z}\langle b,x\rangle(a-1)\oplus\mathbb{Z}\langle b,x\rangle(a^2-1)]) = U_1(1+J_4) \rtimes U_1(\mathbb{Z}\langle b\rangle)$;

Sonuç 4.3.16.

$$S_3^* \coloneqq S_3\times C_3 = \langle a,b,x : a^3=b^2=x^3=1, bab^{-1}=a^{-1}, ax=xa, bx=xb\rangle$$

olmak üzere $\mathbb{Z}S_3^*$ integral grup halkasının birimsel elemanlar grubu için

$$U_1(\mathbb{Z}S_3^*) \simeq (\langle S\rangle \rtimes \langle x\rangle) \rtimes (V \rtimes \langle a\rangle) \rtimes \langle b\rangle$$

izomorfizması sağlanır. Burada, $V = \langle u_{b,a}, u_{ba,a}, u_{ba^2,a}\rangle$,

$W_1 = (1-b)(1-x)(a^2-a)$, $W_2 = (1-b)(1-x^2)(a^2-a)$ ve

$S = \{1+W_1\lambda_iW_2 : \lambda_i\in J_4, \lambda_iW_1\neq W_1\lambda_i, \lambda_iW_2\neq W_2\lambda_i, (\lambda_i\neq 0 \Rightarrow W_1\lambda_iW_2\neq 0)\}$ dir.

İspat. Bir önceki sonuçtan da anlaşılabileceği gibi,

$$U_1(\mathbb{Z}{S_3}^*) \simeq U_1(1+[\mathbb{Z}S_3(x-1)\oplus\mathbb{Z}S_3(x^2-1)]) \rtimes U_1(\mathbb{Z}S_3)$$

geçerli olup $U_1(1+[\mathbb{Z}S_3(x-1) \oplus \mathbb{Z}S_3(x^2-1)])$ yerine $U_1(1+J_4) \rtimes U_1(1+J_3)$ ve $U_1(\mathbb{Z}S_3)$ yerine de $U_1(1+J_2) \rtimes U_1(\mathbb{Z}\langle b\rangle)$ yazılırsa

$$U_1(\mathbb{Z}S_3^*) \simeq (U_1(1+J_4) \rtimes U_1(1+J_3)) \rtimes (U_1(1+J_2) \rtimes U_1(\mathbb{Z}\langle b\rangle))$$

elde edilir. Burada, $U_1(1+J_4) \simeq \langle S\rangle, U_1(1+J_3) \simeq \langle x\rangle, U_1(\mathbb{Z}\langle b\rangle) \simeq \langle b\rangle$ ve Teorem 4.3.9. ile ispatlandığı üzere

$$U_1(1+J_2) \rtimes \langle b\rangle \simeq V \rtimes \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$$

olduğundan istenen elde edilir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Giriş bölümünde de ifade edildiği gibi, grup halkaları ve onun üzerinde tanımlı özel elemanlar araştırmacılar tarafından hem teorik hem de uygulamaya dönük yönleriyle konunun ortaya çıktığı 19. yüzyılın sonlarından beri yoğun ilgi görmektedir. Özellikle, değişmeli ve birimli bir halka üzerinde tanımlı değişmeli grup halkalarında nilpotent, idempotent ve birimsel elemanların yapısı ve grup halkasındaki yoğunluğu uygulamalı matematiğin bir çok alanında olduğu gibi, cebirsel sayılar teorisi, temsil teorisi, kodlama teorisi ve kriptografi gibi alanlarda araştırmacıların karşısına çıkmaktadır.

Birimsel elemanlar, konunun temellerinin atıldığı ilk zamanlarda incelendiği gibi aslında, sadece aşikar birimsel elemanlar, unipotent birimsel elemanlar, Bass devirli birimsel elemanlar ya da alterne birimsel elemanlardan ibaret olmayabilir. Bu formdaki birimsel elemanlardan başka nilpotent ve idempotent elemanlar yardımıyla da birimsel elemanlar oluşturulabilir. İlk defa Danchev tarafından ortaya atılan idempotent birimsel elemanlar ve nilpotent birimsel elemanlar kavramı kısıtlı bir çerçevede incelenebilmiş ve sadece değişmeli ve birimli bir R halkası üzerinde G grubunun 2 ve 3 mertebeli olduğu durumlar ele alınmıştır (Danchev, 2009b; 2010a; 2010b; 2012). Bu tezin amaçlarından biri, mertebesi dört ve dörtten büyük abel grupların değişmeli grup halkalarında idempotent ve nilpotent birimsel elemanları karakterize etmektir.

Tezin ilk iki bölümünde bazı temel tanım ve teoremler ve literatürde yapılmış olan çalışmalar verildikten sonra, bulgular bölümünde Danchev (2012) tarafından sunulan grubun desteği kavramı genişletilmiş ve bileşik tamsayılar cinsinden tanımlanmıştır. Bu tanımla, Abel grupların direkt çarpımları üzerindeki değişmeli ve birimli grup halkalarında tüm birimsel elemanların nilpotent birimsel eleman yapısında olması üzerine bazı gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Böylece mertebesi üçten büyük gruplar için bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Yine bulgular bölümünde, parametreleri değişmeli ve birimli bir R halkası üzerindeki ortogonal idempotent elemanların bir tam kümesi yardımıyla oluşturulan idempotent birimsel elemanlar yine grubun bileşik tamsayı formunda tanımlanan desteği ile incelenmiş ve tüm birimsel elemanların sadece idempotent birimsel eleman yapısında olabilmesi için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Ayrıca, Abel direkt çarpım gruplarının değişmeli ve birimli grup halkasında birimsel elemanlar grubunun aşikar birimsel elemanlar ve idempotent birimsel elemanların direkt çarpımları cinsinden bir karakterizasyonu sunulmuştur.

Bu bağlamda konu ile ilgili olarak hala incelenmesi gereken problemler mevcuttur. Örneğin, değişmeli ve birimli bir R halkası üzerinde,

$$V\big(R(G \times H)\big) = id(RG) \times id(RH)$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartlar açık bir problemdir. Benzer şekilde,

$$V\big(R(G \times H)\big) = id(RG) \times (1 + I(N(R)H; H))$$

ve

$$V\big(R(G \times H)\big) = (1 + I(N(R)G; G)) \times id(RH))$$

eşitliklerinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartlar da araştırılmayı bekleyen açık problemler arasında yer almaktadır.

Değişmeli olmayan integral grup halkalarında birimsel elemanların karakterize edilmesi ile ilgili olarak yapılan çalışmaların, değişmeli integral grup halkalarına nispeten daha az olduğu söylenebilir ki bu bağlamda, bulgular bölümünün üçüncü alt bölümünde 6 mertebeli simetrik grup ile 3 mertebeli devirli grubun direkt çarpımlarının integral grup halkasındaki birimsel elemanların grubu, bu direkt çarpım grubunun ikinci dereceden kompleks temsilleri genişletilerek tanımlanmıştır.

Literatüre katkısı bakımından konu, bu tezde çalışılan problemler ve hala araştırılmayı bekleyen problemlerin bütünüyle incelenmesinden yola çıkılarak, grup halkalarının özel yapıdaki elemanlarının bilhassa değişmeli olmayan grupların grup halkalarında incelenmesi üzerine değişik metotların geliştirilmesiyle daha da zenginleşecektir.

KAYNAKLAR

Aleev, R. Zh., Panina, L. V., 1999. The units of cyclic groups of order 7 and 9. ***Izv.Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.,* 11**: 81-84.

Allen, P. J., Hobby, C., 1980. A characterization of units in $\mathbb{Z}A_4$. ***J. Algebra.* 66**: 534-543.

Anderson F.W, Frank K. R., 1992. ***Rings and Categories of Modules,*** Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Allen, P. J., Hobby, C., 1987. A note on the unit group of $\mathbb{Z}S_3$ ***Proc. Amer. Math. Soc.,* 99**: 9-14.

Arı K., 2003. A different characterization of $U_1(\mathbb{Z}C_8)$. ***Int. J. Appl. Math.,* 12**(2): 109-113.

Bilgin, T., 2004. Characterization of $U_1(\mathbb{Z}C_{12})$. ***Int. J. Pure Appl. Math.,* 14**:531-535.

Bilgin, T., Küsmüş, Ö., Low, R. M., 2016. A characterization of the unit group in $\mathbb{Z}[T \times C_2]$. ***Bull. Korean Math. Soc.,* 53**: 1105-1112.

Bourbaki, N., 1989. ***Commutative Algebra***, Chapters 1-7, Elements of Mathematics (Berlin), Springer, Berlin. 625.

Brauer, R., Noether, E., 1927. ***Über Minimale Zerfällungenskörper Irreduzibler Darstellungen.*** Siz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 221-228.

Brauer, R., 1929. Über systeme hypercomplexer zahlen. ***Math. Z.* 30**: 79-107.

Cayley, A., 1854. On the theory of groups as depending on the symbolic equation. ***Phil. Mag.* 7**: 40-47.

Connell, I.G., 1963. On the group ring. ***Can. J. of Math.* 15**: 650-685.

Craven, D. A., 2008. The Theory of p-Groups. http://web.mat.bham.ac.uk/ D.A.Craven/ docs/lectures/pgroups.pdf. Hilary Term. Erişim Tarihi: 22.07.2019.

Danchev, P. V., 2005a. A note on trivial units in abelian group rings. ***An Univ. Bucuresti Mat.,* 54**(2): 229-234.

Danchev, P. V., 2005b. On the trivial units in finite commutative group rings. ***Math. Commun.,* 10**(2): 143-147.

Danchev, P. V., 2008a. A note on a formula of may concerning normed units in abelian group rings. ***Bull. Allahabad Math. Soc.,* 23**(1): 155-158.

Danchev, P. V., 2008b. Note on a decomposition of normalized unit groups in abelian group algebras. ***Bull. Allahabad Math. Soc.,* 134**(3): 631-635.

Danchev P. V., 2008c. Trivial units in commutative group algebras. ***Extr. Math.,* 23**: 49-60.

Danchev P. V., 2009a. Trivial units in abelian group algebras. ***Extr. Math.,* 24**: 47-53.

Danchev P. V., 2009b. Idempotent units in commutative group rings. ***Kochi J. Math.,* 4**: 61-68.

Danchev P. V., 2010a. Idempotent units of commutative group rings. ***Commun. Algebra,* 38**: 4649-4654.

Danchev P. V., 2010b. On some ıdempotent-torsion decomposition of normed units in commutative group rings. ***J. Calcutta Math. Soc.,* 6**: 31-34.

Danchev P. V., 2011. Idempotent-torsion normalized units in abelian group rings. ***Bull. Calcutta Math. Soc.,* 103**(1): 31-34.

Danchev P. V., 2012. G-nilpotent units of commutative group rings. ***Comment. Math. Univ. Carolin.,* 53**(2): 179-187.

Ferraz, R. C., P. Milies, 2007. Idempotents in group algebras and minimal abelian codes. ***Finite Fields Appl.,*** **13**(2): 382-393.

Ferraz, R. A., 2003. Free subgroups in the units of $\mathbb{Z}[K_8 \times C_p]$. ***Commun. Algebra,*** **31**(9): 4291-4299.

Ferraz, R. A., 2009. Units of $\mathbb{Z}C_p$. ***Contemp. Math.,*** **499**: 107-119.

Ferraz, R. A., Kitani, P. M., 2015. Units of $\mathbb{Z}C_{p^n}$. ***Commun. Algebra,*** **43**: 4936-4950.

Ferraz, R. A., Marcuz, R., 2016. Units of $\mathbb{Z}(C_p \times C_2)$ and $\mathbb{Z}(C_p \times C_2 \times C_2)$. ***Commun. Algebra,*** **44**: 851-872.

Ferraz, R. A., Simon, J. J., 2008. Central units in metacyclic ıntegral group rings. ***Commun. Algebra,*** **36**(10): 3708-3722.

Ferraz, R. A., Simon, J. J., 2016. Central units in $\mathbb{Z}C_{p,q}$. ***Commun. Algebra,*** **44**: 2264-2275.

Ferraz, R. A., 2004. Simple components and central units in group algebras. ***J. Algebra,*** **279**: 191-203.

Fraleigh J. B., 2002, ***A First Course in Abstract Algebra.*** Addison Wesley.

Herman A., Li Y., Parmenter M. M., 2005. Trivial units for group rings with G-adapted coefficient rings. ***Canad. Math. Bull.,*** **48**(1): 80-89.

Higman, G., 1940a. The units of group rings. ***Proc. London Math. Soc.,*** **46**(2): 231-248.

Higman, G., 1940b. ***Units in Group Rings.*** (doktora tezi, basılmamış). University of Oxford, United Kingdom.

Hungerford T. W., 1974. ***Algebra.*** Springer-Verlag, New York.

Hughes, I., Pearson, K. R., 1972. The group of units of the ıntegral group ring. ***Canad. Math. Bull.,*** **15**: 529-534.

Hurley B, Hurley T., 2011. Group ring cryptography, ***Int. J. Pure Appl. Math.***, **69**(1): 67-86.

Jespers, E., 1995. Bicyclic units in some ıntegral group rings. ***Canad. Math. Bull.,*** **38**: 80-86.

Jespers, E., Leal G., 1991. Describing units of ıntegral group rings of some 2-groups. ***Comm. Algebra,*** **19**(6): 1809-1827.

Jespers, E., Parmenter, M. M., 1992. Bicyclic units in $\mathbb{Z}S_3$. ***Bull. Soc. Math. Belg. Sér.,*** **44**(2): 141-146.

Jespers, E., Parmenter, M. M., 1993. Units of group rings of groups of order 16. ***Glasgow Math. J.,*** **35**: 367-379.

Kaplansky, I., 1970. Problems in the theory of rings (revisited). ***The Amer. Math. Monthly.*** **77**: 445-454.

Kaplansky, I., 1957. ***Problems in The Theory of Rings.*** Washington: Nas- NRC Publ. pp: 1-3.

Karpilovsky G., 1982. On units in commutative group rings. ***Arch. Math. (Basel),*** **38**: 420-422.

Karpilovsky, G., 1983a. ***Commutative Group Algebras.*** New York: Marcel Dekker. 223.

Karpilovsky, G., 1983b. On finite generation of unit groups of commutative group rings. ***Arch. Math. (Basel),*** **40**: 503-508.

Karpilovsky, G., 1989. ***Unit Groups of Group Rings.*** Harlow: Longman Science and Technology. 393.

Karpilovsky, G., 1990. Units of commutative group algebras. ***Expo. Math.,*** **8**: 247-287.

Kelebek, I.G., Bilgin, T., 2014. Characterization of $U_1(\mathbb{Z}[C_n \times K_4])$. ***Eur. J. Pure Appl. Math.,*** **7**(4): 462-471.

Kelebek, I.G., Bilgin, T., 2013. Computing the rank of $U(\mathbb{Z}A)$. ***Int. J. Algebra.*** **7**(3): 145-156.

Küsmüş, Ö., Denizler İ. H., 2014. Construction of units in $\mathbb{Z}C_{24}$, ***Int. J. Algebra.*** **8**(10): 471-477.

Küsmüş, Ö., 2015. On the units of ıntegral group ring of $C_n \times C_6$. ***Algebra Discrete Math.,*** **20**(1): 142-151.

Lambeck, J., 1996. ***Lectures on Rings and Modules.*** Toronto: Blaisdell. 283.

Li, Y., 1998. Units of $\mathbb{Z}(G \times C_2)$. ***Quaest. Math.,*** **21**(3-4): 201-218.

Li, Y., Parmenter, M. M., 1997. Central units of the ıntegral group ring. ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** **125**(1): 61-65.

Low, R. M., 2008. On the units of the ıntegral group ring $\mathbb{Z}(G \times C_p)$. ***J. Algebra Appl.*** **7**(3):393-403.

May, W., 1976. Group algebras over finitely generated rings. ***J. Algebra,*** **39**: 483-511.

Milies C. P., 2007. Idempotents in group algebras and minimal abelian codes. ***Finite Fields and Their Applications,*** **13**(2): 382-393.

Milies C. P., 1973. The group of units of the ıntegral group ring $\mathbb{Z}D_4$. ***Bol. Soc. Brasil. Math.*** **4**(2): 85-92.

Milies C. P, Sehgal S. K., 2002. ***An Introduction to Group Rings.*** Kluwer Academic Publishers, London. 371.

Molien, T., 1897. Über die invarianten der linearen substitutionsgruppen. ***Sitzungber.Konig. Preuss. Akad. Wiss. (J. Berl. Ber.)*** **52**: 1152–1156.

Molien, T., 1893. Über systeme höherer complexer zahlen. ***Math. Ann. Bd.*** **41**: 83-156.

Noether, E., 1929. Hypercomplexe grössen und darstellungtheorie. ***Math. Z.*** **30**: 641-692.

Passman, D.S., 1977. ***The Algebraic Structures of Group Rings.*** New York: Wiley. 734.

Ribenboim, P., 1969. ***Rings and Modules.*** New York: Interscience. 162.

Ritter, J., Sehgal., S. K., 2005. Trivial units in RG. ***Math. Proc. R. Ir. Acad.,*** **105A(**1): 25-39.

Sehgal, S. K., 1978. ***Topics in Group Rings.*** New York: Marcel Dekker. 251.

Sehgal, S. K., 1993. ***Units in Integral Group Rings.*** Essex: Longman Scientific & Technical. 357.

ÖZ GEÇMİŞ

1990 yılında Kocasinan/KAYSERİ'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2012 yılında üniversite lisans eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladı ve 2014 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2014 yılının güz döneminde aynı enstitüde doktora eğitimine başladı. Halen Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü bünyesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 16.08.2019

Tez Başlığı / Konusu:

GRUP HALKALARINDA NİLPOTENT, İDEMPOTENT VE BİRİMSEL ELEMANLAR

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 64 sayfalık kısmına ilişkin, 16/08/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 16 (onaltı) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Ömer Küsmüş
16.08.2019

Adı Soyadı: Ömer Küsmüş

Öğrenci No:149102028

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: Y. Lisans ☐ Doktora ☑

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. İ. Hakkı Denizler

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR