T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI KARARLILIK KRİTERLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Merve ŞENGÜN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI KARARLILIK KRİTERLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Merve ŞENGÜN

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı' nda Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Merve ŞENGÜN tarafından sunulan **"Volterra Integro-Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Kararlılık Kriterleri"** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği' nin ilgili hükümleri gereğince 19/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza:

Üye: Doç. Dr. Erdal Korkmaz İmza:

Üye: Doç. Dr. Zeynep Kayar İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 23/08/2019 tarih ve 2019/47-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Merve ŞENGÜN

ÖZET

VOLTERRA INTEGRO -DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI KARARLILIK KRİTERLERİ

ŞENGÜN, Merve
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Ağustos 2019, 69 sayfa

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, integro-diferansiyel denklemleri çözmeksizin, bu denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarını incelemede kullanılan yöntemler hakkında kısa bilgiler verildi. İkinci bölümde tez konusuyla ilgili literatürde yapılmış olan bazı çalışmalar özetlendi. Üçüncü bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntem belirtildi. Dördüncü bölümde, tez konusuyla ilgili temel bilgi niteliğinde olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verildi.

Beşinci bölümde konvolüsyon türden ve konvolüsyon türden olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler ve sistemlerin ile pertürbe formlarının çözümlerinin sıfıra yakınsaması, integrallenebilirlik, kare integrallenebilirlik, kararlılık, sınırlılık, düzgün kararlılık, asimptotik kararlılık, düzgün asimptotik kararlılık ve kararsızlık durumları için bazı sonuçlar verildi. Aynı zamanda yine bu bölümde konuyla ilgili örneklere yer verilmiştir. Altıncı bölümde ise birinci mertebeden lineer ve çoklu sabit gecikmeli bir diferansiyel denklem sistemi, lineer ve değişken gecikmeli bir Volterra integro-diferansiyel denklem sistemi ile lineer olmayan sabit gecikmeli bir Volterra integro-diferansiyel denklem sistemi için çözümlerin düzgün asimptotik kararlılığıyla alakalı yeter şartlar içeren bazı teoremler verildi.

Son bölümde ise, bu tezde yaptığımız çalışmalara ilişkin tartışma ve sonuç kısmı bulunmaktadır.

Anahtar kelimeler: Asimptotik kararlılık, Düzgün asimptotik kararlılık, İntegrallenebilirlik, Kararlılık, Kare integrallenebilirlik, Lyapunov ikinci metodu Sınırlılık, Volterra integro-diferansiyel denklem.

ABSTRACT

SOME STABILITY CRITERIA FOR VOLTERRA INTEGRO – DIFFERENTIAL EQUATIONS

SENGUN, Merve
M.Sc. Thesis, Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
August 2019, 69 pages

This master thesis consists of seven chapters, Chapters 1-7. In first chapter of the thesis, some short information were given about some methods which are available in the literature and can also be used to get information on the qualitative behaviors of solutions of integro-differential equations under investigation without solving them. In the second chapter of this thesis, some scientific works, which are related to the subject of this thesis and can be found in the literature, were summarized. In Chapter 3, the material-method used in this thesis was presented. Chapter 4 includes some basic information such as definitions, theorems and so on, which are related to the subject of this thesis. In Chapter 5 of this thesis, some qualitative results were given on the convergence, integrability, square integrability, stability, boundedness, uniform stability, asymptotic stability, uniform asymptotic stability and instability of solutions of Volterra integro-differential equations and systems amd their perturbed form, convolution and non-convolution type Volterra integro-differential equations and systems. In Chapter 5, some examples were given on the subject. In Chapter 6, some theorems, which contain sufficient conditions on the uniformly asymptotically stability of solutions of certain a linear differential equation system with multiple constant delays, nonlinear Volterra integro-differential equations first order with variable delay, non-linear Volterra integro-differential equations first order with constant delay and so on were given. At the end, a discussion and conclusion about the studies done in this thesis was given.

Keywords: Asymptotic stability, uniformly asymptotic stability, integrability, stability, square integrability, the second method of Lyapunov, boundedness, Volterra integro-differential equation.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında Lyapunov'un doğrudan metodu ve bilinen eşitsizliklerin bazılarından faydalanılarak gerek gecikmeli gerekse gecikmesiz türden Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı niteliksel davranışları ele alınmaktadır. Burada literatürdeki Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümleri hakkında yapılan iki çalışmanın araştırmacıların dikkatine sunulması amaçlanmaktadır. Bu tez yeni bir sonuç içermemektedir.

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca tez süresi boyunca göstermiş oldukları manevi desteklerinden ve yardımlarından dolayı aileme ve değerli hocalarıma da teşekkür ederim.

2019

Merve ŞENGÜN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
R	Reel Sayılar
R^n	n-boyutlu Öklid uzayı
β	Beta
φ	Phi
ϕ	Phi
μ	Mü
γ	Gama
η	Eta
C	Sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
V	Lyapunov fonksiyonu
∂	Kısmi Türev
$\lvert\ \rvert$	Mutlak Değer
$\lVert\ \rVert$	Norm

Kısaltmalar	**Açıklama**
U.A.S.	Düzgün asimptotik kararlı

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmamaktadır. Ancak integro-diferansiyel denklemleri çözmeksizin, bu türden denklemlerin çözümlerin global olarak varlığı, kararlılığı, düzgün kararlılığı, asimptotik kararlılığı, sınırlılığı, integrallenebilirliği vb. niteliksel davranışları hakkında literatürde geliştirilen yöntemler, metotlar ve teknikler yardımıyla belirleyici kararlar verilebilir. Öte yandan bazı integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları fizik, matematik, biyoloji, mühendislik vb. pek çok alanda büyük bir öneme sahiptir (Lakshmikantham ve Rama, 1987; Burton, 2005; Rahman, 2007; Wazwaz, 2011). Dolayısıyla, integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerin niteliksel davranışlarının incelenmesi kayda değerdir.

Son yıllarda gecikmeli ve gecikmeli olmayan Volterra-İntegro diferansiyel denklemlerin niteliksel özellikleri birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalar sırasında sonuçları elde etmek için Lyapunov'un ikinci metodu, sabit nokta metodu vb. metotlar integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel özelliklerini incelemek için önemli birer araçtır. Ancak literatürdeki çalışmalara bakıldığında genel anlamda çözümlerin niteliksel davranışlarının belirlenmesi sırasında Lyapunov fonksiyonları ya da Lyapunov fonksiyonellerinin etkin birer araç olarak kullanıldığı görülebilir. Bununla birlikte Volterra-İntegro diferansiyel denklem vb. denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarının incelenmesi için uygun bir Lyapunov fonksiyonu veya fonksiyoneli bulmak oldukça zordur. Bu durumda lineer veya lineer olmayan, gecikmeli veya gecikmesiz integro diferansiyel denklemler için Lyapunov fonksiyonu ya da fonsiyonelinin inşası ya da literatürde açık problem olarak kalmaktadır. Ancak bu problem bu tezde ele alınmayacaktır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

İlgili Matematik literatüründe gerek lineer gerekse lineer olmayan belirgin formdaki gecikmeli ve gecikmesiz türden çok sayıda integro-diferansiyel diferansiyel denklemlerin veya sistemlerin çözümlerinin global varlığı, kararlılık, düzgün karalılık, asimptotik kararlılık, düzgün asimptotik kararlılık, sınırlılık, integrallenebilirliği vb. niteliksel davranışları ile ilgili çalışmalardan bir kısmı aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Grimmer ve Seifert (1975),

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t < \infty$$

biçimindeki Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılık ve $t \to \infty$ için ise asimptotik davranışını ele aldılar.

Burton ve Mahfoud (1983),

$$x'(t) = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds$$

formundaki integro-diferansiyel denklem sistemini ele aldı. $A(t)$ matrisinin negatif olmasını esas alarak Lyapunov fonksiyonelleri yardımıyla bu denklem sisteminin çözümleri için bir çok kararlılık kriteri verdi.

Engler (1988),

$$x'(t) + \int_0^t g(t-s, x(s))ds = f(t), \qquad x(0) = x_0$$

formunda R^n'de verilen başlangıç değer probleminin çözümlerinin sınırlılık ve üstel bozulma gibi davranışlarını Lyapunov fonksiyonelleri yardımıyla inceledi ve konuyla alakalı örneklere yer verdi.

Hara ve ark. (1989) aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklem sistemleri ve bunların pertürbe sistemlerini ele aldı:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds$$

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t B(t,s)y(s)ds + g\big(t, y(.)\big)$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t B(t,s)y(s)ds + h(t).$$

Araştırmacılar bu denklemlerin çözümleri için kararlılık, düzgün kararlılık, düzgün asimptotik kararlılık, üstel asimptotik kararlılık, düzgün sınırlılık ve düzgün mutlak sınırlılık durumlarını Lyapunov fonksiyonelleri yardımıyla inceledi.

Hara ve ark. (1990),

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t G(t,s,x(s))ds, \;\; t \geq 0$$

şeklindeki lineer olmayan sistemin çözümünün asimptotik davranışını inceledi.

Hara ve ark. (1992),

$$x'(t) = F(t,x(t)) + \int_0^t G(t,s,x(s))ds, \;\; t \geq 0$$

şeklindeki lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemin çözümlerinin asimptotik davranışını inceledi.

Burton (1993) ise, Lyapunov fonksiyonları yardımıyla

$$x'(t) = a(t) - \int_{-\infty}^t D(t,s)g(x(s))ds$$

tipindeki skaler integro-diferansiyel denkleminin sınırlılığı, periyodik ve asimptotik davranışları ile ilgili sonuçlar elde etti.

Du (1995), çalışmasında aşağıda verilen gerek fonksiyonel ve gerekse Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin düzgün asimptotik kararlılığını değişik Lyapunov fonksiyonelleri inşa ederek inceledi:

$$x'(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} A_k x(t - T_k),$$

$$x'(t) = Ax(t) + Bx\big(t - \tau(t)\big) + \int_{t-\tau(t)}^t C(t,s)\, x(s)ds,$$

$$x'(t) = -f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t-\tau)\big),$$

$$x'(t) = -f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t-\tau)\big) + \int_{t-\tau}^t h\big(t,s,x(s)\big)ds.$$

Furumochi ve Matsuoka (1999),

$$x'(t) = a(x(t)) + \int_0^t C(t,s)f(x(s))ds$$

formundaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığını, sınırlılığını ve düzgün sınırlılığını inceledi. Aynı çalışmada konuyla alakalı da birkaç örnek veilmiştir.

Eloe ve ark. (2000),

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds, \ \ t \geq 0$$

lineer Volterra inregro-diferansiyel sistemin düzgün asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şartları belirlemişlerdir. Araştırmacılar bunun için çözücü kavramından (resolvent) faydalanmışlardır.

İslam ve ark. (2004), aşağıda verilen

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)f\big(s,x(s)\big)ds + g\big(t,x(t)\big).$$

denklemin çözümlerinin düzgün sınırlılık, sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlılık ve üstel kararlılık özelliklerini Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla inceledi.

Funakubo ve ark. (2006),

$$x'(t) = ax(t) - b\int_{t-h}^t x(s)ds$$

Volterra tipindeki bir lineer integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin düzgün asimptotik kararlılığını bu denkleme ait karakteristik denklemin köklerini dikkate alarak inceledi.

Becker (2006),

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_s^t B(t,u)x(u)du$$

Volterra integro-diferansiyel denklem ve

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_\tau^t B(t,u)x(u)du + f(t), x(\tau) = b$$

başlangıç değer problemini ele aldı. Sabit nokta teorisi ve parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla çözümlerin tekliğini, sürekliliğini ve çözümlere ait bazı özellikleri incelediler.

Becker (2007), konvolüsyon tipindeki

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \int_0^t b(t-s)x(s)ds$$

skaler lineer Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin bazı niteliksel davranışlarını inceledi ve konuyla alakalı örnekler verdi.

Becker (2009),

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \int_0^t b(t,s)x(s)ds, \qquad t \geq 0$$

Volterra integro-diferansiyel denklemin sıfır çözümünün global asimptotik kararlılığını bir Lyapunov fonksiyonu oluşturarak inceledi.

Jin ve Luo (2009), aşağıda verilen lineer ve lineer olmayan skaler integro-diferansiyel denklemlerin sıfır çözümlerinin asimptotik kararlılığı için sabit nokta teorisini kullanarak yeter şartlar elde etmişlerdir:

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^t a(t,s)x(s)ds$$

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^t a(t,s)g\big(x(s)\big)ds.$$

Burton (2010), Volterra integral

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)x(s)ds$$

denkleminin ve denkleminin çözümlerinin bazı özelliklerini Lyapunov metodu yardımıyla inceledi.

Raffoul ve Adıvar (2012), aşağıda verilen sabit gecikmeli

$$x'(t) = p(t)x(t) - \int_{t-\tau}^t q(t,s)x(s)ds.$$

lineer Volterra-integro diferansiyel denklemin sıfır çözümünün üstel kararlılığını kararsızlığını Lyapunov fonksiyonelleri yardımıyla araştırdılar.

Graef ve ark. (2016), çoklu gecikmeli

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t b_i(t,s)f_i(x(s))ds$$

lineer olmayan fonksiyonel Volterra integro-diferansiyel denklemin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık, global asimptotik kararlılık, integrallenebilirlilik ve kare integrallenebilirliliğini incelemişlerdir.

Tez konusuyla ilgili literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Burada bunların ayrıntısı verilmeyecek olup, konuyla ilgili kaynaklara bakılabilir. (Bknz. Grossman ve Miller (1970); Miller (1971); Seifert (1973), Corduneanu (1977); Grimmer ve Zeman (1982); Burton ve Mahfoud (1985); Staffans (1988); Gripenberg ve ark. (1990); Lakshmikantham ve Rama Mohan Rao (1987), (1995); Xu (1998); Islam ve Raffoul (2003); Hino ve Murakami (2005); Zhang (2000), (2005); Diamandescu (2006); Raffoul (2007); Burton ve Haddock (2009); Wang (2009); Chang ve Wang (2011); Wazwaz (2011); Dung (2013); Ngoc (2013); Wang (2013); Dung (2015); Mesmouli ve ark. (2015); Raffoul ve Sanbo (2016); Raffoul ve Rai (2016)).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Giriş ve Literatür Bildirişleri bölümüne bakıldığında ilgili literatürde gecikmeli veya gecikmesiz gerek lineer gerekse lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler ile ilgili kayda değer birçok çalışmanın olduğu görülmektedir.

Bu tezde materyal olarak tezin kaynaklar kısmında geçen Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili belirtilen çalışmalar ve tez konusundaki temel bilgileri içeren kitaplara ilave olarak Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarına ait bu kaynaklardaki temel tanım ve teoremler, çözümlerin niteliksel davranışlarının incelenmesi için kullanılan metod, yöntem, eşitsizlikler vb. düşünülmektedir. Burada Lakshmikantham (1995), Yoshizawa (1966), Burton (1985, 2005), Rahman (2007), Wazwaz (2011) gibi temel kaynaklardaki tez konusu ile ilgili materyal niteliğindeki kaynaklar dikkate alınıp Lyapunov'un doğrudan yöntemi yardımı ile Burton ve Mahfoud (1983) ile Du (1995) da gerçekleştirilen çalışmalar materyal olarak alınmıştır. Tez boyunca sonuçların ispatlanmasında kullanılan Lyapunov'un doğrudan metodu ise tezdeki metod olarak düşünülmektedir.

4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili okuyucuların ihtiyaç duyabileceği,ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılabilecek ve temel bilgi niteliğinde olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.1. Bir denklemde bilinmeyen fonksiyon integral işareti altında görünüyorsa, bu denkleme integral denklem adı verilir. Standart bir integral denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

şeklindedir. Burada $h(x)$ ve g(x) integralin sınırları, λ bir sabit parametre ve $K(x,t)$ ise integral denklemin çekirdeğidir (Wazwaz, 2011).

Tanım 4.2. Eğer bir integral denklem bilinmeyen fonksiyonun türev(ler)ini de içeriyorsa, bu denkleme integro-diferansiyel denklem adı verilir. Standart bir integro-diferansiyel denklem

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

şeklindedir. Burada $n \geq 1$ olmak üzere $h(x)$ ve $g(x)$ integralin sınırları, λ bir sabit parametre ve $K(x,t)$ ise integral denklemin çekirdeğidir. $u^{(n)}(x)$ bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$'in $n.$ mertebeden türevidir (Wazwaz, 2011).

Tanım 4.3. Bir integro-diferansiyel denklemde integralin sınırlarından en az birisi değişken ise, bu denklem çeşidine Volterra integro-diferansiyel denklem denir. Örneğin

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

denklemi bir Volterra integro-diferansiyel denklemdir. Burada $n \geq 1$ olmak üzere a ve x integralin sınırları, λ bir sabit parametre ve $K(x,t)$ ise integral denklemin çekirdeğidir. $u^{(n)}(x)$ bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$'in $n.$ mertebeden türevidir (Wazwaz, 2011).

Gerekli işlemler altında integral ve integro-diferansiyel denklemler diferansiyel denkleme, diferansiyel denklemler de integral ve integro-diferansiyel denkleme dönüştürülebilir (Wazwaz, 2011).

Tanım 4.4. D, R^n'nin açık bir alt cümlesi ve $(a,b), R$'de açık bir aralık olmak üzere bir $F: (a,b) \times D \rightarrow R^n$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $(t_0, x_0) \in (a,b) \times D$ noktasının bir N komşuluğundaki her $(t, x_1), (t, x_2) \in N$ için,

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir K pozitif sabiti var ise, F fonksiyonu (t_0, x_0) noktasında x'e göre yerel Lipschitz şartını sağlıyor denir (Burton, 1985).

Tanım 4.5.

$$x' = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{4.1}$$

integro-diferansiyel denklemini ele alalım. Burada A, $0 \leq t < \infty$ için ve C, $0 \leq s \leq t < \infty$ için sürekli birer $n \times n$ boyutlu matristir.

Burton ve Mahfoud (1983) (4.1) denkleminin ve (4.1)'in değişik perturbe formlarının çözümlerinin kararlılık, sınırlılık vb. davranışlar için gerek ve yeter koşullar verdi.

$\varphi: [0, t_0] \rightarrow R^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu olmak üzere (4.1) denkleminin bir çözümü $x(t, t_0, \varphi), x(t, \varphi)$ ya da sadece $x(t)$ ile gösterilecektir.

Eğer D bir matris ya da bir vektör ise, $|D|$ ifadesi elemanlarının mutlak değerlerinin toplamı anlamına gelir.

Eğer bir fonksiyonun bağlı bulunduğu bileşen açıkça ifade edilmez ise bileşenin her zaman t olduğu anlaşılmalıdır. Örneğin $x = x(t)$ bu durumu açıklamaktadır.

Tanım 4.6. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t_0 \geq 0$ için $[0, t_0]$ aralığında $|\varphi(t)| < \delta$ olmak koşuluyla her $t \geq t_0 \geq 0$ için $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ varsa, (4.1) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır (Burton, 2005b).

Tanım 4.7. Eğer (4.1) denkleminin sıfır çözümü kararlı ve δ, t_0'dan bağımsız ise; (4.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Burton,2005b).

Tanım 4.8. (4.1) denkleminin sıfır çözümü kararlı, ilaveten her $t_0 \geq 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $[0, t_0]$ aralığında $|\varphi(t)| < \eta$ iken $t \rightarrow \infty$ için $|x(t, t_0, \varphi)| \rightarrow 0$ oluyorsa (4.1) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Burton, 2005b).

Tanım 4.9. (4.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı, η sayısı t_0 dan bağımsız ve her $\varepsilon > 0$ için bir $T(\varepsilon) > 0$ var öyle ki $[0, t_0]$ üzerinde $\varphi(t) < \eta$ iken her $t \geq t_0 + T$ için $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ sağlanıyor ise, (4.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton, 2005b).

Tanım 4.10. Eğer (4.1) denkleminin sıfır çözümü kararlı değil ise (4.1) denkleminin sıfır çözümü kararsızdır (Burton, 2005b).

Tanım 4.11. Eğer $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ sayıları var öyle ki her $\delta > 0, \delta < \varepsilon$ için $\varphi: [0, t_0] \to R^n$ sürekli, $\varphi(t) \not\equiv 0$ ve $|\varphi(t)| < \delta$ ise $|x(t_1, t_0, \varphi)| \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $t_1 > t_0$ var ise, (4.1) denkleminin sıfır çözümü tamamen kararsızdır (Burton, 2005b).

Tanım 4.12. Sürekli ve pozitif tanımlı bir $W: R^n \to [0, \infty)$ fonksiyonuna bir wedge denir (Burton, 2005b).

Tanım 4.13. $W: [0, \infty) \to [0, \infty)$ bir sürekli fonksiyon, $W(0) = 0$, $s > 0$ olduğunda $W(s) > 0$ oluyorsa ve W artan ise W bir wedgedir (Burton, 2006).

Tanım 4.14. Bir $n \times n$ boyutlu bir matrisin tüm özdeğerleri negatif reel kısımlıysa bu takdirde söz konusu matris kararlıdır (Ahmad, Rama Mohana Rao, 1999).

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) \tag{4.2}$$

fonksiyonel diferansiyel denklemini ele alalım. $h > 0$ olmak üzere C, $[-h, 0]$ aralığından R^n'ye dönüşen sürekli fonksiyonların uzayı ve $\varphi \in C$ için $\|\varphi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(0)|$ olsun. (4.2) denkleminde x_t, $x_t(\theta) = x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0$ şeklinde tanımlı ve C uzayının bir elemanıdır. Ayrıca $F(t, \varphi) \in \Re^n$ ise $[0, c] \times C_H$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. C_H ise $\|\varphi\| \leq H$ olmak üzere $\varphi \in C$ fonksiyonlarından oluşan cümledir (Yoshizawa, 1966).

Lemma 4.1. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa,

i) $V(t, \phi)$ fonksiyoneli ϕ'ye göre yerel olarak Lipschitz şartını sağlar. Yani her kompakt $S \subset R^n$ ve $\gamma > t_0$ için $t \in [t_0, \gamma]$ ve $x, y \in C([t_0 - r, t], S)$ olacak şekilde

$$|V(t, x) - \mathrm{V(t, y)}| \leq K_{\gamma s} \|x - y\|_{[t_0 - r, t]}$$

sağlayan bir $K_{\gamma s}$ sabiti vardır.

ii) $Z(t, \phi)$ fonksiyoneli bir pozitif K sabiti için tek taraflı Lipschitz şartını sağlar. Yani $0 < t_1 < t_2 < \infty$ sağlayan bir t_1 ve t_2 için $\phi \in C_H$ olacak şekilde

$$Z(t_2, \phi) - Z(t_1, \phi) \leq K(t_2 - t_1)$$

elde edilir. Burada $Z: R_+ \times C_H \to [0, \infty)$ süreklidir.

iii) $w(s), w_1(s), w_2(s)$ ve $w_3(s)$ wedgeleri vardır ve $t \in R_+$ ve $x_t \in C_H$ olacak şekilde

$$W(\|\phi(0)\|) + Z(t,\phi) \leq V(t,\phi) \leq W_1(\|\phi(0)\|) + Z(t,\phi),$$
$$Z(t,\phi) \leq W_2(\|\phi\|_C)$$

ve

$$\dot{V}(t,x) \leq W_3(\|x(t)\|)$$

sağlar. Bu durumda (4.2) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton, 1983).

Teorem 4.4. $V(t,\varphi)$, $t \geq t_0 \geq 0$ ve $\varphi \in C([0,t],R)$ ile tanımlı bir Lyapunov fonksiyoneli olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın.

(i) $V(t,0) \equiv 0$ V fonksiyoneli sürekli ve φ'ye göre Lipschitz şartını sağlar.

(ii) $V(t,\phi) \geq W|\phi(t)|$. Burada W bir wedgedir.

(iii) W Lyapunov fonksiyonelinin yukarıda verilen gecikmeli diferansiyel denklemin çözümleri boyunca türevi negatif yarı tanımlıdır yani $V'(t,\varphi) \leq 0$ dır (Burton, 2006).

Bu tezde gecikmeli olarak verilen bütün integro-diferansiyel denklemler (4.2) fonksiyonel diferansiyel denkleminin bir özel halidir.

Bu tez boyunca ele alınacak bütün gecikmeli ve gecikmesiz integro-diferansiyel denklemler için çözümlerin var ve tek olduğu varsayılmaktadır.

5. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜMLERİN BAZI NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

Bu bölümde Burton ve Mahfoud (1983) tarafından belli formdaki lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı davranışlarıyla ilgili yapılan çalışmaların bir kısmı aşağıda verilmektedir.

5.1.Konvolüsyon Tipinde Bir Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Bazı Niteliksel Sonuçlar

Bu bölümde Burton ve Mahfoud (1983)’un ispatladığı bazı sonuçlar verilecektir. Burton ve Mahfoud (1983) çalışmalarında aşağıdaki konvolüsyon tipindeki

$$x' = Ax + \int_0^t C(t-s)x(s)ds \qquad (5.1)$$

skaler integro-diferansiyel denklemi ele aldı. Burada A bir sabit ve C fonksiyonu $0 \leq s \leq t < \infty$ için süreklidir.

Burton ve Mahfoud (1983), (5.1) denkleminin çözümlerinin niteliksel davranışları için aşağıdaki teoremleri ispatladı.

Teorem 5.1. (5.1) denklemindeki katsayı fonksiyonları için $A < 0, C(t) > 0$ ve $A + \int_0^\infty C(t)dt \neq 0$ şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1°) (5.1) denklemininin tüm çözümleri sıfıra yakınsar.

2°) $A + \displaystyle\int_0^\infty C(t)dt < 0.$

3°) (5.1) denkleminin her çözümü $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanıdır.

4°) (5.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

5°) (5.1) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır(Burton ve Mahfoud, 1983).

İspat. İspat için bir önceki özelliğin bir sonraki özelliği gerektirdiği gösterilecektir. Bu durumda 5°) sonucu 1°) özelliğini gerektirir. 1°)’nin sağlandığını kabul edelim ama $A + \int_0^\infty C(t)dt > 0$ olsun. Yeterince büyük t_0 seçilsin ve $A + \int_0^\infty C(s)ds > 0$ ve $[0,t_0)$ üzerinde başlangıç fonksiyonu olarak $\varphi(t) = 2$ alınsın. İddianın tersine $[t_0, \infty)$

üzerinde $x(t,\varphi) > 1$ olduğu varsayılsın. Eğer bu eşitsizlik sağlanmıyorsa, o zaman bir t_1 noktası vardır $x(t_1) = 1$ ve $x'(t_1) \leq 0$ olur. Ancak,

$$x'(t_1) = Ax(t_1) + \int_0^{t_1} C(t_1 - s)x(s)ds = A + \int_0^{t_1} C(s)x(t_1 - s)ds$$

$$\geq A + \int_0^{t_1} C(s)ds > A + \int_0^{t_0} C(s)ds > 0.$$

olması nedeniyle $x'(t_1) \leq 0$ olması mümkün değildir. Böylece1°), 2°)'yi sağlar. 2°)'nin sağlandığını ve

$$V(t,x) = |x| + \int_0^t \int_t^\infty C(u - s)du|x(s)|ds$$

Lyapunov fonksiyonelini göz önüne alalım.

Eğer $x(t)$, (5.1) denkleminin bir çözümü ise $x \neq 0$ için

$$V'(t,x) \leq A|x| + \int_0^t C(t - s)|x(s)|ds$$

$$+ \int_t^\infty C(u - t)du|x| - \int_0^t C(t - s)|x(s)|ds$$

$$= \left[A + \int_t^\infty C(u - t)du\right]|x| = \left[A + \int_0^\infty C(u)du\right]|x| = -\alpha|x|$$

elde ederiz. Burada $\propto > 0$.

Böylece,

$$V'(t,x) \leq -\alpha|x|$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliğin t_0 'dan t 'ye integrali alındığında, V fonksiyoneli pozitif tanımlı olduğundan

$$0 \leq V(t,x) \leq V\big(t_0, \varphi(t_0)\big) - \alpha \int_{t_0}^t |x(s)|ds$$

olur. V fonksiyoneli azalan ve pozitif tanımlı olduğundan dolayı da

$$\int_{t_0}^t |x(s)|ds \leq \alpha^{-1} V\big(t_0, \varphi(t_0)\big) = K > 0, K \in R.$$

Buna bağlı olarak

$$\int_{t_0}^\infty |x(s)|ds < \infty$$

olur. Böylece, $A + \int_0^\infty C(t)dt < 0$ şartı (5.1) denkleminin her çözümünün $L^1[0,\infty)$ da olmasını gerektirir.

İspatın geri kalan kısmı benzer şekilde kolaylıkla tamamlanabilir. Dolayısıyla burada verilmeyecektir.

Teorem 5.2. Eğer $A + \int_0^{\infty} |C(t)| dt < 0$ ise, bu takdirde (5.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton ve Mahfoud 1983).

İspat.

$$V(t, x(.)) = |x| + \int_0^t \int_t^{\infty} |C(u-s)| du |x(s)| ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ (5.1) denkleminin bir çözümü olsun. Bu Lyapunov fonksiyonelinin (5.1) denkleminin çözümleri boyunca türevi alındığında

$$F(t, s) = \int_t^{\infty} |C(u-s)| du$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V &= \frac{d}{dt}|x| + \frac{d}{dt}\int_0^t F(t,s)|x(s)|ds \\
&= \frac{x}{|x|}x' + F(t,t)|x(t)| + \int_0^t \frac{d}{dt}F(t,s)|x(s)|ds \\
&= \frac{x}{|x|}\left(Ax + \int_0^t C(t-s)x(s)ds\right) \\
&\quad + \int_t^{\infty} C(u-t)du|x(t)| - \int_0^t C(t-s)|x(s)ds| \\
&\le A|x| + \int_0^t |C(t-s)||x(s)|ds \\
&\quad + |x|\int_t^{\infty} C(u-t)du - \int_0^t C(t-s)|x(s)|ds
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t,x) &\le A|x| + \int_0^t |C(t-s)||x(s)|ds \\
&\quad + \int_t^{\infty} |C(u-t)|du|x| - \int_0^t |C(t-s)||x(s)|ds \\
&\le \left[A + \int_0^{\infty} |C(u)|du\right]|x| = -\alpha|x|\,, \alpha > 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna bağlı olarak

$$V'(t,x) \le -\alpha|x|$$

yazılabilir. Böylece, son eşitsizliğin t_0'dan t'ye integrali alındığında verilen integro-diferansiyel denklemin her x çözümünün $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olduğu görülür.

Uyarı 1. $A + \int_0^\infty |C(t)|dt < 0$ şartının yerine

$$A + \left|\int_0^\infty C(t)dt\right| < 0$$

şartı alınırsa, bu durumda (5.1) denkleminin sıfır çözümü kararsız olduğu görülebilir. Aşağıdaki örnekte de bu durum rahatlıkla gözlenebilir.

Örnek 5.1.

$$x' = -x + \int_0^t C(t-s)x(s)ds$$

skaler integro-diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, b pozitif bir sabit $C(t)$ fonksiyonu ise

$$C(t) = \begin{cases} bsint, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnekte verilen denklem

$$x' = -x + \int_0^t C(s)x(t-s)ds$$

formunda yazılabilir. $C(t)$ fonksiyonunun tanımı dikkate alındığında

$$x' = -x + b\int_0^t (sins)x(t-s)ds \qquad (\, 0 \le t \le 2\pi \text{ için}),$$

$$x' = -x + b\int_0^{2\pi} (sins)x(t-s)ds \qquad (t \ge 2\pi \text{ için})$$

ya da

$$x' = -x + b\int_0^t [\sin(t-s)]x(s)ds \qquad (\, 0 \le t \le 2\pi \text{ için}),$$

$$x' = -x + b\int_{t-2\pi}^t [\sin(t-s)]x(s)ds \qquad (t \ge 2\pi \text{ için})$$

olduğu görülebilir.

$t_0 = 2\pi$ ve $[0,t_0]$ başlangıç aralığında, λ bir sabit olmak üzere, başlangıç fonksiyonu $\varphi(t) = \lambda e^{t-2\pi}$ olsun. b sabitinin bazı seçimleri için $x(t) = \lambda e^{t-t_0}$ fonksiyonunun $[0,t_0]$ aralığının üzerinde $x(t) = \varphi(t)$ olmak üzere yukarıda verilen integro-diferansiyel denklemin bir çözümü olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$\int_{t-2\pi}^t e^s \sin(t-s)\, ds = (1/2)e^t(1-e^{-2\pi})$$

olduğundan dolayı, $b = [4e^{2\pi}] \,/\, (e^{2\pi} - 1)$ seçimi için $[0, \infty]$ üzerinde $x(t) = \varphi(t)$ olmak üzere $x(t) = \lambda e^{t-t_0}$ ifadesi

$$x' = -x + \int_0^t C(s)x(t-s)ds$$

denkleminin bir çözümüdür. $t \geq t_0$ olması sebebiyle bu çözümün kararsız olduğu açıktır.

$C(t)$ $L^1[0, \infty]$ uzayının bir elemanı olup aynı zamanda sınırlıdır ve

$$A + \left| \int_0^\infty C(t)dt \right| < 0$$

şartını sağlar (Burton ve Mahfoud, 1983).

Yukarıdaki denklemin sıfır çözümünün kararlılığı için gerek ve yeter şartlar içeren bir teorem verilmektedir. Literatürdeki sonuçların çoğunluğu kararlılık için yeter şartlar içermektedir. Dolayısıyla aşağıda verilecek olan teorem gerek ve yeter şartlar içerdiğinden belirgin bir öneme sahiptir.

Teorem 5.2. $\int_0^\infty |C(v)|dv < |A|$ olsun. O zaman (5.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart $A < 0$ olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

Teorem 5.3. $A + \int_0^\infty C(v)dv \neq 0$ ve $\int_0^\infty \left| \int_t^\infty C(v)dv \right| dt < 1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, (5.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart $A + \int_0^\infty C(v)dv < 0$ olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. $Q \neq 0$ durumunda $Q_1 = Q_2 = |Q|$ alalım. Şimdi

$$\int_0^t |G(t-s)|ds = \int_0^t |G(v)|dv \leq \int_0^\infty |G(t)|dt = \int_0^\infty \left| \int_t^\infty C(v)dv \right| dt < 1$$

ve

$$\int_t^\infty |G(u-t)|\, du = \int_0^\infty |G(t)|dt < 1$$

yazılabilir. Teorem 5.3'ün tüm şartları sağlandığından ispat tamamlanır.

Teorem 5.4.

$$\int_0^\infty \left| \int_t^\infty C(v)dv \right| dt < 1 \tag{5.2}$$

olsun. Bu takdirde (5.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart $A + \int_0^\infty C(v)dv \leq 0$ olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. $A + \int_0^\infty C(v)dv < 0$ için ispat önceden verildiğinden sadece $A + \int_0^\infty C(v)dv = 0$ için kararlılığın ispatlanması yeterlidir.

(5.1) denklemi

$$x' = (d/dt)\int_0^t G(t-s)x(s)ds$$

olarak ifade edilebilir.

$t_0 \geq 0$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\delta > 0$ olmak üzere, eğer $\varphi: [0, t_0] \to R$ başlangıç fonksiyonu sürekli ve $|\varphi(t)| < \delta$ ise her $t \geq t_0$ için $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ olduğu gösterilecektir.

Yukarıda verilen denkleminin t_0 ‘dan t’ye integrali alınırsa,

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_0^t G(t-s)x(s)ds - \int_0^{t_0} G(t_0 - s)\,\varphi(s)ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak

$$|x(t)| \leq \delta + \int_0^t |G(t-s)||x(s)|\,ds + \delta\int_0^{t_0} |G(t_0 - s)|\,ds$$

$$\leq 2\delta + \int_0^t |G(t-s)||x(s)|\,ds$$

yazılabilir.

Yukarıdaki kabuller altında kolaylıkla

$|x(t)| \leq 2\delta + \varepsilon \int_0^t |G(t-s)|\,ds \leq 2\delta + \varepsilon \int_0^\infty |G(v)|\,dv = 2\delta + \varepsilon P$

elde edilir. Burada, $P = \int_0^\infty |G(v)|\,dv$ dir. Böylece $\delta < \varepsilon(1-P)/2$ olmak kaydıyla $|x(t)| \leq 2\delta + \varepsilon P < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. Teorem 5.1 ve 5.3 ile aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.5. Eğer $A < 0, C(t) > 0, A + \int_0^\infty C(v)dv \neq 0$ ve $\int_0^\infty \left|\int_t^\infty C(v)dv\right|dt < 1$ ise o zaman (5.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart çözümün kararlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

Örnek 5.2. Aşağıdaki 1. mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemi ele alalım:

$$x' = (1-\varepsilon)x + (2\varepsilon - 1)\int_0^t e^{(2\varepsilon-1)(t-s)}x(s)ds.$$

Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ için $A + \int_0^\infty C(v)dv = -\varepsilon < 0$ ve $\int_0^\infty \left|\int_t^\infty C(v)dv\right|dt = 1/(1-2\varepsilon) > 1$ iken sıfır çözüm kararsızdır. ε’u istediğimiz kadar sıfıra yakın seçebiliriz.

İspat. Yukarıda verilen denklemin t’ye göre türevi alındığında,

$$\frac{d}{dt}x' = \frac{d}{dt}[(1-\varepsilon)x] + \frac{d}{dt}\left[(2\varepsilon-1)\int_0^t e^{(2\varepsilon-1)(t-s)}x(s)ds\right]$$

olur. Buradan yola çıkarak,

$$x'' - \varepsilon x' + \varepsilon(1-2\varepsilon)x = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin kararteristik denklemi ise

$$\lambda^2 - \varepsilon\lambda + \varepsilon(1-2\varepsilon) = 0$$

olur.

Karakteristik köklerinin tamamı $0<\varepsilon < \frac{1}{2}$ için pozitif reel kısma sahiptir. Böylece yukarıda verilen Volterra integro-diferansiyel denklemi mevcut şartlar altında kararsızdır. Ayrıca, eğer (2.17) şartı sağlanırsa bu takdirde $A < 0$ ve $C(t) > 0$ için $\int_0^\infty |C(t)|dt > |A|$ eşitsizliği verilen denklemin sıfır çözümünün kararsızlığını gerektirir (Bakınız Teorem 5.4.).

5.2. Lineer Bir İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Bazı Niteliksel Sonuçlar

Şimdi yukarıda verilen integro-diferansiyel denklemden daha genel olan skaler

$x' = A(t)x + \int_0^t C(t-s)x(s)ds.$ (5.3)

integro-diferansiyel denklem ele alınacaktır.

Burada $A: [0,\infty) \to R$ sürekli ve C, $0 \le s \le t < \infty$ için sürekli fonksiyonlardır. $t \ge 0$ için $\int_t^\infty |C(t,s)|$'nin tanımlı olduğu farz edilmektedir.

Teorem 5.6. $\alpha > 0$ olacak şekilde bir sabit ve

$\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du - 2|A(t)| \le -\alpha$ (5.4)

olduğunu varsayalım. (5.3) denkleminin kararlı olması için gerek ve yeter şart $A(t) < 0$ olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. $A(t) < 0$ olduğunu varsayalım ve aşağıdaki Lyapunov fonksiyonelini göz önüne alalım:

$$V(t, x(.)) = x^2 + \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|du x^2(s)ds.$$

(5.3)'ün bir $x(t)$ çözümü boyunca $V(t, x(.))$'nin türevi alındığında

$$V'(t, x(.)) \le A(t)x^2 + 2\int_0^t |C(t,s)||x(s)||x|ds$$
$$+ \int_t^\infty |C(u,t)|du x^2 - \int_0^t |C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$\leq A(t)x^2 + \int_0^t |C(t,s)|(x^2(s) + x^2)ds$$

$$+ \int_t^\infty |C(u,t)|dux^2 - \int_0^t |C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$= \left[A(t) + \int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du\right] x^2 \leq -\alpha x^2$$

ifadesi elde edilir.

V pozitif tanımlı ve $V' \leq 0$ olması nedeniyle, Lyapunov'un kararlılık teoremi gereği $x = 0$ kararlıdır.

Şimdi ise (5.3)'ün kararlı, ancak tersine $A(t) > 0$ olduğunu varsayalım ve bunun bir çelişkiye yol açacağını gösterelim.

$$W\big(t, x(.)\big) = x^2 - \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|dux^2(s)ds$$

fonksiyonelini göz önüne alalım.

Bu fonksiyonelin (5.3) denklemi boyunca t bağımsız değişkenine göre türevi alınıp, mevcut şartlar ve bazı elemanter eşitsizlikler yardımıyla

$$W'\big(t, x(.)\big) \geq 2Ax^2 - 2\int_0^t |C(t,s)||x(s)||x|ds$$

$$- \int_t^\infty |C(u,t)|dux^2 + \int_0^t |C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$\geq 2Ax^2 - \int_0^t |C(t,s)|(x^2(s) + x^2)ds$$

$$- \int_t^\infty |C(u,t)|dux^2 + \int_0^t |C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$= \left[2A - \left(\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du\right)\right] x^2 \geq \alpha x^2$$

olduğu görülür.

Şimdi, verilen her $t_0 \geq 0$ ve $\delta > 0$ için φ:[0, t_0] $\to R$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $|\varphi(t)| < \delta$ iken $W(t_0, \varphi(.)) > 0$ olduğu gösterilecektir.

Eğer $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ (5.3)'nin bir çözümü ise,

$$x^2(t) \geq W\big(t, x(.)\big) \geq W\big(t_0, \varphi(.)\big) + \alpha \int_{t_0}^t x^2(s)ds \tag{5.5}$$

$$\geq W\big(t_0, \varphi(.)\big) + \alpha \int_{t_0}^t W(t_0, \varphi(.))ds$$

$$= W\big(t_0, \varphi(.)\big) + \alpha W\big(t_0, \varphi(.)\big)(t - t_0)$$

elde edilir. Buna bağlı olarak $t \to \infty$ iken $|x(t)| \to \infty$ olur. Dolayısıyla bu bir çelişki belirtir. $A(t) > 0$ olamaz. $A(t) < 0$ olmalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 1. Eğer (5.4) şartına ilaveten $A(t) < 0$ ve sınırlı olursa bu takdirde, (5.3) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı olur.

İspat. Bu sonucun ispatında yine aşağıdaki

$$V\big(t, x(.)\big) = x^2 + \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)| du x^2(s) ds$$

Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır. Bu fonksiyonelin (5.3) denklemi boyunca türevi alındığında

$$V'\big(t, x(.)\big) \leq -\alpha x^2$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlik (5.3) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğunu gösterir. Böylece, $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olur. Bu eşitsizliğin t_0' dan t' ye integrali alınırsa

$$V\big(t, x(t)\big) - V\big(t_0, x(t_0)\big) \leq -\alpha \int_{t_0}^t x^2(s) ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da

$$\alpha \int_{t_0}^t x^2(s) ds \leq \alpha \int_{t_0}^t x^2(s) ds + V\big(t, x(t)\big) \leq V\big(t_0, x(t_0)\big)$$

yazılabilir. V fonksiyoneli pozitif tanımlı olduğundan

$$V\big(t_0, x(t_0)\big) = K > 0, (K \in R)$$

alabiliriz. Böylece

$$\int_{t_0}^t x^2(s) ds \leq \alpha^{-1} K$$

elde edilir. Bu ifade ise (5.3) denkleminin x çözümünün kare integrallenebilir olduğunu gösterir.

V fonksiyonelinin tanımı ve azalan olduğu dikkate alındığında

$$x^2 \leq V\big(t, x(t)\big) \leq V\big(t_0, x(t_0)\big) = K,$$

yani

$$x^2 \leq K$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise (5.3) denklemin çözümlerinin sınırlı olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 2. Eğer (5.4) sağlanır ve $A(t) > 0$ ise (5.3) denkleminin sıfır çözümünün kararsız olduğu kolaylıkla gösterilebilir (Burton&Mahfoud, 1983).
Uyarı 3. Yukarıdaki sonuçlar göz önüne alındığında bu sonuçların uygulanması için $t \geq 0$ için $A(t) \neq 0$ olmalıdır. Yani $A(t) \neq 0$ olmadığı müddetçe yukarıdaki teoremler uygulanamaz. Bir sonraki sonuçta $t \geq 0$ için $A(t) = 0$ olma olasılığı incelenecektir (Burton&Mahfoud, 1983).
$G(t,s)$ sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = C(t,s)$$

ve

$$Q(t) = A(t) - G(t,t)$$

olsun. Bu takdirde (5.3) denklemi

$$x' = Q(t)x + (d/dt)\int_0^t G(t,s)x(s)ds \tag{5.6}$$

biçiminde yazılabilir.
Teorem 5.7. Q_1, Q_2, J ve R, $(R < 2)$, sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $0 < Q_1 \leq |Q(t)| \leq Q_2$.

(ii) $\int_0^t |G(t,s)|ds \leq J < 1$.

(iii) $0 \leq t < \infty$ için $\int_0^t |G(t,s)|ds + \int_0^\infty |G(u,t)|du \leq RQ_1/Q_2$.

Ayrıca $|G(t,s)| \leq h(t-s)$ olacak şekilde bir sürekli $h: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu olduğunu farzedelim ve $u \to \infty$ için $h(u) \to 0$ olsun. Bu takdirde (5.6) denkleminin sıfır çözümü kararlı olması için gerek ve yeter şart $Q(t) < 0$ olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).
İspat. $(\Longrightarrow)$: $Q(t) < 0$ olsun.

$$V(t, x(.)) = \left(x - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)^2 + Q_2 \int_0^t \int_t^\infty |G(u,s)|du x^2(s)ds$$

fonksiyonelini ele alalım.
(5.6)' nın bir $x(t)$ çözümü boyunca V fonksiyonelinin türevi alınırsa, yukarıda verilen şartlar altında

$$V'(t, x(.)) = 2\left(x - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)Q(t)x$$

$$+ Q_2 \int_t^\infty |G(u,t)|dux^2 - Q_2 \int_0^t |G(t,s)|x^2(s)ds$$

$$\leq 2Qx^2 + Q_2 \int_0^t |G(t,s)|(x^2(s) + x^2)ds + Q_2 \int_t^\infty |G(u,t)|dux^2$$

$$- Q_2 \int_0^t |G(t,s)|x^2(s)ds$$

$$= \left[2Q + Q_2\left(\int_0^t |G(t,s)|ds + \int_t^\infty |G(u,t)|du\right)\right]x^2 \leq [2Q + RQ_1]x^2$$

$$\leq [-2Q_1 + RQ_1]x^2 = -\beta x^2, \qquad \beta > 0$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ verilsin. $[0, t_0]$ üzerinde $|\varphi(t) < \delta|$ olduğunda tüm $t \geq t_0$ için $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını bulalım.

$t \geq t_0$ için $V'(t, x(.)) \leq 0$ (azalan) olması nedeniyle, verilen şartlara bağlı olarak

$$V(t, x(.)) \leq V(t_0, \varphi(.))$$

$$= \left|\varphi(t_0) - \int_0^{t_0} G(t_0,s)\varphi(s)ds\right|^2 + Q_2 \int_0^{t_0} \int_{t_0}^\infty |G(u,s)|du\varphi^2(s)ds$$

$$\leq \delta^2 \left[1 + \int_0^{t_0} |G(t_0,s)|ds\right]^2 + Q_2\delta^2 \int_0^{t_0} \int_{t_0}^\infty |G(u,s)|duds \leq \delta^2 N^2$$

yazılabilir. Burada

$$N^2 = (1 + RQ_1/Q_2)^2 + Q_2 \int_0^{t_0} \int_{t_0}^\infty |G(u,s)|duds$$

dir. V fonksiyonelinin tanımı göz önüne alındığında,

$$V(t, x(.)) \geq \left(x(t) - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)^2 \geq \left(|x(t)| - \left|\int_0^t G(t,s)x(s)ds\right|\right)^2$$

yazılabilir. $V(t, x(.)) \leq \delta^2 N^2$ olması nedeniyle

$$|x(t)| - \left|\int_0^t G(t,s)x(s)ds\right| \leq \delta N$$

ya da

$$|x(t)| \leq \delta N + \int_0^t |G(t,s)||x(s)|ds$$

olur. $\delta < \varepsilon(1 - J)/N$ olmak koşuluyla her $t \geq t_0$ için

$$|x(t)| < \delta N + \varepsilon \int_0^t |G(t,s)|ds \leq \delta N + J\varepsilon < \varepsilon$$

yazılabilir.

(5.3) ve (5.6) aynı denklemler olduğundan (5.3) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır.

$Q(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$W\big(t, x(.)\big) = \left(x - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)^2 - Q_2 \int_0^t \int_t^\infty |G(u,s)|du x^2(s)ds$$

Lyapunov fonksiyonelini ele alalım. Bu Lyapunov fonksiyonelinin (5.6) denklemi boyunca türevini alalım.

$$W'\big(t, x(.)\big) = 2\left(x - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)Q(t)x$$

$$-Q_2 \int_t^\infty |G(u,t)|du x^2 + Q_2 \int_0^t |G(t,s)|x^2(s)ds.$$

Teoremin şartlarına bağlı olarak

$$\geq 2Qx^2 - Q_2 \int_0^t |G(t,s)|(x^2(s) + x^2)ds$$

$$-Q_2 \int_t^\infty |G(u,t)|du x^2 + Q_2 \int_0^t |G(t,s)|x^2(s)ds$$

$$= \left[2Q - Q_2\left(\int_0^t |G(t,s)|ds + \int_t^\infty |G(u,t)|du\right)\right]x^2$$

$$\geq [2Q_1 + RQ_1]x^2 = \gamma x^2, \gamma = 2Q_1 + RQ_1$$

elde edilir.

Herhangi bir $t_0 \geq 0$ ve $\delta > 0$ sayıları verilsin. Bir $\varphi: [0, t_0] \rightarrow R$ sürekli başlangıç fonksiyonu bulunabilir öyle ki $|\varphi(t)| < \delta$ olmak üzere $W(t_0, \varphi(.)) > 0$ olur

$x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ (5.3)'ün bir çözümü ise

$$\left(x(t) - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)^2 \geq W\big(t, x(.)\big) \geq W\big(t_0, \varphi(.)\big) + \gamma \int_{t_0}^t x^2\,(s)ds$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $x(t)$ nin sınırlı olmadığı gösterelim. Tersine eğer $x(t)$ sınırlı ise, bu takdirde $\int_0^t |G(t,s)|$ sınırlı olur. Buna bağlı olarak $\int_0^t G(t,s)x(s)ds$ ifadesi de sınırlı olur ve bundan dolayı $x^2(t)$, $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olur.

Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\left(\int_0^t |G(t,s)||x(s)|ds\right)^2 = \left(\int_0^t |G(t,s)|^{1/2}\,|G(t,s)|^{1/2}|x(s)|ds\right)^2$$
$$\leq \int_0^t |G(t,s)|ds \int_0^t |G(t,s)|x^2(s)ds$$

yazılabilir. Son integral bir L^1 fonksiyonunun konvolüsyonu olup $t \to \infty$ iken integral sıfıra gider.

Böylece $t \to \infty$ iken $\int_0^t G(t,s)x(s)ds \to 0$ olur.

$\left|x - \int_0^t G(t,s)x(s)ds\right| \geq \left[W(t_{0,}\,\varphi(.))\right]^{1/2}$

olduğundan dolayı, yeterince büyük T ler için tüm $t \geq T$ ve $\alpha > 0$ sayısı için $|x(t)| \geq \alpha$ olur. Bu ise $x^2(t)$ nin , $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olmasıyla çelişir. Böylece $x(t)$ sınırsızdır ve (5.3) denkleminin sıfır çözümü kararsızdır. Bu da ispatı tamamlar.

$C(t,s) = C(t-s)$ ve $A(t) = A$ sabit matris olduğundan, $\left|\int_0^\infty C(v)dv\right| < \infty$ ve $G(t) = -\int_t^\infty C(v)dv$ olduğunu varsayalım.

$$Q = A - G(0) = A + \int_0^\infty C(v)dv$$

yazılabilir. Yukarıda verilen Teorem 5.6 ve Teorem 5.7 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

5.3. Konvolüsyon Tipinde Bir Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemi İçin Bazı Niteliksel Sonuçlar

Şimdi ise Burton ve Mahfoud (1983) tarafından Teorem 5.4' ün değiştirilmiş bir biçimi için verdiği sonuçlar ele alınacaktır.

Burton ve Mahfoud (1983) aynı çalışmada (5.1) denkleminin vektörel biçimi olan aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklem sistemini ele aldı:

$x' = Ax + \int_0^t C(t-s)x(s)ds.$ (5.7)

Burada A ve C, $n \geq 1$ olmak üzere $n \times n$ boyutlu matrislerdir. $C(t)$, $0 \leq t < \infty$ aralığında süreklidir ve A sabit bir matristir. $Z(t)$, aşağıdaki matris Volterra integro-diferansiyel denklemini ve

$Z(t)' = AZ(t) + \int_0^t C(t-s)Z(s), \qquad Z(0) = I$ (5.8)

başlangıç şartını sağlayan bir $n \times n$ boyutlu matris olsun.

<u>Teorem 5.8.</u> $M > 0$ bir sabit olmak üzere $0 \leq t_0 < \infty$ ve $0 \leq t < \infty$ için

$\int_0^t \int_0^{t_0} |C(u+v)| du dv \leq M$ (5.9)

şartı sağlansın. Bu takdirde aşağıda verilecek olan on ifade birbirine denktir.

(i) $t \to \infty$ iken $Z(t) \to 0$ olur.

(ii) (5.7)'nin tüm $x(t, t_0, \varphi)$ çözümleri $t \to \infty$ iken sıfıra gider.

(iii) (5.7)'nin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

(iv) $Z(t)$ $L^1[0, \infty]$ uzayının bir elemanıdır ve $Z(t)$ sınırlıdır.

(v) $F: [0, \infty) \to R^n$ fonksiyonu sınırlı ve sürekli olmak üzere

$x' = Ax + \int_0^t C(t-s)x(s)ds + F(t))$ (5.10)

Volterra integro-diferansiyel sisteminin her $x(t, 0, x_0)$ çözümü $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlıdır.

(vi) (5.7)'nin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Ayrıca aşağıdaki ifadeler de eşdeğerdir.

(vii) $Z(t)$ sınırlıdır.

(viii) (5.7)'nin tüm $x(t, t_0, \varphi)$ çözümleri sınırlıdır.

(ix) (5.7)'nin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

(x) (5.7)'nin sıfır çözümü kararlıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

<u>İspat.</u> $t \to \infty$ iken $Z(t) \to 0$ olsun. Öyleyse $t \geq t_0$ için (3.1)'in bir $x(t, t_0, \varphi)$ çözümü

$$x' = Ax + \int_0^{t_0} C(t-s)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^t C(t-s)x(s)ds$$

denkleminin bir çözümü olarak göz önüne alınabilir. Sağdaki ikinci terim $F(t)$ gibi düşünülebilir. $y(t) = x(t + t_0)$ dönüşümü yapılırsa buna bağlı olarak,

$$y'(t) = Ay(t) + \int_0^t C(t-s)y(s)ds + \int_0^{t_0} C(t + t_0 - s)\varphi(s)ds$$

denklemini elde ederiz. $F: [0, \infty) \to R^n$ sürekli olmak üzere, $x' = Ax + \int_0^t C(t-s)x(s)ds + F(t)$ denklemine parametrelerin değişimi yöntemi uygulanarak bulunan $x(t, 0, x_0) = Z(t)x_0 + \int_0^t Z(t-s)F(s)ds$ ifadesinden

$$y(t) = Z(t)\varphi(t_0) + \int_0^t Z(t-u) \int_0^{t_0} C(u + t_0 - s)\varphi(s)dsdu$$

yazılabilir. $s = t_0 - v$ alalım. Buna bağlı olarak

$$y(t) = Z(t)\varphi(t_0) + \int_0^t Z(t-u)\int_0^{t_0} C(u+v)\varphi(t_0-v)dvdu$$

elde edilir.

$[0, t_0]$ aralığında $|\varphi(t)| \leq K, K > 0$, olduğundan

$$|y(t)| \leq K|Z(t)| + K\int_0^t |Z(t-u)| \int_0^{t_0} |C(u+v)|dvdu$$

yazılabilir.

(i)'deki şarttan dolayı yukarıdaki eşitsizliğin konvolüsyon terimi ile $|Z(t)|$ terimi $t \to \infty$ için sıfıra gittiğinden açıkça yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $t \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Böylece (i) özelliği (ii) özelliğini gerektirir (Burton ve Mahfoud, 1983).

Şimdi ise (ii) özelliği sağlansın, yani $t \to \infty$ için $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ olsun. Bu ise $t \to \infty$ için $Z(t) \to 0$ olmasını gerektirir.

$$\int_0^t \int_0^{t_0} |C(u+v)|dudv \leq M$$

olması nedeniyle

$$\int_0^t |Z(t-u)| \int_0^{t_0} |C(u+v)|dvdu$$

integrali t_0'a göre düzgün olarak $t \to \infty$ için sıfıra gider.

Böylece (ii) özelliği (iii) yi sağlar (Burton ve Mahfoud, 1983).

(iii) nin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $Z(t) \in L'[0, \infty]$ olduğu görülebilir (Bknz. Miller, 1971).

(iv)ün sağlandığını kabul edelim. Daha sonra (5.10)'un $[0, \infty)$ aralığındaki $x(t, 0, x_0)$ çözümleri

$$x(t) = Z(t)x(0) + \int_0^\infty Z(t-s)F(s)ds$$

olarak ifade edilir.

İspatın geri kalan kısımları için Burton ve Mahfoud (1983)'a başvurulabilir.

5.4. Lineer Bir Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemi İçin Bazı Niteliksel Sonuçlar

Burton ve Mahfoud (1983) Teorem 5.6'yı aşağıda verilen Volterra vektör integro-diferansiyel denklem sistemi için genelleştirdi:

$x' = Ax + \int_0^t C(t,s)x(s)ds.$ (5.11)

Burada A ve C, $n \times n$ boyutlu matrisler, $n \geq 1$, A sabit bir matris ve C ise $0 \leq s \leq t < \infty$ için süreklidir.

Sonuca ulaşmak için Burton ve Mahfoud (1983),

$A^T B + BA = -I$ (5.12)

eşitliği sağlanacak şekilde simetrik ve sabit bir $n \times n$ boyutlu B matrisi buldu.

Yukarıda verilen denklem kararlılık teorisinde A matrisi kararlı olmak kaydıyla standart bir denklem olarak karşımıza çıkar. Eğer A matrisinin tüm karakteristik kökleri negatif reel kısımlı ise bu takdirde bir tek simetrik ve negatif tanımlı bir B matrisi vardır. Bu B matrisi (5.12) denkleminin bir çözümü olur.

Burton ve Mahfoud (1983), (5.11) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şartlar içeren aşağıdaki teoremi ispatladı:

Teorem 5.9. B simetrik bir matris olmak üzere (5.12) şartına ilaveten aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını varsayalım:

$|B|\left(\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du\right) \leq M < 1,\ M > 0\,, M \in R.$ (5.13)

Bu takdirde (5.11) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart B matrisinin pozitif tanımlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat.

$$V\big(t,x(t)\big) = x^T Bx + |B| \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|du|x(s)|^2 ds$$

Lyapunov fonksiyonelini alalım.

$$V(t,0) = 0, V\big(t,x(t)\big) \geq x^T Bx \geq \lambda_m \|x\|^2$$

olduğu açıktır. Burada λ_m pozitif sayısı B matrisinin en küçük özdeğeridir. Bu ifadeler bize V fonksiyonelinin pozitif tanımlı olduğunu verir.

Yukarıdaki Lyapunov fonksiyonelinin (5.11) diferansiyel denkleminin bir $x(t)$ çözümü boyunca türevi alınırsa,

$$V'(t,x(.)) = \left[x^T A^T + \int_0^t x^T(s) C^T(t,s) ds\right] Bx + x^T B \left[Ax + \int_0^t C(t,s) x(s) ds\right]$$

$$+ |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 - |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 \, ds$$

$$= -|x|^2 + 2x^T B \int_0^t C(t,s) x(s) ds$$

$$+ |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 - |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 \, ds$$

$$\leq -|x|^2$$

$$+ |B| \int_0^t |C(t,s)| (|x|^2 + |x(s)|^2) ds$$

$$+ |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 - |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 \, ds$$

$$= \left[-1 + |B| \int_0^t |C(t,s)| ds + \int_t^\infty |C(u,s)|\right] |x|^2 \leq [-1 + M] |x|^2$$

$$= -\alpha |x|^2$$

elde edilir. Burada $\alpha = 1 - M > 0$ dır. Elde edilen bu sonuçlar B matrisinin pozitif tanımlı olması koşuluyla verilen Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün kararlı ve hatta asimptotik kararlı olmasını garanti eder.

Şimdi ise, $x = 0$ çözümünün kararlı olduğunu ancak tersine B matrisinin pozitif tanımlı olmadığını varsayalım. Bu takdirde bir $x_0 \neq 0$ vardır öyle ki $x_0^T B x_0 \leq 0$ olur. Eğer $x_0^T B x_0 = 0$ ise bu takdirde (5.11) denkleminin $x(t, 0, x_0)$ çözümü boyunca $V(0, x_0) = x_0^T B x_0 = 0$ olur. Ayrıca $V'(t, x(.)) \leq -\alpha |x|^2$ olması nedeniyle bir $t_1 > 0$ sayısı vardır öyle ki $V(t_1, x(.)) < 0$ olur. Buna bağlı olarak da $x^T(t_1) B x(t_1) < 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Yani B matrisi için başta kabul ettiğimiz ifade doğru değildir.

Eğer B pozitif tanımlı ise tüm sıfırdan farklı x'ler için $x^T B x > 0$ olur. Bundan dolayı $V(t, x(.))$ pozitif tanımlıdır ve $V'_{(5.11)}(t, x(.))$ negatif tanımlıdır. Böylece, $x = 0$ kararlıdır.$x = 0$ kararlı olduğunu varsayalım fakat B pozitif tanımlı olmasın. Öyleyse $x_0^T B x_0 \leq 0$ olacak şekilde bir $x_0 \neq 0$ vardır. Eğer $x_0^T B x_0 = 0$ ise, $x(t, 0, x_0)$ çözümü boyunca $V(0, x_0) = x_0^T B x_0$=0 ve$V'(t, x(.)) \leq -\alpha |x|^2$ olur öyle ki bazı $t_1 > 0$ ler için $V(t_1, x(.)) < 0$ elde edilir. Böylece $x^T(t_1) B x(t_1) < 0$ olur.

Bundan dolayı, eğer $x \neq 0$ için $x^T Bx$ her zaman pozitif değildir, $x_0^T Bx_0$<0 olan bir $x_0 \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

$\varepsilon = 1$ ve $t_0 = 0$ olsun. $x = 0$'dan itibaren kararlıdır. $|x_0| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır öyle ki her $t \geq 0$ için $|x(t, 0, x_0)| < 1$ sağlar. $|x_0| < \delta$ ve $x_0^T Bx_0 < 0$ olacak şekilde bir x_0 seçebiliriz. $x(t) = x(t, 0, x_0)$ alınırsa,

$$x^T(t)Bx(t) \leq V\big(t, x(.)\big) \leq V(0, x_0) - \alpha \int_0^t |x(s)|^2 ds$$

$$\leq x_0^T Bx_0 - \alpha \int_0^t |x(s)|^2 ds$$

elde ederiz.

Yeterince büyük t'ler için $x(t)$'nin sınırlı olduğu gösterilecektir. Aksini farzedersek, monoton olarak sonsuza giden bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $x\{t_n\} \to 0$ olur. Bundan dolayı $x^T(t_n)Bx(t_n) \to 0$ olur bu da $x^T(t)Bx(t) \leq x_0^T Bx_0 < 0$ ile çelişir.

Böylece $|x(t)|^2 \geq \gamma$ olan bir γ vardır öyle ki $x^T(t)Bx(t) \leq x_0^T Bx_0 - \alpha\gamma t$ sağlamalıdır. Bu da $t \to \infty$ iken $|x(t)| \to \infty$ ni gerektirir. Bu $|x(t)| < 1$ ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Eğer $C(t, s) = C(t - s)$ ise, (5.11) sistemi

$$x' = Ax + \int_0^t C(t - s)x(s)ds \tag{5.14}$$

denklemine indirgenir ve (5.13) ise $2|B| \int_0^\infty |C(v)|dv < 1$ eşitsizliğine indirgenir. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşırız.

<u>Sonuç 2.</u> Eğer simetrik bir B matrisi için $A^T B + BA = -I$ eşitliği ve

$$2|B| \left| \int_0^\infty C(v) \right| dv < 1$$

eşitsizliği sağlanırsa, (5.14) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart B matrisinin pozitif tanımlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

Şimdi ise B matrisi yine simetrik ve pozitif tanımlı olmak ile birlikte

$$A^T B + BA = I \tag{5.15}$$

eşitliğini sağlasın.

<u>Teorem 5.10.</u> (5.15) şartına ilaveten aşağıdaki şartın sağlandığını varsayalım:

$$|B| \left(\int_0^t \left| C(t, s)ds + \int_t^\infty |C(u, t)du| \right| \right) \leq M < 1.$$

Bu takdirde (5.11) denkleminin sıfır çözümü tamamen kararsızdır. Ayrıca, bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\delta > 0$ için $|\varphi(t)| < \delta$ olacak şekilde sürekli bir $\varphi: [0, t_0] \rightarrow R^n$ fonksiyonu vardır öyle ki her $t \geq t_0$ için $|x(t, t_0, \varphi)| \geq [c_1 + c_2(t - t_0)]^{1/2}$ olur. Burada c_1 ve c_2, t_0 ve φ'ye bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat.

$$V(t,x) = x^T B x - |B| \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)| du |x(s)|^2 ds$$

Lyapunov fonksiyonelinin (5.11) diferansiyel denklem sisteminin bir $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ çözümü boyunca türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
V'(t,x) &= \left[x^T A^T + \int_0^t x^T(s) C^T(t,s) ds\right] Bx + x^T B \left[Ax + \int_0^t C(t,s) x(s) ds\right] \\
&\quad - |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 + |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 ds \\
&= x^T x + 2 \int_0^t x^T B C(t,s) x(s) ds \\
&\quad - |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 + |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 ds \\
&\geq |x|^2 - 2|B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)| |x| ds \\
&\quad - |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 + |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 ds \\
&\geq |x|^2 - |B| \int_0^t |C(t,s)| (|x|^2 + |x(s)|^2) ds \\
&\quad - |B| \int_t^\infty |C(u,t)| du |x|^2 + |B| \int_0^t |C(t,s)| |x(s)|^2 ds \\
&\geq \left[1 - |B| \left(\int_0^t |C(t,s)|\, ds + \int_t^\infty |C(u,t)| du \right)\right] |x|^2 \\
&\geq [1 - M] |x|^2 = \gamma |x|^2
\end{aligned}$$

olur. Burada $\gamma = 1 - M > 0$ dır.

φ fonksiyonu $[0, t_0]$ aralığında seçilirse, $V(t_0, \varphi) > 0$ olur. Özellikle $t_0 = 0$ alınırsa, bir $\varphi(0) \neq 0$ için $V(0, \varphi) > 0$ bulunur. Bu durumda her $t \geq t_0$ için,

$$|B| |x(t)|^2 \geq x^T(t) B x(t) \geq V(t,x) \geq V(t_0, \varphi) + \gamma \int_{t_0}^t |x(s)|^2 ds$$

olur. $|x(t)|^2 \geq V(t_0, \varphi)$ iken

$$|B||x(t)|^2 \geq V(t_0, \varphi) + \gamma V(t_0, \varphi)\,(t - t_0)/|B|$$

olarak bulunur.

Eğer $t_0 = 0$ ve $\varphi(0) \neq 0$ olarak alınırsa,

$$|x(t)|^2 \geq [\varphi^T(0)B\varphi(0)]/|B| + (\gamma/|B|^2)[\varphi^T(0)B\varphi(0)]t$$

olur. Böylece bu ispat da tamamlanmış olur.

Bir $n \times n$ boyutlu $G(t)$ matrisi ile

$$\partial G(t)/\partial t = C(t) \tag{5.18}$$

seçilsin ve

$$Q = A - G(0) \tag{5.19}$$

olsun. Böylece (5.14) denklemi

$$x' = Qx + d/dt \int_0^t G(t-s)x(s)ds \tag{5.20}$$

formunu alır.

D bir simetrik matris olsun ve

$$Q^T D + DQ = -I \tag{5.21}$$

sağlasın.

Eğer D bir pozitif tanımlı matris ise, k bir pozitif sabittir ve her x için

$$k|x|^2 \leq x^T D x \tag{5.22}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 5.11. (5.18)-(5.21) ifadelerine ilaveten aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i)$2|DQ| \int_0^\infty |G(v)| < 1$.

(ii)$t \to \infty$ iken $G(t) \to 0$ olsun.

O zaman (5.14) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümü kararlı olması için gerek ve yeter şart D matrisinin pozitif tanımlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. ($\Longrightarrow$):

$$V(t, x(.)) = \left(x - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)^T D \left(x - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)$$
$$+|DQ| \int_0^t \int_t^\infty |G(u-s)|du|x(s)|^2 ds$$

Lyapunov fonksiyonelini ele alalım. Bu fonksiyonun pozitif tanımlı olduğu açıktır. Böylece Lyapunov'un kararlılık teoreminin birinci şartı sağlanmış olur. Verilen

Lyapunov fonksiyonelinin (5.20) sistemi boyunca t bağımsız değişkenine göre türevi alınırsa, yukarıda verilen teoremin şartlarına bağlı olarak

$$V'(t,x(.)) = x^T Q^T D\left(x - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)$$

$$(x - \int_0^t G(t-s)x(s)ds)^T DQx$$

$$+|DQ|\int_t^\infty |G(u-t)|du|x|^2 ds - |DQ|\int_0^t |G(t-s)||x(s)|^2\, ds$$

$$\leq -|x|^2 + |DQ|\int_0^t |G(t-s)|(|x|^2 + |x(s)|^2)\, ds$$

$$+|DQ|\int_t^\infty |G(u-t)|du|x|^2 - |DQ|\int_0^t |G(t-s)||x(s)|^2\, ds$$

$$= \left[-1 + |DQ|\left(\int_0^t |G(t-s)|ds + \int_t^\infty |G(u-t)|du\right)\right]|x|^2$$

$$\leq \left[-1 + 2|DQ|\int_0^\infty |G(v)|dv\right]|x|^2 = -\mu|x|^2$$

elde edilir. Böylece Lyapunov'un kararlılık teoreminin ikinci şartı da sağlanmış olur. Yani teoremin şartlarının sağlanması durumunda (5.20) denkleminin sıfır çözümü kararlı olur.

($\Leftarrow$): Şimdi ise D matrisinin pozitif tanımlı olduğunu varsayalım. Verilen denklemin sıfır çözümünün kararlı olduğu gösterilecektir. $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız öyle ki her $t \in [0, t_0]$ için $|\varphi(t)| < \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $|x(t, t_0, \varphi)\,| < \varepsilon$ olduğu gösterilecektir. Verilen Lyapunov fonksiyonelinin türevi $V'(t,x(.)) \leq 0$ eşitsizliğini sağladığından Lyapunov fonksiyoneli azalan bir fonksiyondur. t_0'dan t'ye bu eşitsizliğin integrali alındığında

$$V(t,x(.)) \leq V(t_0,\varphi(.)) \leq |D|\left(|\varphi(t_0)| + \int_0^{t_0} |G(t_0-s)||\varphi(s)|ds\right)^2$$

$$+|DQ|\int_0^{t_0}\int_{t_0}^\infty |G(u-s)|\, du|\varphi(s)|^2 ds \leq \delta^2 N^2, (N > 0)$$

elde edilir.

(5.22) şartı kullanılarak da

$$V(t,x(.)) \geq \left(x - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)^T D\left(x - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)$$

$$\geq k^2\left(|x| - \left|\int_0^t G(t-s)x(s)ds\right|\right)^2, k \neq 0$$

elde edilir.

Buna bağlı olarak

$$|x(t)| \leq (\delta N/k) + \int_0^t |G(t-s)||x(s)|ds$$

olduğu görülür.

$\delta < (k/N)\left(1 - \int_0^\infty |G(v)|dv\right)\varepsilon$ olmak kaydıyla

her $t \geq t_0$ için

$$|x(t)| < (\delta N/k) + \varepsilon \int_0^\infty |G(v)|dv < \varepsilon$$

yazılabilir. (i) şartından ve $2|DQ| \geq 1$ olduğundan yukarı eşitsizliğin sağ tarafı pozitiftir. Bu nedenle verilen denklemin sıfır çözümü kararlı olur.

Şimdi ise D matrisinin pozitif tanımlı olmama durumu için teoremin sonucunu elde etmenin mümkün olmadığını gösterelim. $x = 0$ çözümü kararlı, ancak D matrisinin pozitif tanımlı olmadığını varsayalım. Bu durumda $x_0 \neq 0$ vardır öyle ki $x_0^T D x_0 < 0$ olur. Yani D matrisi negatif tanımlı olsun. Ayrıca $\delta > 0$ olmak üzere $|x_0| < \delta$ olsun. $x = 0$ çözümü kararlı olduğundan bir δ seçebilir öyle ki $|x_0| < \delta$ iken her $t \geq 0$ için $|x(t, 0, x_0)| < 1$ olur. $x(t) = x(t, 0, x_0)$ olsun.

$$V(t, x(.)) \leq V(0, x_0) - \mu \int_0^t |x(s)|^2 ds = -\eta - \mu \int_0^t |x(s)|^2 ds,\ (\eta = -x_0^T D x_0 > 0)$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(x(t) - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)^T D\left(x(t) - \int_0^t G(t-s)x(s)ds\right)$$
$$\leq -\eta - \mu \int_0^t |x(s)|^2 ds) \qquad (5.23)$$

yazılabilir. Schwarz eşitsizliği kullanılarak ,

$$\left(\int_0^t |G(t-s)||x(s)|ds\right)^2 \leq \int_0^t |G(t-s)|ds \int_0^t |G(t-s)||x(s)|^2 ds$$

sonucuna ulaşılır.

$|x(t)| < 1$ ve $\int_0^t |G(t-s)|ds$ sınırlı olduğundan, $\int_0^t G(t-s)x(s)ds$ integrali de sınırlıdır. (3.17) den aşağıdaki ifadeye ulaşılabilir:

$$\eta+\mu\int_0^t |x(s)|^2 ds \leq |D|\left(|x(t)|+\left|\int_0^t G(t-s)x(s)ds\right|\right)^2 \leq K, (K\in R, K>0).$$

Böylece, $|x(t)|^2$, $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanıdır. $t\to\infty$ için $G(t)\to 0$ ve $|x(t)|^2$, $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olduğundan $t\to\infty$ iken $\int_0^t |G(t-s)||x(s)|^2 ds \to 0$ olur. Schwarz eşitsizliğinden $t\to\infty$ iken $\int_0^t G(t-s)x(s)ds \to 0$ olur.

(5.23) eşitsizliğinden yeterince büyük t'ler için $x^T(t)Dx(t) \leq -\eta/2$ olduğu görülebilir. Ayrıca, $t\to\infty$ için $x^T Dx \to 0$ olur. Buna bağlı olarak yeterince büyük her t ve bir $\gamma>0$ sayısı için $|x(t)|^2 \geq \gamma$ sonucuna varılır. Böylece, $t\to\infty$ için $\int_0^t |x(t)|^2 dt \to \infty$ olur ve bu ise $|x(t)|^2$'nin $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olmasıyla çelişir. Bu nedenle D pozitif tanımlı olmak zorundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Eğer

$$\left|\int_0^\infty C(v)dv\right| < \infty \tag{5.24}$$

ise $G(t)$,

$$G(t) = -\int_t^\infty C(v)dv \tag{5.25}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Böylece,

$$Q = A - G(0) = A + \int_0^\infty C(v)dv \tag{5.26}$$

yazılabilir.

<u>Sonuç 3.</u> (3.15) ve (3.18)-(3.20) şartlarına ilaveten

$$2|DQ|\int_0^\infty \left|\int_t^\infty C(v)dv\right| dt < 1 \tag{5.27}$$

olsun. (5.14)'in sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart D'nin pozitif tanımlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

<u>Teorem 5.12.</u> (5.21) ve (5.24)-(5.26) sağlandığını kabul edelim. Eğer

(i) $A+\int_0^\infty C(v)dv$ kararlı bir matris,

(ii) $2|DQ|\int_0^\infty \left|\int_t^\infty C(v)dv\right| dt < 1$

olur ise, bu takdirde (5.14) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır. Ayrıca (5.14) denkleminin tüm çözümleri $L^2[0,\infty)$ uzayının birer elemanı olup, her bir çözüm sınırlıdır.

İlaveten eğer,

(iii) $\int_0^\infty |C(v)|^2 dv < \infty$ ya da $\int_0^\infty |C(v)| dv < \infty$

ise, (5.14) denkleminin tüm çözümleri $t \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Bundan dolayı (5.14) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Son olarak,

(iv) $\int_0^\infty \int_t^\infty |C(v)| dv\, dt < \infty$

ise, (5.14) in tüm çözümleri $L^1[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olup ve sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. (i) ve (ii) özelliklerinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde D matrisi pozitif tanımlıdır. Yukarıdaki sonuç dikkate alındığında verilen denklemin sıfır çözümü kararlı ve tüm çözümleri ise sınırlıdır. Bilindiği üzere Teorem 5.11'de kullanılan $V\big(t, x(.)\big)$ Lyapunov fonksiyoneli pozitif tanımlıdır. Bu fonksiyonelin (5.20) sistemi boyunca türevi alındığında Teorem 5.12'nin şartlarına bağlı olarak $t \geq t_0$ için ve $\mu > 0$ bir sabit olmak üzere

$$V'\big(t, x(.)\big) \leq -\mu |x(t)|^2$$

elde edilir. Bu sonuç verilen denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğunu hatta düzgün asimptotik kararlı olduğunu gösterir.

Yukarıdaki son eşitsizliğinin 0' dan t' ye integrali alındığında

$$V\big(t, x(.)\big) - V\big(0, x(.)\big) \leq -\mu \int_0^t |x(s)|^2 ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak V fonksiyoneli pozitif tanımlı ve azalan olduğundan

$$\mu \int_0^t |x(s)|^2 ds \leq V\big(0, x(.)\big) - V\big(t, x(.)\big) \leq V\big(0, x(.)\big) = k$$

elde edilir. Bu sonuç ise verilen Volterra integro-diferansiyel denklemin çözümlerinin mutlak değerlerinin kare integrallenebilir olduğunu gösterir. Yani $|x(t)|^2 \in L^1[0,\infty)$ olur.

Ayrıca eğer (iii) sağlanırsa, (5.14) denklemi ve $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ eşitsizliğinden

$$|x'(t)| \leq |A||x(t)| + \int_0^t |C(t-s)||x(s)| ds$$

$$\leq |A||x(t)| + (1/2)\int_0^t |C(t-s)|^2 ds + (1/2)\int_0^t |x(s)|^2 ds$$

olduğu görülür.

A matrisi sabit, $|x(t)|$ sınırlı, $\int_0^t |C(t-s)|^2 ds$ ve $\int_0^t |x(s)|^2 ds$ integralleri yakınsak olduğundan $|x'(t)|$ sınırlıdır ve dahası $(|x(s)|^2)'$ ifadesi de sınırlıdır.

$$(|x(s)|^2)' = (x^T(t)x(t))' \leq 2|x(t)||x'(t)|$$

eşitsizliğinden dolayı istenen sonuç kolaylıkla görülebilir. İspatların geri kalanı benzer şekilde tamamlanabilir.

Sonuç 4. (5.21) ve (5.26) şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu şartlara ilaveten aşağıdaki şartların da sağlandığını varsayalım:

(i) $A + \int_0^\infty C(v)dv$ kararlı bir matristir.

(ii) $2|DQ| \int_0^\infty \int_t^\infty |C(v)| dv\, dt < 1$ olur.

Bu takdirde (5.14)'ün sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. Bakınız Burton&Mahfoud (1983).

Teorem 5.13. Aşağıdakilerin sağlandığını kabul edelim:

(i) $\int_0^\infty \int_t^\infty |C(v)| dv\, dt < \infty$,

(ii) $\int_0^\infty \left| \int_t^\infty C(v)dv \right| dt < 1$,

(iii) $A + \int_0^\infty C(v)dv < 0$

ise (5.1)' in sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. Bakınız Burton&Mahfoud (1983).

$C^{(0)}(t) = C(t)$ ve $C^{(i)}(t) = d^i C(t)/dt^i$, $i = 0,1,2,\ldots$, olsun. Buna göre aşağıdaki ispat verilecektir.

Teorem 5.14. (3.15) ve (3.18)-(3.20) şartlarına ilaveten m pozitif bir tamsayı ve $C^{(m-1)}(t)$ sürekli olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(i) $A + \int_0^\infty C(v)dv$ kararlı bir matris,

(ii) $2|DQ| \int_0^\infty \left| \int_t^\infty C(v)dv \right| dt < 1$,

(iii) $\int_0^\infty \left| C^{(i)}(v) \right| dv < \infty, i = 0,1,\ldots,m-1$.

Bu takdirde (5.14)'in sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Ayrıca, (5.14)'ün her $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x^{(i)}(t) \to 0, i = 0,1,\ldots,m$ olur ve $x^{(i)}(t)$ ler $L^2[t_0, \infty)$ uzayının birer elemanıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. Teorem 5.12'den mevcut şartlar altında (5.14) denkleminin $x = 0$ çözümünün asimptotik kararlı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. İspatın geri kalan kısmı ise tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. $m = 1$ olsun. (5.14) denkleminden

$$|x'(t)| \leq |A||x(t)| + \int_0^t |C(t-s)||x(s)|ds$$

yazılabilir. Yukarıda verilen (i)-(iii) şartları ve Teorem 5.11'den dolayı $t \to \infty$ için $x(t) \to 0$ olur ve $x(t)$ çözümü $L^2[t_0, \infty)$ uzayının bir elemanıdır. Ayrıca, $\int_0^\infty |C^{(1)}(v)| dv < \infty$ olması nedeniyle, yani $C(t)$, L^1 uzayının bir elemanı olduğundan yukarıdaki eşitsizlikteki integral $t \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Buna bağlı olarak $t \to \infty$ için $x'(t) \to 0$ olur. Şimdi ise, $t \to \infty$ için $x''(t) \to 0, \dots, x^{(m)}(t) \to 0$ olduğunu gösterelim. Öte yandan Hewitt ve Stromberg [6, p.397] den dolayı verilen integral L^1 uzayının bir elemanı, $x(t)$ kare integrallenebilir olduğundan $\int_0^t |C(t-s)||x(s)|ds$ ifadesi de L^2'nin bir elemanıdır. Tümevarım yöntemindeki uygulamadan dolayı verilen teoremin $m = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Buna bağlı olarak teoremin sonucunun $m = k + 1$ (k=1, 2, 3, …) için doğru olduğunu gösterelim. (5.14) integro-diferansiyel denkleminin k kere türevi alınırsa, elementer eşitsizlikler yardımıyla

$$|x^{(k+1)}(t)| \leq |A||x^{(k)}(t)| + \sum_{i=0}^{k-1} |C^{(i)}(0)|\,|x^{(k-1-i)}(t)|$$

$$+ \int_0^t |C^{(k)}(t-s)||x(s)|ds$$

kolaylıkla elde edilir. (iii) şartının $m = k + 1$ için sağlandığını varsayalım. Konvolüsyon terimi içeren yukarıdaki integral L^1 uzayının bir elemanı olup, $t \to \infty$ için $x(t) \to 0$ olur. Buna bağlı olarak söz konusu olan integral, verilen teorem $m = k$ için doğru olduğundan $t \to \infty$ için sıfıra gider. Buna bağlı olarak i=0, 1, …, k olmak üzere $t \to \infty$ için $x^{(i)}(t) \to 0$ olur. Benzer biçimde $t \to \infty$ için $x^{(k+1)}(t) \to 0$ olur. Ayrıca i=0, 1, …, k için $x^{(i)}(t)$, L^2 uzayının bir elemanı, konvolüsyon integrali L^1 uzayının bir elemanı ve x de L^2 uzayının bir elemanı olur. Böylece verilen integral L^2 uzayının bir elemanıdır. Buna bağlı olarak $x^{(k+1)}(t)$, $L^2[t_0, \infty)$ uzayının bir elemanı olur. Yani i=0, 1, …, k+1 için $x^{(i)}(t), L^2[t_0, \infty)$ uzayının bir elemanı olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

5.5. Pertürbe Volterra İntegro- Diferansiyel Denklemlerde Çözümlerin Niteliksel Sonuçlar

Bu bölümde daha önceden verilmiş olan (5.11) lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin aşağıda verilen pertürbe edilmiş lineer olmayan daha genel formu ele alınacaktır:

$$x' = Ax + A_1(t)x + H_1(x)x + \int_0^t [C(t,s) + C_1(t)sH_2(x(s))]x(s)ds \qquad (5.28)$$

sistemini ele alalım. Burada A, A_1, C, C_1, H_1, H_2 fonksiyonları n ×n boyutlu matrisler olup, A sabit bir matris ve $A_1(t)$, $0 \leq t < \infty$ için sürekli bir matris fonksiyonudur. Ayrıca $C(t,s)$ ve $C_1(t,s)$ ler ise $0 \leq s \leq t < \infty$ için sürekli matris fonksiyonlarıdır. İlave olarak, $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ matris fonksiyonları $0 \in U$ olmak üzere $U \subset R^n$ açık cümlesi üzerinde süreklidir. m ve J pozitif sabitler olmak üzere

$$|A_1(t)| \leq m, |C_1(t,s)| \leq J|C(t,s)| \qquad (5.29)$$

ve

$$H_i(0) = 0, i = 1,2 \qquad (5.30)$$

olsun. Ayrıca B n ×n boyutlu simetrik bir matris ve

$$A^T B + BA = -I \qquad (5.31)$$

olsun.

Teorem 5.15. (4.2)-(4.4) şartlarına ilaveten M pozitif bir sabit olmak üzere

$$|B|\left(\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_0^\infty |C(u,t)|du\right) \leq M \qquad (5.32)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde yeterince küçük m'ler için (5.28) sisteminin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter şart B matrisinin pozitif tanımlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. Aşağıda verilen Lyapunov fonksiyonelini göz önüne alalım:

$$V\big(t, x(.)\big) = x^T BX + K \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|du|x(s)|^2 ds.$$

(5.28)' in bir $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ çözümü boyunca bu Lyapunov fonksiyonelinin türevi alınır ve teoremin şartları göz önüne alınırsa

$$V'\big(t,x(.)\big)=\Bigg(x^TA^T+x^TA_1{}^T+x^TH_1{}^T$$

$$+\int_0^T x^T(s)\big[C^T(t,s)+H_2{}^T\big(x(s)\big)C_1{}^T(t,s)\big]ds\Bigg)Bx$$

$$+x^TB\left(Ax+A_1x+H_1x+\int_0^t\big[C(t,s)+C_1(t,s)H_2\big(x(s)\big)\big]x(s)\,ds\right)$$

$$+K\int_t^\infty|C(u,t)|du|x|^2-K\int_0^T|C(t,s)||x(s)|^2\,ds$$

$$\leq -|x|^2+2|B||A_1(t)||x|^2+2|B||H_1(x)||x|^2$$

$$+|B|\int_0^t(|C(t,s)|+|C_1(t,s)||H_2(x(s))|)(|x(s)|^2+|x|^2)ds$$

$$+K\int_t^\infty|C(u,t)|\,du|x|^2-K\int_0^t|C(t,s)|\,|x(s)|^2ds$$

$$\leq -|x|^2+2|B|m|x|^2+2|B||H_1(x)||x|^2$$

$$+|B|\int_0^t(|C(t,s)|+J|C(t,s)||H_2(x(s))|)(|x(s)|^2+|x|^2)ds$$

$$+K\int_t^\infty|C(u,t)|\,du|x|^2-K\int_0^t|C(t,s)|\,|x(s)|^2ds$$

$$\leq\Bigg[-1+|B|\left(2m+2|H_1(x)|+\int_0^t|C(t,s)|\,\big(1+J\big|H_2\big(x(s)\big)\big|\big)ds\right)$$

$$+K\int_t^\infty|C(u,t)|\,du\Bigg]|x|^2$$

$$+|B|\int_0^t|C(t,s)|\,\big(1+J\big|H_2\big(x(s)\big)\big|\big)|x(s)|^2ds$$

$$-K\int_0^t|C(t,s)||x(s)|^2ds$$

elde edilir. Burada H_1 ve H_2 matrisleri sürekli, $H_1(0)=H_2(0)=0$ olduğundan, süreklilik tanımı kullanıldığında $i=0,1$ olmak üzere her $\eta>0$ için bir $\gamma>0$ sayısı vardır öyle ki $|x|\leq\gamma$ olduğunda $|H_i(x)\ |<\eta$ olur. Yukarıda verilen eşitsizlikten

$$V'\big(t,x(.)\big) = \Bigg[-1 + |B|\left(2m + 2\eta + \int_0^t |C(t,s)|(1+J\eta)ds\right)$$
$$+ K\int_t^{\infty} |C(u,t)|\, du\Bigg]|x|^2 + |B|\int_0^t |C(t,s)|\,(1+J\eta)|x(s)|^2 ds$$
$$- K\int_0^t |C(t,s)||x(s)|^2 ds$$

elde edilir. $K = |B|(1+J\eta)$ olsun. Buna bağlı olarak

$$V'\big(t,x(.)\big) = \Bigg[-1 + 2|B|(m+\eta)$$
$$+ |B|(1+J\eta)\left(\int_0^t |C(t,s)|\, ds + \int_t^{\infty} |C(u,t)|\, du\right)\Bigg]|x|^2$$
$$\leq [-1 + 2|B|(m+\eta) + M(1+J\eta)]|x|^2$$

elde edilir.

$\alpha = 1 - 2|B|(m+\eta) - M(1+J\eta)$ olsun. $\alpha > 0$ olacak şekilde yeterince küçük m,η'ler seçilsin. Böylece $0 \leq s \leq t$ için $|x(s)| \leq \gamma$ olmak üzere $V'\big(t,x(.)\big) \leq -\alpha|x|^2$ olur. Yani B matrisi pozitif tanımlı ise verilen denklemin sıfır çözümü kararlıdır. Gerçekten B matrisinin pozitif tanımlı olduğunu ve $t_0 \geq 0$ ile $\varepsilon > 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $\varepsilon < \gamma$ ve $\delta > 0$ olsun. O zaman $t \in [0,t_0]$ için $|\varphi(t)| < \delta$ olduğunda her $t \geq t_0$ için $x(t,t_0,\varphi) < \varepsilon$ olur. B matrisi pozitif tanımlı olduğundan (3.14) denklemi dikkate alındığında

$$k^2|x|^2 \leq x^T Bx \leq V(t,x(.)) \leq V(t_0,x(.))$$
$$|B||\varphi(t_0)|^2 + |B|(1+J\eta)\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} |C(u,s)|du\,|\varphi(s)|^2 ds < \delta^2 N^2$$

olacak şekilde bir $k \neq 0$ sayısı vardır. Burada

$$N^2 = |B|\left[1 + (1+J\eta)\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} |C(u,s)|du\,ds\right]$$

dir. Böylece tüm $t \geq t_0$ lar için $\delta < k\varepsilon/N$ olmak üzere $|x(t)| < \varepsilon$ olur. Yani verilen denklemin sıfır çözümü kararlıdır.

Şimdi ise $x = 0$ çözümünün kararlı olduğunu varsayalım. B matrisinin pozitif tanımlı olduğu gösterilmelidir. Ancak tersine B matrisinin pozitif tanımlı olmadığını varsayalım. Daha önceden verilen Teorem 8'in ispatındaki yol izlendiğinde eğer $\varepsilon = \gamma$

ve $t_0 \geq 0$ ise, bu takdirde $\delta > 0$ ve $x_0 \neq 0$ için $|x_0| < \delta$ ve $x_0{}^T B x_0 < 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla B matrisi pozitif olmak zorundadır.

Şimdi ise (5.11) sisteminin bir diğer lineer olmayan pertürbasyon biçimini ele alalım:

$$x' = Ax + f(t,x) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds. \tag{5.33}$$

Burada A ve C, $n \times n$ boyutlu matrisler olup; A sabit matris $C(t,s)$ ise $0 \leq s \leq t < \infty$ için süreklidir. Ayrıca $f: [0,\infty) \times R^n \to R^n$ sürekli bir fonksiyon olup bu fonksiyon, $\lambda: [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon, $\int_0^\infty \lambda(s)ds < \infty$ ve $t \to \infty$ için $\lambda(t) \to 0$ olmak üzere

$$|f(t,x)| \leq \lambda(t)(|x| + 1) \tag{5.34}$$

şartlarını sağlamaktadır. Ayrıca B $n \times n$ boyutlu bir sabit ve simetrik matris olmak üzere

$$A^T B + BA = -I \tag{5.35}$$

olduğu varsayılmaktadır.

Teorem 5.16. Yukarıda (5.33) denklemi için verilen şartlara ilaveten aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım. Bir $M > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$|B|\left(\int_0^t |C(t,s)|\, ds + \int_t^\infty |C(u,t)|\, du\right) \leq M < 1 \tag{5.36}$$

olsun. Bu takdirde (5.33)'ün tüm çözümleri sınırlı olması için gerek ve yeter şart B'nin pozitif tanımlı olmasıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. L bir pozitif sabit olmak üzere aşağıda verilen Lyapunov fonksiyonelini göz önüne alalım:

$$V\big(t, x(.)\big) = \left[x^T Bx + 1 + |B| \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)| du |x(s)|^2 ds\right] e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}.$$

Bu fonksiyonelin pozitif tanımlı olduğu açıktır. (5.33)'ün $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ çözümü boyunca türevi alınırsa,

$V'\big(t, x(.)\big)$

$$= -L\,\lambda(t)V + \left[\left(x^T A^T + f^T(t,x) + \int_0^t x^T(s)\, C^T(t,s)ds\right)Bx\right.$$
$$+ x^T B\left(Ax + f(t,x) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right)$$
$$\left. + |B|\int_t^\infty |C(u,t)|du|x|^2 - |B|\int_0^t |C(t,s)||x(s)|^2 ds\right] e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}$$

bulunur. Teoremin şartlarına bağlı olarak

$$V'\big(t,x(.)\big) \le -L\lambda(t)V$$
$$+ \left\{\left[-1 + |B|\left(\int_0^t |C(t,s)ds| + \int_t^\infty |C(u,t)|du\right)\right]|x|^2\right.$$
$$\left. + 2|B||x||f(t,x)|\right\} e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}$$
$$\le -L\lambda(t)V + [(-1+M)|x|^2 + 2|B||x|\lambda(t)(|x|+1)]e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}$$
$$\le e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}\big[-L\lambda(t) + \big(-1 + M + 2|B|\lambda(t)\big)|x|^2 + 2|B|\lambda(t)|x|\big]$$
$$\le e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}\big[-L\lambda(t) + \big(-1 + M + 2|B|\lambda(t)\big)|x|^2 + |B|\lambda(t) + |B|\lambda(t)|x|^2\big]$$

elde edilir.

$L = |B|$ alalım ve S yeterince büyük bir pozitif sayı olmak üzere her $t \ge S$ için $-1 + M + 3|B|\,\lambda(t) \le -\beta, \beta > 0, \beta \in R$ olsun. Bu takdirde, her $t \ge S$ için ve $\gamma > 0$ için

$$V'\big(t,x(.)\big) \le e^{-L\int_0^t \lambda(s)ds}(-\beta|x|^2) \le -\gamma|x|^2, \gamma > 0, \gamma \in R$$

bulunur.

$x(t)$ (5.33)'ün bir çözümü ve B pozitif tanımlı olsun. V fonksiyoneli azalan olduğundan ve $t \ge S$ olduğundan $V\big(t,x(.)\big) \le V\big(S,x(.)\big)$ yazılabilir. Buna bağlı olarak $x(t)$ nin sınırlı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi ise B'nin pozitif tanımlı olması durumunda (5.33) denkleminin tüm çözümlerinin sınırlı olduğunu gösterelim. $x \ne 0$ olmak üzere

(5.33) denkleminin tüm çözümleri sınırlı olsun fakat B pozitif tanımlı olmasın. Şimdi Teorem 5.9'un ispatından $x_0 \ne 0$ olduğunda ${x_0}^T B x_0 < 0$ sağlandığı gösterilecektir. $t_0 = S$ alalım ve φ $[0,t_0]$ aralığında $V\big(t_0,\varphi(.)\big) < 0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde sürekli bir fonksiyon olsun.$t \ge S$ için $V'\big(t,x(.)\big) \le -\gamma|x(t)|^2$ elde edilir. Bu eşitsizliğin s'den t'ye integrali alındığında

$$V\big(t,x(.)\big) \leq V\big(S,\varphi(.)\big) - \gamma \int_S^t |x(u)|^2\, du$$

bulunur.

Teorem 5.9'da izlenen yola benzer bir yol izlenirse kolaylıkla $t \to \infty$ için $V\big(t,x(.)\big) \to -\infty$ olduğu görülebilir. Bu ise $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ çözümünün sınırlı olmadığını gösterir.

Bu bir çelişkidir yeni verilen denklemin çözümleri sınırlıdır (Burton&Mahfoud, 1983).

5.6. Skaler Bir Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Niteliksel Sonuçlar

Burton ve Mahfoud (1983)

$x' = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds.$ (5.37)

biçiminde birinci mertebeden skaler Volterra integro-diferansiyel denklemini ele aldı. Burada $A(t)$ fonksiyonu ve $C(t)$ çekirdeği sırasıyla $0 \leq t < \infty$ ve $0 \leq s \leq t < \infty$ aralıklarında sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $A(t)$ ve $C(t,s)$ fonksiyonlarının t'ye göre türevlenebildiği ,

$\int_t^\infty |C(u,s)du|$ ile $\int_t^\infty [\partial C(u,t)/\partial t]$du (5.38)

integrallerinin var olduğu kabul edilmektedir.

$G(t,s) = -\int_t^\infty C(u,s)du$ (5.39)

ve

$Q(t) = A(t) - G(t,t)$ (5.40)

olsun. Bu durumda (5.37) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$x' = Q(t)x + (d/dt)\int_0^t G(t,s)x(s)ds.$ (5.41)

<u>Teorem 5.17.</u> (5.38)-(5.40)'a ilaveten Q_1, Q_2, J, N, R sabitler, $R < 2$ ve $0 \leq t < \infty$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(i) $-Q_2 \leq Q(t) \leq -Q_1 < 0,$

(ii) $\int_0^t |G(t,s)|ds \leq J < 1,$

(iii) $\int_0^t |G(t,s)|ds + \int_t^\infty |G(u,t)|du \leq RQ_1/Q_2$

(iv) $\int_0^t |C(t,s)|ds + \left|\int_t^\infty C(u,t)du\right| \leq N.$

Bu takdirde, (5.37) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Ayrıca, (5.37)'nin her $x(t)$ çözümü için $x(t) = x(t, t_0, \varphi) \in L^2[t_0, \infty)$ olur. Yukarıdaki şartlara ilaveten aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(v) $|Q'(t) - Q(t)G(t,t)| + |Q(t)| \int_0^t |C(t,s)|ds \leq RQ_1,$

(vi) $C(t,t), \int_t^\infty |\partial C(t,s)/\partial t|\, ds$ ve $\int_t^\infty [\partial C(u,t)/\partial t]\, du$ sınırlıdır.

Bu takdirde $t \to \infty$ için $x^{(i)}(t) \to 0$ ve $x^{(i)}(t) \in L^2[t_0, \infty)$, $i = 0, 1$, olur (Burton&Mahfoud, 1983).

İspat. Teorem 5.7'den $x = 0$'ın kararlılığı görülür. Teorem 5.7' nin ispatında kullanılan $V(t, x(.))$ fonksiyonelinin türevinin alınmasıyla her $t \geq t_0$ ve bazı $\beta > 0$ lar için,

$V'(t, x(.)) \leq -\beta x^2(t)$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin t_0'dan t'ye integrali alındığında

$$V(t, x(.)) \leq V(t_0, \varphi(t_0)) - \beta \int_{t_0}^t x^2(s)\ ds$$

elde edilir.

$$\beta \int_{t_0}^t x^2(s)\, ds \leq V(t, x(.)) + \beta \int_{t_0}^t x^2(s)\, ds \leq V(t_0, \varphi(t_0))$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak

$$\int_{t_0}^t x^2(s)\, ds \leq \beta^{-1} V(t_0, \varphi(t_0)).$$

$\beta^{-1} V(t_0, \varphi(t_0))$ terimi pozitif bir sayıya eşit olduğundan

$$\int_{t_0}^\infty x^2(s)\, ds < \infty$$

sonucuna varılır. Yani

$x(t) \in L^2[t_0, \infty)$ olur.

Şimdi ise $x = 0$'ın asimptotik kararlılığını gösterelim.

Teoremin (iv) şartından dolayı

$$\int_0^t |C(t,s)| ds$$

integrali sınırlıdır. Ayrıca verilen şartlardan dolayı $A(t)$ matrisi de sınırlıdır. $x^2(t)$, $L^1[t_0, \infty)$ uzayının bir elemanı ve $[x^2(t)]' = 2x(t)x'(t)$ sınırlı olması nedeniyle $t \to \infty$ için $x(t) \to 0$ olur. Bu ifade ise sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğunu gösterir.

Şimdi,

$$|x'(t)| \leq |A(t)||x(t)| + \int_0^t |C(t,s)||x(s)|ds \tag{5.43}$$

sağlanır.

Şimdi ise $x'(t)$ nin $L^2[t_0,\infty)$ uzayında kaldığını gösterelim. (5.5) denkleminin t ye göre türevi alındığında

$$x'' = (Q(t)x)' + (d/dt)\left[G(t,t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right]. \tag{5.44}$$

elde edilir.

$Q = Q(t)$ ve $G = G(t,t)$ olsun.

$$W\big((t,x),x'(t)\big)$$
$$= \left(x' - \left[Gx + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right]\right)^2 + K\int_t^\infty x^2\,(s)ds$$
$$+ M\int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|du\, x^2(x)ds$$

Lyapunov fonksiyonelini ele alalım. $x(t) = x(t,t_0,\varphi), t \geq t_0$, (5.41) denkleminin bir çözümü olsun. Bu çözüm boyunca yukarıdaki Lyapunov fonksiyonelinin türevi alındığında ve Teorem 5.17 nin şartları göz önüne alındığında

$$W'\big((t,x),x'\big) = 2\left(x' - \left[Gx + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right]\right)(Qx)' - Kx^2$$
$$+ M\int_t^\infty |C(u,t)|dux^2 - M\int_0^t |C(t,s)|x^2(s)ds$$
$$= 2Q(x')^2 + 2\left(Q'x - Q\left[Gx + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right]\right)x'$$
$$- 2\left(Gx + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right)Q'x - Kx^2 + M\int_t^\infty |C(u,t)|dux^2$$
$$- M\int_0^t |C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$\leq 2Q(x')^2 + 2|Q' - QG||x||x'|$$
$$+ 2|Q|\int_0^t |C(t,s)||x(s)||x'|ds + 2|GQ'|x^2$$
$$+ 2|Q'|\int_0^t |C(t,s)||x(s)||x|ds - Kx^2$$
$$+ M\int_t^\infty |C(u,t)|dux^2 - M\int_0^t |C(t,s)|x^2\,(s)ds$$
$$\leq 2Q(x')^2 + |Q' - QG|\left(x^2 + x'^2\right)$$
$$+ |Q|\int_0^t (x^2(s) + (x')^2)ds + 2|GQ'|x^2$$
$$+ |Q'|\int_0^t |C(t,s)|(x^2(s) + x^2)ds - Kx^2 + M\int_t^\infty |C(u,t)|dux^2$$
$$- M\int_0^t |C(t,s)|x^2\,(s)ds \leq [2Q +]$$

elde edilir.

(iv)'nin kullanılmasıyla görülür. $x^2(t)$ bir elemanı olduğundan dolayı $[x^2(t)]' = 2x(t)x'(t)$ sınırlıdır buradan da $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğu görülür. Bundan dolayı $x = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır.

$Q'(t)$ sınırlı olduğundan (v) şartı kullanıldığında K ve M yeterince büyük seçildiğinde bir gama pozitif sayısı bulunabilir öyleki $W'\big(t, x(t)\big)$ negatif tanımlı olur.

Son eşitsizliğin $t_0'dan\ t'ye$ ye integrali alındığında

$$W\big(t, x(.), x'(.)\big) \leq \left[-2Q_1 + |Q' - QG| + |Q|\int_0^t |C(t,s)|ds\right](x')^2$$
$$\leq [-2Q_1 + RQ_1](x')^2 \stackrel{\text{def}}{=} -\gamma(x')^2$$

elde edilir.

$W\big(t, x(t)\big)$ pozitif tanımlı olduğundan, $W\big(t_0, \varphi(t_0)\big) = C > 0, C \in R$ alınabilir. Buna bağlı olarak

$$0 \leq W\big(t, x(t)\big) \leq C - \gamma\int_{t_0}^t [x'(s)]^2\ ds$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğe bağlı olarak

$$\gamma\int_{t_0}^t [x'(s)]^2\ ds \leq W\big(t, x(t)\big) + \gamma\int_{t_0}^t [x'(s)]^2\ ds \leq C$$

olması nedeniyle

$$\int_{t_0}^{t} [x'(s)]^2 \; ds \leq \gamma^{-1} C$$

olduğu açıktır. Bunun sonucu olarak da

$$\int_{t_0}^{\infty} [x'(s)]^2 \; ds \leq \gamma^{-1} C < \infty$$

elde edilir. Yani $x'(t) \in L^2[t_0, \infty)$ olur.

$$x''(t) = A(t)x'(t) + A'(t)x(t) + C(t,t)x(t) + \int_0^t \left[\frac{\partial C(t,s)}{\partial t}\right] x(s)ds \qquad (5.44)$$

$$Q(t) = A(t) - G(t,t) = A(t) + \int_t^{\infty} C(u,t)du$$

alındığında

$$Q'(t) = A'(t) - C(t,t) + \int_t^{\infty} [\partial C(u,t)/\partial t]du$$

bulunur. Böylece, (v) ve (vi) göz önüne alınarak $A'(t)$ sınırlıdır. (5.42) ve (5.44)'den dolayı $x''(t)$ sınırlı olur böylece $(x'(t)^2)' = 2x'(t)x''(t)$ de sınırlıdır. $(x')^2 \in L^1[t_0, \infty)$ olduğundan $t \to \infty$ iken $x'(t) \to 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu da $A(t) = A$ sabit ve $C(t,s) = C(t-s)$ iken $n = m = 1$ durumunda Teorem 5.17' nin (i)-(v) şartlarının Teorem 14'ün (i)-(iii) şartlarına dönüştüğünü vurguluyor.

6. GECİKMELİ FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE BAZI KARARLILIK DURUMLARI

Bu bölümde Du (1995)'nun yapmış olduğu çalışmanın üzerinde durulmuştur.
Ayrıca bu bölümde incelenecek olan fonksiyonel diferansiyel denklemler dördüncü bölümünde verilen (4.2) fonksiyonel diferansiyel denklem tarafından kapsanılmaktadır.

6.1. Sabit Katsayılı Gecikmeli Lineer Sistemlerde Bir Kararlılık Sonucu

Bu bölümde öncelikle gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarının incelenmesine esas teşkil edeceği için aşağıdaki birinci mertebeden çoklu sabit gecikmeli bir lineer diferansiyel denklem sistemi ele alınacaktır:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} A_k x(t - T_k) \tag{6.1}$$

Bu sistem aynı zamanda

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(0)}\, x_j(t) + \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}\, x_j(t - T_k)\right] \tag{6.2}$$

olarak da ifade edilebilir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ ve $x \in R^n$;$k = 0, 1, \dots, N$ için $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, $n \times n$ boyutlu sabit matrisler ve

$$T_k = \gamma_k . \tau = \sum_{s=1}^{m} \gamma_{ks} \tau_s\,, \qquad (\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in R_+^m, \tau_s \in R_+);$$

$\gamma_k = (\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{km}) \neq 0, k = 1, 2, \dots, N$ ve $s = 1, 2, \dots, m$ için $\gamma_{ks} \geq 0$ tamsayılardır.

<u>Teorem 6.1.</u> $\alpha_k(k = 1, 2, \dots, N), \mu$ ve η pozitif sabitler ve $d_i(i = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığını kabul edelim:

$$d_i a_{ii}^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} d_j \left|a_{ji}^{(0)}\right| \leq -\mu, \qquad \mu - \sum_{k=1}^{N} a_k \geq \eta$$

$$a_k - \beta_2 \|A_k\| \geq 0$$

Burada $\beta_2 = \max_{1 \leq j \leq n}\{d_j\}, i = 1, 2, \dots, n$ ve $k = 1, 2, \dots, N$ dir. Bu taktirde (6.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır(Du, 1995).

<u>İspat.</u>

$$V(t, x) = \|Dx\| + \sum_{k=1}^{N} a_k \int_{t - T_k}^{t} \|x(s)\| ds$$

Lyapunov fonkiyonelinini göz önüne alalım.

Burada

$D = diag[d_1, \dots, d_n]$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $d_i > 0$ dır.

Yukarıda verilen Lyapunov fonksiyonelinin pozitif tanımlı olduğu açıktır.

$$\beta_1 = \min_{1\le i\le n}\{d_i\}, \qquad \beta_2 = \max_{1\le i\le n}\{d_i\}$$

ve

$$Z(t,x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \int_{t-T_k}^{t} \|x(s)\| ds$$

olsun. Bu durumda,

$$\beta_1\|x\| + Z(t,x) \le V(t,x) \le \beta_2\|x\| + Z(t,x) \qquad (6.3)$$

yazılabilir.

$$\alpha = \min_{1\le k\le N}\{a_k\}, T = \max_{1\le k\le N}\{T_k\}$$

alınsın. Buna bağlı olarak,

$$\begin{aligned} |V(t,x) - V(t,y)| &\le |D\|x-y\|| + \left|\textstyle\sum_{k=1}^{N} a_k \int_{t-T_k}^{t} \|x(s)-y(s)\| ds\right| \\ &\le \beta_2\|x-y\| + N\alpha \int_{t-T}^{t} \|x(s)-y(s)\| ds \\ &\le \beta_2 \sup_{t-T\le s\le t}\|x(s)-y(s)\| + N\alpha T \sup_{t-T\le s\le t}\|x(s)-y(s)\| \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$|V(t,x) - V(t,y)| \le (\beta_2 + N\alpha T)\|x-y\|_{[t-T,t]} \qquad (6.4)$$

yazılabilir. Yani $V(t,x)$ Lyapunov fonksiyoneli Lipschitz şartını sağlar.

Öte yandan,

$$\begin{aligned} Z(t,x) &= \sum_{k=1}^{N} a_k \int_{t-T_k}^{t} \|x(s)\| ds \\ &= a_1 \int_{t-T_1}^{t} \|x(s)\| ds + a_2 \int_{t-T_2}^{t} \|x(s)\| ds + \cdots + a_N \int_{t-T_N}^{t} \|x(s)\| ds \\ &\le \alpha_1 T_1 \sup_{t-T_1\le s\le t}\|x(s)\| + \alpha_2 T_2 \sup_{t-T_2\le s\le t}\|x(s)\| + \cdots + \alpha_N T_N \sup_{t-T_N\le s\le t}\|x(s)\| \\ &\le N\alpha T \sup_{t-T\le s\le t}\|x(s)\|, \end{aligned}$$

yani

$$Z(t,x) \le N\alpha T\|x\|_{[t-T,t]} \qquad (6.5)$$

olur.

$$0 < t_1 < t_2 < \infty \text{ ve } M = sup_{t_1 \leq s \leq t_2} \|x(s)\|$$

olarak alalım. Bu takdirde

$$Z(t_2, x) - Z(t_1, x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \left[\int_{t_2 - T_k}^{t_2} \|x(s)\| ds - \int_{t_1 - T_k}^{t_1} \|x(s)\| ds \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_k \left[\int_{t_2 - T_k}^{t_2} \|x(s)\| ds + \int_{t_1}^{t_1 - T_k} \|x(s)\| ds + \int_{t_1 - T_k}^{t_2 - T_k} \|x(s)\| ds - \int_{t_1 - T_k}^{t_2 - T_k} \|x(s)\| ds \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} a_k \left[\int_{t_1}^{t_2} \|x(s)\| ds - \int_{t_1 - T_k}^{t_2 - T_k} \|x(s)\| ds \right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} a_k \int_{t_1}^{t_2} \|x(s)\| ds$$

olduğu görülür. Buradan

$$Z(t_2, x) - Z(t_1, x) \leq MN\alpha(t_2 - t_1) \tag{6.6}$$

elde edilir.

Şimdi (6.1) diferansiyel denklem sisteminin bir $x(t)$ çözümü boyunca $V(t, x)$ Lyapunov fonksiyonelinin sağdan türevi hesaplandığında,

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt} V(t, x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \dot{x}_i \, sgn x_i(t + 0) + \sum_{k=1}^{N} a_k [\|x(t)\| - \|x(t - T_k)\|]$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \dot{x}_i \, sgn x_i(t + 0)$$

$$= d_1 sgn x_1(t + 0) \left[\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{(0)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{(k)} x_j(t - T_k) \right) \right] + \cdots$$

$$+ d_n sgn x_n(t + 0) \left[\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^{(0)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^{(k)} x_j(t - T_k) \right) \right]$$

$$\leq d_1 \left\{ a_{11}^{(0)} |x_1| + \cdots + a_{1n}^{(0)} |x_n| + \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| a_{1j}^{(k)} \right| \right) \sum_{j=1}^{n} \left| x_j(t - T_k) \right| \right] \right\} + \cdots$$

$$+d_n\left\{a_{n1}^{(0)}|x_1|+\cdots+a_{nn}^{(0)}|x_n|+\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\max_{1\le j\le n}\left|a_{nj}^{(k)}\right|\right)\sum_{j=1}^{n}\left|x_j(t-T_k)\right|\right]\right\}$$

$\sum_{i=1}^{n}\left[d_i a_{ii}^{(0)}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} d_j\left|a_{ji}^{(0)}\right|\right]|x_i(t)|+\sum_{k=1}^{N}\left[\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ji}^{(k)}\right|d_i\right]\|x(t-T_k)\|\le$

$-\mu\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\sum_{k=1}^{N}\beta_2\|A_k\|\,\|x(t-T_k)\|$ (6.7)

$$=-\mu\|x(t)\|+\sum_{k=1}^{N}\beta_2\|A_k\|\,\|x(t-T_k)\|$$

olarak yazılabilir.Yukarıdaki eşitsizlikler birleştirildiğinde,

$$\dot V(t,x)\le-\mu\|x(t)\|+\sum_{k=1}^{N}\beta_2\|A_k\|\,\|x(t-T_k)\|+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k[\|x(t)\|-\|x(t-T_k)\|]$$

$=-(\mu-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k)\|x(t)\|-\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k-\beta_2\|A_k\|)\,\|x(t-T_k)\|$ (6.8)

$\le-\eta\|x(t)\|$ (6.9)

olduğu görülür.

$W=\beta_1\|x\|, W_1=\beta_2\|x\|, W_2=N\alpha T\|x\|_{[t-T,t]}$ ve $W_3=\eta\|x\|$ alalım. Yukarıda verilen Lemma'nın tüm şartlarının (6.3)-(6.9) eşitsizlikleri tarafından sağlandığı görülür. Bu durumda, (6.1) sisteminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu görülür. Teoremin ispatı böylece tamamlanır.

Uyarı 4. $n=N=1$ alındığında (6.1) sistemi

$$\dot x(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$$

ile verilen birinci mertebeden skaler ve sabit gecikmeli bir diferansiyel denkleme indirgenir. $\alpha_1=|b|$ ve $\beta_2=d_1=1$ yukarıda verilen şartların sabit gecikmeli bu diferansiyel denklemin sıfır çözümümün düzgün asimptotik kararlı olması için yeter şartlara indirgenir.

6.2. Değişken Katsayılı Lineer Gecikmeli Bir Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemi İçin Bir Kararlılık Sonucu

Bu bölümde Du (1995) tarafından araştırılan

$$\dot x(t)=Ax(t)+Bx\big(t-\tau(t)\big)+\int_{t-\tau(t)}^{t}C(t,s)\,x(s)ds \qquad (6.10)$$

değişken gecikmeli lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sistemi ele alınmaktadır. Burada $x \in R^n$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $A = \left(a_{ij}\right)$ ve $B = \left(b_{ij}\right)$, $n \times n$ boyutlu sabit iki matris olup $\tau(t)$ ise $t \in R_+$ için negatif olmayan sürekli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. $C(t,s) = \left(C_{ij}(t,s)\right)$ ise $0 \le s \le t < \infty$ için $n \times n$ boyutlu sürekli bir fonksiyon matristir. Bu sistem skaler formda

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j\left(t - \tau(t)\right)\right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau(t)}^{t} C_{ij}(t,s)x_j(s)ds$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 6.2. (6.10) sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(1) L pozitif bir sabit olmak üzere her $s \le t$ için $\int_t^\infty \|C(u,s)\|du \le L < \infty$ olur.

(2) d_i , μ, k ve η pozitif sabitler olmak üzere

$$d_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d_j\left|a_{ji}\right| \le -\mu, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\mu - k\int_t^\infty \|C(u,t)\|du \ge \eta,$$

$$k(1 - r'(t))\int_t^\infty \|C(u, t - \tau(t))\|du \ge \beta_2\|B\|$$

ve

$$k - \beta_2 \ge 0$$

olur. Burada $\beta_2 = \max_{1\le i\le n}\{d_i\}$ dir.

Bu durumda

$$0 \le \tau(t) \le \left(1 - \frac{\beta_2\|B\|}{kL}\right)t + \tau(0)$$

olmak kaydıyla (6.10) diferansiyel denklem sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Du, 1995).

İspat.

$$V(t,x) = \|Dx\| + k\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|\,du\,\|x(s)\|ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. Burada $D, D = diag[d_1, \dots, d_n\,]$ ve $d_i > 0$ dır.

Teoremin şartları dikkate alındığında,

$$\tau'(t) \leq \frac{\int_t^{\infty}\|C(u,t-\tau(t))\|du - (\beta_2\|B\|)/k}{\int_t^{\infty}\|C(u,t-\tau(t))\|du} \leq \left(1 - \frac{\beta_2\|B\|}{kL}\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin 0'dan t'ye integrali alınırsa

$$0 \leq \tau(t) \leq \left(1 - \frac{\beta_2\|B\|}{kL}\right)t + \tau(0) \qquad (6.11)$$

olduğu görülür.

$t \in [0, \gamma\,], \gamma \geq 0$ ve $\tau(t)$ fonksiyonu (6.11) eşitsizliğini sağlamak üzere

$$\begin{aligned}
&|V(t,x) - V(t,y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} d_i\,|x_i - y_i| + k\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|\,du\,\|x(s) - y(s)\|ds \\
&\leq \beta_2\|x - y\| + kL\tau(t)\max_{t-\tau(t)\leq s\leq t}\|x(s) - y(s)\| \\
&\leq (\beta_2 + kL\tau^*)\sup_{t-\tau^*\leq s\leq t}\|x(s) - y(s)\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yani

$$|V(t,x) - V(t,y)| \leq K\|x - y\|_{[t-\tau^*,t]} \qquad (6.12)$$

yazılabilir. Burada

$$K = \beta_2 + kL\tau^* \qquad \tau^* = \left(1 - \frac{\beta_2\|B\|}{kL}\right)\gamma + \tau(0) \qquad (6.13)$$

dır.

Bu son eşitsizlik $V(t,x)$ Lyapunov fonksiyonelinin x'e göre Lipschitz şartını sağladığını gösterir.

$\beta_1 = \min_{1\leq i\leq n}\{d_i\}, \beta_2 = \max_{1\leq i\leq n}\{d_i\}$ ve

$$Z(t,x) = k\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|\,du\,\|x(s)\|$$

olsun. Bu kabuller ve teoremin şartları altında kolaylıkla

$$\beta_1\|x\| + Z(t,x) \leq V(t,x) \leq \beta_2\|x\| + Z(t,x) \qquad (6.14)$$

$$Z(t_2,x) - Z(t_1,x) \leq \widetilde{K}(t_2 - t_1) \qquad (6.15)$$

ve

$Z(t,x) \leq kL\tau^* \|x\|_{[t-\tau^*,t]}$ (6.16)

elde edilir. Burada

$\widetilde{K} = KLM, M = \sup_{t-\tau^* \leq s \leq t} \|x(s)\|$ ve $0 < t_1 < t_2 < \infty$ dur.

Ayrıca yukarıda verilen Lyapunov fonksiyonelinin (6.10) sisteminin çözümleri boyunca türevi alınarak Teorem 6.2'nin şartları dikkate alındığında kolaylıkla

$$\dot{V}(t,x) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[d_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d_j \left|a_{ji}\right| \right] |x_i(t)| + \beta_2 \|B\| \|x\big(t-\tau(t)\big)\|$$

$$+\beta_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \|x(s)\| ds + k \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du \|x(t)\|$$

$$-k[1-\tau'(t)] \int_{t}^{\infty} \|C(u,t-\tau(t))\| du \|x(t-\tau(t))\|$$

$$-k \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \, \|x(s)\| ds$$

$$\leq -\left[\mu - k \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du\right] \|x(t)\|$$

$$-\left[k(1-\tau'(t)) \int_{t}^{\infty} \|C(u,t-\tau(t))\| du - \beta_2 \|B\|\right] \|x(t-\tau(t)\|$$

$$-(k-\beta_2) \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \, \|x(s)\| ds$$

$$\leq -\left(\mu - k \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du\right) \|x(t)\|$$

$\leq -\eta \|x(t)\|$ (6.17)

olduğu görülür.

Yukarıdaki değerlendirmeler dikkate alındığında verilen Lyapunov fonksiyonelinin bağımlı değişkene göre Lipchitz şartını sağladığı, $Z(t,\phi)$ fonksiyonelinin ise ϕ ye göre tek taraflı Lipschitz şartını sağladığı, Z nin sürekli olduğu izlenebilir. Bunlara ilave olarak verilen Lyapunov fonksiyoneli için Lemmada belirtilen alt ve üst sınırların var olduğu bu fonksiyonelin türevinin ise negatif tanımlı olduğu görülür. Bu şartlar altında (6.10) gecikmeli diferansiyel denklem sisteminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu sonucuna varılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur (Du, (1995)).

6.3. Lineer Olmayan Gecikmeli Sistemlerde Bir Kararlılık Sonucu

Aşağıda verilen sabit gecikmeli lineer olmayan skaler Volterra integro-diferansiyel denklem sistemini ele alalım;

$$\dot{x}(t) = -f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t-\tau)\big) + \int_{t-\tau}^{t} h\big(t, s, x(s)\big)ds. \qquad (6.18)$$

Bu integro-diferansiyel denklem sistemi $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\dot{x}_i(t) = -f_i(t,, x(t)) + g_i(t, x(t-\tau)) + \int_{t-\tau}^{t} h_i\big(t, s, x(s)\big)ds \quad (2.4.1)'$$

olarak da ifade edilebilir. Burada $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n, t, \tau \in R_+, f = (f, \dots, f_n)^T \in C(R \times R^n, R^n)$ ve $g = (g_1, \dots, g_n)^T \in C(R \times C_H, R^n)$ dir. Ayrıca $f_i(t, x(t)) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ ve $g_i(s, x(s)) = g_i(s, x_1(s), \dots, x_n(s))$ve $h \in C(R \times [-r, \infty] \times C_H, R^n)$ dir.

(6.18) denklemine ait kararlılık sonucunu vermeden önce bu denklem sisteminde integral işareti altındaki terimi sıfır alalım. Bu durumda karşılık gelen integro-diferansiyel denklem sistemi

$$\dot{x}(t) = -f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t-\tau)\big) \qquad (6.19)$$

olur. Bu sistem aynı zamanda

$$\dot{x}_i(t) = -f_i(t,, x(t)) + g_i(t, x(t-\tau)) \qquad (6.20)$$

olarak da ifade edilebilir.

<u>Teorem 6.3.</u> Gecikmeli (6.19) diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(I) $f(t, 0) = g(s, 0) \equiv 0$ ve

$x_i f_i(t, x(t)) > 0, \quad (x_i \neq 0)$ dır.

(II) $g(s, x(s))$ fonksiyonu x değişkenine göre Lipschitz şartını sağlar. Ayrıca

$$\|f(t, x(t)\| - \|g(t, x(t)\| \geq -\mu \|x(t)\|$$

ve

$$\|g(t-\tau, x(x-\tau))\| - \big\|g\big(t, x(t-\tau)\big)\big\| \geq 0$$

olsun. O zaman gecikmeli (6.19) diferansiyel denklem sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Du, 1995).

<u>İspat.</u>

$$V(t,x) = \|x\| + \int_{t-\tau}^{t} \|g(s,x(s))\|ds$$

Lyapunov fonksiyoneli tanımlansın. g fonksiyonun x değişkenine göre Lipschitz şartını sağladığından verilen fonksiyonel de x değişkenine göre Lipschitz şartını sağlar. Buna bağlı olarak da

$$Z(t,x) = \int_{t-\tau}^{t} \|g(s,x(s))\|ds = \int_{t-\tau}^{t} \left(\left\|g\big(s,x(s)\big) - g(s,0)\right\|\right)ds$$

$$\leq K_g \int_{t-\tau}^{t} \|x(s) - 0\|ds$$

$$\leq K_g\tau \sup_{t-\tau\leq s\leq t}\|x(s)\| = K_g\tau\|x(s)\|_{[t-\tau,t]} \qquad (6.21)$$

olduğu izlenebilir. Burada K_g, g fonksiyonu için Lipschitz sabitidir.

$0 < t_1 < t_2 < \infty$ eşitsizliğini sağlayan t_1 ve t_2 ler için $M = \max_{t_1\leq s\leq t_2}\|g(s,x(s))\|$ alınır ise

$$Z(t_2,x) - Z(t_1,x) \leq \int_{t_1}^{t_2}\left\|g\big(s,x(s)\big)\right\|ds \leq M(t_2 - t_1) \qquad (6.22)$$

elde edilir. Son olarak yukarıda verilen

$$V(t,x) = \|x\| + \int_{t-\tau}^{t} \|g(s,x(s))\|ds$$

Lyapunov fonksiyonelinin (6.19) denklem sisteminin çözümleri boyunca türevi alınır ve verilen teoremin şartları kullanılırsa

$$\dot{V}_{(6.19)}(t,x) = \dot{V}_{(6.19)'}(t,x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i sgn x_i(t+0) + \|g(t-\tau)\| - \|g(t-\tau,x(t-\tau))\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left[-\left|f_i\big(t,x(t)\big)\right| + \left|g_i\big(t,x(t-\tau)\big)\right|\right] + \|g(t,x)\| - \|g(t-\tau,x(t-\tau))\|$$

$$= -\left[\left\|f\big(t,x(t)\big)\right\| - \left\|g\big(t,x(t)\big)\right\|\right] - [\|g(t-\tau,x(t-\tau))\| - \|g(t,x(t-\tau))\|]$$

$$\leq \left[\left\|f\big(t,x(t)\big)\right\| - \|g(t,x(t)\|\right] \leq -\mu\|x(t)\| \qquad (6.23)$$

elde edilir.

Yukarıdaki bulgular ışığında verilen Lyapunov fonksiyoneli ve türevi için

$$W = W_1 = \|x\|, W_2 = K_g\tau\|x\| \text{ ve } W_3 = \mu\|x\|$$

olarak seçildiğinde lemmadaki tüm şartlar (6.21), (6.22) ve (6.23) tarafından sağlanır. Bundan dolayı (6.19) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

6.4. Lineer Olmayan Gecikmeli Volterra İntegro-Diferansiyel Sistem İçin Bir Kararlılık Sonucu

Şimdi ise (6.18) gecikmeli integro-diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki kararlılık sonucu verilebilir.

Teorem 6.4. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(a) $f(t,0) = g(s,0) = h(t,s,0) \equiv 0$ ve

$$x_i(t) f_i\big(t, x(t)\big) > 0, \qquad (x_i(t) \neq 0),$$

dır.

(b) Her $s \leq t$ için $H(t,s,x) \equiv \int_t^{\infty} \|h(u,s,x(s)\| \, du \leq \tilde{L} < \infty$

dur.

(c) H ve g fonksiyonları x değişkenine göre Lipschitz şartını sağlasın ve $t \in R_+$ için

$$\|f(t,x(t)\| - \|g(t,x(t)\| \geq \tilde{L} + \mu \|x(t)\|,$$

$$\|g(t-\tau, x(t-\tau)\| - \|g(t, x(t-\tau)\| \geq 0$$

olsun. Bu durumda (6.18) gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Du, 1995).

İspat.

$$V(t,x) = \|x\| + \int_{t-\tau}^{t} \|g(s,x(s))\| ds + \int_{t-\tau}^{t} \int_{t}^{\infty} \|h(u,s,x(s))\| \, duds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. g ve H fonksiyonları x değişkenine göre Lipschitz şartını sağladığından, kolaylıkla V fonksiyonelinin Lipschitz şartını sağladığı gösterilebilir.

$$Z(t,x) = \int_{t-\tau}^{t} \|g(s,x(s))\| ds + \int_{t-\tau}^{t} \int_{t}^{\infty} \|h(u,s,x(s))\| \, duds$$

olsun. $H(t,s,x) \equiv \int_t^{\infty} \|h(u,s,x(s)\| \, du$ ve $H(t,s,0) \equiv 0$ olması nedeniyle teoremin şartlarına bağlı olarak,

$$\int_{t-\tau}^{t}\int_{t}^{\infty}\|h(u,s,x(s))\|\,duds$$

$$=\int_{t-\tau}^{t}H\big(t,s,x(s)\big)ds$$

$$=\int_{t-\tau}^{t}\big|H\big(t,s,x(s)\big)-H(t,s,0)\big|ds$$

$$\leq L_H\int_{t-\tau}^{t}\|x(s)-0\|ds$$

$$\leq L_H\tau\sup_{t-\tau\leq s\leq t}\|x(s)\| = L_H\tau\|x\|_{[t-\tau,t]}$$

yazılabilir. Burada L_H, H fonksiyonuna ait Lipschitz sabitidir.

(6.21) ve (6.22) eşitsizlikleri yardımıyla

$$Z(t,x)\leq K_g\tau\|x\|_{[t-\tau,t]}+L_H\tau\|x\|_{[t-\tau,t]}=\big(K_g+L_H\big)\tau\|x\|_{[t-\tau,t]} \tag{6.23}$$

olduğu görülür. Ayrıca $0<t_1<t_2<\infty$ olmak üzere $\widetilde{M}=\max_{t_1\leq s\leq t_2}\|g(s,x(s))\|$ alınır ise kolaylıkla

$$Z(t_2,x)-Z(t_1,x)\leq\int_{t_1}^{t_2}\big\|g\big(s,x(s)\big)\big\|ds+\tilde{L}\int_{t_1}^{t_2}ds\leq\big(\widetilde{M}+\tilde{L}\big)(t_2-t_1) \tag{6.24}$$

elde edilir. Son olarak, verilen Lyapunov fonksiyonelinin (6.18) denklem sisteminin çözümleri boyunca türevi alınıp ve verilen teoremin şartları kullanıldığında

$$\dot{V}_{(6.18)}(t,x)=\dot{V}_{(6.18)'}(t,x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[-\big|f_i\big(t,x(t)\big)\big|+\big|g_i\big(t,x(t-\tau)\big)\big|+\int_{t-\tau}^{t}\big|h_i\big(t,s,x(s)\big)\big|ds\right]$$

$$+\big\|g\big(t,x(t)\big)\big\|-\big\|g\big(t-\tau,x(t-\tau)\big)\big\|+\int_{t}^{\infty}\|h(u,t,x(t))\|\,du$$

$$-\int_{t}^{\infty}\|h(u,t-\tau,x(t-\tau))\|du-\int_{t-\tau}^{t}h\big(t,s,x(s)\big)ds$$

$$\leq\big\|f\big(t,x(t)\big)\big\|+\big\|g\big(t,x(t-\tau)\big)\big\|+\int_{t-\tau}^{t}h\big(t,s,x(s)\big)ds$$

$$+\big\|g\big(t,x(t)\big)\big\|-\|g(t-\tau,x(t-\tau)\|+\tilde{L}-\int_{t-\tau}^{t}h\big(t,s,x(s)\big)ds$$

$$-\big[\big\|f\big(t,x(t)\big)\big\|+\big\|g\big(t,x(t)\big)\big\|-\tilde{L}\big]$$

$$\big[\|g(t-\tau,x(t-\tau)\|-\big\|g\big(t,x(t-\tau)\big)\big\|\big]$$

$$\leq -\left[\left\|f\big(t,x(t)\big)\right\| - \left\|g\big(t,x(t)\big)\right\| - \tilde{L}\right] \leq -\mu\|x(t)\| \tag{6.25}$$

olduğu görülür.

Yukarıda bulmuş olduğumuz verilere dayanarak ve verilen Lyapunov fonksiyoneli ile bu fonksiyonelin türevi için

$$W = W_1 = \|x\|, W_2 = \left(K_g + L_H\right)\tau\|x\|_{[t-\tau,t]} \text{ ve } W_3 = \mu\|x\|$$

alınabilir. Lemmanın tüm şartları verilen hipotezler ve (6.23)-(6.25) eşitsizlikleri tarafından sağlanır. Bundan dolayı (6.18) denklem sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur (Du (1995)).

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bilindiği gibi gerek diferansiyel denklemler, gerek integral denklemler ve gerek ise integro-diferansiyel denklemler uygulamalı bilimlerde, örneğin fizik, mühendislik, kontrol teorisi, akışkanlar mekaniği ve benzer bir çok alanlarda dinamik sistemlerin ile ilgili matematiksel modellerin oluşturulması sırasında araştırmacıların karşısına çakabilmektedirler. Ayrıca bu denklemlerin uygun şartlar ve dönüşümler altında birbirlerine dönüşmeleri de mümkündür. Ancak, bu tez konusu ile yakinen alakalı olması nedeni, integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmamaktadır. Nümerik olarak sonlu bir aralıkta hariç, çoğu kez integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek imkânsızdır. Ancak, integro-diferansiyel denklemleri çözmeksizin, bu türden denklemlerin çözümlerinin global olarak varlığı, kararlılığı, düzgün kararlılığı, asimptotik kararlılığı, düzgün asimptotik kararlılığı, sınırlılığı, integrallenebilirliği vb. niteliksel davranışları hakkında literatürde geliştirilen yöntemler, metotlar ve teknikler yardımıyla belirleyici kararlar verilebilir (Burton, 2005). Bu yöntemlerden biri ise Rus matematikçisi A.M. Lyapunov tarafından geliştirilen ve kendi adı ile anılan, Lyapunov'un doğrudan (ikinci) yöntemi olarak bilinen metottur.

Bu tezde, Lyapunov'un metodu kullanılarak gerçekleştirilen ve literatürde hali hazırda mevcut bulunan çalışmalarda geçen belirgin türden skaler ve vektör lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklemler, konvolüsyon tipinde integro-diferansiyel denklemler, değişken gecikmeli lineer integro-diferansiyel denklem sistemleri ve sabit gecikmeli lineer olmayan integro-diferansiyel denklem sistemleri ele alınmıştır ((Burton ve Mahfoud, 1983); (Du, 1995)). Bu denklemlere ait yukarıda belirtilen bazı sonuçlar bazı örnekler ile birlikte araştırıcıların dikkatine sunulması amaçlanmıştır. Sonuçların elde edilmesinde Lyapunov fonksiyonelleri ve temel eşitsizliklerin çok etkin roller aldığı görülmektedir. İlgili literatüre bakıldığında konu ile ilgili çalışmaların sonuçlarının çoğunun yeter şartlar içerdiği görülebilir. Ancak bu tez çalışmasında verilen sonuçların önemli bir kısmı hem gerek ve hem de yeter şartlar içermektedir. Bu tür çalışmaların yapılması matematik literatüründe kayda değerdir. MAyrıca, ele alınan denklemlerin çözümlerine ait bazı niteliksel sonuçların uygun şartlar altında bir birilerine denk olduğu görülmekledir. Literatürde integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini düzgün asimptotik kararlılığına ait çok az sayıda sonuç mevcuttur. Bu tez çalışmasında bu kavram ile alakalı olarak T. A. Burton'a ait bir teoremin uygulaması verilmektedir. Bu tezde verilen sonuçlar, mevcut literatür dikkate alınarak, kesir basamaklı integral ve integro-diferansiyel denklemler , stokastik integral ve integro-diferansiyel denklemler, kısmi türevli integro diferansiyel için de yapılabileceği düşünülmektedir. Lyapunov'un metodundan farklı olarak da sabit nokta, parametrelerin değişimi veya pertürbasyon yöntemleri kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1964. ***Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.*** National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55. Washington, D.C.

Adıvar, M., Raffoul, Y. N., 2012. Inequalities and exponential stability and instability in finite delay Volterra integro-differential equations. ***Rend. Circ. Mat. Palermo,*** **3**: 321-330.

Ahmad, Shair; Rama Mohana Rao, M., 1999. ***Theory of Ordinary Differential Equations. With Applications in Biology and Engineering***. Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi. viii+335 pp.

Becker, L. C., 2006. Principal matrix solutions and variation of parameters for a Volterra integro-differential equation and its adjoint. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.***, **14**: 22. (elektronic)

Becker, L. C., 2007. Function bounds for solutions of Volterra equations and exponential asymptotic stability. ***Nonlinear Anal., 67***: 382-397.

Becker, L. C., 2009. Uniformly continuous L^1- solutions of Volterra equations and global asymptotic stability. ***Cubo 11***: 1-24.

Burton T. A., 1979. Stability theory for Volterra equations. ***J. Differential Equations, 32***(1): 101–118.

Burton, T. A., 1982. Construction of Liapunov functionals for Volterra equations. ***J. Math. Anal. Appl., 85*** (1): 90–105.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1983. Stability criteria for Volterra equations. ***Trans. Amer. Math. Soc., 279***: 143–174.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1984. Instability and stability in Volterra equations. ***Trends in theory and practice of nonlinear differential equations*** (Arlington, Tex., 1982), 99–104, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 90, Dekker, New York. 592.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1985. Stability by decompositions for Volterra equations. ***Tohoku Math. J., 2***: 489-511.

Burton, T. A., 1985. ***Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations.*** Academic Press, New York, 331.

Burton, T. A., 1993. Boundedness and periodicity in integral and integro-differential equations. ***Differential Equations Dynam. Systems, 1***: 161-172.

Burton, T. A., 2005a. ***Volterra İntegral and Differential Equations.*** Second edition. Mathematics in Science and Engineering, 202. Elsevier B. V., Amsterdam. x+353 pp.

Burton, T. A., 2005b. ***Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations***. Corrected version of the 1985 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY. x+342 pp.

Burton, T. A., Haddock, J. R., 2009. Qualitative properties of solutions of integral equations. ***Nonlinear Anal., 71***: 5712-5723.

Burton, T. A., 2010. A Liapunov functional for a linear integral equation. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 10***: 10 pp.

Chang, X., Wang R., 2011. Stability of perturbed n-dimensional Volterra differential equations. ***Nonlinear Anal. 74***: 1672–1675.

Corduneanu, C., 1973. ***Integral Equations and Stability of Feedback Systems. Mathematics in Science and Engineering,*** Vol. 104. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York–London.

Corduneanu, C., 1977. ***Principles of Differential and İntegral Equations.*** Second edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, New York. xii+205 pp.

Du, X., 1995. Some Kinds of Liapunov Functional in Stability Theory of RFDE. ***Acta Mathematicae Applicatae Sinic.*** **11**: 214-224**.**

Dung, N. T., 2015. On exponential stability of linear Levin-Nohel integro-differential equations. ***J. Math. Phys.*** **56**: 10 pp.

Eloe, P., Islam, M., Zhang B., 2000. Uniform asymptotic stability in linear Volterra integro-differential equations with application to delay systems. ***Dynam. Systems Appl.*** **9**: 331–344.

Engler, H., 1988. Asymptotic properties of solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations. ***Results Math.*** **13**: 65-80.

Funakubo, M., Hara, T., Sakata, S., 2006. On the uniform asymptotic stability for a linear integro-differential equation of Volterra type. ***J. Math. Anal. Appl.*** **324**: 1036–1049.

Furumochi, T., Matsuoka, S., 1999. Stability and boundedness in Volterra integro-differential equations. ***Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci.*** **32**: 25–40.

Grace, S., Akin, E., 2016. Asymptotic behavior of certain integro-differential equations. ***Discrete Dyn. Nat. Soc.*** Art. ID 4231050, 6 pp.

Graef, J. R., Tunc, C., 2015. Continuability and boundedness of multi-delay functional integro-differential equations of the second order. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. ***A Math. RACSAM*** **109**: 169–173.

Graef, J. R., Tunç, C., Şevgin S., 2016. Behavior of solutions of non-linear functional Voltera integro -differential equations with multiple delays. ***Dynam. Systems Appl.*** **25:** 39-46.

Grimmer, R., Seifert, G., 1975. Stability properties of Volterra integrodifferential equations. ***J. Differential Equations 19*:** 142–166.

Grimmer, R., Zeman, M., 1982. Nonlinear Volterra integro-differential equations in a Banach space. ***Israel J. Math. 42***: 162–176.

Grossman, S. I., Miller, R. K., 1970. Perturbation theory for Volterra integro-differential systems ***J. Differential Equations*** **8**: 457–474.

Hara, T., Yoneyama, T., Itoh, T., 1989. On the characterization of stability concepts of Volterra integro-differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **142**: 558–572.

Hara, T., Yoneyama, T., Itoh, T., 1990. Asymptotic stability criteria for nonlinear Volterra integro-differential equations. ***Funkcial. Ekvac.*** **33**: 39–57.

Hara, T., Yoneyama, T., Miyazaki, R., 1992. Volterra integro-differential inequality and asymptotic criteria. ***Differential Integral Equations*** **5**: 201–212.

Hino, Y., Murakami, S., 2005. Stability properties of linear Volterra integro-differential equations in a Banach space. ***Funkcial. Ekvac.*** **48**: 367–392.

Islam, M. N., Al-Eid, M. M. G., 2004. Boundedness and stability in nonlinear Volterra integrodifferential equations. ***Panamer. Math. J.*** **14**: 49–63.

Jin, C., Luo, J., 2009. Stability of an integro-differential equation. ***Comput. Math. Appl.*** **57**: 1080–1088.

Juan E. Napoles Valdes, 2001. A note on the boundedness of an integro-differential equation. ***Quaest. Math.*** **24**: 213–216.

Lakshmikantham, V., Rama Mohan Rao, M., 1987. Stability in variation for nonlinear integro-differential equations. ***Applicable Analysis*** **24:** 165–173.

Lakshmikantham, V., Rama Mohana Rao, M., 1995. Theory of integro-differential equations. ***Stability and Control: Theory, Methods and Applications***, 1. Gordon and Breach Science Publishers, Lausanne, 1995. x+362 pp.

Lakshmikantham, V., Leela, S., 1969. Differential and integral inequalities: Theory and applications, Vol. I. ***Ordinary Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering***, Vol. 55-I. Academic Press, New York–London.

Logemann, H., Hartmut, R., Eugene, P., 2004. Asymptotic behaviour of nonlinear systems. ***Amer. Math. Monthly,*** **111** (10): 864–889.

Mahfoud, W. E., 1984. Stability theorems for an integro-differential equation. ***Arabian J. Sci. Engrg.*** **9**: 119–123.

Mahfoud, W. E., 1985. ***Stability Criteria for Linear İntegro-differential Equation.***, **1151:** 243–251.

Mahfoud, W. E., 1987. Boundedness properties in Volterra integro-differential systems. ***Proc. Amer. Math. Soc.*** **100:** 37–45.

Martinez, C., 2002. Bounded solutions of a forced nonlinear integro-differential equation. ***Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*** **9**: 35–42.

Miller, R. K., 1971. Asymptotic stability properties of linear Volterra integro differential equations. ***J. Differential Equations*** **10**: 485–506.

Murakami, S., 1991. Exponential asymptotic stability for scalar linear Volterra equations. ***Differential Integral Equations*** **4**: 519–525.

Raffoul, Y. N., Unal, M., 2014. Stability in nonlinear delay Volterra integro-differential systems. ***J. Nonlinear Sci. Appl.,*** **7:** 422–428.

Rahman, M., 2007, ***Integral Equations and Their Applications.*** WIT Press, Southampton. xiv+356 pp.

Staffans, O. J., 1988. A direct Lyapunov approach to Volterra integro-differential equations. ***SIAM J. Math. Anal.***, **19** (4): 879–901.

Tunc**,** C., 2016a. A note on the qualitative behaviors of non-linear Volterra integro-differential equation. ***J. Egyptian Math. Soc.,*** **24** (2): 187–192.

Tunc, C., 2016b. New stability and boundedness results to Volterra integro-differential equations with delay. ***J. Egyptian Math. Soc.,*** **24** (2): 210–213.

Tunc**,** C., 2016c. Properties of solutions to Volterra integro-differential equations with delay. ***Appl. Math. Inf. Sci.,*** **10** (5): 1775-1780.

Tunç, C., 2016d. Qualitative properties in nonlinear Volterra integro-differential equations with delay. ***Journal of Taibah University for Science***: 309-314.

Vanualailai, J., 2001. Some stability and boundedness criteria for a class of Volterra integro-differential systems. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ***., **12**: 20 pp. (electronic).

Vanualailai, J., Nakagiri S., 2003. Stability of a system of Volterra integro-differential equations**.** ***J. Math. Anal. Appl***., **281** (2): 602–619.

Yang, S. S., Zhang, Z. D., 1996. Construction and application of V -functionals for linear Volterra systems. ***J. Math. Res. Exposition,*** **16** (2): 219–228.

Wang, Z. C., Li, Z. X., Wu, J. H., 1985. Stability properties of solutions of linear Volterra integro-differential equations. ***Tohoku Math. J.***, **37** (4): 455–462.

Wazwaz, A., 2011, ***Linear and nonlinear equations. Methods and applications.*** Higher Education Press, Beijing; Springer, Heidelberg. xviii+639 pp.

Wei, A., Zhi, M. J., 1996. Stability of Volterra integro-differential equations. ***Acta Math. Sci.***, **16** (2): 214–219.

Xu, D., 1997. Asymptotic behavior of Volterra integro-differential equations. ***Acta Math. Appl. Sinica,*** **13** (1): 107–110.

Yoshizawa, T., 1959. Liapunov's function and boundedness of solutions. ***Funkcial. Ekvac.*** **2**: 95–142.

Yoshizawa, T., 1966. ***Stability theory by Liapunov's second method.*** The Mathematical Society of Japan, Tokyo. 223.

Yoshizawa, T., 1975. ***Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions.*** Applied Mathematical Sciences**,** Vol. 14. Springer–Verlag, New York-Heidelberg, 233.

Zhang, Z. D., 1990. Asymptotic stability of Volterra integro-differential equations. ***J. Harbin Inst. Tech.,*** **4**: 11–19.

Zhang, Z. D., 1992. Asymptotic stability for large-scale systems of Volterra integro-differential equations. ***Acta Math. Appl. Sinica,*** **15** (4): 510–518.

ÖZ GEÇMİŞ

1992 yılında Burdur'da doğdu. İlk ve Ortaöğretimi Antalya'da tamamladı. Lise eğitimini Antalya Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2010 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü kazandı. 2015 yılında mezun olup aynı yıl Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başlayarak 2019 yılında mezun oldu.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: ……./……../20……

Tez Başlığı / Konusu: VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI KARARLILIK KRİTERLERİ

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 48 sayfalık kısmına ilişkin, 02/08/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNİTİN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14 (yüzde on dört) tür.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza
…/…/2019

Adı Soyadı: Merve ŞENGÜN

Öğrenci No: 159102004

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: Y. Lisans ☒ Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Cemil TUNÇ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü