

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPI
ANALİZ METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Aslı ALKAN
DANIŞMAN: Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ
ANALİZ METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Aslı ALKAN

VAN-2019

KABUL ve ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR danışmanlığında, Aslı ALKAN tarafından sunulan “**Kesir Mertebeli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Metodu İle Nümerik Çözümleri**” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 18 / 07 / 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye :Prof. Dr. Musa ÇAKIR

İmza:

Üye :Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

İmza:

Üye :Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 01./08./2019 tarih ve 2019./...41.../ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Suat SENSÖY
Enstitü Müdürü

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Aslı ALKAN



ÖZET

KESİR MERTEBELİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPI ANALİZ METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ALKAN, Aslı
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR
Ağustos 2019, 59 sayfa

Bu yüksek lisans tezi 7 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, homotopi analiz metodunun tarihi ile literatür bildirişi verilmiştir. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım, teorem ve ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, homotopi analiz metoduna ait bilgiler ve bu metodun gelişimi verilmiştir. Dördüncü bölümde Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan Burgers denkleminin nümerik çözümleri Homotopi analiz metodu kullanılarak elde edilmiş ve bu probleme ait çizelge ve grafiklerle bölüm sonlandırılmıştır.

Beşinci bölümde, Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan Adveksiyon denkleminin nümerik çözümleri homotopi analiz metodu kullanılarak elde edilmiş ve bu probleme ait çizelge ve grafiklerle bölüm sonlandırılmıştır.

Altıncı bölümde, Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren lineer ve lineer olmayan Klein-Gordon denklemlerinin nümerik çözümleri homotopi analiz metodu kullanılarak elde edilmiştir. Bu problemlere ait çizelge ve grafiklerle bölüm sonlandırılmıştır. Son bölüm ise, tez ile ilgili sonuç ve tartışma bölümünden oluşmaktadır.

Anahtar kelimeler: Adveksiyon denklemi, Burgers denklemi, Caputo kesirli türev, Homotopi analiz metodu, h yakınsaklık-kontrol parametresi, Klein-Gordon denklemi.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY ANALYSIS METHOD

ALKAN, Aslı

M.Sc. Thesis, Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

August 2019, 59 pages

This thesis consists of 7 parts. In the first part, the history of the homotopy analysis method and the related literature is reviewed. In the second part involves the basic definitions, theorems and preliminary information are used in this study.

In the third chapter, information about homotopy analysis method and its development is analysed. In the fourth part, the numerical solutions of the nonlinear Burgers equation containing the fractional derivative in terms of Caputo have been obtained by using the homotopy analysis method and the charts and the graphs of this problem have been shown.

In the fifth one, the numerical solutions of the nonlinear Advection equation containing the fractional derivative in terms of Caputo have been obtained by using homotopy analysis method and the chart and the graphs of this problem were given.

In the sixth part, numerical solutions of linear and nonlinear Klein-Gordon equations containing fractional order from Caputo have been obtained by using homotopy analysis method. The charts and graphs of these problems were also demonstrated. The last part of this study consists of the conclusion and discussion of the thesis.

Keywords: Advection equation, Burgers equation, Caputo fractional derivative, Homotopy analysis method, \hbar convergence-control parameter, Klein-Gordon equation.



ÖN SÖZ

Tez çalışmasında, araştırma konusunun belirlenmesinde ve her aşamasında görüş, öneri, eleştirileri ile bana destek olan, tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR'a özellikle göstermiş olduğu sabırdan dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu tez çalışmasının bitmesi için her türlü imkanı sağlayan Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a, yönlendirmeleriyle beni güdüleyen değerli hocalarım Dr. Abdullah OĞRAK'a ve Dr. Onur SALDIR'a teşekkürlerimi sunarım ve son olarak da yüksek lisans eğitimi süresince her zaman yanımda olup ve desteklerini esirgemeyen aileme de minnettarım.

Aslı ALKAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER	5
2.1. Bazı Tanımlar	5
3. HOMOTOPİ ANALİZ METODU	9
3.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler için Homotopi Analiz Metodu	9
3.2. Optimal Homotopi Analiz Metodu	13
3.3. Homotopi Türevinin Özellikleri.....	14
4. BURGERS DENKLEMİ.....	23
5. ADVEKSİYON DENKLEMİ.....	31
6. KLEIN-GORDON DENKLEMİ.....	39
6.1. Lineer Kesirli Klein-Gordon Denklemi	40
6.2. Lineer Olmayan Kesirli Klein-Gordon Denklemi.....	46
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZ GEÇMİŞ	59



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. (4.3) denkleminde $\alpha = 1$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	27
Çizelge 4.2. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	27
Çizelge 4.3. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	28
Çizelge 4.4. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	28
Çizelge 5.1. (5.3) denkleminde $\alpha = 1$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	34
Çizelge 5.2. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	34
Çizelge 5.3. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	35
Çizelge 5.4. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	35
Çizelge 6.1. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 2$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	42
Çizelge 6.2. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.9$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması....	43
Çizelge 6.3. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.8$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması....	43
Çizelge 6.4. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.7$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması...	44
Çizelge 6.5. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 2$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması.....	49
Çizelge 6.6. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.9$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması...	49
Çizelge 6.7. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.8$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması...	50
Çizelge 6.8. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.7$ için HAM ile tam çözümün karşılaştırılması...	20

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. (4.3) denkleminde $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.....	29
Şekil 4.2. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.....	29
Şekil 4.3. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ değeri için mutlak hata grafiği.....	30
Şekil 4.4. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.....	30
Şekil 5.1. (5.3) denkleminde $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.....	36
Şekil 5.2. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.....	36
Şekil 5.3. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ değeri için mutlak hata grafiği.....	37
Şekil 5.4. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.....	37
Şekil 6.1. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 2$ değeri için mutlak hata grafiği.....	44
Şekil 6.2. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.9$ değeri için mutlak hata grafiği.....	45
Şekil 6.3. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.8$ değeri için mutlak hata grafiği.....	45
Şekil 6.4. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.7$ değeri için mutlak hata grafiği.....	46
Şekil 6.5. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 2$ değeri için mutlak hata grafiği.....	51
Şekil 6.6. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.9$ değeri için mutlak hata grafiği.....	51
Şekil 6.7. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.8$ değeri için mutlak hata grafiği.....	52
Şekil 6.8. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.7$ değeri için mutlak hata grafiği.....	52



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler

L	: Lineer Operatör
\mathcal{N}	: Lineer Olmayan operatör
\mathbb{R}	: Reel Sayılar
\mathbb{N}	: Doğal Sayılar
\exists	: Bazı
\forall	: Tüm
\in	: Eleman
Σ	: Toplam Sembolü
Γ	: Gamma Fonksiyonu
∂	: Kısmi Türev
∞	: Sonsuz
$ $: Mutlak Değer
$\ \ $: Norm
$!$: Faktöriyel
AC	: Mutlak Sürekli Fonksiyon
\hbar	: Yakınsaklık-Kontrol Parametresi

Kısaltmalar

HAM	: Homotopi Analiz Metodu
-----	--------------------------



1. GİRİŞ

Homotopi analiz metodu, farklı tipteki lineer olmayan denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yarı analitik yaklaşımdır. Bu metot cebirsel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerin, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılır.

Lineer olmayan problemlerin analitik çözümlerini elde etmek genellikle zordur. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Bu yarı analitik yaklaşımlar, non-lineerlik kuvvetli olduğunda, çoğu zaman başarısız sonuçlar verir. Bu başarısız sonuçları ortadan kaldırmak için homotopi analiz metodu pratik sonuçlar verir. Homotopi analiz metodu çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etme imkânı sağlar. Homotopi analiz metodu, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanır. Bu metotta, ele alınan denklemi çözmek için önce başlangıç yaklaşımını tam çözüme götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için ise bir yardımcı parametre kullanılır. Bu metot, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi analiz metodu yardımıyla lineer olmayan zor bir problem böylece daha basit sonsuz sayıda lineer alt probleme dönüştürülür.

Homotopi analiz metodu (HAM) ilk defa 1992 yılında Shijun Liao tarafından doktora tez çalışmasında sunulmuştur (Liao, 1992). Sonraki yıllarda HAM' nun farklı diferansiyel denklemlere uygulamaları yapılmıştır (Liao 1999; Liao 2003; Liao 2005). Homotopi analiz metodu ile bir analitik seri çözüm tekniğinde yakınsaklığın kontrolü de sağlanmıştır. Birçok araştırmacı çeşitli fiziksel ve mühendislik problemini bu metodla başarılı bir şekilde çözmüştür. (Sun, 2004) çalışmasında Klein-Gordon denklemi ile modellenen lineer olmayan gezen dalgaları çözmek için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Song ve Zhang (2007), çalışmalarında tamsayı mertebeli diferansiyel denklem için geliştirilen homotopi analiz metodu ilk kez lineer olmayan kesir mertebeli diferansiyel denklemin nümerik çözümlerini elde etmek için genişletilmiş ve kesirli

KdV-Burgers-Kuramoto denkleminin homotopi analiz metoduna uygulanmıştır. (Abbasbandy, 2008) çalışmasında genelleştirilmiş Benjamin-Bona Mahony (BBM) denkleminin çözümü için analitik bir teknik olan homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Abdulaziz ve ark. (2008), çalışmalarında zaman kesirli wave-like denklemi, zaman kesirli hiperbolik denklem, zaman kesirli Fisher denklemi gibi lineer ve lineer olmayan kesir mertebeli bazı kısmi diferansiyel denklemler için homotopi analiz metodu kullanılmıştır.

Dehghan ve ark. (2009), çalışmalarında bazı lineer olmayan kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Yusufoglu ve Selam (2010), çalışmalarında modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga (MEW) denkleminin çözümünde homotopi analiz metodu kullanılarak h yakınsaklık-kontrol parametresi için yakınsaklık aralığı bulunmuş ve uygun h değeri bulunarak metodun etkinliği gösterilmiştir. (Elsaid, 2011) çalışmasında Riesz ve Caputo anlamında uzaysal ve zamansal kesirli türevlere sahip kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Arafa ve ark. (2012), çalışmalarında gelişimsel biyolojide morfojen sistemlerini modelleyen kesirli iki tane reaksiyon-difüzyon denkleminin oluşan sistem (kesir mertebeli Schnakenberg sistemleri) için homotopi analiz metodu kullanılarak etkili nümerik çözümler elde edilmiştir. Vishal ve ark. (2012), çalışmalarında lineer olmayan kesirli zaman türeveli sahip Swift Hohenberg denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Sakar ve Erdoğan (2013), çalışmalarında Caputo türeveli sahip lineer olmayan Fornberg-Whitham denkleminin nümerik çözümü için homotopi analiz metodunu kullanmış ve bulunan sonuçları Adomian ayrıştırma metoduyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırmış ve yakınsaklık-kontrol parametresinin optimal değerleri incelenen aralıklarda tespit edilmiştir. Shaiq ve ark. (2013), çalışmalarında değişken katsayıya sahip zaman kesirli lineer olmayan wave-like denkleminin çözümlerini bulmak için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Freihath ve ark. (2013), çalışmalarında bilgisayar virüsleri için oluşturulan modifiye edilmiş epidemiyolojik model için çok adımlı homotopi analiz metodu kullanılmıştır.

Lu ve Liu (2014), çalışmalarında değişken katsayılı KdV Burgers denkleminin nümerik çözümü için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. (Aslanov, 2015) çalışmasında değişken katsayıya sahip lineer olmayan wave-like denklemlerinin

çözümlerini elde etmek için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Odibat ve Bataineh (2015), çalışmalarında lineer olmayan problemler için homotopi analiz metoduna yeni bir yaklaşım getirmişlerdir. Önerilen bu yaklaşım, karmaşık integrallerin hesaplanmasında ortaya çıkan zorluğun üstesinden kolayca gelebilir. Ayrıca, problemin lineer olmayan terimini bir dizi polinom olarak ayrıştıran homotopi polinomları ortaya konulmuş ve çözüm prosedürünü daha basit ve etkili hale getiren bu tür polinomları için hesaplama algoritması oluşturulmuştur. Gomez ve ark. (2016), çalışmasında uzay-zaman kesirli lineer olmayan kısmi diferansiyel mKdV denkleminin seri çözümü için homotopi analiz metodu uygulanmıştır. (Türkyılmazoğlu, 2016) çalışmasında homotopi analiz metodunda yakınsaklık bölgesinin incelenmesinde kullanılan optimal yakınsaklık-kontrol parametrelerine yönelik etkin bir yaklaşım geliştirilmiştir. Pandey ve Mishra (2017), çalışmalarında üçüncü derece kesir mertebeli dispersif dalga denklemlerinin çözümü için homotopi analiz metodu sumudu dönüşümü ile birlikte kullanılarak hibrit bir metot oluşturulmuştur. (Hariharan, 2017) çalışmasında mühendislikte ortaya çıkan bazı kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için homotopi analiz metodu kullanılmıştır. Lineer optimal kontrol problemleri için optimal homotopi analiz metodu Jia ve ark. (2017), çalışmalarında uygulanmıştır. (Odibat, 2018) çalışmasında lineer operatör ve başlangıç yaklaşımının optimal seçimi için yeni bir yaklaşım önerilmiştir. (Van Gorder, 2019) çalışmasında lineer olmayan adi diferansiyel denklemler için optimal homotopi analiz metodu ve hata kontrolü ile ilgili yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

Bu tezin amacı, Adveksiyon, Burgers ve Klein-Gordon kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerinin homotopi analiz metodu ile nümerik çözümlerini elde etmektir. Elde edilen bu çözümler, keyfi h parametresi içermektedir. Bu h parametresinin optimal değerlerinin bulunması için residual error metodu kullanılacaktır.

2. TEMEL TANIMLAR ve ÖN BİLGİLER

2.1. Bazı Tanımlar

Bu bölümde, tezde kullanılacak bazı temel tanımlar ve gerekli ön bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1.1. $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H: X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g homotopiktir denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir homotopidir denir (Liao, 2009).

Tanım 2.1.2. Gamma fonksiyonu $\Gamma(m)$ integral formunda

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt,$$

biçiminde tanımlanır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özellikleri;

- a) $\Gamma(1) = 0! = 1$,
- b) $\Gamma(m + 1) = m\Gamma(m)$,
- c) $\Gamma(m + 1) = m!$,
- d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
- e) $\Gamma(m)\Gamma(1 - m) = \frac{\pi}{\sin(\pi m)}$, $0 < m < 1$,
- f) Gamma fonksiyonuna ait çarpım formülü

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x),$$

biçimindedir (Abramowitz ve Stegun, 1964; Oldham ve Spanier, 1974).

Tanım 2.1.3. $f \in C[a,b]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere,

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < x < b,$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville integrali denir (Podlubny, 1999; Diethelm, 2010).

Tanım 2.1.4. Let $f \in C[a, b]$ ve $m - 1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} [J_a^{m-\alpha} f(x)], \quad a < x < b,$$

ifadesine, ifadenin sağ tarafı tanımlı olmak şartıyla $f(x)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville türevi denir (Podlubny, 1999; Diethelm, 2010).

Tanım 2.1.5. $f \in AC^m[a, b]$ ve $m - 1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$D_a^\alpha f(x) = J_a^{m-\alpha} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left[\int_0^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \right],$$

ifadesine, $f(x)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Caputo türevi denir (Podlubny, 1999; Diethelm, 2010).

Tanım 2.1.6. t zaman değişkeni ve $n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere, Caputo zaman kesirli mertebeli türevi,

$$D_t^\alpha y(x, t) = \frac{\partial^\alpha y(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{\partial^n y(x, t)}{\partial t^n}, & \alpha = n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n y(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau, & n-1 < \alpha < n, \end{cases}$$

biçiminde verilmiştir. (Momani ve Odibat, 2009).

(Podlubny, 1999; Kilbas ve ark., 2006; Diethelm, 2010) aşağıda belirtilen özellikleri literatüre sunmuşlardır.

- 1) $J_a^\alpha J_a^\nu f = J_a^\nu J_a^\alpha f = J_a^{\alpha+\nu} f, \alpha, \nu \geq 0,$
- 2) $J_a^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (x-a)^{\gamma+\alpha}, \alpha > 0, \gamma > -1, x > 0,$
- 3) $J_a^\alpha {}^c D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N},$
- 4) ${}^c D_a^\alpha f(x) = D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right), n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N},$
- 5) Eğer f sürekli ve $0 < \alpha < 1$ ise, o zaman $D^\alpha J^\alpha f = f$ olur.

Tanım 2.1.7. $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel ya da kompleks değerli bir fonksiyon ve $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ikişer ikişer ayrık (mutually disjoint) $(a_i, b_i) \subset [a, b]$ açık aralıklarının bir kümesi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ için $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ şartını sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir (Sen, 2013).



3. HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Homotopi analiz metodu, Liao tarafından 1992 yılında, kendi doktora tezinde lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen ve topolojinin önemli kavramlarından biri olan homotopi ve Taylor formülüne dayalı bir yarı analitik metottur. Bu metodun en önemli özelliğinden biri de başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlamasıdır. Homotopi analiz metodu ile birçok araştırmacı birçok fizik ve mühendislik problemini yarı analitik olarak başarılı bir şekilde çözmüştür.

3.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler için Homotopi Analiz Metodu

Metodumuza ait temel fikri göstermek için aşağıdaki lineer olmayan denklemi genel bir formda düşünelim;

$$\mathcal{N}[y(x, t)] = 0. \quad (3.1)$$

Burada, \mathcal{N} lineer olmayan bir operatör, x uzaysal, t zamansal bağımsız değişkenler ve $y(x, t)$ bu değişkenlere bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. Liao, klasik homotopi kavramını kullanarak sıfıncı-mertebe deformasyon denklemini oluşturmuştur. $q \in [0,1]$ gömme parametresi, $\hbar \neq 0$ sıfırdan farklı yakınsaklık-kontrol parametresi, $\mathcal{H}(x, t)$ bir yardımcı fonksiyon, L yardımcı lineer operatörü ve $y_0(x, t)$, $y(x, t)$ ' nin bir başlangıç tahmini olmak üzere $\phi(x, t; q)$ çözüm serisi için sıfıncı-mertebe deformasyon denklemi;

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - y_0(x, t)] = q\hbar\mathcal{H}(x, t)\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] \quad (3.2)$$

ile verilir. Homotopi analiz metodunda; \hbar yakınsaklık-kontrol parametresi, $\mathcal{H}(x, t)$ yardımcı fonksiyonu ve L yardımcı lineer operatörü keyfi olarak seçilebilir. Denklem çözümü olan $\phi(x, t; q)$, sadece $y_0(x, t)$, L , \hbar , $\mathcal{H}(x, t)$ ' ye bağlı değil aynı zamanda $q \in [0,1]$ gömme parametresine de bağlıdır.

$q = 0$ iken,

$$\phi(x, t; 0) = y_0(x, t) \quad (3.3)$$

ve

$q = 1$ iken,

$$\phi(x, t; 1) = y(x, t) \quad (3.4)$$

elde edilir. Homotopi-parametresi q , 0' dan 1' e doğru artarken $\phi(x, t; q)$ ' da $y_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımından, tam çözüm $y(x, t)$ ' ye sürekli olarak değişir. Bu tip sürekli değişime homotopide deformasyon denir.

m . mertebe deformasyon denkleminin türevleri

$$y_0^{(m)}(x, t) = \left. \frac{\partial^m \phi(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad (3.5)$$

ile tanımlanır. Taylor teoremi yardımıyla $\phi(x, t; q)$ ifadesinin q ' nun kuvvet serisine açılımı aşağıdaki şekildedir.

$$\phi(x, t; q) = y_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x, t) q^m. \quad (3.6)$$

Burada,

$$y_m(x, t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad (3.7)$$

olup ve $\phi(x, t; q)$ ' nun kuvvet serisi

$$\phi(x, t; q) = y_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x, t) q^m, \quad (3.8)$$

şeklindedir.

L yardımcı lineer operatör, $y_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımı, \hbar yakınsaklık-kontrol parametresi ve $\mathcal{H}(x, t)$ yardımcı fonksiyonu uygun seçilirse, $\phi(x, t; q)$ kuvvet serisi $q = 1$ ' de yakınsar ve

$$y(x, t) = y_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x, t), \quad (3.9)$$

olarak bulunur.

Liao tarafından literatürde sunulduğu gibi başlangıçta verilen lineer olmayan denklemin çözümlerinden biri $\hbar = -1$ ve $\mathcal{H}(x, t) = 1$ seçilirse denklem

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - y_0(x, t)] + q\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = 0, \quad (3.10)$$

homotopi pertürbasyon metodunda kullanılan forma dönüşür.

$$\vec{y}_n = \{y_0(x, t), y_1(x, t), \dots, y_n(x, t)\}$$

vektörü tanımlanarak (3.7) eşitliğine göre $y_m(x, t)$ ' nin denklemi, (3.2) sıfırıncı-mertebe deformasyon denkleminde türetilebilir.

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases}$$

ile tanımlanan \mathcal{X}_m fonksiyonu da kullanılarak,

$$L[y_m(x, t) - \mathcal{X}_m y_{m-1}(x, t)] = \hbar \mathcal{H}(x, t) R_m(\vec{y}_{m-1}, x, t) \quad (3.11)$$

bulunur. (3.11)' de

$$R_m(\vec{y}_{m-1}, x, t) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Bigg|_{q=0}, \quad (3.12)$$

biçimindedir. Buradan m . mertebeden deformasyon denklemi elde edilir. (3.6) ile (3.12) denklemlerinden,

$$R_m(\vec{y}_{m-1}, x, t) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x, t) q^n \right] \Bigg|_{q=0}, \quad (3.13)$$

elde edilir. m . mertebeden çözüm yaklaşımı,

$$y(x, t) = \sum_{k=0}^m y_k(x, t), \quad (3.14)$$

biçiminde elde edilir. Buradaki $y(x, t)$ çözümü, \hbar yakınsaklık-kontrol parametresi içermektedir. Bu \hbar parametresinin hesaplanmasıyla ilgili detaylı bilgiler bir alt bölümde verilecektir.

Teorem 3.1. Eğer (3.9) denklemindeki homotopi serisi yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(\vec{y}_{n-1}, x, t) = 0,$$

olur (Liao, 2003).

Teorem 3.2. Eğer (3.9) denklemindeki homotopi serisi yakınsak ise bu seri orjinal lineer olmayan (3.1) denkleminin bir çözümü olmalıdır (Liao, 2003).

İspat. Teorem 3.7 ve Teorem 3.8'in ispatı için (Liao, 2003) çalışmasına bakılabilir.

Teorem 3.3. Çözüm bileşenleri olan $y_n(x, t)$ ifadeleri $(C[0,1], \|\cdot\|)$ Banach uzayında tanımlansın. Eğer $\forall n \geq n_0$ ve bazı $n_0 \in N$ için $\|y_{n+1}(x, t)\| \leq \gamma \|y_n(x, t)\|$ koşulunu sağlayan en az bir $0 < \gamma < 1$ varsa, o zaman (3.14) denkleminde tanımlanan $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$ seri çözümü, (3.1) denkleminin çözümüne yakınsaktır.

İspat. Yukarıdaki teorem adi diferansiyel denklemler için (Odibat, 2010) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmadan yararlanılarak kısmi diferansiyel denklemler için aşağıdaki ispat verilebilir.

Kabul edelim ki $(C[0,1], \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi şöyle tanımlansın,

$$\begin{cases} S_0 = y_0(x, t) \\ S_1 = y_0(x, t) + y_1(x, t) \\ S_2 = y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ \vdots \\ S_n = y_0(x, t) + y_1(x, t) + \cdots + y_n(x, t). \end{cases}$$

Şimdi $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin Banach uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S_n\| &= \|y_{n+1}(x, t)\| \leq \gamma \|y_n(x, t)\| \\ &\leq \gamma^2 \|y_{n-1}(x, t)\| \leq \cdots \leq \gamma^{n+1} \|y_0(x, t)\| \end{aligned} \quad (3.15)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Her $n, m \in N$ için $n \geq m$ olsun. (3.15) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak, iteratif bir şekilde

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \cdots + \|(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \gamma^n \|y_0(x, t)\| + \gamma^{n-1} \|y_0(x, t)\| + \cdots + \gamma^{m+1} \|y_0(x, t)\| \\ &= \frac{1 - \gamma^{n-m}}{1 - \gamma} \gamma^{m+1} \|y_0(x, t)\| \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < \gamma < 1$ olduğundan $1 - \gamma^{n-m} < 1$ yazılabilir. Buradan,

$$\|S_n - S_m\| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{1 - \gamma} \max_{t \in [0,1]} \|y_0(x, t)\|$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $y_0(x, t)$ sınırlı olduğundan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0$$

olur. Bu nedenle, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ Banach uzayında bir Cauchy dizisidir. Böylece (3.14) denkleminde verilen seri çözüm yakınsaktır.

Teorem 3.4. (3.14) ile tanımlanan $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t)$ seri çözümün, $y(x, t)$ çözümüne yakınsadığını kabul edelim. Eğer $\sum_{n=0}^m y_n(x, t)$ kesilmiş serisi, (3.1) probleminin $y(x, t)$ çözümü için bir yaklaşım olarak kullanılırsa, maksimum mutlak kesilmiş hata,

$$\left\| y(x, t) - \sum_{n=0}^m y_n(x, t) \right\| \leq \frac{1}{1 - \gamma} \gamma^{m+1} \|y_0(x, t)\|$$

formülüyle hesaplanır.

İspat. Yukarıdaki teorem adi diferansiyel denklemler için (Odibat, 2010) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmadan yararlanılarak kısmi diferansiyel denklemler için aşağıdaki ispat verilebilir.

Teorem 3.9 ve (3.16) eşitsizliğinden, $n \geq m$ için

$$\|S_n - S_m\| \leq \frac{1 - \gamma^{n-m}}{1 - \gamma} \gamma^{m+1} \|y_0(x, t)\| \quad (3.17)$$

bulunur. Şimdi, $n \rightarrow \infty$ iken $S_n \rightarrow y(x, t)$ olur. Dolayısıyla,

$$\|y(x, t) - S_m\| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{1 - \gamma} \|y_0(x, t)\|,$$

elde edilir. $0 < \gamma < 1$ olduğundan $(1 - \gamma^{n-m}) < 1$ yazılabilir. Böylece yukarıdaki (3.17) eşitsizliği,

$$\left\| y(x, t) - \sum_{n=0}^m y_n(x, t) \right\| \leq \frac{1 - \gamma^{n-m}}{1 - \gamma} \gamma^{m+1} \|y_0(x, t)\| \quad (3.18)$$

biçiminde yazılabilir.

3.2. Optimal Homotopi Analiz Metodu

Klasik homotopi analiz metodunda \hbar yakınsaklık-kontrol parametresinin bulunduğu aralık \hbar eğrileri çizilerek tespit edilir. Burada ise, Liao (2010) tarafından önerilen yöntemin ayrık (discret) versiyonu incelenecektir. Bu \hbar parametresinin hesaplanması için çeşitli metotlar Van Gorder ve Vajravelu, (2009), Niu ve Wang, (2010), Fan ve You, (2013), (Turkyilmazoglu, 2016), (Sakar, 2017), Jia ve ark., (2017), (Van Gorder, 2019), çalışmalarında geliştirmiştir.

Adi diferansiyel denklemlerde m . mertebeden yaklaşım için tam karesel residual error

$$\Delta_m = \int_{\Omega} \left(N \left(\sum_{i=0}^m u_i(t) \right) \right)^2 dt, \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Liao, 2010). Burada Δ_m ifadesi bilinmeyen \hbar yakınsaklık-kontrol parametresi içermektedir. m . mertebeden yaklaşım için \hbar yakınsaklık-kontrol parametresinin optimal değeri Δ_m 'nin minimum değeridir. Yani

$$\frac{d \Delta_m}{d \hbar} = 0. \quad (3.2.2)$$

Bununla birlikte Liao tarafından (3.2.1) formülü ile verilen Δ_m hesaplanırken yaklaşım mertebesi yüksek olmasa bile çok fazla işlemci zamanı (CPU-time) ihtiyaç olduğu gösterilmiştir. Bu nedenle işlemci zamanını düşürmek için ortalama karesel residual error ($\sqrt{E_m}$) aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Liao, 2010).

$$E_m = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \left(N \left(\sum_{i=0}^m u_i \left(\frac{j}{n}, \hbar \right) \right) \right)^2. \quad (3.2.3)$$

Tezde ele alınan Burgers, Adveksiyon ve Klein-Gordon kısmi diferansiyel denklemleri için (3.2.3) formülünün kısmi diferansiyel denklemler için geçerli versiyonu kullanılacaktır.

3.3. Homotopi Türevinin Özellikleri

Homotopi türevi, yüksek mertebeden deformasyon denklemlerini elde etmek için kullanılır. Bu bölümde, homotopi türevinin tanımıyla birlikte önemli bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1. ϕ homotopi parametresinin bir fonksiyonu ve $m \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere;

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad (3.3.1)$$

biçimindedir. Burada $D_m(\phi)$ ifadesi ϕ ' nin **m . mertebeden homotopi türevi** olarak adlandırılır (Liao, 2009).

Tanım 3.2. $\mathcal{N}[y] = 0$ lineer olmayan bir denklem ve ϕ ' de $q \in [0,1]$ homotopi parametresinin bir fonksiyonu olsun. Maclaurin serisi;

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k q^k, \quad (3.3.2)$$

şeklindedir.

$$\Pi[\phi, q] = 0 \quad , \quad q \in [0,1]$$

denklemler ailesine $\mathcal{N}[y] = 0$ ' ın **sıfırıncı mertebe deformasyon denklemi** denir. Eğer $q = 1$ ise bu denklem,

$$y = \phi|_{q=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k, \quad (3.3.3)$$

şeklinde olmak üzere, başlangıçta alınan $\mathcal{N}[y] = 0$ denkleme denktir ve denklemin çözümü $q = 0$ ' da açıktır. (3.3.2) serisi **homotopi serisi** olarak adlandırılır ve (3.3.3) serisine de $\mathcal{N}[y] = 0$ ' ın **homotopi seri çözümü** denir. y_k ' ların oluşturduğu denklemlere ise **k . mertebe deformasyon denklemi** denir (Liao, 2009).

Teorem 3.5. f ve g , homotopi parametresi q ' dan bağımsız fonksiyonlar olsun.

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i q^i \quad , \quad \psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j q^j$$

homotopi serileri için,

$$D_m(f\phi + g\psi) = fD_m(\phi) + gD_m(\psi)$$

olur (Liao, 2009).

İspat. f ve g fonksiyonları q ' dan bağımsız ve (3.3.1) ile tanımlanan D_m lineer operatör olduğundan

$$D_m(f\phi + g\psi) = D_m(f\phi) + D_m(g\psi) = fD_m(\phi) + gD_m(\psi)$$

sağlanır.

Teorem 3.6.

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i q^i, \psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j q^j$$

homotopi serileri için;

$m \geq 0, n \geq 0, l \geq 0$ ve $0 \leq k \leq m$ tamsayılar olmak üzere

(a) $D_m(\phi) = y_m,$

(b) $D_m(q^k \phi) = D_{m-k}(\phi),$

(c) $D_m(\phi\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\phi)D_{m-i}(\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi)D_{m-i}(\phi),$

(d) $D_m(\phi^n \psi^l) = \sum_{i=0}^m D_i(\phi^n)D_{m-i}(\psi^l) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi^l)D_{m-i}(\phi^n),$

sağlanır (Liao, 2009).

İspat.

(a) Taylor teoremine göre, ϕ ' nin Maclaurin serisinin tek biçimde tanımlanan y_m katsayıları

$$y_m = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

şeklinde verilir.

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

tanımından,

$$D_m(\phi) = y_m$$

elde edilir.

(b)

$$q^k \phi = q^k \sum_{i=0}^{+\infty} y_i q^i = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^{i+k} = \sum_{m=k}^{+\infty} y_{m-k} q^m$$

sağlanır ve (a) yardımıyla

$$D_m(q^k \phi) = y_{m-k} = D_{m-k}(\phi)$$

bulunur.

(c) Çarpımın türevi için verilen Leibnitz kuralına göre,

$$\frac{\partial^m(\phi\psi)}{\partial q^m} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{\partial^i \phi}{\partial q^i} \frac{\partial^{m-i} \psi}{\partial q^{m-i}} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{\partial^i \psi}{\partial q^i} \frac{\partial^{m-i} \phi}{\partial q^{m-i}}$$

sağlanır. Tanım (3.1) ile

$$\begin{aligned} D_m(\phi\psi) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m(\phi\psi)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i \phi}{\partial q^i} \right|_{q=0} \right) \left(\frac{1}{(m-i)!} \left. \frac{\partial^{m-i} \psi}{\partial q^{m-i}} \right|_{q=0} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\phi) D_{m-i}(\psi) \end{aligned}$$

sağlanır. Benzer şekilde,

$$D_m(\phi\psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\psi) D_{m-i}(\phi)$$

sağlanır.

(d) $\phi = \phi^n$ ve $\Psi = \psi^l$ yazılsın. (c) şıkkına göre,

$$D_m(\phi^n \psi^l) = D_m(\phi\Psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\phi) D_{m-i}(\Psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\phi^n) D_{m-i}(\psi^l)$$

sağlanır. Benzer şekilde,

$$D_m(\phi^n \psi^l) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\psi^l) D_{m-i}(\phi^n)$$

sağlanır.

Teorem 3.7. L, q homotopi parametresinden bağımsız lineer bir operatör olsun.

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k q^k,$$

homotopi serisi için

$$D_m(L\phi) = L[D_m(\phi)]$$

sağlanır (Liao, 2009).

İspat. L, q' dan bağımsız olduğundan

$$L\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} [L(y_k)] q^k$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının m . mertebeden homotopi türevi alınıp (3.6) teoreminin (a) şıkkı kullanılarak,

$$D_m(L\phi) = L(y_m)$$

elde edilir ve yine aynı (3.6) teoreminin (a) şıkkına göre

$$L[D_m(\phi)] = L[y_m]$$

olur. Buradan,

$$D_m(L\phi) = L[D_m(\phi)]$$

sağlanır.

Teorem 3.8.

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k q^k,$$

homotopi serisi için aşağıdaki formüller sağlanır. $m \geq 1$ tamsayı olmak üzere,

$$D_0(e^\phi) = e^{u_0}$$

$$D_m(e^\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^\phi) D_{m-k}(\phi)$$

elde edilir (Liao, 2009).

İspat. Tanım (3.1)' e göre D_m operatörü,

$$D_0(e^\phi) = e^{y_0}$$

sağlanır ve

$$\frac{\partial e^\phi}{\partial q} = e^\phi \frac{\partial \phi}{\partial q}$$

olur. Bu nedenle, çarpımın türevi için Leibnitz kuralına göre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m e^\phi}{\partial q^m} &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left(e^\phi \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k! (m-1-k)!} \frac{\partial^k e^\phi}{\partial q^k} \frac{\partial^{m-k} \phi}{\partial q^{m-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k)}{m} \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k e^\phi}{\partial q^k} \right] \left[\frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} \phi}{\partial q^{m-k}} \right]. \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte $q = 0$ yazılarak ve tanım (3.1) kullanılarak,

$$D_m(e^\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^\phi) D_{m-k}(\phi), \quad m \geq 1$$

elde edilir.

Teorem 3.9.

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k q^k,$$

homotopi serisi için $m \geq 1$ tamsayı olmak üzere,

$$D_0(\sin \phi) = \sin(y_0),$$

$$D_0(\cos \phi) = \cos(y_0),$$

$$D_m(\sin \phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(\cos \phi) D_{m-k}(\phi),$$

$$D_m(\cos\phi) = -\sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(\sin\phi) D_{m-k}(\phi),$$

bağıntıları sağlanır (Liao, 2009).

İspat. (3.1) tanımına göre;

$$D_0(\sin\phi) = \sin(y_0),$$

$$D_0(\cos\phi) = \cos(y_0),$$

sağlanır.

$i = \sqrt{-1}$ yazılırsa Euler formülü ve (3.2) teoremi kullanılarak $m \geq 1$ tamsayısı için;

$$D_m(\sin\phi) = D_m\left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} [D_m(e^{i\phi}) - D_m(e^{-i\phi})] \quad (3.3.4)$$

$$D_m(\cos\phi) = D_m\left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}\right) = \frac{1}{2} [D_m(e^{i\phi}) + D_m(e^{-i\phi})] \quad (3.3.5)$$

sağlanır. Teorem (3.6) ve (3.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned} D_m(e^{i\phi}) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^{i\phi}) D_{m-k}(i\phi) \\ &= i \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^{i\phi}) D_{m-k}(\phi) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$D_m(e^{-i\phi}) = -i \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^{-i\phi}) D_{m-k}(\phi)$$

elde edilir. Yukarıdaki iki eşitlik (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerinde yerine yazılıp, Teorem (3.6) ve Euler formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} D_m(\sin\phi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) [D_k(e^{i\phi}) + D_k(e^{-i\phi})] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k\left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k(\cos\phi)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_m(\cos\phi) &= \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) [D_k(e^{i\phi}) - D_k(e^{-i\phi})] \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k\left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\right) \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k(\sin\phi) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.10. Eğer homotopi serileri

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i q^i, \quad \psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j q^j$$

bir $q \in [0, a)$ bölgesinde $\phi = \psi$ eşitliğini sağlarsa her $m \geq 0$ tamsayısı ve bir $a > 0$ reel sayısı için

$$y_m = v_m \quad \text{ve} \quad D_m(\phi) = D_m(\psi)$$

olur (Liao, 2009).

İspat. $\phi = \psi$ olduğundan dolayı,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (y_k - v_k) q^k = 0$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitlik her $q \in [0, a)$ noktası için sağlanır, ancak ve ancak

$$y_m = v_m, \quad m \geq 0$$

Teorem (3.7)' nin (a) şıkkına göre

$$D_m(\phi) = D_m(\psi)$$

elde edilir.

4. BURGERS DENKLEMİ

Bu çalışmada Homotopi analiz metodu kullanılarak Caputo türev içeren değişken katsayılı Burgers denkleminin nümerik çözümleri elde edilecektir. Bu metodun etkinliğini göstermek için bazı model denklemlerin nümerik çözümleri elde edilecek ve bulunan sonuçlar tablo ve grafik ile ayrıntılı bir şekilde gösterilecektir. Burgers denklemi, akışkanlar mekaniği ile akışkanlar dinamiğinde konveksiyon-difüzyon arasındaki etkileşimi ifade eden temel model denklemlerden biridir. Hollandalı bir fizikçi olan J. M. Burgers 1939 yılında Navier-Stokes denklemindeki basınç terimini çıkararak Burgers denklemini tanımlamıştır. Navier-Stokes denklemi, bir kanalda ortaya çıkan konveksiyon ve difüzyon olaylarının ters etkileşimi sonucu meydana gelen türbülans olayına karşılık gelir. Burgers denkleminin varlık, teklik ve kararlılık incelemeleri 1939 yılında Burgers tarafından yapılmıştır. Navier-Stokes denkleminde yapılan değişiklikler ile bulunan Burgers denklemindeki çalışmaların sonucu Burgers (1948) tarafından sunulmuştur. Son zamanlarda Burgers denklemi ile ilgili çalışmalar birçok bilim insanı tarafından farklı metotlar kullanılarak yapılmıştır. Kutluay ve ark. (1999), çalışmalarında bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için sonlu fark yöntemi kullanılmıştır. Kutluay ve Esen (2004), çalışmalarında bir boyutlu Burgers denklemi için lineerleştirilmiş şebeke uygulanmıştır. Bahadır ve Sağlam (2005), çalışmalarında bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için sonlu fark ile sınır elemanlar yöntemleri kullanılmıştır. Ramadan ve El-Danaf (2005), çalışmalarında quintic (beşinci dereceden) spline tekniği geliştirilerek Burgers denklemi için kullanılmıştır. Dağ ve ark. (2005), çalışmalarında kübik B-spline yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümleri araştırılmıştır. Li ve Cui (2009), çalışmalarında bir boyutlu değişken katsayılı Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için doğuran çekirdekli Hilbert uzayı tekniği uygulanmıştır. Mohammadi ve ark. (2013), çalışmalarında Galerkin-doğuran çekirdekli Hilbert uzayı yöntemini geliştirilerek iki boyutlu lineer olmayan Burgers çifti denkleminin nümerik çözümleri araştırılmıştır. Oruç ve ark. (2015), çalışmalarında Haar-wavelet yöntemi kullanılarak Burgers denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Esen ve Tasbozan (2016), çalışmalarında kübik B-spline sonlu elemanlar

yöntemini kullanarak zaman kesir mertebeli Burgers denkleminin nümerik çözümlerini vermişlerdir. Mohammadi ve ark. (2016), çalışmalarında doğuran çekirdekli Hilbert uzayı tekniği kullanılarak Burgers denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Bu bölümde Caputo anlamında kesirli türev içeren bir boyutlu değişken katsayılı Burgers denklemi ele alınacaktır.

$$D_t^\alpha y(x, t) + k_1(x, t)y_{xx}(x, t) + k_2(x, t)y(x, t) + k_3(x, t)y_x(x, t) + k_4(x, t)y(x, t)y_x(x, t) = f(x, t), \quad 0 \leq x, t \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.1)$$

Burada D_t^α , t zaman değişkenine göre α mertebeden Caputo kesirli türev operatörüdür. Ayrıca $k_1(x, t)$, $k_2(x, t)$, $k_3(x, t)$, $k_4(x, t)$ ve $f(x, t)$ sürekli fonksiyonlardır. Kullanacağımız denkleme ait başlangıç ve sınır koşulları

$$y(x, 0) = 0$$

$$y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde alınacaktır. (4.1)-(4.2) denkleminde $k_1(x, t) = -1$, $k_2(x, t) = 0$, $k_3(x, t) = 0$,

$k_4(x, t) = 1$ ve $f(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha}e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4e^{2x} - t^2e^x$ alınırsa Burgers denklemi

$$D_t^\alpha y(x, t) - y_{xx}(x, t) + y(x, t).y_x(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha}e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4e^{2x} - t^2e^x \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu problemin tam çözümü $y(x, t) = e^x t^2$ dir. Bu bölümde (4.3) denkleminde HAM uygulanarak metodun etkinliği araştırılacaktır. Çözümde ortaya çıkan keyfi h parametresi için optimal değerlerin elde edilişi gösterilecektir.

Öncelikle lineer operatörü,

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha},$$

$L[c] = 0$ özelliğini sağlayacak şekilde seçelim. Burada c bir sabittir. Şimdi lineer olmayan operatörü

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial t^2} + \phi(x, t; q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} - \frac{2t^{2-\alpha}e^x}{\Gamma(3-\alpha)} - t^4e^{2x} + t^2e^x$$

şeklinde seçelim. Sıfırıncı-mertebeden deformasyon denklemini

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - y_0(x, t)] = q\hbar N[\phi(x, t; q)]$$

şeklinde oluşturalım.

$q = 0$ ve $q = 1$ için

$$\begin{cases} \phi(x, t; 0) = y_0(x, t) \\ \phi(x, t; 1) = y(x, t) \end{cases}$$

ifadeleri yazılabilir. Böylece m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x, t) - \chi_m y_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) &= \frac{\partial^\alpha \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2} + \phi_{m-1}(x, t; q) \frac{\partial \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x} \\ &\quad - \left(\frac{2t^{2-\alpha} e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4 e^{2x} - t^2 e^x \right) (1 - \chi_m) \end{aligned}$$

olur. Burada lineer olmayan terim için

$$\sum_{n=0}^{m-1} \phi_n(x, t; q) \frac{\partial \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x}$$

şeklinde Adomian polinomu yazılabilir. Dolayısıyla denklemimiz

$$\begin{aligned} R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) &= \frac{\partial^\alpha \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{m-1} \phi_n(x, t; q) \frac{\partial \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x} - \left(\frac{2t^{2-\alpha} e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4 e^{2x} - t^2 e^x \right) (1 - \chi_m) \end{aligned}$$

olur. m . mertebeden deformasyon denklemlerinin çözümü $m \geq 1$ için

$$y_m(x, t) = \chi_m y_{m-1}(x, t) + \hbar L^{-1}[R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))]$$

haline gelir. İterasyona başlamak için $y_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımının bilinmesi gerekir. Başlangıç yaklaşımı, başlangıç ve sınır-değer şartlarını sağlayacak şekilde keyfi olarak seçilebilir.

Burada $y_0(x, t) = 0$ alırsak iterasyonun ilk birkaç terimi;

$$y_0(x, t) = 0,$$

$$y_1(x, t) = \frac{\hbar e^x(-t^2\Gamma(\alpha + 5) - 24t^{\alpha+4}e^x + 2t^{\alpha+2}\alpha^2 + 4t^{\alpha+2}\alpha + 24t^{\alpha+2})}{\Gamma(\alpha + 5)},$$

⋮

şeklinde bulunur. Yaklaşık çözüm $u_m(x, t) = \sum_{k=0}^m y_m(x, t)$ olarak hesaplanır. Burada \hbar parametresi yakınsaklık-kontrol parametresidir. Bu parametrenin optimal değeri için squared residual error (karesel residual hata) metodu kullanılacaktır. Bölge olarak $(x, t) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ alınacaktır. Residual fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$r_3(x, t, \hbar) = D_t^\alpha u_3(x, t, \hbar) - \frac{\partial^2 u_3(x, t, \hbar)}{\partial x^2} - u_3(x, t, \hbar) \frac{\partial u_3(x, t, \hbar)}{\partial x} - \left(\frac{2t^{2-\alpha}e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4 e^{2x} - t^2 e^x \right).$$

Bu residual fonksiyonun 2. normu alınırsa,

$$e_3(\hbar) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} |r_3(x, t, \hbar)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

şeklinde yazılabilir.

\hbar parametresinin optimal değerlerinin hesaplanmasında $e_3(\hbar)$ 'ın norm 2'ye göre minimumu seçilecektir. Aşağıda $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için bulunan optimal \hbar parametreleri tabloda verilmiştir. Sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle Çizelge 4.1 - 4.4 ve Şekil 4.1 - 4.4' te gösterilmiştir.

m	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$
3	0.7671576951	-0.5298577453	-0.4075433436	-0.3242486092

Çizelge 4.1. (4.3) denkleminde $\alpha = 1$ için tam çözüm ile HAM çözümünün karşılaştırılması

x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0120078877	0.0122140275	2.06E-4
0.20	0.20	0.0478689819	0.0488561103	9.87E-4
0.20	0.30	0.1076578753	0.1099262482	2.26E-3
0.20	0.40	0.1923444856	0.1954244413	3.07E-3
0.20	0.50	0.3045316031	0.3053506895	8.19E-4
0.50	0.10	0.0162104277	0.0164872127	2.76E-4
0.50	0.20	0.0646663837	0.0659488508	1.28E-3
0.50	0.30	0.1457253815	0.1483849144	2.65E-3
0.50	0.40	0.2614341670	0.2637954034	2.36E-3
0.50	0.50	0.4168778270	0.4121803178	4.69E-3

Çizelge 4.2. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ için tam çözüm ile HAM çözümünün karşılaştırılması

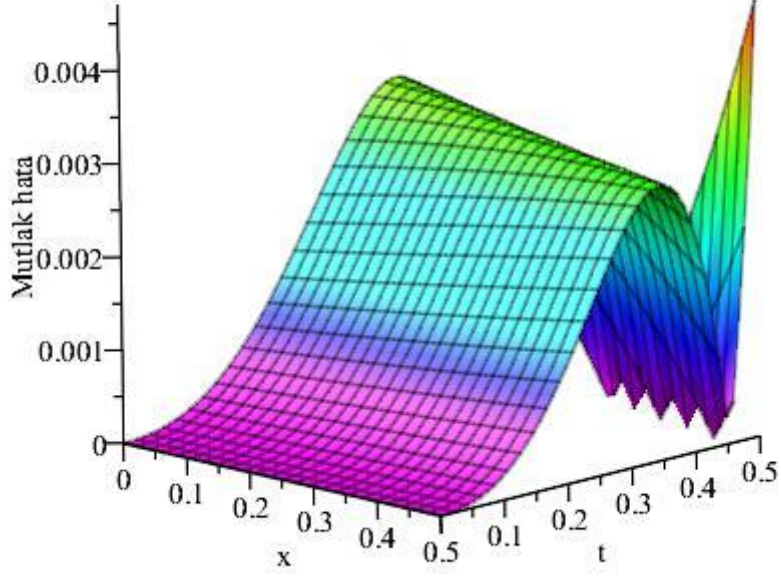
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0107364327	0.0122140275	1.47E-3
0.20	0.20	0.0422684704	0.0488561103	6.58E-3
0.20	0.30	0.0940180048	0.1099262482	1.59E-2
0.20	0.40	0.1664160774	0.1954244413	2.90E-2
0.20	0.50	0.2615618637	0.3053506895	4.37E-2
0.50	0.10	0.0144946722	0.0164872127	1.99E-3
0.50	0.20	0.0571195568	0.0659488508	8.82E-3
0.50	0.30	0.1273944830	0.1483849144	2.09E-2
0.50	0.40	0.2267136196	0.2637954034	3.70E-2
0.50	0.50	0.3595539798	0.4121803178	5.26E-2

Çizelge 4.3. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

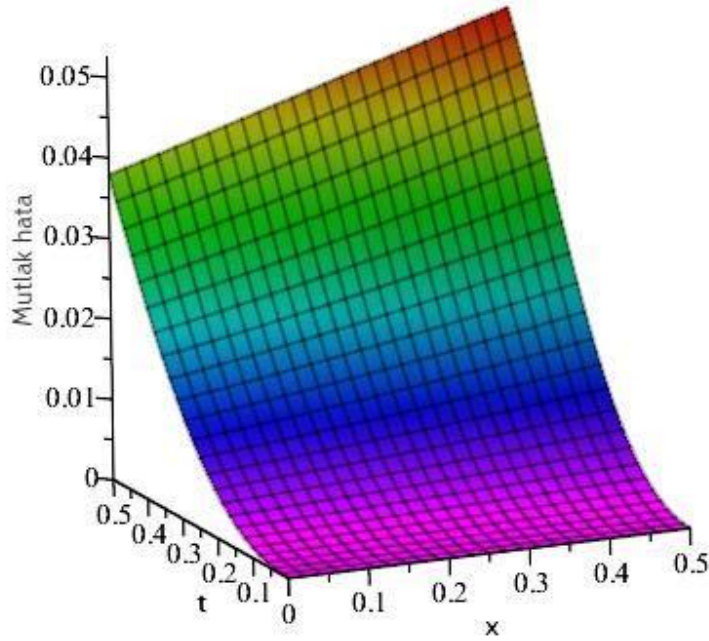
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0093120640	0.0122140275	2.90E-3
0.20	0.20	0.0362293866	0.0488561103	1.26E-2
0.20	0.30	0.0798831342	0.1099262482	3.00E-2
0.20	0.40	0.1405973462	0.1954244413	5.48E-2
0.20	0.50	0.2204604068	0.3053506895	8.48E-2
0.50	0.10	0.0125726342	0.0164872127	3.91E-3
0.50	0.20	0.0489826902	0.0659488508	1.69E-2
0.50	0.30	0.1084038925	0.1483849144	3.99E-2
0.50	0.40	0.1921648849	0.2637954034	7.16E-2
0.50	0.50	0.3048139294	0.4121803178	1.07E-1

Çizelge 4.4. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

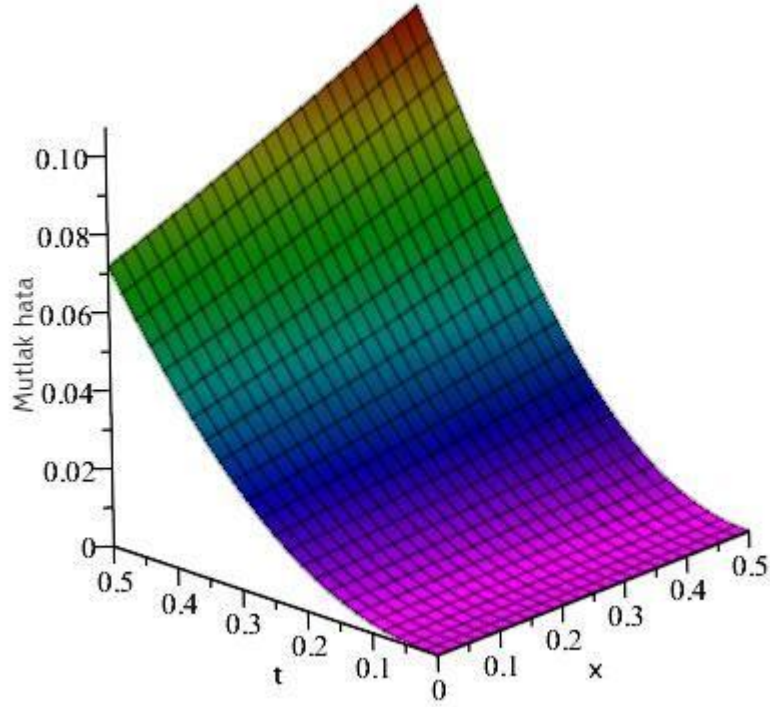
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0079127016	0.0122140275	4.30E-3
0.20	0.20	0.0303901811	0.0488561103	1.84E-2
0.20	0.30	0.0664724198	0.1099262482	4.34E-2
0.20	0.40	0.1165825275	0.1954244413	7.88E-2
0.20	0.50	0.1829901398	0.3053506895	1.22E-1
0.50	0.10	0.0106845311	0.0164872127	5.80E-3
0.50	0.20	0.0411183005	0.0659488508	2.48E-2
0.50	0.30	0.0904015854	0.1483849144	5.79E-2
0.50	0.40	0.1600752973	0.2637954034	1.03E-1
0.50	0.50	0.2550116282	0.4121803178	1.57E-1



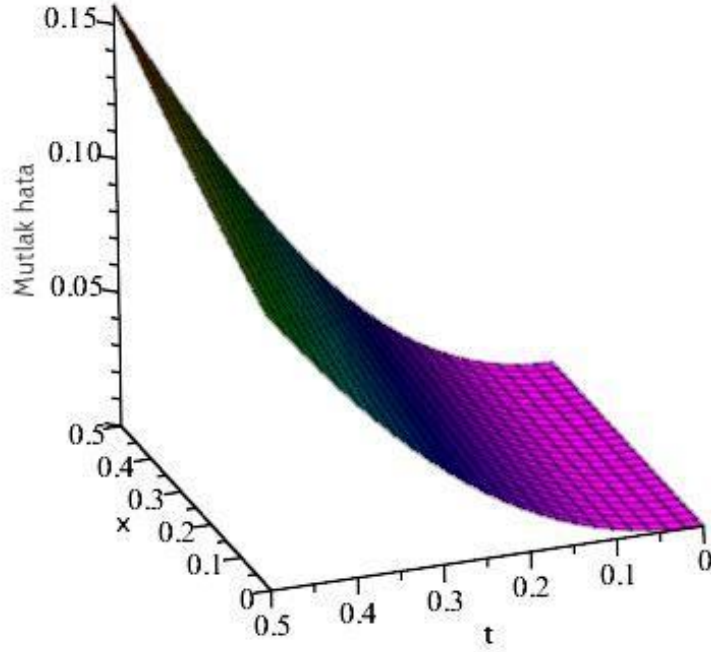
Şekil 4.1. (4.3) denkleminde $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 4.2. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 4.3. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 4.4. (4.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.

5. ADVEKSİYON DENKLEMİ

Bu çalışmada Homotopi analiz matodu kullanılarak Caputo kesirli türev içeren adveksiyon denkleminin nümerik çözümleri elde edilecektir. Bu metodun etkinliğini göstermek için bazı model denklemlerin nümerik çözümleri elde edilecek ve bulunan sonuçlar tablo ve grafikler ile ayrıntılı bir şekilde gösterilecektir.

Birçok fiziksel ve mühendislik probleminin matematiksel modellenmesi konveksiyon-difüzyon denklemi ile yapılır. Bu nedenle literatürde konveksiyon-difüzyon denklemi ile ilgili analitik ve nümerik olmak üzere pek çok çalışma bulunmaktadır. Konveksiyon yolu ile ısı iletimi sıvı ve gaz halindeki cisimlerde görülmektedir. Konveksiyonda kütle hareketleri sonucu ısı, kütle ile birlikte bir yerden başka bir yere taşınmaktadır. Bu taşınım dikey yönde ise konveksiyon, yatay yönde ise adveksiyon olarak adlandırılır. Atmosferde ısı aktarımı genellikle adveksiyon şeklinde olmaktadır.

Adveksiyon denklemi fizik, mühendislik ve uygulamalı matematik gibi birçok alanda kullanılır. Bu denklemin varlık ve teklik incelemeleri Ellison (1971) ve Caughey ve Ellison (1975), çalışmalarında gösterilmiştir. Wazwaz (2009) adveksiyon denkleminin kuvvet serisi çözümlerini elde etmek için Adomian ayrışım metodunu kullanmıştır. Jiang ve Lin (2010), çalışmalarında doğuran çekirdekli Hilbert uzayı yöntemini kullanarak zaman-uzay kesir mertebeli değişken katsayılı adveksiyon-dispersiyon denkleminin nümerik çözümlerini incelemiştir. Mohyud-Din ve ark. (2018), sonlu fark şeması metodunu kullanarak zaman kesirli adveksiyon-difüzyon denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir.

$$D_t^\alpha y(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = f(x, t), \quad 0 \leq x, t \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.1)$$

Yukarıdaki (5.1) denklemi ile verilen Caputo anlamında kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan adveksiyon denklemini ele alalım. D_t^α , t zaman değişkenine bağlı α mertebeden Caputo kesirli türev operatörü ve $f(x, t)$ sürekli fonksiyondur. Burada verilen denkleme ait başlangıç şartı

$$y(x, 0) = h(x) \quad (5.2)$$

şeklinde seçilecektir. Burada $f(x, t) = \frac{x(2t^{(2-\alpha)} + t^4\Gamma(3-\alpha))}{\Gamma(3-\alpha)}$ ve $h(x) = 0$ seçilirse

$$\begin{cases} D_t^\alpha y(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = \frac{x(2t^{(2-\alpha)} + t^4\Gamma(3-\alpha))}{\Gamma(3-\alpha)} & (5.3) \\ y(x, 0) = 0 & (5.4) \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. (5.3)-(5.4) denkleminin tam çözümü $y(x, t) = xt^2$ dir. Lineer operatör olarak

$$L[y(x, t; q)] = D_t^\alpha y(x, t; q)$$

kesirli türeve sahip ifade seçilebilir. (5.3) denkleminde lineer olmayan operatör de

$$N[y(x, t; q)] = D_t^\alpha y(x, t) + y(x, t).y_x(x, t) - \frac{x(2t^{(2-\alpha)} + t^4\Gamma(3-\alpha))}{\Gamma(3-\alpha)} \quad (5.5)$$

şeklinde seçilebilir. Homotopi tanımı kullanılarak sıfırıncı-mertebeden deformasyon denklemleri

$$(1 - q)L[y(x, t; q) - y_0(x, t)] = q\hbar H(x, t)N[y(x, t; q)] \quad (5.6)$$

biçiminde oluşturulabilir.

$q = 0$ ve $q = 1$ değerleri sırasıyla alınır

$$y(x, t; 0) = y_0(x, t) = y(x, 0), \quad y(x, t; 1) = y(x, t)$$

elde edilir. m . mertebeden deformasyon denklemleri de

$$L[y_m(x, t) - \mathcal{X}_m y_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) \quad (5.7)$$

şeklinde olur. Burada

$$\begin{aligned} R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) &= D_t^\alpha y_{m-1}(x, t) + \sum_{k=0}^{m-1} \left[y_k(x, t) \frac{\partial y_{m-1-k}(x, t)}{\partial x} \right] \\ &\quad - (1 - \mathcal{X}_m) \frac{x(2t^{(2-\alpha)} + t^4\Gamma(3-\alpha))}{\Gamma(3-\alpha)} \end{aligned}$$

olur. (5.7) denkleminde, operatörün tersi kullanılarak $m \geq 1$ için m . mertebeden deformasyon denklemleri

$$y_m(x, t) = \mathcal{X}_m y_{m-1}(x, t) + \hbar L^{-1} \left(R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) \right)$$

elde edilir. $m = 0, 1, 2, \dots$ için ardışık olarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$y_0(x, t) = y(x, 0) = 0 \text{ seçilirse,}$$

$$y_1(x, t) = -x\hbar t^2 - \frac{24x\hbar t^{\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+5)},$$

⋮

şeklinde bulunur. Yaklaşık çözüm $u_m(x, t) = \sum_{k=0}^m y_k(x, t)$ olarak hesaplanır. Burada \hbar parametresi yakınsaklık-kontrol parametresi olarak bilinir. Bu parametrenin optimal değerinin hesaplanabilmesi için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Burada hatanın minimizasyonuna dayalı karesel residual hata metodu kullanılacaktır. $y(x, t)$ yaklaşık çözümü \hbar parametresini içermektedir. Bu \hbar parametresini $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde hesaplayalım. Residual fonksiyonu

$$r_4(x, t, \hbar) = D_t^\alpha u_4(x, t, \hbar) + u_4(x, t, \hbar) \frac{\partial u_4(x, t, \hbar)}{\partial x} - \frac{x(2t^{(2-\alpha)} + t^4 \Gamma(3-\alpha))}{\Gamma(3-\alpha)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu residual fonksiyonun norm 2' ye göre hatası

$$e_4(\hbar) = \left(\int_0^1 \int_0^1 |r_4(x, t, \hbar)| dt dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

biçimindedir.

\hbar parametresinin optimal değerinin hesaplanmasında $e_4(\hbar)$ ' in norm 2' ye göre minimumu seçilecektir. Aşağıda $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ değerleri için bulunan optimal \hbar parametreleri tabloda verilmiştir. Sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle Çizelge 5.1 - 5.4 ve Şekil 5.1 - 5.4' te gösterilmiştir.

m	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$
4	-0.8740320877	-0.8888546878	-0.8825292730	-0.8605335608

Çizelge 5.1. (5.3) denkleminde $\alpha = 1$ için tam çözüm ile HAM çözümünün karşılaştırılması

x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.2011817673	0.200	1.18E-3
0.20	0.20	0.0080008508	0.008	8.50E-7
0.20	0.40	0.0320795815	0.032	7.95E-5
0.20	0.60	0.0725622976	0.072	5.62E-4
0.20	0.80	0.1296835214	0.128	1.68E-3
0.40	0.10	0.4023635349	0.400	2.36E-3
0.40	0.20	0.0160017017	0.016	1.70E-6
0.40	0.40	0.0641591631	0.064	1.59E-4
0.40	0.60	0.1451245952	0.144	1.12E-3
0.40	0.80	0.2593670425	0.256	3.36E-3

Çizelge 5.2. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ için tam çözüm ile HAM çözümünün karşılaştırılması

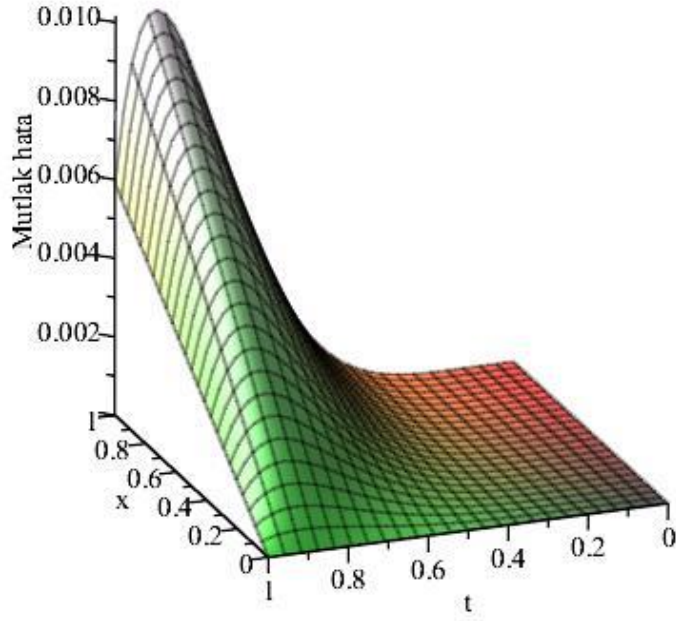
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.1970572236	0.200	2.94E-3
0.20	0.20	0.0080023240	0.008	2.32E-6
0.20	0.40	0.0320935092	0.032	9.35E-5
0.20	0.60	0.0725621051	0.072	5.62E-4
0.20	0.80	0.1291435433	0.128	1.14E-3
0.40	0.10	0.3941144472	0.400	5.88E-3
0.40	0.20	0.0160046481	0.016	4.64E-6
0.40	0.40	0.0641870184	0.064	1.87E-4
0.40	0.60	0.1451242103	0.144	1.12E-3
0.40	0.80	0.2582870866	0.256	2.28E-3

Çizelge 5.3. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ için tam çözüm ile HAM çözümünün karşılaştırılması

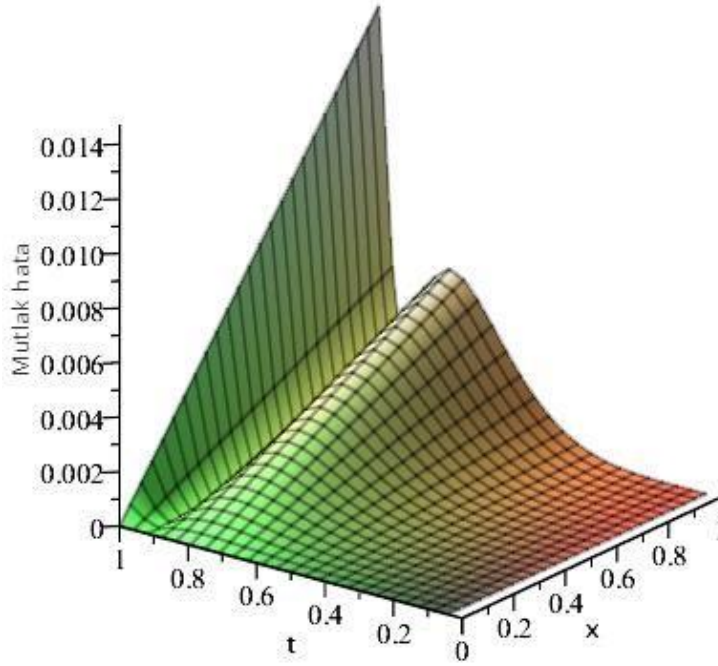
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.1931274324	0.200	6.87E-3
0.20	0.20	0.0080036345	0.008	3.63E-6
0.20	0.40	0.0321247177	0.032	1.24E-4
0.20	0.60	0.0726722204	0.072	6.72E-4
0.20	0.80	0.1289050112	0.128	9.05E-4
0.40	0.10	0.3862548647	0.400	1.37E-2
0.40	0.20	0.0160072690	0.016	7.26E-7
0.40	0.40	0.0642494354	0.064	2.49E-4
0.40	0.60	0.1453444408	0.144	1.34E-3
0.40	0.80	0.2578100224	0.256	1.81E-3

Çizelge 5.4. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ için tam çözüm ile HAM çözümünün karşılaştırılması

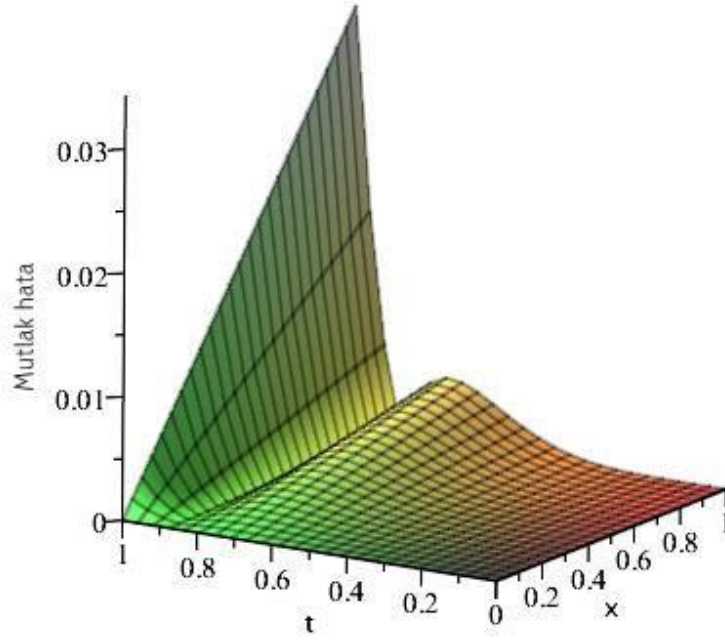
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.1895745570	0.200	1.04E-2
0.20	0.20	0.0080052958	0.008	5.29E-6
0.20	0.40	0.0321829967	0.032	1.82E-4
0.20	0.60	0.0729356757	0.072	9.35E-4
0.20	0.80	0.1290735321	0.128	1.07E-3
0.40	0.10	0.3791491139	0.400	2.08E-2
0.40	0.20	0.0160105915	0.016	1.05E-5
0.40	0.40	0.0643659935	0.064	3.65E-4
0.40	0.60	0.1458713515	0.144	1.87E-3
0.40	0.80	0.2581470643	0.256	2.14E-3



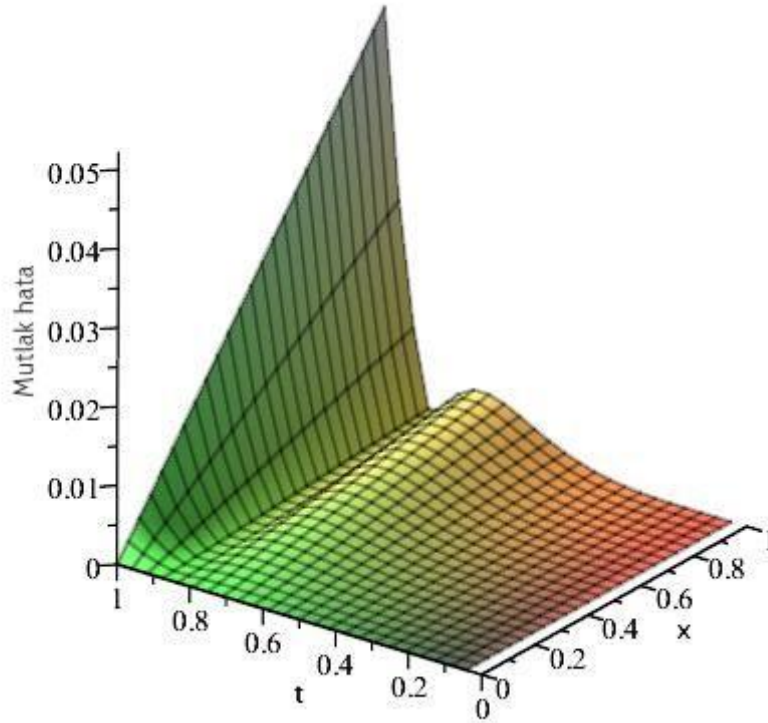
Şekil 5.1 (5.3) denkleminde $\alpha = 1$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 5.2. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 5.3. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.8$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 5.4. (5.3) denkleminde $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.

6. KLEIN-GORDON DENKLEMİ

Klein-Gordon denklemi rölativistik kuantum mekaniği ve alan teorisinde ortaya çıkmaktadır, bu nedenle yüksek enerji fiziği ile uğraşan fizikçiler için büyük önem taşımaktadır. Khalifa ve Elgamal (2005), çalışmalarında Klein-Gordon denklemi için çözümün varlığını ve tekliğini belirleyerek, sonlu elemanlar yöntemine dayanan sayısal bir şema geliştirmiştir. Lineer olmayan Klein Gordon denkleminin radial baz fonksiyonları kullanılarak sayısal çözümü elde edilmiştir (Dehghan ve Shokri, 2009). Zaman kesirli lineer olmayan bir sistem olan Klein-Gordon-Schrodinger denklemi Adomian ayrışım yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Hesameddini ve Fotros, 2012). Taylor matris metodu kullanılarak lineer olmayan Klein-Gordon denklemini çözmek için sıralama (collocation) noktalarına dayanan sayısal bir yöntem geliştirilmiştir (Bülbül ve Sezer, 2013). Üç boyutlu lineer olmayan Klein-Gordon denklemi ve iki boyutlu Sine-Gordon denklemlerinin radial baz fonksiyonlarını kullanarak Meshless çizgi yöntemi ile çözülebilirliği incelenmiştir (Hussain, 2013). Homojen olmayan bir kesirli Klein-Gordon denklemi değişkenlere ayırma yöntemiyle çözülerek, Dirichlet, Neumann ve Robin sınır koşulu ile analitik sonuçlar elde edilmiştir (Kheiri ve ark. 2014). Lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin sayısal çözümü için çok adımlı yarı- interpolasyon yöntemi çalışılmıştır (Sarboland ve Aminataei, 2015). Uygun başlangıç koşulu ile kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi olarak adlandırılan yakın zamanda geliştirilen bir yarı analitik yöntem kullanılarak lineer ve lineer olmayan zaman kesirli mertebeden Klein-Gordon denklemlerinin analitik çözümü incelenmiştir (Tamsir ve Srivastava, 2016). Riesz türevi anlamında Euler-Lagrange varyasyon tekniği kullanılarak zaman kesirli Klein-Gordon denkleminin formulasyonu gösterilmiş ve yaklaşık bir salınımlı dalga çözümü elde edilmiştir (Zhang, 2016). (Inc, 2018) çalışmasında zaman-kesirli Cahn-Allen ve zaman kesirli Klein-Gordon denklemleri için Lie simetri analizi, açık çözümler ve yakınsama analizini elde etmek için kullanılmıştır. Karaagaç ve ark. (2019), çalışmalarında zamana göre kesirli mertebeden türevli lineer olmayan Klein-Gordon denklemini çözmek için yeni bir nümerik şema geliştirilmiş ve kesirli mertebeden denklemin yaklaşık çözümleri için kübik B-spline sıralama sonlu eleman yöntemi ve L2 algoritması kullanılmıştır. Denklemden verilen kesirli türev ise

Caputo anlamında ele alınmıştır. Böylece, kesirli mertebeden diferansiyel denklem bilgisayar programlanmasına elverişli cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüştür.

6.1. Lineer Kesirli Klein-Gordon Denklemi

Bir boyutlu lineer olmayan Klein-Gordon denklemi

$$D_t^\alpha y(x, t) - y_{xx} + ay(x, t) = f(x, t), \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (6.1.1)$$

biçimindedir. Burada a bir sabittir. $f(x, t)$ homojen olmayan kısım olup bilinen bir fonksiyondur. Başlangıç şartları ise,

$$y(x, 0) = h(x), \quad y_t(x, 0) = g(x) \quad (6.1.2)$$

şeklindedir. Lineer operatör olarak

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha},$$

$L[c_1 + c_2 t] = 0$ özelliğini sağlayacak şekilde seçelim. Burada c_1, c_2 birer sabittir.

Lineer olmayan operatörü ise

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} + a\phi(x, t; q) - f(x, t)$$

şeklinde seçelim. Buradan m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x, t) - \chi_m y_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))$$

olarak yazılır. Burada

$$R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) = \frac{\partial^\alpha \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2} + a\phi_{m-1}(x, t; q) - f(x, t)(1 - \chi_m)$$

olur. m . mertebeden deformasyon denkleminin çözümü $m \geq 1$ için

$$y_m(x, t) = \chi_m y_{m-1}(x, t) + \hbar L^{-1}[R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))]$$

haline gelir. İterasyona başlamak için $y_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımının bilinmesi gerekir. Başlangıç yaklaşımı, başlangıç şartlarını sağlayacak şekilde keyfi olarak seçilebilir.

Burada $a = 1$, $h(x) = 0$, $g(x) = 0$ ve $f(x, t) = \frac{6t^{3-\alpha}x}{\Gamma(4-\alpha)} + xt^3$ alınırsa,

$$D_t^\alpha y(x, t) - y_{xx} + y(x, t) = \frac{6t^{3-\alpha}x}{\Gamma(4-\alpha)} + xt^3, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (6.1.3)$$

$$y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0, \quad (6.1.4)$$

problemi elde edilir. Bu problemin tam çözümü $y(x, t) = xt^3$ olur. Yukarıdaki iterasyonun ilk birkaç terimi

$y_0(x, t) = 0$ seçilirse,

$$y_1(x, t) = -\frac{\hbar t^{\alpha+3}x(t^{-\alpha}\Gamma(\alpha+4) + 6)}{\Gamma(\alpha+4)},$$

⋮

şeklinde bulunur. Yaklaşık çözüm $u_m(x, t) = \sum_{k=0}^m y_k(x, t)$ olarak hesaplanır. Burada \hbar parametresi yakınsaklık-kontrol parametresidir. Bu parametrenin optimal değeri için squared residual error metodu kullanılacaktır. Bölge olarak $(x, t) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ alınacaktır. Residual fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$r_5(x, t, \hbar) = D_t^\alpha u_5(x, t, \hbar) - \frac{\partial^2 u_5(x, t, \hbar)}{\partial x^2} + u_5(x, t, \hbar) - \left(\frac{6t^{3-\alpha}x}{\Gamma(4-\alpha)} + xt^3 \right).$$

Bu residual fonksiyonun 2. normu ise

$$e_3(\hbar) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} |r_3(x, t, \hbar)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

şeklindedir.

\hbar parametresinin optimal değerlerinin hesaplanmasında $e_5(\hbar)$ ' in norm 2' ye göre minimumu seçilecektir. Aşağıda $\alpha = 2, 1.9, 1.8, 1.7$ değerleri için bulunan optimal \hbar parametreleri tabloda verilmiştir. Sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle Çizelge 6.1 - 6.4 ve Şekil 6.1 - 6.4' te gösterilmiştir.

m	$\alpha = 2$	$\alpha = 1.9$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.7$
3	-0.9965192859	-1.000036041	-1.000025957	-1.000033287

Çizelge 6.1. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 2$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0001999999	0.0002	5.10E-12
0.20	0.20	0.0016000000	0.0016	1.80E-11
0.20	0.30	0.0054000001	0.0054	1.70E-10
0.20	0.40	0.0127999999	0.0128	2.00E-11
0.20	0.50	0.0249999973	0.0250	2.64E-9
0.50	0.10	0.0004999999	0.0005	1.20E-11
0.50	0.20	0.0040000000	0.0040	4.60E-11
0.50	0.30	0.0135000004	0.0135	4.40E-10
0.50	0.40	0.0319999999	0.0320	5.00E-11
0.50	0.50	0.0624999934	0.0625	6.50E-9

Çizelge 6.2. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.9$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

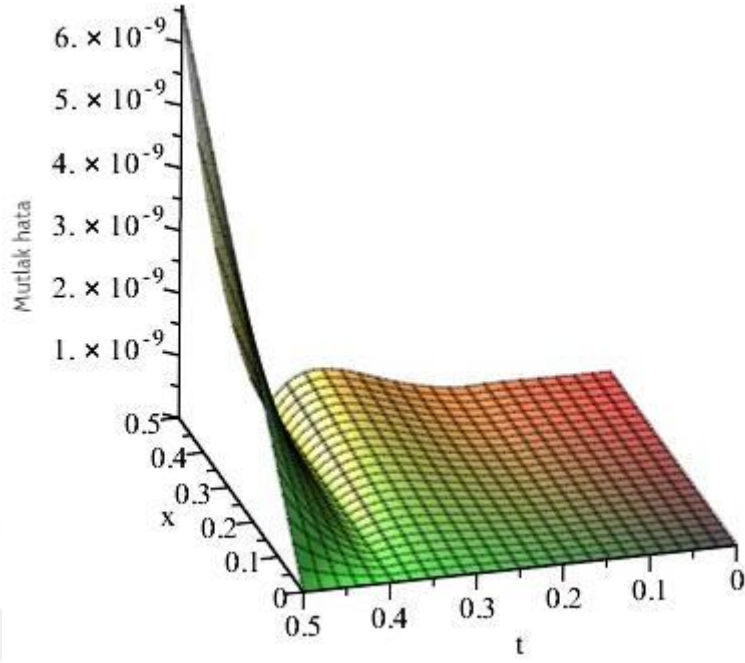
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0002001491	0.0002	1.49E-7
0.20	0.20	0.0016044539	0.0016	4.45E-6
0.20	0.30	0.0054324783	0.0054	3.24E-5
0.20	0.40	0.0129329822	0.0128	1.32E-4
0.20	0.50	0.0253968740	0.0250	3.96E-4
0.50	0.10	0.0005003729	0.0005	3.72E-7
0.50	0.20	0.0040111349	0.0040	1.11E-5
0.50	0.30	0.0135811958	0.0135	8.11E-5
0.50	0.40	0.0323324555	0.0320	3.32E-4
0.50	0.50	0.0634921848	0.0625	9.92E-4

Çizelge 6.3. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.8$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

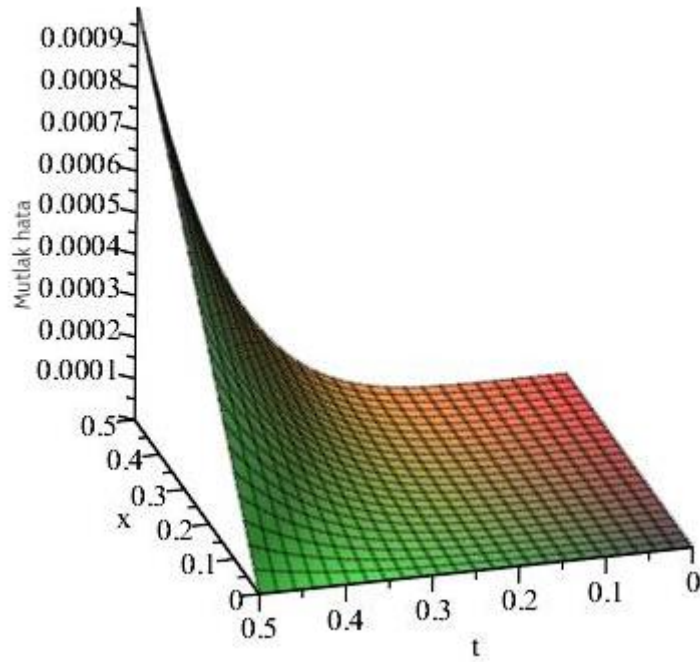
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0002002221	0.0002	2.22E-7
0.20	0.20	0.0016061878	0.0016	6.18E-6
0.20	0.30	0.0054433290	0.0054	4.33E-5
0.20	0.40	0.0129723793	0.0128	1.72E-4
0.20	0.50	0.0255030987	0.0250	5.03E-4
0.50	0.10	0.0005005553	0.0005	5.55E-7
0.50	0.20	0.0040154696	0.0040	1.54E-5
0.50	0.30	0.0136083226	0.0135	1.08E-4
0.50	0.40	0.0324309482	0.0320	4.30E-4
0.50	0.50	0.0637577467	0.0625	1.25E-3

Çizelge 6.4. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.7$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

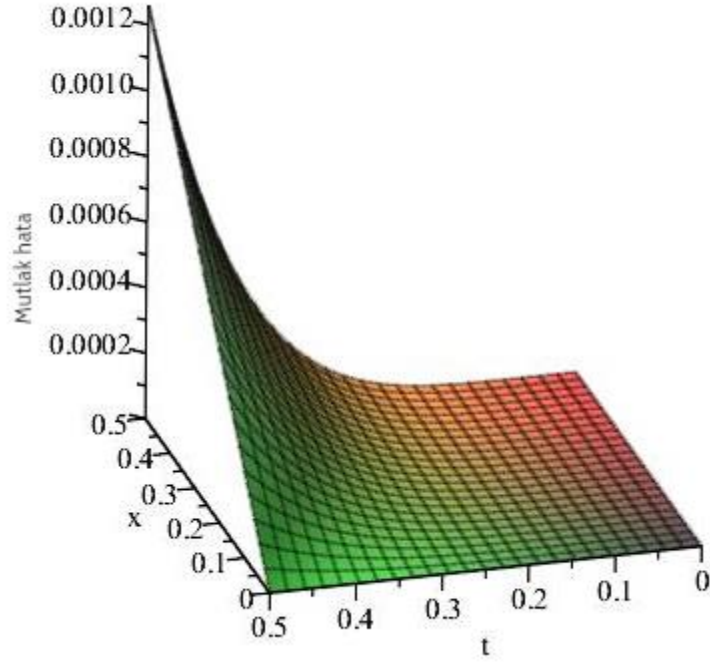
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0002003301	0.0002	3.30E-7
0.20	0.20	0.0016085806	0.0016	8.58E-6
0.20	0.30	0.0054576962	0.0054	5.76E-5
0.20	0.40	0.0130230281	0.0128	2.23E-4
0.20	0.50	0.0256365561	0.0250	6.36E-4
0.50	0.10	0.0005008253	0.0005	8.25E-7
0.50	0.20	0.0040214515	0.0040	2.14E-5
0.50	0.30	0.0136442406	0.0135	1.44E-4
0.50	0.40	0.0325575703	0.0320	5.57E-4
0.50	0.50	0.0640913905	0.0625	1.59E-3



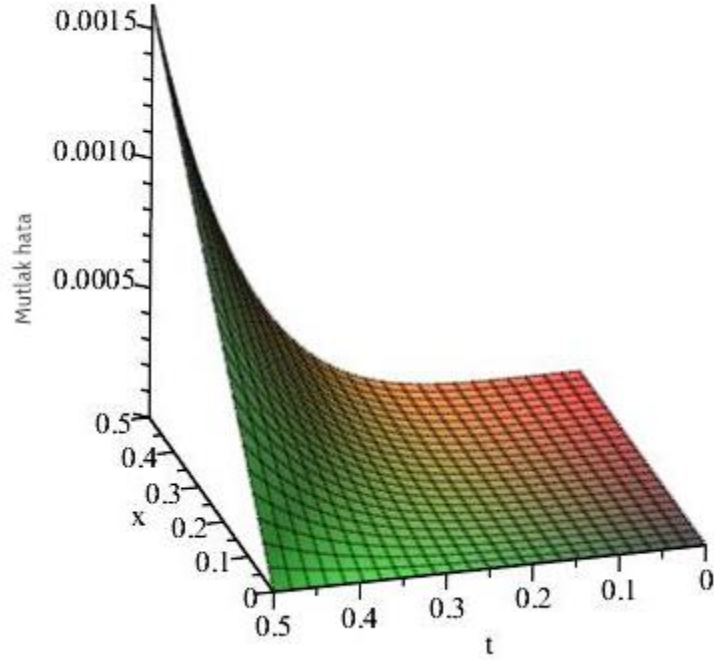
Şekil 6.1. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 2$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 6.2. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.9$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 6.3. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.8$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 6.4. (6.1.3) denkleminde $\alpha = 1.7$ değeri için mutlak hata grafiği.

6.2. Lineer Olmayan Kesirli Klein-Gordon Denklemi

Bir boyutlu lineer olmayan Klein-Gordon denklemi

$$D_t^\alpha y(x, t) + ay_{xx} + g(y) = f(x, t), \quad 1 < \alpha \leq 2$$

biçimindedir. Burada $y = y(x, t)$ terimi x yönünde dalganın yer değişimini, t ise zamanı temsil etmektedir. Bu bölümde

$$D_t^\alpha y(x, t) + ay_{xx} + \beta y + \gamma y^2 = f(x, t), \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (6.2.1)$$

denklemi için homotopi analiz metodu kullanılacaktır. Burada a, β, γ bilinen sabitler ve $f(x, t)$ bilinen bir fonksiyondur. Başlangıç şartları ise

$$y(x, 0) = h(x), \quad y_t(x, 0) = g(x)$$

şeklindedir. Lineer operatör olarak

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha},$$

$L[c_1 + c_2 t] = 0$ özelliğini sağlayacak şekilde seçelim. Burada c_1, c_2 birer sabittir. Lineer olmayan operatörde

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} + \beta \phi(x, t; q) + \gamma \phi^2(x, t; q) - f(x, t)$$

şeklinde seçelim. Buradan m . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[y_m(x, t) - \chi_m y_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) &= \frac{\partial^\alpha \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2} + \beta \phi_{m-1}(x, t; q) \\ &+ \gamma \phi_{m-1}^2(x, t; q) - f(x, t)(1 - \chi_m) \end{aligned}$$

olur. Burada lineer olmayan terim için

$$\sum_{n=0}^{m-1} \phi_n(x, t; q) \frac{\partial \phi_{m-1-n}(x, t; q)}{\partial x}$$

şeklinde Adomian polinomu yazılabilir. Dolayısıyla denklemimiz

$$R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t)) = \frac{\partial^\alpha \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + a \frac{\partial^2 \phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2} + \beta \phi_{m-1}(x, t; q)$$

$$+\gamma \sum_{n=0}^{m-1} \phi_n(x, t; q) \frac{\partial \phi_{m-1-n}(x, t; q)}{\partial x} - f(x, t)(1 - \chi_m)$$

olur. m . mertebeden deformasyon denkleminin çözümü $m \geq 1$ için

$$y_m(x, t) = \chi_m y_{m-1}(x, t) + \hbar L^{-1}[R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))]$$

haline gelir. İterasyona başlamak için $y_0(x, t)$ başlangıç yaklaşımının bilinmesi gerekir. Başlangıç yaklaşımı, başlangıç şartlarını sağlayacak şekilde keyfi olarak seçilebilir.

(6.2.1) denkleminde $a = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $f(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha}x^2}{\Gamma(3-\alpha)} - 2t^2 + x^4t^4$ ve $h(x) = 0$, $g(x) = 0$ alınrsa (6.2.1) denkleminin tam çözümü $y(x, t) = x^2t^2$ olur.

Yukarıdaki iterasyonun ilk birkaç terimi

$y_0(x, t) = 0$ alınrsa,

$$y_1(x, t) = \frac{\hbar(-x^2t^2\Gamma(\alpha + 5) + 4t^{\alpha+2}\alpha^2 + 28t^{\alpha+2}\alpha + 48t^{\alpha+2} - 24t^{\alpha+4}x^2)}{\Gamma(\alpha + 5)},$$

⋮

şeklinde bulunur. Yaklaşık çözüm $u_m(x, t) = \sum_{k=0}^m y_k(x, t)$ olarak hesaplanır. Burada \hbar parametresi yakınsaklık-kontrol parametresidir. Bu parametrenin optimal değeri için squared residual error metodu kullanılacaktır. Bölge olarak $(x, t) \in [0,1] \times [0,1]$ alınacaktır. Residual fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$r_5(x, t, \hbar) = D_t^\alpha u_5(x, t, \hbar) - \frac{\partial^2 u_5(x, t, \hbar)}{\partial x^2} + u_5^2(x, t, \hbar) - \left(\frac{2t^{2-\alpha}x^2}{\Gamma(3-\alpha)} - 2t^2 + x^4t^4 \right).$$

Bu residual fonksiyonun 2. normu ise

$$e_5(\hbar) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} |r_5(x, t, \hbar)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

biçimindedir. \hbar parametresinin optimal değerlerinin hesaplanmasında $e_5(\hbar)$ ' in norm 2' ye göre minimumu seçilecektir. Aşağıda $\alpha = 2, 1.9, 1.8, 1.7$ değerleri için bulunan optimal \hbar parametreleri tabloda verilmiştir. Sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle Çizelge 6.5 - 6.8 ve Şekil 6.5 - 6.8' de gösterilmiştir.

m	$\alpha = 2$	$\alpha = 1.9$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.7$
5	-1.015501024	-0.9942889194	-1.003524173	-0.9993046624

Çizelge 6.5. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 2$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0004000000	0.0004	5.17E-11
0.20	0.20	0.0016000040	0.0016	4.08E-9
0.20	0.30	0.0036000581	0.0036	5.81E-8
0.20	0.40	0.0064004210	0.0064	4.21E-7
0.20	0.50	0.0100021013	0.0100	2.10E-6
0.50	0.10	0.0025000020	0.0025	2.09E-9
0.50	0.20	0.0100001378	0.0100	1.37E-7
0.50	0.30	0.0225016364	0.0225	1.63E-6
0.50	0.40	0.0400097190	0.0400	9.71E-6
0.50	0.50	0.0625396795	0.0625	3.96E-5

Çizelge 6.6 (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.9$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

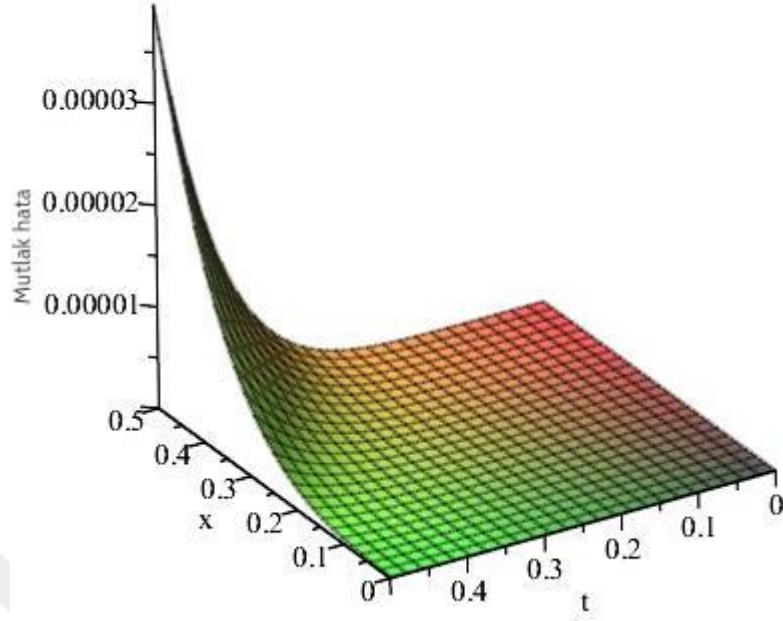
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0003756346	0.0004	2.43E-5
0.20	0.20	0.0012362645	0.0016	3.63E-4
0.20	0.30	0.0018317879	0.0036	1.76E-3
0.20	0.40	0.0009701812	0.0064	5.42E-3
0.20	0.50	-0.0029634740	0.0100	1.29E-2
0.50	0.10	0.0024756377	0.0025	2.43E-5
0.50	0.20	0.0096364484	0.0100	3.63E-4
0.50	0.30	0.0207337993	0.0225	1.76E-3
0.50	0.40	0.0345811624	0.0400	5.41E-3
0.50	0.50	0.0495774912	0.0625	1.29E-2

Çizelge 6.7 (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.8$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

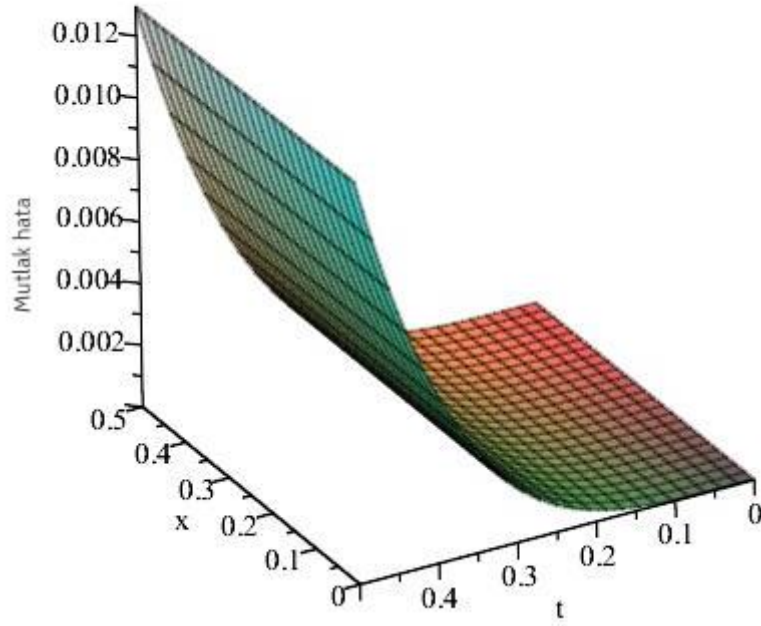
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0003644601	0.0004	3.55E-5
0.20	0.20	0.0011049772	0.0016	4.95E-4
0.20	0.30	0.0012891887	0.0036	2.31E-3
0.20	0.40	-0.0004947924	0.0064	6.89E-3
0.20	0.50	-0.0060977718	0.0100	1.60E-2
0.50	0.10	0.0024644648	0.0025	3.55E-5
0.50	0.20	0.0095052371	0.0100	4.94E-4
0.50	0.30	0.0201919184	0.0225	2.30E-3
0.50	0.40	0.0331196873	0.0400	6.88E-3
0.50	0.50	0.0464550535	0.0625	1.60E-2

Çizelge 6.8 (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.7$ için tam çözüm ile HAM çözümün karşılaştırılması

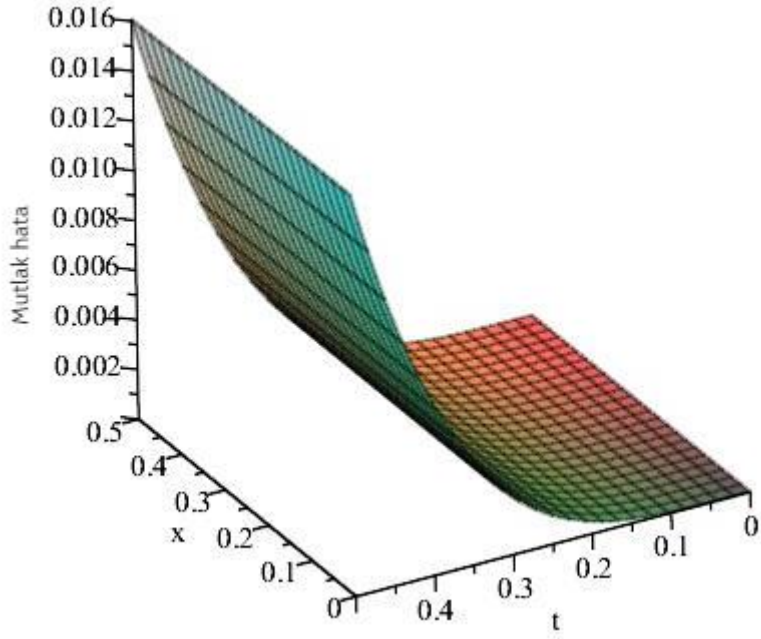
x	t	HAM	Tam Çözüm	Hata
0.20	0.10	0.0003482806	0.0004	5.17E-5
0.20	0.20	0.0009278610	0.0016	6.72E-4
0.20	0.30	0.0005870704	0.0036	3.01E-3
0.20	0.40	-0.0023347685	0.0064	8.73E-3
0.20	0.50	-0.0094364082	0.0100	1.99E-2
0.50	0.10	0.0024482877	0.0025	5.17E-5
0.50	0.20	0.0093282277	0.0100	6.71E-4
0.50	0.30	0.0194907691	0.0225	3.00E-3
0.50	0.40	0.0312842944	0.0400	8.71E-3
0.50	0.50	0.0426243702	0.0625	1.98E-2



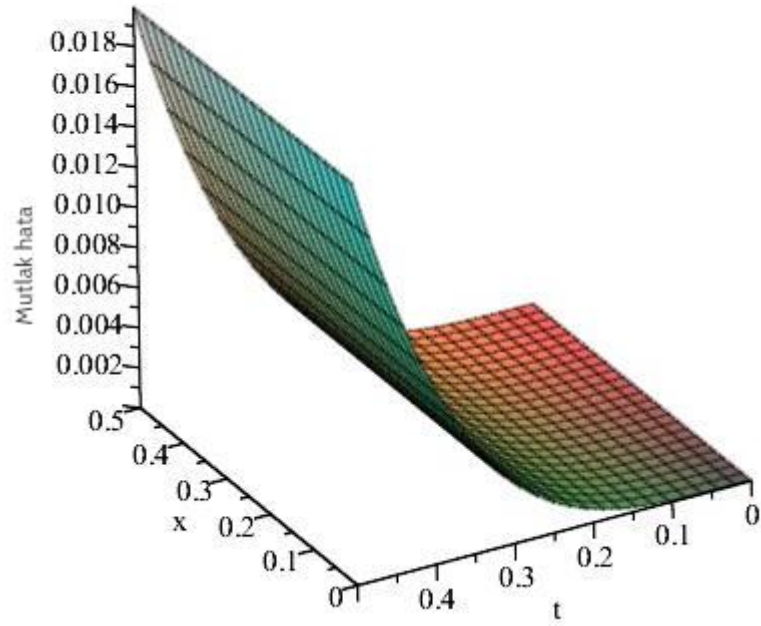
Şekil 6.5. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 2$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 6.6. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.9$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 6.7. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.8$ değeri için mutlak hata grafiği.



Şekil 6.8. (6.2.1) denkleminde $\alpha = 1.7$ değeri için mutlak hata grafiği.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Fen ve mühendisliğin değişik dallarında kesir mertebeli diferansiyel denklemler kullanılarak birçok fiziksel, kimyasal ve biyolojik süreçler başarılı bir şekilde modellenerek yeniden formüle edilmiştir. Kesir mertebeli diferansiyel denklemler için çözümün varlığı ve tekliği ve çözümün niteliksel davranışları birçok açıdan incelenmiştir.

Kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek genellikle zordur. Bunun için nümerik metotların geliştirilmesi önem arz etmektedir. Son yıllarda birçok değişik analitik ve nümerik metot geliştirilmiştir.

Homotopi analiz metodu ilk olarak lineer olmayan diferansiyel denklemler için Liao tarafından 1993 yılında kendi doktora tezinde geliştirilmiştir. Bu metotta keyfi lineer operatör, keyfi başlangıç yaklaşımı, keyfi h parametresi ve keyfi yardımcı fonksiyon bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında h keyfi parametresinin seçimi ile ilgili residual hata fonksiyonu kullanılarak bu keyfi parametrenin optimal değerini bularak mutlak hatayı azaltmak amaçlanmıştır. Liao 2010 çalışmasında adi diferansiyel denklemler için önerilen formülün ayırık (discret) versiyonu kesir mertebeli kısmi Burgers, adveksiyon, lineer Klein-Gordon ve lineer olmayan Klein-Gordon denklemlerine başarılı bir şekilde uygulanarak seri çözümler elde edilmiştir. Çalışılan bölge daraltılarak veya iterasyon sayısı artırılarak mutlak hatayı azaltmak mümkündür.

Sonuç olarak yukarda ele alınan denklemler için elde edilen çözümler dikkate alındığında bu metodun benzer lineer ve lineer olmayan kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabileceği düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abbasbandy, S., 2008. Homotopy analysis method for generalized Benjamin-Bona Mahony equation, *Z. Angew. Math. Phys.* **59**: 51-62.
- Abdulaziz, O., Hashim, I., Saif, A., 2008. Series Solutions of Time-Fractional PDEs by Homotopy Analysis Method. *Differential Equation sand Nonlinear Mechanics*, Vol. 13:16.
- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York.
- Arafa, A., A.,M., Rida, S.Z., Mohamed, H., 2012. Approximate analytical solutions of Schnakenberg systems by homotopy analysis method, *Applied Mathematical Modelling*, **36**: 4789–4796.
- Aslanov, A., 2015. A Homotopy-Analysis Approach for Nonlinear Wave-Like Equations with Variable Coefficients, *Abstract and Applied Analysis*, **7**.
- Bahadir, A. R., Saglam, M., 2005. A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers' equation. *Appl. Math. Comp.*, **160**: 663-673.
- Burgers, J. M., 1939. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. *Verh. Kon. Nerderl. Akad. Weten-Schappen Amsterdam, Afdeel Natuurkunde*, **17**(2): 1-53.
- Burgers, J. M., 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, **1**: 171-199.
- Bülbül, B., Sezer, M., 2013. A New Approach to Numerical Solution of Nonlinear Klein-Gordon Equation, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, **7**.
- Caughey, T. K., Ellison, J., 1975. Existence, uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **51**(1): 1-32.
- Dag, I., Irk, D., Saka, B., 2005. A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B splines. *Appl. Math. Comp.*, **163**: 199-211.
- Dehghan, M., Manafian, J., Saadatmandi, A., 2009. Solving Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Using the Homotopy Analysis Method, *Numer Methods Partial Differential Equations* **26**: 448-479.
- Dehghan, M., Shokri, A., 2009. Numerical solution of the nonlinear Klein_Gordon equation using radial basis functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **230**:400-410.
- Diethelm, K., 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Ellison, J. A., 1971. *Existence, uniqueness and stability of solutions of a class of nonlinear partial differential equations*. California Institute of Technology, Pasadena California.
- Elsaid, A., 2011. Homotopy analysis method for solving a class of fractional partial differential equations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **16**: 3655–3664.
- Esen, A., Tasbozan, O., 2016. Numerical solution of time fractional Burgers equation by cubic B-spline finite elements. *Mediterr. J. Math.*, **13**(3): 1325-1337.
- Fan, T., You x., 2013. Optimal homotopy analysis method for nonlinear differential equations in the boundary layer, *Numerical Algorithms*, **62**(2): 337–354.
- Freihat , A.A., Zurigat, M., Handam, A.H., 2013. The multi-step homotopy analysis method for modified epidemiological model for computer viruses, *Afr. Mat.* **26**:585–596.

- Gomez, J.F., Martínez, H.Y., Escobar, R.F., Olivares, V.H., Reyes, J.M., Sosa, I.O., 2016. Hindawi Publishing *Corporation Mathematical Problems in Engineering*: 8.
- Hariharan, G., 2017. A homotopy analysis method for the nonlinear partial differential equations arising in engineering, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, **18**(2-3): 191-200.
- Hepson, O. E., Korkmaz, A., Dag, I., 2018. On The Numerical Solution of The Klein-Gordon Equation by Exponential Cubic B-Spline Collocation Method, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat*, **68**; 412-421.
- Hesameddini, E., Fatros, F., 2012. Solution for Time-Fractional Coupled Klein-Gordon Schrodinger Equation Using Decomposition Method, *International Mathematical Forum*, **21**; 1047 – 1056.
- Hussain, A., Hag, S., Uddin, M., 2013. Numerical solution of Klein–Gordon and sine-Gordon equations by meshless method of lines, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37**; 1351–1366.
- Inc, M., Yusuf, A., Aliyu, I. A., Baleanu, D., 2018. Time-fractional Cahn–Allen and time-fractional Klein-Gordon equations: Lie symmetry analysis, explicit solutions and convergence analysis, *Physica A*, **493**; 94–106.
- Jiang, W., Lin, Y., 2010. Approximate solution of the fractional advection-dispersion equation. *Computer Physics Communications*, **181**(3): 557-561.
- Jia, V., He, X., Guo L., 2017. The Optimal Homotopy Analysis Method for solving linear optimal control problems, *Applied Mathematical Modelling*, **45**: 865-880.
- Karaagac B., Ucar Y, Yagmurlu N. M., Esen A., 2019. A new perspective on the numerical solution for fractional Klein Gordon, *Politeknik*, **22**(2): 443-451.
- Khalifa, M. E., Elgamal, M., 2005. A numerical solution to Klein-Gordon equation with Dirichlet boundary condition, *Applied Mathematics and Computation*, **160**(2): 451-475.
- Kheiri, H., Shahi, S., Mojaver, A., 2014. Analytical solutions for the fractional Klein-Gordon equation, *Computational Methods for Differential Equations*, **2**; 99-114.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland, B.V. Elsevier Science, Amsterdam.
- Kutluay, S., Esen, A., 2004. A linearized numerical scheme for Burgers-like equations. *Applied Mathematics and Computation*, **156**(2): 295-305.
- Kutluay, S., Bahadir, A. R., Özdeş, A., 1999. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **103**(2): 251-261.
- Liao, S.J., 1992. The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Non-linear Problems, **Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University**.
- Liao, S.J., 1999. An explicit, Totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **34**: 759-778.
- Liao, S.J., 2003. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, **Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton**.
- Liao, S.J., 2005. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.*, **169**: 1186-1194.
- Liao, S.J., 2009. Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **14**; 983-997.
- Liao, S.J., 2010. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*, **15**: 2003-2016.

- Li, F., Cui, M., 2009. A best approximation for the solution of one-dimensional variable-coefficient Burgers' equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **25**(6): 1353-1356.
- Lu, D., Liu, J. 2014. Application of the Homotopy Analysis Method for Solving the Variable Coefficient KdV-Burgers Equation, *Abstract and Applied Analysis*: 4.
- Mohammadi, M., Mokhtari, R., Panahipour, H., 2013. A Galerkin-reproducing kernel method: Application to the 2D nonlinear coupled Burgers equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37**: 1642-1652.
- Mohammadi, M., Zafarghandi, F. S., Babolian, E., Jvadi, S., 2016. A local reproducing kernel method accompanied by some different edge improvement techniques: application to the Burgers' equation. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, **42**(2): 857-871.
- Mohyud-Din, S. T., Akram, T., Abbas, M., Ismail, A. I., Ali, N. H. M., 2018. A fully implicit finite difference scheme based on extended cubic B-splines for time fractional advection-diffusion equation. *Advances in Difference Equations*, **109**: 1-17.
- Momani, S., Odibat, Z., 2007. Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order. *Physics Letters A*, **365**(5-6): 290-293.
- Niu Z., Wang C., 2010. A one-step optimal homotopy analysis method for nonlinear differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**(8): 2026-2036.
- Odibat, Z., Momani, S., 2009. The variational iteration method: an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics. *Comput., Math., Appl.*, **58** (11-12): 2199-2208.
- Odibat, Z. M., 2010. A study on the convergence of variational iteration method. *Math. Comput. Model.*, **51**(9-10): 1181-1192.
- Odibat, Z., Bataineh, A.S. 2015. An adaptation of homotopy analysis method for reliable treatment of strongly nonlinear problems: construction of homotopy polynomials, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **38**: 991-1000.
- Odibat, Z., 2018. On the optimal selection of the linear operator and the initial approximation in the application of the homotopy analysis method to nonlinear fractional differential equations, *Applied Numerical Mathematics*, **137**: 203-212.
- Oldham, K.B. and Spanier, J. 1974. *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New York.
- Oruç, Ö., Bulut, F., Esen, A., 2015. A Haar wavelet-finite difference hybrid method for the numerical solution of the modified Burgers' equation. *Journal of Mathematical Chemistry*, **53**(7): 1592-1607.
- Pandey, R.K., Mishra, H.R., 2017. Homotopy analysis Sumudu transform method for time-fractional third order dispersive partial differential equation, *Adv Comput Math* **43**: 365-383.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York.
- Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S., 2005. Numerical treatment for the modified Burgers equation. *Math. Comput. Simul.*, **70**: 90-98.
- Sakar, M.G., Erdoğan, F., 2013. The homotopy analysis method for solving the time-fractional Fornberg-Whitham equation and comparison with Adomian's decomposition method, *Applied Mathematical Modelling*, **37**: 8876-8885.
- Sakar, M.G., 2017. Numerical solution of neutral functional-differential equations with proportional delays, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, **7**(2): 186-194.

- Sarboland, M., Aminataci, A., 2015. Numerical Solution of the Nonlinear Klein-Gordon Equation Using Multiquadric Quasi-interpolation Scheme, *Universal Journal of Applied Mathematics*, **3**(3); 40-49,
- Sen, R., 2013. *A First Course in Functional Analysis*. Anthem Press, London. Shuangping, T., Shuangbini C., Existence and uniqueness of solutions to nonlinear Kawahara equations. *Chin. Ann. Math. Ser A*, **23**: 221-228.
- Shaiq, M.S., Iqbal, Z., Mohyud-Din, S., T., 2013. Homotopy analysis method for time-fractional wave-like equations, *Computational Mathematics and Modeling*, **24**(4): 592-603.
- Song, L., Zhang, H., 2007. Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation, *Physics Letters A*, **367**:88-94.
- Sun, Q., 2004. Solving the Klein-Gordon equation by means of the homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **169**:355-365.
- Tamsir, M., Srivastava, V. K., 2016. Analytical study of time fractional order Klein-Gordon equation, *Alexandria Engineering Journal*, **55**; 561-567.
- Turkyilmazoglu, M., 2016. An effective approach for evaluation of the optimal convergence control parameter in the homotopy analysis method, *Filomat*, **30**(6): 1633-1650.
- Van Gorder R.A., Vajravelu K., 2009. On the selection of auxiliary functions, operators, and convergence control parameters in the application of the Homotopy Analysis Method to nonlinear differential equations: A general approach, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**(12): 4078-4089.
- Van Gorder, R.A., 2019. Optimal homotopy analysis and control of error for implicitly defined fully nonlinear differential equations, *Numerical Algorithms*, **81**(1): 181-196.
- Vishal, K., Kumar, S., Das, S., 2012. Application of homotopy analysis method for fractional Swift Hohenberg equation-Revisited, *Applied Mathematical Modelling*, **36**: 3630-3637.
- Wazwaz, A. M., 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Nonlinear Physical Science, Higher Education Press, Springer New York.
- Yusufoğlu, E., Selam, C., 2010. The homotopy analysis method to solve the modified Equal Width wave equation, *Numerical Methods Partial Differential Equations*, **26**:1434-1442.
- Zhang, Y., 2016. *Time-fractional Klein-Gordon equation: formulation and solution using variational methods*, Hexi University School of Mathematics and Statistics Beihuan Road 846 Zhangye China.

ÖZ GEÇMİŞ

1989 yılında Şanlıurfa'nın Viranşehir ilçesinde doğdu. Lisans öğrenimine 2009 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2013 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Yüksek lisans öğrenimine 2013 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladı. 2013 yılından itibaren Van'da Milli Eğitim Bakanlığında Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.



T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 31/07/2019

Tez Başlığı / Konusu:

Kesir Mertebeli Kısmi Aiferansiyel Denklemlerin
Homotopi Analiz Metodu ile Nümerik Çözümleri

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 59 sayfalık kısmına ilişkin, 31/07/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNİTİN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 11 (onbir) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

31.07.2019

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Aslı ALKAN

Öğrenci No: 139102053

Anabilim Dalı: Matematik

Programı:

Statüsü: Y. Lisans Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

(Unvan, Ad Soyad, İmza)