T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN BAZI NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Zaitona Hashim KAREEM
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN BAZI NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Zaitona Hashim KAREEM

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, Zaitona Hashim KAREEM tarafından sunulan **"İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerde Çözümlerin Bazı Niteliksel Davranışları"** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği' nin ilgili hükümleri gereğince 19/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Cemil TUNÇ İmza:

Üye: Doç. Dr. Erdal Korkmaz İmza:

Üye: Doç. Dr. Süleyman EDİZ İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 23./08/2019 tarih ve 2019/47 – I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Suat ŞENSOY

Prof.Dr.Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zaitona Hashim KAREEM

ÖZET

İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN BAZI NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

KAREEM, Zaitona Hashim
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Ağustos 2019, 89 sayfa

Bu tez dokuz bölüme sahiptir. İlk üç kısım; giriş, kaynak- literatür bildirişi ve materyal-yöntemdir. Dördüncü ve beşinci bölümlerde integral ve integro-diferansiyel denklenmelerde çözümlerin varlığı ve tekliği ile ilgili olarak bazı temel sonuçlar ve bu denklemlerin sınıflandırılması verildi. Tezin altıncı bölümü ise Volterra integro-diferansiyel denklemler, Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler, Laplace dönüşüm metodu, Volterra integro-diferansiyel denklemler hakkında bazı kararlık sonuçları ve benzer bilgileri içermektedir. Bölüm 7 de, ilgili literatürde mevcut olan tekil ve tekil olmayan integral denklemeler de çözümlerin bazı niteliksel davranışları Lyapunov'un ikinci metodu ve sabit nokta metodu yardımı ile incelenmektedir. Sekizinci bölüm küçük çekirdekli tekil bir integro-diferansiyel denklem için bilinen eşitsizlik teknikleri yardımı ile bu denklemin çözümlerinin bazı niteliksel davranışları, tekil olmayan bir integro-diferansiyel denklemin çözümlerinin sınırlılık özellikleri incelenmektedir. Son bölüm, ilgili literatürde tekil ve tekil olmayan integral denklemeler de çözümlerin bazı niteliksel davranışları Lyapunov'un ikinci ve sabit nokta metodu yardımı ile incelenmektedir. Bu tezin sonunda ise, tez konusu ve tez konusuyla yakinen ilgili olan detaylı bir literatür verilmektedir. Bu tez yeni ve orijinal sonuç içermemektedir. Burada, tezde, söz konusu olan konular ile ilgili okuyucuların dikkatine bazı bilgilerin sunulması amaçlanmaktadır.

Anahtar kelimeler: Çözücü (resolvent), Çözümlerin niteliksel davranışları, Integro-diferansiyel denklem, Laplace dönüşümü, Lyapunov'un ikinci metodu, Sabit nokta metodu, Tekil olmayan integral denklemler, Tekil integral denklemler.

ABSTRACT

ON SOME QUALITATIVE BEHAVIORS OF SOLUTIONS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

KAREEM, Zaitona Hashim
M.Sc.,Thesis, Department Of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

August 2019, 89 pages

This thesis consists of nine chapters; introduction, source-literature statement and material-method. In the fourth chapter, some basic results are given about the existence and uniqueness of solutions of integral equation (IEs) and integro-differential equations (IDEs). In the fifth chapter, classification of IEs is given. In the sixth part of this thesis, Volterra integro-differential equations (VIDEs), Volterra-Fredholm integro-differential equations (VFIDEs) , Laplace transformation method, some stability results about VIDEs and similar information are introduced. In Chapter 7, some qualitative behaviors of the solutions are examined with the help of Lyapunov's second method and fixed point method for certain singular and non-singular IEs which are available in the related literature. The eighth chapter examines some qualitative behaviors of the solutions of these kind equations with the help of known inequality techniques for a singular IDE with a small core, and the properties of the limitations of the solutions of a non-singular IDE. In the last chapter, some qualitative behaviors of the solutions of singular and non-singular integral equations which are available in the related literature are examined with the help of Lyapunov's second method and fixed point method. At the end of this thesis, a detailed literature about the thesis subject and the thesis subject is given. This thesis does not contain new and original result (s). In this thesis, it is aimed to present some information to the attention of the readers about the subjects in question.

Keywords: Fixed point method stability, Integro-differential equation, Laplace transform, Non-singular integral equations, Qualitative behaviors of solutions, Resolvent Second method of Lyapunov, Singular integral equations.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a teşekkür ederim. Ayrıca Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Bölümü'ne bu fırsatı bana sundukları için teşekkür ederim. Sevgili eşim Sediq Salman ISA Beye ve sevgili çocuklarım Muhammad ve Abdulbasit'de gösterdikleri sabır ve destekten dolayı kendilerine minnettarım ve kalbimin derinliklerinden onlara teşekkür ederim. Hayatım boyunca bana yardım ve merhametten asla kaçınmayan sevgili anneme Fatima Muhammed 'e ve tüm kardeşlerime teşekkür etmek istiyorum.

2019

Zaitona Hashim KAREEM

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
IE	Integral equation
IEs	Integral equations
IDE	Integro-differential equation
IDSs	Integro-differential systems
VIDE	Volterra integro-differential equation
VIDEs	Volterra integro-differential equations
VFIDE	Volterra-Fredholm integro-differential equation
VFIDEs	Volterra-Fredholm integro-differential equations

1. GİRİŞ

Lineer, lineer olmayan, tekil ve tekil olmayan Volterra, Fredholm, Volterra - Fredholm, vb. integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemler fen bilimleri ve mühendislikte, fizik, mekanik, ısı transferi, viskoelastisite, elektrik devreleri, elektro-kimya, popülasyon dinamiği, kontrol teorisi vb. bir çok alanda geniş uygulama alanlarına sahiptirler (Burton, 2005; Rahman, 2007; Wazwaz, 2011). Bu nedenle, özellikle son elli yılda, tekil ve tekil olmayan Volterra, Fredholm, Volterra -Fredholm, vb. integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karalılık, asimptotik karalılık, düzgün karalılık, sınırlılık, üstel karalılık, yakınsaklık, global varlık vb. niteliksel davranışları ilgili literatürdeki bir çok araştırmacı tarafından incelenmiş olup, konu ile alakalı kayda değer sonuçlar elde edilmiştir.

Diğer taraftan, bu denklemlerin analitik çözümlerini açıkça bulmak çok zor hatta bazen de, sayısal olarak hariç, imkânsızdır. Bu sorunların üstesinden gelmek amacıyla ilgili literatürde bu tür denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarını araştırmak için inceleme altındaki problemleri veya denklemleri çözmeden çözümlerin davranışları hakkında bilgi edinmeyi mümkün kılan bazı yöntemler oluşturulmuştur veya geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları sabit nokta metodu, Lyapunov'un ikinci yöntemi, parametrelerin değişimi metodu, perturbasyon metotları vb. yöntem ya da teknikleri olarak bilinir. Burada, bu yöntemlerin ayrıntılarını vermek istemiyoruz.

İlave olarak, literatürde edinilen bilgilere göre, tekil olmayan Volterra, Fredholm, Volterra-Fredholm, vb. integral denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarına ait pek çok kitap veya makale vb. çalışma var olmasına rağmen, tekil integral ve integro-diferansiyel denklemler için aynı konularda çok az sayıda bilimsel çalışma mevcuttur. Bunun başlıca nedenlerinden biri tekil integral ve integro diferansiyel denklemlerde denklemlerin çalışmalar sırasında tekil olmadan dolayı ortaya çıkabilecek muhtemel zorluklardır (Burton, 2010; Burton ve Purnaras, 2012, 2013). Öte yandan yapılan çalışmalar sırasında, araştırmacılar, Lyapunov'un ikinci yöntemi, sabit nokta metodu, parametrelerin değişimi metodu, perturbasyon metotları, eşitsizlik teknikleri vb. çeşitli yöntemler veya teknikler kullanarak, bu tekil ve tekil olmayan integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerin varlığı ve tekliği, çözümlerinin niteliksel özellikleri vb. hakkında belirgin sayıda ve bilimsel niteliğe sahip pek çok sonuçlar elde etmişlerdir. Burada, çalışmalarda uygulanan yöntemlerin ayrıntılarını vermek istemiyoruz. Gerçekte, ilgili literatürde, değişik türden ve formda lineer ve lineer olmayan integral denklemler ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık, yakınsaklık, global olarak çözümlerin varlığı, vs. gibi niteliksel davranışları hakkında yapılan bazı çalışmalar için (Atkinson, 1997); (Brunner, 2004); (Burton, 1979; Burton, 1982; Burton, 2005; Burton, 2010); (Becker, 2009); (Burton ve Purnaras, 2012, 2013); (Costarelli ve Spigler, 2014); (Furumochi ve Matsuoka, 1999); (Graef ve Tunç, 2015); (Hara ve diğerleri, 1990); (Hritonenko ve Yatsenko, 2013); (Maleknejad ve Najafi, 2011); (Miller, 1971); (Morchalo, 1991); (Napoles Valdes, 2001); (Raffoul, 2004; Raffoul, 2007; Raffoul, 2013); (Staffans, 1988); (Tunç, 2016a; Tunç, 2016b; Tunç, 2017a; Tunç, 2017b; Tunç, 2017c); (Vanualailai ve Nakagiri, 2003); (Zhang, 2005; Da Zahang, 1990) ve buradaki kaynaklara baş vurulabilir.

Bununla birlikte, özellikle, yukarıda belirtilen ve bu tezin kaynaklar kısmında geçen makalelerin çoğunda, belirtilen integral denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarını araştırmak için Lyapunov'un ikinci yönteminin temel bir araç olarak yaygın bir şekilde kullanıldığı görülmektedir. Ancak, belirtilen kaynaklardaki, çok az sayıda makalede veya çalışmada incelenen integral denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarını araştırmada sabit nokta metodu ve diğer yöntemlerin kullanıldığı izlenmektedir. Bu bir anlamda Lyapunov'un ikinci yönteminin yapılan çalışmalarda çok etkin bir araç olarak kullanılabildiğini göstermektedir. Uygun Lyapunov fonksiyon veya fonksiyonellerini oluşturma, bu güne kadar ilgili literatürde açık bir problem olarak kalmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

İlgili literatüre bakıldığında, geçmiş son elli yılda belli formdaki integral denklemler, integro diferansiyel denklemler, Volterra integro-diferansiyel denklemler vb. türden değişik formdaki söz konusu denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları, yani çözümlerin karalılık, sınırlılık, yakınsaklık, integrallenebirlik vb. davranışları birçok araştırmacı tarafından incelendi ve söz konusu olan kavramlar için çok ilginç ve bilimsel nitelikte sonuçlar elde edildi. Ayrıca bu denklemler konusunda kayda değer kitaplar da mevcuttur. Bu sonuçların elde edilmesi sırasında temel araçlar olarak Lyapunov'un fonksiyon veya fonksiyonel metodu, perturbasyon metotları, sabit nokta metodu, eşitsizlik teknikleri, parametrelerin değişimi yöntemi vb. birçok metot kullanıldı. Bu hususlar ve benzer konularda yapılan bazı çalışmalar için aşağıda verilen kitaplar, makaleler vb. mevcut kaynaklara ve bu kaynakların referanslarına başvurulabilir (Adivar and Raffoul,2012), (Adivar and Raffoul,2016), (Agarwal, Lupulesco and Regan, 2016), (Alahmadi, Raffoul and Alharbi, 2018), (Burton 1979; Burton 1980; Burton 1982a; Burton 1982b, Burton 1983a; Burton 1983b; Burton 1984a; Burton 1984b; Burton 1985a; Burton 1985b; Burton 1985c; Burton 1985d; Burton 1993; Burton 2005a; Burton 2005b; Burton 2005c; Burton 2006; Burton 2008; Burton 2010; Burton 2011), (Becker 1979a; Becker 1979b; Becker 2006; Becker 2007; Becker 2009; Becker 2011; Becker, 2013), (Becker, Burton and Purnaras, 2012), (Becker, Burton and Krisztin, 1988), (Brunner, 2004), (Burton and Mahfoud, 1983) ,() ,(Burton and Mahfoud, 1984), (Burton and Mahfoud, 1985), (Burton and Furumochi 1994; Burton and Furumochi 1995; Burton and Furumochi 1996), (Burton and Haddock, 2009), (Burton, 2010), (Burton, 2011), (Burton and Dwiggins, 2010), (Burton and Purnaras 2012; Burton and Purnaras 2013), (Burton, Purnaras and Krasnoselskii, 2014), (Chang and Wang , 2011), (Dung 2013; Dung 2015), (Eloe, Islam and Zhang 2000; Eloe, Islam and Zhang 2003), (Furumochi and Matsuoka, 1999), (Graef and Tunç, 2015), (Hara and Itoh 1989; Hara and Itoh 1990), (Hara and Miyazaki, 1992), (Huo and Li, 2003), (Hino and Murakami, 2005), (Islam and Al-Eid, 2004), (Islam and Raffoul 2003; Islam and Raffoul 2005; Islam and Raffoul, 2014)), (Islam and Neugebauer, 2008), (Islam and Sultana, 2010), (Islam 2011; Islam 2015; Islam 2016), (Jin and Luo

2009), (Lovitt, 1950), (Lakshmikantham and Rama Mohan Rao 1987; Lakshmikantham and Rama Mohan Rao 1995), (Miller, 1971), (Murakami, 1991), (Napoles ,2001), (Martinez, 2002), (Maleknejad and Najafi , 2011), (Mesmouli, Ardjouni and Djoudi, 2015), (Ngoc, Naito, Shin and Murakami, 2008), (Ngoc, 2013), (Ngoc and Anh, 2018), (Rama Mohana Rao and Srinivas, 1985), (Rama Mohana Rao and Raghavendra, 1987), (Raman, 2007), (Raffoul, 2009; Raffoul, 2013a; Raffoul, 2013b; Raffoul, 2018), (Raffoul and Ünal, 2014), (Raffoul and Yankson, 2014), (Raffoul and Rai, 2016), (Raffoul,Ren and Raffoul, 2016), (Raffoul, Sanbo and Raffoul, 2016), (Singh and Vinnet, 2009), (Tricomi , 1957), (Tran Tin Kiet ,2000), (Talpalaru, 2000), (Tunç, 2016a; Tunç, 2016b; Tunç, 2016c; Tunç, 2017a; Tunç, 2017b; Tunç, 2017c), (Tran and Ngoc, 2017), (Vanualailai, 2002), (Vanualailai and Nakagiri 2003), (Wang, Li and Wu, 1985), (Wang, 2000), (Wang 2000 ; Wang 2009; Wang 2013), (Wu, 1988), ,(Wazwaz 2011;Wazwaz 1997 ;Wazwaz 2015), (Xu, 1997), (Zhang, 1990), (Zhang, 2005).

Gerçek uygulamalarda, birçok dinamik sistem geç etki (aftereffet) özelliğine sahiptir. Yani, yani gelecekteki durumlar sadece şimdiki zamana değil, aynı zamanda olayın geçmişine de bağlıdır. Aynı zamanda, uygulamalı bilimlerde, örneğin, mühendislik, ekonomi, kontrol teorisi, fizik, kimya, popülasyon dinamiği, tıp, atom enerjisi, bilgi teorisi, mekanik ve elektromanyetik teori, yaşam bilimleri vb. bir çok problemin matematiksel olarak modellenmesine karşılık integral denklemler, gecikmeli veya gecikmesiz integro diferansiyel denklemler gelir. Bunun için (Burton, 1985, 2005); (Lakshmikantham ve Rama Mohan Rao, 1987); (Rahman, 2007); (Wazwaz 2011; 2015) gibi kaynaklara bakılabilir. Bu nedenle, integral denklemler, integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel çalışmaları hakkında incelemeler yapmak kayda değerdir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez konusu ile ilgili literatüre için ams. org, Scopus, Web of Sciences vb. veri tabanlarında bakıldığında, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili çok sayıda bilimsel niteliğe sahip kitap ve makalenin mevcut olduğu görülebilir. Ayrıca, tez konusu ile ilgili olan tekil olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarına ait çok sayıda bilimsel çalışma literatürde mevcut olmasına rağmen, tekil integral ve itegro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarına ait çok az sayıda çalışmanın mevcut olduğu görülebilir. Bu durumun olası nedeni, tekil integral ve tekil integro-diferansiyel denklemlerde tekil durum(lar)dan dolayı ortaya çıkan zorluklardır. Bu tezde, ilgili literatürde tekil ve tekil olmayan bazı integral ve integro-diferansiyel denklemler ve çözümlerine ait farklı konulara ait bazı bilgi ve çalışmaları okuyucuların dikkatine sunulması amaçlanmaktadır. Bu tezdeki tüm bilgiler tez konu ile ilgili olan literatürden alınmıştır. Bu tezde kullanılan materyaller tez konusuyla ilgili literatürde ve bu tezin kaynakları kısmında verilen kitaplar, makaleler, bu tezin içeriğinde olup da bu kaynaklardan alınan temel bilgiler, yapılan bazı çalışmalar ve ede edilen sonuçlardır. Yöntem olarak ise Lyapunov'un ikinci metodu, sabit nokta metodu, Banach daralma dönüşümü, bazı temel ve bilinen eşitsizlikler ve eşitsizlik teknikleri, Laplace dönüşümü vb. metot veya teknikler kullanılmaktadır. Bu kaynakların çoğu Van Yüzüncü Yıl Üniversitesinin sağladığı veri tabanlarından sağlanabilmektedir.

4. TEMEL BİLGİLER

4.1. Çözümlerin Varlık ve Tekliği

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili olarak literature mevcut bulunan bazı temel tanım, teorem ve kavramlar verilecektir. Aşağıdaki bilgiler (Burton (2005)) kitabından alınmıştır. Aşağıda verilen integral denklemini göz önüne alalımım:

$$x(t) = f(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)\,ds. \tag{1}$$

Burada $x \in R^n$, $f : [0,\alpha] \to R^n$ sürekli bir fonksiyon ve $B(t,s)$ ise $n \times n$ boyutlu $0 \leq s \leq t < \alpha$ ve $\alpha \leq \infty$ için sürekli bir matristir fonksiyonudur. $B(t,s)$ fonksiyonuna bu denklemin çekirdeği adı verilmektedir. Eğer $B(t,s)$ fonksiyonu $B(t,s) = D(t-s)$ olarak ifade edilebilir ise, bu takdirde (1) integral denklemine konvolusiyon (convolution) tipinde integral denklemi adı verilir. Şimdi ise

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + F(t) \tag{2}$$

ile verilen integro-diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $F : [0,\alpha] \to R^n$ sürekli vektör değerli bir fonksiyon ve $C(t,s)$ ise $n \times n$ boyutlu $0 \leq s \leq t < \alpha$ için sürekli bir matris fonksiyonudur. Benzer biçimde $A(t)$ ise $n \times n$ boyutlu $[0,\alpha)$ aralığında sürekli bir matris fonksiyonudur.

(2) ile verilen integro-diferansiyel denklemi, (1) ile verilen integral denklemi biçiminde yazılabilir. Böylece varlık ve teklik teoremleri (1) ve (2) denklemlerine aynı anda uygulanabilir. (2) integro-diferansiyel denklemi için $\phi : [0,t_0] \to R^n$ biçiminde sürekli bir başlangıç fonksiyonun tanımlanması gerekmektedir.

(2) integro-diferansiyel denkleminin bir çözümü $[\,t_0\,, T)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir $x(t)$ fonsiyonudur öyle ki $0 \leq t \leq t_0$ için $x(t) = \phi(t)$ olur ve bu fonksiyon $t_0 \leq t$ için (2) denklemini sağlar. Yani

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^{t_0} C(t,s)\phi(s)ds + F(t) + \int_{t_0}^{t} C(t,s)x(s)ds$$

olur.

$y(t) = x(t + t_0)$ alalım. O zaman yukarıda verilen integro-diferansiyel denkleminden

$y'(t) = x'(t + \mathrm{t}_0) = A(t + \mathrm{t}_0)y(t) + \int_0^{\mathrm{t}_0} C(t_0 + t, s)\phi(s)ds$

$+F(t + \mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} C(\mathrm{t}_0 + t, s)x(s)ds$

$= A(t + \mathrm{t}_0)y(t) + \int_0^{\mathrm{t}} C(t_0 + t, s + t_0)y(s)ds +$

$+ \int_0^{\mathrm{t}_0} C(\mathrm{t}_0 + t, s)\phi(s)ds + F(t + \mathrm{t}_0)$

elde edilir. Son integro-diferansiyel denklemi

$$y'(t) = \bar{A}(t)y(t) + \int_0^t \bar{C}(t, s)y(s)ds + \bar{F}\,(t)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu denklem için bu durumda ϕ başlangıç fonksiyonu

$$y(0) = x(t_0) = \phi(t_0)$$

eşitliğini sağlar. Son denklemin 0 dan t ye integrali alınır ise,

$$y(t) = \phi(\mathrm{t}_0) + \int_0^t \bar{A}(s)y(s)ds + \int_0^t \bar{F}\,(s)\,ds + \int_0^t \int_0^u \bar{C}(u, s)y(s)ds\,du \qquad (3)$$

elde edilir.

(3) deki son terimdeki integrallerin sırası değiştirilir ise (1) biçiminde bir integral denklemi elde edilir. Yani (2) integro-diferansiyel denklemi (1) biçimindeki bir integral denklemi olarak ifade edilebilir. Elde edilen bu sonuçlar varlık ve teklik teoremlerinin hem (1) integral denklemi ve hem de (2) biçiminde bir integro-diferansiyel denklemine başlangıç fonksiyonu verilmek kaydıyla aynı anda uygulanabileceğini göstermektedir (Burton (2005)).

Lemma 1 (Burton (2005)). $f, g : [0, \alpha] \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ve c negatif olmayan bir sabit olsun. Eğer

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)\,ds, \qquad 0 \leq t < \alpha\,,$$

ise, bu takdirde

$$f(t) \leq c \exp \int_0^t g(s)\,ds, \qquad 0 \leq t < \alpha$$

olur.

İspat. $c > 0$ olsun. Yakarıda verilen birinci eşitsizlik $c + \int_0^t g(s)f(s)\,ds$ bölünür ve $g(t)$ ile çarpılır ise,

$$f(t)g(t)\;/[c + \int_0^t g(s)f(s)\,ds] \leq g(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alınır ise,

$$\ln\left\{\left[c + \int_0^t g(s)f(s)\,ds\right]\Big/c\right\} \leq \int_0^t g(s)ds$$

veya

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)\,ds \leq c\exp\int_0^t g(s)ds$$

bulunur. Eğer $c = 0$ ise, pozitif değerler boyunca $c \to 0$ için limit alınarak istenilen sonuca ulaşılır. Böylece Lemma 1 in ispatı tamamlanır.

Teorem 1 (Burton, 2005). $0 < \alpha \leq \infty$ olmak üzere, $f : [0,\alpha] \to R^n$ sürekli bir fonksiyon, $B(t,s)$ ise $n \times n$ boyutlu $0 \leq s \leq t < \alpha$ için sürekli bir matris fonksiyonu olsun. Eğer $0 \leq \mathrm{T} < \alpha$ ise, bu takdirde

$$x(t) = f(t) + \int_0^t B(t,s)x(s) \qquad (4)$$

integral denkleminin $[0,T]$ aralığı üzerinde bir tek $x(t)$ çözümü vardır.

İspat. $\{x_n(t)\}$ dizisi $[0,T]$ aralığı üzerinde

$$x_1(t) = f(t)$$

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \int_0^t B(t,s)x_n(s)\,ds,\; n \geq 1. \qquad (5)$$

Picard ardışık yaklaşımları ile tanımlansın.

Tümevarım yöntemi yardımı $x_n(t)$ nin her bir teriminin $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olduğu gösterilebilir. $M = max_{0\leq s\leq t\leq T}|B(t,s)|$ ve $K = \max\limits_{0\leq t\leq T}|f(t)|$ olsun.

$$x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}(t) - x_n(t)) \tag{6}$$

serisini ele alalım. Tümevarım yöntemi yardımı ile

$$|x_{n+1}\,(t) - x_n(t)\,| \leq [K\,(Mt)^n]/n! \tag{7}$$

olduğu gösterilecektir.

$n = 1$ için (5) den

$$|x_2\,(t) - x_1(t)\,| = \left| f(t) + \int_0^t B(t,s)f(s)\,ds - f(t) \right| \leq \int_0^t |B(t,s)f(s)|\,ds \leq MKt$$

elde edilir. Böylece (7) ifadesi $n = 1$ için doğru olur.

$$|x_{k+1}\,(t) - x_k(t)\,| \leq [K\,(Mt)^k]/k!$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|x_{k+2}\,(t) - x_{k+1}(t)\,| &= \left|f(t) + \int_0^t B(t,s)x_{k+1}(s)\,ds - f(t) \quad - \int_0^t B(t,s)x_k(s)\,ds \right| \\
&\leq \int_0^t |B(t,s)|\ |x_{k+1}\,(s) - x_k(s)|d \\
&\leq M \int_0^t\ |x_{k+1}\,(s) - x_k(s)|ds \\
&\leq \frac{MK}{k!}\int_0^t (Ms)^k ds \\
&= \frac{M^{k+1}\,Kt^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $K\,(Mt)^k/k!$ terimi $K\,e^{Mt}$ biçimindeki bir fonksiyonun Taylor serisi olur. Bu seri ise, $[0,\mathrm{T}]$ aralığı üzerinde düzgün ve mutlak yakımsak olur. Böylece (6) ile verilen seri $[0,\mathrm{T}]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olur ve bu seri söz konusu arlık üzerinde sürekli bir $x(t)$ limitine yakınsar. $n \to \infty$ için (5) in limiti alınır ise,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)\,ds$$

elde edilir. Böylece $x(t)$ limit fonksiyonu (4) integral denkleminin bir çözümü olur.

Şimdi ise $x(t)$ nin tek çözüm olduğunu gösterelim. Tersine çözümün tek olmadığını varsayalım. O zaman (4) integral denkleminin $[0,T]$ aralığı üzerinde $x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki çözümünün var olduğunu kabul edebiliriz. Bu takdirde, (4) integral denkleminden

$$x(t) - y(t) = \int_0^t B(t,s)[x(s) - y(s)]\,ds$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak da

$$|x(t) - y(t)| \leq M \int_0^t |x(s) - y(s)|ds$$

olur. $c = 0$ olmak kaydıyla, son eşitsizlik

$$|z(t)| \leq c + \int_0^t M|z(s)|ds$$

biçimindedir. Gronwall eşitliğinin uygulanmasıyla $|z(t)| \leq ce^{Mt} = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece Teorem 1 in ispatı tamamlanır.

Uyarı. x, f ve g fonksiyonları n-bileşenli olarak verisin. Ayrıca,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t,s,x(s))\,ds \qquad (8)$$

olsun. Başlangıç koşuluna sahip bir integro-diferansiyel denklem (,8) integral denklemi formuna dönüştürülebilir (Burton, 2005).

Teorem 2 (Burton, 2005). a, b ve L pozitif sabitler, $\alpha \in (0,1) c = \alpha/L$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(a) f fonksiyonu $[0,a]$ aralığında süreklidir.

(b) g fonksiyonu

$$U = \{(t,s,x): 0 \leq s \leq t \leq a \text{ ve } |x - f(t)| \leq b\}$$

bölgesinde süreklidir.

(c) g foksiyonu U bölgesinde x e göre Lipschitz şartını sağlar, yani $\forall\ (t,s,x)$ ve $\forall$ $(t,s,y) \in U$ için

$$|g(t,s,x) - g(t,s,y)| \leq L|x - y|$$

olur. Eğer $M = max_U\ |g(t,s,x)|$ ise, bu takdirde $T = \min[a, b/M,\ c]$ olmak üzere, (8) integral denkleminin $[0,T]$ aralığı üzerinde bir tek çözümü vardır.

<u>İspat.</u> S cümlesi, $\psi \in S$ ve

$$\|\psi - f\| = \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} |\psi(t) - f(t)| \leq b$$

olmak kaydıyla, $[0,T] \to R^n$ ye tanımlı sürekli fonksiyonların bir uzayı olsun. $A : S\ \to S$ operatörü

$$A(\psi)(t) = f(t) + \int_0^t g\big(t,s,\psi(s)\big)\,ds$$

olarak tanımlasın.

$A\colon S \to S$ operatörü ve ψ fonksiyonunun sürekliliği, $A(\psi)$ nin sürekli olmasını ve

$$\|A(\psi) - f\| = \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} |A(\psi)(t) - f(t)| = \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} \left|\int_0^t g\big(t,s,\psi\,(s)\big)ds\ \right| \leq MT \leq b$$

olmasını sağlar.

Şimdi ise, A operatörünün daralama dönüşümü olduğu gösterilecektir. ϕ ve $\psi\ \in S$ olsun. Bu takdirde

$$\|A(\phi) - A(\psi\,)\| = \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} \left|\int_0^t g\big(t,s,\phi(s)\big) - \int_0^t g\big(t,s,\psi\,(s)\big)ds\right|$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} \int_0^t \big|g\big(t,s,\phi(s)\big) - g\big(t,s,\psi(s)\big)\big|ds$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} L \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|ds$$

$$\leq T \max_{0\leq t\leq \mathrm{T}} L\,|\phi(s) - \psi(s)|$$

$$= T\ \ L\,\|\phi - \psi\| \leq cL\|\phi - \psi\| = \alpha\|\phi - \psi\|$$

elde edilir. Bu sonuca bağlı olarak Teorem 1 den dolayı, bir tek $x \in S$ fonksiyonu var öyle ki

$$A(x)(t) = x(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s))\, ds$$

olur. Bu sonuç ise söz konusu olan teoremin ispatını tamamlar.

4.2. Daralma Dönüşümü

Tanım 1 (Burton, 2008). S bir cümle, $\rho: S \times S \to [0, \infty)$ ve $y, z, u \in S$ olmak üzere, aşağıdaki şartların sağlanması halinde (S, ρ) çiftine bir metrik uzaydır denir:

(a) $\rho(y, z) \geq 0, \rho(y, y) = 0, \rho(y, z) = 0 \implies y = z$;

(b) $\rho(y, z) = \rho(z, y)$;

(c) $\rho(y, z) \leq \rho(y, u) + \rho(u, z)$.

Eğer (S, ρ) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir limite sahip ise, bu takdirde (S, ρ) metrik uzayına tamdır denir.

Tanım 2 (Burton, 2008). (S, ρ) bir metrik uzay ve $A : S \to S$ olsun. Eğer bir $\alpha \in (0,1)$ sabiti var öyle ki $x \in S$ ve $y \in S$ için

$$\rho[A(x), A(y)] \leq \alpha \rho(x, y)$$

oluyor ise, bu takdirde A ya *daralma operatörü* denir.

Theorem 3 (Burton, 2008). (S, ρ) bir tam metrik uzay ve $A : S \to S$ bir daralma operatörü olsun. Bu takdirde, bir tek $\phi \in S$ var öyle ki $A(\phi) = \phi$ olur. Ayrıca, eğer $\psi \in S$ ve $\{\psi_n\}$ disizi ise $\psi_1 = A(\psi)$, $\psi_{n+1} = A(\psi_n)$ olarak tanımlı ise, bu takdirde $\psi_n \to \phi$ bir tek sabit noktaya sahip olur. Yani, $A(\phi) = \phi$ denklemi bir tek çözüme sahip olur.

4.3. Bazı Karalılık Tanımları

Birinci mertebeden lineer

$$x' = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{9}$$

Volterra integro-diferansiyel denklemi verilsin. Burada $x \in R$, $A(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $0 \leq s \leq t < \infty$ olmak üzere $C(t,s)$ çekirdeği bu aralıkta süreklidir. Eğer $\phi : [0,t_0] \to R^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu ise, bu takdire $x(t,\phi)$ ifadesi bu denklemin $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümünü gösterir. İhtiyaç duyulduğunda verilen bir integro-diferansiyel denklemin çözümü $x(t,t_0,\phi)$ ile gösterilecektir. Bazen de bu çözüm $x(t)$ ile gösterilecektir. (9) integro-diferansiyel denklemi $x(\mathrm{t}) \equiv 0$ çözümüne sahiptir. Bu çözüme (9) integro-diferansiyel denkleminin *sıfır çözümü* denir.

Tanım 3 (Burton, 2005). Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $t_0 \geq 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki $\forall\, t \in [0,t_0]$ için $|\phi(t)| < \delta$ olduğunda $\forall\ t \geq t_0$ için $|x(\mathrm{t},\phi)| < \varepsilon$ oluyor ise, (9) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümüne *karalıdır* denir.

Tanım 4 (Burton 2005). Eğer $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ sayıları var öyle ki her bir $\delta > 0$ sayısı için sürekli bir $\phi : [0,t_0] \to R$ başlangıç fonksiyonu var ve $[0,t_0)$ aralığında $|\phi(t)| < \delta$ olduğunda bir $t_1 > t_0$ için $x(t,\phi) \geq \varepsilon$ oluyor ise, (9) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümüne *kararsızdır* denir.

Tanım 5 (Burton, 2005). Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki $t_0 \geq 0$ olmak üzere, $[0,t_0]$ aralığında $|\phi(t)| < \delta$ olduğunda $\forall\ \mathrm{t} \geq t_0$ için $|x(\mathrm{t},\phi)| < \varepsilon$ oluyor ise, (9) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümüne *düzgün kararlıdır* denir. Buradaki δ sayısı t_0 dan bağımsızdır.

Tanım 6 (Burton, 2005). Eğer (9) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümü kararlı ve her $t_0 \geq 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki $[0,t_0)$ aralığında $|\phi(t)| < \delta$ olduğunda $t \to \infty$ için $|x(\mathrm{t},\phi)| \to 0$ oluyorsa, bu çözüme *asimptotik kararlıdır* denir.

Tanım 7 (Burton, 2005). Eğer (9) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı ve bir $\eta > 0$ sayısı var öyle ki her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $T > 0$ sayısı var, $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[0, t_0]$ aralığında $|\phi(t)| < \eta$ olduğunda her $t \geq t_0 + T$ için $|x(t, \phi)| < \varepsilon$ oluyorsa, (9) Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümüne *düzgün asimptotik karalıdır* denir.

Burton ve Purnaras (2012) aşağıda verilen

$$x'(t) = f(t) - h\big(t, x(t)\big) - \int_0^t C(t,s) q\big(s, x(s)\big) ds$$

lineer olmayan integro-diferansiyel denklemi ve bu denklem ile birlikte çözücüsünü (resolvent) ele aldı. Burada, bu denklem için aşağıdaki şartların sağlandığı varsayılmaktadır:

$$p \in [1, \infty), \qquad f \in L^p[0, \infty), \qquad xh(t, x) \geq 0, \qquad xq(t, x) \geq 0.$$

Tanım 8 (Burton ve Purnaras, 2012). $\Omega_T \coloneqq \{\, (t, s): 0 \leq s \leq t \leq T\}$ olarak tanımlansın. Aşağıdaki şartların sağlanması halinde yukarıda verilen integro-diferansiyel denkleminin C çekirdeğine Ω_T cümlesi üzerinde *zayıf tekildir* denir:

C çekirdeği Ω_T cümlesi üzerinde sınırlıdır. Ancak, her $t \in [0, T]$ için $C(t, s)$ çekirdeği $\{0 \leq s \leq t\}$ aralığında sonlu sayıda ayrık tekil noktaya sahiptir. İlave olarak da $\phi : [0, T] \to R^n$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^t C(t, s)\, \phi\,(s)\, ds$$

ve

$$\int_0^t |C(t, s)|\; ds$$

integralleri var ve bu her iki integral $[0, T]$ aralığında süreklidir.

Eğer $C(t, s)$ çekirdeği $T > 0$ için Ω_T cümlesi üzerinde zayıf tekil bir çekirdek ise, bu takdirde bu çekirdek $\Omega \coloneqq \{\, (t, s): 0 \leq s \leq t < \infty\}$ cümlesi üzerinde de zayıf tekil bir çekirdektir.

5. İNTEGRAL DENKLEMLER VE RESOLVENTLER

5.1. İntegral Denklemlerinin Sınıflandırılması

İntegral denklem, belirlenecek olan bilinmeyen fonksiyonun $u(x)$ integral işaretinin altında göründüğü bir denklem olarak tanımlanır. İntegral denklemlerin konusu hem teorik hem de uygulamalı matematiğin en faydalı matematik araçlarından biridir. İntegral denklemler doğal olarak fizik, kimya, biyoloji vb. alanlardaki uygulamalar sırasında sonlu bir $[a,\ b]$ aralığında oluşan matematiksel modellere ait başlangıç değer problemlerinde ortaya çıkmaktadır. Adi diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemler ile ilgili birçok başlangıç ve sınır değer problemi, integral denklemlerine dönüştürüldükten sonra, çözülme yoluna gidilir. (Adomian (1986), Adomian (1992), Cherruault ve Adomian (1993), Rahman (2007), Wazwaz (2011)).

$u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere bir integral denklem aşağıdaki biçimindedir:

$$u(x) = f\ (x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{10}$$

Burada $K(x,t)$ fonksiyonu (10) denkleminin çekirdeği olarak adlandırılır, $\alpha\ (x)$ ve $\beta\ (x)$ fonksiyonları ise integralin sınırlarıdır. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun integral işaretinin altında mevcut olduğu kolayca görülebilir. (10) integral denkleminde $K(x,t)$ çekirdeği ve $f(x)$ fonksiyonunun verildiği ve λ'nın ise sabit bir parametre olduğu belirtilmelidir (Wazwaz (2011)). Gerçekte, literatürde, ilk olarak 1825'te İtalyan bir matematikçi olan Abel ünlü tautokrone problemi ile bağlantılı olarak bir integral denklem oluşturdu (Lovitt (1950), Tricomi (1957) ve Wazwaz (2011)).

Aşağıdaki ikinci mertebeden kütle-yay sistemine ait lineer başlangıç değer problemini ele alalım:

$$m\frac{d^2\,u}{dt^2} + ku = f(t), \qquad (0 \le t < \infty),$$

$$u(0) = u_0\,, \qquad \frac{du}{dt} = \dot{u}_0$$

k pozitif bir sabit, $f\ (t)$ kuvvet, u_0 yer değiştirme ve $\dot{u}_0$ ise başlangıç değeridir. Bu başlangıç değer problem bir integral denklemine dönüştürülebilir (Wazwaz, (2011)).

Yukarıda verilen diferansiyel denklemin 0 dan t ye iki kez integrali alındığında, sırasıyla

$$m\frac{du}{dt} - m\dot{u}_0 + k\int_0^t u(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

ve

$$mu(t) - mu_0 - mu_0t + k\int_0^t\int_0^t u(\tau)d\tau d\tau = \int_0^t\int_0^t f(\tau)d\tau d\tau \qquad (11)$$

elde edilir.

$y(t) = \int_0^t\int_0^t u(\tau)d\tau d\tau$ olsun. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t\int_0^t f(\tau)d\tau d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{u(t)\}$$

olur. Burton (2005) deki konvolüsyon teoremi kullanıldığında

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da (11) denklemi

$$u(t) = u_0 + \dot{u}_0t + \frac{1}{m}\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau - \frac{k}{m}\int_0^t (t-\tau)u(\tau)dt\,,$$

integral denklemi olarak ifade edilir. Bu bilgiler adi diferansiyel denklemler ile integral denklemleri arasında doğrudan bir bağlantının var olduğunu ifade eder.

İlgili literatüre bakıldığında integral denklemleri birçok forma sahip olduğu görülebilir. Bu formlar denklemlerdeki integral sınırlarına ve denklemlerdeki çekirdeğin veriliş biçimine bağlıdır.

5.1.1. Fredholm İntegral Denklemler

Fredholm integral denklemler için integral sınırlar sabitler olarak verilir. Ayrıca, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) sadece integral işareti altında gözükür:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt.$$

Bu denkleme birinci türden Fredholm integral denklemi denir. Bununla beraber, ikinci türden Fredholm integral denklemlerinde bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) hem integral işareti altında ve hem de integralin dışında gözükür. Aşağıda verilen Fredholm integral denklemler ikinci türden birer Fredholm integral denklemidir:

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x-t)u(t)dt\,.$$

5.1.2. Volterra İntegral Denklemler

Volterra integral denklemlerde integral sınırlarından en az biri değişken olarak verilir. Birinci türden bir Volterra integral denklemler için $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) sadece integral işareti altında gözükür:

$$5x^2 + x^3 = \int_0^x (5+3x-3t)u(t)dt.$$

Ancak, ikinci türden Volterra integral denklemlerde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) hem integral işareti altında ve hem de dışında gözükür. Bunun için aşağıdaki denklem örnek olarak verilebilir:

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt.$$

5.1.3. Volterra-Fredholm İntegral Denklemler

Volterra-Fredholm integral denklemler birçok fiziksel, mühendislik ve biyolojik vb. olayların matematiksel modellenmesine ait sınır değer problemlerinde ortaya çıkar

(Wazwaz 1997; Maleknjad 2003). Volterra-Fredholm integral denklemler literatürde aşağıdaki iki değişik form olarak ortaya çıkar:

$$u(x) = f\ (x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt, \tag{12}$$

$$u(x,t) = f\ (x,t)\ + \lambda \int_a^t \int_\Omega F\big(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau)\big)d\xi d\tau. \tag{13}$$

Burada $(x,t) \in \Omega \times [0,T], f\ (x,t)$ ve $F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))$ fonksiyonları $D\ = \Omega \times [0,T]$ bölgesinde analitik, Ω ise $\Re^n$ nin, $(n = 1, 2, 3)$, kapalı bir alt cümlesidir. (12) integral denkleminden görüldüğü üzere bu denklem aynı anda ayrık olarak hem Fredholm ve hem de Volterra integral denklemlerini içerir. Oysa (13) integral denklemi ise birleştirilmiş Volterra ve Fredholm integral denklemlerini içerir. $u(x)$ ve $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonları hem integral işareti altında ve hem de dışında mevcuttur. Eğer bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) sadece integral işareti altında gözükür ise denkleme birinci türden Volterra-Fredholm integral denklemi denir. Benzer biçimde eğer bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) hem integral işareti altında ve hem de dışında gözükür ise denkleme ikinci türden Volterra-Fredholm integral denklemi denir

Bir örnek olarak bu integral denklem türü aşağıda verilmektedir:

$$u(x) = 6x\ + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt\ .$$

5.1.4. Tekil İntegral Denklemler

Eğer bir integral denklemdeki integral has olmayan türden ise denkleme tekil integral denklem adı verilir. Bu tür denklemlerde integral sınırlarından en az biri sonsuz olur ya da denklemin çekirdeği $a \leq t \leq b$ integrasyon aralığındaki bir ya da daha fazla noktada sınırsız olur (Wazwaz (2015)).

Öte yandan tekil Fredholm ve Voterra denklemler fen bilimleri ve mühendislikteki birçok uygulamada ortaya çıkar. Burada olası uygulama ve detayları verilmek istenmemektedir. Aşağıdaki denklem ikinci türden birer Volterra integral denklemidir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt.$$

Bu denklemlerde integral sınırlarından en az biri veya her ikisi sonsuz olur ise denklemlere tekil integral denklemler adı verilir (Wazwaz (2015)).

Örnek 1. Aşağıdaki integral denklemlerden ikinci türden birer tekil Volterra integral denklemidir (Wazwaz (2015)):

$$u(x) = 2x + 6\int_{0}^{\infty} sin(x-t)u(t)dt,$$

$$u(x) = 5x + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0} \exp u(t)dt,$$

$$u(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+t^2)u(t)dt.$$

Örnek 2. Aşağıdaki integral denklemlerden ilk üçü birinci türden ve diğerleri ise ikinci türden birer tekil Volterra integral denklemidir (Wazwaz, 2015):

$$x^2 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\, u(t)dt, \tag{14}$$

$$x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}} u(t)dt,\ 0 < \alpha < 1, \tag{15}$$

$$u(x) = 1 - 2\sqrt{x} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\, u(t)dt, \tag{16}$$

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt.$$

Bu son denklemden $\beta(x)$ ve $\alpha(x)$ itegrasyon sınırlarından biri veya here ikisi sonsuz olur ya da $K(x,t)$ çekirdeği integrasyon aralığındaki bir ya da daha fazla noktada sınırsız olur. Ayıca, (14) ve (15) integral denklemlerine sırasıyla Abel integral denklemi ve genelleştirilmiş Abel integral denklemi denir. Ayrıca, bu tür tekil integral denklemler 1823’te Norveçli matematikçi Niles Abel tarafından oluşturulan en eski integral denklemler arasında bulunur. (16) ile verilen integral denklemine zayıf tekil ikinci tür Volterra tipinde integral denklemi denir. Bu tür denklemler genellikle ısı iletimi, süper akışkanlık ve kristal büyümesi gibi bilim ve mühendislik uygulamalarında ortaya çıkar (Wazwaz, 2015).

5.1.5. Lineer Olmayan Tekil İntegral Denklemler

Abel'in integral denklemleri, mikroskobik, sismoloji, radyo astronomi, elektron emisyonu, atom saçılması, radar menzili, plazma teşhisi, X -ışını radyografisi ve optik fiber değerlendirmesi gibi birçok bilim dalında karşımıza çıkabilmektedir (Singh ve ark. (2009)). Lineer Abel'ın integral denklemi, integral denklemlerinin en ilk örneklerinden biridir. Abel'in integral denklemleri tekil integral denklemleri olarak da tanımlanabilir.

İkinci türden lineer olmayan tekil Abel integral denklemi, genelleştirilmiş lineer olmayan Abel'ın integral denklemi ve lineer olmayan zayıf tekil Abel'ın integral denklemleri için örnekler aşağıda sırasıyla verilmektedir:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} u^2(t)dt,$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u^3(t)dt,\ 0 < \alpha < 1,$$

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u^2(t)dt, 0 < \alpha < 1,$$

Verilen integral denklemlerin çekirdeklerinin $t = x$ için sonsuza ıraksadığı açıktır. $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$f\ (x)\ = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

integral denklemi tekil Abel integral denklemidir. Bu integral denklemin çekirdeğinin $t = x$ için sonsuza ıraksadığı görülmektedir.

5.2. Başlangıç Değer Problemlerini Volterra İntegral Denklemlere Dönüştürme

Şimdi verilen bir başlangıç değer problemini eşdeğer bir Volterra integral denklemine ve Volterra integro-diferansiyel denklemine dönüştürecek bir teknik üzerinde durulacaktır ((Jerri, 1999), Wazwaz (2011)). Kolay olası açısından, bu işlemi aşağıda verilen ikinci basmaktan bir diferansiyel denkleme ait başlangıç değer problemine uygulanacaktır. α ve β sabitler olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) + p(x)\frac{dy}{dx}(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{17}$$

$$y(0) = \alpha, \;\; y'(0) = \beta,$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ analitik fonksiyonlar, $g(x)$ ise incelmenin yapıldığı aralıkta sürekli bir fonksiyondur. $u(x)$ sürekli olduğunu varsayalım, ayrıca

$$y''(x) = u(x) \tag{18}$$

olsun. (18) ifadesinin 0 dan *x* e integrali alındığında

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t)dt$$

veya eşdeğer olarak

$$y'(x) = \beta + \int_0^x u(t)dt \tag{19}$$

elde edilir. (19) ifadesinin 0 dan x e integrali alındığında

$$y(x) - y(0) = \beta x + \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt$$

veya eşdeğer olarak

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{20}$$

bulunur. (20) de bir önceki eşitlikteki çift katlı integral tek katlı integral olarak ifade edilmektedir. Gerçekte bunu görmek için

$$G(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dt\, dx_1$$

çift katlı integralini ele alalım. Kısmi itegrasyonda

$$\int udv = uv - \int vdu$$

olduğu bilinmektedir.

$$u(x_1) = \int_0^{x_1} F(t)dt$$

alalım. Buna bağlı olarak da kısmi integrasyon uygulanıp, alındığında

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dt\, dx_1 = x_1 \int_0^{x_1} F(t)dt \Big|_0^x - \int_0^x x_1 F(x_1)dx_1$$

$$= x \int_0^x F(t)dt - \int_0^x x_1 F(x_1)dx_1$$

$$= \int_0^x (x-t)F(t)dt$$

elde edilir.

Belirtelim ki benzer işlemler çok katlı başka integraller için de yapılabilir. Ancak, burada konun ayrıntısını vermek istemiyoruz. (18), (19) ve (20) ifadeleri (17) başlangıç değer probleminde yerlerine bırakıldığında

$$u(x) + p(x)[\beta + \int_0^x u(t)dt] + q(x)[\alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt] = g(x)$$

Volterra integral denklemi elde edilir. Açıkça görüldüğü üzere bu denklem standart

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{21}$$

Volterra integral denklemi olarak yazılabilir. Belirtelim ki yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere ait başlangıç değer problemleri, birinci mertebeden Volterra integral denklemlerine benzer şekilde dönüştürülebilir. Gerçekte, kolaylıkla

$$\int_0^y \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} \ldots \int_0^{y_{n-1}} (y-s)\ u(s)dsdy_{n-1} \ldots dy_1 = \frac{1}{n!}\int_0^y (y-s)^n u\,(s)ds$$

gösterilebilir. Bu ifade söz konusu olan iddianın doğruluğunu göstermede kolaylıklar sağlamaktadır.

Tersine (21) Volterra integral denkleminde *x* e göre türev alındığında kolaylıkla bir Volterra integro-diferansiyel denklem edilebilir. Bu konunu fazla ayrıntısı burada verilmek istenmemektedir. Aşağıda verilen örnek, bir başlangıç değer problemini eşdeğer bir Volterra integral denklemine dönüştürmeyi göstermektedir.

<u>Örnek 3.</u>

$$y'(x) - 2xy(x) = e^{x^2}, \quad y(0) = 1, \tag{22}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$y'(x) = u(x)$$

olsun. Bu eşitliğin her iki yanının 0 dan x e integrali alındığında daha sonra ise, $y(0) = 1$ başlangıç koşulu kullanıldığında

$$y(x) - y(0) = \int_0^x u(t)dt$$

veya eşdeğer olarak

$$y(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da kolaylıkla

$$u(x) = 2x + e^{x^2} + 2x\int_0^x u(t)dt.$$

Volterra integral denklemi bulunur. Bu denklemin x türevi alındığında (22) problemi elde edilebilir.

5.2.1. Volterra İntegral denklemlerinin başlangıç değer problemlerine dönüştürülmesi

Volterra integral denklemlerini ve Volterra integro-diferansiyel denklemlerini çözmek için en iyi bilinen yöntemlerden biri, bu denklemlerin eşdeğer başlangıç değer problemlerine dönüştürülerek çözülmesidir. Bu denklemlerin eşdeğer başlangıç değer problemlerine dönüştürülmesi sırasında, integral içeren terimlerin ortadan kaldırılması için Leibnitz türev alama kuralı kullanılır. Başlangıç koşullarını elde etmek için $u(x)$ fonksiyonu ve türevlerinde $x = 0$ alınır. Bu işlemlerin sonucunda adi diferansiyel denklem ve başlangıç şartlarından oluşan bir başlangıç değer problemi elde edilir ve bu problem diferansiyel denklemlerde bilinen yöntemler ile çözülür. Bu dönüştürme işlemi aşağıdaki örnekte kolaylıkla görülebilir.

Örnek 4.

$$u(x) = e^x + \int_0^x u(t)dt \tag{23}$$

Volterra integral denklemi verilsin. (23) integral denkleminin her iki yanının x göre türevi alındığında

$$u'(x) = e^x + u(x)$$

elde edilir. (23) integral denkleminde x =0 alındığında $u(0) = 1$ elde edilir. Bu durumda

$$u'(x) - u(x) = e^x, \qquad u(0) = 1,$$

başlangıç değer problemi oluşur. Söz konusu problem ise kolaylıkla çözülür.

5.2.2. Çözücü (Rezolvent)

Şimdi, bir integral denklemin çözücüsü (resolvent) hakkında kısa bilgi verilecektir (Burton, 2005).$f : [0, a] \to R^n$ sürekli ve C çekirdeği ise $0 \leq s \leq t \leq a$ için sürekli olmak üzere

$$x(t) = f\ (t)\ + \int_0^t C(t, s)x(s)ds$$

integral denklemini ele alalım. Bu integral denklemi için resolvent

$$R(t, s) = -C(t, s) + \int_s^t R(t, u)C(u, s)du$$

ile tanımlanır. Burada bir $R(t, s)$ çözümünün var olduğu ve bu çözümün aralığında $0 \leq s \leq t \leq a$ sürekli olduğu kabul edilmektedir. Buna bağlı olarak da $x(t)$ ifadesi $R(t, s)$ yardımı ile bulunur ve Parametrelerin değişimi formülü yaradım ile

$$x(t) = f\ (t) - \int_0^t R(t, u)f(u)du$$

olarak bulunur. Son eşitliği bulmak için, bu eşitliği $R(t, s)$ ile çarparak 0 dan t ye integral aldığımızda

$$\int_0^t R(t, u)x(u)du - \int_0^t R(t, u)f(u)du = \int_0^t R(t, u) \int_0^u C(u, s)x(s)ds\, du$$

$$= \int_0^t [R(t, s) + C(t, s)]x(s)ds$$

bulunur. Böylece

$$-\int_0^t R(t, u)f(u)du = \int_0^t C(t\ , s)x(s)ds$$

olur. Buna bağlı olarak da istenen sonuç elde edilebilir.

6. İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

6.1. İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegro-diferansiyel denklemler, birçok bilimsel uygulamada, özellikle başlangıç değer problemlerini veya sınır değer problemlerini integral denklemlere veya integro diferansiyel denklemlere dönüştürdüğümüzde ortaya çıkar (Wazwaz (2011), Burton (2005), Rahman (2007)). İntegro-diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında integral denklemlerin sınıflandırılmasındaki kullanılan yöntemlerin aynısı kullanılmaktadır.

6.1.1. Fredholm IDEs

Fredholm IDEs, diferansiyel denklemleri integral denklemlere dönüştürdüğümüzde ortaya çıkar. Bir Fredholm integro-diferansiyel denklem, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $u^{(n)}(x), n \geq 1$, türevlerinden birini sırasıyla integral işaretinin altında ve dışında içerir. Bu durumda integralin sınırları Fredholm integral denklemlerinde olduğu gibi sabit olur. Bu tür bir denklem farklı türev ve integral operatörler içerebildiğinden, bu denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir. Özel çözümleri elde etmek için Fredholm integro-differansiyel denklemlerde başlangıç koşullarının denklem ile birlikte verilmesi gerekmektedir. Bir Fredholm integro-diensensiyel denklem aşağıdaki forma sahiptir:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

Burada $u^{(n)}$ ifadesi $u(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini gösterir. Bu denklem daha düşük basmaktan türevleri de içerebilir.

Örnek 5. Aşağıda bir Fredholm integro -diferansiyel denklem başlangıç koşulu ile birlikte verilmektedir:

$$u'(x) = 3 - x + 5\int_0^1 xu(t)dt, \quad u(0) = 0.$$

6.1.2 Volterra İntegro- diferansiyel denklemler

Volterra integro-diferansiyel denklemler, başlangıç değer problemlerini integral denklemlere dönüştürdüğümüzde ortaya çıkar (Wazwaz (2011)). Bir Volterra integro-diferansiyel denklem, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu (bağımlı değişkeni) integral işaretinin altında ve onun türevlerinden en az birini, $u^{(n)}(x), n \geq 1$, integral işaretinin dışında içerir. Bu durumda denklemdeki integral sınırlarından en az biri Volterra integral denklemlerde olduğu gibi bir değişkendir. Bu tür bir denklem farklı türev ve integral operatörler içerebildiğinden, buna Volterra integro-diferansiyel denklem denir. Bir Volterra integro-diferansiyel denklemde denklem ile birlikte başlangıç koşulu (koşulları) verildiğinde, denklemin özel çözümü bulunabilir. Aşağıda verilen denklem bir Volterra integro-diferansiyel denklemdir:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{24}$$

Burada $u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}$ ifadesi $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun n. basmaktan türevini gösterir. Daha düşük basamaktan türevler eşitliğin sol yanında yer alır. (2) ile verilen n. mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemin bir özel çözümünü bulmak için bu denklem ile birlikte $u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$ başlangıç şartları verilmelidir. Ayrıca herhangi bir Volterra integro-diferansiyel denklem integral işaretinin dışında yer alan $u'(x), u''(x), \dots$ gibi türevleri ile de karakterize edilebilir.

Birinci türden standart bir Volterra integro-diferansiyel denklem

$$\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x K_2(x,t)\, u^{(n)}(t)dt = f(x) \;, \; K_2(x,t) \neq 0, \tag{25}$$

olarak ifade edilir (Linz, 1974; Linz, 1985). (25) ile verilen bir Volterra integro-diferansiyel denklem ikinci türden bir Voltrra integro-diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bunun için $n = 1$ alınarak (25) deki ikinci terime kısmi integrasyon uygulanarak ikinci türden bir integro-diferansiyel denklem elde edilir. Burada, bu konun fazla detaylarını vermek istemiyoruz.

Örnek 6. Aşağıdaki örnekte bir Volterra integro- diferansiyel denklem verilmektedir:

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \ \ u(0) = 0.$$

6.1.3. Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler

Benzer biçimde Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler Volterra-Fredholm integral denklemlerde olduğu gibi bağımlı değişkene ait bir ya da daha fazla türev ve integral operatörünü kapsar. Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemler aşağıdaki iki forma sahiptir:

$$u^{(n)}(x) = f\,(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt, \tag{26}$$

$$u^{(n)}\,(x,t) = f\,(x,t) + \lambda \int_a^t \int_\Omega F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi d\tau \tag{27}$$

Burada $(x,t) \in \Omega \times [0,\mathrm{T}]$, $f\,(x,t)$ ve $F(x,t,\xi,\tau,u(\xi,\tau))$ ise $D = \Omega \times [0,T]$ bölgesinde analitik fonksiyonlar, Ω ise $\Re^n$ nin , $n = 1, 2, 3$, kapalı bir alt cümlesidir (Wazwaz, 2011).

Örnek 7. Yukarıda söz konusu olan Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlere ait form için örnek aşağıda verilmektedir:

$$u'\,(x,t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}\,t^2 - \frac{1}{2}\,t - \int_0^t \int_0^1 \,(\tau - \xi)d\xi d\tau\,, \qquad u(0,t) = \,t^3.$$

6.1.4. Laplace dönüşüm metodu

Laplace dönüşüm metodu birinci ve ikinci türden Volterra integral denklemlerini çözmek için kullanılabilmektedir (Wazwaz, 2011). Bu metot ayrıca ikinci türden Volterra integro-diferansiyel denklemlerini çözmek için de kullanılabilmektedir (Wazwaz, 2011).

6.2. Birinci Türden Volterra Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

Aşağıda verilen birinci türden Volterra integro –diferansiyel denklemi (Linz, 1974; Linz, 1985) ele alalım:

$$\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \int_0^x K_2(x,t)\, u^{(n)}(t)dt = f\,(x),\; K_2(x,t) \neq 0 \qquad (28)$$

Burada başlangıç şartları verilecektir. Yapılacak inceleme (28) de farklı $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ çekirdeklerine sahip denklem için olacaktır. (28) denklemindeki her bir çekirdek $(x-t)$ farkına bağımlıdır. (28) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulandığında

$$\mathcal{L}(K_1(x-t) * u(x)) + \mathcal{L}(K_2\,(\,x-t) *\; u^{(n)}(x)) = \mathcal{L}(f(x))$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak da kolaylıkla

$$K_1(s)U(s\,) + K_2(s)\,(s^nU(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0) = F(s)$$

elde edilir. Burada

$$U(s) = \mathcal{L}\big(u(x)\big), K_1(s) = \mathcal{L}\big(K_1(x)\big), K_2(s) = \mathcal{L}\big(K_2(x)\big), F(s) = \mathcal{L}\big(f(x)\big)$$

olur. Verilen başlangıç şartları kullanıldığında ve $U(s)$ yalınız bırakıldığında

$$K_1(s) + s^nK_2(s) \neq 0$$

olmak kaydıyla

$$U(s\,) = \frac{F(s)+K_2(s)\,(s^{n-1}u(0)+s^{n-2}u'(0)+\ldots-u^{(n-1)}(0))}{K_1(s)+s^nK_2(s)} \qquad (29)$$

elde edilir. (29) eşitliğinin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alındığında, verilen Volterra integro-diferansiyel denklemin tam çözümü kolaylıkla elde edilir. Aşağıdaki örneklerde bu incelmenin açıklayıcı örnekleri verilmektedir.

<u>Örnek 8</u> (Wazwaz, 2011).

Aşağıda verilen birinci türden Volterra integro–diferansiyel denklemi çözünüz:

$$\int_0^x (x-t)u(t)\,dt + \int_0^x (x-t)^2u'(t)\,dt = 3x - 3\sin x, \qquad u(0) = 0.$$

Bu denklemin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alındığında

$$\frac{1}{s^2}\,U(s)+\frac{2}{s^3}\big(sU(s)-u(0)\big)=\frac{3}{s^2}-\frac{3}{1+s^2}$$

elde edilir. $u(0)=0$ başlangıç şartı kullanıldığında

$$U(s)=\frac{1}{1+s^2}$$

bulunur. Bu son ifadenin ters Laplace dönüşümü alındığında çözüm olarak

$$u(x)=\sin x$$

elde edilir.

Örnek 9 (Wazwaz, 2011). Laplace dönüşümünü kullanarak

$$u''=-1-x+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt,\qquad u(0)=1,\;\; u'(0)=1, \tag{30}$$

Volterra integro –diferansiyel denklemini çözünüz. Çekirdek olarak $K(x-t)=(x-t)$ olur. (30) denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alındığında

$$\mathcal{L}\big(u''(x)\big)=-\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(x)+\mathcal{L}\big((x-1)*u(x)\big)$$

ve

$$s^2U(s)-su(0)-u'(0)=-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}U(s) \tag{31}$$

elde edilir. $u(0)=1$ ve $u'(0)=1$ başlangıç şartlıları (31) bağıntısında kullanıldığında

$$U(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1} \tag{32}$$

bulunur. (32) eşitliğinin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alındığında, verilen Volterra integro –diferansiyel denkleminin

$$u(x)=\sin x+\cos x$$

çözümü elde edilir.

6.2.1. Diferansiyel denklemler ve çözücüler (Resolvents)

Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini ele alalım.

$$\dot{x}=Ax+f(t,x)$$

Burada $x \in R^n$, A ise $n \times n$ basamaktan elemanlı bir matris ve $t \in [0, \infty)$ olmak üzere f fonksiyonu bağlı bulunduğu değişkenlerin sürekli bir fonksiyonudur. Bu diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f\big(s, x(s)\big)ds$$

ile verilir. Bu ifade bir integral denklemdir. Benzer olarak, h uygun fonksiyon olmak üzere,

$$x(t) = \int_0^t C(t\,, s)x(s)ds + h(t, x(.))$$

integral denkleminin çözümü daha önceden verilen bilgiler ve çözücü (resolvent)yardımı ile

$$x(t) = h\big(t, x(.)\big) - \int_0^t R(t\,, u)h\big(u, x(.)\big)du$$

olarak ifade edilebilir. Bazı özel fonksiyoneller için bu çözüm sadeleştirilebilir (Miller, 1971). Halbuki integro-diferansiyel denklemlerin integral denklemler olarak ifade edilebileceği bilinmekte olup, integro-diferansiyel denklemlerin çözücülerinin (resolvents) doğrudan dikkate alınmasında bazı belirgin avantajlar vardır. Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım (Burton, 2005):

$$x'^{(t)} = f\ (t) + A(t)x(t) + \int_0^t B(t, s)x(s)ds\ , \qquad x(0) = x_0$$

Burada $f: [0, a] \to R^n$ sürekli bir fonksiyon , A, $n \times n$ basamaktan bir matris ve $[0, a]$ aralığında sürekli, B ise $n \times n$ basmaktan bir matris olup, $0 \leq s \leq t \leq a$ aralığında süreklidir. Bu denklemin bir $R(t, s)$ çözücüsü araştırılacaktır öyle ki bu çözücü $R_s = \frac{\partial R}{\partial s}$ olmak üzere bu çözücü $0 \leq s \leq t$ aralığında

$$R_s(t, s) = -R\ (t, s)A(s) - \int_s^t R(t, u)B(u, s)du\ , \ \ R(t, t) = I,$$

denklemini sağlar.

$R(t, s)$ çözücüsü verilsin. Bu durumda yukarıda verilen başlangıç değer probleminin çözümü parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla aşağıdaki formda edilir:

$$x(t) = R(t, 0)x_0 + \int_0^t R(t\,, s)f(s)ds\,.$$

$R(t,s)$ çözücüsünün var olduğu kabul edildiğinden, son eşitliğinin doğruluğu aşağıda gösterilmektedir. $x(t)$ yukarıda verilen integro-diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. Kısmi integrasyonun uygulanmasıyla $R(t\,,t) = I$ olmak üzere

$$\int_0^t [R(t\,,s)\, x'(\mathrm{s}) + R_s(t,s)x(s)]ds = \; R(t\,,t)x(t) - R(t\,,0)x_0$$

$$= x(t) - R(t\,,0)x_0$$

elde edilir.

Öte yandan, çift katlı integraldeki sıralar değiştirildiğinde

$$\int_0^t \int_0^s R(t\,,s)B(s,u)x(u)du\, ds = \int_0^t \int_u^t R(t\,,s)B(s,u)x(u)ds\, du$$

$$= \int_0^t \int_s^t R(t\,,u)B(u,s)x(s)du\, ds$$

eşitliği bulunur. O zaman

$$x(t) - R(t,0)x_0 - \int_0^t R(t\,,s)f(s)ds = \int_0^t [R(t\,,s)A(s) + R_s(t,s)$$

$$+ \int_s^t R(t\,,u)B(u,s)du]x(s)ds$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ yanı sıfır olduğundan,

$$x(t) = R(t,0)x_0 - \int_0^t R(t\,,s)[h\big(s,x(\cdot)\big) + f(s)]ds$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$x'(t) = f\,(t) + A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + h(t,x(.))\,, \quad x(0) = x_0$$

ile verilen başlangıç değer probleminin çözümü uygun bir *h* fonksiyoneli için

$$x(t) = R(t,0)x_0 + \int_0^t R(t,s)\big[h\big(s,x(.)\big) + f(s)\big]ds$$

olarak ifade edilebilir (Grossman ve Miller, 1970).

Tekrar olarak, yukarıda verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + \int_s^t B(t,u)y(u)du\,, \qquad 0 \le s \le t < \infty$$

integro diferansiyel denkleminin çözümünün terimlerine göre ifade edilebilir (Burton, 2005).

Teorem 4. Yukarıda verilen kabullere bağlı olarak

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + \int_s^t B(t,u)x(u)du, \qquad x(s) = x_0$$

başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümü $[s,\infty)$ aralığı üzerinde var ve tektir (Burton, 2005).

İspat. Yukarıda verilen integro-diferansiyel denklem

$$x(t) = x_0 + \int_s^t [A(v)x(v) + \int_s^v B(v,u)x(u)du]dv$$

$$= x_0 + \int_s^t [A(u) + \int_u^t B(v,u)dv]x(u)du$$

olarak yazılabilir. $T > s$ verilmek üzere ve $C(t,u)$ ise $n \times n$ basmaktan $s \leq u \leq t \leq T$ aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere, $|C|$ matris normu $sup_{\, s\leq u\leq t\leq T, |x|\leq 1}|C(t,u)x|$ olarak tanımlansın. Bir r sayısı bulunabilir öyle ki

$$\left|A(u) + \int_u^t B(v,u)dv\right| \leq r - 1, \quad s \leq u \leq t \leq T,$$

olur.

$(M, |\cdot|r)$ ise $\phi : [s,T] \to R^n, \phi(s) = x_0$, olarak tanımlı sürekli fonksiyonların bir tam metrik uzayı olsun. Ayrıca bu metrik

$$|\phi|_r := \sup_{s\leq t\leq T} |\phi(t)|e^{-rt}$$

ile tanımlansın. $\phi \in M$ olmak üzere $P : M \to M$ dönüşümü

$$(P\phi)(t) = x_0 + \int_s^t [A(u) + \int_u^t B(v,u)dv]\,\phi(u)du$$

ile tanımlansın. $P\phi$ dönüşümü sürekli olup, P nin bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. $\phi, \eta \in M$ olsun. Kolaylıkla

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)|e^{-rt} \leq \frac{r-1}{r}|\phi - \eta|r$$

elde edilir. Bu sonuç P dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğu ve bir daralma dönüşümü olduğunu ispatlar. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıda verilen integro diferansiyel denklemini sağlayan $Z(t,s)$ matrisi için $Z(s,s) = I$ olduğu var sayılmaktadır. $Z(t,s)$ matrisi aşağıda verilen başlangıç değer probleminin çözümü olur:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} Z(t,s) = A(t)Z(t,s) + \int_s^t B(t\,,u)Z(u,s)du, \; Z(s,s) = I$$

<u>Teorem 5.</u> Yukarıda verilen integro diferansiyel denklemde $h\big(t,x(.)\big) = 0$ ise, bu takdirde bu denklemin $x(0) = x_0$ is başlangıç koşulunu sağlayan çözümü, parametrelerin değişimi yöntemi ile

$$x(t) = Z(t,0)x_0 + \int_0^t Z(t,s)f(s)ds$$

olarak verilir.

<u>İspat.</u> $y : [0,T] \to R^n$ fonksiyonu $y(t) = \int_0^t Z(t,s)f(s)ds$ olarak tanımlansın. $y(t)$ nin türevi alındığında, verilen kabuller altında

$$\begin{aligned} y'(t) &= Z(t,t)f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} Z(t,s)f(s)ds \\ &= f(t) + A(t)y(t) + \int_0^t B(t\,,u) \int_0^u Z(u,s)f(s)ds\, du \\ &= A(t)y(t) + \int_0^t B(t\,,u)y(u)du + f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $y(t)$ ifadesi $0 \le \mathrm{t} \le T$ için

$$\frac{dx}{dt} = f\,(t) + A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + h(t,x(.))\,, \quad x(0) = x_0\,,$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olur. T keyfi olduğundan, bu fonksiyon her $t > s$ için bir çözüm olur. Ayrıca, $Z(t,0)x_0$ ise homojen denklemi sağlar ve $Z(t,0)x_0 + y(t)$ ifadesi homojen olmayan denklemin bir çözümü olur. Böylece bu teoremin ispatı tamamlanır.

Eğer verilen integro-diferansiyel denklemde integralin alt limiti τ olarak alınır ise, bu takdirde $x(\tau) = x_0$ olmak üzere söz konusu denklemin çözümü

$$x(t) = Z(t,\tau)x_0 + \int_\tau^t Z(t,s)f(s)ds$$

ile verilir.

6.3. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Karalılık Sonuçları

Aşağıdaki Volterra

$$x' = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{33}$$

integro-diferansiyel denklemi ele alalım. Burada $A(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde ve $C(t,s)$ çekirdeği ise $0 \le s \le t < \infty$ aralığında süreklidir(Burton 2005). $G(t,s)$ fonksiyonu sürekli ve $\partial G/\partial t = C(t,s)$ olsun. O zaman

$$Q(t) + G(t,t) = A(t)$$

olmak üzere

$$x' = Q(t)x + (d/dt)\int_0^t G(t,s)x(s)ds \tag{34}$$

yazılabilir. Belirtelim ki (33) ve (34) gerçekte aynı denklemlerdir.

<u>Teorem 6</u> (Burton, 2005). M_1 ve M_2 pozitif sabitler ve $0 \le t < \infty$ olmak üzere

$$\int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du \le M_1 < M_2 \le 2|A(t)|$$

olsun. O zaman (33) integro-diferansiyel denklemin sıfır çözümü karalıdır ancak ve ancak $A(t) < 0$ olur.

<u>İspat.</u> İlk olarak $A(t) < 0$ olsun. $x = 0$ çözümünün karalı olduğu gösterilecektir.

$$V_1\left(t, x(\cdot)\right) = x^2 + \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|du\, x^2(s)ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. Buna bağlı olarak da V_1 Lyapunov fonksiyonelinin (33) denklemi boyunca türevi alındığında

$$V_1'\left(t, x(\cdot)\right) \le 2A\, x^2 + 2\int_0^t |C(t,s)|\, |x(s)x(t)|ds$$

$$\leq 2Ax^2 + \int_0^t |C(t,s)|[\, x^2(s) + x^2(t)]ds$$

$$+ \int_t^\infty |C(u,t)|ds\, x^2 - \int_0^t |C(t,s)|\, x^2(s)ds$$

$$= [2A + \int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du]\, x^2$$

$$\leq [2A + \mathrm{M}_1\,]x^2$$

$$\leq [-\,\mathrm{M}_2\, +\, \mathrm{M}_1\,]x^2$$

$$= -\alpha x^2, \alpha > 0$$

bulunur.

V_1 Lyapunov fonksiyoneli pozitif tanımlı ve $V_1' \leq 0$ olduğundan, kolaylıkla $x = 0$ çözümünün karalı olduğu sonucuna varılır.

Şimdi ise $A(t) < 0$ kabulünün tersine $A(t) > 0$ olduğunu varsayalım. $\mathrm{M}_1 < \mathrm{M}_2 \leq 2|A(t)|$ kabulü $A(t) \neq 0$ olmasını gerektirir. Şimdi bu Kabul altında (33) Volterra integro-diferansiyel denklemin sıfır çözümünün kararlı olmadığı gösterilecektir.

$$\mathrm{V}_2\,\left(t, x(\,\cdot\,)\right) = x^2 - \int_0^t \int_t^\infty |C(u,s)|du\, x^2(s)ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin.

Bu durumda, (33) Lyapunov fonksiyonelinin (33) denklemi boyunca türevi alındığında, kolaylıkla

$$V_2'\big(t, x(\,\cdot\,)\big) \geq 2A(t)x^2 - 2\int_0^t |C(t,s)|\, |x(s)x(t)|ds$$

$$- \int_t^\infty |C(u,t)|du\, x^2 + \int_0^t |C(t,s)|\, x^2(s)ds$$

$$\geq 2A(t)x^2 - \int_0^t |C(t,s)|[\, x^2(t) + x^2(s)]ds$$

$$- \int_t^\infty |C(u,t)|du\, x^2 + \int_0^t |C(t,s)|\, x^2(s)ds$$

$$= [2A(t) - \int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du]\, x^2$$
$$\geq [2A(t) - \mathrm{M}_1\,]x^2$$
$$\geq [\,\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_1\,]x^2 = \alpha x^2, \alpha > 0\,.$$

elde edilir. Eğer, $x(t) = x(t, t_0, \phi)$ ifadesi (33) denkleminin bir çözümü ise

$$x^2(t) \geq \mathrm{V}_2\,\big(t, x(\cdot)\big) \geq \mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big) + \alpha \int_{t_0}^t x^2(s)ds$$

yazılabilir. $t_0 \geq 0$ ve $\delta > 0$ sayıları verilsin. $\phi : [0, t_0] \to \Re$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu ve $\mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big) > 0$ olsun. O zaman $x^2(t) \geq \mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big)$ olur. Buna bağlı olarak

$$x^2(t) \geq \mathrm{V}_2\,\big(t, x(\cdot)\big)$$
$$\geq \mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big) + \alpha \int_{t_0}^t \mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big)\, ds$$
$$= \mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big) + \alpha\, \mathrm{V}_2\,\big(t_0\,, \phi(\cdot)\big)(t - t_0),$$

olur. Böylece $t \to \infty$ için $|x(t)| \to \infty$ sonucuna varılır Bu sonuç ise teoemin ispatını tamamlar.

Teorem 7 (Burton, 2005). J, Q_1, Q_2 ve R, $R < 2$, sabitler ve $0 \leq t < \infty$ olmak üzere

$$0 < Q_1 \leq |Q(t)| \leq Q_2,$$

$$2|A| + \int_0^t |C(t,s)|ds + \int_t^\infty |C(u,t)|du \leq J$$

ve

$$\int_t^\infty |G(u,t)|du + \int_0^t |G(t,s)|ds \leq R\, Q_1 / Q_2$$

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca sürekli bir $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunun var olduğunu ve bu fonksiyon için

$$|G(t,s)| \leq h(t-s) \quad \text{ve} \quad u \to \infty \text{ için } h(u) \to 0$$

şartları sağlansın. Bu takdirde (34) integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlımolması için gerek ve yeter şart $Q(t) < 0$ olur.

İspat. İlk olarak $Q(t) < 0$ olduğunu var sayalım ve

$$V_3\left(t, x(\cdot)\right) = [x - \int_0^t G(t,s)\, x(s) ds]^2 + Q_2 \int_0^t \int_t^{\infty} |G(u,s)| du\, x^2(s) ds$$

Lyapunov fonksiyoneli tanımlansın. Bu fonksiyonelin pozitif tanımlı olduğu açıktır. Bu fonksiyonelin integro-diferansiyel denkleminin bir $x(t)$ çözümü boyunca türevleri alınıp, teoremin şartları kullanıldığında

$$\begin{aligned} V_3'\left(t, x(\cdot)\right) &\le 2Q(t)x^2 + Q_2 \textstyle\int_0^t |G(t,s)| [x^2(s) + x^2(t)] ds \\ &\quad + Q_2 \textstyle\int_t^{\infty} |G(u,t)| du\, x^2 - Q_2 \textstyle\int_0^t |G(t,s)|\, x^2(s) ds \\ &= [2Q(t) + Q_2 (\textstyle\int_0^t |G(t,s)| ds + \textstyle\int_t^{\infty} |G(u,t)| du\,)] x^2 \\ &\le [-2Q_1 + RQ_1] x^2 \\ &= -\beta x^2 \le 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç $Q(t) < 0$ olması durumunda (34) integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlı olduğunu gösterir.

Öte yandan (33) ve (34) integro-diferansiyel denklemlerinin aynı oldukları bilinmektedir. $V_1\left(t, x(\cdot)\right)$ Lyapunov fonksiyonelini tekrar ele alalım. Bu Lyapunov fonksiyonelinin (33) ve (34) integro-diferansiyel denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü boyunca türevleri aynıdır. Buna bağlı olarak da kolaylıkla

$$\begin{aligned} V_1'\left(t, x(\cdot)\right) &\le 2|A(t)|\, x^2 + \int_0^t |C(t,s)| [x^2(s) + x^2(t)] ds \\ &\quad + \int_t^{\infty} |C(u,t)| du\, x^2 - \int_0^t |C(t,s)|\, x^2(s) ds \\ &= [2|A(t)| + \int_0^t |C(t,s)| ds + \int_t^{\infty} |C(u,t)| du\,] x^2 \end{aligned}$$

$$\leq Jx^2.$$

elde edilir. Eğer

$$\mathrm{W}_1\ \big(t, x(\cdot)\big) = (\beta/2J)\ \mathrm{V}_1\ \big(t, x(\cdot)\big) + \mathrm{V}_3\ \big(t, x(\cdot)\big)$$

alınır ise, bu takdirde bu Lyapunov fonksiyonelinin (34) integro-diferansiyel denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü boyunca türevleri hesaplanır ise

$$W_1'\big(t, x(\cdot)\big) \leq (\beta/2)x^2 - \beta\, x^2 = -\beta\, x^2/2$$

elde edilir. W_1 Laypunov fonksiyoneli pozitif tanımlı olduğundan $x = 0$ çözümünün karalı olduğu sonucuna varılır. Şimdi $Q > 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\mathrm{V}_4\ \big(t, x(\cdot)\big) = (x - \int_0^t G(t,s)\, x(s)ds)^2 - Q_2 \int_0^t \int_t^\infty |G(u,s)|du\, x^2(s)ds$$

Lyapunov fonksiyoneli tanımlansın. Bu Lyapunov fonksiyonelinin (34) integro-diferansiyel denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü boyunca türevleri hesaplanır ve teoremin şartları dikkate alınır ise

$$V_4'\big(t, x(\cdot)\big) = 2\left(x - \int_0^t G(t,s)\, x(s)ds\right) Q(t)x$$

$$+Q_2 \int_0^t |G(t,s)|\, x^2(s)ds - Q_2 \int_t^\infty |G(u,t)|du\, x^2$$

$$\geq 2Q(t)x^2 + Q_2 \int_0^t |G(t,s)|[\, x^2(s) + x^2(t)]ds$$

$$+Q_2 \int_0^t |G(t,s)|\, x^2(s)ds \ - Q_2 \int_t^\infty |G(u,t)|du\, x^2$$

$$= [2Q(t) - Q_2(\int_0^t |G(t,s)|ds + \int_t^\infty |G(u,t)|du\,)]x^2$$

$$\geq [2Q(t) - RQ_1]x^2$$

$$\geq [2\, Q_1 - RQ_1]x^2$$

$$= \gamma x^2, \gamma > 0$$

elde edilir.

Şimdi, çelişki olarak, $x = 0$ çözümünün kararlı olduğunu kabul edelim. Çözüm kararlı olduğundan, karalılık tanımından, $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \geq 0$ olmak üzere, $\exists\, \delta > 0$ sayısı var öyle ki $\phi : [0, t_0] \to R$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu $\forall\, t \in [0, t_0]$ için $|\phi(\mathrm{t})| < \delta$ olmak üzere $\forall\ t \geq t_0$ için $|\, x(t, t_0, \phi)| < \varepsilon$ olur. Bu t_0 ve δ sayılar için bir başlangıç fonksiyonu bulunabilir öyle ki

$$\mathrm{V}_4\,\left(t_0\,, \phi(\cdot)\right) > 0$$

olur.

$$x(t) = x(t, t_0, \phi)$$

olsun. $\int_0^t |G(t,s)| ds$ ve $x(t)$ sınırlı olduğundan, $\int_0^t G(t,s)x(s)ds$ de sınırlı olur. Eğer $x^2(t) \notin L^1[0, \infty)$ ise, bu takdirde $x(t)$ sınırsız olur. Buna bağlı olarak da

$$[x(t) - \int_0^t G(t,s)\, x(s) ds]^2 \geq \mathrm{V}_4\,\left(t, x(\cdot)\right) \geq \mathrm{V}_4\,\left(t_0\,, \phi(\cdot)\right) + \gamma \int_{t_0}^t x^2(s)\, ds$$

yazılabilir. Bu nedenle $x^2(t) \in L^1[0, \infty)$ olduğu kabul edilebilir. Ayrıca Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$(\int_0^t |G(t,s)||x(s)|\, ds)^2 = (\int_0^t |G(t,s)|^{1/2} |G(t,s)|^{1/2} |x(s)|\, ds)^2$$

$$\leq \int_0^t |G(t,s)|\, ds \int_0^t |G(t,s)|\, x^2(s)\ ds$$

elde edilir. İlave olarak da $|G(t,s)| \leq h(t-s)$ ve $u \to \infty$ için $h(u) \to 0$ olması nedeni ile

$$\int_0^t |G(t,s)|\, x^2(s)\ ds \leq \int_0^t h(t-s)\, x^2(s)\, ds$$

olup, bu integral sıfıra yakınsar.

Yukarıda verilen eşitsizlik göz önüne alındığında

$$\left| x - \int_0^t C(t,s)\, x(s) ds \right| \geq [\, \mathrm{V}_4\,\left(t_0\,, \phi(\cdot)\right)]^{\ 1/2}$$

yazılabilir. Yukarıda verilen integral sıfıra yakınsadığından, yeterince büyük t ler ve bir $\alpha > 0$ sayısı için $|x(t)| \geq \alpha$ yazılabişlir. Bu durum çözümün kararlı oluşu ve $x^2(t) \in L^1[0, \infty)$ kabullerine bir çelişkidir. Böylece verilen teoremin ispatı tamamlanır.

7. TEKİL İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE L^p-ÇÖZÜMLER

Burton ve Purnaras (2012) tekil çekirdekli lineer, lineer olmayan ve çözücü denklemleri içeren bazı skaler-integro-diferansiyel denklemleri göz önüne aldı. Bu araştırmacılar, bu denklemlerin L^p-çözümleri hakkında bazı sonuçlar elde ettiler. Bu bölümde, Burton ve Purnaras'ın (2012) tarafından ispat edien sadece birkaç sonuç verilecektir. Burton ve Purnaras (2012) lineer olmayan

$$x' = f(t) - h\big(t, x(t)\big) - \int_0^t C(t,s)q\big(s, x(s)\big)ds \quad (35)$$

integro diferansiyel-denklemini ele aldı. Burada, (35) integro-diferansiyel denklemi için aşağıdaki şartların sağlandığı var sayılmaktadır:

$$p \in [1,\infty),\ f \in L^p[0,\infty),\ xh(t,x) \geq 0,\ xq(t,x) \geq 0. \quad (36)$$

Ayrıca, C çekirdeği $t = s$ de bir tekil noktaya sahip olup, ilave olarak aşağıda verilen şartları sağlar. Gerçekte C koveks bir çekirdek ve $\epsilon > 0$ sayısı var öyle ki $0 \leq s \leq t - \epsilon$ için ve

$$C(t,s) \geq 0, C_2(t,s) \geq 0\,, C_{2\,,1}(t,s) \leq 0,\ \ C_1\,(t,0) \leq 0, \quad (37)$$

olur. Burada $C_1\,(\,t,s) = \,C_t\,(t,s) = \frac{\partial C(t,s)}{\partial t}, C_2(t,s) = C_s(t,s) = \frac{\partial C(t,s)}{\partial s}$ ve $C_{2,1}(t,s) = C_{st}(t,s) = \frac{\partial^2 C}{\partial s\,\partial t}$olur. Ayrıca (35) integro-diferansiyel denklemi için $f : [0,\infty) \to R^n$ sürekli bir fonksiyon, $h, q : [0,\infty) \times R^n \to R^n$ fonksiyonlarının her ikisinin de sürekli ve Lipschitz şartını sağladığı kabul edilmektedir.

7.1. Bazı Niteliksel Özellikler

Şimdi, Burton ve Purnaras (2012) tarafından (35) integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin varlığına ait aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 8 (Burton ve Purnaras, 2012). Yukarıda verilen süreklilik şartlarına ilaveten, $\mathrm{C}(\mathrm{t}, \mathrm{s})$, Ω bölgesi üzerinde zayıf tekil bir çekirdek olsun. Ayrıca her bir $T > 0$ sayısı ve $k \in (0,1)$ için bir $\gamma_1 > 0$ sayısı var olsun öyle ki $\forall\ \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]$ için $\int_0^1 e^{-\gamma_1 (t-s)} |C(t,s)| ds \leq k$

olsun. Bu takdirde $\forall\, x_0 \in R^n$ için (35) integro diferansiyel denklemi bir tek $x(t)$ çözüme sahip, bu çözüm türevlenebilir ve $x(0) = x_0$ olur.

İspat. $T > 0$ olsun ve $x_0 \in R^n$ verilsin. Ayrıca, $(Y , \|\cdot\|)$ ise $\phi : [0, T] \to R^n$ şeklinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Burada supremum norm kullanılmaktadır. $\phi \in Y$ olmak üzere $P : Y \to Y$ tanımlansın öyle ki

$$(P\phi)(t) = f(t) - h(t, x_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \phi\,(s) ds) - \int_0^{\mathrm{t}} C(t,s) q(\, s, x_0 + \int_0^{\mathrm{s}} \phi\,(u) du) \mathrm{ds}$$

olsun. O zaman süreklilik şartları ve zayıf tekillikten dolayı $P\phi \in Y$ olur. γ_1 sayısının varlığı herhangi bir $\gamma > \gamma_1$ varlığını gerektirir ve $\int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |C(t,s)| ds \leq k$ olur. $\phi \in Y$ olmak üzere ağırlıklı $\|\cdot\|_T$ normu $\gamma \geq \gamma_1$

için

$$\|\, \phi \,\|_T \ = \sup_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} e^{-\gamma t}\ |\phi(t)|$$

ile tanımlansın. O zaman $(Y , \|\cdot\|_T)$ bir Banach uzayı olur. Eğer $\phi, \eta \in Y$ bu takdirde

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| e^{-\gamma t} \ \leq e^{-\gamma t} [\Big| h(t, x_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \phi\,(s)\, ds\,) - h(t, x_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \eta(s)) ds\ \Big|$$

$$+ \int_0^{\mathrm{t}} |C(t,s)| \big| q(\, s, x_0 + \int_0^{\mathrm{s}} \phi(u)\, du) - q(\, s, x_0 + \int_0^{\mathrm{s}} \eta\,(u)\, du) \big| \mathrm{ds}]$$

$$\leq e^{-\gamma t} K\ \int_0^{\mathrm{t}} |\phi\,(s) - \eta(s)| ds + e^{-\gamma t} K \int_0^t |C(t,s)| \int_0^{\mathrm{s}} |\phi\,(u) - \eta(u)| du ds$$

$$= K \int_0^1 e^{-\gamma(t-s)} e^{-\gamma S} |\phi\,(s) - \eta(s)| ds$$

$$+ k \int_0^t |C(t,s)|\ e^{-\gamma(t-s)}\ \ e^{-\gamma S} \int_0^{\mathrm{s}} |\phi(u) - \eta(u)| du ds$$

elde edilir. Buradaki son iki terim

$$K \int_0^t |C(t,s)| e^{-\gamma(t-s)}\, e^{-\gamma s} \int_0^{\mathrm{s}} |\phi(u) - \eta(u)| du\, ds$$

$$\leq K \int_0^t |C(t,s)| e^{-\gamma(t-s)}\ \ \int_0^{\mathrm{s}} e^{-\gamma(s-u)}\ \ e^{-\gamma u} |\phi(u) - \eta(u)| du\, ds$$

$$\leq K \|\phi\ - \eta\ \|_T\ \int_0^t\ T\ |C(t,s)| e^{-\gamma(t-s\,)}\ ds$$

$$= \|\phi - \eta\|_T KT \int_0^t |C(t,s)| e^{-\gamma(t-s)}\, ds$$
$$\leq \|\phi - \eta\|_T KTk$$

eşitsizliğini verir. Bu takdirde

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| e^{-\gamma t} \leq K\|\phi - \eta\|_T \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\, ds + \|\phi - \eta\|_T KTk$$
$$\leq \|\phi - \eta\|_T \left[K \left. \frac{e^{-\gamma(t-s)}}{\gamma} \right|_0^t + KTk \right]$$
$$\leq \|\phi - \eta\|_T [(K/\gamma) + KTk].$$

k sayısı yeterince küçük ve γ yeterince büyük bir sayı olmak üzere $(K/\gamma) + KTk \leq 1/2$ alınabilir. Böylece, bir daralama dönüşümüne ve tek $\phi \in Y$ ye sahip oluruz öyle ki $P\phi = \phi$ olur Açıkça, $[x_0 + \int_0^t \phi(s) ds]' = \phi(\mathrm{t})$ dır. Bu bir tek ve sürekli fonksiyonu $x(t) = x_0 + \int_0^t \phi(s)] ds$ denkleminin türevi olup, (35) integro-diferansiyel denkleminin bir çözümü olur. Böylece mevcut teorem ispatlanmış olur.

<u>Lemma 3</u> (Burton ve Purnaras, 2012). $C(t,s)$, Ω cümlesi üzerinde zayıf bir tek çekirdek ve $\mathrm{T} > 0$ sayısı verilsin. Ayrıca, herhangi bir $k \in (0,1)$ sayısı için bir $\epsilon = \epsilon(k,T) > 0$ sayısı var olsun öyle ki $\forall\, t \in [0,T]$ için

$$\int_{t-\epsilon}^t |C(t,s)|\, ds \leq k$$

olsun. Burada $C(t,s) = 0, (t,s) \in R^2 - \Omega$ dır. Bu takdirde bir $\gamma_{k,T} > 0$ sayısı var öyle ki herhangi bir $\gamma \geq \gamma_{k,T}$ sayısı var ve $\forall\, t \in [0,T]$ için

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |C(t,s)|\, ds \leq k$$

olur.

Burton ve Purnaras (2012) ayrıca aşağıdaki teoremleri ispatladı.

Teorem 9 (Burton ve Purnaras, 2012). x, (35) integro-diferansiyel denkleminin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümü ve (36) ve (37) şartları sağlansın. Ayrıca $\epsilon > 0$ olmak üzere aşağıda verilen $V(\mathrm{t}\,,\epsilon\,)$ Lyapunov fonksiyoneli her $t \geq \epsilon$ için tanımlı ve

$$V(t,\epsilon) = \; 2\int_0^{x(t)} q(t,s)ds + \int_0^{t-\epsilon} C_2(t,s)\left(\int_s^t q(u,x(u)du\right)^2 ds$$

$$+C(t,0)(\int_0^t q(u,x(u)du)^2$$

ile verilir ise, bu takdirde

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt} \leq 2\int_0^{x(t)} q_t(t,s)ds + 2q\left(t,x(t)\right)$$

$$\times\left[\,f(t) - h\big(t,x(t)\big) + C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t q(u,x(u)du - \int_{t-\epsilon}^t C(t,s)q(s,x(s)ds\,\right]$$

$$+C_2(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^t q(u,x(u))du\right)^2$$

olur.

İspat. x, (35) integro-diferansiyel denkleminin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümü olsun. Teorem 11'in şartlarından, $0 \leq s \leq t-\epsilon$ olmak üzere $\forall\, t \geq \epsilon$ için $C_1\,(t,0) \leq 0$ ve $C_{2,1}\,(t,s) \leq 0$ olduğu bilinmektedir. Leibntiz türev alama kuralı ve zincir kuralı kullanıldığında, verilen $V(\mathrm{t}\,,\epsilon)$ Lyapunov fonksiyonelin (35) denkleminin çözümleri boyunca türevi alınıp, teoremin şartları kullanıldığında,

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt} \leq 2\int_0^{x(t)} q_t(t,s)ds + C_2(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^t q(u,x(u)du\right)^2$$

$$+2q(t,x(t)\left[\;f(t) - h\big(t,x(t)\big) - \int_0^t C(t,s)\;q(s,x(s)ds\right]$$

$$+2q(t,x(t))\int_0^{t-\epsilon} C_2(t,s)\int_s^t q\big(u,x(u)\big)du\;ds$$

$$+2q\big(t,x(t)\big)C(t,0)\int_0^t q\big(u,x(u)\big)du.$$

bulunur. Son eşitsizliğin son iki terimine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$2q\big(t,x(t)\big)\int_0^{t-\epsilon} C_2(t,s)\int_s^t q\big(u,x(u)\big)du\,ds$$

$$= 2q\big(t,x(t)\big)\Big[C(t,s)\int_s^t q(u,x(u)du \ \Big|_0^{t-\epsilon} + \int_0^{t-\epsilon} C(t,s)q\big(s,x(s)\big)ds\Big]$$

$$= 2q\big(t,x(t)\big)[C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t q(u,x(u)du - C(t,0)\int_0^t q\big(u,x(u)\big)du$$

$$+\int_0^{t-\epsilon} C(t,s)q\big(s,x(s)\big)ds]$$

olur. Buna bağlı olarak da

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt} \leq 2\int_0^{x(t)} q_t(t,s)ds + 2q(t,x(t)\left[f(t) - h\big(t,x(t)\big) - \int_0^t C(t,s)q(s,x(s)ds\right]$$

$$+C_2(t,t-\epsilon)(\int_{t-\epsilon}^t q(u,x(u))du)^2$$

$$+2q(t,x(t)\left[C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t q\big(u,x(u)\big)du + \int_0^{t-\epsilon} C(t,s)\ q(s,x(s)ds\right]$$

yazılabilir. Buradaki son integral

$$\int_0^{t-\epsilon} C(t,s)q(s,x(s))ds = \int_0^t C(t,s)q\big(s,x(s)\big)ds - \int_{t-\epsilon}^t C(t,s)q(s,x(s))ds$$

ifade edilirse,

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt} \leq 2\int_0^{x(t)} q_t(t,s)ds + C_2(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^t q(u,x(u)du\right)^2$$

$$+2q(t,x(t)\left[C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t q\big(u,x(u)\big)du - \int_{t-\epsilon}^t C(t,s)\ q(s,x(s)ds\right]$$

$$+2q(t,x(t)\left[\ f(t) - h\big(t,x(t)\big)\right]$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik, teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 10 (Burton ve Purnaras, 2012). x (35) ile verilen integro-diferansiyel denklemin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümü , $p \in [1,\infty)$, $f \in L^p[0,\infty)$, $xh(t,x) \geq 0$, $xq(t,x) \geq 0$, $|h(t,x)| \geq \gamma|q(t,x)|$, $0 \leq t < \infty, x \in R$ ve

$$C(t,t-\epsilon)\epsilon + \int_{t-\epsilon}^{t} |C(t,s)|ds \ < \beta$$

olsun. Ayrıca, aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

$xq_t(t,x) \leq 0$, $t \in [0,\infty)$, $x \in R$, $\left|\int_0^{\pm\infty} q_t(t,s)ds\right| < \infty$, $t \in [0,\infty)$, ve

$$Q(t) = \max\left\{\left|\int_0^{\pm\infty} q_t(t,s)ds\right|\right\}, t \in [0,\infty).$$

Bu takdirde $Q \in L^1(0,\infty)$ olur. İlave olarak eğer $f \in L^2[0,\infty)$ ise bu takdirde $q(t,x(t)) \in L^2[0,\infty)$ ve $q(t,x(t)) - f(t) \in L^2[0,\infty)$ olur.

İspat. Teorem 9'de verilen V fonksiyonu ve bu fonksiyonun $\frac{dV(t,\epsilon)}{dt}$ türevini ele alalım. Schwarz eşitsizliği kullanıldığında

$$C_2(t,t-\epsilon)\ \left(\int_{t-\epsilon}^{t}\ q(u,x(u)du\right)^2 \leq \epsilon\, C_2(t,t-\epsilon)\ \int_{t-\epsilon}^{t} q^2(u,x(u))du$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\left|2q(t,x(t))C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t} q(u,x(u)du\right| \leq C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t}[q^2(t,x(t)) +\ q^2(u,x(u))]du$$

ve

$$\left|2q(t,x(t))\int_{t-\epsilon}^{t}\ C(t,s)q(s,x(s)ds\right| \leq \int_{t-\epsilon}^{t} |C(t,s)|\,[q^2(t,x(t)) + q^2(s,x(s))]ds$$

elde edilebilir. Bu üç eşitsizlik $\frac{dV(t,\epsilon)}{dt}$ türevinde kullanıldığında

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt} \leq 2Q(t) + \epsilon\, C_2(t,t-\epsilon)(\int_{t-\epsilon}^{t} q^2(u,x(u))du) - C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t}[q^2(t,x(t))$$

$$+q^2(s,x(s))]ds + \int_{t-\epsilon}^{t}\ |C(t,s)|\,[q^2(t,x(t)) + q^2(s,x(s))]d\,s$$

$+\frac{1}{\gamma}f^2(t)-\gamma q^2\big(t,x(t)\big)$

$= 2Q(t\,)q^2\big(t,x(t)\big)\ \int_{t-\epsilon}^{t}[C(t,t-\epsilon)\ |C(t,s)|\,]\,ds$

$+\int_{t-\epsilon}^{t}\ [\epsilon\, C_2(t,t-\epsilon)+\ \ C(t,t-\epsilon)+\ |C(t,s)|\,]\ q^2\big(s,x(s)\big)ds$

$+\frac{1}{\gamma}f^2(t)-\ \gamma q^2\big(t,x(t)\big)$

elde edilir. Yani,

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt}\leq 2Q(t\,)+q^2\big(t,x(t)\big)\beta+\frac{1}{\gamma}f^2(t)-\gamma q^2\big(t,x(t)\big)$$
$$+\int_{t-\epsilon}^{t}[\epsilon\, C_2(t,t-\epsilon)+\ \ C(t,t-\epsilon)+|C(t,s)|]q^2\big(s,x(s)\big)ds$$

olur. Bu son eşitsizliğin ϵ dan t ye integrali alındığında

$$V(t,\epsilon)-V(\epsilon,\epsilon)\leq 2\int_{\epsilon}^{t}Q(s\,)\,ds+\frac{1}{\gamma}\int_{\epsilon}^{t}f^2(s\,)ds\ -[\gamma-\beta]\int_{\epsilon}^{t}\ q^2(s,x(s)ds$$
$$+\int_{0}^{t}\alpha\, q^2(s,x(s)ds$$
$$=2\int_{\epsilon}^{t}Q(s)\,ds+\frac{1}{\gamma}\int_{\epsilon}^{t}f^2(s\,)ds\ \ -[\gamma-\beta-\alpha]\int_{\epsilon}^{t}q^2(s,x(s)ds$$
$$+\alpha\int_{0}^{\epsilon}q^2(s,x(s))ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da

$$V(t,\epsilon)+[\gamma-\beta-\alpha]\int_{\epsilon}^{t}q^2(s,x(s)ds\ \leq V(\epsilon,\epsilon)2\int_{\epsilon}^{t}Q(s\,)\,ds$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{\epsilon}^{t}f^2(s\,)ds+\alpha\int_{0}^{\epsilon}q^2(s,x(s)ds$$

yazılabilir. x fonksiyonu sürekli ve ϵ pozitif bir sayı olduğundan, $x(\epsilon)$ da sonlu olur ve $q(t,s)$w sürekli olduğundan $\int_0^{x(\epsilon)}q(\epsilon,s)ds<\infty$ olduğu görülür. Bu nedenle

$$V(\epsilon,\epsilon)=2\int_{0}^{x(\epsilon)}\ q(\epsilon,s)ds+C(\epsilon,0)\left(\int_{0}^{\epsilon}\ q(u,x(u)du\right)^2\ <\infty$$

olur. Buna bağlı olarak, herhangi bir $t \geq \epsilon$ için

$$\int_{\epsilon}^{t} q^2(s, x(s)ds \;\; \leq \frac{1}{\gamma - \beta - \alpha}[V(\epsilon,\epsilon) + 2\int_{\epsilon}^{t} Q(s\,)\,ds$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_{0}^{\infty} f^2(s\,)ds + \alpha\int_{0}^{\epsilon} q^2(s, x(s)ds],$$

elde edilir. Bu sonuç verilen teoremin ispatını tamamlar.

7.2. Tekil Olmayan Bir İntegro-Diferansiyel Denkleminin Çözümlerinin Sınırlı Olması

Burton ve Purnaras (2012) $f \in L^1\,[0,\infty)$ olmak üzere tekil olmayan

$$\acute{x}(t) = f(t) - \int_{0}^{t} C(t,s)\, x(s)\, ds$$

integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin sınırlı olması ile ilgili, $x \in L^{\infty}$ için aşağıdaki teoremi ispatladı.

<u>Teorem 11</u> (Burton and Purnaras, 2012). Aşağıda verilen

$$x'(\mathrm{t}) = f(t) - \int_0^t C(t,s)x(s)ds$$

integro-diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemin tekil olmayan C çekirdeği

$$C(t,s) \geq 0, C_2(t,s) \geq 0\,, C_{2\,,1}(t,s) \leq 0,\;\; C_1\,(t,0) \leq 0,\;\; \{(s,t) : 0 \leq s \leq t\}$$

ve $f \in L^1[0,\infty)$ şartlarını sağlar ise, bu takdirde $x \in L^{\infty}[0\,,\infty)$ olur.

<u>İspat.</u> Aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu verilsin:

$$V(t) = x^2(t) + \int_0^t C_2(t,s)\left(\int_{s}^{t} (x(u)du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_0^t (x(s)ds\right)^2, t \geq 0$$

V Lyapunov fonksiyonun pozitif tanımlı olduğu kolaylıkla görülebilir. V Lyapunov fonksiyonun verilen denklemin çözümleri Leibnitz kuralı kullanılarak türevi alınıp, kısmi integal uygulandığında

$$V'(\mathrm{t}) = 2x(t)f(t) + \int_0^t C_{2,1}(t,s)\left(\int_s^t (x(u)du\right)^2 ds + C_1(t,0)\left(\int_0^t (x(s)ds\right)^2$$

$$\leq 2x(t)f(t) \leq 2\sqrt{V(t)}\,|f(t)|$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da

$$V^{-1/2}(t)\,V'(\mathrm{t}) \ \leq 2|f(t)|$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alındığında

$$2|x(t)| \leq 2\,V^{1/2}(t) \leq 2\,V^{1/2}(0) + 2\int_0^t |f(s)|\,ds$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak da

$$2\int_0^\infty |f(s)|\,ds < \infty \ \text{ ve } \ V^{1/2}(0).$$

Pozitif bir sabit olması nedeniyle $x \in L^\infty[0,\infty)$ sonucuna varılır. Bu sonuç ise ifade edilen teoremin ispatını tamamlar.

8. KÜÇÜK ÇEKİRDEKLİ TEKİL İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI SONUÇLAR

Burton ve Purnaras (2013), aşağıda verilen küçük çekirdekli

$$x'(\mathrm{t}) = f(t) - h\big(t, x(t)\big) - \int_0^t C(t,s) q\big(s, x(s)\big) ds \qquad (38)$$

tekil integro-diferansiyel denklemini lineer durumda resolventi ile beraber ele aldı. (38) tekil integro-diferansiyel denkleminde verilen $f : [0,\infty) \to R^n$ fonksiyonu sürekli, $h, q : [0,\infty) \times \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ fonksiyonlarının ise hem sürekli ve hem de Lipschitz şartını sağladığı kabul edilmektedir. Ayrıca, aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$$f \in L^p[0,\infty), p \in [1,\infty) \qquad (39)$$

$$xh(t,x) \geq 0, xq(t,x) \geq 0 \qquad (40)$$

C çekirdeği ise $t = s$ de tekil olup, Tanım 8 deki koşulları sağlar.

Bu bölümde, Burton ve Purnaras (2013) ait sadece iki sonuç verilecektir. Diğer sonuçlar ise verilmeyecektir.

8.1. (38) Tekil İntegro-Diferansiyel Denklemi İçin Bazı Niteliksel Sonuçlar

Teorem 12 (Burton ve Purnaras, 2013). $p \in [1,\infty)$ ve $f \in L^p[0,\infty)$, ($p = 1$, dahil) olmak üzere bir $\gamma > 0$ sayısı var öyle ki $\forall\, t, x \in [\,0,\infty) \times \mathrm{R}$ için $|h(t,x)| \geq \gamma |q(t,x)|$ olsun. Ayrıca, bir $\beta > 0$ sayısı var öyle ki her bir $\epsilon > 0$ için

$$\int_\epsilon^\infty |C(u+t,t)| du \leq \beta, \quad \forall\, t \geq 0 ,\forall\;\; \gamma - \beta = \mu > \;0\,.$$

olduğunu varsayalım. İlave olarak, $\eta < \mu$ ve $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_s^t |C(\,u+\epsilon, s) - C(u,s)| du \leq \eta,\; \forall\, 0 \leq s \leq t < \infty,$$

olsun. Bu takdirde (38) tekil integro-diferansiyel denkleminin herhangi bir $x(t)$ çözümü için $[\,0,\infty)$ aralığında $q(.\,, x(.) \in L^1[0,\infty)$ olur.

<u>İspat.</u> $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$V(t,\epsilon) = |x(t)| + \int_0^t \left[\int_{t-s+\epsilon}^{\infty} |C(u+s,s)|du\right] \left|q\big(s,x(s)\big)\right|ds, \quad t \geq 0,$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin.

$$-|C(t+\epsilon,s)| \leq -|C(t,s)| + |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)|$$

olduğundan, $V(t,\epsilon)$ Lyapunov fonksiyonelinin türevi ve Teorem 14'ün şartları yardımı ile

$$\begin{aligned} V'(t,\epsilon) &\leq |f(t)| - \gamma\left|q\big(t,x(t)\big)\right| + \int_0^t \left|C(t,s)q\big(s,x(s)\big)\right|ds \\ &\quad +\beta\left|q\big(t,x(t)\big)\right| - \int_0^t \left|C(t,s)q\big(s,x(s)\big)\right|ds \\ &\quad + \int_0^t |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)| \left|q\big(s,x(s)\big)\right|ds \\ &= |f(t)| - \mu\left|q\big(t,x(t)\big)\right| + \int_0^t |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)| \left|q\big(s,x(s)\big)\right|ds \end{aligned}$$

elde edilir. Buna ek olarak

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^t \int_0^u |C(u+\epsilon,s) - C(u,s)| \left|q\big(s,x(s)\big)\right| ds\, du \\ &\leq \int_0^t \int_s^t |C(u+\epsilon,s) - C(u,s)|du\left|q\big(s,x(s)\big)\right| ds \\ &\leq \int_0^t \eta\left|q\big(s,x(s)\big)\right|ds \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler dikkate alındığında, V' türevinin integrali alınır ise, verilen şartlara bağlı olarak

$$V(t,\epsilon) \leq V(\epsilon,\epsilon) + \int_0^t |f(u)|du - (\mu - \eta)\int_\epsilon^t \left|q\big(s,x(s)\big)\right|ds + \eta\int_0^\epsilon \left|q\big(s,x(s)\big)\right|ds.$$

Böylece Teorem 12'ün ispatı tamamlanır.

<u>Teorem 13</u> (Burton ve Purnaras, 2013). $q(t,x)$ fonksiyonu t den bağımsız ve $q(t,x) = g(x)$ olsun. Ayrıca, aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

$$\delta > 0, |h(t,x)| \geq \delta|g(x)|, \forall(t,x) \in [\,0,\infty) \times \mathbb{R}; \tag{41}$$

$p \in [1,\infty), f \in L^p[0,\infty),$ p çift tamsayı, α, β pozitif sayılar olmak üzere

$$\beta + (p-1)\alpha < p\delta;$$

her $\epsilon > 0$ ve her $t \geq 0$ için

$$\int_{\epsilon}^{\infty}|C(u+t,t)|du \leq \beta$$

dir. Bu takdirde

$$\int_{0}^{t} \ |C(t,s)|ds \ \leq \alpha$$

olur. Ayrıca, $\mu > 0$,

$$\mu \in (0, p\delta - \beta - (p-1)\alpha) \tag{42}$$

ve yeterince küçük $\epsilon > 0$ sayıları için

$$sup_{s\in[0,\infty)} \int_{s}^{\infty}|C(u+\epsilon,s) - C(u,s)|du < \ \mu \tag{43}$$

olsun. Eğer $f \in L^p[0,\infty)$ ve x fonksiyonu (38) denkleminin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümü ise bu takdirde $g\big(x(.)\big) \in L^p[0,\infty)$ olur.

<u>İspat.</u> $\epsilon > 0$ ve $sup_{s\in[0,\infty)} \int_{s}^{\infty}|C(u+\epsilon,s) - C(u,s)|du < \ \mu$ olsun.

$$V(t,\epsilon) = p\int_{0}^{x(t)} g^{p-1}(s)ds + \int_{0}^{t}\left[\int_{t-s+\epsilon}^{\infty}|C(u+s,s)|du\right]g^p\big(x(s)\big)\,ds$$

$u \geq t-s \geq \epsilon$, Lyapunov fonksiyoneli tanımlansın. $xg(x) \ \geq 0$ ve p bir çift tamsayı olması nedeni ile

$$\int_{0}^{x(t)} g^{p-1}(s)ds \geq 0$$

ve

$$0 \leq V(t\,,\epsilon), \quad \forall\, t \geq 0, \qquad \forall \ \epsilon > 0$$

olur.

$$-|C(t+\epsilon,s)| \leq -|C(t,s)| + |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)|$$

eşitsizliği kullanıldığında,

$$V'(t,\epsilon) = pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) + \int_{\epsilon}^{\infty}\big|C(u+t,t)dug^p\big(x(t)\big)\big| - \int_{0}^{t}|C(t+\epsilon,s)|\,g^p\big(x(s)\big)\,ds$$

$$\leq pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) + g^p\big(x(t)\big)\int_{\epsilon}^{\infty}|C(u+t,t)|du \ - \int_{0}^{t}|C(t,s)|\,g^p\big(x(t)\big)ds$$

$$+\int_{0}^{t}|C(t+\epsilon,s) - C(t,s)|g^p\big(x(t)\big)ds$$

elde edilir.

$$\int_{\epsilon}^{\infty} |C(u+t,t)|du \leq \beta$$

eşitsizliği dikkate alındığında

$$V'(t,\epsilon) \leq pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) + \beta g^{p}\big(x(t)\big) \; - \int_0^t |C(t,s)|\, g^{p}\big(x(s)\big)ds$$
$$+ \int_0^t |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)| g^{p}\big(x(s)\big)ds \qquad (44)$$

yazılabilir. x fonksiyonu (38) denkleminin bir çözümü olduğunda

$$H = pg^{p-1}\big(x(t)\big)\left[f(t) - x'(t) - h\big(t,x(t)\big) - \int_0^t C(t,s)\, g\big(x(s)\big)ds\right] = 0$$

ve

$$H = pg^{p-1}\big(x(t)\big)f(t) - pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) - pg^{p-1}\big(x(t)\big)h\big(t,x(t)\big)$$
$$-pg^{p-1}\big(x(t)\big)\int_0^t C(t,s)\, g\big(x(s)\big)ds$$

olur. (40) ve (41) koşulları dikkate alındığında

$$pg^{p-1}\big(x(t)\big)h\big(t,x(t)\big) \geq 0$$

ve

$$-pg^{p-1}\big(x(t)\big)h\big(t,x(t)\big) = -p\big|g^{p-1}\big(x(t)\big)h\big(t,x(t)\big) \leq\big| - p\delta g^{p}\big(x(t)\big)$$

yazılabilir.$p \geq 2$ için $\frac{1}{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} = 1$ olur. Şimdi ise, Young eşitsizliğinden,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$
$$a \geq 0, b \geq 0, \;\; q = p/(p-1)$$

yazılabilir. $\mu \in (0, p\delta - \beta - (p-1)\alpha)$, $\gamma \in \left(0, \frac{p\delta-(p-1)\alpha-\beta-\mu}{p-1}\right)$ ve $M^{1/p}.\gamma^{\frac{p-1}{p}} \geq 1$ yardımı ile

$$M^{1/p}\, |f(t)|.\gamma^{\frac{p-1}{p}}\, |g(x(t))|^{p-1}$$

terimlerine Young eşitsizliği uygulandığında

$$|g(x(t))|^{p-1}|f(t)| \leq M^{1/p}\, |f(t)|\,.\gamma^{\frac{p-1}{p}}\, |g(x(t))|^{p-1} \leq M\, \frac{f^p\,(t)}{p} + \gamma\, \frac{g^p\big(x(t)\big)}{\frac{p}{p-1}}$$

elde edilir. Benzer biçimde aynı eşitsizlik yardımı ile

$$H \leq p\big|g\big(x(t)\big)\big|^{p-1}|f(t)| - pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) - pg^{p-1}\big(x(t)\big)h\big(t, x(t)\big)$$

$$+p\int_0^t |C(t,s)|\, |g(x(s))|\, \, |g(x(t))|^{p-1} ds$$

$$\leq p\, M\, \frac{f^p\,(t)}{p} + p\gamma\, \frac{g^p\big(x(t)\big)}{\frac{p}{p-1}} - \, pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) \, - p\delta g^p\big(x(t)\big)$$

$$+p\int_0^t |C(t,s)|\, \left(\frac{g^p\big(x(t)\big)}{\frac{p}{p-1}} + \frac{g^p\big(x(s)\big)}{p}\right) ds$$

$$= Mf^p\,(t) + \gamma(p-1)g^p\big(x(t)\big) - pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) \, - p\delta g^p\big(x(t)\big)$$

$$+(p-1)\int_0^t |C(t,s)| ds g^p\big(x(t)\big) + \int_0^t |C(t,s)| ds g^p\big(x(s)\big) ds$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlik ve $\int_0^t |C(t,s)| ds \leq \alpha$ şartı yardımı ile

$$H \leq M\, f^p\,(t) + \gamma(p-1)g^p\big(x(t)\big) - pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) - p\delta g^p\big(x(t)\big)$$

$$+(p-1)\alpha g^p\big(x(t)\big) + \int_0^t |C(t,s)| g^p\big(x(s)\big) ds \tag{45}$$

bulunur. Buna bağlı olarak da (44) ve (45) eşitsizliklerinin kullanılması ile

$$V'(t,\epsilon) \leq pg^{p-1}\big(x(t)\big)x'(t) + \beta g^p\big(x(t)\big) \, - \int_0^t |C(t,s)|\, g^p\big(x(s)\big) ds$$

$$+\int_0^t |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)| g^p\big(x(s)\big) ds$$

$$\leq \, Mf^p\,(t) + \, \gamma(p-1)g^p\big(x(t)\big) \, - p\delta g^p\big(x(s)\big)$$

$$+(p-1)\alpha g^p\big(x(t)\big) + \, \int_0^t |C(t,s)| g^p\big(x(s)\big) ds$$

$$+\beta g^p\big(x(t)\big) ds - \, \int_0^t |C(t,s)| g^p\big(x(s)\big) ds$$

$$+\int_0^t |C(t+\epsilon,s) - C(t,s)| g^p\big(x(s)\big) ds$$

ve

$$V'(t,\epsilon) \leq M\, f^p\,(t)\,[\;\beta + \;\gamma(p-1) + \;(p-1)\alpha - p\delta]g^p\big(x(t)\big)$$
$$+\int_0^t |C(t+\epsilon,s)-C(t,s)|g^p\big(x(s)\big)ds$$

elde edilir. Son eşitsizliğin son teriminin 0 dan t ye integrali alınır, integrallerin sırası değiştirilir, (42) ve (43) ifadeleri, teoremin şartları ile beraber göz önüne alınır ise,

$$\int_0^t \int_0^u |C(u+\epsilon,s)-C(u,s)|\,g^p\big(x(s)\big)dsdu$$
$$= \int_0^t \int_s^t |C(u+\epsilon,s)-C(u,s)|du\, g^p\big(x(s)\big)ds$$
$$\leq \mu \int_0^t g^p\big(x(s)\big)ds$$

elde edilir. γ nın tanımından

$$\mu^* = \beta \;+\; (p-1)\alpha - p\delta + \;\gamma(p-1) + \mu < 0$$

olduğu açıktır. $V'(t,\epsilon)$ nin integrali alınır ve yukarıdaki eşitsizlikler kullanılır ise,

$$V\,(t,\epsilon) - V\,(0,\epsilon) \leq M\int_0^t f^p(s)ds\,[\,\beta + \gamma(p-1) + (p-1)\alpha - p\delta]\;\int_0^t g^p\big(x(s)\big)ds$$
$$+\int_0^t \int_0^u\;|C(u+\epsilon,s)-C(u,s)|\,g^p\big(x(s)\big)dsdu$$
$$\leq M\int_0^t f^p(s)ds\,[\beta + \gamma(p-1) + (p-1)\alpha - p\delta + \mu]\;\int_0^t g^p\big(x(s)\big)ds$$
$$= M\;\int_0^t f^p\,(s)ds + \mu^*\;\int_0^t g^p\big(x(s)\big)ds$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da

$$0 \leq V\,(t,\epsilon) \leq V\,(0,\epsilon)\; + \mu^*\;\int_0^t g^p\big(x(s)\big)ds + M\;\int_0^t f^p\,(s)\,ds$$

yazılabilir.

$$V\,(0,\epsilon) = p\int_0^{x(0)} g^{p-1}(s)ds < \infty$$

olması nedeni ile,

$$0 \leq \int_0^t g^p\big(x(s)\big)ds\;\leq \frac{1}{-\mu^*}\;[p\int_0^{x(0)} g^{p-1}(s)ds\;+ M\;\int_0^t f^p\,(s)ds]$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuç olup, ispat tamamlanmış olur.

9. İNTEGRAL DENKLEMLERDE BAZI NİTELİKSEL ANALİZLER

Burton (2010)

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)g(s,x(s))ds \tag{46}$$

integral denklemini ele aldı. Burada $a \in L^2[0,\infty)$, $C(t,s)$ çekirdeği bir tekil noktaya sahip olup, $t - s > 0$ için bu çekirdek konvekstir. Burton (2010) uygun bir Lyapunov fonksiyoneli tanımlayarak $g\big(t,x(t)\big) - a(t) \in L^2[0,\infty)$ ve $t \to \infty$ için $x(t) - a(t) \to 0$ olduğunu gösterdi. Burton (2010) de

$$\int_0^t C(t,s)g(s,x(s))ds$$

integralinin var olduğu ve yeterince küçük $\epsilon > 0$ sayısı için

$$C(t,s) \geq 0, C_s(t,s) \geq 0\,, C_{st}(t,s) \leq 0, C_t\,(t,s) \leq 0 \tag{47}$$

ve

$$0 \leq s \leq t - \epsilon, t < \infty \tag{48}$$

kabulleri yapıldı. Ayrıca Burton (2010) da $0 < p < 1$ için $(t-s)^{-p}$ çekirdeğinin yukarıdaki şartları sağladığı var sayılmaktadır.

9.1. Niteliksel Sonuçlar

Burton (2010), (46) integral denklemini (47) ve (48) şartları ile birlikte inceldi. Her $t \geq 0$ ve $x \in R$ için $a(t)$ ve $g(t,x)$ fonksiyonları sürekli,

$$xg(t,x) > 0, x \neq 0 \tag{49}$$

olsun. $\epsilon > 0$ ve $t \geq \epsilon$ olmak üzere, Burton (2010)

$$V(t,\epsilon) = \int_0^{t-\epsilon} C_s(t,s)\left(\int_s^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_s^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2 \tag{50}$$

Lyapunov fonksiyonelini tanımladı. C_s (t,s) ifadesi $s = t$ de bir tekil noktaya sahiptir. Bu durumda $s \leq t - \epsilon$ veya $\epsilon \leq t - s$ alınarak $V(t,\epsilon)$ Lyapunov fonksiyonelinde bu tekil noktadan sakınılmaktadır.

Teorem 14 (Burton, 2010). x ifadesi (46) integral denkleminin $[0,\infty)$ aralığında bir sürekli çözümü olmak üzere, (47) ve (48) şartları sağlansın. $\epsilon > 0$ olmak üzere, (50) deki $V(t\,,\epsilon)$ Lyapunov fonkisyoneli tanımlanırsa, her $t \geq \epsilon$ için, $V(t\,,\epsilon)$ Lyapunov fonksiyonelinin (46) integral denklemi boyunca türevi alınırsa,

$$\frac{dV(t,\epsilon)}{dt} \leq 2g(t,x(t))[a(t)-x(t)+C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du$$

$$-\int_{t-\epsilon}^{t} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds] + C_s(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\right)^2 \qquad (51)$$

olur.

İspat. $t \geq \epsilon$ için $C_t\,(t,0) \leq 0\,, C_{st}(t,s) \leq 0,\;\; 0 \leq s \leq t-\epsilon$ olur. Bu takdirde Leibnitz's kuralından

$$V'(t,\epsilon) \leq C_s(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$

$$+2g\big(t,x(t)\big)\int_{0}^{t-\epsilon} C_s(t,s)\int_{s}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\,ds$$

$$+2g\big(t,x(t)\big)C(t,0)\int_{0}^{t} g\big(u,x(u)\big)du$$

elde edilir. Bu eşitsizlikteki son iki erime kısmi integrasyon uygulanır ise,

$$2g\big(t,x(t)\big)\int_{0}^{t-\epsilon} C_s(t,s)\int_{s}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\,ds$$

$$= 2g\big(t,x(t)\big)[C(t,s)\int_{s}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\,\Big|_{0}^{t-\epsilon} + \int_{0}^{t-\epsilon} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds]$$

$$= 2g\big(t,x(t)\big)\,[\,C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du - C(t,0)\int_{0}^{t} g\big(u,x(u)\big)du$$

$$+\int_{0}^{t-\epsilon} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds]$$

bulunur. Buna, bağlı olarak da

$$V'(t,\epsilon) \leq C_s(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$

$$+2g\big(t,x(t)\big)[C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du + \int_{0}^{t-\epsilon} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds]$$

$$= C_s(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$

$$+2g\big(t,x(t)\big)[C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^{t} g\big(u,x(u)\big)du+\int_{t-\epsilon}^{t} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds]$$

$$+2g\big(t,x(t)\big)[a(t)-x(t)]$$

elde edilir. Böylece Teorem 9 nın ispatı tamamlanır. Ayrıca, Burton (2010))

$$x(t)=a(t)-\int_0^t D(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds \tag{52}$$

integral denklemini ele aldı. Burada g fonksiyonu (49) şartını ve D çekirdeği ise integrallenebilirlik şartını sağlar. Burda (52) integral denkleminin çözümlerinin var olduğu kabul edilmektedir. Burton (2010) aşağıda verilen teoremi ispatladı.

<u>Teorem 15</u> (Burton, 2010). (49) şartına ilaveten $|g(t,x)|\leq|x|, D$ sürekli, $\int_0^{\infty}|D(u+t,t)|du\leq\delta$, $\int_0^t |D(t,s)|ds\leq\gamma$, p bir çift pozitif tam sayı ve $a\in L^p[0,\infty)$ olsun. Eğer

$$\delta+(p-1)\gamma-p<0$$

ve $x(t)$, (52) integral denkleminin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümü ise, bu takdirde

$$\int_0^{\infty} g^p\ (s,x(s))ds<\infty$$

olur.

<u>İspat.</u>

$$V(t)=\int_0^t\int_{t-s}^{\infty}|D(u+s,s)|du\ \ g^p\ (s,x(s))ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. Bu fonksiyonelin (52) integral denklemi boyunca türevi alınır, teoremin şartlarına bağlı olarak

$$V'(t)\leq\delta g^p(t,x)\ -\int_0^t|D(t,s)|\,g^p(s,x(s))ds$$

$$+pg^{p-1}\left(t,x(t)\right)\left[a(t)-x(t)-\int_0^t|D(t,s)|\,g\big(s,x(s)\big)ds\right].$$

elde edilir. Burada son terim sıfırdır. Çünkü *x*, (52) denkleminin bir çözümüdür. $ab\ \leq(a^p/\,p\,)+(\,b^s/s)$ eşitsizliği kullanıldığında, q (yeterince küçük) ve M (yeterince büyük) sayıları bulunur öyle ki

$$p[a(t)g^{p-1}\left(t,x(t)\right) - g^{p-1}\left(t,x(t)\right)x(t) + \int_0^t |D(t,s)|[g^{p-1}\left(t,x(t)\right)g\left(s,x(s)\right)ds]$$

$$\le q(p-1)(g^{p-1}\left(t,x(t)\right)^{\frac{p}{p-1}} + Ma^p(t) - pg^p\left(t,x(t)\right)$$

$$+\int_0^t |D(t,s)|\,[(p-1)\left(g^{p-1}\left(t,x(t)\right)^{\frac{p}{p-1}} + g^p\left(s,x(s)\right)\right]ds$$

$$\le q(p-1)g^p\left(t,x(t)\right) + Ma^p(t) - pg^p\left(t,x(t)\right)$$

$$+(p-1)\int_0^t |D(t,s)|\,ds g^p\left(t,x(t)\right) + \int_0^t |D(t,s)|\,ds g^p\left(s,x(s)\right)ds$$

olur. Buna bağlı olarak da

$$V'(t) \le [\delta + q(p-1) - p + (p-1)\gamma]g^p\left(t,x(t)\right) + Ma^p(t)$$

elde edilir. q sayısı yeterince küçük olduğundan, $\mu > 0$ sayısı vardı öyleki

$$V'(t) \le -\mu g^p\left(t,x(t)\right) + Ma^p(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alınır ise, töremin iddiasına varılır. Aynı çalışmada, ayrıca Burton (2010) aşağıdaki

$$x(t) = a(t) - \int_0^t [C(t,s) + D(t,s)]g\left(s,x(s)\right)ds \qquad (53)$$

integral denklemini inceledi. Bu denklem için (47), (48) ve (49) şartlarına ilaveten γ ve δ pozitif sabiler olmak üzere

$$\int_0^t |D(t,s)|\,ds \le \gamma, \int_0^\infty |D(u+t,t)|du \le \delta, \gamma + \delta < 2 \qquad (54)$$

şartlarının sağlandığı kabul edilmektedir. Burton (2010) aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 16 (Burton, 2010). (53) integral denklemi için (47), (48) ve (54) şartlarına ilaveten, D sürekli olsun. Bu takdirde

$$V(t,\epsilon) = \int_0^t \int_{t-s}^\infty |D(u+s,s)|du\ g^2\,(s,x(s))ds$$

$$+\int_0^{t-\epsilon} C_s(t,s)\,(\int_s^t g\left(u,x(u)\right)du)^2 ds + C(t,0)\ (\int_0^t g\left(u,x(u)\right)du)^2$$

fonksiyoneli için

$$V'(t,\epsilon)\ \leq 2g\big(t,x(t)\big)[a(t)-x(t)-\int_0^t D(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds$$
$$+C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du\ ]$$
$$-2g\big(t,x(t)\big)[\int_{t-\epsilon}^t C(t,s)\ \ g\big(s\ ,x(s)\big)ds+C_s(t,t-\epsilon)\left(\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$
$$+\delta g^2\big(t,x(t)\big)-\int_0^t|D(t,s)|\ \ g^2\ \big(s,x(s)\big)ds$$

olur.

<u>İspat.</u> $C_t\leq 0$ ve $C_{st}\leq 0$ olduğundan

$$V'(t,\epsilon)\ \leq \int_0^\infty|D(u+t,t)|du\ g^2\big(t,x(t)\big)-\int_0^t|D(t,s)|g^2\ \big(s,x(s)\big)\ ds$$
$$+C_s(t,t-\epsilon)\ \left(\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)\int_0^{t-\epsilon}\ C_s(t,s)\ \int_s^t g\big(u,x(u)\big)\ duds$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)C(t,0)\ \int_0^t g\big(u,x(u)\big)\ du$$
$$\leq \delta g^2\big(t,x(t)\big)-\int_0^t|D(t,s)|\ \ g^2\ \big(s,x(s)\big)ds$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)C(t,0)\int_0^t g\big(u,x(u)\big)\ du+C_s(t,t-\epsilon)\ \left(\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)[C(t,s)\ \int_s^t g\big(u,x(u)\big)\ du\ \Big|_0^{t-\epsilon}+\int_0^{t-\epsilon}C(t,s)\ \ g\big(s\ ,x(s)\big)ds]$$
$$=\delta g^2\big(t,x(t)\big)\ C_s(t,t-\epsilon)\ \left(\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)C(t,0)\int_0^t g\big(u,x(u)\big)\ du-\int_0^t|D(t,s)|\ \ g^2\ \big(s,x(s)\big)ds$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)[C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du-C(t,0)\int_0^t g\big(u,x(u)\big)\ du$$
$$+\int_0^{t-\epsilon}C(t,s)\ \ g\big(s\ ,x(s)\big)ds].$$
$$=\delta g^2\big(t,x(t)\big)\ C_s(t,t-\epsilon)\ \left(\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2$$
$$-\int_0^t|D(t,s)|\ \ g^2\ \big(s,x(s)\big)ds+2g(t,x)C(t,t-\epsilon)\int_{t-\epsilon}^t g\big(u,x(u)\big)du$$
$$+2g\big(t,x(t)\big)[a(t)-x(t)-\int_0^t D(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds]$$
$$-2g\big(t,x(t)\big)\int_{t-\epsilon}^t C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı biter.

Burton (2008) lineer

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{55}$$

integral denklemini göz önüne aldı. Burda x ve a, n-bileşenli vektörler, $n \geq 1$, C çekirdeği ise $n \times n$ basamaktan bir matristir. $a(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında ve C çekirdeği ise $[0, \infty) \times [0, \infty)$ bölgesinde süreklidir. Burton (2008) aşağıda verilen sonuçları ispatladı.

Teorem 17 (Burton, 2008). K ve $\alpha, \alpha < 1$, pozitif sayılar olmak üzere

$$|a(t)| \leq K \text{ ve } \sup_{t \geq 0} \int_0^t |C(t,s)|ds \leq \alpha$$

şartları sağlansın. Bu takdirde (55) integral denkleminin bir tek çözüm var ve bu çözüm $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlıdır.

İspat. $(X, \| \cdot \|)$ supremum norm ile tanımlı sürekli sınırlı $\phi : [0. \infty) \to \Re$ fonksiyonlarının bir Banach uzayı olsun. $\phi \in X$ olmak üzere bir $P : X \to X$ dönüşümü

$$(P\phi)(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)\phi(s)ds$$

ile tanımlansın. Eğer $\phi, \eta \in X$ ise, bu takdirde

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| \leq \int_0^t |C(t,s)| \, |\phi(s) - \eta(s)|ds \leq \alpha \, \|\phi - \eta\|$$

olur. Buna bağlı olarak, P bir daralma dönüşümü olur ve bir $\phi \in X$ vardır öyle ki

$$(P\phi)(t) = \phi(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)\phi(s)ds$$

olur. Bu sonuç Teorem 17 in ispatını tamamlar.

Teorem 18 (Burton, 2008). Bir $\alpha < 1$ sayısı var öyle ki $\int_0^\infty |C(u+t,t)| \, du \leq \alpha$ olsun. Eğer $a \in L^1[0, \infty)$ ise, bu takdirde $x(t) \in L^1[0, \infty)$ olur.

İspat. (55) integral denkleminden

$$|x(t)| \leq |a(t)| + \int_0^t |C(t,s)||x(s)| \, ds$$

yazılabilir. (55) integral denkleminin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde bir çözümünün var olduğunu kabul edelim.

$$V\,(t)\ =\ \int_0^t \int_{t-s}^{\infty}\ |C(u+s,s)|\,du|x(s)|ds$$

Lyapunov fonksiyoneli tanımlansın. Bu fonksiyonelin (55) integral denklemi boyunca türevi

$$V'(t) = \int_0^{\infty}\ \ |C(u+t,t)|\,du|x(t)| - \int_0^t |C(t,s)||x(s)|\,ds$$

ile verilir.$|x(t)|$ için yukarıda verilen eşitsizlik kullanıldığında

$$V'(\mathrm{t}) \le \int_0^{\infty} |C(u+t,t)|\,du|x(t)| - |x(t)| + |a(t)| \le (\alpha-1)|x(t)| + |a(t)|$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanını integrali alındığında

$$0 \le V\,(t) \le V\,(0) + \int_0^t |a(s)|ds - (1-\alpha)\int_0^t |x(s)|\,ds$$

elde edilir.

Buna bağlı olarak da

$$\int_0^t |x(s)|\ ds \le (1/(1-\alpha))\int_0^t |a(s)|ds$$

yazılabilir. Böylece Teorem 18 un ispatı tamamlanır.

Teorem 19 (Burton, 2008). $a:[0,\infty)\to\Re^{\mathrm{n}}$ fonksiyonu sürekli ve $C(t,s)$ ise $n\times n$ basmaktan $0\le s\le t<\infty$ aralığında sürekli fonkisyonların bir matrisi olsun. Bu takdirde $x{:}\,[0,\infty)\to\Re^{\mathrm{n}}$ ile tanımlı ve (55) integral denklemini sağlayan bir tek fonksiyon vardır.

İspat. $b>0$ olmak üzere, X ise $\phi:[0,b]\to\Re^n$ biçiminde tanımlı sürekli fonksiyonların bir vektör uzayı olsun. r bilinen bir sayı olmak üzere, X uzayında normu

$$|\phi|_r := \sup\{|\phi(t)|e^{-rt} : 0\le t\le b\}$$

ile tanımlayalım. Bu takdirde $(X, |\cdot|_r)$ bir Banach uzayıdır. b verilen pozitif keyfi bir sayı olsun. (55) integral denkleminin $[0, b]$ aralığında bir çözümün var olduğu gösterilecektir. $r = \sup_{0\leq s\leq t\leq b}|C(t,s)| + 1$ olmak üzere $P : X \to X$ dönüşümü $\phi \in X$ için

$$(P\phi)(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)\phi(s)ds$$

ile tanımlansın. Bu takdirde her $\phi, \eta \in X$ için

$$\begin{aligned}
|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)|e^{-rt} &\leq e^{-rt}\int_0^t |C(t,s)|\ |\phi(s) - \eta(s)|ds \\
&= \int_0^t e^{-r(t-s)}\,|C(t,s)|\ e^{-rs}\,|\phi(s) - \eta(s)|ds \\
&\leq \int_0^t e^{-r(t-s)}\,|C(t,s)|\,ds\,|\phi - \eta|_r \\
&\leq \int_0^t e^{-r(t-s)}(r-1)\ ds\,|\phi - \eta|_r \\
&= \frac{r-1}{r}|\phi - \eta|_r
\end{aligned}$$

olur. Buna bağlı olarak, P dönüşümünün bir daralma dönüşümü olduğu ve (55) integral denklemini sağlayan bir tek sabit noktanın var olduğu sonucuna varılır. Bu sonuç yardımı ile teoremin ispatı tamamlanır.

<u>Teorem 20</u> (Burton, 2008). Süreklilik şartları altında (55) integral denkleminin süreklilik şartları altında tek çözümü

$$x(t) = a(t) + \int_0^t R(t,s)a(s)ds$$

olarak ifade edilir.

İspat. $t > 0$ olmak üzere $R(t,u)$ çekirdeği $0 \leq u \leq t$ ve

$$x(u) = a(u) - \int_{0}^{u} C(u,s)x(s)ds$$

ise $0 \leq s \leq u \leq t$ için tanımlasın. $x(u)$ ifadesini soldan $R(t,u)$ ile çarpıp, u ya göre 0 dan t ye integral alalım. Bu takdirde

$$\int_{0}^{t} R(t,u)x(u)du - \int_{0}^{t} R(t,u)a(u)du = -\int_{0}^{t} R(t,u) \int_{0}^{u} C(u,s)x(s)dsdu$$

$$= -\int_{0}^{t}\int_{s}^{t} R(t,u)C(u,s)du\, x(s)ds$$

$$= \int_{0}^{t} [R(t,s) - C(t,s)]\, x(s)ds$$

elde edilir. Burada

$$R(t,s) = C(t,s) - \int_{s}^{t} R(t,u)C(u,s)du$$

olarak tanımlanmaktadır. Böylece

$$-\int_{0}^{t} R(t,u)a(u)du = -\int_{0}^{t} C(t,s)x(s)ds$$

olur. Bu eşitlik

$$x(t) = a(t) - \int_{0}^{t} C(t,s)x(s)ds$$

ile birlikte dikkate alındığında

$$x(t) = a(t) - \int_{0}^{t} R(t,u)a(u)du$$

sonucuna varılır. Bu ise teoremde istenen sonuçtur.

Teorem 21 (Burton, 2008).

$x(t) = a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)ds$ (56)

olsun. Burada $a: \Re \to \Re^n$ olarak tanımlanmakta ve bu fonksiyon süreklidir. $C(t,s)$ çekirdeği $\Re \times \Re$ bölgesinde sürekli olup, ilaveten pozitif bir T sabiti var öyle ki

$$a(t,T) = a(t) \text{ ve } C(t+T, s+T) = C(t,s)$$

olur. Ayırca $\int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|ds$ sürekli ve bir $\alpha < 1$ sabiti var öyle ki

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|ds \le \alpha < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde (56) integral denklemi bir T-periydik çözüme sahiptir.

İspat. $(X, |\cdot|)$, $\phi: R \to R^n$ ye sürekli ve T-periyodik fonksiyonların supremum norm ile tanımlı bir Banach uzayı olsun. $\phi \in X$ olmak üzere $H : X \to X$ dönüşümü

$$(H\phi)(t) = a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)\phi(s)\, ds$$

ile tanımlansın. Bu takdirde, $H\phi$ dönüşümü T-periyodiktir. Ayırıca, $\phi, \eta \in X$ ise, o zaman $0 \le t \le T$ için

$$\begin{aligned} |(H\phi)(t) - (H\eta)(t)| &\le \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\ |\phi(s) - \eta(s)|ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\ |\phi(s) - \eta(s)|ds \\ &\le |\phi - \eta| \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\, ds \\ &\le \alpha|\phi - \eta| \end{aligned}$$

olur. Buna bağlı olarak H bir daralma dönüşümü olur. Bu nedenle, verilen dönüşümün bir tek sabit noktası var ve bu nokta X e aittir. Eğer (55) integral denklemi

$$x(t) = a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)ds + \int_{-\infty}^{0} C(t,s)x(s)ds$$

olarak ifade edilirse, bu takdirde

$$a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)ds$$

integrali periyodik bir fonksiyon olur. Bu durumda *x* sınırlı bir fonksiyon olmak kaydıyla

$$\int_{-\infty}^{0} C(t,s)x(s)ds$$

sıfıra yakınsar. Buna bağlı olarak da $x = p + q$ olarak ifade edilebilir. Burada p periodik ve q ise sıfıra yakınsar. Ayrıca, bu gibi fo ye bir dönüşüm olur. nksiyonlar için $(Y, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olur. (55) integral denklemi ise $Y \to Y$ ye bir dönüşüm olur.

$\mathcal{P}_T$ cümlesi $\Re$ den $\Re^n$ ye T-periyodik ve sürekli fonksiyonların bir cümlesi olsun. O zaman $\phi \in P_T$ ise, $t \to \infty$ için $\int_{-\infty}^{0} C(t,s)\phi(s)ds \to 0$ olur. $q: [0,\infty) \to \Re^n$ ve $t \to \infty$ için $q(t) \to 0$ olmak üzere, Q bu sürekli fonksiyonların bir cümlesi olsun. $q \in Q$ ve $t \to \infty$ için $\int_0^t C(t,s)q(s)ds \to 0$ olsun. Şimdi ise , bir sonraki töremin ispatında kullanılacak aşağıdaki Lamma'yı ifade edelim.

<u>Lemma 4</u> (Burton, 2008). $\phi: [0,\infty) \to \Re^n$ ve $\phi \in Y$ olmak üzere $(Y, \|\cdot\|)$ sürekli fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Bu takdirde $p \in \mathcal{P}_T$, $q \in Q$ ve $\phi = p + q$ olup, $(Y, \|\cdot\|)$ Banach uzayıdır.

<u>Teorem 22</u> (Burton, 2008). $C(t+T, s+T) = C(t,s)$, $a \in \mathcal{P}_T$, $t \to \infty$ için $\int_{-\infty}^{0} C(t,s)\phi(s)ds \to 0$ ve $\int_0^t C(t,s)q(s)ds \to 0$ şartları sağlansın. Ayrıca bir $\alpha < 1$ sayısı için $\int_0^t |C(t,s)|ds \leq \alpha$ olsun. Bu takdirde (55) integral denklemi bir $x(t) = p(t) + q(t)$ çözüme sahiptir. Burada $p \in \mathcal{P}_T$ ve $q \in Q$ dur.

<u>İspat.</u> $(Y, \|\cdot\|)$, $\phi = p + q$ ile verilen fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Burada $p \in \mathcal{P}_T$ ve $q \in Q$ dır. $H: Y \to Y$ dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde $\phi = p + q \in Y$ olması nedeni ile

$$(H\phi)(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s) \; [p(s) + q(s)]\, ds$$

$= \left[a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)\ p(s)ds\right]$

$+ [\int_{-\infty}^{0} C(t,s)\ p(s)ds - \int_{0}^{t} C(t,s)\ q(s)ds]$

$=: B\phi + A\,\phi$

olur. Bu dönüşüm A ve B operatörlerini Y üzerinde tanımlar. Ayırca $B\colon X \to \mathcal{P}_T \subset Y$ ve $A : Y \to Q \subset Y$ olur.

Teorem 23 (Burton, 2008). $a \in L^1[0,\infty)$ ve $\int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s))|du$ integrali $0 \le s \le t < \infty$ için sürekli olsun. Eğer $\alpha < 1$ olmak üzere $\int_0^{\infty}|C(u+t,t))|du \le \alpha$ ise, bu takdirde (55) integral denkleminin $x(t)$ çözümü $L^1[0,\infty)$ de olur ve $R(t,s) = C(t,s) - \int_s^t R(t,u)C(u,s)du$ ifadesinin $R(t,s)$ resolventi L^1 üzerinde L^1 yaklaşımını oluşturur.

İspat.

$$V(t) = \int_0^t \int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s))|du|x(s)|ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. (55) integral denkleminde

$$|x(t)| \le |a(t)| + \int_0^t|C(t,s)x(s)|ds$$

yazılabilir. Verilen Lyapunov fonksiyonelinin türevi alındığında kolaylıkla

$V'(\mathrm{t}) = \int_0^{\infty} |C(u+t,t)|\ du|x(t)| - \int_0^t|C(t,s)x(s)|ds$

$\le \alpha\,|x(t)| - |x(t)| + |a(t)| = (\alpha - 1)|x(t)| + |a(t)|$

elde edilir. Bu eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alınır, $V(t) \ge 0$ ve $a \in L^1$ olması nedeni ile kolaylıkla $x \in L^1$ olduğu görülebilir. Şimdi eğer

$$x(t) = a(t) - \int_0^t R(t,s)a(s)ds$$

ve

$$(P\phi)(t) = \phi(t) - \int_0^t R(t,s)\phi(s)ds$$

ifadeleri göz önüne alınır ise, her bir $\phi \in L^1$ için $P_\phi \in L^1$ olduğu görülür. Bu sonuç ise verilen teoremin ispatını tamamlar.

<u>Teorem 24</u> (Burton, 2008). (55) skaler bir integral denklemi ve $\int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s))|du$ sürekli olsun. Ayrıca $\alpha < 1$ ve $\beta < 1$ sabitler olmak üzere $\int_0^{\infty}|C(u+t,t))|du \leq \alpha$ ve $\sup_{t\geq 0}\int_0^t|C(t,s)|ds \leq \beta$ olsun. Bu takdirde $R(t,s)$ resolventi sırasıyla L^1, L^2 ve L^∞ yaklaşık özdeşliklerini L^1, L^2 ve L^∞ uzaylarında doğurur. $\phi_1 \in L^1, \phi_2 \in L^2$ ve $\phi_3 \in L^\infty$ olmak üzere, $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ ise, bu takdirde $P_\phi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ olur.

<u>İspat.</u> Here $\epsilon > 0$ için bir $M > 0$ sayısı var öyle ki (55) denkleminin karesi alınır ve mevcut teoremin şartları kullanılırsa,

$$x^2(t) \leq Ma^2\,(t) + (1+\epsilon)\left(\int_0^t C(t,s)x(s)ds\right)^2$$

$$\leq M\,a^2(t) + (1+\epsilon)\int_0^t |C(t,s)|ds \int_0^t |C(t,s)|x^2(s)\,ds$$

$$\leq Ma^2\,(t) + (1+\epsilon)\,\beta\int_0^t |C(t,s)|x^2(s)\,ds$$

$$= Ma^2\,(t) + \int_0^t |C(t,s)|x^2(s)\,ds$$

elde edilir. $(1+\epsilon)\,\beta = 1$ olsun. Buna bağlı olarak

$$-\int_0^t |C(t,s)|x^2(\mathrm{s})\,ds \leq M\,a^2(t) - x^2(\mathrm{t})$$

yazılabilir.

$$V(t) = \int_0^t \int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s))|du\, x^2(\mathrm{s})\,ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. Bu fonksiyonelin (55) integral denklemi boyunca türevi alınır ve verilen töremin şartları kullanılırsa

$$V'(\mathrm{t}) = \int_0^{\infty} |C(u+t,t)|\,du\,x^2(\mathrm{t}) - \int_0^t|C(t,s)|\,x^2(s)ds$$

$$\leq Ma^2\,(t) - x^2 + \int_0^{\infty} |C(u+t,t)|\,du\,x^2$$

$$\leq Ma^2\,(t) - (1-\alpha)\,x^2(t)$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliğin integrali alındığında

$$(1-\alpha)\int_0^t \; x^2(s)\; ds \leq M \int_0^t \; a^2(s)\; ds$$

eşitsizliği elde edilir. Buna bağlı olarak da $x \in L^2[0,\infty)$ elde edilir. İspatın geri kalan kısımları kolaylıkla tamamlanabilir.

Lemma 5 (Burton, 2008). (55) skaler bir integral denklemi olsun. Ayırca , $\alpha < 1$ olmak kaydıyla $\sup_{t\geq 0}\int_0^t |C(t,s)|ds \leq \alpha$ eşitsizliği sağlansın. (55) integral denklemi göz önüne alındığında, $M > 0$ ve $n > 0$ sayıları var öyle ki

$$x^{2^n}(t) \leq M^{2^n-1}\, a^{2^n}\,(t) + \int_0^t |C(t,s)|\; x^{2^n}(s)ds$$

olur.

İspat. (55) integral denkleminin her iki yanının karesi alındığında

$$x^2(t) = a^2\,(t) - 2a(t)\int_0^t \; C(t,s)x(s)ds + \left(\int_0^t \; C(t,s)x(s)ds\right)^2$$

elde edilir. $\epsilon > 0$ ve $(1+\epsilon)\alpha = 1$ olmak üzere, bir $M > 1$ sayısı bulunabilir öyle ki $2|a(t)||y| \leq (M-1)a^2\,(t) + \epsilon\, y^2$ olur. Buna bağlı olarak Schwarz eşitsizliği kullanıldığında

$$x^2(\mathrm{t}) \leq \mathrm{M}a^2\,(t) + (1+\epsilon)\left(\int_0^t \; C(t,s)x(s)ds\right)^2$$

$$\leq \mathrm{M}\; a^2(t) + (1+\epsilon)\int_0^t \; |C(t,s)|ds \; \int_0^t \; |C(t,s)|x^2(\mathrm{s})\; ds$$

$$\leq \mathrm{M}a^2\,(t) + \int_0^t \; |C(t,s)|x^2(\mathrm{s})\; ds$$

elde edilir. k pozitif bir sayı olmak üzre

$$x^{2k}(\mathrm{t}) \leq M^{2k-1}\, a^{2k}\,(t) + \int_0^t |C(t,s)|\; x^{2k}(s)ds$$

olsun. Bu eşitsizliğin karesi alındığında

$$x^{4k}(\mathrm{t}) \leq M^{4k-2}\, a^{4k}\,(t)$$

$$+2M^{2k-1}\, a^{2k}\,(t)\int_0^t |C(t,s)|\; x^{2k}(s)ds + \left(\int_0^t |C(t,s)|\, x^{2k}(s)ds\right)^2$$

$$\leq M^{4k-2}\, a^{4k}\,(t) + (M-1)[\, M^{2k-1}\, a^{2k}\,(t)]^{\,2}$$

$$+(1+\epsilon)\left(\int_0^t |C(t,s)|\, x^{2k}(s)ds\right)^2$$

$$\leq M^{4k-2}\, a^{4k}\,(t)(M-1+1)$$

$$+(1+\epsilon)\int_0^t |C(t,s)|ds \int_0^t |C(t,s)|x^{4k}(\mathrm{s})\, ds$$

$$\leq M^{4k-1}\, a^{4k}\,(t)+\int_0^t |C(t,s)|x^{4k}(\mathrm{s})\, ds$$

elde edilir. Eğer, $2k=2^n$ alınır ise, bu takdirde $4k=(2)2^n=2^{n+1}$ olur. Buna bağlı olarak da teoremde iddia edilen sonucuna varılabilir.

Teorem 25 (Burton, 2008). (55) skaler bir integral denklemi ve $\int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s)|du$ integrali sürekli olsun. $\alpha<1$ ve $\beta<1$ sabitler olmak üzere

$$\int_0^t |C(t,s)|ds \leq \alpha \;\; ve \;\; \int_0^{\infty} |C(u+t,t)|du \leq \beta$$

olsun. Eğer, bir *n* >0 sayısı var ve $a\in L^{2^n}[0,\infty)$ ise, bu takdirde (55) integral denkleminin çözümleri için $x\in L^{2^n}[0,\infty)$ olur.

İspat.

$$V(t)=\int_0^t\int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s))|du\;\; x^{2^n}\,(s)ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. Bu fonksiyonelin (55) integral denkleminin çözümleri boyunca türevi alındığında, teoremin şartlarına bağlı olarak

$$V'(\mathrm{t})=\int_0^{\infty}\;|C(u+t,t)|\;du\; x^{2^n}(t)\;-\int_0^t|C(t,s)|\; x^{2^n}(\mathrm{s})ds$$

$$\leq\;\beta x^{2^n}(t)-x^{2^n}(t)+\;M^{2^n-1}\,a^{2^n}\,(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alındığında

$$0\leq V(t)\;\leq V(0)-(1-\beta)\int_0^t\; x^{2^n}(\mathrm{s})ds+\;M^{2^n-1}\int_0^{\infty} a^{2^n}(t)\;dt$$

eşitsizliği kolaylıkla bulunur. Bu sonuç ise verilen teoremin ispatını tamalar.

Teorem 26 (Burton, 2008). (55) bir skaler integral denklem olsun.

$$C(t,s)\geq 0, C_s(t,s)\geq 0\;, C_t(t,s)\leq 0, C_{st}\,(t,s)\leq 0 \tag{57}$$

eşitsizlikleri sağlansın ve bu fonksiyonların hepsi sürekli olsun. Bu takdirde (55) integral denkleminin çözümleri boyunca

$$V(t) = \int_0^t C_2(t,s)\left(\int_s^t x(u)du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_0^t (x(s)ds\right)^2$$

Lyapunov fonksiyonelinin türevi

$$V'(t) \leq -x^2(t) + a^2(t)$$

eşitsizliğini sağalar.

(i) Eğer $a \in L^2[0,\infty)$ ise, bu takdirde $x \in L^2[0,\infty)$ ve $\int_0^t R(t,s)\, a(s)ds \in L^2[0,\infty)$ olur. Ayrıca $V(t)$ sınırlı our.

(ii) B ve K pozitif sabitleri var öyle ki

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t C_s(t,s)ds = B < \infty \text{ ve } \sup_{t\geq 0} C(t,0) = K < \infty$$

sağlanır ise, bu takdirde (55) integral denkleminin çözümleri boyunca

$$\left(\int_0^t R(t,s)a(s)ds\right)^2 = (a(t) - x(t))^2 \leq 2(B+K)V(t) \tag{58}$$

olur. (58) de $a \in L^2$ olması gerekmez. Ancak, eğer, $a \in L^2$ ve sınırlı olur ise, $V(t)$ fonksiyoneli ve x sınırlı olur.

<u>İspat.</u>

$$V(t) = \int_0^t C_2(t,s)\left(\int_s^t x(u)du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_0^t (x(s)ds\right)^2$$

Lyapunov fonksiyonelinin (55) integral denklemi boyunca türevi alındığında

$$V'(\mathrm{t}) = \int_0^t C_{st}(t,s)\left(\int_s^t x(u)du\right)^2 ds + 2x\int_0^t C_s(t,s)\int_s^t x(u)du\, ds$$
$$+C_t(t,0)\left(\int_0^t x(s)ds\right)^2 2xC(t,0)\int_0^t x(s)ds$$

elde edilir. Bu eşitlikteki ikinci ve üçüncü terimlere kısmi integrasyon uygulandığında

$$2x\left[C(t,s)\int_s^t x(u)du\Big|_0^t + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right] = 2x\left[-C(t,0)\int_0^t x(u)du + \int_0^t C(t,s)x(s)ds\right]$$

elde edilir. Buna bağlı olarak (57) deki eşitsizlikler ve mevcut şartlara bağlı olarak

$$V'(t) = \int_0^t C_{st}(t,s)\left(\int_s^t x(u)du\right)^2 ds + C_t(t,0)\left(\int_0^t x(s)ds\right)^2 + 2x[a(t) - x(t)]$$
$$\leq 2xa(t) - 2x^2(t)$$

$\leq a^2(t) - x^2(t)$

sonucuna varılır. Buradan integral alındığında,

$$0 \leq V(t) \leq V(0) + \int_0^t \ a^2(s)ds \ - \ \int_0^t \ x^2(s)ds$$

elde edilir. $a \in L^2[0,\infty)$ ise, o zaman $x \in L^2[0,\infty)$ ve V sınırlı olur. Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$\left(\int_0^t C_s(t,s) \int_s^t x(v)dvds\right)^2 \leq \int_0^t C_s(t,s)ds \int_0^t C_s(t,s)\left(\int_s^t x(v)dv\right)^2 ds$$

$$\leq B\int_0^t C_s(t,s)\left(\int_s^t x(v)dv\right)^2 ds + BC(t,0)\left(\int_0^t x(s)ds\right)^2$$

$$= BV(t)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left(\int_0^t C_s(t,s) \int_s^t x(v)dvds\right)^2 = \left(C\ (t,s) \int_s^t x(v)dv \ \Big|_0^t \ + \int_0^t \ C(t,s)x(s)ds\right)^2$$

$$= \left(-C\ (t,0) \int_0^t x(v)dv \ + \int_0^t \ C(t,s)x(s)ds\right)^2$$

$$= \left(a(t) - x(t) - C\ (t,0) \int_0^t x(v)dv\right)^2$$

$$\geq (1/2\,(a(t) - x(t))^2 - \left(C\ (t,0) \int_0^t x(v)dv\right)^2$$

olduğu açıktır. Buna bağlı olarak da $(1/2\,(x(t) - a(t))^2 \leq (B + K)V(t)$ eşitsizliği yazılabilir. Böylece teoremin ispat tamamlanır. Yani (58) eşitsizliği sağlanır.

Örnek 10 (Burton, 2008). $C(t,s) = e^{-(t-s)}$ ve $a^2(t) = \gamma + \mu(t)$ olarak tanımlansın. Burada γ bilinen pozitif bir sayı ve $\mu \in L^1[0,\infty)$ dir. Bu durumda $\sup_{t\geq 0} \int_0^t \ C_s(t,s)ds = B < \infty$ ve $\sup_{t\geq 0} C(t,0) = K < \infty$ şartları $\int_0^t e^{-(t-s)} \ ds \leq 1 = B$ ve $C(t,0) = e^{-t} \ \leq 1 = K$ şeklinde düzenlenebilir. Öte yandan

$$V(t) \leq \int_0^t e^{-(t-s)}(t-s)\int_s^t[\gamma + \mu(u)]duds + e^{-t}\, t\int_0^t[\gamma + \mu(s)]ds$$

yazılabilir. Buradan $V(t)$ fonksiyonelinin sınırlı olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda

$$\left(\int_0^t R(t,s)a(s)ds\right)^2 = \big(a(t) - x(t)\big)^2 \le 2(B+K)V(t)$$

eşitsizliği dikkate alındığında hem $(x(t) - a(t))^2$ ve hem de $x(t)$ nin sınırlı olduğu sonucuna varılabilir.

<u>Örnek 11</u> (Burton, 2008).

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)x(s)ds - \int_0^t D(t,s)\, x(s)\, ds$$

integral denklemi verilsin.

$$\int_0^\infty |D(u+t,t))|du \;\le \beta < 1$$

şartı sağlansın. Eğer $a \in L^2\,[0,\infty)$ ve Teorem 27 deki şartlar sağlanır ise, bu takdirde x çözümü de $L^2\,[0,\infty)$ uzayının bir elemanı olur. Bu göstermek için

$$V(t) = \int_0^t C_s(t,s)\left(\int_s^t x(u)du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_0^t (x(s)ds\right)^2$$
$$+ \int_0^t \int_{t-s}^\infty |D(u+s,s))|du\;\; |x(s)|^2\, ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. Bu Lyapunov fonksiyonelinin verilen integral denklemi boyunca türevi alınıp, verilen şartlar kullanıldığında *M* pozitif bir sabit olmak üzere

$$V'(t) \le Ma^2(\mathrm{t}) - \beta x^2(t)$$

elde edilir. Bu eşsizliğin 0 dan *t* ye integrali alındığında, istenilen sonuca ulaşılır.

Şimdi ise (55) integral denkleminde $0 \le \mathrm{s} \le \mathrm{t} < \infty$ için

$$\int_{t-s}^\infty |C(u+s,s))|du$$

integralinin sürekli ve α <1 olmak üzere

$$\int_0^\infty |C(u+t,t\,)|du \le \alpha$$

eşitsizliği sağlansın.

<u>Teorem 27</u> (Burton, 2008). $\int_{t-s}^\infty |C(u+s,s)|du$ ve $\int_0^\infty |C(u+t,t\,)|du \le \alpha$ olsun. Ayrıca, $a(t)$ fonksiyonu sürekli ve sınırlı olsun. Bunlara ilaveten, türevlenebilir ve azalan bir $\Phi:\;[0,\infty) \to\;(0,\infty)$ fonksiyonunun var olduğunu $\Phi \in L^1[0,\infty)$ ve

$$\Phi(t-s) \geq \int_{t-s}^{\infty} |C(u+s,s))| du$$

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $x(t)$, (55) integral denkleminin bir çözümü ve

$$V(t) = \int_0^t \int_{t-s}^{\infty} |C(u+s,s))| du \, |x(s)| \, ds$$

ise, bu takdirde $V(t)$ fonksiyoneli sınırlı olur. Bunlara ilave olarak, eğer $K > 0$ pozitif bir sabit ve

$$\int_{t-s}^{\infty} |C(u+s,s)| du \geq K|C(t,s)|$$

ise, bu takdirde $x(t)$ sınırlı ve $\sup_{t\geq 0} \int_0^t |R(t,s)| \, ds < \infty$ olur.

<u>İspat.</u>

$$V(t) \coloneqq \int_0^t \int_{t-s}^{\infty} |C(u+s,s))| du \, |x(s)| \, ds$$

Lyapunov fonksiyoneli verilsin. (55) integral denkleminin çözümleri boyunca bu fonksiyonelin türevi alındığında

$$V'(t) = \int_0^{\infty} |C(u+t,t))| du \, |x(t)| - \int_0^t |C(t,s)x(s)| ds$$

elde edilir. (55) integral denkleminden

$$|x(t)| - |a(t)| \leq \int_0^t |C(t,s)x(s)| ds$$

yazılabilir.

$$\int_0^{\infty} |C(u+t,t)| du \leq \alpha$$

olması nedeni ile

$$V'(t) \leq \alpha|x(t)| + |a(t)| - |x(t)| = -\delta|x(t)| + |a(t)|$$

elde edilir. $\delta > 0$ Buna bağlı olarak da $0 \leq s \leq t < \infty$ için

$$\frac{dV(s)}{ds} \Phi(t-s) \leq -\delta|x(s)|\Phi(t-s) + |a(s)|\Phi(t-s)$$

elde edilir. Böylece bir $t > 0$ sayısının var olduğunu ve

$$V(t) = \max_{0\leq s\leq t} V(s)$$

eşitlğinin sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde

$$\int_0^t \frac{dV(s)}{ds}\Phi(t-s)ds = V(s)\Phi(t-s)\Big|_0^t - \int_0^t V(s)\frac{d}{ds}\Phi(t-s)ds$$

$$= V(t)\Phi(0) - \int_0^t V(s)\frac{d}{ds}\Phi(t-s)ds$$

$$\geq V(t)\Phi(0) - V(t)\int_0^t \frac{d}{ds}\Phi(t-s)ds$$

$$= V(t)\Phi(0) - V(t)\Phi(0) + V(t)\Phi(\mathrm{t})$$

$$= V(t)\Phi(\mathrm{t})$$

elde edilir. Buna bağlı olarak da,

$$\Phi(t-s) \geq \int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s))|du$$

olması nedeni ile, $k > 0$ sabit $\|a\|$ ise a nın supremumu olmak üzere

$$V(t)\Phi(t) \leq -\delta \int_0^t \Phi(t-s)\,|x(s)|ds + \int_0^t |a(s)|\,\Phi(t-s)\,ds$$

$$\leq -\delta\, V(t) + \|a\|k$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe bağlı olarak da

$$V(t)[\,\Phi(\mathrm{t}) + \delta] \leq \|a\|k$$

elde edilir ve böylece $V(t)$ sınırlı olur.

Eğer $\int_{t-s}^{\infty}|C(u+s,s)|du \geq K|C(t,s)|$ şartı sağlanır ise, bu takdirde $V(t) \geq$ K$[\,|x(t)| - |a(t)|\,]$ elde edilir. V Lyapunov fonksiyoneli sınırlı olduğundan, $x(t)$ çözümü de sınırlı olur. Ancak

$$x(t) = a(t) - \int_0^t R(t,s)\,a(s)\,ds$$

çözücü integral denklemi sınırlı ve sürekli, her $a(t)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan, aynı sınırlı ve sürekli $a(t)$fonkisyonu için $\int_0^t R(t,s)\,a(s)\,ds$ integrali sınırlı olur. Perron's teoreminden dolayı kolaylıkla $\sup_{t\geq 0}\int_0^t R(t,s)\,ds < \infty$ sonucuna varılır. Böylece verilen teoremin ispatı tamamlanır.

10.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında belli türden integral ve integro-diferansiyel denklemlere ait bazı temel bilgiler ve niteliksel sonuçlar literatürde mevcut bulunan bazı makale ve kitaplardan alınarak, okuyucuların dikkatine sunulması amaçlanmıştır. Yapılan incelemeler sonucunda, integral ve integro-diferansiyel denklemlerde çözümlerin varlığı ve tekliğinin bir birileri ile bağlantılı olduğu izlenmiştir. Ayrıca, diferansiyel denklemler ile integral ve integro-diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilginin olduğu, bunların bir birlerine uygun şartlar altında dönüştürülebildiği izlenmiştir. İntegral ve integro-diferansiyel denklemlerin uygulamalı bilimlerde geniş uygulama alanlarına sahip olduğu tespit edilmiştir. Dolaysıyla, bu denklemler hakkında çok sayıda çalışmanın mevcut olduğu ve halen yaygın bir şekilde çalışmaların devam ettiği tespit edilmiştir. Ancak, tekil olmayan durumlarda ilgili denklemler ait çok sayıda çalışma olmasına rağmen, tekil integral ve integro-diferansiyel denklemeler hakkında çok az sayıda çalışmanın olduğu tespit edilmiştir. Bunu başlıca nedenlerinin tekil denklemlerde incelemeler sırasında ortaya çıkan zorluklar olarak düşünülmektedir. Sonuç olarak, literatürdeki mevcut çalışmaların kesir basamaklı integral ve integro-diferansiyel denklemler ve stokastik integral ve integro-diferansiyel denklemler için yapılabileceği önerilmektedir (Adomian,1986).

KAYNAKLAR

Adıvar, M., Raffoul, Y. N., 2012. Inequalities and exponential stability and instability in finite delay VIDEs. ***Rend. Circ. Mat. Palermo*** (2) **61** (3):321–330.

Adıvar, M., Raffoul, Y. N., 2016. Qualitative analysis of nonlinear Volterra integral equations on time scales using resolvent and Lyapunov functionals. ***Appl. Math. Comput***. **273**, 258–266.

Agarwal, R. P., Lupulescu, V., O'Regan, D., Younus, A., 2014. Floquet theory for a Volterra integro-dynamicsystem. ***Appl. Anal.*** **93** (9): 2002–2013.

Alahmadi, F., Raffoul, Y. N., Alharbi, S., 2018. Boundedness and stability of solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations. ***Adv. Dyn. Syst. Appl***. **13** (1): 19–31.

Burton, T. A., 1979. Stability theory for Volterra equations. ***J. Differential Equations*** **32** (1): 101–118.

Becker, L. C., 1979. Stability Considerations For Volterra Integro-Differential Equations. ***Thesis (Ph.D.)–Southern Illinois University at Carbondale..*** **82** pp, Pro Quest LLC.

Becker, L. C., 2006. Principal matrix solutions and variation of parameters for a Volterra integro- differential equation and its adjoint. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*** (14): 22 pp. (electronic)

Becker, L. C., 2007. Function bounds for solutions of Volterra equations and exponential asymptotic stability. ***Nonlinear Anal.*** **67** (2): 382–397.Mathematics, 15. Becker, L. C., 2009. Uniformly continuous L^1 solutions of Volterra equations and global asymptotic stability. ***Cubo*** **11** (3):1–24.

Becker, L. C., 2011. Resolvents and solutions of weakly singular linear Volterra integral equations. ***Nonlinear Anal.*** **74**, (5): 1892–1912.

Becker, L. C., 2013. Resolvents and solutions of singular Volterra integral equations with separable kernels. ***Appl. Math. Comput***. **219**, (24): 11265–11277.

Becker, L. C., Burton, T. A., Purnaras, I. K., 2012. Singular integral equations, Liapunov functionals, and resolvents. ***Nonlinear Anal.*** **75**, (7): 3277–3291.

Becker, L. C., Burton, T. A., Krisztin, T., 1988. Floquet theory for a Volterra equation. ***J. London Math. Soc.*** (2) **37**, (1): 141–147.

Brunner, H., 2004. ***Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations***. Cambridge Monographs on Applied and Computationa

Cherruault, Y., Adomian, G., 1994. Decomposition methods: a new proof of convergence. ***Math. Comput. Modelling*** **18** (12): 103–106.

Burton, T. A., 1980. Uniform stabilities for Volterra equations. ***J. Differential Equations*** **36** (1): 40–53.

Burton, T. A., 1982. Construction of Liapunov functionals for Volterra equations. ***J. Math.Anal. Appl.*** **85** (1): 90–105.

Burton, T. A., 1982. Construction of Liapunov functionals for Volterra equations. ***J. Math. Anal. Appl***. **85** (1): 90–105.

Burton, T. A., 1983.Structure of solutions of Volterra equations. ***SIAM Rev.*** **25** (3):343–364.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1983. Stability criteria for Volterra equations. ***Trans. Amer. Math. Soc***. **279** (1): 143–174.

Burton, T. A., 1983. Volterra equations with small kernels. ***J. Integral Equations*** **5** (3): 271–285.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1984. Instability and stability in Volterra equations. Trends in theory and practice of nonlinear differential equations (Arlington, Tex., 1982), 99–104, ***Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 90**, Dekker, New York.

Burton, T. A., 1984. Periodic solutions of nonlinear Volterra equations. ***Funkcial. Ekvac***. **27** (3): 301–317.

Burton, T. A., 1984. Periodic solutions of linear Volterra equations**.** ***Funkcial. Ekvac***. **27** (2): 229–253.

Burton, T. A., 1985.Periodicity in Volterra Equations. Differential and integral equations (Iowa City, Iowa, 1983/Argonne, Ill., 1984), 1–14, Univ. Missouri-Rolla, Rolla, MO. Burton, T. A., Huang, Q. C. , Mahfoud, W. E., 1985. Rate of decay of solutions of Volterra equations. ***Nonlinear Anal.*** **9** (7): 651–663.

Burton, T. A., 1985. Phase spaces and boundedness in Volterra equations. Integro-differential evolution equations and applications (Trento, 1984). ***J. Integral Equations*** **10** (1-3): suppl., 61–72.

Burton, T. A., 1985. ***Periodicity in linear Volterra Equations.*** Trends in the theory and practice of nonlinear analysis (Arlington, Tex., 1984), 79–83, ***North-Holland Math. Stud***., **110**, North-Holland, Amsterdam.

Burton, T. A., 1985. Periodicity and limiting equations in Volterra systems**.** ***Boll. Un. Mat. Ital. C*** (6) **4**(**1**): 31–39.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1985. Stability by decompositions for Volterra equations. ***Tohoku Math. J.*** (2) **37** (4): 489–511.

Burton, T.A. 1993. Boundedness and periodicity in integral and integro-differential equations***. Differential Equations Dynam. Systems*** **1** (2): 161–172.

Burton, T. A., Furumochi, T., 1994. Periodic solutions of Volterra equations and attractivity***. Dynam.Systems Appl***. **3** (4): 583–598.

Burton, T. A., Furumochi, T., 1995. Periodic solutions of a Volterra equation and robustness. ***Nonlinear Anal.*** **25** (11): 1199–1219.

Burton, T. A., Furumochi, T., 1996. Almost periodic solutions of Volterra equations and attractivity. ***J. Math. Anal. Appl***. **198** (2): 581–599.

Burton, T. A., Furumochi, T., 1996. Periodic and asymptotically periodic solutions of Volterra integral equations***. Funkcial. Ekvac***. **39** (1): 87–107.

Burton, T. A., 2005. ***Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations***.Correcte version of the 1985 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY.

Burton, T.A. (2005). ***Volterra integral and differential equations.*** Second edition. Mathematics in Science and Engineering, 202. Elsevier B. V., Amsterdam.

Burton, T. A., 2005. Fixed points, Volterra equations, and Becker's resolvent. ***Acta Math. Hungar***. **108** (3): 261–281.

Burton, T. A., 2006. Integral equations, Volterra equations, and the remarkable resolvent: contractions. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ***. (2): 17 pp.

Burton, T. A., (2008) Integral equations, Lp-forcing, remarkable resolvent***:*** Liapunov functionals. ***Nonlinear Anal***. **68** (1): 35–46.

Burton, T.A. & Haddock, J. R., 2009. Qualitative properties of solutions of integral equations. ***Nonlinear Anal.*** **71** (11): 5712-5723.

Burton, T. A., 2010. A Liapunov functional for a singular integral equation**.** ***Nonlinear Anal.*** **73** (12): 3873–3882.

Burton, T. A., 2011. Fractional differential equations and Lyapunov functionals**.** ***Nonlinear Anal***. **74** (16): 5648–5662.

Burton, T. A., Dwiggins, D. P. , 2010. Resolvents, integral equations, limit sets. ***Math. Bohem***. **135** (4): 337–354.

Burton, T. A., Purnaras, I. K. 2012. Lp-solutions of singular integro-differential equations**.** ***J.Math. Anal. Appl.*** **386** (2): 830–841.

Burton, T. A., Purnaras, I. K., 2013. Singular integro-differential equations with small kernels. J . ***Integral Equations Appl.*** **25** (1): 1–20.

Burton, T. A., Purnaras, I. K. Krasnoselskii's unification, 2014. Volterra's integrodifferential equation, and the method of Aizerman. ***Nonlinear Stud***. **21** (1): 1–19.

Chang, X & Wang, R., 2011. Stability of perturbed n -dimensional Volterra differential equations. ***Nonlinear Anal.*** **74** (5): 1672–1675.

Dung, N.T., 2013. New stability conditions for mixed linear Levin-Nohel integro-differential equations. ***J. Math. Phys.*** **54** (8): 082705, 11 pp.

Dung, N.T. , 2015. On exponential stability of linear Levin-Nohel integro-differential equations. ***J. Math. Phys.*** **56** (2): 1- 10.

Eloe, P., Islam, M., Zhang, Bo., 2000. Uniform asymptotic stability in linear Volterra Integro differential equations with application to delay systems**.** ***Dynam. Systems Appl***. **9** (3): 331–344.

Eloe, P. W., Islam, M. N., Raffoul, Y. N., 2003. Uniform asymptotic stability in nonlinear Volterra discrete systems. Advances in difference equations, IV. ***Comput. Math. Appl***. **45** (6-9): 1033–1039.

Furumochi, T., Matsuoka, S., 1999. Stability and boundedness in Volterra integro-differential equations. ***Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ***. ***Ser. B Math. Sci.,*** **(32**): 25–40.

Graef, J. R., Tunç, C., 2015. Continuability and boundedness of multi-delay functional integro- differential equations of the second order. ***Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat.Ser. A Math. RACSAM*** **109** (1):169–173.

Hara, T., Yoneyama, T. & Itoh, T. ,1989. On the characterization of stability concepts of Volterra integro-differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **142** (2): 558–572.

Hara, T., Yoneyama, T. & Itoh, T. , 1990. Asymptotic stability criteria for nonlinear Volterra integro-differential equations. ***Funkcial. Ekvac.*** **33** (1): 39–57.

Hara, T., Yoneyama, T. & Miyazaki, R., 1992. Volterra integro-differential inequality and Asymptotic criteria. ***Differential Integral Equations*** **5** (1): 201–212.

Huo, H. F., Li, W. T., 2003. Existence of positive periodic solutions of a neutral Lotka-Volterra system with delays. (Chinese) ***Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*** **46** (6): 1199–1210.

Hino, Y. & Murakami, S., 2005. Stability properties of linear Volterra integro- differential Equations in aBanach space. ***Funkcial. Ekvac.*** **48** (3): 367–392.

Islam, M. N. & Raffoul, Y., 2003. Stability properties of linear Volterra Integro-differential Integro-differential equations with nonlinear perturbation. ***Commun. Appl.Ana*** **7** (2-3): 405–416.

Islam, M. N. & Al-Eid, M. M. G., 2004. Boundedness and stability in nonlinear Volterra integro- differential equations***. PanAmer. Math. J.*** **14** (3): 49–63.[44].

Islam, M. N., Raffoul, Y. N., 2005. Stability in linear Volterra integrodifferential equations with nonlinear perturbation. ***J. Integral Equations Appl.*** **17** (3): 259–276.

Islam, M. N., Neugebauer, J . T., 2008. Qualitative properties of nonlinear Volterra integral equations. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ***., (12): 16 pp.

Islam, M. N., Sultana, N, Booth, J ., 2010. Periodic solutions of neutral delay integral equations of advanced type. ***Electron. J. Differential Equations***. (170): 8 pp.

Islam, M. N., 2011.Periodic solutions of Volterra type integral equations with finite delay. ***Commun. Appl. Anal.*** **15** (1): 57–67.

Islam, M. N., Raffoul, Y. N. , 2014. Periodic and asymptotically periodic solutions in coupled nonlinear systems of Volterra integro-differential equations. ***Dynam. Systems Appl.*** **23** (2-3): 235–244.

Islam, M.N. , 2015. Asymptotically stable solutions of a system of nonlinear differential equations. Dyn.Contin***. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*** **22** (4): 303–312.

Islam, M. N. , 2016. Asymptotically periodic solutions of Volterra integral equations**.** ***Electron. J.Differential Equations ,*** Paper (83): 9 pp.

Jerri, A . J ., 1999***. Introduction to Integral Equations with Applications*** .(English summary) Second edition . Wiley, New York, .

Jin, C. & Luo, J., 2009. Stability of an integro-differential equation. ***Comput. Math. Appl.*** **57** (7): 1080–1088.

Lovitt, W.V., 1950. ***Linear Integral Equations,*** Dover: NewYork,.

Lakshmikantham, V. & Rama M. R. M., 1987. Stability in variation for nonlinear integro differential equations. ***Applicable Analysis*** **24** (3): 165–173.

Lakshmikantham, V. & Rama . M . R ., M., 1995. Theory of integro-differential equations. Stability and Control: Theory, ***Methods and Applications,*** **1**. Gordon.

Miller, R.K., 1971. Asymptotic stability properties of linear Volterra integro-differential equations***. J. Differential*** *Equations* (10): 485–506.

Mahfoud, W. E., 1984. Stability theorems for an integro-differential equation. ***Arabian J. Sci. Engrg*. 9** (2): 119–123.

Murakami, S., 1991. Exponential asymptotic stability for scalar linear Volterra equations. ***Differential Integral Equations*** **4** (3): 519–525.

Napoles, V. J. E., 2001. A note on the boundedness of an integro-differential equation. ***Quaest. Math.*** **24** (2): 213–216.

Martinez, C., 2002 . Bounded solutions of a forced nonlinear integro-differential equation. ***Dyn.Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*** **9** (1): 35–42. Maleknejad and Y. M., 2003. Taylor polynomial solution of highorder nonlinear Volterra-Fredholm integro-diff erential equations, ***Appl. Math. Comput.*** **145** 641–653.

Maleknejad, K., Najafi, E., 2011. Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations using the idea of quasilinearization. **Commun**. ***Nonlinear Sci. Numer. Simul.*** **16** (1): 93–100.

Mesmouli, M. B., Ardjouni, A. & Djoudi, A., 2015 . Stability in nonlinear Levin-Nohel integro-ifferential equations. ***Nonlinear Stud.*** **22** (4): 705–718.

Ngoc, P. H. A, Naito, T , Shin, J.S, Murakami, S., 2008. On stability and robust stability of positive linear Volterra equations. SIAM ***J. Control Optim.*** **47** (2): 975–996.

Ngoc, P. H. A. , 2013. On stability of a class of integro-differential equations. ***Taiwanese J. Math.*** **17** (2): 407–425.

Ngoc, P. H. A. , Anh, T., 2018. The New stability criteria for nonlinear Volterra integro-differential equations.***Acta Math. Vietnam.*** **43** (3): 485–501.

Rama, M., Rao, M. & Srinivas, P., 1985. Asymptotic behavior of solutions of Volterra integro- differential equations. ***Proc. Amer. Math. Soc.*** **94** (1): 55–60.

Rama , M. R. M. & Raghavendra, V., 1987. Asymptotic stability properties of Volterra integro- differential equations. ***Nonlinear Anal.*** **11** (4): 475–480.

Raffoul, Y. N., 2007. Construction of Lyapunov functionals in functional differential equations with applications to exponential stability in Volterra integro-differential equations. Aust. ***J. Math. Anal. Appl***. **4** (2): Art. 9, 13 pp.

Rahman, M., 2007. ***Integral equations and their applications***. WIT Press, Southampton.

Raffoul, Y. N., 2009. Exponential analysis of solutions of functional differential equations with unbounded terms. ***Banach J. Math. Anal.*** **3** (2): 28–41.

Raffoul, Y., 2013. Exponential stability and instability in finite delay nonlinear Volterra integro- differential equations. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser***. A Math. Anal.*** **20** (1): 95–106.

Raffoul, Y., 2013. Exponential stability and instability in finite delay nonlinear Volterra integro-differential equations. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. ***A Math. Anal***. **20** (1): 95–106.

Raffoul, Y. & Ünal, M. , 2014. Stability in nonlinear delay Volterra integro-differential systems. ***J. Nonlinear Sci. Appl.*** **7** (6): 422–428.

Raffoul, Y., Yankson, E., 2014. Existence of bounded solutions for almost linear Volterra difference equations using fixed point theory and Lyapunov functionals**. *Nonlinear Stud***. **21** (4): 663–674.

Raffoul, Y. & Ren, D. Y., Raffoul, D. R., 2016.Theorems on boundedness of solutions to stochastic delay differential equations. ***Electron. J. Differential Equations , Paper*** (194): 14 pp.

Raffoul, Y. & Sanbo, A. Y., Raffoul, A.S., 2016. Boundedness and stability results for the finite delay nonlinear Volterra discrete system. ***Nonlinear Stud.*** **23** (1): 87–94.

Raffoul, Y., Rai, H., 2016. Uniform stability in nonlinear infinite delay Volterra integro-differential equations using Lyapunov functionals. ***Nonauton. Dyn. Syst***. **3** (1): 14–23.

Raffoul, Y., 2018. Analysis of periodic and asymptotically periodic solutions in nonlinear coupled Volterra integro-differential systems. ***Turkish J. Math***. **42** (1): 108–120.

Singh, V. K., Pandey, R. K., Singh, O. P., 2009. New stable numerical solutions of singular Integral equations of Abel type by using normalized Bernstein polynomials. ***(Ruse)*** **3** (5-8): 241–255.

Tricomi, F. G. , 1957. Integral equations. Pure and Applied Mathematics. Vol. V Interscience Publishers, Inc., New York; *Interscience Publishers Ltd*., London viii+**238** pp.

Tran .T. K., Vu, N . P ., 2000. Lyapunov stability of nonlinear time-varying differential quations. ***Acta Math. Vietnam.*** **25** (2): 231–249.

Talpalaru, P. , 2000. Stability criteria for Volterra integro-differential equations. An. Ştiinţ. Univ. Al. ***I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)*** **46** (2): 349–358 (2001).

Tunç, C., 2016a. A note on the qualitative behaviors of non-linear Volterra integro-differential equation***. J. Egyptian Math. Soc*. 24** (2): 187–192.

Tunç, C., 2016b. New stability and boundedness results to Volterra integro-differential equations with delay***. J. Egyptian Math. Soc.*** **24** (2): 210–213.

Tunç, C., 2016b . Properties of solutions to Volterra integro-differential equations with delay. ***Appl. Math. Inf. Sci.*** **10** (5): 1775–1780.

Tunç, C., 2017a. Qualitative properties in nonlinear Volterra integro-differential equations with delay. ***Journal of Taibah University for Science.*** (11): 309–314.

Tunç, C., 2017b. On qualitative properties in Volterra integro-differential equations. ***AIP Proceedings*** **1798** (1): Article number 020164, 9pp.

Tunç, C., 2017c. Stability and boundedness in Volterra-integro differential equations with delays***. Dynam Systems Appl*** **26** (1): 121-130.

Tran, T. A., Ngoc, P. H. A., 2017.New stability criteria for linear Volterra time-varying integro-differential equations. ***Taiwanese J. Math***. **21** (4): 841–863.

Vanualailai, J., 2002. Some stability and boundedness criteria for a class of Volterra integro-differential systems. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,*** (12): 20 pp.

Vanualailai, J. & Nakagiri, S., 2003. Stability of a system of Volterra integro-differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **281** (2): 602–619.

Wang, Z. C., Li, Z.X. & Wu, J.H., 1985. Stability properties of solutions of linear Volterra integro-differential equations. ***Tohoku Math. J.*** **37** (4): 455–462.

Wang, Q., 2000. The stability of a class of functional differential equations with infinite delays. ***Ann. Differential Equations*** **16** (1): 89–97.

Wang, T., 2000.Wazewski's inequality in a linear Volterra integrodifferential equation. Volterra equations and applications (Arlington, TX, 1996), 483–492, ***Stability Control Theory Methods Appl.,*** **10**, Gordon and Breach, Amsterdam,

Wang, T., 2009. Inequalities of solutions of Volterra integral and differential equations. Electron***. J. Qual. Theory Differ. Equ., Special Edition I***, (28): 10 pp.

Wu, J., H., 1988. Globally stable periodic solutions of linear neutral Volterra integro-differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **130** (2):474–483.

Wazwaz, A. M., 1997. Equality of partial solutions in the decomposition method for partial differential Equations .***Int. J. Comput. Math.*****65** (3-4): 293308.and Breach Science Publishers, Lausanne.

Wazwaz, A. M. , 2011. Linear and nonlinear integral equations. Methods and applications. Higher Education Press, ***Beijing; Springer, Heidelberg***.

Wang, T., 2013. Lower and upper bounds of solutions of functional differential equations. ***Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*** **20** (1): 131–141.

Wazwaz, A. M., 2015. ***A first course in integral equations***. Second edition. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

Xu., D., 1997. Asymptotic behavior of Volterra integrodifferential equations. ***Acta Math. Appl.*** Sinica (English Ser.) **13** (1):107–110.

Zhang, Z. D., 1990. Asymptotic stability of Volterra integro-differential equations. ***J. Harbin Inst. Tech.,*** (4): 11–19.

Zhang, B., 2005. Necessary and sufficient conditions for stability in Volterra equations of nonconvolution type.***Dynam. Systems Appl.*** **14** (3-4): 525–549.

ÖZ GEÇMİŞ

Bayan Zaitona Hashim KAREEM, 10 Haziran 1989 da Erbil – Iraq’da doğdu. İlk ve Ortaöğretim Eğitimini Erbil’de tamamladı. Daha sonra, 2017 yılında Erbil’deki, Selahhatin Üniversitesi Matematik Bölümün‘de lisans eğitimini tamamladı. 2012 -2016 yıllarında Duhok Milli Eğitim Müdürlüğü’ne bağlı bir Ortaokulda öğretmenlik yaptı. Şubat- 2016’da Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Bölümün’de Yüksek Lisans eğitimine başladı.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 20/08/2019

Tez Başlığı: **İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN BAZI NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI**

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 89 sayfalık kısmına ilişkin, 19/08/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin.intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 20(yirmi) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza
19.08.2019

Adı Soyadı: Zaitona Hashim Kareem

Öğrenci No:159102190

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: Y. Lisans ☒ Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR
Prof. Dr. Cemil TUNÇ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

Prof. Dr. ... ŞENSOY
Enstitü Müdürü